Trabalho 2
Decomposição em Valores Singulares

Thadeu Dias

December 14, 2023

1 Introdução

A decomposição em valores singulares (Singular Value Decomposition — SVD) é uma das mais importantes decomposições de matrizes.

Seja $A \in \mathbb{F}^{M\times N}$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, existem matrizes ortogonais (unitárias no caso complexo) $U \in \mathbb{F}^{M\times M}$ e $V \in \mathbb{F}^{N\times N}$, tais que

$$A = U\Sigma V^T, \tag{1}$$

onde $\Sigma \in \mathbb{R}^{M\times N}$ é uma matriz com valores reais não negativos na diagonal principal,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \sigma_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Os valores σ_i são ditos os valores singulares da matriz A.

2 Existência da SVD

A existência da SVD é uma consequência do teorema espectral.

Se A é uma matriz simétrica (Hermitiana), então existe uma diagonalização ortogonal de A tal que

$$A = Q\Lambda Q^H, \tag{3}$$

com $\lambda_{ii} \in \mathbb{R}$.

Note que para qualquer matriz $B \in \mathbb{C}^{M\times N}$, quadrada ou não, $B^H B$ é uma matriz Hermitiana, e positiva semi-definida. Uma demonstração direta envolve a observação que para qualquer $\vec{x}$,

$$\begin{aligned} \vec{x}^H B^H B\vec{x} &= (\vec{x}^H B^H)(B\vec{x}) \\ &= u^H u \geq 0, \end{aligned}$$

onde a igualdade se dá quando $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(B)$.

Dito isso, existe então uma matriz unitária V tal que

$$B^H B = \left[\begin{array}{c:c} V_1 & V_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} D & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_1^H \\ \hdashline V_2^H \end{array}\right], \tag{4}$$

onde a submatriz $V_1 \in \mathbb{C}^{N\times K}$ é uma base ortogonal para a imagem de $B^H B$, e $V_2 \in \mathbb{C}^{N\times(N-K)}$ é uma base ortogonal para seu espaço nulo. A matriz $D \in \mathbb{R}^{K\times K}$ é diagonal, com valores estritamente positivos na diagonal, e K é o Rank de $B^H B$. Para qualquer M e N, $K \leq \min\{M, N\}$. Para que a matriz diagonal tenha essa forma, basta ordenar os autovetores em V.

Naturalmente,

$$V_1^H B^H B V_1 = D, \tag{5}$$

e

$$V_2^H B^H B V_2 = 0, \tag{6}$$

onde, pelo mesmo argumento anterior, podemos concluir que $BV_2 = 0$[1]. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
V_1^H V_1 &= I_K \\
V_2^H V_2 &= I_{N-K} \\
V_1 V_1^H &= \left[\begin{array}{c:c} I_K & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \\
V_2 V_2^H &= \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & I_{N-K} \end{array}\right] \\
V_1 V_1^H + V_2 V_2^H &= I.
\end{aligned}$$

Considere então a matriz $U_1 = BV_1 D^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^{M\times K}$. Note que

$$\begin{aligned}
U_1 D^{\frac{1}{2}} V_1^H &= BV_1 D^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} V_1^H && (7)\\
&= BV_1 V_1^H && (8)\\
&= B(I - V_2 V_2^H) && (9)\\
&= B - BV_2 V_2^H && (10)\\
&= B - 0V_2^H && (11)\\
&= B. && (12)
\end{aligned}$$

Note que temos praticamente o resultado que precisávamos:

$$B = U_1 D^{\frac{1}{2}} V_1^H,$$

com a exceção que U_1, $D^{\frac{1}{2}}$ e V_1^H não tem as dimensões corretas[2], isso é, U_1 e V_1 podem não ser quadradas (unitárias). Note que as colunas de U_1 já são ortonormais:

$$\begin{aligned}
U_1^H U_1 &= D^{-\frac{1}{2}} V_1^H B^H B V_1 D^{-\frac{1}{2}} \\
&= D^{-\frac{1}{2}} D D^{-\frac{1}{2}} \\
&= I_1.
\end{aligned}$$

Para termos uma matriz U ortogonal, basta completarmos $U_1 \in \mathbb{C}^{M\times K}$ com $U_2 \in \mathbb{C}^{M\times(M-K)}$, com colunas ortonormais e ortogonais à U_1, obtendo

$$U = \left[\begin{array}{c:c} U_1 & U_2 \end{array}\right]. \tag{13}$$

Finalmente, podemos completar $D^{\frac{1}{2}}$ com zeros, obtendo $\Sigma \in \mathbb{R}^{M\times N}$.

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c:c} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{14}$$

O resultado é justamente a decomposição SVD,

$$B = U\Sigma V^H. \tag{15}$$

3 Aplicações da SVD

A SVD tem aplicações diversas.

[1] Os resultado anteriores são uma consequência da multiplicação das matrizes em blocos.

[2] Na realidade, em alguns casos, isso já é o suficiente. Definidas matrizes com essas dimensões, essa é a chamada SVD reduzida.

3.1 Resolvendo sistemas lineares

A SVD pode ser usada para resolver sistemas do tipo mínimos-quadrados e soluções de norma mínima. Os procedimentos realizados com a decomposição UTV^T, do trabalho anterior podem ser replicados exatamente iguais com a SVD, afinal Σ também é triangular superior.

Assim como na decomposição do Trabalho 1, a pseudo-inversa de uma matriz com decomposição SVD $A = U\Sigma V^H$ é $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^H$, onde $\Sigma^\dagger$ tem a inversa dos elementos não zeros de Σ^T na diagonal.

3.2 Aproximação de rank reduzido

A norma Frobenius de uma matriz é equivalente a norma 2 vetorial, aplicada aos elementos da matriz, isso é,

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2}. \tag{16}$$

É possível mostrar que se σ_i são os valores singulares de A, então

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}. \tag{17}$$

Além disso, note que

$$U\Sigma V^T = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \vec{u}_i \vec{v_j}^H,$$

mas $\sigma_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\sigma_{ij} = \sigma_i$ se $i = j$. Em outras palavras,

$$U\Sigma V^T = \sum_i \sigma_i \vec{u}_i \vec{v_i}^H,$$

ou seja, A pode ser escrita como uma combinação de matrizes de rank 1, ponderadas por σ_i.

Sejam σ_i ordenados de forma decrescente, ou seja, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots$. Considere então,

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v_i}^H. \tag{18}$$

A matriz A_k é uma aproximação de rank k de A. Se o critério de distância for a norma Frobenius, A_k é o aproximador ótimo de rank k para A. Note que enquanto a matriz A é definida por MN coeficientes, A_k pode ser definida usando $k(M + N + 1)$ coeficientes!

3.3 Outras aplicações

Existem outras aplicações interessantes para a SVD, e o aluno está convidado a pesquisar sobre.

4 Formulação do Trabalho

Neste trabalho, o aluno deve usar a decomposição SVD para resolver alguns dos problemas mencionados no texto deste trabalho. O aluno está livre para usar uma implementação pronta da SVD, por exemplo, a do numpy.

Dito isto, realize os itens pedidos abaixo, *e escreva um relatório* descrevendo as atividades executadas.

4.1 Sistemas Lineares

Use a decomposição SVD para resolver sistemas sub- e sobre-determinados do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$, com $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$. O procedimento seguido deve ser análogo ao do trabalho anterior (Qual passo será diferente?).

- Resolva um sistema com $M = N$, em que o posto é completo.
- Resolva um sistema com $M > N$, de posto completo.
- Resolva um sistema com $M < N$, de posto completo.
- Resolva um sistema com $M > N$, de posto incompleto.

O que foi observado nos casos acima? É possível determinar o rank de uma matriz com a SVD? Se sim, como?

4.2 Aproximação de rank reduzido

Considere a imagem da Figura 1. Podemos considerar essa imagem 512×512 px como uma matriz $512 \times$

Figure 1: Imagem de teste Lena

512. Isso nos permite usar técnicas como a SVD para realizar, por exemplo, compressão de imagens nessa figura. Realize, portanto, os seguintes passos:

1. Carregue a imagem `lena.png` fornecida em níveis de cinza (consulte a documentação apropriada para fazer isso). Essa é a matriz A.
2. Compute a decomposição SVD da matriz gerada.
3. Plote em função de k, a norma Frobenius da diferença entre A e A_k, $\|A - A_k\|_F$. O que se observa?
4. Visualize, para diferentes valores de k, a matriz A_k como uma imagem. A partir de qual k a qualidade da imagem é aceitável?
5. Para o valor de k encontrado no item anterior, quantos coeficientes são necessários para se transmitir A_k. Compare com o número de coeficientes para se transmitir A.

4.3 Entrega

É sugerido que se realize esse trabalho usando jupyter notebook/lab, para se visualizar os passos realizados. O aluno deve enviar para o email `thadeuluiz@poli.ufrj.br` um zip com código feito, e um pdf com o relatório, com o assunto precisamente "[TRABALHO 2] - NOME DO ALUNO". O prazo de entrega é até as 23:59 de 20 de dezembro de 2023.