# 生成函数(母函数)入门详解

母函数，又称生成函数，是ACM竞赛中经常使用的一种解题**[算法](http://lib.csdn.net/base/datastructure" \o "算法与数据结构知识库" \t "https://blog.csdn.net/howardemily/article/details/_blank)**，常用来解决组合方面的题目。

在数学中，某个序列的母函数(Generating function，又称生成函数)是一种形式幂级数，其每一项的系数可以提供

关于这个序列的信息。使用母函数解决问题的方法称为母函数方法。

母函数可分为很多种，包括[普通母函数](http://www.wutianqi.com/?p=596" \t "https://blog.csdn.net/howardemily/article/details/_blank)、[指数母函数](http://www.wutianqi.com/?p=2644" \t "https://blog.csdn.net/howardemily/article/details/_blank)、L级数、贝尔级数和狄利克雷级数。对每个序列都可以写出以上每个类型的一个母函数。构造母函数的目的一般是为了解决某个特定的问题，因此选用何种母函数视乎序列本身的

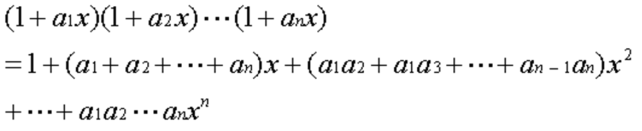
特性和问题的类型。

这里先给出两句话

1.“把组合问题的加法法则和幂级数的乘幂对应起来”

2.“母函数的思想很简单 — 就是把离散数列和幂级数一 一对应起来，把离散数列间的相互结合关系对应成为幂级数间的运算关系，最后由幂级数形式来确定离散数列的构造“

我们首先来看下这个多项式乘法：



母函数图(1)

由此可以看出:

1.x的系数是a1,a2,…an 的单个组合的全体。

2. x^2的系数是a1,a2,…a2的两个组合的全体。

………

n. x^n的系数是a1,a2,….an的n个组合的全体（只有1个）。

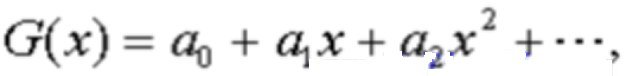
进一步得到：



母函数图(2)

母函数的定义

对于序列a0，a1，a2，…构造一函数：



母函数图(3)

称函数G(x)是序列a0，a1，a2，…的母函数。

第一种：

有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，能称出哪几种重量？每种重量各有几种可能方案？

考虑用母函数来解决这个问题：

我们假设x表示砝码，x的指数表示砝码的重量，这样：

1个1克的砝码可以用函数1+1\*x^1表示，

1个2克的砝码可以用函数1+1\*x^2表示，

1个3克的砝码可以用函数1+1\*x^3表示，

1个4克的砝码可以用函数1+1\*x^4表示，

上面这四个式子懂吗？

我们拿1+x^2来说，前面已经说过，x表示砝码，x的指数表示砝码的重量！初始状态时，这里就是一个质量为2的砝码。

那么前面的1表示什么？按照上面的理解，1其实应该写为：1\*x^0,即1代表重量为2的砝码数量为0个。

所以这里1+1\*x^2 = 1\*x^0 + 1\*x^2，即表示2克的砝码有两种状态，不取或取，不取则为1\*x^0，取则为1\*x^2

不知道大家理解没，我们这里结合前面那句话：

“把组合问题的加法法则和幂级数的乘幂对应起来“

接着讨论上面的1+x^2，这里x前面的系数有什么意义？

这里的系数表示状态数(方案数)

1+x^2，也就是1\*x^0 + 1\*x^2，也就是上面说的不取2克砝码，此时有1种状态；或者取2克砝码，此时也有1种状态。(分析！)

所以，前面说的那句话的意义大家可以理解了吧？

几种砝码的组合可以称重的情况，可以用以上几个函数的乘积表示：

(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)

=(1+x+x^2+x^4)(1+x^3+^4+x^7)

=1 + x + x^2 + 2\*x^3 + 2\*x^4 + 2\*x^5 + 2\*x^6 + 2\*x^7 + x^8 + x^9 + x^10

从上面的函数知道：可称出从1克到10克，系数便是方案数。（！！！经典！！！）

例如右端有2^x^5 项，即称出5克的方案有2种：5=3+2=4+1；同样，6=1+2+3=4+2；10=1+2+3+4。

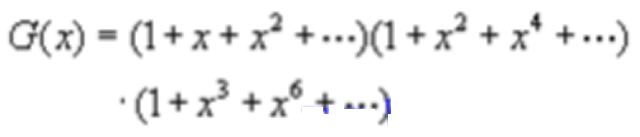
故称出6克的方案数有2种，称出10克的方案数有1种 。

接着上面，接下来是第二种情况：

第二种：

求用1分、2分、3分的邮票贴出不同数值的方案数：

大家把这种情况和第一种比较有何区别？第一种每种是一个，而这里每种是无限的。



母函数图(4)

以展开后的x^4为例，其系数为4，即4拆分成1、2、3之和的拆分方案数为4；

即 ：4=1+1+1+1=1+1+2=1+3=2+2

母函数通常解决类似如下的问题：

给5张1元，4张2元，3张5元，要得到15元，有多少种组合？

某些时候会规定至少使用3张1元、1张2元、0张5元。

某些时候会规定有无数张1元、2元、5元。

……

****解题过程****

解题时，首先要写出表达式，通常是多项的乘积，每项由多个x^y组成。如(1+x+x^2)(1+x^4+x^8)(x^5+x^10+x^15)。

通用表达式为

(x^(v[0]\*n1[0])+x^(v[0]\*(n1[0]+1))+x^(v[0]\*(n1[0]+2))+...+x^(v[0]\*n2[0]))  
(x^(v[1]\*n1[1])+x^(v[1]\*(n1[1]+1))+x^(v[1]\*(n1[1]+2))+...+x^(v[1]\*n2[1]))  
...  
(x^(v[K]\*n1[K])+x^(v[K]\*(n1[K]+1))+x^(v[K]\*(n1[K]+2))+...+x^(v[K]\*n2[K]))

K对应具体问题中物品的种类数。

v[i]表示该乘积表达式第i个因子的权重，对应于具体问题的每个物品的价值或者权重。

n1[i]表示该乘积表达式第i个因子的起始系数，对应于具体问题中的每个物品的最少个数，即最少要取多少个。

n2[i]表示该乘积表达式第i个因子的终止系数，对应于具体问题中的每个物品的最多个数，即最多要取多少个。

对于表达式(1+x+x^2)(x^8+x^10)(x^5+x^10+x^15+x^20)，v[3]={1,2,5}，n1[3]={0,4,1}，n2[3]={2,5,4}。

解题的关键是要确定v、n1、n2数组的值。

通常n1都为0，但有时候不是这样。

n2有时候是无限大。

通用模板:

#include <iostream>

using namespace std;

*// Author: Tanky Woo*

*// www.wutianqi.com*

const int \_max = 10001;

*// c1是保存各项质量砝码可以组合的数目*

*// c2是中间量，保存每一次的情况*

int c1[\_max], c2[\_max];

int main()

{ *//int n,i,j,k;*

int nNum; *//*

int i, j, k;

while(cin >> nNum) {

for(i=0; i<=nNum; ++i){*// ---- ①*

c1[i] = 1;

c2[i] = 0;

}

for(i=2; i<=nNum; ++i){ *// ----- ②*

for(j=0; j<=nNum; ++j) *// ----- ③*

for(k=0; k+j<=nNum; k+=i) *// ---- ④*

{

c2[j+k] += c1[j];

}

for(j=0; j<=nNum; ++j) *// ---- ⑤*

{

c1[j] = c2[j];

c2[j] = 0;

}

}

cout << c1[nNum] << endl;

}

return 0;

}

我们来解释下上面标志的各个地方：(\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*！！！重点！！！\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*)

①  、首先对c1初始化，由第一个表达式(1+x+x^2+..x^n)初始化，把质量从0到n的所有砝码都初始化为1.

②  、 i从2到n遍历，这里i就是指第i个表达式，上面给出的第二种母函数关系式里，每一个括号括起来的就是一个表达式。

③、j 从0到n遍历，这里j就是(前面几个表达式累乘的表达式)里第j个变量，如(1+x)(1+x^2)(1+x^3)，j先指示的是1和x的系数，i=2执行完之后变为  
  
（1+x+x^2+x^3）(1+x^3)，这时候j应该指示的是合并后的第一个括号的四个变量的系数。

④ 、 k表示的是第j个指数，所以k每次增i（因为第i个表达式的增量是i）。

⑤  、把c2的值赋给c1,而把c2初始化为0，因为c2每次是从一个表达式中开始的。