武汉大学 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics, Wuhan University

2020年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第五章　　　留　数

第一节　孤立奇点

第二节　留数

第三节　留数在定积分上应用

第一节　孤立奇点

一、可去奇点

二、极点

三、本性奇点

四、零点与极点关系

五、函数在无穷远性态

一、孤立奇点分类

如果函数$f(z)$在a的某去心邻域$0<|z-a|<r$内解析,则称a为$f(z)$的孤立奇点.

如果函数$f(z)$在∞的某去心邻域$r<|z|<+\infty$内解析,则称∞为$f(z)$的孤立奇点.

于是,如果a为$f(z)$的孤立奇点,则存在$R>0$,使$f(z)$在$0<|z-a|<R$内可展成$z-a$的Laurent级数. 在圆环$H:0<|z-z_0|<R\ \ (0<R\le+\infty)$内解析的函数$f$可展成

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{主要部分}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{解析部分}}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

Γ为圆$|\zeta-z_0|=\rho(r<\rho<R)$,并且展式是唯一的.

定义1.1 设z_0为$f(z)$的孤立奇点，有三种情况发生：

1）如果$f(z)$在点z_0的主要部分为零,则称z_0为$f(z)$的可去奇点;

2）如果$f(z)$在点z_0的主要部分为有限项,设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}, \quad (c_{-m}\neq 0)$$

那么称z_0为$f(z)$的m阶极点（m级极点）. 若$m=1$,则称z_0为$f(z)$的单极点. 若$m>1$,则称z_0为$f(z)$的m重极点;

3）如果$f(z)$在点z_0的主要部分有无限多项,那么称z_0为$f(z)$的本性奇点.

小结

孤立奇点分类	可去奇点	m 阶极点	本性奇点
Laurent系数特征	$\forall n<0, c_n=0$	$c_{-m}\neq 0, \forall n>m, c_{-n}=0$	无限多个$n<0$使$c_n\neq 0$

二. 可去奇点的特征

命题 1.1 若z_0为$f(z)$的可去奇点,则下列三条件等价:

1) $f(z)$在点z_0的主要部分为零;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=b\ (b\neq\infty)$;

3) $f(z)$在点z_0的某去心邻域内有界.

因此,它们中任何一条都是可去奇点的特征.

证明: "1) ⇒ 2)" 由于

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \quad (0<|z-a|<R),$$

那么$\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0\neq\infty$;

"2) ⇒ 3)" 由于 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=b\ (b\neq\infty)$, 由函数极限的性质, $f(z)$在点的某邻域去心邻域内有界;

"3) ⇒ 1)" 设$|f(z)|\le M$, $0<|z-z_0|<r$. 考察$f(z)$在点z_0的主要部分

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n},\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,(n=-1,-2,\ldots),$$

Γ为圆周$|\zeta - z_0|=\rho$ $(0<\rho<r)$. 由于ρ可以充分小,于是

$$|c_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{n+1}}|d\zeta|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}\to 0\quad(\rho\to+0,\ n=-1,-2,\cdots),$$

得 $c_n=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$. 即$f(z)$在点z_0的主要部分为零.

注解 若z_0为$f(z)$的可去奇点,则

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots\quad(0<|z-z_0|<R).$$

若命$f(z_0)=c_0$,则$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析. 如$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$,若令$f(0)=1$,则

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\ne 0\\ 1, & z=0\end{cases}\in A(\mathbb{C}).$$

即可将$f(z)$在z_0加以适当定义,使$f(z)$在$z=z_0$解析.

例 确定函数$f(z)=\dfrac{\tan z}{z}$的孤立奇点$z=0$的类型.

解：由于$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\tan z}{z}=1$, 那么$z=0$为 $f(z)=\dfrac{\tan z}{z}$ 的可去奇点.

三. 极点的特征

命题 1.2 若z_0为$f(z)$的极点,则下列三条件等价:

1） $f(z)$在点z_0的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}\quad (c_{-m}\neq 0);$$

2） $f(z)$在点z_0的某去心邻域$U(z_0,\delta)$内能表成

局部因式分解

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \lambda\in \mathrm{A}(U(z_0,\delta)),\quad \lambda(z_0)\neq 0.$$

3） $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$以点z_0为m阶零点(可去奇点当解析点看,只要令$g(z_0)=0$).

证明: "1) $\Rightarrow$ 2)" 若1)为真, 则在点 z_0 的某去心邻域内有

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots\cdots]=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},z\in U(z_0,\delta),$$

其中$\lambda(z)$显然在点z_0的邻域$U(z_0,\delta)$内解析, 且$\lambda(z_0)=c_{-m}\neq 0$;

"2) $\Rightarrow$ 3)" 若2)为真, 则在点 z_0 的某去心邻域内有

$$\mathrm{g}(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{\lambda(z)},\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \lambda\in \mathrm{A}(U(z_0,\delta)),\quad \lambda(z_0)\neq 0.$$

其中$\dfrac{1}{\lambda(z)}$在z_0的邻域$U(z_0,\delta)$内解析且$\dfrac{1}{\lambda(z_0)}\neq 0$.因此, z_0为g的m阶零点;

"3) $\Rightarrow$ 1)" 由z_0为$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$的m阶零点, 则在点z_0的某邻域$U(z_0,\delta)$内有

$$g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \varphi\in A(U(z_0,\delta)),\quad \varphi(z_0)\neq 0.$$

因此，我们有

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{\varphi(z)},\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \frac{1}{\varphi}\in A(U(z_0,\delta)),\quad \frac{1}{\varphi}(z_0)\neq 0.$$

这导致在此邻域成立

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

于是，f在 z_0 的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0},\quad c_{-m}=\frac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0.$$

证毕.

命题 1.1　函数$f(z)$的孤立奇点z_0为极点的充要条件是$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty.$

证明: 下面等价关系链表明定理为真:

函数$f(z)$以z_0为极点 $\Leftrightarrow \exists m>0$: $\dfrac{1}{f(z)}$以点z_0为m阶零点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

注解

命题 1. 1更精确描述:

设z_0为$f(z)$的孤立奇点,则z_0为$f(z)$的m级极点的充要条件是

$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$存在且不为零.

例 确定函数 $f(z)=\dfrac{5z+1}{(z-1)(2z+1)^2}$孤立奇点的类型.

解: $f(z)$的孤立奇点为$z=1,-\dfrac{1}{2}$. 由于

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(2z+1)^2}{5z+1}(z-1)=\frac{4(z-1)}{5z+1}(z+\frac{1}{2})^2,$$

那么1为g的 单零点, $-\dfrac{1}{2}$为g的二阶零点. 故$z=1$为f的单极点, $z=-\dfrac{1}{2}$为$g(z)$的2阶极点.

上页 下页 返回 结束

四. 本质奇点的特征

命题 1.3　$f(z)$的孤立奇点z_0为本性奇点的充要条件是

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \neq \begin{cases} b & (\text{有限数}) \\ \infty & \end{cases},\ \text{即}\lim_{z\to z_0} f(z)\text{不存在}.$$

证明: 利用命题1.1及定理1.2.

推论 1.1 若$z=z_0$为函数$f(z)$的本性奇点,且在点z_0的充分小去心邻域内没有零点,则$z=z_0$亦为$\dfrac{1}{f(z)}$的本性奇点.

证明: 利用命题1.3，结论显然.

例　研究函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 孤立奇点的类型.

解：$f(z)$的孤立奇点为$z=1$.

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots,\ 0<|z-1|<+\infty. \Longrightarrow z=1\text{为}e^{\frac{1}{z-1}}\text{的本质奇点}.$$

小结 我们把孤立奇点分类及判别法总结如下表:

孤立奇点分类	可去奇点	极点	本性奇点
Laurent级数特征	无负幂项	有限负幂项	无限负幂项
极限特点	有限	无穷	不存在

例2 问 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解:

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

所以 $z=0$ 不是二级极点, 而是一级极点.

五、解析函数在无穷远的性质

定义 5.1 设函数 $f(z)$在无穷远点某去心邻域$R<|z|<+\infty(R\geq 0)$内解析,则称点∞为 $f(z)$的一个孤立奇点.

注解 若∞是 $f(z)$的奇点的聚点,则∞为 $f(z)$的非孤立奇点.

假如∞为 $f(z)$的孤立奇点,利用变换$w=\dfrac{1}{z}$, 则$\varphi(w)=f(\dfrac{1}{w})$在$0<|w|<\dfrac{1}{R}$内解析,即$w=0$为$\varphi(w)$的孤立奇点.然后把 $f(z)$在∞去心邻域内性质转换为讨论$\varphi(w)$在原点的去心邻域内的性质.

定义 5.2 若$w=0$为$\varphi(w)$的可去奇点,m级极点或本质奇点，则相应地称$z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点,m级极点或本质奇点.

定义 5.3 设 $f(z)$在$R<|z|<+\infty$内Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n z^n+\sum_{n=0}^{-\infty}b_n z^n$. 则对应$\varphi(w)$在$w=0$的Laurent展式

$$\varphi(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{-n} w^n$$

解析部分

称 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$(正幂)为 $f(z)$在$z=\infty$的主要部分.

注解 有关有限孤立奇点的类型判别法则完全可以转移到无穷远点的情形.

定理 5.1 设$z=\infty$为函数 $f(z)$的孤立奇点.则

1) $z=\infty$为可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$存在且有限;

2) $z=\infty$为极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$;

3) $z=\infty$为本质奇点极点 $\Leftrightarrow$不存在有限或无穷的极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

命题 5.1 设 $f(z)$在孤立奇点∞的Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^n+\sum_{n=0}^{-\infty}b_nz^n$.则

1）若$\forall b_n=0, n=1,2,\cdots$,则$\infty$为 $f(z)$的可去奇点;

2）若只有有限个$b_n\neq 0(n\geq 1)$,则∞为 $f(z)$的极点;

3）若有无穷个$b_n\neq 0(n\geq 1)$,则∞为 $f(z)$的本质奇点.

小结 我们把无穷远点作为孤立奇点的分类及判别法总结如下表:

无穷远作为孤立奇点的分类	可去奇点	极点	本质奇点
Laurent级数特征	无正幂项	有限正幂项	无限正幂项
极限特点	有限	无穷	不存在(包含无穷)

无穷远点作为孤立奇点，我们判别其类型也有些特别方法:

命题 5.2 设 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则 $z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点的充要条件：存在 $r>R$,使得 $f(z)$在 $r<|z|<+\infty$内有界.

命题 5.3 设 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则 $z=\infty$为 $f(z)$的m阶极点的充要条件：$f(z)=z^m g(z), g(z)$在 $|z|>R$内解析, $g(\infty)\neq 0$.

例 3　函数

$$f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

有些什么奇点, 如果是极点, 指出它的级.