

第二章 Laplace变换



当函数 $f(t)$ 在 $t < 0$ 时没有定义或者不需要知道时, 可以认为当 $t < 0$ 时, $f(t) \equiv 0$. 这时, Fourier 变换的表达式为

$$\mathbf{F} [f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

但是仍然需要 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上绝对可积的条件, 这个要求限制了它的应用.

对定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(t)$, 如果考虑

$$f_1(t) = f(t) e^{-\beta t} \quad (\beta > 0),$$



那么 $f_1(t)$ 容易满足在 $[0, +\infty)$ 上绝对可积的要求. 例如, $f(t)$ 为常数、多项式、正弦与余弦函数时,

$$f_1(t) = f(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0)$$

都在 $[0, +\infty)$ 上绝对可积. 这是因为 $t \rightarrow +\infty$ 时, $e^{-\beta t}$ 是衰减速度很快的函数, 称它为指数衰减函数.

如果 $\beta > 0$ 取得适当大, 那么



$$f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的Fourier变换可能有意义. $f_1(t)$ 的Fourier变换可表示为

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+i\omega)t}dt.$$

将 $\beta + i\omega$ 记为 s , 可写成

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

这就是本章要讨论的Laplace变换, 它放宽了对函数的限制并使之更适合工程实际, 并且仍然保留Fourier变换中许多好的性质, 更实用、更方便.



§ 2.1 Laplace变换的概念

1 Laplace变换的定义

2 周期函数和 δ 函数的Laplace变换



2.1.1 Laplace变换的定义

定义2.1 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 并且积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (s \text{ 是复参变量}) \text{ 关于某一范围}$$

s 收敛, 则

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

称为函数 $f(t)$ 的 **Laplace变换**, 并记做 $L[f(t)]$, 即



$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的像函数, $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的像原函数.

已知 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的Laplace变换, 则记

$$f(t) = L^{-1}[F(s)],$$

并称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的Laplace逆变换.



例1 求单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的Laplace变换.

解 根据Laplace变换的定义, 当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时,

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

因为在Laplace变换中不必考虑 $t < 0$ 时的情况,



所以经常记作 $L[1] = \frac{1}{s}$.

例2 求指数函数 $f(t) = e^{at}$ (其中 a 是实数)
的Laplace变换.

解 根据Laplace变换的定义

$$F(s) = \mathcal{L} [f(t)] = \mathcal{L} [e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt,$$

这个积分当 $\operatorname{Re} s > a$ 时收敛, 且

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a},$$

所以

$$\mathcal{L} [e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (\operatorname{Re} s > a).$$



Laplace变换存在定理

定理1 设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的任何有限区间内分段连续, 并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数, 即存在常数 $M > 0$ 和 $s_0 > 0$, 使得在 $[0, +\infty)$ 上,

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t},$$

则在半平面 $\operatorname{Re} s > s_0$ 上, $L[f(t)]$ 存在, 且

$$F(s) = L[f(t)]$$



是 s 的解析函数, 其中 s_0 称为 $f(t)$ 的增长指数.

证明 对任何 $\operatorname{Re} s > s_0$ 内的点 s , $\operatorname{Re} s = \beta > s_0$,

故 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ 绝对收敛, 即

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt &\leq \int_0^{+\infty} M e^{-\beta t} e^{s_0 t} dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(\beta-s_0)t} dt = \frac{M}{\beta-s_0}. \end{aligned}$$

所以在 $\operatorname{Re} s > s_0$ 上, $f(t)$ 的 Laplace 变换 **存在**.

可以 证明 $F(s)$ 是 $\operatorname{Re} s > s_0$ 上的解析函数, 且

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt.$$



例3 求 $f(t) = \sin \omega t$ 的Laplace变换.

解 因为 $|f(t)| \leq 1 \cdot e^0$, 故在 $\operatorname{Re} s > 0$ 上,

Laplace变换存在, 且

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \omega t dt &= \frac{e^{-st}}{s^2 + \omega^2} [-s \sin \omega t - \omega \cos \omega t] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

于是 $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$



类似可得 $L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$

2.1.2 周期函数和 δ 函数的Laplace变换

设 $f(t)$ 是以 T 为周期的函数, 即

$$f(t+T) = f(t) \quad (t > 0),$$

且在一个周期内分段连续, 则

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st} dt.$$

令 $t = \tau + kT$, $\tau \in [0, T)$, 则



$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st} dt = \int_0^T f(\tau + kT)e^{-s(\tau+kT)} d\tau,$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st} dt = e^{-kTs} \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau} d\tau.$$

而当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时, $|e^{-Ts}| < 1$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kTs} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt, \end{aligned}$$

于是

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt.$$

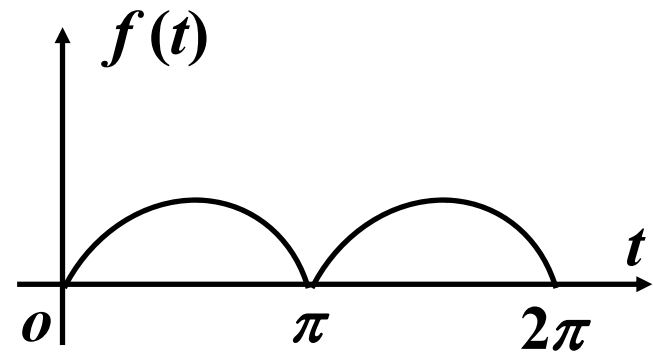


这就是周期函数的Laplace变换公式.

例4 求全波整流函数

$f(t) = |\sin t|$ 的 Laplace 变换.

解 $f(t)$ 的周期 $T = \pi$,



所以由 周期函数的 Laplace 变换公式

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + 1} (-\sin t - \cos t) \right] \bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \times \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$



如果满足Laplace变换存在条件的函数 $f(t)$

在 $t = 0$ 处有界时，积分

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

的下限取 0^+ 或 0^- 不影响其结果. 如果在 $t = 0$ 处包含单位脉冲函数 $\delta(t)$ ，积分理解为广义函数下的积分时，取 0^+ 与 0^- 是不同的. 因为

$$L_+[f(t)] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt,$$



$$L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt + L_+[f(t)].$$

如果 $f(t)$ 在 $t = 0$ 附近有界或在通常意义下

可积时, $\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt = 0$, 即 $L_-[f(t)] = L_+[f(t)]$;

如果在 $t = 0$ 处包含了单位脉冲函数时, 则

$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt \neq 0$, 即 $L_-[f(t)] \neq L_+[f(t)]$.

因此把 $t \geq 0$ 上定义的函数延拓到 $t < 0$ 上,

并且把Laplace变换定义为

$$L[f(t)] = L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$



例5 求单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的Laplace变换.

解 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0),$$

所以

$$L[\delta(t)] = L_-[\delta(t)]$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1.$$



例6 求 $f(t) = e^{-\beta t} \delta(t) - \beta e^{-\beta t} u(t) \quad (\beta > 0)$

的Laplace变换(其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数).

解 由Laplace变换的定义, 当 $\operatorname{Re} s > -\beta$ 时,

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} [e^{-\beta t} \delta(t) - \beta e^{-\beta t} u(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-(s+\beta)t} dt - \beta \int_0^{+\infty} e^{-(s+\beta)t} dt \\ &= 1 + \beta \frac{e^{-(\beta+s)t}}{s+\beta} \Big|_0^{+\infty} = 1 - \frac{\beta}{s+\beta} = \frac{s}{s+\beta}. \end{aligned}$$



§ 2.2 Laplace变换的性质

- | | |
|------------|---------|
| 1 线性性质 | 2 微分性质 |
| 3 像函数的微分性质 | 4 积分性质 |
| 5 像函数的积分性质 | 6 位移性质 |
| 7 延迟性质 | 8 相似性质 |
| 9 初值和终值定理 | 10 卷积定理 |



以下假定所考虑的 Laplace 变换的像原函数
都满足存在定理的条件.

(1) 线性性质 设 α, β 是常数, $F_1(s) = \mathcal{L} [f_1(t)]$,
 $F_2(s) = \mathcal{L} [f_2(t)]$, 则

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] &= \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \\ &= \alpha \mathcal{L} [f_1(t)] + \beta \mathcal{L} [f_2(t)],\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)].$$



由 Laplace 变换的定义及积分的线性性质可证.

(2) 微分性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

证明 根据Laplace变换的定义和分部积分公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \\ &= sF(s) - f(0) \quad (\operatorname{Re} s > s_0).\end{aligned}$$



推论 对正整数 n , 有

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

特别地, 当 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 时,

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n F(s).$$

在这个性质中, **要求** $f^{(k)}(t)$ 存在且满足Laplace变换存在定理的条件 ($1 \leq k \leq n$).



例7 求 $f(t) = \cos \omega t$ 的Laplace变换.

解 因为

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t,$$

根据微分性质和线性性质

$$L[-\omega^2 \cos \omega t] = s^2 L[\cos \omega t] - sf(0) - f'(0),$$

$$-\omega^2 L[\cos \omega t] = s^2 L[\cos \omega t] - s,$$

$$\text{所以 } L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$



$$\text{使用同样方法, 可得 } L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

例8 求 $f(t) = t^2 + \sin \omega t$ 的Laplace变换.

解

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} [t^2 + \sin \omega t] \\ &= \mathcal{L} [t^2] + \mathcal{L} [\sin \omega t] \\ &= \frac{2!}{s^3} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$



利用 **微分性质** 也可以求出当 m 是正整数时,

$$L [t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}.$$

事实上, 设 $f(t) = t^m$, 则

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0.$$

因为 $f^{(m)}(t) = m!$, $L [1] = \frac{1}{s}$, 所以

$$m! L [1] = s^m L [t^m].$$



于是 $L [t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}.$

(3) 像函数的微分性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)].$$

一般地, 对正整数 n , 有

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)].$$

证明 对解析函数

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$



求导, 右端求导时可在积分号下进行, 即得.

例9 求 $f(t) = t \sin \omega t$ 的Laplace变换.

解

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [t \sin \omega t] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L} [\sin \omega t] \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

使用同样方法, 可得

$$\mathcal{L} [t \cos \omega t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L} [\cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$



(4) 积分性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

证明 设 $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$, 则

$$\varphi'(t) = f(t), \quad \varphi(0) = 0.$$

故由 微分性质

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] - \varphi(0),$$

于是结论得证. 一般地, 对 n 次积分有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s^n}F(s).$$



(5) 位移性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad (\operatorname{Re}(s - a) > s_0),$$

其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数.

证明 根据定义, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s - a). \end{aligned}$$



例10 求 $L [te^{at} \sin at]$ 和 $L [te^{at} \cos at]$.

解

$$L [t \sin at] = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

故根据 位移性质

$$L [te^{at} \sin at] = \frac{2a(s - a)}{[(s - a)^2 + a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得



$$L [te^{at} \cos at] = \frac{(s - a)^2 - a^2}{[(s - a)^2 + a^2]^2} = \frac{s(s - 2a)}{[(s - a)^2 + a^2]^2}.$$

例11 求 $L \left[\int_0^t t e^{at} \sin at dt \right]$.

解

$$L \left[\int_0^t t e^{at} \sin at dt \right] = \frac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2 + a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得

$$L \left[\int_0^t t e^{at} \cos at dt \right] = \frac{s-2a}{[(s-a)^2 + a^2]^2}.$$



(6) 像函数的积分性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 且


$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ 存在, 积分 $\int_s^{+\infty} F(u) du$ 收敛, 则

$$\int_s^{+\infty} F(u) du = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right].$$

证明 根据解析函数的惟一性定理, u 取在正实轴

从 s 到 $+\infty$, 则

$$\int_s^{+\infty} F(u) du = \int_s^{+\infty} du \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ut} dt$$


$$= \int_0^{+\infty} f(t) dt \int_s^{+\infty} e^{-ut} du = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right].$$

推论 如果像函数积分性质的条件满足, 且

积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ 收敛, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(s) ds.$$

事实上, 对于像函数积分性质

$$\int_s^{+\infty} F(u) du = L \left[\frac{f(t)}{t} \right],$$



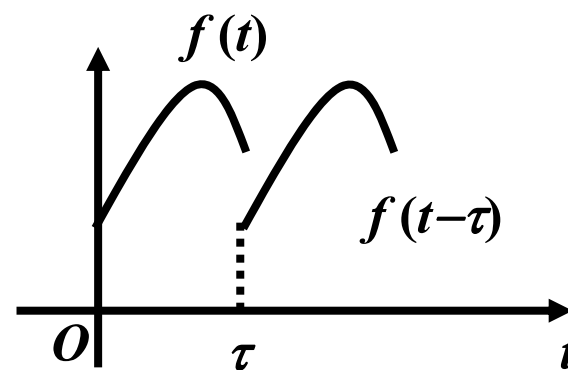
令 $s \rightarrow 0^+$ 即可.

(7) 延迟性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 若当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, 则对任何非负实数 τ , 有

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s).$$

证明 根据定义

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \tau)] &= \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\tau} f(t - \tau) e^{-st} dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt. \end{aligned}$$



因为当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, 所以在 $[0, \tau]$ 上, 有

$f(t - \tau) = 0$, 从而



$$\begin{aligned}
L[f(t-\tau)] &= \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st} dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-(u+\tau)s} du = e^{-\tau s} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-us} du \\
&= e^{-\tau s} F(s) \quad (\operatorname{Re} s > s_0).
\end{aligned}$$

利用单位阶跃函数 $u(t)$, 可以将

$$L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s).$$

写成



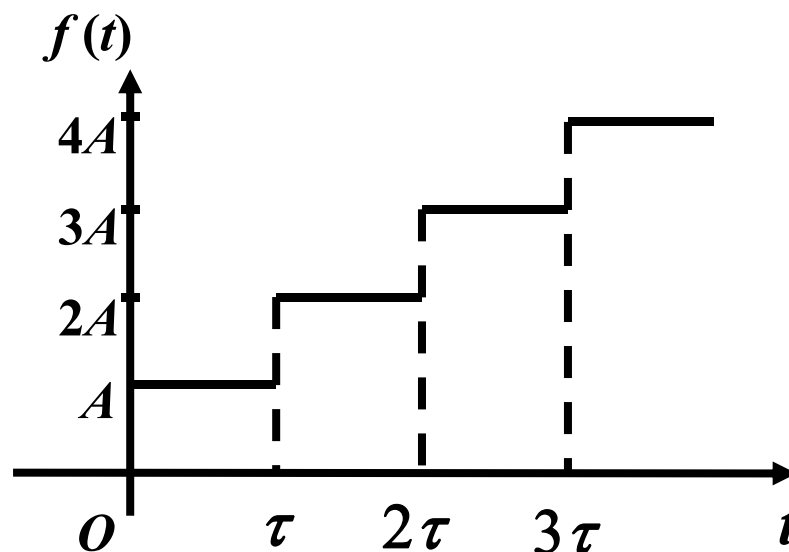
$$L[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s).$$

例12 求如图所示阶梯函数的Laplace变换.

解 利用Heaviside函数

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

图中的函数 $f(t)$ 可表示为



$$f(t) = A[u(t) + u(t - \tau) + u(t - 2\tau) + \cdots]$$

$$= A \sum_{k=0}^{\infty} u(t - k\tau).$$



因为 $L[u(t)] = \frac{1}{s}$, 所以由 延迟性质

$$\mathcal{L} [u(t - k\tau)] = \frac{1}{s} e^{-k\tau s}.$$

再注意到 $|e^{-s\tau}| < 1$ ($\operatorname{Re} s > 0$), 于是

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(t)] &= \frac{A}{s} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau s} = \frac{A}{s(1 - e^{-s\tau})} \\ &= \frac{A}{s} \times \frac{1}{(1 - e^{-\frac{s\tau}{2}})(1 + e^{-\frac{s\tau}{2}})} \\ &= \frac{A}{2s} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{s\tau}{2} \right) \quad (\operatorname{Re} s > 0). \end{aligned}$$



(8) 相似性质 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0), \text{ 其中 } \operatorname{Re} s > as_0.$$

证明 根据定义 $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st} dt$, 故

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$



例13 求 $L[u(5t)]$ 和 $L[u(5t-2)]$.

解 因为 $L[u(t)] = \frac{1}{s}$, 所以

$$L[u(5t)] = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{s}{5}} = \frac{1}{s}.$$

实际上, 由 $u(5t) = u(t)$, 可直接得到结论. 又由于

$$u(5t-2) = u\left[5\left(t - \frac{2}{5}\right)\right],$$

故



$$L[u(5t-2)] = e^{-\frac{2}{5}s} L[u(5t)] = \frac{1}{s} e^{-\frac{2}{5}s}.$$

下面介绍Laplace变换的卷积性质——卷积定理.

Laplace变换的卷积性质不仅能用来求出某些函数的Laplace逆变换, 而且在线性系统的研究中起着重要作用.

因为在Laplace变换中, 总认为 $t < 0$ 时像原函数 $f(t)$ 恒为零. 因此, $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积为



$$f_1(t) * f_2(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

卷积定理 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 满足 Laplace 变换

存在的条件, 即存在 $M > 0$ 和 $s_0 > 0$, 使得

$$|f_1(t)| \leq M e^{s_0 t}, \quad |f_2(t)| \leq M e^{s_0 t}.$$

如果

$$F_1(s) = \mathcal{L} [f_1(t)], \quad F_2(s) = \mathcal{L} [f_2(t)],$$

则

$$\mathcal{L} [(f_1 * f_2)(t)] = F_1(s) F_2(s),$$

或

$$\mathcal{L}^{-1} [F_1(s) F_2(s)] = (f_1 * f_2)(t).$$



证明 当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分段连续时, 其卷积

$(f_1 * f_2)(t)$ 也是分段连续的. 不妨设 $s_0 \geq 1$, 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right| &\leq \int_0^t |f_1(\tau)| |f_2(t-\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^t M e^{s_0 \tau} M e^{s_0(t-\tau)} d\tau = M^2 t e^{s_0 t} \leq M^2 e^{2s_0 t}, \end{aligned}$$

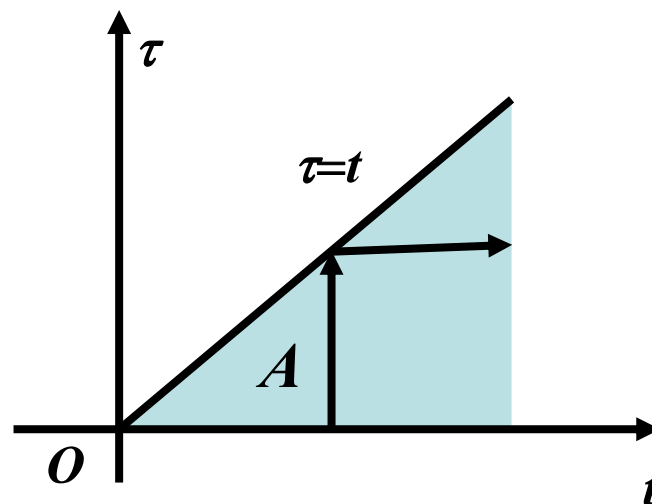
因此, $(f_1 * f_2)(t)$ 也满足 Laplace 变换存在的条件.



$$L \left[(f_1 * f_2)(t) \right] = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt,$$

$$= \iint_A f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} d\tau dt,$$

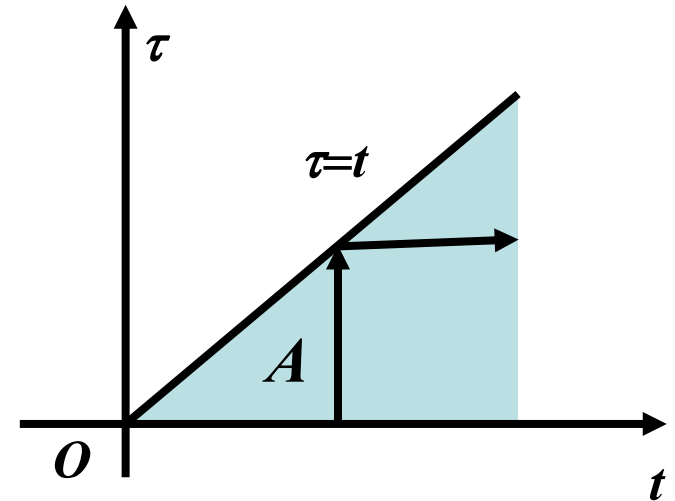
其中 A 是 $tO\tau$ 平面内 t 轴
和第一象限的角平分线
 $\tau = t$ 围成的角形区域.



交换积分次序



$$\begin{aligned}
\left[(f_1 * f_2)(t) \right] &= \iint_A f_1(\tau) f_2(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\
&= \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) e^{-st} dt \\
&= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-st} dt \\
&= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-(u+\tau)s} du \\
&= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-su} du
\end{aligned}$$



$$= \mathcal{L} [f_1(t)] \mathcal{L} [f_2(t)] = F_1(s) F_2(s).$$

例14 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 利用卷积定理

证明Laplace变换的积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

证明 设 $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = 1$, 则

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F(s), \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{1}{s}.$$

于是



$$\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

应用卷积定理可求某些Laplace逆变换.

例15 求 $L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]$, 并证明

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s(s-1)}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du.$$

解 因为

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$



故

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \right] = \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

根据 位移性质 $\mathcal{L} [e^t] = \frac{1}{s-1}$, 则由 卷积定理

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t = \int_0^t e^{t-\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^t e^{-\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du.$$



§ 2.3 Laplace 逆变换

本节给出Laplace逆变换积分表达式，应用复变函数论中的留数理论作为工具，给出一种较一般的方法.



已知 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ 在收敛域内解析, 但并不是所有解析函数都是某一函数的Laplace变换像函数.

另外, 函数 $f(t)$ 的Laplace变换实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的Fourier变换. 因此, 当 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 满足Fourier积分定理的条件时, 根据Fourier积分



公式, $f(t)$ 在连续点处

$$\begin{aligned} f(t)u(t)e^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+i\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (t > 0), \end{aligned}$$

在等式两端同乘以 $e^{\beta t}$, 故当 $t > 0$ 时,



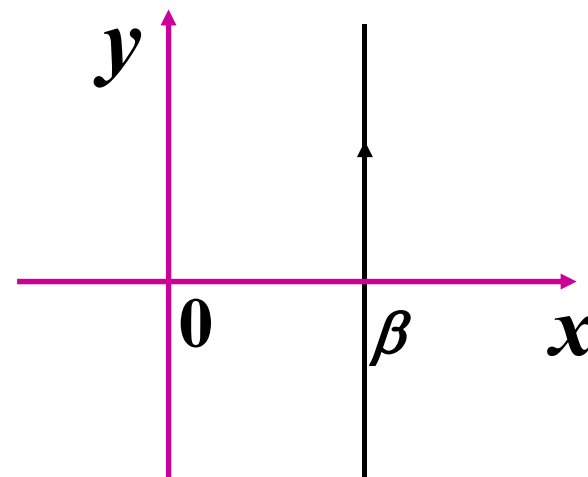
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t} d\omega.$$

令 $\beta + i\omega = s$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (t > 0),$$

其中 $\beta > s_0$, s_0 是 $f(t)$ 的增长指数. 积分路径是在右半平面 $\operatorname{Re} s > s_0$ 上的任意一条直线 $\operatorname{Re} s = \beta$.

这就是Laplace逆变换的一般公式, 称为Laplace 变换的**反演积分**. 这是复变函数的积分, 在一定条件下, 可利用留数来计算.



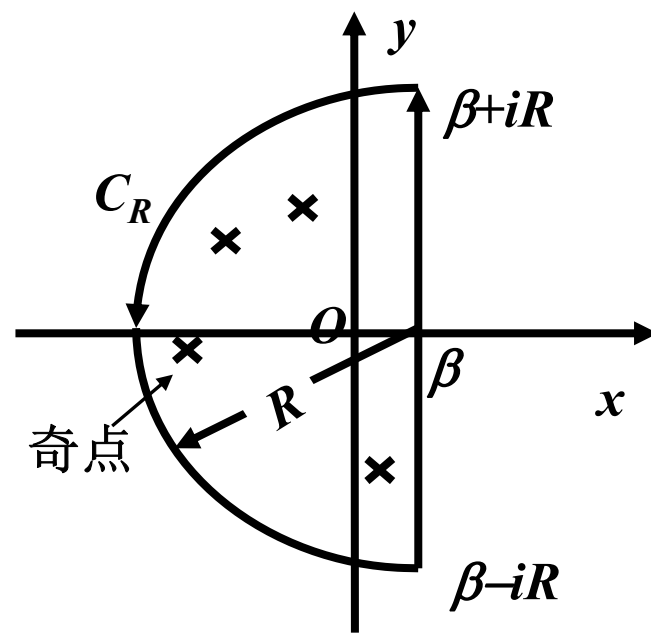
利用留数求Laplace逆变换的公式

定理3 设 s_1, s_2, \dots, s_n 是 $F(s)$ 的所有孤立奇点(有限个), 除这些点外, $F(s)$ 处处解析, 且存在 $R_0 > 0$, 当 $|s| \geq R_0$ 时, $|F(s)| \leq M(|s|)$, 其中 $M(r)$ 是 r 的实函数, 且 $\lim_{r \rightarrow +\infty} M(r) = 0$. 选取 β , 使所有孤立奇点都在 $\operatorname{Re} s < \beta$ 内, 则当 $t > 0$ 时,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s) e^{st}, s_k]$$



证明 取 $R > 0$ 充分大, 使得 s_1, s_2, \dots, s_n 都在圆弧 C_R 和直线 $\operatorname{Re} s = \beta$ 所围成的区域内. 因为 e^{st} 是全平面上的解析函数, 因此, s_1, s_2, \dots, s_n 是 $F(s)e^{st}$ 的孤立奇点, 除这些奇点之外, $F(s)e^{st}$ 处处解析. 于是, 根据留数基本定理



$$\text{⌚} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\beta-iR}^{\beta+iR} F(s)e^{st} ds + \int_{C_R} F(s)e^{st} ds \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

利用 **Jordan**引理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 0 \quad (t > 0).$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k].$$

特别当 $F(s)$ 是有理函数, 且为分母次数高于分子次数的有理真分式, 则Laplace逆变换存在,



$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k].$$

例16 求 $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ 的Laplace逆变换.

解 $s = \pm i$ 是 $\frac{s}{s^2 + 1} e^{st}$ 的1级极点, 由计算

留数的法则,

$$\text{Res} \left[\frac{s}{s^2 + 1} e^{st}, \pm i \right] = \left. \frac{se^{st}}{2s} \right|_{s=\pm i} = \frac{1}{2} e^{\pm it},$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \text{Res} \left[\frac{s}{s^2 + 1} e^{st}, i \right] + \text{Res} \left[\frac{s}{s^2 + 1} e^{st}, -i \right]$$

$$= \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) = \cos t.$$



例20 求 $F(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}$ 的Laplace逆变换.

解 $s_1 = 0$ 和 $s_2 = 1$ 分别是 $\frac{1}{s(s-1)^2} e^{st}$ 的1级

和2级极点. 故由计算留数的法则

$$\text{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2} e^{st}, 0\right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{st}}{(s-1)^2} = 1,$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2} e^{st}, 1\right] = \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{e^{st}}{s}\right]' = e^t(t-1),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right] = 1 + e^t(t-1) \quad (t > 0).$$

