**3.2**容斥原理

将3.1节讨论的原理进一步推广，总结成一般性规律，就得到定理321所描述的容斥原理。

定理3.2.1 设S是有限集合，••心是同集合S有关的m个性质，设4是S中具有性质R的元素

构成的集合(1</<w).元是S中不具有性质4的元素构成的集合(l</<w).则S中不具有性质

*••已*的元素个数为

|4nZ-nT

=|s|-£|4|+ E |4習|

«=> {1,2,…”iE 2 }

(32】)

-£ |4財財+… (L2.E2 }

+(-iy区n有刃

证明 可以利用等式(3.1.1),通过对m作归纳进行证明。下面通过其组合意义来证明。

等式(3.2.1)的左瑞表示的是S中不具有性质*P'R - Pm*的元素的个数。下面我们来证明：对于S中每 个元素X,若x不具有性质*R4…已，*则对等式(321)的右端页献1：否则，若x具有某个性质 ^(l<z</w).则对等式(321)的右端页献0・从而证(321)式。

任给*xcS,*则

(1)若X不具有性质即*xeAt,xeA2,—xeAm.*则X在集合S中，但不在(3.2.1)式右

端的任一其他集合中。所以，x对(3.2J)式右端的贡献为



(2)若x恰具有*P'R-Pm*中的〃(77 >1)个性质琮丛…己.，则x对|S|的貢献为

因x恰具有n个性质 所以x恰属于集合&,&,•••&，共n个。于是，x对£|4|的页献

为



£|4D4|的页献为(；)：……:同理, x对£|《n4：n・"ri4.|的贡献为

。而当*k> n*时,

所以x对(3.2.1)式右端的貢献为

七)-")七)七)…(-咽 =(1--凡 =0

(3.2.1)式的右端是集合S中不具有性质*P\,PuPm*的元素的个数。证毕。

综上所述.

则(3.2.1)式变成

再n石1可

=|s|-Q4|+|4|+|4|) +[4。力2|+|脂4|+|4口4|)-|40瓦。4|

上面等式的右端共有

1+3+3+1=8

项。

若777 = 4,则(3.2.1)式变成

|7nTnTn7]

=1中。4|+| 瓦 |+冈+|4|) +。4仆4|+|404|+|\* na|) +0瓦 |+14 na |+n 4|) -|脂4財|

= 1000-(200 + 166 + 125)

+ (33 + 25 + 41)-8

= 600

例2求由*a,b,c,d*四个字符构成的n位符号串中，*a,b,c,d*至少出现一次的符号串的数目。

解 设4，《2,4,4分别为不岀现*a,b,c,d*的n位符号串的集合。由于n位符号串的每一位都可取 *a,b,c,d*四个符号中的任一个，所以共有4"个。其中，不出现。的符号串的每一位都可取*b,c,d*中的任 一个，共有3"个。类似地，有 冈=3”。= 1,2,3,4)

|4口4| = 2”(心”,丿=1,2,3,4)

0 *r\A.r\Ak\ = \* (/,/A-fflOD “〃盘=1,2,3,4)

|TnTnTnT|=o

而*a,b,c,d*至少出现一次的符号串集合即为TnTnTnz,于是

|7nTnTA7| =4"-。4|+| 瓦 |+|4|+风|) +侗財|+|4財|+|4財|)

+0—l+l—n—i+i—rui)

+|4財財財|

=4"-4-3"+6-2"-4

例3欧拉函数0(〃)表示小于n且与n互素的整数的个数。求伊(〃)。

解 将n分解成素因子的乗积形式：〃 = p：p?・・・p：

设4为不大于n且为p,•的倍数的自然数的集合(l<z<^).则：|4| =三(，=1,2,・・可)

*Pi*

因P,.与P,互素(/\*;).所以P,.与P,的最小公倍数*为PEj,*所以

|4服/|=亠。刁;i"=LZ・w)

*PiPj*

……»小于n并与n互素的自然数是集合4 = ｛1,2,•••,〃｝中那些不属任何一个集合4 = 0 = 1,2,…,g｝的

数，由容斥原理知

^(M)=|j AJ A-AJ I

=〃-力41+ £ |4財」

f=! I女方列

-£ |4財財+…  
+(-i)\*run"・n4|  
=〃-涇+ Z —- Z

i=l *Pi* 心5心 *P.Pj* 心刃淘 *PiPjPk*

+ ... + (-1)9—*C—*

*PWPq*



上面的和式正好是下列乗枳的展开式：伊(〃)=〃 1

*P1)*

*Pq*

(3.2.3)

欧拉函数常用于数论中。例如，若n = 12 = 22-3.则

冰12)=12(1-9(司=4

小于12并与12互素的正整数为I, 5. 7和II

例4若图G有n个顶点，且不含有完全k子图(^>2),则它的顶点的次数d(x)满足不等式

其中，X为图G的顶点集。

证明设

(k-2)〃 = p(Sl)+r(0<r<k-2)

若不等式(3.2.3)不成立，则对任意的xeX,均有d(x)2p + l。

在图G中任取一个顶点X, g X .用4和相应的集合由容斥原理得到

|40同|=|4|+|瓦|-|4仆4|

*>2p+2-n>0*

这是因为集合也和4中的每一个至少包含p + 1个元素，而*At{jA2*中至多只有n个元素(G中全部顶点)

°再任取一个顶点邑《40瓦，同上，由容斥原理可得

|4D4ri4|2 3(p+i)-2〃>o

等等。这样，我们可由归纳法得到对于x4\_,gQJ-.取G中与叫\_|相邻的顶点集有

i-1

CH

/=!

7=1

i-2

t-2

=1 瓦-J+D4 -4tUP)4

/='

/=!

2 (p + l)+(X -2)(〃 +1)- (X - 3)〃-〃

= (\*T)(P + 1)-(S2)〃

*= k-\-r>0*

因此，至少有一个顶点由4的定义知x„x2,--x4之间相互相邻，所以顶点集合

(xpX,,- ^｝构成的导出子图是图G的完全k子图，这与題设矛盾。故不等式(323)成立。

利用定理3.2.1和推论321,我们可以算出S中不具有性质*P2 -Pm*的元素个数和S中具有

*PvP2 -Pm*中某个性质的元素个数。下面我们将其推广到更一般的情形。

设S是一有限集合，*P=｛P.,P2-P„｝*是S上的性质集合。现在的问题是要求出集合S中恰好具有P中

r个性质的元素个数AT(r)(l *<, <m)o*

现用N(与，七示S中具有性质乌,％，…乌的元素个数，规定w(O)=|S|,令

峨)=£ N(%[,...£.)

0夕W5

若S中某元素X恰好具有P中Jt + r(r>0)个性质鸟则从4,中取出k个性质的



因而x在w(A)中计算了

次。而对于SK

具有P中少于k个性质的元素，则

不计算在内。

例如，在本节的例1中，有

N(\* )=200,

N(R )=166,

N(R)=125,

N(")=33,

N0』)=25,

N(R/)=41,

N("R)=8,

于是

M-(0)=1000,

»v(l)=200 + 166 + 125 = 491, w(2)=33 + 25 + 41=99, m'(3)=8.

在w（2）中，对具有3个性质的元素，在N（\*,R）,N（£/）和中各计算了一次，共

3次。例如，120能被5, 6, 8整除，所以，120応4。瓦,120&404，1206总即120在

w（2）中共计算了 3次。

|  |  |
| --- | --- |
| 定理3.2.2 | 设集合S中具有性质集合P= {£,旦…心}恰好r个性质的元素个数为*NQ ）,*则  \（厂）=吋）\_,：1 卜,（〃 + 1）+, + 2 卜（2）  ［〃 J ［〃丿 （3.2.4）  + （-l）"~r *m w（ni）.* |

证明 设x是集合S的一个元素，则

（1）若x具有少于r个性质，则x对M（r）,H（r + l）,-w（zw）的貢献均为0,从而对（3.2.4）式右端的

页献为0。

（2）若x恰好具有r个性质，则x对w（尸）的页献为1,而对H（r + l）,w（r + 2）,-M（w）的页献均为

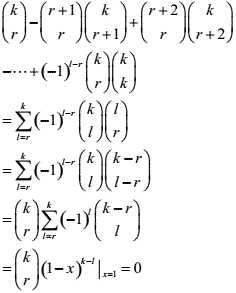
0.从而对（3.2.4）式右端的页献为1»

（3）若x恰好具有*k（k>r）*个性质，则它对w（厂）的貢献为

对w（r + l）的贡献为（〃：［），•••，对

w（A）的页献为

当*k<l<m*时，它对w（/）的页献为0。从而，它对（3.2.4）式右端的页献为



综上所述，（3.2.4）式的右端是S中恰好具有r个性质的元素个数。

在例】中，有

N （0 ） = w （0 ） - iv （1） + W （2 ） - *w* （3 ）  
= 600

它是S中不能被5, 6. 8整除的整数个数，这正是容斥原理所反映的事实。

N(l)=w(l)\_

= 317

（\*'（2）七）心

它是S中只能被5, 6. 8之一整除的整数个数。

N（2）=w（2）-（小,⑶

=75

它是S中只能被5, 6, 8中的两个整数的整数个数。

N（3）=w（3）=8

由此可见了，定理322是定理321的推广。

例5 某学校有12位教师，已知教数学课的教师有8位，教物理课的教师有6位，教化学课的教师有5 位。其中，有5位教师既教数学又教物理，有4位教师兼教数学和化学，兼教物理和化学的有3位教师， 还有3位教师兼教这三门课。试问：

（1） 教数、理、化以外的课的教师有儿位？

（2） 只教数、理、化中一门课的教师有儿位？

（3） 正好教数、理、化中两门课的教师有儿位？ 解 令12位教师中教数学课的教师属于集合4,教物理课的教师属于集合必，教化学的教师属于集合

4,则有

|4| = 8,

|—| = 6,

区I =金

l4n%|=5,

|4PI4|=4,

I 瓦 r)4|=3,  
沽 040/1=3,

1. 不教数学、物理、化学课的教师数目为

|7nTnT|=i2-(|4|+W+H|)

+。4门4|+|4財|)

+区 r)4|-|41瓦 r)4|

= 12-(8 + 6 + 5)+(5 + 4 + 3)-3

=2

1. 只教数、理、化中一门课的教师数目为

N(l)=岡+ |4| + 冈

-2(|4財|+|4財+| 瓦財|)

+3|耳0瓦口4|

=(8 + 6 + 5)-2(5 + 4 + 3)+3x3

=4.

1. 正好教数、理、化中两门课的教师数目为

y(2)=(|4nA|+|4A^|+bn^|)

-3|j,riAn^|

=5+4+3-3x3

=3.

33容斥原理的应用：

3.3.1具有有限重复数的多重集合的r组合数

在第2章里，我们介绍了 n元集合｛x,,x2 - x„｝的r组合数为(；，多重集合

M = (x-x,,a>.x2,-,co-x„｝的「组合数为(〃+；一］。 在本节中，我们将应用容斥原理来计算重复数为

任意给定的正整数的多重集合的r组合数。

下面通过一下例子来看看怎样用容斥原理解决上述问题，然而例子中所用的方法却适用于一般的情况。

例1求S = ｛3・a,4，,5・c｝的10组合数。

解 令S\* = {oo・a,oo0,oo.c},则；的】0组合数为:

设集合A是；的10组合全体，则p| = 66.现在要求在10組合中0的个数小于等于3, b的个数小于 等于4, c的个数小于等于5的组合数。定义性质集合

66

10 + 3-1

10

*P={P^P2,Pi}*

其中：4 :10组合中的。的个数大于等于4： 1： 10组合中b的个数大于等于5： 4：10组合中c的个数

大于等于6。将满足性质£的10组合体记为4（1<£<3）。那么，4的元素可以看作是由；的

10-4 = 6组合再拼上4个a构成的，所以

1瓦1 =

卩 0-5 + 3-1)  
I 10-5 丿

类似地，有



的4| =

10-4-6+3-1

10-4-6

|ari4|=o,

|4口卄4|=0,

而。的个数小于等于3. b的个数小于等于4. c的个数小于等于5的10组合全体为

|TnTnT|=H|-(]4|+hklAl)

+。4，，2|+|4,4|) +区 n4|-|41瓦 r)4| = 66-(28 + 214-15)+(3 + 1 + 0)-0 =6

3.3.2错揮问题：集合｛1,2…〃｝的一个错排是该集合的一个満足条件：*i.^j(\<j<n)*

的全排列。即集合｛1,2…〃｝的一个没有一个数字在它的fl然顺序位置上的金排列。

〃 =1时，｛1｝没有错捶。

*n = 2*时，｛1,2｝有唯一一个错揮，为21。

〃 =3时｛1,2,3｝有两个错捶，分别为231和312

〃 =4时，｛1,2,3,4｝共有下面所列的9个错排：

2143,3142,4123,2341,3412,

4321,2413,3421,4312

用。“记｛1,2• • • 〃｝的金部错擇个数，则D,=0,D, = l,D = 2,O’ = 9

定理3.3.1对任意正整数n.有：2=〃!(1\_ = + 土-§ +・..+ (-1)"勺

证明 令S是｛1,2…〃｝的全排的全体，则|s| = 〃!。定义S上的性质集合：p=｛£，乌…己｝

其中，。表示排列中i在左数第i个位置上，即在其II然顺序的位置上令4为S中满足性质

与的全排列的全体。

因*A,*中的每一个全排列形如：兀山…九

而，…弗弗…九是｛l,2, ・,Jl,i + l,.. /｝的金排列，所以有：|4| = (〃-1)!(1<H〃)

同理，有：|4A^| = 0»-2)!(l</\**j<n)*

一般地，有：|4n&n・・・ri4.|=(〃-A)!

其中，〈〃且4,4,…4互不相等。

而*。“为S*中不满足性质的元素个数，由容斥原理，有

以::…可

2；）奸於⑶“）!

原创力文档仆

max.bookl 1 &照血丄丄…+（.］】丄）

质览与源文档一我下载高清戒K印1! 2! 3! '丿〃3!丿 我们还可以从另外一个角度来计算设： 是&久…〃｝的一个错排，我们将｛1,2…〃｝的所有错排按照4的取值分成〃-1类，记4为4 =丿的错排

的全体0 = 2,3,…，砂,则显然有：|瓦| =冈=...|4|

今爲|：：《，则：D =（H-1）J

（0 *"=1，*则4,或是｛3,4…〃｝的-个错排，稀难代亜T载高清就印

（ii）爲：弓/1'则4，檢2“相当于｛1,3…〃｝的一个错排，所以|B2| = D„\_,o

0=（〃-1）（。1 + 以\_2）

并且有递推关系:

g推关系映銭切I力文档 max.bopkt18.co 夷蜡源文档繼

（〃-1）以-2）

= (-l)"-2(D2-2D\_)

=(-| 广

因此，

*D“=〃m*

顼”g"+(原创力文档 max.bopkl 18.com +..•+(-1 戸 下

…(顼省 再次得到前面用容斥原理推导出的0,公式。

在第4章中，我们还将专门讨论递推关系在组合问题中的应用。

3.3.3有禁止模式的排列问题

在3.3.2小节中我们讨论了禁止位置的排列问题，即i不在第i个位置上的排列问题。本小节我们来讨论 有禁止模式的排列问题.在此类问题中，要讨论某些元素之间的某种相对位置不能出现的一些排列。先 看下面的问题：

设某班有8位学生排成一队出去散步，第二夭再列队时，同学们都不希望他前面的同学与前一夭的相同， 问有多少种排法？

一种可能的方法就是将这8位学生排的队掉个头，也就是让最后一名学生变为第一名，倒数第二名变为 第二名，如此等等，但这只是很多种可能中的一种。若我们分别用1, 2.……8代表第一天列队时的第 一、第二、……第八位同学，则第一夭的排队顺序为12345678,如上掉头后的排列为87654321。我们的 问題是求第二次列队时不出现12, 23,……78这些模式的排列的个数。例如，31542876就是一个符合要 求的捶列，而25834761则不是，因为其中出现了 34。

用Q表示｛1，2,…〃｝的不出现12, 23,……,(〃-1)〃这些模式的全擂列的个数，并规定0 = 1

*n = 2*时，21是唯一的一个满足要求的排列，0 = 1

〃 =3时，213. 321. 132是3个可能的排列，0=3

〃 =4时，有如下11种可能的排列，ft =11

4132,3142,2143,1324,4213,3214,

2413,1432,4321,3241,2431

定理3.3.2对任意正整数n,有

0=紀-(〃］

"•+(-忧詐

证明 令S为｛1,2,…〃｝的所有全排列，则|S| = 〃!。定义性质集合

「=｛£，%••%｝

其中，£表示全排列中出现/(/ + !)模式设4为S中满足性质月的全排列在全体

(1<Z<H-1),则4中的每一个排列都可看作〃T元集合｛L2,+ •••,〃｝的一个金排列，所以

|4| = (n-l)!(/ = l,2,-n-l)

同理

|4n4|=（〃-2）!（ic 丿1）

一般地，有

"&n...n&|=（i）!

其中4,4,…4互不相等，且…4〈〃-1

而0为S中不满足性质4,4，・・・己\_|的元素个数，由容斥原理，有

a=|7nTn-<|

=|s|-£|4|+ E \a^a,\

r=! *IK g-l*

—•+（-ir,|^in-4ln-n<|

从*Dn*和a的显式表达式可以看出：

*Qn=D”+Dz*

例2多重集合*M = {4 x,3-y,2 z}*的全排列中不出现xr”,炉,zz模式的排列有多少种？

解 令S为M的全捶列全体，则有

定义性质集合

P={ER}

其中：

/；：金排列中出现心工丫模式：

女：金排列中出现所模式：

4：全排列中出现ZZ模式

用4分别表示S中具有性质£的金排列全体（1</<3）O 4中的全排列出现模式AX。，我们将xm看

作一个字符，则4中的全捶列就是多重集合{g,3・y,2・z}的金排列，所以

团=丄

1 " 1!3!2!

同理，有

1 31 4!3!1!

41

而引=而

动4|=爲

蜀侦4| =烏

由容斥原理知.满足条件的排列个数为

=|s|-Q4|+团+团)

+(R n《|+k ruj+|wn 招-区 ru： ruj)

9! ( 6! 7! 8!)

\_4!3!2!\_(3!2! + 4!2!+4!3!7

f4! 5! 6!)由  
+ —+ —+ — 一3!

(2! 3! 4!丿

= 871

n对夫妇参加宴会围桌就座，要坟男女相间并且每对夫妇两人不得相邻，问有多

例3 （menage问题）

少种就座方式？

解 易知〃＜3时这样的坐法是不存在的，今设*n＞3o*设想先让n位女士围桌入座，其方法有（〃-1）!种。

选定n位女士的一种入座方法，从某一位开始对这n位女士按环形顺序编号为1, 2,……，n,并将编号

的i的女士的丈夫也编号为汀第i位女士与第，+ 1位女士之间的位置称为第i号位置（1＜，1）,第 n位女士与第1位女士之间的位置称为n。那么，第1位男士除第n号和第1位位置外，可以在其他 *n-2*个座位中的任何一个就座：第i位男士除了第1-1号和第i号位置外，可以在其他*n-2*个座位中的 任何一个就座（2 ＜/＜/;）» 假定n位男士已金部入座，在第i号位置就座的男士编号为《（1 ＜，＜〃），则％,外,…％为｛1,2…〃｝的 一个全排列。根据題意.q.必须满足因而，符合题意的坐法对应的 排列％角，…％应当使得

1. 2 …〃一1 *n*
2. *3* …*n* 1 (3.3.1)

*a\ ai* …*an-\ an*

中的任一列都无相同的数。我们称《,。2，・一。”为｛1，2・・・〃｝的一个二重错排。｛1,2…〃｝的二重错擇的个

数称为menage数。记为U”，求manage数的问题称为既化的menage问题。这样，原问题就变成求

menage*数的U“,*而围桌入座的方法数等于(〃-1)!U”

为求U.,定义n个性质如下： *Pj：a「=i*或，+1 (1 ” -1)

*Pn'an=* 〃或 1

则U”是不具有性质 的全排列的数目，由定理3.2.2知

*U n* = w(0)-w(l)+w(2) + (—1)" w(//)

令S是｛1,2-/?)的全排列全体，由w°)的定义，有：w(O)=|S| = 〃！

而：w(1)=£n0)

1=1

我们先求*N(P,)(i "i* = 〃)设排列：％…扇丿如…九

满足性质£，则•或i + l.而：*ji…危品…丄*

为集合｛1,2…〃｝-｛/｝的全排列，所以：N(R)=2x(〃-l)!(j=l,2,…〃)

从而：w(1)=£n([)=2〃.(〃-1)!

1=1

一般地，*有：w(k)=* £ N0,乌…马,)

*1 父&*

但由于计算N0,£,…牛)有困难，这里我们直接计算*w(k).*假定｛1,2…〃｝的一个排列

角,％…,％中有k个数气，气…气分别满足性质£,4…气，即

圳，, + l(K)

《=\

泡 1 c=〃)

再将｛1,2…〃｝-血,％•••%｝这〃个元素补上，就构成｛1,2…〃｝的一个满足性质…从的全排 列。因而，对于一组气，气…气，能构造出(〃-R)!个满足性质£,[•••£.的全捶列。

下面的问题是有多少个k元組满足片,中的k个性质。满足k个性质•,&的k序列

&,%•••%）也就是在序列（3.3.1）中气，％•••%分别为第«列，第4列，……第4列的前两行中取出

k个不同的数，换个说法气，气…气也就是从：（1个）,（2,3）,（3,〃）,（〃」）, （3.3.2）

的第4个，第4个，……第丄个括号中取出k个彼此不同的数。将序列（3.3.2）中的括号去掉，变成

1,2,2,3,3,4,…，〃一1, 〃」

(3.3.3)

则从序列（3.3.2）的k个不同的括号中取出k个彼此不同的数等价于从序列（3.3.3）中取出满足下列条 件的k序列：

3）任何两数皆不相邻：

（ii）头尾两数不能同时为Io

序列（3.3.3）中满足条件（i）的k序列的个数就是从2n个位置中取出k个不相邻的位置的方法数，由

2.3节例5知，它等于+ 1

。满足条件（i）但不满足条件（ii）的k序列恰好就是从中取*k-2*个

不相邻的数，再将两端补上I，其方法数为

*k-2* 丿=(*k-2*

综合以上分析知

,、*((2n-k + \\ (2n-k-\\\,* 、

mH A- H 卜2

从而

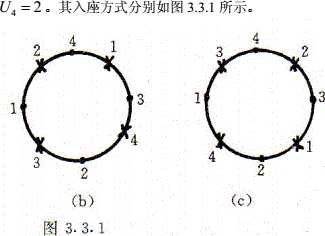
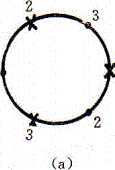
*Un* = W(0)-W(l)+w(2) + (-iy

*=n!— In* (〃 — 1)!+ • • . + (\_])\* 卫1\_仔"

、*7 2n-k( k*

(I)!

当〃 =3时，口3=1；当〃 =4时,



3.3.4实际依赖于所有变量的函数个数的确定

设函数

*g：E—F*

其中，£ = {弓,。2,…舟},『 = 即g（X],X2，f）是包含k个自变量（在集合E中），且

在集合F中取值的函数，所有这样的函数的个数为如果函数g不随某个变量玉变化，就称 g实际上不依赖于变量X”也就是对每一组值（.rl,,x；,-x；\_l,x；4l）GEi\_,和任何*a,0cE,*有关系式 g（-<—x；\_,,a,x；+1-x；）

= g（x；，・F\_/，x；+L・x：）

实际上不依赖于某*q（qJk）*个变量的函数的个数，等于函数*g:El fF*的个数，即为〃广“。这里因 为在q个自变量上保持不变的函数，等价于在集合E中的*k-q*个自变量到值域F上的函数。

设

4 = ®:E\*->F|g实际上不依赖于变量用*E（〃,m,k）*记函数g:E\*->F中实际依赖

于所有变量的函数的个数.则由容斥原理得

e（m,a）=/-£|4|+ £ |4財|

1=1 1 缩

-•••+（-1/ A4

f=l

根据4的定义，我们得到

*E(n,myk)=nf m"*

(3.3.4)

+ (—1)1 *m*

式中，*"广'为实*际不依赖于某p个变量的函数的个数：因为从k个自变量中取p个有（：）种选择方法, 如果£ = F = {O,1},则函数g:£\*->F是k个自变量的Boole函数，其个数为2，。実际依赖于所有k

所以每一项中有系数

*P)*

个变量的Boole函数的个数可从公式（3.3.4）中取*m=n = 2*得到，为  
以2,財）=尹七阡（披

-..• + （-1）\*2

例如，若*k = 2,*则E(2,2,2)= 10,因而在两个变量的16个Boole函数中，实际依赖于两个变量的有

10个，见表3.3.1

表3.3. 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 工1 | 彳2 | *f\* | A | *L* | *h* | /5 | A | /; | /s |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | ] | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | *工1* | *h* | /10 | *fn* | /l2 | *fl3* |  | /.5 | ./n> |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

在表3.3.1中，/与£均为常值函数，不依赖于为和七：£和人仅依赖于玉，不依赖于X?： 和\_/；仅 依赖于.弓，不依赖于为：其余的】0个函数则实际依赖于两个变量与和X］。

在5.3节中我们还将利用容斥原理的生成函数来讨论有•限制位置的棋盘多项式和有限制的排列问題的求解。

3.4 Mdbius反演及可重复的圆排列

本节中，我们将在自然数集N上引进一个数论函数，称为Mdbius数。

对任意日然数n,若/;>!.则n可唯一分解为素数拜的乘积，

(341)

(3.4.2)

其中,*Pi’PMPk*是不同的素/, >l(l</<r)o定义Mdbius函数〃(〃)为

(0 〃 = 1)

(MH3.4.1) (. > 1)

"(〃)=[0

㈠)'

(M (3A1) Z,=/2=.../r = l)

例如，30 = 2x3x5,18 = 32x2.于是

“(30)=(-。=-1,

“(18)=0

引理3.4.1对任意自然数n,有

(3.4.3)

证明 若w = l,则d = l是n仅有的一个因数，因//（!）= 1.故（3.4.3）式成立。

若〃＞1,且n有分解式（341）,令*n =Pip2--pr,*则显然〃,的每个因数都是n的因数。若n的某个 因数d不是〃,的因数，则d在作形如（341）式的素因子分解时，必有某个因子的次数大于等于2,所 以〃（d）=0。因此

距 *d\n*

=i+£ *£ "（pm）*

心gr 1勺〈…＜4。

=£ £ （-04

=#比）

=0

则可将g表示为f的函数：

&（"）=#（』

(3.4.5)

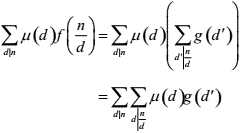
反之，从（3.4.5）式可以得出（3.4.4）式。

证明 对n的每个因数d,巳是自然数，于是有

*d*

**4**再**g（**『）

所以



(3.4.3)

式知

(3.4.7)

代入(3.4.6)式，得

(3.4.5)

式成立。

(\*')

= £g0') *2叭d)*

1(0

0(0

冲)

即

同理，若(345)式成立，将其代入(3.4.4)式的右端，便可得到左端。

例1欧拉函数伊(〃)满足

(346)

(3.4.7)

(348)

并由Mobius反演定理可得

神)=託)

(349)

证明 先证(3.4.8)式。

如果〃 =1,等式显然成立。

如果*n>\,*设n有形如(3.4.1)式的展开式，令

〃泮=泮

屮十£ £

l 心5分 <---<itSr *P，t Pi,''' P，t*

(-0\*

〃i+Z £

心。皿 Vf A *Ph P,2 ••-P,t*

=伊（〃）

下面用MUbius反演定理由（3.4.8）式导出（349）式。因为

*畋）=湾*

=¥扁

由定理341知

〃=神）曲9

例2 （可重圆排列问题） 求集合S = （l,2,-,/W｝的n可重圆排列数。

由定理2.3.1知，m元集合｛1,2,•••,〃［｝的n可重排列数为冲。在本例中，我们讨论（1,2,--,/«）的n可重 圆排列数。

设《务…。”是一个n不可重复圆擇列，将其分别从n个位置断开，即可得到与之相应的n个不同的线排 列

叩2…％,

然而，一个n可重圆擇列在n个位置断形后形成的n个线排列则未必都不相同。例如，当d| 〃时，由不 重的*叩，…％*重复£次构成的圆排列

*d*

(3.4.10)

（叩2…％ ）（叩2 *"d* ）（叩2…％ ）

从n个位置断开后只能形成d个不同的线排列

叩为…-…叩五…印,

•••' （3.4.11）

*ada\-'ad~\''-ada\*

*n*

*d*

而且一个圆排列（3.4.10）与一组线排列（3.4.11）之间是一一对应的。

如果一个圆排列可由长度为k的线排列重复若干次形成，则这样的k的最小值称为圆排列的周期。一个 圆擇列中元素的个数（重复出现的元素按其重复出现的次数汁）称为它的长度。

设由集合｛1,2,•••,〃｝中元素形成的长度与周期都是d的圆排列的个数为*M（d）a*因为一个圆排列

（3.4.10）与一组线排列（3.4.11）对应，若*d\n,*每个长度与周期都是d的圆排列可在d个位置上断开, 重其£次形成d个长度为n的可重线排列，因此.周期为d的全部n可重排列对应的n可重线排列的总 *a*

数为*dM（d\*对所有可能的周期求和，得

£加0）=冰

其右端是集合｛1,2,-w｝的n可重排列数。对上式施行MObius反演.得

*n*

〃A/（〃）=£"（d）〃F （3.4.12）

因而,｛1,2,.前上长度为n的圆拜

以）=£岫）

*d\n a dy*

可将7。）化简（略）为

其中，仞（〃）为欧拉函数。