

## 习题一解答

1. 求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角。

$$(1) \frac{1}{3+2i}; \quad (2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}; \quad (3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}; \quad (4) i^8 - 4i^{21} + i$$

解 (1)  $\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{1}{13}(3-2i)$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\} &= \frac{3}{13}, \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\} = -\frac{2}{13}, \\ \overline{\frac{1}{3+2i}} &= \frac{1}{13}(3+2i), \quad \left|\frac{1}{3+2i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13}, \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{3+2i}\right) &= \arg\left(\frac{1}{3+2i}\right) + 2k\pi \\ &= -\arctan \frac{2}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$(2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = \frac{-i}{i(-i)} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i - \frac{1}{2}(-3+3i) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i,$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right\} &= \frac{3}{2}, \\ \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right\} &= -\frac{5}{2}, \\ \overline{\left(\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right)} &= \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}, \quad \left|\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}, \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right) &= \arg\left(\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}\right) + 2k\pi \\ &= -\arctan \frac{5}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} &= \frac{(3+4i)(2-5i)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{(26-7i)(-2i)}{4} \\ &= \frac{-7-26i}{2} = -\frac{7}{2} - 13i \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\} &= -\frac{7}{2}, \\ \operatorname{Im}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\} &= -13, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right] &= -\frac{7}{2} + 13i \\ \left|\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right| &= \frac{5\sqrt{29}}{2}, \\ \operatorname{Arg}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right] &= \arg\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right] + 2k\pi = 2\arctan\frac{26}{7} - \pi + 2k\pi \\ &= \arctan\frac{26}{7} + (2k-1)\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad i^8 - 4i^{21} + i &= (i^2)^4 - 4(i^2)^{10}i + i = (-1)^4 - 4(-1)^{10}i + i \\ &= 1 - 4i + i = 1 - 3i\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{i^8 - 4i^{21} + i\} &= 1, \operatorname{Im}\{i^8 - 4i^{21} + i\} = -3 \\ \overline{(i^8 - 4i^{21} + i)} &= 1 + 3i, \quad |i^8 - 4i^{21} + i| = \sqrt{10} \\ \operatorname{Arg}(i^8 - 4i^{21} + i) &= \arg(i^8 - 4i^{21} + i) + 2k\pi = \arg(1 - 3i) + 2k\pi \\ &= -\arctan 3 + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

2. 如果等式  $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$  成立, 试求实数  $x, y$  为何值。

解: 由于

$$\begin{aligned}\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} &= \frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} \\ &= \frac{5(x+1)+3(y-3)+i[-3(x+1)+5(y-3)]}{34} \\ &= \frac{1}{34}[5x+3y-4] + i\frac{1}{34}[-3x+5y-18] = 1+i\end{aligned}$$

比较等式两端的实、虚部, 得

$$\begin{cases} 5x+3y-4=34 \\ -3x+5y-18=34 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 5x+3y=38 \\ -3x+5y=52 \end{cases}$$

解得  $x=1, y=11$ 。

3. 证明虚单位  $i$  有这样的性质:  $-i=i^{-1}=\bar{i}$ 。

4. 证明

$$\begin{aligned}1) \quad |z|^2 &= z\bar{z} \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$6) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

证明：可设  $z = x + iy$ ，然后代入逐项验证。

5. 对任何  $z$ ， $z^2 = |z|^2$  是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对  $z$  那些值才成立？

解：设  $z = x + iy$ ，则要使  $z^2 = |z|^2$  成立有

$x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2$ ，即  $x^2 - y^2 = x^2 + y^2, xy = 0$ 。由此可得  $z$  为实数。

6. 当  $|z| \leq 1$  时，求  $|z^n + a|$  的最大值，其中  $n$  为正整数， $a$  为复数。

解：由于  $|z^n + a| \leq |z|^n + |a| \leq 1 + |a|$ ，且当  $z = e^{i\frac{\arg a}{n}}$  时，有

$$|z^n + a| = \left| \left( e^{i\frac{\arg a}{n}} \right)^n + |a|e^{i\arg a} \right| = |(1 + |a|)e^{i\arg a}| = 1 + |a|$$

故  $1 + |a|$  为所求。

8. 将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

$$\begin{array}{lll} (1) i; & (2) -1; & (3) 1 + \sqrt{3}i; \\ (4) 1 - \cos\varphi + i\sin\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi); & (5) \frac{2i}{-1+i}; & (6) \frac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3} \end{array}$$

解：(1)  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ；

(2)  $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

(3)  $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ；

(4)  $1 - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} + i2\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2\sin \frac{\varphi}{2} \left( \sin \frac{\varphi}{2} + i\cos \frac{\varphi}{2} \right)$   
 $= 2\sin \frac{\varphi}{2} \left( \cos \frac{\pi - \varphi}{2} + i\sin \frac{\pi - \varphi}{2} \right) = 2\sin \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\pi - \varphi}{2}}, (0 \leq \varphi \leq \pi)$ ；

(5)  $\frac{2i}{-1+i} = \frac{1}{2}2i(-1-i) = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$   
 $= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i\sin \frac{\pi}{4}\right)$   
 $= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(6)  $\frac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3} = (e^{i5\varphi})^2 / (e^{-i3\varphi})^3 = e^{i10\varphi} / e^{-i9\varphi} = e^{i19\varphi}$

$$= \cos 19\varphi + i \sin 19\varphi$$

9. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

$$1) \text{ 平移公式: } \begin{cases} x = x_1 + a_1, \\ y = y_1 + b_1; \end{cases}$$

$$2) \text{ 旋转公式: } \begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

解：设  $A = a_1 + ib_1$ ， $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z = x + iy$ ，则有

$$1) z = z_1 + A; 2) z = z_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) = z_1 e^{i\alpha}.$$

10. 一个复数乘以  $-i$ ，它的模与辐角有何改变？

解：设复数  $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$ ，则  $z(-i) = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = |z| e^{i\left(\operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{2}\right)}$ ，可知复数的模不变，辐角减少  $\frac{\pi}{2}$ 。

11. 证明： $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ，并说明其几何意义。

$$\begin{aligned} \text{证明: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= 2(z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2}) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

其几何意义平行四边形的对角线长度平方的和等于四个边的平方的和。

12. 证明下列各题：

1) 任何有理分式函数  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  可以化为  $X + iY$  的形式，其中  $X$  与  $Y$  为具

有实系数的  $x$  与  $y$  的有理分式函数；

2) 如果  $R(z)$  为 1) 中的有理分式函数，但具有实系数，那么  $R(\bar{z}) = X - iY$ ；

3) 如果复数  $a + ib$  是实系数方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

的根，那么  $a - ib$  也是它的根。

$$\text{证 } 1) R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)\overline{Q(z)}}{Q(z)\overline{Q(z)}} = \frac{\operatorname{Re}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x, y)} + \frac{\operatorname{Im}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x, y)};$$

$$2) R(\bar{z}) = \frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})} = \frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}} = \overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)} = \overline{X + iY} = X - iY;$$

3) 事实上

$$P(\bar{z}) = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \bar{z} + a_n$$

$$= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = \overline{P(z)}$$

13. 如果  $z = e^{it}$ , 试证明

$$(1) \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nt; \quad (2) \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt$$

解 (1)  $z^n + \frac{1}{z^n} = e^{int} + e^{-int} = e^{int} + e^{\overline{int}} = 2 \cos nt$

(2)  $z^n - \frac{1}{z^n} = e^{int} - e^{-int} = e^{int} - e^{\overline{int}} = 2i \sin nt$

14. 求下列各式的值

$$(1) \quad (\sqrt{3} - i)^5; \quad (2) \quad (1+i)^6; \quad (3) \quad \sqrt[6]{-1}; \quad (4) \quad (1-i)^{\frac{1}{3}}$$

解 (1)  $(\sqrt{3} - i)^5 = \left[ 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \right]^5 = (2e^{-i\pi/6})^5 = 32e^{-i5\pi/6}$

$$= 32 \left[ \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] = -16\sqrt{3} - 16i$$

$$(2) \quad (1+i)^6 = \left[ \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^6 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^6 = 8e^{3\pi i/2} = -8i.$$

$$(3) \quad \sqrt[6]{-1} = (e^{i\pi+2k\pi})^{\frac{1}{6}} = e^{i\pi(2k+1)/6}, k=0,1,2,3,4,5. \text{ 可知 } \sqrt[6]{-1} \text{ 的 6 个值分别是}$$

$$e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad e^{i3\pi/2} = -i, \quad e^{i11\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

$$(4) \quad (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left[ \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3}, \quad k=0,1,2.$$

可知  $(1-i)^{1/3}$  的 3 个值分别是

$$\sqrt[3]{2}e^{-i\pi/12} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$\sqrt[3]{2}e^{i7\pi/12} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$\sqrt[3]{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

15. 若  $(1+i)^n = (1-i)^n$ , 试求  $n$  的值。

解 由题意即  $(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n, e^{in\pi/4} = e^{-in\pi/4}, \sin \frac{n}{4}\pi = 0$ ,

故  $n = 4k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

16. (1) 求方程  $z^3 + 8 = 0$  的所有根

(2) 求微分方程  $y''' + 8y = 0$  的一般解。

解 (1)  $z = (-8)^{\frac{1}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}, k=0,1,2$ 。

即原方程有如下三个解：

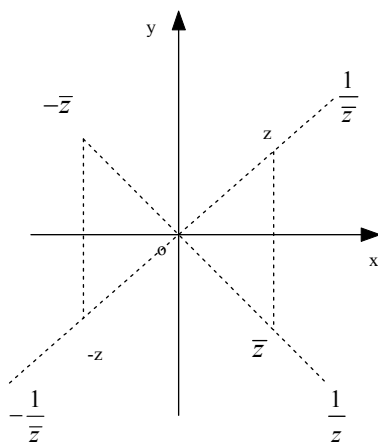
$$1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}。$$

(2) 原方程的特征方程  $\lambda^3 + 8 = 0$  有根  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$ , 故其一般形式为

$$y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \sqrt{3}x + C_3 \sqrt{x})$$

17. 在平面上任意选一点  $z$ , 然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{z}}。$$



18. 已知两点  $z_1$  与  $z_2$  (或已知三点  $z_1, z_2, z_3$ ) 问下列各点位于何处？

$$(1) z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

$$(2) z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 \text{ (其中 } \lambda \text{ 为实数);}$$

$$(3) z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)。$$

解 令  $z_k = x_k + iy_k, k=1,2,3$ , 则

$$(1) z = \frac{x_1 + x_2}{2} + i \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ 知点 } z \text{ 位于 } z_1 \text{ 与 } z_2 \text{ 连线的中点。}$$

(2)  $z = x_2 - \lambda(x_2 - x_1) + i[y_2 - \lambda(y_2 - y_1)]$ , 知点位于  $z_1$  与  $z_2$  连线上定比  $\lambda = \frac{|z - z_1|}{|z_2 - z_1|}$

处。

(3)  $z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{i}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ , 由几何知识知点  $z$  位于  $\Delta z_1 z_2 z_3$  的重心

处。

19. 设  $z_1, z_2, z_3$  三点适合条件:  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ,

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ 。证明  $z_1, z_2, z_3$  是内接于单位圆  $|z| = 1$  的一个正三角形的顶点。

证 由于  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , 知  $\Delta z_1 z_2 z_3$  的三个顶点均在单位圆上。

因为

$$\begin{aligned} 1 &= |z_3|^2 = z_3 \bar{z}_3 \\ &= [-(z_1 + z_2)][-(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)] = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= 2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \end{aligned}$$

所以,  $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -1$ , 又

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) \\ &= 2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 3 \end{aligned}$$

故

$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ , 同理  $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$ , 知  $\Delta z_1 z_2 z_3$  是内接于单位圆  $|z| = 1$  的一个正三角形。

20. 如果复数  $z_1, z_2, z_3$  满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

证明  $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ , 并说明这些等式的几何意义。

由等式得

$$\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3)$$

即  $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_1 z_3 z_2$ 。又因为

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{(z_2 - z_1) + (z_1 - z_3)}{(z_3 - z_1) + (z_2 - z_3)} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

又可得  $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_3 z_2 z_1$ , 所以知  $\Delta z_1 z_2 z_3$  是正三角形, 从而

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|。$$

21. 指出下列各题中点  $z$  的存在范围, 并作图。

(1)  $|z-5|=6$ ; (2)  $|z+2i|\geq 1$ ;

(3)  $\operatorname{Re}(z+2)=-1$ ; (4)  $\operatorname{Re}(iz)=3$ ;

(5)  $|z+i|=|z-i|$ ; (6)  $|z+3|+|z+1|=4$

(7)  $\operatorname{Im}(z)\leq 2$ ; (8)  $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$ ;

(9)  $0<\arg z<\pi$ ; (10)  $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$

解: (1) 以点  $z_0=5$  为心, 半径为 6 的圆周 (见下图 (a));

(2) 以点  $z_0=-2i$  为心, 半径为 1 的圆周及外部 (见下图 (b));

(3) 由于  $\operatorname{Re}(z+2)=-1 \Leftrightarrow x=-3$  知点  $z$  的范围是直线  $x=-3$  (见下图 (c));

(4)  $i\bar{z}=i(x-iy)=y+ix$ , 故  $\operatorname{Re}(i\bar{z})=3 \Leftrightarrow y=3$ . 知点  $z$  的范围是直线  $y=3$  (见下图 (d));

(5)  $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2=|z-i|^2 \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i)=(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$

$$|z|^2-iz+i\bar{z}+1=|z|^2+iz-i\bar{z}+1 \Leftrightarrow i\bar{z}-iz=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(i\bar{z})=0 \Leftrightarrow 2y=0$$

$\Rightarrow y=0$ . 知点  $z$  的范围是实轴 (见下图 (e));

(6)  $|z+3|+|z+1|=4 \Leftrightarrow |z+3|^2=(4-|z+1|)^2 \Leftrightarrow x-2=-2|z+1| \Leftrightarrow (x-2)^2=4|z+1|^2$

$$\Leftrightarrow 3^2+12x+4y^2=0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \text{ 即点 } z \text{ 的范围是以 } (-3,0) \text{ 和 } (-1,0)$$

为焦点, 长半轴为 2, 短半轴为  $\sqrt{3}$  的一椭圆 (见下图 (f));

(7)  $y\leq 2$ , (见下图 (g));

(8)  $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1 \Leftrightarrow |z-3|^2\geq |z-2|^2 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)\geq (z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow |z|^2-3z-3\bar{z}+9\geq$

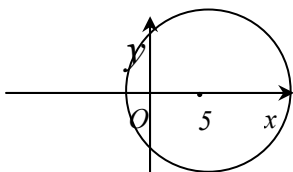
$$|z|^2-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow z+\bar{z}\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{2}. \text{ 即点 } z \text{ 的范围是直线 } x=\frac{5}{2} \text{ 以及 } x=\frac{5}{2} \text{ 为边}$$

界的左半平面 (见下图 (h));

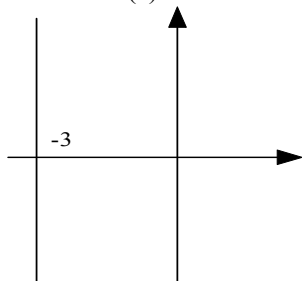
(9) 不包含实轴上半平面 (见下图 (i));

(10) 以  $i$  为起点的射线  $y=x+1, x>0$  (见下图 (j));

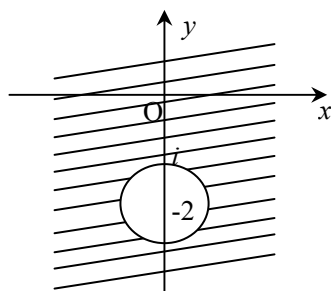




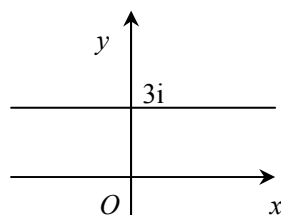
(a)



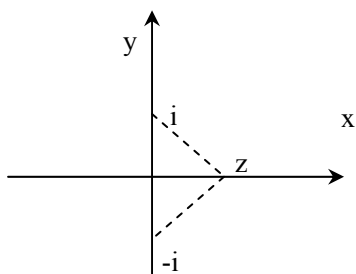
(c)



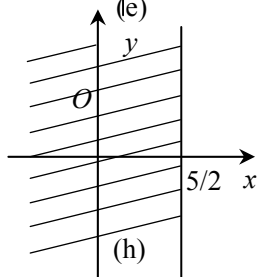
(b)



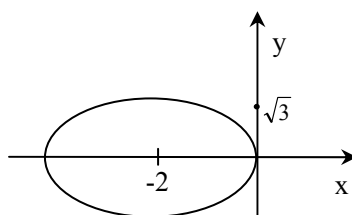
(d)



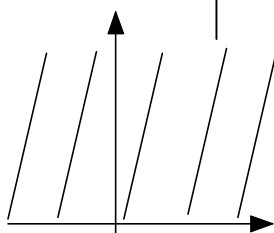
(e)



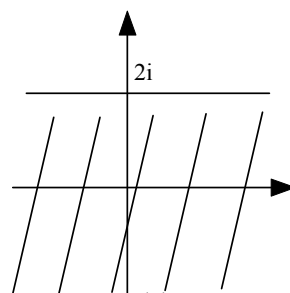
(h)



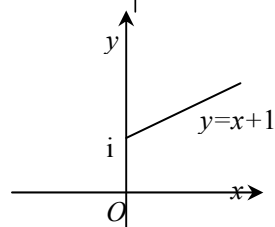
(f)



(i)



(g)



(j)

22. 描出下列不等式所确定的区域，并指是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连的还是多连的。

(1)  $\text{Im } z > 0$  ;

(2)  $|z-1| > 4$  ;

(3)  $0 < \text{Re } z < 1$  ;

(4)  $2 \leq |z| \leq 3$  ;

(5)  $|z-1| < |z+3|$  ;

(6)  $-1 < \arg z < -1 + \pi$  ;

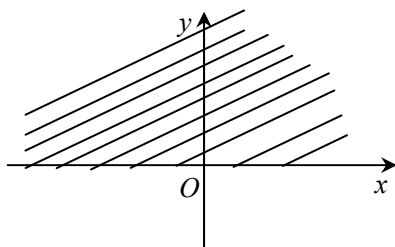
$$(7) |z-1| < 4|z+1|;$$

$$(8) |z-2| + |z+2| \leq 6;$$

$$(9) |z-2| - |z+2| > 1;$$

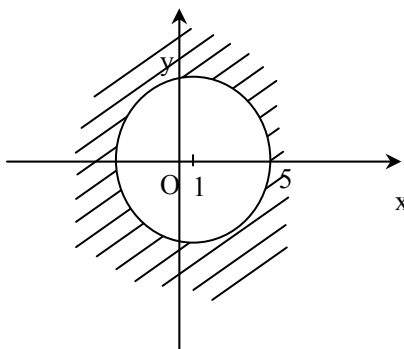
$$(10) z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4.$$

解 (1)  $\text{Im} z > 0$



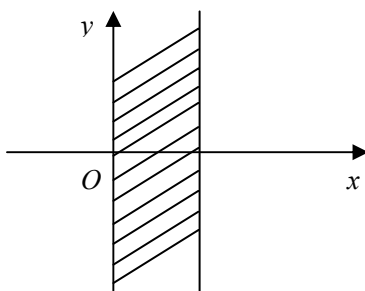
不包含实轴的上半平面，是无界的、开的单连通区域。

$$(2) |z-1| > 4$$



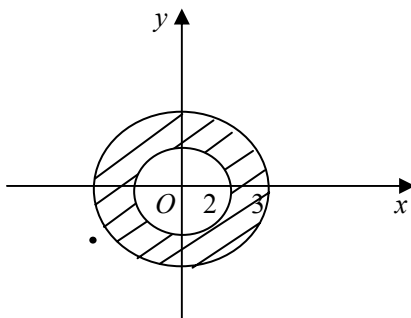
圆  $(z-1)^2 + y^2 = 16$  的外部（不包括圆周），是无界的、开的多连通区域。

$$(3) 0 < \text{Re} z < 1$$



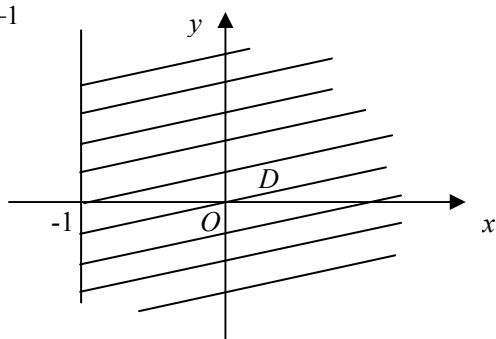
由直线  $x=0$  与  $x=1$  所围成的带形区域，不包括两直线在内，是无界的、开的单连通区域。

$$(4) 2 \leq |z| \leq 3$$



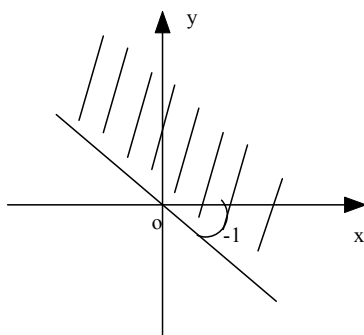
以原点为中心，2 与 3 分别为内、外半径的圆环域，不包括圆周，是有界的、开的多连通区域。

$$(5) |z-1| < |z+3| \Leftrightarrow x > -1$$



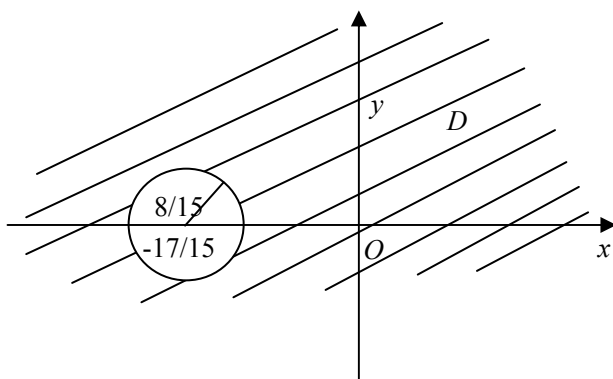
直线  $x = -1$  右边的平面区域，不包括直线在内，是无界的、开的单连通的区域。

$$(6) -1 < \arg z < -1 + \pi$$



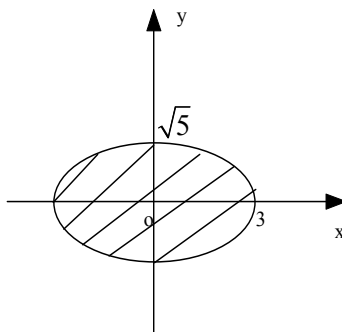
由射线  $\theta = 1$  及  $\theta = 1 + \pi$  构成的角形域，不包括两射线在内，即为一半平面，是无界的、开的单连通区域。

$$(7) |z-1| < 4|z+1| \Leftrightarrow \left(x + \frac{17}{15}\right)^2 + y^2 > \left(\frac{8}{15}\right)^2$$



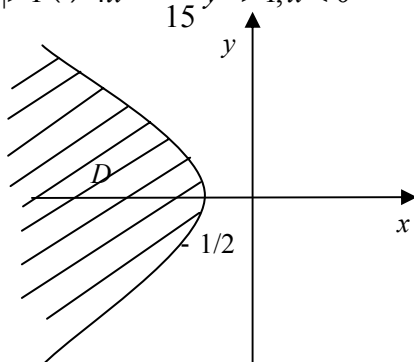
中心在点  $z = -\frac{17}{15}$ ，半径为  $\frac{8}{15}$  的圆周的外部区域（不包括圆周本身在内），是无界的、开的多连通区域。

$$(8) |z-2| + |z+2| \leq 6$$



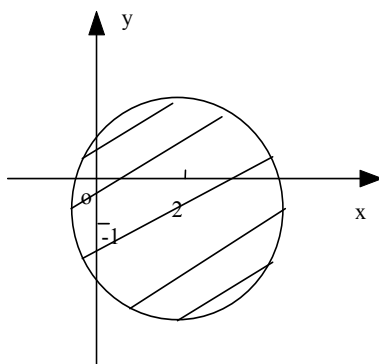
是椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  及其围成的区域，是有界的、闭的单连通区域。

$$(9) |z-2| - |z+2| > 1 \Leftrightarrow 4x^2 - \frac{4}{15}y^2 > 1, x < 0$$



是双曲线  $4x^2 - \frac{4}{15}y^2 = 1$  的左边分支的内部区域，是无界的、开的单连通区域。

$$(10) z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$$



是圆  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$  及其内部区域，是有界的、闭的单连通区域。

23. 证明： $z$  平面上的直线方程可以写成

$$a\bar{z} + \bar{a}z = C \quad (a \text{ 是非零复常数}, C \text{ 是实常数})$$

证 设 直 角 坐 标 系 的 平 面 方 程 为  $Ax + By = C$  将

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \text{ 代入, 得}$$

$$\frac{1}{2}(A - iB)z + \frac{1}{2}(A + iB)\bar{z} = C$$

$$\text{令 } a = \frac{1}{2}(A + iB), \text{ 则 } \bar{a} = \frac{1}{2}(A - iB), \text{ 上式即为 } a\bar{z} + \bar{a}z = C.$$

24. 证明复平面上的圆周方程可写成：

$$z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + c = 0, (\text{其中 } \alpha \text{ 为复常数}, c \text{ 为实常数}).$$

证  $(z + a)\overline{(z + a)} = R^2 \Leftrightarrow z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{a} - R^2 = 0$ , 其中  $c = a\bar{a} - R^2$  为实常数。

25. 求下列方程 ( $t$  是实参数) 给出的曲线。

$$(1) z = (1 + i)t;$$

$$(2) z = a \cos t + ib \sin t;$$

$$(3) z = t + \frac{i}{t};$$

$$(4) z = t^2 + \frac{i}{t^2},$$

$$(5) z = a \cosh t + ib \sinh t$$

$$(6) z = ae^{it} + be^{-it}$$

$$(7) z = e^{\alpha t}, (\alpha = a + bi \text{ 为复数})$$

解 (1)  $z = x + iy = (1 + i)t \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, -\infty < t < \infty$ 。即直线  $y = x$ 。

$$(2) z = x + iy = a \cos t + ib \sin t \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 < t \leq 2\pi, \text{ 即为椭圆}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$(3) z = x + iy = t + \frac{i}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}, \text{ 即为双曲线 } xy = 1;$$

$$(4) z = x + iy = t^2 + \frac{i}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}, \text{ 即为双曲线 } xy = 1 \text{ 中位于第一象限中的一支。}$$

$$(5) z = a\cosh t + i b\sinh t \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 双曲线}$$

$$(6) \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1, \text{ 椭圆}$$

$$(7) x^2 + y^2 = e^{\frac{2a}{b} \arctan \frac{y}{x}}$$

26. 函数  $w = \frac{1}{z}$  将  $z$  平面上的下列曲线变成  $w$  平面上的什么曲线  
( $z = x + iy, w = u + iv$ ) ?

$$(1) x^2 + y^2 = 6;$$

$$(2) y = x;$$

$$(3) x = 1;$$

$$(4) (x-1)^2 + y^2 = 1$$

解  $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$ ,  $u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ , 可得

$$(1) u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{6}, \text{ 是 } w \text{ 平面上一圆周};$$

$$(2) u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-(-y)}{x^2+y^2} = -v, \text{ 是 } w \text{ 平面上一直线};$$

$$(3) \text{ 由 } x=1, \text{ 知 } u = \frac{1}{1+y^2}, v = \frac{-y}{1+y^2}, \text{ 从而 } u^2 + v^2 = \frac{1}{1+y^2} = u$$

此为  $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  是  $w$  平面上一圆周;

$$(4) (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}, \text{ 于是 } u = \frac{1}{2}, \text{ 是 } w \text{ 平面上一}$$

平行与  $v$  轴的直线。

27. 已知映射  $w = z^3$ , 求

(1) 点  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1+i$ ,  $z_3 = \sqrt{3}+i$  在  $w$  平面上的像。

(2) 区域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$  在  $w$  平面上的像。

解 设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = z^3 = r^3 e^{i3\theta}$ 。于是

$$(1) z_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = 1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_3 = \sqrt{3}+i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

经映射后在  $w$  平面上的像分别是

$$w_1 = e^{i3\pi/3} = -i,$$

$$w_2 = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -2 + i2,$$

$$w_3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$$

(2) 因为以原点为顶点的角形域的顶角张大三倍, 所以为  $0 < \arg w < \pi$ 。

29. 设函数  $f(z)$  在  $z_0$  处连续, 且  $f(z_0) \neq 0$ , 证明存在  $z_0$  的邻域使  $f(z) \neq 0$ 。

证 因为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 且  $f(z_0) \neq 0$ 。可取  $\varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $|z - z_0| < \delta$  时, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$$

从而  $|f(z_0)| - \frac{|f(z_0)|}{2} < |f(z)|$ , 即  $|f(z)| > \frac{|f(z_0)|}{2} > 0$  即点  $z \in U(z_0, \delta)$  时, 则  $f(z) \neq 0$ 。

30. 设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 证明  $f(z)$  在  $z_0$  的某一去心邻域内是有界的。

证 取  $\varepsilon = 1$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时,  $|f(z) - A| \leq 1$ 。故在  $0 < |z - z_0| < \delta$  内,  $|f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |f(z) - A| + |A| \leq 1 + |A|$ 。

31. 设  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ , ( $z \neq 0$ ) 试证当  $z \rightarrow 0$  时  $f(z)$  的极限不存在。

证  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , 显然。

32. 试证  $\arg z$  ( $-\pi < \arg z \leq \pi$ ) 在负实轴上 (包括原点) 不连续, 除此而外在  $z$  平面上处处连续。

证 设  $f(z) = \arg z$ , 因为  $f(0)$  无定义, 所以  $f(z)$  在原点  $z=0$  处不连续。

当  $z_0$  为负实轴上的点时, 即  $z_0 = x_0$  ( $x_0 < 0$ ), 有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} \left( \arctan \frac{y}{x} + \pi \right) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} \left( \arctan \frac{y}{x} - \pi \right) \end{cases} = \begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}$$

所以  $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z$  不存在, 即  $\arg z$  在负实轴上不连续。而  $\arg z$  在  $z$  平面上的其它点处的连续性显然。

## 习题二解答

1. 利用导数定义推出:

$$1) (z^n)' = nz^{n-1}, (n \text{ 是正整数}); \quad 2) \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

$$\text{证 } 1) (z^n)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (nz^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} \Delta z + \cdots \Delta z^{n-1}) = nz^{n-1}$$

$$2) \left(\frac{1}{z}\right)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = -\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{z(z + \Delta z)} = -\frac{1}{z^2}$$

2. 下列函数何处可导? 何处解析?

$$(1) f(z) = x^2 - iy$$

$$(2) f(z) = 2x^3 + 3y^3i$$

$$(3) f(z) = xy^2 + ix^2y$$

$$(4) f(z) = \sin xchy + i \cos xshy$$

$$\text{解 } (1) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

在  $z$  平面上处处连续, 且当且仅当  $x = -\frac{1}{2}$  时,  $u, v$  才满足 C-R 条件, 故  $f(z) = u + iv = x - iy$  仅在直线  $x = -\frac{1}{2}$  上可导, 在  $z$  平面上处处不解析。

$$(2) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 9y^2$$

在  $z$  平面上处处连续, 且当且仅当  $2x^2 = 3y^2$ , 即  $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$  时,  $u, v$  才满足 C-R 条件, 故  $f(z) = u + iv = 2x^3 + 3y^3i$  仅在直线  $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$  上可导, 在  $z$  平面上处处不解析。

$$(3) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

在  $z$  平面上处处连续, 且当且仅当  $z=0$  时,  $u, v$  才满足 C-R 条件, 故  $f(z) = xy^2 + ix^2y$  仅在点  $z=0$  处可导, 在  $z$  平面处处不解析。

$$(4) \text{ 由于 } \frac{\partial u}{\partial x} = \cos xchy, \frac{\partial u}{\partial y} = \sin xshy, \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin xshy, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos xchy$$

在  $z$  平面上处处连续, 且在整个复平面  $u, v$  才满足 C-R 条件, 故  $f(z) = \sin xchy + i \cos xshy$  在  $z$  平面处处可导, 在  $z$  平面处处不解析。

3. 指出下列函数  $f(z)$  的解析性区域, 并求出其导数。

$$1) (z-1)^5;$$

$$(2) z^3 + 2iz;$$

$$3) \frac{1}{z^2 - 1};$$

$$(4) \frac{az+b}{cz+d} (c, d \text{ 中至少有一个不为 } 0)$$

解 (1) 由于  $f'(z) = 5(z-1)^4$ , 故  $f(z)$  在  $z$  平面上处处解析。

(2) 由于  $f'(z) = 3z^2 + 2i$ , 知  $f(z)$  在  $z$  平面上处处解析。

$$(3) \text{ 由于 } f'(z) = \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = -\frac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

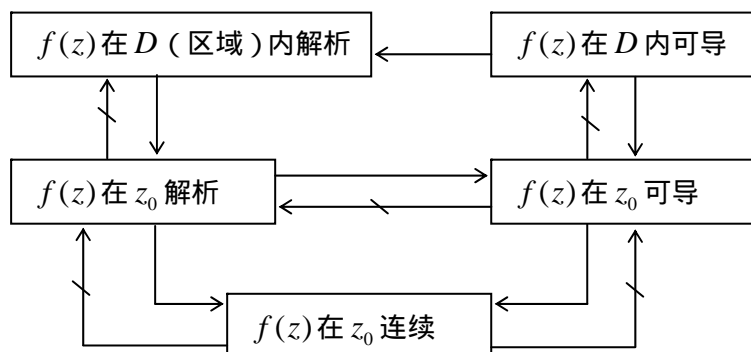
知  $f(z)$  在除去点  $z = \pm 1$  外的  $z$  平面上处处可导。处处解析,  $z = \pm 1$  是  $f(z)$  的奇点。



(4) 由于  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ , 知  $f(z)$  在除去  $z = -d/c (c \neq 0)$  外在复平面上处处解析。

5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同? 判断函数的解析性有那些方法?

答:



判定函数解析主要有两种方法: 1) 利用解析的定义: 要判断一个复变函数在  $z_0$  是否解析, 只要判定它在  $z_0$  及其邻域内是否可导; 要判断该函数在区域  $D$  内是否解析, 只要判定它在  $D$  内是否可导; 2) 利用解析的充要条件, 即本章 §2 中的定理二。

6. 判断下述命题的真假, 并举例说明。

(1) 如果  $f(z)$  在  $z_0$  点连续, 那么  $f'(z_0)$  存在。

(2) 如果  $f'(z_0)$  存在, 那么  $f(z)$  在  $z_0$  点解析。

(3) 如果  $z_0$  是  $f(z)$  的奇点, 那么  $f(z)$  在  $z_0$  不可导。

(4) 如果  $z_0$  是  $f(z)$  和  $g(z)$  的一个奇点, 那么  $z_0$  也是  $f(z) + g(z)$  和  $f(z)/g(z)$  的奇点。

(5) 如果  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  可导 (指偏导数存在), 那么  $f(z) = u + iv$  亦可导。

(6) 设  $f(z) = u + iv$  在区域内是解析的。如果  $u$  是实常数, 那么  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数; 如果  $v$  是实常数, 那么  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数;

解

(1) 命题假。如函数  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$  在  $z$  平面上处处连续, 除了点  $z=0$  外处处不可导。

(2) 命题假, 如函数  $f(z) = |z|^2$  在点  $z=0$  处可导, 却在点  $z=0$  处不解析。

(3) 命题假, 如果  $f(z)$  在  $z_0$  点不解析, 则  $z_0$  称为  $f(z)$  的奇点。如上例。

(4) 命题假, 如  $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y, g(z) = i \cos x \operatorname{sh} y, z = (\pi/2, 0)$  为它们的奇点, 但不是  $f(z) + g(z)$  的奇点。

(5) 命题假。如函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z = x^2 + ixy$  仅在点  $z=0$  处满足 C-R 条件, 故  $f(z)$  仅在点  $z=0$  处可导。

(6) 命题真。由  $u$  是实常数, 根据 C-R 方程知  $v$  也是实常数, 故  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数; 后面同理可得。

7. 如果  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 证明:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right)^2 = |f'(z)|^2$$

证  $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$ , 于是

$$\frac{\partial}{\partial x} |f(z)| = \frac{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| = \frac{u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

由于  $f(z) = u + iv$  为解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

从而

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} |f(z)| \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} |f(z)| \right)^2 &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[ u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + v^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2uv \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2uv \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ u^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + v^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2) |f'(z)|^2 = |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

9. 证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，利用复合函数求导法则和  $u, v$  满足 C-R 条件，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta = r \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}$$

即  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ 。又

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

总之，有  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$ 。

10. 证明：如果函数  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内解析，并满足下列条件之一，那么  $f(z)$  是常数。

- (1)  $f(z)$  恒取实值。
- (2)  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内解析。
- (3)  $|f(z)|$  在  $D$  内是一个常数。
- (4)  $\arg f(z)$  在  $D$  内是一个常数。
- (5)  $au + bv = c$ ，其中  $a, b$  与  $c$  为不全为零的实常数。

解 (1) 若  $f(z)$  恒取实值, 则  $v=0$ , 又根据  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 知 C-R 条件成立, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

故  $u$  在区域  $D$  内为一常数, 记  $u=C$  (实常数), 则  $f(z)=u+iv=C$  为一常数。

(2) 若  $\overline{f(z)} = \overline{u+iv} = u-iv$  在区域  $D$  内解析, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

又  $f(z)=u+iv$  在区域  $D$  内解析, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

结合 (1) (2) 两式, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

故  $u, v$  在  $D$  内均为常数, 分别记之为

$$u_1 = C_1, u_2 = C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为实常数}),$$

则

$$f(z) = u + iv = C_1 + iC_2 = C$$

为一复常数。

(3) 若  $|f(z)|$  在  $D$  内为一常数, 记为  $C_1$ , 则  $u^2 + v^2 = C_1^2$ , 两边分别对于  $x$  和  $y$  求偏导, 得

$$\begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

由于  $f(z)$  在  $D$  内解析, 满足 C-R 条件  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  代入上式又可写得

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 。同理, 可解得  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  故  $u, v$  均为常数, 分别记为  $u = C_1, v = C_2$ , 则

$f(z) = u + iv = C_1 + iC_2 = C$  为一复常数。

(4) 若  $\arg z$  在  $D$  内是一个常数  $C_1$ , 则  $f(z) \neq 0$ , 从而  $f(z) = u + iv \neq 0$ , 且

$$\arg f(z) = \begin{cases} \arctan \frac{v}{u}, & u > 0 \\ \arctan \frac{v}{u} + \pi, & u < 0, v > 0 \\ \arctan \frac{v}{u} - \pi, & u < 0, v < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} C_1 & u > 0 \\ C_1 + \pi & u < 0, v > 0 \\ C_1 - \pi & u < 0, v < 0 \end{cases}$$

总之对  $\arg f(z)$  分别关于  $x$  和  $y$  求偏导, 得

$$\frac{\frac{1}{u^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2} = \frac{u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2 + v^2} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{u^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2} = \frac{u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}}{u^2 + v^2} = 0$$

化简上式并利用  $f(z)$  解析，其实、虚部满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases} -v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ，同理也可求得  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，即  $u$  和  $v$  均为实常数，分别记为  $C_2$  和  $C_3$ ，从而

$f(z) = u + iv = C_2 + iC_3 = C$  为一复常数。

(5) 若  $au + bv = c$ ，其中  $a$ 、 $b$  和  $c$  为不全为零的实常数，这里  $a$  和  $b$  不全为 0，即  $a^2 + b^2 \neq 0$ ，否则此时  $a$ 、 $b$  和  $c$  全为零。对方程  $au + bv = c$  分别对于  $x$  和  $y$  求偏导，得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

再利用解析函数  $f(z) = u + iv$  的实、虚部  $u$  和  $v$  满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ，同理也可求得  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，知函数  $f(z)$  为一常数。

11. 下列关系是否正确？

$$(1) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}; \quad (2) \overline{\cos z} = \cos \bar{z}; \quad (3) \overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

解 (1)  $e^{\bar{z}} = e^{x - iy} = e^x (\cos y - i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x + iy} = e^z$

$$(2) \overline{\cos z} = \overline{\left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)} = \frac{1}{2} (\overline{e^{iz}} + \overline{e^{-iz}}) = \frac{1}{2} (e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}) = \cos \bar{z}。$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \overline{\sin z} &= \overline{\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})} = \frac{1}{2i} (\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}) = \frac{1}{-2i} (e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}) = \sin \bar{z}。 \end{aligned}$$

12. 找出下列方程的全部解。

$$(3) 1 + e^z = 0; \quad (4) \sin z + \cos z = 0;$$

解 (3) 原方程等价于  $e^z = -1$ ，于是它的解为：

$$z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i[\arg(-1) + 2k\pi] = i\pi(1+2k) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(4) 由于  $\sin z = -\cos z$ ,  $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ , 故

$$e^{2iz} - 1 = -i(e^{2iz} + 1)$$

$$e^{2iz} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}(-i) = \frac{1}{2i} [\ln|-i| + i(\arg(-i) + 2k\pi)] \\ &= \frac{i}{2i} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(k - \frac{1}{4}\right)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

13. 证明:

(1)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ ;

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ ;

(2)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ; (3)  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ ; (4)  $\tan 2z = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}$ ;

(5)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$ ,  $\cos(z + \pi) = -\cos z$ ;

(6)  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ ,  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$

证 (1) 左 =  $\cos(z_1 + z_2) = \frac{1}{2} [e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}]$

右 =  $\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} \end{aligned}$$

可见左=右, 即  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ ;

左 =  $\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}]$

右 =  $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} (e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \frac{1}{2} (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{2} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2i} (e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{4i} [e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] + \frac{1}{4i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] \\ &= \frac{1}{4i} [2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}] = \frac{1}{2i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] \end{aligned}$$

可见左=右, 即  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(2)  $\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right)^2$

$$= -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1$$

$$(3) \text{ 左} = \sin 2z = \frac{1}{2i}(e^{i2z} - e^{-i2z})$$

$$\begin{aligned} \text{右} &= 2 \sin z \cos z = 2 \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{i2z} + 1 - 1 - e^{-i2z}) = \frac{1}{2i}(e^{i2z} - e^{-i2z}) \end{aligned}$$

可见左=右, 即  $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$ 。

$$(4) \tan 2z = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \frac{2 \sin z \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z} = 2 \frac{\sin z}{\cos z} \left/ \left[ 1 - \left( \frac{\sin z}{\cos z} \right)^2 \right] \right. = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}$$

(5) 由(1)知

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} + (-z)\right] = \sin \frac{\pi}{2} \cos(-z) + \cos \frac{\pi}{2} \sin(-z) \\ &= \cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \cos z \end{aligned}$$

由(1)得  $\cos(z + \pi) = \cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi = -\cos z$

$$\begin{aligned} (6) \text{ 左} &= |\cos z|^2 = |\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左} &= |\sin z|^2 = |\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}$$

14. 说明: 1) 当  $y \rightarrow \infty$  时,  $|\sin(x + iy)|$  和  $|\cos(x + iy)|$  趋于无穷大;

2) 当  $t$  为复数时,  $|\sin t| \leq 1$  和  $|\cos t| \leq 1$  不成立。

$$\text{解 } 1) |\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \geq \frac{|e^{-y} - e^y|}{2}; |\cos z| \text{ 同理。}$$

$$2) \text{ 设 } t = iy, y \in R, \text{ 则 } |\sin t| = \frac{|e^{-y} - e^y|}{2}, \text{ 则当 } y \rightarrow \infty \text{ 时显然题设不成立。}$$

15. 求  $\operatorname{Ln}(-i)$ ,  $\operatorname{Ln}(-3 + 4i)$  和它们的主值。

$$\text{解 } \operatorname{Ln}(-i) = \operatorname{Ln}|-i| + i(\arg(-i) + 2k\pi) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$= i\pi\left(2k - \frac{1}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\ln(-i) = \ln|-i| + i \arg(-i) = -\frac{\pi i}{2}$$

$$\operatorname{Ln}(-3 + 4i) = \ln|-3 + 4i| + i[\arg(-3 + 4i) + 2k\pi]$$

$$= \ln 5 + i\left[\left(\pi - \arctan \frac{4}{3}\right) + 2k\pi\right]$$

$$= \ln 5 - i \left[ \arctan \frac{4}{3} - (2k+1)\pi \right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\ln(-3+4i) = \ln|-3+4i| + i \arg(-3+4i) = \ln 5 + i \left( \pi - \arctan \frac{4}{3} \right).$$

16. 证明对数的下列性质：1)  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ；2)  $\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ 。

证明 1)  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln(|z_1 z_2|) + i \operatorname{Arg} z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2 + i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ；

2)  $\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \ln(|z_1 / z_2|) + i \operatorname{Arg} z_1 / z_2 = \ln z_1 - \ln z_2 + i \operatorname{Arg} z_1 - i \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ 。

17. 说明下列等式是否正确：1)  $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z$ ；2)  $\operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z$ 。

解：两式均不正确。1)  $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \ln|z| + i \operatorname{Arg}(2z)$ , 而  $2 \operatorname{Ln} z = 2 \ln|z| + 2i \operatorname{Arg}(z)$ ；

2)  $\operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \ln|z| + i \operatorname{Arg}(\sqrt{z})$ , 而  $\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{2} \ln|z| + \frac{i}{2} \operatorname{Arg}(z)$ 。

18. 求  $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$ ,  $\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right)$ ,  $3^i$  和  $(1+i)^i$  的值。

解：

$$e^{1-i\frac{\pi}{2}} = e e^{-i\frac{\pi}{2}} = e \left( \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -i e$$

$$\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{4}} (1+i)$$

$$3^i = e^{i \ln 3} = e^{i[\ln 3 + i(\arg 3 + 2k\pi)]} = e^{-2k\pi} e^{i \ln 3} = e^{-2k\pi} (\cos \ln 3 + i \sin \ln 3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i(\arg(1+i) + 2k\pi)]}$$

$$= e^{\frac{i \ln 2}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} = e^{-\pi\left(\frac{1}{4} + 2k\right)} \left( \cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

19. 证明  $(z^a)' = a z^{a-1}$ , 其中  $a$  为实数。

$$\text{证明} \quad (z^a)' = (e^{a \ln z + 2k\pi i})' = a(\ln z)' e^{a \ln z + 2k\pi i} = a \frac{1}{z} z^a = a z^{a-1}.$$

20. 证明 1)  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ ；2)  $\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \operatorname{ch} 2z$ ；

3)  $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$ ； $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$ 。

$$\text{证明 1) } \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = 1;$$

$$2) \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = 1;$$

$$\begin{aligned} 3) \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 &= \frac{(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2})}{4} + \frac{(e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2})}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

21. 解下列方程：1)  $\operatorname{sh} z = 0$  ; 2)  $\operatorname{ch} z = 0$  ; 3)  $\operatorname{sh} z = i$ 。

解 1) 由  $\operatorname{sh} z = 0$  得  $e^{2z} = 1$  ,  $z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 1 = i k \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

2) 由  $\operatorname{ch} z = 0$  得  $e^{2z} = -1$  ,  $z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(-1) = \frac{(2k+1)}{2} i \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

3) 由  $\operatorname{sh} z = i$  得  $e^z = i$  ,  $z = \operatorname{Ln} i = i(2k + \frac{1}{2})\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

23. 证明:  $\operatorname{sh} z$  的反函数  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ 。

证 设  $\operatorname{sh} w = z$  , 即  $\frac{e^w - e^{-w}}{2} = z \Rightarrow e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$  解得  $e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$  ,

故  $w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ 。

24. 已知平面流速场的复势  $f(z)$  为

$$(1) (z+i)^2 ; \quad (2) z^3 ; \quad (3) \frac{1}{z^2+1} ;$$

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解 (1)  $V(z) = \overline{f'(z)} = \overline{2(z+i)} = 2(\bar{z}-i)$  为流速, 又

$$f(z) = (z+i)^2 = [x+i(y+1)]^2 = x^2 - (y+1)^2 + i2x(y+1)$$

知流线和等势线方程分别为  $x(y+1) = C_1$  和  $x^2 - (y+1)^2 = C_2$ 。

(2) 流速  $V(z) = \overline{f'(z)} = \overline{3z^2} = 3\bar{z}^2$  , 又  $f(z) = z^3 = x(x^2 - 3y^2) + i y(3x^2 - y^2)$  ,

流线方程:  $(3x^2 - y^2)y = C_1$  , 等势线方程:  $x(x^2 - 3y^2) = C_2$ 。

$$(3) \text{ 流速 } V(z) = \overline{f'(z)} = \overline{\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'} = \overline{\left(\frac{-2z}{z^2+1}\right)'} = \frac{-2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$$

$$\text{又 } f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + i2xy} = \frac{x^2 - y^2 + 1 - i2xy}{(x^2 - y^2 + 1) + 4x^2y^2} ,$$

$$\text{流线方程为 } \frac{xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} = C_1 ,$$

$$\text{等势线方程为 } \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1) + 4x^2y^2} = C_2 .$$



## 习题三解答

1. 沿下列路线计算积分  $\int_0^{3+i} z^2 dz$ 。

(1) 自原点到  $3+i$  的直线段

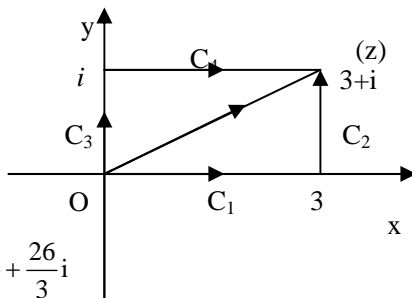
(2) 自原点沿实轴至  $3$ ，再由  $3$  沿垂直向上至  $3+i$ ；

(3) 自原点沿虚轴至  $i$ ，再由  $i$  沿水平方向右至  $3+i$ 。

解 (1)  $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$ ，故  $z=3t+it$ ， $0 \leq t \leq 1$ 。  $dz=(3+i)dt$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{3+i} z^2 dz &= \int_0^1 (3t+it)^2 (3+i) dt \\ &= (3+i)^3 \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (3+i)^3 t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (3+i)^3 = 6 + \frac{26}{3}i \end{aligned}$$



(2)  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz$ 。  $C_1$  之参数方程为  $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$ ；  $C_2$  之参数方程为  $\begin{cases} x=3, \\ y=t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$

故  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3+it)^2 \cdot i dt = 6 + \frac{26}{3}i$ 。

(3)  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^i z^2 dz + \int_i^{3+i} z^2 dz = \int_{C_3} z^2 dz + \int_{C_4} z^2 dz$ 。

$C_3: z=it (0 \leq t \leq 1)$ ；  $C_4: z=3t+i (0 \leq t \leq 1)$ ，

故  $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot i dt + \int_0^1 (3t+i)^2 \cdot 3dt = 6 + \frac{26}{3}i$

2. 分别沿  $y=x$  与  $y=x^2$  算出、积分  $\int_0^{1+i} (x^2+iy) dz$  的值。

解 (1) 沿  $y=x$ 。此时  $z=t+it (0 \leq t \leq 1)$ 。  $dz=(1+i)dt$ ，于是

$$\int_0^{1+i} (x^2+iy) dz = \int_0^1 (t^2+it)(1+i) dt = (1+i) \int_0^1 (t^2+it) dt = (1+i) \left( \frac{1}{3} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

(2) 沿  $y=x^2$ ，此时  $z=t+it^2 (0 \leq t \leq 1)$ 。  $dz=(1+2it)dt$ ，故

$$\begin{aligned} \int_0^{1+i} (x^2+iy) dz &= \int_0^1 (t^2+it^2)(1+2it) dt = (1+i) \int_0^1 (1+2it) dt = (1+i) \int_0^1 (t^2+it^3) dt \\ &= (1+i) \left( \frac{1}{3} + \frac{i}{2} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i \end{aligned}$$

3. 设  $f(z)$  在单连域  $D$  内解析， $C$  为  $D$  内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = 0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

解 未必成立。令  $f(z)=z$ ， $C:|z|=1$ ，则  $f(z)$  在全平面上解析，但是

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[e^{i\theta}]de^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \cos\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = \pi i \neq 0$$

$$\oint_C \operatorname{Im}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[e^{i\theta}]de^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \sin\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = -\pi \neq 0$$

4. 利用单位圆上  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  的性质, 及柯西积分公式说明  $\oint_C \bar{z}dz = 2\pi i$ , 其中  $C$  为正向单位圆周  $|z|=1$ 。

解  $\oint_C \bar{z}dz = \oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$ , (利用柯西积分公式)

5. 计算积分  $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$  的值, 其中  $C$  为正向圆周: (1)  $|z|=2$ ; (2)  $|z|=4$

解 (1) 因在  $|z|=2$  上有  $|z|=2$ ,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4$ , 从而有  $\bar{z} = \frac{4}{z}$ , 故有

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{4}{z}}{2}dz = \oint_{|z|=2} \frac{2}{z}dz = 4\pi i$$

(2) 因在  $C$  上有  $|z|=4$ ,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 16$ , 从而有  $\bar{z} = \frac{16}{z}$ , 故有

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=4} \frac{\frac{16}{z}}{4}dz = \oint_{|z|=4} \frac{4}{z}dz = 8\pi i$$

6. 利用观察法得出下列积分的值。

解 利用柯西 - 古萨基本定理和柯西积分公式。

7. 沿指定曲线的正向计算下列各积分。

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, C: |z-2|=1$$

$$(2) \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}, C: |z-a|=a$$

$$(3) \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz, C: |z-2i|=3/2$$

$$(4) \oint_C \frac{zdz}{z-3}, C: |z|=2$$

$$(5) \oint_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}, C: |z|=r<1$$

$$(6) \oint_C z^3 \cos z dz, C \text{ 为包围 } z=0 \text{ 的闭曲线}$$

$$(7) \oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z|=3/2$$

$$(8) \oint_C \frac{\sin z dz}{z}, C: |z|=1$$

$$(9) \oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz, C: |z|=2$$

$$(10) \oint_C \frac{e^z dz}{z^5}, C: |z|=1$$

解 (1) 由 Cauchy 积分公式,  $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^z|_{z=2} = 2\pi e^2 i$

$$(2) \quad \text{解 1: } \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz = 2\pi i \frac{1}{z+a}\bigg|_{z=a} = \frac{\pi}{a} i,$$

$$\text{解 2: } \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left[ \oint_C \frac{1}{z-a}dz - \oint_C \frac{1}{z+a}dz \right] = \frac{1}{2a} [2\pi i - 0] = \frac{\pi}{a} i$$

$$(3) \text{ 由 Cauchy 积分公式, } \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^{iz}dz/(z+i)}{z-i} = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} = \pi e$$

(4)(5)(6) 由柯西基本定理知：其结果均为 0

(7) 因被积函数的奇点  $z = \pm i$  在  $C$  的内部， $z = \pm 2i$  在  $C$  的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \\&= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{(z-i)(z^2+4)} dz \\&= 2\pi i \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} \Big|_{z=i} + 2\pi i \frac{1}{(z-i)(z^2+4)} \Big|_{z=-i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0\end{aligned}$$

(8) 由 Cauchy 积分公式， $\oint_C \frac{\sin z dz}{z} = 2\pi i \sin z \Big|_{z=0} = 0$

(9) 由高阶求导公式， $\oint_C \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 2\pi i (\sin z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

(10) 由高阶求导公式， $\oint_C \frac{e^z dz}{z^5} = \frac{2\pi i}{4!} (e^z)^{(4)} \Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}$

8. 计算下列各题：

1)  $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz$  ; 2)  $\int_{\frac{\pi i}{6}}^0 \operatorname{ch} 3z dz$  ; 3)  $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$  ; 4)  $\int_0^1 z \sin z dz$  ;

5)  $\int_0^i (z-i)e^{-z} dz$  ; 6)  $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z} dz$  (沿 1 到  $i$  的直线段)。

解 1)  $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz = \frac{e^{2z}}{2} \Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = 0$       2)  $\int_{\frac{\pi i}{6}}^0 \operatorname{ch} 3z dz = \frac{1}{3} \operatorname{sh} 3z \Big|_{\frac{\pi i}{6}}^0 = -i/3$

3)  $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1-\cos 2z}{2} dz = \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}\right) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = (\pi - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\pi) i$

4)  $\int_0^1 z \sin z dz = (\sin z - z \cos z) \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$

5)  $\int_0^i (z-i)e^{-z} dz = (i-1-z)e^{-z} \Big|_0^i = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$

6)  $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z} dz = (\tan z + \tan^2 z / 2) \Big|_1^i = -(\tan 1 + \frac{1}{2} \tan^2 1 + \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 1) + i \operatorname{th} 1$

9. 计算下列积分：

1)  $\oint_C \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right) dz$ , 其中  $C: |z|=4$  为正向

2)  $\oint_C \frac{2i}{z^2+1} dz$ , 其中  $C: |z-1|=6$  为正向

3)  $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz$ , 其中  $C_1: |z|=2$  为正向,  $C_2: |z|=3$  为负向

4)  $\oint_C \frac{dz}{z-i}$ , 其中  $C$  为以  $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{6}{5}i$  为顶点的正向菱形

5)  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz$ , 其中  $a$  为  $|a| \neq 1$  的任何复数,  $C: |z|=1$  为正向

解 1)  $\oint_C (\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}) dz = 2\pi i(4+3) = 14\pi i$

2)  $\oint_C \frac{2i}{z^2+1} dz = \oint_{|z-i|=1} \frac{2i/(z+i)}{z-i} dz + \oint_{|z+i|=1} \frac{2i/(z-i)}{z+i} dz = 0$

3)  $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3} dz - \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'|_{z=0} - \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'|_{z=0} = 0$

4)  $\oint_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$

5) 当  $|a| > 1$  时,  $1/(z-a)^3$  在  $|z| \leq 1$  上解析, 故  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz = 0$  ;

当  $|a| < 1$  时,  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (e^z)''|_{z=a} = \pi i e^a$

10. 证明: 当  $C$  为任何不通过原点的简单闭曲线时,  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ 。

证明 当原点在曲线  $C$  内部时,  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i(1)'|_{z=0} = 0$ ; 当原点在曲线  $C$  外部时,  $1/z^2$  在  $C$  内

解析, 故  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ 。

11. 下列两个积分的值是否相等? 积分 2) 的值能否利用闭路变形原理从 1) 的值得到? 为什么?

1)  $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz$ ; 2)  $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz$

解  $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} 2ie^{-i\theta} d\theta = 0$ ;  $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} 4ie^{-i\theta} d\theta = 0$ , 故两个积分的值相等。但不能利用闭路

变形原理从 1) 的值得到, 因  $\frac{\bar{z}}{z}$  不是一个解析函数。

12. 设区域  $D$  为右半平面,  $z$  为  $D$  内圆周  $|z|=1$  上的任意一点, 用在  $D$  内的任意一条曲线  $C$  连结原点与  $z$ , 证明  $\operatorname{Re} \left[ \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta \right] = \frac{\pi}{4}$ 。

证明 函数  $\frac{1}{1+\zeta^2}$  在右半平面解析, 故在计算从 0 到  $z$  沿任意一条曲线  $C$  的积分时与积分路径无

关。则  $\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}} d\eta = \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{2i \cos \eta}{1 + \cos 2\eta} d\eta$ . (分子分母同乘以  $1+e^{-2i\eta}$ ),

故  $\operatorname{Re} \left[ \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta \right] = \frac{\pi}{4}.$

13. 设  $C_1$  与  $C_2$  为相交于  $M$ 、 $N$  两点的简单闭曲线, 它们所围的区域分别为  $B_1$  与  $B_2$ 。  $B_1$  与  $B_2$  的公共部分为  $B$ 。如果  $f(z)$  在  $B_1 - B$  与  $B_2 - B$  内解析, 在  $C_1$ 、 $C_2$  上也解析, 证明:  $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ 。

证明 在  $B_1 - B$  上  $f(z)$  为解析函数, 则由柯西基本定理  $\oint_{MENG} f(z) dz = 0$ ; 同理  $\oint_{MHNFM} f(z) dz = 0$

则  $\int_{NGM} f(z) dz + \int_{MEN} f(z) dz = \int_{MHN} f(z) dz + \int_{NFM} f(z) dz$ , 即  $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ 。

14. 设  $C$  为不经过  $a$  与  $-a$  的正向简单闭曲线,  $a$  为不等于零的

任何复数, 试就  $a$  与  $-a$  同  $C$  的各种不同位置, 计算积分  $\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz$ 。

解 (i) 当  $a$  在  $C$  的内部而  $-a$  在  $C$  的外部时

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = \oint_C \frac{z+a}{z-a} dz = 2\pi i \frac{z}{z+a} \Big|_{z=a} = \pi i.$$

(ii) 当  $-a$  在  $C$  的内部而  $a$  在  $C$  的外部时,

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = \oint_C \frac{z-a}{z+a} dz = 2\pi i \frac{z}{z-a} \Big|_{z=-a} = \pi i$$

(iii) 当  $a$  与  $-a$  在  $C$  的内部时, 设  $C_1, C_2$  分别为以  $a, -a$  为心半径充分小的圆周使  $C_1, C_2$  均在  $C$  的内部且互不相交也互不包含, 则由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式得

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = \oint_{C_1} \frac{z+a}{z-a} dz + \oint_{C_2} \frac{z-a}{z+a} dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

(iv) 当  $a$  与  $-a$  都在  $C$  的外部时, 由 Cauchy-Goursat 定理得

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - a^2} dz = 0.$$

15. 设  $C_1$  与  $C_2$  为两条互不包含, 也互不相交的正向简单闭曲线, 证明:

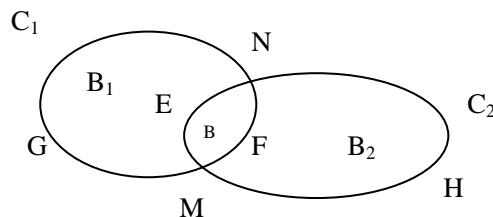
$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} + \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} \right] = \begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时,} \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时.} \end{cases}$$

证明 利用 Cauchy 积分公式, 当  $z_0$  在  $C_1$  内时,  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} = z^2 \Big|_{z=z_0} = z_0^2$ , 而  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} = 0$ ;

当  $z_0$  在  $C_2$  内时,  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} = 0$ , 而  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} = \sin z \Big|_{z=z_0} = \sin z_0$ 。故结论成立。

16. 设函数  $f(z)$  在  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z| = r, 0 < r < 1$  的积分为零, 问  $f(z)$  是否需在  $z=0$  处解析? 试举例说明之。

解 不一定。如令  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ , 则其在  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z| = r, 0 < r < 1$  的积分



$$\oint_C f(z) dz = \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

但显然  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  在  $z=0$  处不解析。

17. 设  $f(z)$  与  $g(z)$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内任何一条简单光滑闭曲线, 它的内部全属于  $D$ 。如果  $f(z) = g(z)$  在  $C$  上所有点都成立, 试证在  $C$  的内部所有点处  $f(z) = g(z)$  也成立。

证 因  $f(z), g(z)$  在  $D$  内处处解析故在  $C$  上及其内部也处处解析, 设  $z_0$  为  $C$  的内部的任一点, 则由 Cauchy 积分公式有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{z - z_0} dz,$$

又因在  $C$  上  $f(z) = g(z)$ , 故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{g(z)}{z - z_0} dz,$$

从而  $f(z_0) = g(z_0)$ , 由  $z_0$  的任意性, 在  $C$  的内部均有  $f(z) = g(z)$ 。

18. 设区域  $D$  是圆环域,  $f(z)$  在  $D$  内解析, 以圆环的中心为中心作正向圆周  $K_1$  与  $K_2$ ,  $K_2$  包含  $K_1$ ,  $z_0$  为  $K_1, K_2$  之间任一点, 试证 (3.5.1) 仍成立, 但  $C$  要换成  $K_1^- + K_2$  (见图)。

证明 参照 78 页闭路变形定理的证明方法。

19. 设  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内解析, 且不为零,  $C$  为  $D$  内任何一条简单光滑闭曲线, 问积分  $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

是否为零? 为什么?

解 等于零。因  $f(z)$  在  $D$  内解析, 故  $f(z)$  具有各阶导数且仍为解析函数, 从而  $f'(z)$  在  $D$  内也解析, 又因在  $D$  内  $f(z) \neq 0$ , 故  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  在  $D$  内解析, 从而在  $C$  上及  $C$  的内部也解析, 于是由 Cauchy-Goursat 定理,

有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

20. 试说明柯西 - 古萨基本定理中的  $C$  为什么可以不是简单闭曲线?

21. 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内的任意一条正向简单闭曲线, 证明: 对在  $D$  内但不在  $C$  上的任意一点  $z_0$ , 等式:  $\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$  成立。

证明 利用 Cauchy 积分公式, 有  $\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$ ; 而由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0), \text{ 故所证等式成立。}$$

22. 如果  $\varphi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  都具有二阶连续偏导数, 且适合拉普拉斯方程, 而  $s = \varphi_y - \psi_x, t = \varphi_x + \psi_y$ , 那么  $s + it$  是  $x + iy$  的解析函数。

证明 由  $\varphi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  都具有二阶连续偏导数, 而  $s = \varphi_y - \psi_x, t = \varphi_x + \psi_y$  知,  $s, t$  具有一阶连续的偏导数, 在证  $s, t$  满足 C - R 方程即可。注意  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$ , 则

$$s_x = \varphi_{yx} - \psi_{xx} = \varphi_{xy} + \psi_{yy} = t_y; \quad s_y = \varphi_{yy} - \psi_{xy} = -\varphi_{xx} - \psi_{yx} = -t_x, \text{ 故 } s, t \text{ 满足 C - R 方程, 即}$$

$s + it$  是  $x + iy$  的解析函数。

23. 设  $u$  为区域  $D$  内的调和函数及  $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ , 问  $f$  是不是  $D$  内的解析函数? 为什么?

解  $f$  是  $D$  内的解析函数。因  $u$  为区域  $D$  内的调和函数, 故  $u_x$  和  $-u_y$  在  $D$  内有一阶连续的偏导数。

又  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y$ ;  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ , 即满足 C - R 方程。

24. 函数  $v = x + y$  是  $u = x + y$  的共轭调和函数吗? 为什么?

解 不是。因  $u + iv$  不能构成一解析函数。

25. 设  $u$  和  $v$  都是调和函数, 如果  $v$  是  $u$  的共轭调和函数, 那么  $u$  也是  $v$  的共轭调和函数。这句话对吗? 为什么?

解 不对。参考 27 题的第二问。

26. 证明: 一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

证明 设  $v$  是  $u$  的共轭调和函数, 则  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ ,  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ 。又

$(uv)_{xx} = u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx}$ ,  $(uv)_{yy} = u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy}$ , 故  $(uv)_{xx} + (uv)_{yy} = 0$ , 即一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

27. 如果  $f(z) = u + iv$  是一解析函数, 试证:

1)  $\overline{if(z)}$  也是解析函数; 2)  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数;

$$3) \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2.$$

证明 1)  $\overline{if(z)} = v - iu$ , 而  $f(z) = u + iv$  是一解析函数, 故  $u, v$  满足 C - R 方程, 进而  $v_x = (-u)_y$ ,  $v_y = -(-u)_x$ 。故  $\overline{if(z)}$  也是解析函数。

2) 由  $f(z) = u + iv$  是一解析函数,  $\overline{if(z)} = v - iu$ 。故  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数。

$$\begin{aligned} 3) \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2 + v^2) \\ &= 2u_x^2 + 2v_x^2 + 2u_y^2 + 2v_y^2 + 2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2v(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2 \end{aligned}$$

28. 证明:  $u = x^2 - y^2$  和  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$  都是调和函数, 但是  $u + iv$  不是解析函数。

证明  $u_x = 2x$ ,  $u_y = -2y$ ,  $v_x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $v_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,

$$v_{xx} = \frac{8x^2y}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_{yy} = \frac{8y^3}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{6y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{则}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{8x^2y}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{8y^3}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{8y}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

29. 求具有下列形式的所有调和函数  $u$  : 1)  $u = f(ax+by)$ ,  $a$  与  $b$  为常数 2)  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 。

解 1) 由  $u_x = af'$ ,  $u_{xx} = a^2 f''$ ,  $u_{yy} = b^2 f''$ , 而  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 则  $f'' = 0$ , 即  $f = c_1(ax+by) + c_2$ 。

2) 由  $u_x = -\frac{y}{x^2} f'$ ,  $u_{xx} = 2\frac{y}{x^3} f' + \frac{y^2}{x^4} f''$ ,  $u_y = \frac{1}{x} f'$ ,  $u_{yy} = \frac{1}{x^2} f''$ , 而  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 则

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) f'' + 2\frac{y}{x} f' = 0, \text{ 即 } f = c_1 \arctan \frac{y}{x} + c_2.$$

30. 由下列各已知调和函数求解析函数  $f(z) = u + iv$  :

1)  $u = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$  ; 2)  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0$  ;

3)  $u = 2(x-1)y, f(2) = -i$  ; 4)  $v = \arctan \frac{y}{x}, x > 0$ 。

解 1)  $u_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2, u_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2$ , 则

$$f'(z) = u_x - iu_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2 - i(3x^2 - 6xy - 3y^2) = 3(1-i)z^2, \text{ 故}$$

$$f(z) = (1-i)z^3 + ic, c \in \mathbb{R};$$

2)  $f'(z) = v_y + iv_x = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{1}{z^2}$ , 故

$$f(z) = -\frac{1}{z} + c, \text{ 又 } f(2) = 0, \text{ 则 } f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z};$$

3)  $f'(z) = u_x - iu_y = 2y - 2i(x-1) = -2i(x-1+iy) = -2i(z-1)$ , 故

$$f(z) = -i(z-1)^2 + c, \text{ 又 } f(2) = -i, \text{ 则 } f(z) = -i(z-1)^2;$$

4)  $f'(z) = v_y + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x-iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$ , 故  $f(z) = \ln z + c, c \in \mathbb{R}$ 。

31. 设  $v = e^{px} \sin y$ , 求  $p$  的值使  $v$  为调和函数, 并求出解析函数  $f(z) = u + iv$ 。

解  $v_{xx} + v_{yy} = e^{px} \sin y (p^2 - 1) = 0$ , 知  $p = \pm 1$ 。当  $p = 1$  时,  $f(z) = e^z + c, c \in \mathbb{R}$ ; 当  $p = -1$  时,  $f(z) = -e^{-z} + c, c \in \mathbb{R}$ 。

32. 如果  $u(x, y)$  是区域  $D$  内的调和函数,  $C$  为  $D$  内以  $z_0$  为中心的任何一个正向圆周:  $|z - z_0| = r$ , 它的内部完全含于  $D$ 。试证:

1)  $u(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的值等于  $u(x, y)$  在圆周  $C$  上的平均值, 即

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi;$$

2)  $u(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的值等于  $u(x, y)$  在圆域  $|z - z_0| \leq r_0$  上的平均值, 即

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

证明 1) 由平均值公式 (P86)



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta$$

只取其实部有：  $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi$  ;

$$2) \text{ 由 } 1) \text{ 知 } \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi dr = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi u(x_0, y_0) r dr = u(x_0, y_0)。$$

33. 如果  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内的正向圆周:  $|z| = R$ , 它的内部完全含于  $D$ 。

设  $z$  为  $C$  内一点, 并令  $\bar{z} = R^2 / \bar{z}$ , 试证

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta = \oint_C \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta = 0。$$

证明 因  $z$  为  $C$  内一点,  $|\bar{z}| = |R^2 / \bar{z}| = R^2 / |z| = \frac{R}{|z|} R > R$ , 故  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}}$  在  $C$  及其内部解析。由

$$\text{Cauchy 基本定理知: } \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta = \oint_C \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta = 0。$$

34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果, 证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta \bar{z}} \right] f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z}) f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} d\zeta,$$

其中  $C$  为  $|z| = R$ 。

证明 由柯西积分公式有:  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ; 而由 33 题结果知  $\oint_C \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta = 0$ , 故

将这两式相减即得。

35 如果令  $\zeta = R e^{i\theta}$ ,  $z = r e^{i\varphi}$ , 验证

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} = \frac{d\zeta / \zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{id\theta}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

并由 34 题的结果, 证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(R e^{i\theta})}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

取其实部, 得

$$u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R \cos \theta, R \sin \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

这个积分称为泊松 (Poisson) 积分。通过这个公式, 一个调和函数在一个圆内得值可用它在圆周上的值来表示。

证明  $\frac{R^2}{\zeta} = R \frac{R}{\zeta} = R \cdot e^{-i\theta} = \bar{\zeta}$ , 故  $\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} = \frac{d\zeta / \zeta}{(\zeta - z)(\frac{R^2}{\zeta} - \bar{z})} = \frac{d\zeta / \zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}$ . 又

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{iR \cdot e^{i\theta} d\theta}{R \cdot e^{i\theta}} = id\theta, (\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2, \text{ 故}$$

$$\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})} = \frac{id\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}.$$

$$\text{又由 34 题知 } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2 - \zeta\bar{\zeta})} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})d\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}.$$

36. 设  $f(z)$  在简单闭曲线  $C$  内及  $C$  上解析, 且不恒为常数,  $n$  为正整数.

1) 试用柯西积分公式证明:

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

2) 设  $M$  为  $|f(\zeta)|$  在  $C$  上的最大值,  $L$  为  $C$  的长,  $d$  为  $z$  到  $C$  的最短距离, 试用积分估值公式 (3.1.10) 于 1) 中的等式, 证明不等式:

$$|f(z)| \leq M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{1/n}.$$

3) 令  $n \rightarrow +\infty$ , 对 2) 中的不等式取极限, 证明:  $|f(z)| \leq M$ . 这个结果表明: 在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得 (最大模原理).

证明 1) 在柯西积分公式中将里面的函数  $f(z)$  换成  $[f(z)]^n$  即得。

$$2) \text{ 由 1) 知 } |f(z)|^n = |[f(z)]^n| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \left| \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} \right| ds \leq \frac{L}{2\pi d} M^n, \text{ 故}$$

$$|f(z)| \leq \left( \frac{L}{2\pi d} M^n \right)^{1/n} = M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{1/n}.$$

3) 对 2) 中的不等式取极限 ( $n \rightarrow +\infty$ ), 即得。

## 习题四解答

1. 下列数列 $\{\alpha_n\}$ 是否收敛? 如果收敛, 求出它们的极限:

$$1) \alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni}; 2) \alpha_n = \left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n}; 3) \alpha_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}; 4) \alpha_n = e^{-n\pi i/2}; 5)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n} e^{-n\pi i/2}$$

$$\text{解 } 1) \alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni} = \frac{1-n^2}{1+n^2} + \frac{2n}{1+n^2}i, \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0, \text{ 故 } \alpha_n \text{ 收敛,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -1$$

$$2) \alpha_n = \left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\theta}\right)^n, \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\theta}\right)^n = 0, \text{ 故 } \alpha_n \text{ 收敛, } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

3) 由于 $\alpha_n$ 的实部 $\{(-1)^n\}$ 发散, 故 $\alpha_n$ 发散

4) 由于 $\alpha_n = e^{-n\pi i/2} = \cos \frac{n\pi}{2} - i \sin \frac{n\pi}{2}$ , 其实部、虚部数列均发散, 故 $\alpha_n$ 发散

$$5) \alpha_n = \frac{1}{n} e^{-n\pi i/2} = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} - i \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \text{ 知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0,$$

故 $\alpha_n$ 收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

2. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \begin{cases} 0, & |\alpha| < 1, \\ \infty, & |\alpha| > 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ \text{不存在}, & |\alpha| = 1, \alpha \neq 1. \end{cases}$$

3. 判断下列级数的绝对收敛性与收敛性:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}; 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}; 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

$$\text{解 } 1) \text{ 由 } i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \text{ 为收敛的交错项实级数,}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 收敛, 但 $\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ , 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right|$ 发散, 原级数条件收敛;

2) 与 1) 采用同样的方法, 并利用  $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} (n \geq 2)$ ;

3) 因  $\left| \frac{(6+5i)^n}{8^n} \right| = \left( \frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$  绝对收敛;

4) 因  $\cos in = \operatorname{ch} n$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{2^n} \neq 0$ , 故  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$  发散。

4. 下列说法是否正确? 为什么?

(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛;

(2) 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点;

(3) 每一个在  $z_0$  连续的函数一定可以在  $z_0$  的邻域内展开成 Taylor 级数。

解 (1) 不对。如  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在收敛圆  $|z| < 1$  内收敛, 但在收敛圆周  $|z| = 1$  上并不收敛;

(2) 不对。幂级数的和函数在收敛圆内为解析函数, 不能有奇点;

(3) 不对。如  $f(z) = \bar{z}$  在全平面上连续, 但它在任何点的邻域内均不能展开成 Taylor 级数。

5. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$  能否在  $z=0$  收敛而在  $z=3$  发散?

解 不能。因如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$  在  $z=0$  收敛, 则由 Abel 定理其收敛半径

$R \geq |0-2| = 2$ , 而  $|3-2| = 1 < 2$  即  $z=3$  在其收敛圆  $|z-2| < 2$  内, 故级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$  在

$z=3$  收敛, 矛盾。

6. 求下列幂级数的收敛半径:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  ( $p$  为正整数); (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} z^n$ ; (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ ;

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$ ; (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \left( \frac{i}{n} \right) (z-1)^n$ ; (6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{\ln in} \right)^n$ 。

解 (1)  $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ ;

$$(2) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n+1} = 0;$$

$$(3) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 / |1+i| = 1 / \sqrt{2};$$

$$(4) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1;$$

$$(5) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{ch}\left(\frac{i}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = ;$$

$$(6) R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\ln n| = \infty;$$

7. 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 证明级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_n) z^n$  的收敛半径  $\geq R$ 。

证明 对于圆  $|z| < R$  内的任意一点  $z$ , 由已知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  绝对收敛即  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z|^n$  收敛, 又

因  $|\operatorname{Re} c_n| \leq |c_n|$ , 从而  $|\operatorname{Re} c_n| |z|^n \leq |c_n| |z|^n$ , 故由正项级数的比较判别法  $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re} c_n| |z|^n$  也

收敛即  $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_n) z^n$  在  $|z| < R$  内绝对收敛, 于是其收敛半径  $\geq R$ 。

8. 证明: 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$  存在 ( $\neq \infty$ ), 下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_n z^n; \quad \sum \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}; \quad \sum n c_n z^{n-1}.$$

证明 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \rho$ , 则幂级数  $\sum c_n z^n$  的收敛半径为  $1/|\rho|$ ;

幂级数  $\sum \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$  的收敛半径为  $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n / (n+1)}{c_{n+1} / (n+2)} \right| = 1 / |\rho|$ ;

幂级数  $\sum n c_n z^{n-1}$  的收敛半径为  $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right| = 1 / |\rho|$ ;

故以上三个幂级数有相同的收敛半径。

9. 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛, 而  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  发散, 证明  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为 1。

证明 由级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  收敛, 知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z=1$  处收敛, 由 Abel 定理知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径  $R \geq 1$ ; 而  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  发散知  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$  在  $|z|=1$  处发散, 故  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径  $R \leq 1$ 。所以  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为 1。

10. 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在它的收敛圆的圆周上一点  $z_0$  处绝对收敛, 证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明 由 Abel 定理知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在其收敛圆内绝对收敛, 再证其在圆周上绝对收敛即可。在圆周上任取一点  $\eta$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \eta^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$ , 知  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n$  绝对收敛, 故结论成立。

11. 把下列各函数展开成  $z$  的幂级数, 并指出它们的收敛半径。

(1)  $\frac{1}{1+z^3}$ ; (2)  $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ ; (3)  $\cos z^2$ ; (4)  $\operatorname{sh} z$ ;

(5)  $\operatorname{ch} z$ ; (6)  $e^{z^2} \sin z^2$ ; (7)  $e^{\frac{z}{z-1}}$ ; (8)  $\sin \frac{1}{1-z}$

解 (1) 由  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1$ , 故

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots + (-1)^n z^{3n} + \dots, |z| < 1,$$

而收敛半径  $R=1$ ;

(2) 因  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots, |z| < 1$ ,

故  $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots, |z| < 1$ ,

又因  $\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = \frac{-2z}{(1+z^2)^2}$ ,

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z} \left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \dots, |z| < 1,$$

而  $R=1$ ;

(3) 因  $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, |z| < \infty$ , 故  $\cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \dots$

$|z| < +\infty$  而其收敛半径  $R = +\infty$  ;

$$(4) \text{ 因 } \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < +\infty, e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < +\infty,$$

故  $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, |z| < +\infty$ , 而收敛半径  $R = +\infty$  ;

$$(5) \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, |z| < +\infty,$$

$$(6) \text{ 因 } e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots, |z| < +\infty, \sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots, |z| < +\infty,$$

$$\text{故 } e^{z^2} \sin z^2 = \left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right) \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots\right) = z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} + \dots, |z| < +\infty,$$

而收敛半径  $R = +\infty$ ;

$$(7) \text{ 因 } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < +\infty,$$

$$\frac{z}{z-1} = -z - z^2 - z^3 - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, |z| < 1,$$

$$\text{故 } e^{\frac{z}{z-1}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} + \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1})^2}{2!} - \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1})^3}{3!} + \dots = 1 - z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots, |z| < 1,$$

而收敛半径  $R=1$ 。

$$(8) \text{ 因 } \sin \frac{1}{1-z} = \sin \left(1 + \frac{z}{1-z}\right) = \sin 1 \cos \frac{z}{1-z} + \cos 1 \sin \frac{z}{1-z},$$

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, |z| < 1,$$

$$\text{故 } \sin \frac{z}{1-z} = (z + z^2 + z^3 + \dots) - \frac{1}{3!} (z + z^2 + z^3 + \dots)^3 + \dots = z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots, |z| < 1,$$

$$\cos \frac{z}{1-z} = 1 - \frac{1}{2} (z + z^2 + z^3 + \dots)^2 - \frac{1}{4!} (z + z^2 + z^3 + \dots)^4 + \dots = 1 - \frac{1}{2} z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin \frac{1}{1-z} &= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2} z^2 - z^3 + \dots\right) + \cos 1 \left(z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots\right) \\ &= \sin 1 + (\cos 1)z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1\right)z^2 + \left(\frac{5}{6} \cos 1 - \sin 1\right)z^3 + \dots, |z| < 1, \end{aligned}$$

而收敛半径  $R=1$ 。

12. 求下列各函数在指定点  $z_0$  处的 Taylor 展开式, 并指出它们的收敛半径:

$$(1) \frac{z-1}{z+1}, z_0=1 \quad (2) \frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$$

$$(3) \frac{1}{z^2}, z_0=-1 \quad (4) \frac{1}{4-3z}, z_0=1+i$$

$$(5) \tan z, z_0=\pi/4 \quad (6) \arctan z, z_0=0$$

解 (1) 因 
$$\frac{z-1}{z+1} = (z-1) \frac{1}{(z-1+2)} = \frac{z-1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

及  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1$ 。故

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{z-1}{2} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1} + \dots \right] \\ &= \frac{z-1}{2} - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 2 \end{aligned}$$

于是收敛半径  $R=2$ 。

(2) 因 
$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{z+2} - \frac{2}{z+1} \right) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

及 
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{4+(z-2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 - \dots \right], \quad |z-2| < 4$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3}\right)^2 - \dots \right], \quad |z-2| < 3$$

$$\begin{aligned} \text{故原式} &= \frac{2}{4} \left[ 1 - \frac{z-2}{2^2} + \frac{1}{2^{2^2}} (z-2)^2 - \dots \right] - \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{3^2} - \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{2^n}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2^{n+1}}} (z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{2^{n+1}}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (z-2)^n, \quad |z-2| < 3, \text{ 而 } R=3. \end{aligned}$$

(3) 因  $\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)'$  及  $\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\left[ 1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots \right], \quad |z+1| < 1,$

故 
$$\frac{1}{z^2} = 1 + 2(z+1) + \dots + n(z+1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad |z+1| < 1,$$

而  $R=1$ 。



$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 因 } \frac{1}{4-3z} &= \frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i} = \frac{1}{1-3i-3[z-(1+i)]} \\
 &= \frac{1}{1-3i} \frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]} = \frac{1}{1-3i} \left\{ 1 + \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] + \left( \frac{3}{1-3i} \right)^2 [z-(1+i)]^2 + \cdots \right\},
 \end{aligned}$$

其中  $\left| \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] \right| < 1$ , 故

$$\frac{1}{4-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}} [z-(1+i)]^n, \quad |z-(1+i)| < \left| \frac{1-3i}{3} \right| = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

且收敛半径  $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 。

$$(5) \text{ 因 } \tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}, \text{ 又 } \tan z = \frac{1 + \tan(z - \frac{\pi}{4})}{1 - \tan(z - \frac{\pi}{4})}, \text{ 故}$$

$$\tan z = [1 + \tan(z - \frac{\pi}{4})](1 + \tan(z - \frac{\pi}{4}) + \tan^2(z - \frac{\pi}{4}) + \cdots)$$

$$= 1 + 2(z - \frac{\pi}{4}) + 2(z - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots, \text{ 且收敛半径 } R = \frac{\pi}{4}.$$

$$(6) \text{ 因 } (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}, \text{ 又 } \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots, |z| < 1, \text{ 故}$$

$$\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1,$$

且收敛半径  $R = 1$ 。

13. 为什么在区域  $|z| < R$  内解析且在区间  $(-R, R)$  取实数值的函数  $f(z)$  展开成  $z$  的幂级数时, 展开式的系数都是实数?

解  $f(z)$  展开成  $z$  的幂级数时, 展开式的系数为  $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , 而函数  $f(z)$  在区间

$(-R, R)$  取实数值, 可知  $f^{(n)}(0)$  也为实数。故展开式的系数都是实数。

14. 证明在  $f(z) = \cos(z + \frac{1}{z})$  以  $z$  的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

证明  $f(z) = \cos(z + \frac{1}{z})$  在复平面内出去点  $z = 0$  外解析, 所以在  $0 < |z| < +\infty$  内可

展开成洛朗级数  $\cos(z + \frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ , 其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\cos(z + \frac{1}{z})}{z^{n+1}} dz, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 0 < r < +\infty)$$

与要证明式子中  $c_n$  的表示式相比较，我们取  $r = 1$  并利用复积分的计算公式可得

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z + \frac{1}{z})}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$- \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \cos n\theta d\theta$$

因  $\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta) \sin n\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\cos\theta) \sin n\theta d\theta$ ，而  $\cos(2\cos\theta) \sin n\theta$  为  $\theta$  的奇函数。

15. 下列结论是否正确？

用长除法  $\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ ， $\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$

因为  $\frac{z}{1-z} + \frac{z}{z-1} = 0$ ，所以  $\dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = 0$ 。

解 不正确。因为长除法所得到的两式，使它们成立的  $z$  值的范围不同（分别为  $|z| < 1$ ； $|z| > 1$ ），因此不能相加。

16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数。

(1)  $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ ， $1 < |z| < 2$ ；

(2)  $\frac{1}{z(1-z)^2}$ ， $0 < |z| < 1, 0 < |z-1| < 1$ ；

(3)  $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ， $0 < |z-1| < 1, 1 < |z-2| < +\infty$

(4)  $e^{\frac{1}{1-z}}$ ， $1 < |z| < +\infty$

(5)  $\frac{1}{z^2(z-i)}$ ，在以  $i$  为中心的圆环域内

(6)  $\sin \frac{1}{1-z}$ ， $0 < |z-1| < +\infty$

(7)  $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$ ， $3 < |z| < 4, 4 < |z| < +\infty$

解 (1) 因 
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{5}z}{z^2+1} + \frac{-\frac{2}{5}}{z^2+1} + \frac{\frac{5}{5}}{z-2}$$

故 
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = -\frac{1}{5}z \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{1}{10} \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{5}z \cdot \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\
&= -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2(n+1)}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\
&= \cdots + \frac{2}{5} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^3} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{z} - \frac{1}{10} - \frac{z}{20} - \frac{z^2}{40} - \frac{z^3}{80} - \cdots \quad 1 < |z| < 2 ;
\end{aligned}$$

(2) 在  $0 < |z| < 1$  内,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{z} (1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)^2 = \frac{1}{z} (1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots) \\
&= \frac{1}{z} + 2+3z+\cdots+(n+1)z^{n-1}+\cdots = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)z^n
\end{aligned}$$

在  $0 < |z-1| < 1$  内,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{(1-z)^2} \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{(1-z)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n ;
\end{aligned}$$

(3)  $0 < |z-1| < 1$  内,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1} \\
&= -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n
\end{aligned}$$

在  $1 < |z-2| < +\infty$  内

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)+1} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} \\
&= \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-2)^{n+1}} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(z-2)^n}
\end{aligned}$$

(4) 在  $1 < |z| < +\infty$  内, 因

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{-1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}\text{故 } e^{\frac{1}{1-z}} &= 1 - \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right)^3 + \cdots ; \\ &= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \cdots\end{aligned}$$

$$(5) \text{ 在 } 0 < |z-i| < 1 \text{ 内, 因 } \frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n z^{n-1}, |z| < 1, \text{ 故}$$

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{i^2(z-i)(1+\frac{z-i}{i})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}$$

$$\text{在 } 1 < |z-i| < +\infty \text{ 内, 因 } \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{(z-i)^3(1+\frac{i}{z-i})^2}, \text{ 故}$$

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1) i^n}{(z-i)^{n+3}}$$

$$(6) \text{ 因 } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < +\infty, \text{ 故}$$

$$\sin \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(1-z)^{2n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}, \quad 0 < |z-1| < +\infty$$

$$(7) \text{ 在 } 3 < |z| < 4 \text{ 内, 因 } \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = (z^2-3z+2) \left( \frac{1}{3-z} - \frac{1}{4-z} \right), \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} &= -(z^2-3z+2) \left( \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} + \frac{1}{4(1-\frac{z}{4})} \right) \\ &= -(z^2-3z+2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} \right) = 1 - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n} - 2 \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\text{在 } 4 < |z| < +\infty \text{ 内, } \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = (z^2-3z+2) \left( \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-3} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} &= (z^2-3z+2) \left( \frac{1}{z(1-\frac{4}{z})} - \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} \right) \\ &= (z^2-3z+2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 2^{2n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) z^{-n}\end{aligned}$$

17. 函数  $\tan \frac{1}{z}$  能否在圆环域  $0 < |z| < R$  ( $0 < R < +\infty$ ) 内展开成洛朗级数?

为什么?

解 不能展成洛朗级数。因在圆环域  $0 < |z| < R$  内  $\tan \frac{1}{z}$  不解析。

18. 如果  $k$  为满足关系  $k^2 < 1$  的实数, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos \theta - k}{1 - 2k \cos \theta + k^2}.$$

证明  $\frac{1}{z-k}$  在  $|z| > k$  内为解析函数, 将其展成洛朗级数有

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{z(1-\frac{k}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{z^{n+1}}$$

在上式中令  $z = e^{i\theta}$ ,

$$\frac{1}{e^{i\theta} - k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{(e^{i\theta})^{n+1}}, \text{ 即 } \frac{\cos \theta - k - i \sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (k^n \cos(n+1)\theta - i k^n \sin(n+1)\theta)$$

分离实部和虚部即得结论。

19. 如果  $C$  为正向圆周  $|z| = 3$ , 求积分  $\int_C f(z) dz$  的值. 设  $f(z)$  为

1)  $\frac{1}{z(z+2)}$ ; 2)  $\frac{z+2}{(z+1)z}$ ; 3)  $\frac{1}{z(z+1)^2}$ ; 4)  $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 。

解  $\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$

1)  $\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} \right), |z| > 2。$

故  $\int_C f(z) dz = 0。$

2)  $\frac{z+2}{(z+1)z} = (z+2) \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} \right) = (z+2) \left( \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} \right), |z| > 1$

故  $\int_C f(z) dz = 2\pi i。$

3)  $\frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z^3(1+\frac{1}{z})^2} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{z^{n-1}}, |z| > 1。故 \int_C f(z) dz = 0。$

$$4) \frac{z}{(z+1)(z+2)} = z \left( \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} - \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^n}, |z| > 2$$

$$\text{故 } \int_C f(z) dz = 2\pi i。$$

20. 试求积分  $\oint_C (\sum_{n=-2}^{\infty} z^n) dz$  的值, 其中  $C$  为单位圆  $|z|=1$  内的任何一条不经过

原点的简单闭曲线。

解  $\sum_{n=-2}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}, 0 < |z| < 1$ 。而  $C$  为单位圆  $|z|=1$  内的任何一条不经过

原点的简单闭曲线, 故  $\oint_C (\sum_{n=-2}^{\infty} z^n) dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i$ 。

## 习题五解答

1、下列函数有什么奇点？如果是极点，指出它的级。

$$(1) \frac{1}{z(z^2+1)^2};$$

$$(2) \frac{\sin z}{z^3};$$

$$(3) \frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1};$$

$$(4) \frac{\ln(z+1)}{z};$$

$$(5) \frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})};$$

$$(6) e^{\frac{1}{1-z}};$$

$$(7) \frac{1}{z^2(e^z-1)};$$

$$(8) \frac{z^{2n}}{1+z^n};$$

$$(9) \frac{1}{\sin z^2}.$$

解 (1)  $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)^2}$  是有理函数，故奇点只是极点，满足  $z(z^2+1)^2=0$ ，故  $z=0$ ，与  $z=\pm i$  为

其奇点， $z=0$  为一级极点，而  $z=\pm i$  为其二级极点。

(2) 因  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^3} = \infty$  则  $z=0$  为其极点。再确定极点的级，有两种方法：

a.  $z=0$  为  $\sin z$  为的一级零点；而  $z=0$  为  $z^3$  的三级零点。故  $z=0$  为  $\frac{\sin z}{z^3}$  的二级极点。

b.  $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$ ，故  $z=0$  为其二级极点，

(3) 原式  $= \frac{1}{(z^2-1)(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$ ，故  $z=1$  为其二级极点，而  $z=-1$  为一级极点。

(4) a.  $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ， $0 < |z| < 1$ ， $\frac{\ln(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+1}$  无负幂项，故  $z=0$  为其可去奇点。

b.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+z} = 1$ ，故  $z=0$  为可去奇点。

(5) 由  $1+z^2=0$  得  $z=\pm i$  为  $(1+z^2)$  的一级零点，由  $1+e^{\pi z}=0$  得  $z_k=(2k+1)i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为  $(1+e^z)$  的零点，又  $(1+e^{\pi z})'|_{z_k} = \pi e^{\pi z_k} = -\pi \neq 0$ ，所以  $z_k$  为  $(1+e^z)$  的一级零点，因此， $z=\pm i$  为二级极点；

$z_k=(2k+1)i$ ，( $k=1, \pm 2, \dots$ ) 为一级极点。

(6) 由  $e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$ ，知  $z=1$  为本性奇点。

(7) 因  $e^z-1 = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots)$ ，故  $z=0$  为  $z^2(e^z-1)$  的三级零点，因而是  $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$

的三级极点，而  $z=2k\pi i$  ( $k=\pm 1, \pm 2, \dots$ ) 均为一级极点。

(8) 由  $z^n+1=0$ ， $z^n=-1$ ，得  $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) 为原式一级极点。

(9)  $\sin^2 z = 0 \Rightarrow z = \pm \sqrt{k\pi}$ ， $z = \pm i\sqrt{k\pi}$ ， $k=0, 1, 2, \dots$  由

$(\sin z^2)'|_{z^2=k\pi} = 2z \cos z^2|_{z^2=k\pi} = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \neq 0 & k \neq 0 \end{cases}$ ,  $(\sin z^2)''|_{z=0} = 2$ , 知  $z=0$  是  $\frac{1}{\sin z^2}$  的二级极点,

$z = \pm\sqrt{k\pi}$ ,  $z = \pm i\sqrt{k\pi}$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) 均为  $\frac{1}{\sin z^2}$  一级极点。

2. 求证: 如果  $z_0$  是  $f(z)$  是  $m$  ( $m > 1$ ) 级零点, 那么  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  级零点。

证 由题知:  $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ , 则有

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z) = (z - z_0)^{m-1} [m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)]$$

故  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  级零点。

3. 验证:  $z = \frac{\pi i}{2}$  是  $\operatorname{ch} z$  的一级零点。

解 由  $\operatorname{ch} \frac{\pi i}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $(\operatorname{ch} z)'|_{z=\frac{\pi i}{2}} = \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2} = i \sin \frac{\pi}{2} = i$ , 知  $z = \frac{\pi i}{2}$  是  $\operatorname{ch} z$  的一级零点。

4.  $z=0$  是函数  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$  的几级极点?

解  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)'|_{z=0} = (\cos z + \operatorname{ch} z - 2)|_{z=0} = 0$ ,

$$(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)''|_{z=0} = (-\sin z + \operatorname{sh} z)|_{z=0} = 0, (\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)'''|_{z=0} = (-\cos z + \operatorname{ch} z)|_{z=0} = 0,$$

$$(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{(4)}|_{z=0} = (\sin z + \operatorname{sh} z)|_{z=0} = 0, (\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{(5)}|_{z=0} = (\cos z + \operatorname{ch} z)|_{z=0} = 2,$$

故  $z=0$  是函数  $\sin z + \operatorname{sh} z - 2z$  的五级零点, 也即为  $(\sin z + \operatorname{sh} z - 2z)^{-2}$  的十级极点。

5. 如果  $f(z)$  和  $g(z)$  是以  $z_0$  为零点的两个不恒等于零的解析函数, 那么

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (\text{或两端均为 } \infty).$$

证 因  $f(z)$  和  $g(z)$  是以  $z_0$  为零点的两个不恒等于零的解析函数, 可设  $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$ ,

$g(z) = (z - z_0)\psi(z)$ ,  $\varphi(z), \psi(z)$  为解析函数, 则

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)\varphi(z)}{(z - z_0)\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)},$$

故  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , 即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (\text{或两端均为 } \infty)$$

6. 若  $\varphi(z)$  与  $\psi(z)$  分别以  $z=a$  为  $m$  级与  $n$  级极点 (或零点), 那么下列三个函数在  $z=a$  处各有什么性质?

(1)  $\varphi(z)\psi(z)$ ; (2)  $\varphi(z)/\psi(z)$ ; (3)  $\varphi(z)+\psi(z)$

解 由题意,  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$ ,  $\psi(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$ , 其中  $f(z), g(z)$  在  $a$  点解析且  $f(a) \neq 0$ ,

$g(a) \neq 0$ 。



(1)  $z=a$  是  $\varphi(z) \cdot \psi(z)$  的  $m+n$  级极点。

(2) 对于  $\varphi(z)/\psi(z)$ , 当  $m < n$  时,  $a$  是  $n-m$  级零点; 当  $m > n$  时,  $a$  是  $m-n$  级极点; 当  $m=n$  时,  $a$  是可去奇点。

(3) 当  $m \neq n$  时, 点  $a$  是  $\varphi(z) + \psi(z)$  的  $\max\{m, n\}$  级极点, 当  $m=n$  时, 点  $a$  是  $\varphi(z) + \psi(z)$  的极点。  
(可退化为可去), 其级不高于  $m$ , 点  $a$  也可能是  $\varphi(z) + \psi(z)$  的可去奇点(解析点)。

7. 函数  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$  在  $z=1$  处有一个二级极点, 这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \cdots + \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3}, |z-1| > 1, |z-2| > 1$$

所以“ $z=1$  又是  $f(z)$  的本性奇点”, 又其中不含  $(z-2)^{-1}$  幂项, 因此  $\text{Res}[f(z), 1] = 0$ , 这些说法对吗?

解 不对,  $z=1$  不是  $f(z)$  的本性奇点, 这是因为函数的洛朗展开式是在  $|z-2| > 1$  内得到的, 而不是在  $z=2$  的圆环域内的洛朗展开式。

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{1}{z(z-1)^2} \right] = -1$$

孤立奇点的分类必须根据在这个奇点邻域内洛朗展开式来决定。

8. 求下列各函数  $f(z)$  在有限奇点处的留数:

$$1) \frac{z+1}{z^2-2z}; \quad 2) \frac{1-e^{2z}}{z^4}; \quad 3) \frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}; \quad 4) \frac{z}{\cos z};$$

$$5) \cos \frac{1}{1-z}; \quad 6) z^2 \sin \frac{1}{z}; \quad 7) \frac{1}{z \sin z}; \quad 8) \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}.$$

$$\text{解 } 1) \text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z+1}{z^2-2z} = -\frac{1}{2}, \quad \text{Res}[f(z), 2] = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{z+1}{z^2-2z} = \frac{3}{2}$$

2)  $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ ,  $z=0$  为分母的四级零点, 是分子的一级零点, 所以是  $f(z)$  的三级极点。

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ z^3 \cdot \frac{1-e^{2z}}{z^4} \right] = -\frac{4}{3}$$

或展开洛朗级数

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left[ 1 - 1 - 2z - \frac{1}{2!} 4z^2 - \frac{1}{3!} 8z^3 \cdots \right]$$

$$\text{知 } \text{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$3) \text{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z-i)^3 \frac{1+z^4}{(z^2+1)^3} \right] = -\frac{3}{8}i,$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), -i\right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z+i)^3 \frac{1+z^4}{(z^2+1)^3} \right] = \frac{3}{8}i$$

$$4) \operatorname{Res}\left[f(z), k\pi + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{z}{(\cos z)'} \Big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}} = (-1)^{k+1} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$5) \cos \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}, \quad |z-1| > 0, \quad \text{知 } \operatorname{Res}[f(z), 1] = c_{-1} = 0$$

$$6) z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)! z^{2n-1}}, \quad |z| > 0, \quad \text{知 } \operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{1}{6}$$

$$7) \operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{1}{z \sin z} \right] = 0, \quad \operatorname{Res}[f(z), k\pi] = \frac{1}{(z \sin z)'} \Big|_{z=k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$8) \operatorname{Res}\left[f(z), \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \frac{\operatorname{sh} z}{(\operatorname{ch} z)'} \Big|_{z=(k+\frac{1}{2})\pi i} = 1, \quad k \text{ 为整数}。$$

9. 计算下列各积分 (利用留数; 圆周均取正向)

$$(1) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z} dz; \quad (2) \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz; \quad (3) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z^m} dz, \quad (\text{其中 } m \text{ 为整数});$$

$$(4) \oint_{|z-2i|=1} \operatorname{th} z dz; \quad (5) \oint_{|z|=3} \tan(\pi z) dz; \quad (6) \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n} dz \quad (\text{其中 } n \text{ 为正整数},$$

且  $|a| \neq 1, |b| \neq 1, |a| < |b|$ )

解 (1)  $f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$  故  $z=0$  为  $f(z)$  的可去奇点则

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0$$

故原积分=0。

(2) 在  $C$  内,  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$  以  $z=1$  为其二级极点, 则  $\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (e^{2z})' = 2e^2$  由留数基本

定理有原积分  $= 4\pi e^2 i$ 。

(3)  $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^m} = \frac{1}{z^{m-2}} \left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)$  故以  $z=0$  为其  $m-2$  级极点。设  $I = \int_C f(z) dz$

当  $m \leq 2$  时,  $\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0, \quad I = 0$ ;

当  $m = 2n > 2$  时,  $\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0, \quad I = 0$ ;

当  $m = 2n+1 > 2$  时,  $\operatorname{Res}[f(z), 0] = (-1)^{n-1} / 2n! = (-1)^{\frac{m-3}{2}} / (m-1)!$

由此  $I = (-1)^{\frac{m-3}{2}} 2\pi i / (m-1)!$  或说  $m$  为大于或等于 3 的奇数时,  $I = (-1)^{\frac{m-3}{2}} 2\pi i / (m-1)!$

(4)  $f(z) = \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$  为其一级极点 ( $k=0, \pm 1, \dots$ )  $k=0$  时,  $z_0 = \frac{\pi}{2}i$   $|z-2i|=1$  内, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \operatorname{sh} z_0 = 1 \quad \text{故} \quad I = \oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi i}{2}\right] = 2\pi i$$

(5)  $f(z) = \tan \pi z$  在  $|z| = 3$  内有一级极点  $z_k = k + \frac{1}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, -3$ ), 共 6 个。故

$$\operatorname{Res}\left[\tan \pi z, k + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} \bigg|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}, \text{ 由留数定理}$$

$$\oint_C \tan \pi z dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -12i$$

(6) 当  $1 < |a| < |b|$  时, 被积函数在单位圆内解析, 故积分为 0;

$$\text{当 } |a| < |b| < 1 \text{ 时, } \operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (a-b)^{2n-1}}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), b] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow b} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-b)^n \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (b-a)^{2n-1}}, \text{ 故积分为 0;}$$

$$\text{当 } |a| < 1 < |b| \text{ 时, 积分} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (a-b)^{2n-1}}$$

10. 判定  $z = \infty$  是下列各函数的什么奇点? 并求出在  $\infty$  的留数。

$$1) e^{\frac{1}{z^2}}; \quad 2) \cos z - \sin z; \quad 3) \frac{2z}{3+z^2}.$$

解 1) 可去奇点,  $\infty$  的留数为零。  $\varphi(t) = f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = e^{t^2}$ ;

$$2) \varphi(t) = f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ 故 } z = \infty \text{ 为函数的本性奇点, 又由于}$$

$\cos z - \sin z$  在整个复平面解析, 故  $\infty$  的留数为零。

$$3) \frac{2z}{3+z^2} = \frac{2}{z} \left(1 - \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^4} + \cdots\right) \text{ 不含正幂项, 故为可去奇点, 留数为 } c_{-1} = 2$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{2}{z(1+3z^2)}, 0\right] = 2.$$

11. 求  $\operatorname{Res}[f(z), \infty]$  的值, 如果

$$(1) f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1} \quad (2) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$$

解 (1)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$  有两个一级极点  $z = 1, z = -1$ , 故由全部留数和为零的定理, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), \infty] &= -\operatorname{Res}[f(z), 1] - \operatorname{Res}[f(z), -1] = -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z+1} - \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{z-1} \\ &= -\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = -\operatorname{sh} 1 \end{aligned}$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)} \text{ 以 } z = 0 \text{ 为一级极点, } z = -1 \text{ 为四级极点, } z = 4 \text{ 为一级极点, 用有限奇点}$$

留数和来求无穷远点的留数, 计算过程太麻烦, 一般采用直接在  $z = \infty$  的圆环域 (解析)  $4 < |z| < \infty$  内展开为洛朗级数的方式, 则有

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)} = \frac{1}{z \cdot z^4 \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4 \cdot z \left(1 - \frac{4}{z}\right)} = \frac{1}{\left[z^6 \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{z}\right)\right]} = \frac{1}{z^6} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right]^4 \cdot \left[ \frac{1}{1 - \frac{4}{z}} \right]$$

$$= \frac{1}{z^6} \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right)^4 \left( 1 + \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} + \dots \right)$$

显然  $c_{-1} = 0$ , 故  $\text{Res}[f(z), \infty] = 0$ . (注也可利用规则 IV)

12. 计算下列各积分,  $C$  为正向圆周。

$$1) \oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz, \quad C: |z|=3; \quad 2) \oint_C \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz, \quad C: |z|=2;$$

$$3) \oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz \quad (n \text{ 为一整数}), \quad C: |z|=r>1.$$

解 1) 函数  $\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$  在  $|z|=3$  的外部, 除  $\infty$  点外没有其他奇点, 因此根据定理二与规则 IV,

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}, 0\right] = 2\pi i$$

2)  $f(z) = \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$  有奇点,  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = -1$  为一级极点, 而  $z = 0$  为本性奇点, 在  $2 < |z| < +\infty$  内展

开  $f(z)$ , 则

$$f(z) = \frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} e^{\frac{1}{z}} = \frac{z^2}{\left(1+\frac{1}{z}\right)} \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right)$$

$$= \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) = z^2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!z} + \dots$$

得  $-c_{-1} = \frac{1}{3}$ , 故原积分  $= 2\pi i(c_{-1}) = -\frac{2}{3}\pi i$ .

3) 当  $n=1$  时,  $\oint_C \frac{z^2}{1+z} dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), -1] = 2\pi i$ ; 当  $n \neq 1$  时,

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n} = \frac{z^n}{1+z^{-n}} = z^n \left(1 - \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{2n}} + \dots\right) = z^n - 1 + \frac{1}{z^n} + \dots$$

知  $c_{-1} = 0$ , 故  $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz = 0$ .

13 计算下列积分

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta} d\theta; \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta} d\theta \quad (a>b>0); \quad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx ; \quad 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx ; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx .$$

解 1) 由于被积函数的分母  $5+3\sin\theta$  在  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  内不为零, 因而积分有意义。

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), -\frac{i}{3}] \\ &= 2\pi i \left. \frac{2}{6z+10i} \right|_{z=-\frac{i}{3}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2) 由于被积函数的分母  $a+b\cos\theta$  在  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  内不为零, 因而积分有意义。

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{(\frac{z^2-1}{2iz})^2}{a+b\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{i(z^2-1)^2}{2z^2(bz^2+2az+b)} dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] \}$$

$$\text{又 } \operatorname{Res}[f(z), 0] = \left. \frac{(-1+z^2)(a+3az^2+bz(3+z^2))}{(b+2az+bz^2)^2} \right|_{z=0} = -\frac{ai}{b^2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] = \left. \frac{i(z^2-1)^2}{4z(b+3az+2bz^2)} \right|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$\text{故 } I = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2-b^2}).$$

3) 函数  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$  在上半平面内只有 2 级极点  $i$ , 且

$$\operatorname{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4},$$

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i] = \frac{\pi}{2}.$$

4) 注意到被积函数为偶函数,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

函数  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$  在上半平面内只有一级极点  $e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ , 且

$$\operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi i}{4}] = \left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}; \quad \operatorname{Res}[f(z), \frac{3\pi i}{4}] = \left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{故 } I = \frac{1}{2} 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi i}{4}] + \operatorname{Res}[f(z), \frac{3\pi i}{4}]) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

5) 对于  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx$ , 令  $R(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$ , 则  $z = -2+i$  为上半平面内的  $R(z)$  的一级极

点, 故有:  $\text{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \frac{e^{iz}}{2z+4} \Big|_{z=-2+i} = -\frac{e^{-1}(\sin 2 + i \cos 2)}{2}$ ,

则原积分 =  $\text{Re}\{2\pi i \text{Res}[R(z)e^{iz}, -2+i]\} = \pi e^{-1} \cos 2$ 。

6) 对于  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} dx$ , 令  $R(z) = \frac{z}{1+z^2}$ , 则  $z=i$  为上半平面内的  $R(z)$  的一级极点, 故有:

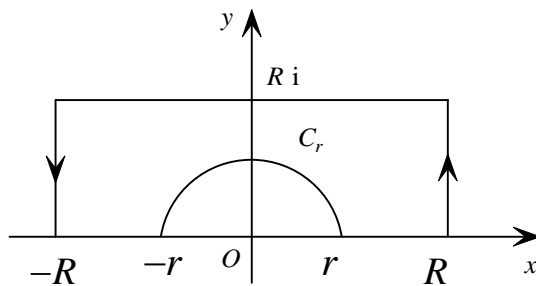
$$\text{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2}$$

$I = 2\pi i \text{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \pi e^{-1} i$ , 则原积分 =  $\text{Im}\{I\} = \pi e^{-1}$

14. 试用下图中的积分路线, 求例 4 中的积分:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 。

解  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , 采用  $e^{iz}/z$  沿如如图所示闭曲线来计算上式右端的积分 ( $z=0$  为  $e^{iz}/z$

的一级极点, 且在实轴上)。由 Cauchy 基本定理, 有



第 14 题图

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_R^{R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{R+Ri}^{-R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R+Ri}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

令  $x = -t$ , 则有  $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$ , 所以  $\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ 。

$$\text{又 } \left| \int_{R+Ri}^{-R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_R^{-R} \frac{e^{i(x+Ri)}}{x+Ri} dx \right| \leq \int_R^{-R} \frac{e^{-R}}{\sqrt{x^2+R^2}} dx \leq 2e^{-R}, \text{ 知 } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{R+Ri}^{-R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0;$$

$$\left| \int_R^{R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^R \frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy} i dy \right| \leq \int_0^R \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}} dy \leq \frac{1-e^{-R}}{R}, \text{ 同理 } \left| \int_{-R+Ri}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1-e^{-R}}{R}, \text{ 知}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \int_R^{R+Ri} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R+Ri}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right\} = 0$$

和例 4 采用同样的方法得到  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i$ 。

故  $2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i$ , 即  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 。

15. 利用公式 (5.4.1) 计算下列积分:

1)  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ ;      2)  $\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1} dz = 2\pi i$ ;

$$3) \oint_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi i ; \quad 4) \oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} dz = 0.$$

16. 设  $C$  为区域  $D$  内的一条正向简单闭曲线,  $z_0$  为  $C$  内一点。如果  $f(z)$  在  $D$  内解析, 且  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ 。在  $C$  内  $f(z)$  无其他零点。试证:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_0.$$

证  $f(z)$  在  $C$  内只有一级零点  $z_0$ , 而  $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} + \frac{z_0f'(z)}{f(z)}$ , 知  $z_0$  为函数  $\frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}$  的

可去奇点, 故由留数定理和 (5.4.1) 知

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z_0f'(z)}{f(z)} dz = 0 + z_0 = z_0.$$

17. 若  $\varphi(z)$  在  $C: |z|=1$  上及其内部解析, 且在  $C$  上  $|\varphi(z)| < 1$ , 证明在  $C$  内只有一个点  $z_0$  使  $\varphi(z) = z_0$ 。

证 令  $f(z) = -z$ , 则在  $C$  上,  $|f(z)| = 1$ , 而  $|\varphi(z)| < 1$ , 故由路西定理, 知方程  $z = \varphi(z)$  与方程  $f(z) = 0$

在  $C$  内有相同个数的根, 从而  $\varphi(z) = z$  在  $|z| < 1$  只有一根。

18. 证明: 当  $|a| > e$ , 则方程  $e^z = az^n$  在圆  $|z|=1$  内有  $n$  个根。

证 设  $f(z) = -az^n$ ,  $g(z) = e^z$ , 在  $|z| \leq 1$  内均解析, 且当  $|z|=1$  时,  $|-az^n| = |a|$ ,  $|e^z| = e^{\cos \varphi} \leq e$  而  $|a| > e$ , 故  $|f(z)| = |a| > |e^z| = |g(z)|$ 。

根据路西定理知,  $f(z)$  与  $f(z) + g(z)$  在  $C: |z|=1$  内的零点个数相同, 即  $e^z = az^n$  的根的个数与  $-az^n = 0$  的根的个数相同, 即为  $n$ 。

19. 证明方程  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根都在圆环域  $1 \leq |z| \leq 2$  内。

证 当  $|z| < 2$  时, 取  $f(z) = z^7$ ,  $g(z) = 12 - z^3$ , 当  $|z|=2$  时,

$$|g(z)| = |12 - z^3| \leq 12 + |z^3| \leq 20 < |z^7| = |f(z)|$$

所以  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根的个数与  $z^7$  的根的个数相同, 因此,  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根全部在  $|z|=2$  的内部。

当  $|z| < 1$  时, 取  $f(z) = 12$ ,  $g(z) = z^7 - z^3$ , 当  $|z|=1$  时,  $|f(z)| = 12 > |z^7 - z^3| = |g(z)|$ , 故  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的

根与  $f(z) = 12$  的根的个数相同, 即在  $|z|=1$  内无根, 综上所述,  $z^7 - z^3 + 12 = 0$  的根全在  $1 \leq |z| \leq 2$  内。

## 拉氏变换习题解答

### 习题一

1. 求下列函数的拉氏变换,并用查表的方法来验证结果.

$$(1) f(t) = \sin \frac{t}{2}; \quad (2) f(t) = e^{-2t}; \quad (3) f(t) = t^2; \quad (4) f(t) = \sin t \cos t;$$

$$(5) f(t) = \sinh kt; \quad (6) f(t) = \cosh kt; \quad (7) f(t) = \cos^2 t; \quad (10) f(t) = \cos^2 t.$$

解 (1)  $\&[f(t)] = \int_0^{+\infty} \sin \frac{t}{2} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}) e^{-st}}{2i} dt$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{-(s-\frac{i}{2})t} - e^{-(s+\frac{i}{2})t}) dt = \frac{1}{2i} \left[ \frac{e^{-(s-\frac{i}{2})t}}{-s+\frac{i}{2}} - \frac{e^{-(s+\frac{i}{2})t}}{-s-\frac{i}{2}} \right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{s-\frac{i}{2}} - \frac{1}{s+\frac{i}{2}} \right] = \frac{1}{2i} \frac{s+\frac{i}{2}-s+\frac{i}{2}}{\left(s-\frac{i}{2}\right)\left(s+\frac{i}{2}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}} = \frac{2}{4s^2 + 1} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

$$(2) \&[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t} dt = \frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s+2} \quad (\operatorname{Re} s > -2)$$

$$(3) \&[f(t)] = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} t^2 \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} 2te^{-st} dt = -\frac{2}{s^2} te^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{s^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$
$$= -\frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{2}{s^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

$$(4) \&[f(t)] = \int_0^{+\infty} \sin t \cos t e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin 2t e^{-st} dt = \frac{1}{4i} \int_0^{+\infty} [e^{-(s-2i)t} - e^{-(s+2i)t}] dt$$
$$= \frac{1}{4i} \left[ \frac{e^{-(s-2i)t}}{-(s-2i)} - \frac{e^{-(s+2i)t}}{-(s+2i)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4i} \left( \frac{1}{s-2i} - \frac{1}{s+2i} \right) = \frac{1}{s^2 + 4} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

$$(5) \&[f(t)] = \int_0^{+\infty} \sinh kte^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-(s+k)t} dt \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)} - \frac{e^{-(s+k)t}}{-(s+k)} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k} \right) = \frac{k}{s^2 - k^2} \quad (\operatorname{Re} s > \max\{k, -k\})$$



$$\begin{aligned}
 (6) \& [f(t)] &= \int_0^{+\infty} \cosh kt e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(s+k)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-(s-k)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(s-k)} + \frac{e^{-(s+k)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(s+k)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right) = \frac{s}{s^2 - k^2} \quad (\operatorname{Re} s > \max\{k, -k\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \& [f(t)] &= \int_0^{+\infty} \cos^2 t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1 + \cos 2t) e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} \cos 2t \cdot e^{-st} dt \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)} \quad (\operatorname{Re} s > 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \& [f(t)] &= \int_0^{+\infty} \sin^2 t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos 2t) e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} \cos 2t \cdot e^{-st} dt \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right) = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \quad (\operatorname{Re} s > 0)
 \end{aligned}$$

2. 求下列函数的拉氏变换.

$$(1) f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 4; \\ 0, & t \geq 4. \end{cases} \quad (2) f(t) = \begin{cases} 3, & t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$(3) f(t) = e^{2t} + 5\delta(t); \quad (4) f(t) = \delta(t)\cos t - u(t)\sin t.$$

解 (1)  $\&[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^2 3e^{-st} dt - \int_2^4 e^{-st} dt = \frac{3e^{-st}}{-s} \Big|_0^2 + \frac{3e^{-st}}{s} \Big|_2^4 = \frac{1}{s}(3 - 4e^{-2s} + e^{-4s})$

$$\begin{aligned}
 (2) \& [f(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3e^{-st} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos t \cdot e^{-st} dt \\
 &= \frac{3}{-s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{-st} dt = \frac{3}{s} - \frac{3}{s} e^{-\frac{\pi s}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (e^{-(s-i)t} + e^{-(s+i)t}) dt \\
 &= \frac{3}{s} - \frac{3}{s} e^{-\frac{\pi s}{2}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-(s-i)t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{+\infty}}{-(s-i)} + \frac{e^{-(s+i)t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{+\infty}}{-(s+i)} \right] = \frac{3}{s} - \frac{3}{s} e^{-\frac{\pi s}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-(s-i)\frac{\pi}{2}}}{s-i} - \frac{e^{-(s+i)\frac{\pi}{2}}}{s+i} \right) \\
 &= \frac{3}{s} - \frac{3}{s} e^{-\frac{\pi s}{2}} - \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\frac{\pi s}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \& [f(t)] &= \int_0^{+\infty} [e^{2t} + 5\delta(t)] e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-st} dt + 5 \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{s-2} + 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s-2} + 5e^{-st} \Big|_{t=0} = \frac{5s-9}{s-2}
 \end{aligned}$$

$$(4) \& [f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \cos t \cdot e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} \sin t e^{-st} dt = \cos t \cdot e^{-st} \Big|_{t=0} - \frac{1}{s^2 + 1} = 1 - \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

3. 设  $f(t)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 且在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t \leq \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}, \text{ 求 } \&[f(t)]$$

解 周期为  $T$  的函数  $f(t)$  的拉氏变换为

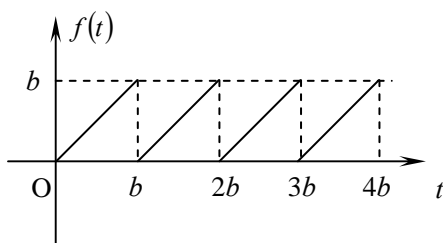
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt, (\operatorname{Re} s > 0)$$

因此有

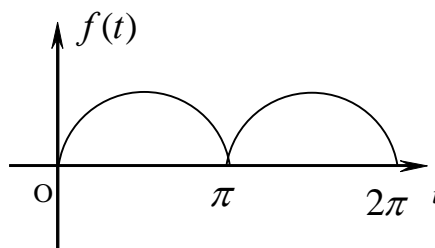
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2i} \left[ \frac{e^{-(s-i)t}}{-(s-i)} \Big|_0^{\pi} - \frac{e^{-(s+i)t}}{-(s+i)} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2i} \left( \frac{1-e^{-(s-i)\pi}}{s-i} - \frac{1-e^{-(s+i)\pi}}{s+i} \right) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}. \end{aligned}$$

4. 求下列各图所示周期函数的拉氏变换

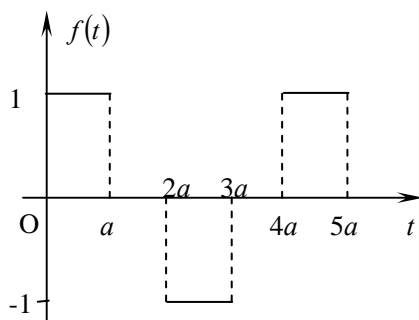
(1)



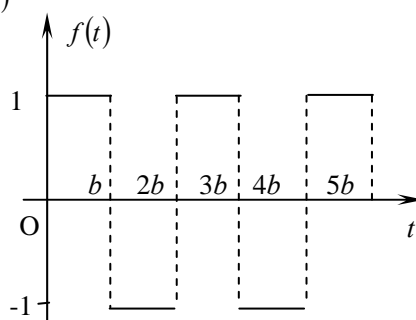
(2)



(3)



(4)



解 (1) 由图易知  $f(t)$  是周期为  $b$  的函数, 且在一个周期内的表达式为

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < b$$

由公式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-bs}} \int_0^b t e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-bs}} \left[ -\frac{1}{s} t e^{-st} \Big|_0^b - \left( -\frac{1}{s} \right) \int_0^b e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-bs}} \left[ -\frac{b e^{-bs}}{s} - \frac{1}{s^2} (e^{-bs} - 1) \right] = \frac{1}{1-e^{-bs}} \cdot \frac{bs - b s e^{-bs} + 1 - e^{-bs} - bs}{s^2} \\ &= \frac{1+bs}{s^2} - \frac{b}{s(1-e^{-bs})} \end{aligned}$$

(2) 已知  $f(t)$  是周期  $T = \pi$  的周期函数, 在一个周期内

$$f(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi$$

由公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-bs}} \int_0^\pi \sin te^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{1+e^{\pi s}}{1+s^2} \\ &= \frac{1}{1+s^2} \coth \frac{\pi s}{2}\end{aligned}$$

(3)由图可知  $f(t)$  是周期  $T=4a$  的周期函数,在一个周期内

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < a \\ 0, & a \leq t < 2a \\ -1, & 2a \leq t < 3a \\ 0, & 3a \leq t < 4a \end{cases}$$

由公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-4as}} \int_0^{4a} f(t)e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-4as}} \left[ \int_0^a e^{-st} dt + \int_{2a}^{3a} (-1)e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-4as}} \left( \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^a - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=2a}^{3a} \right) = \frac{1}{1-e^{-4as}} \cdot \frac{1-e^{-as} + e^{-3as} - e^{-2as}}{s} \\ &= \frac{(1-e^{-as})(1-e^{-2as})}{s(1-e^{-4as})} = \frac{(1-e^{-as})(1+e^{-as})}{s(1+e^{-2as})(1+e^{-as})} \\ &= \frac{1}{s(1+e^{-as})} \cdot \frac{1-e^{-2as}}{1+e^{-2as}} = \frac{1}{s(1+e^{-as})} \tanh as\end{aligned}$$

(4)由图易知,  $f(t)$  是周期为  $2b$  的周期函数,在一个周期内

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < b \\ -1, & b \leq t < 2b \end{cases}$$

由公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-2bs}} \int_0^{2b} f(t)e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-2bs}} \left( \int_0^b e^{-st} dt + \int_b^{2b} (-1)e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-2bs}} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^b - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=b}^{2b} \right] = \frac{1}{1-e^{-2bs}} \cdot \frac{1-e^{-bs} + e^{-2bs} - e^{-bs}}{s} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{(1-e^{-bs})^2}{1-e^{-2bs}} = \frac{1}{s} \tanh \frac{bs}{2}\end{aligned}$$

## 习题二

1. 求下列函数的拉氏变换式.

(1)  $f(t) = t^2 + 3t + 2$

(2)  $f(t) = 1 - te^t$

(3)  $f(t) = (t-1)^2 e^t$

(4)  $f(t) = \frac{t}{2\alpha} \sin at$

(5)  $f(t) = t \cos at$

(6)  $f(t) = 5 \sin 2t - 3 \cos 2t$

$$(7) f(t) = e^{-2t} \sin 6t$$

$$(8) f(t) = e^{-4t} \cos 4t$$

$$(9) f(t) = t^n e^{at}$$

$$(10) f(t) = u(3t-5)$$

$$(11) f(t) = u(1-e^{-t})$$

$$(12) f(t) = \frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$$

解 (1) 利用  $\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \alpha > -1$ ,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 + 3t + 2] = \mathcal{L}[t^2] + 3\mathcal{L}[t] + 2\mathcal{L}[1]$$

$$= \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s}$$

$$(2) \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1 - te^t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[te^t] = \frac{1}{s} + \frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s} - \left( \frac{1}{s-1} \right)' = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$(3) \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(t-1)^2 e^t] = \mathcal{L}[(t^2 - 2t + 1)e^t] = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[e^t] + 2 \frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^t] + \mathcal{L}[e^t]$$

$$= \frac{s^2 - 4s + 5}{(s-1)^3}$$

$$(4) \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{t}{2a} \sin at\right] = \frac{1}{2a} \mathcal{L}[t \sin at] = -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin at] = -\frac{1}{2a} \left( \frac{a}{s^2 + a^2} \right)' = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$(5) \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t \cos at] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos at] = -\left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right)' = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$(6) \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[5 \sin 2t - 3 \cos 2t] = 5\mathcal{L}[\sin 2t] - 3\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{10}{s^2 + 4} - \frac{3s}{s^2 + 4} = \frac{10 - 3s}{s^2 + 4}$$

$$(7) \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-2t} \sin 6t] = \frac{6}{(s+2)^2 + 36}$$

这里有

$$\mathcal{L}[\sin 6t] = \frac{6}{s^2 + 36}$$

再利用位移性质得到.

$$(8) \text{ 同 (7) 利用 } \mathcal{L}[\cos 4t] = \frac{s}{s^2 + 16} \text{ 及位移性质}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t} \cos 4t] = \frac{s+4}{(s+4)^2 + 16}$$

$$(9) \text{ 利用 } \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ 及位移性质得}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$(10) \text{ 解法 1 由 } u(3t-5) = \begin{cases} 1, & t > \frac{5}{3} \\ 0, & t < \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[u(3t-5)] = \int_0^{+\infty} u(3t-5)e^{-st} dt \\ &= \int_{\frac{5}{3}}^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st} \Big|_{t=\frac{5}{3}}^{+\infty}}{-s} = \frac{e^{-\frac{5}{3}s}}{s} \end{aligned}$$

解法 2 由相似性质

$$\mathcal{L}[u(3t)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{s}{3}} = \frac{1}{s}$$

由位移性质

$$\mathcal{L}[u(3t-5)] = \mathcal{L}\left\{u\left[3\left(t-\frac{5}{3}\right)\right]\right\} = e^{-\frac{5}{3}s} \mathcal{L}[u(3t)] = \frac{e^{-\frac{5}{3}s}}{s}$$

$$(11) \text{ 因为 } u(1-e^{-t}) = \begin{cases} 1, & 1-e^{-t} > 0, \quad t > 0 \\ 0, & 1-e^{-t} < 0, \quad t < 0 \end{cases}$$

所以

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$$(12) \text{ 利用 } \mathcal{L}\left[t^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \text{ 及位移性质}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s-3}}$$

2. 若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ,  $a$  为正实数, 证明 (相似性质)  $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ 。

$$\text{证 } \mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(at)e^{-\frac{s}{a}at} d(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. 若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 证明  $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$ ,  $\operatorname{Re}(s) > c$ 。特别  $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ , 或

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F'(s)], \text{ 并利用此结论, 计算下列各式:}$$

$$(1) f(t) = te^{-3t} \sin 2t, \text{ 求 } F(s); (2) f(t) = t \int_0^t e^{-3t} \sin 2tdt, \text{ 求 } F(s);$$

$$(3) F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}, \text{ 求 } f(t); (4) f(t) = \int_0^t te^{-3t} \sin 2tdt, \text{ 求 } F(s)。$$

$$\text{解 } F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{ds^n} [f(t)e^{-st}] dt = \int_0^{+\infty} (-t)^n f(t)e^{-st} dt$$

$$= \&[(-t)^n f(t)] , \operatorname{Re}(s) > c .$$

(1) 利用公式  $\&[tf(t)] = -F'(s)$

$$\&[f(t)] = \&\left[te^{-3t} \sin 2t\right] = -\frac{d}{ds} \&[e^{-3t} \sin 2t] = -\left(\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}\right)' = \frac{4(s+3)}{[(s+3)^2 + 4]^2}$$

(2) 由积分性质

$$\&\left[\int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau\right] = \frac{1}{s} \&[e^{-3t} \sin 2t] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{(s+3)^2 + 4}$$

再由像函数的微分公式

$$\&[f(t)] = \&\left[t \int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau\right] = -\frac{d}{ds} \left\{ \frac{2}{s[(s+3)^2 + 4]} \right\} = \frac{2(3s^2 + 12s + 13)}{s^2[(s+3)^2 + 4]^2}$$

$$(3) F'(s) = \left(\ln \frac{s+1}{s-1}\right)' = -2 \frac{1}{s^2 - 1} = \&\left[t \frac{2}{t} \sinh t\right] , \text{ 知 } f(t) = \frac{2}{t} \sinh t$$

$$(4) \&[f(t)] = \&\left[\int_0^t te^{-3t} \sin 2tdt\right] = \frac{1}{s} \&[te^{-3t} \sin 2t] = \frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2 + 4]^2}$$

4. 若  $\&[f(t)] = F(s)$  , 证明  $\&\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$  , 或  $f(t) = t \&^{-1}\left[\int_s^\infty F(s)ds\right]$  。并利用此

结论, 计算下列各式:

$$(1) f(t) = \frac{\sin kt}{t} , \text{ 求 } F(s) ;$$

$$(2) f(t) = \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t} , \text{ 求 } F(s) ;$$

$$(3) F(s) = \frac{s}{(s^2 - 1)^2} , \text{ 求 } f(t) ;$$

$$(4) f(t) = \int_0^t \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t} dt , \text{ 求 } F(s) .$$

$$\text{解 } \int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt ds = \int_0^{+\infty} \int_s^\infty f(t)e^{-st} ds dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \&\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

$$(1) F(s) = \&\left[\frac{\sin kt}{t}\right] = \int_s^\infty \&[\sin kt] du = \int_s^\infty \frac{k}{u^2 + k^2} du = \arctan \frac{u}{k} \Big|_s^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{k} = \operatorname{arc cot} \frac{s}{k}$$

$$(2) F(s) = \&\left[\frac{e^{-3t} \sin 2t}{t}\right] = \int_s^\infty \&[e^{-3t} \sin 2t] du = \int_s^\infty \frac{2}{(u+3)^2 + 4} du = \arctan \frac{u+3}{2} \Big|_s^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s+3}{2} = \operatorname{arc cot} \frac{s+3}{2}$$

$$(3) f(t) = t \&^{-1}\left[\int_s^\infty \frac{u}{(u^2 - 1)^2} du\right] = t \&^{-1}\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \Big|_s^\infty\right] = t \&^{-1}\left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1}{4} t(e^t - e^{-t})$$

$$= \frac{t}{2} \operatorname{sh} t$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad F(s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{e^{-3\tau} \sin 2\tau}{\tau} d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{e^{-3t} \sin 2t}{t}\right] = \frac{1}{s} \cdot \int_s^\infty \mathcal{L}[e^{-3t} \sin 2t] du = \frac{1}{s} \cdot \int_s^\infty \frac{2}{(u+3)^2 + 4} du \\
 &= \frac{1}{s} \arctan \frac{u+3}{2} \Big|_{u=s}^\infty = \frac{1}{s} \operatorname{arccot} \frac{s+3}{2}
 \end{aligned}$$

5. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt. \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-mt} \cos nt}{t} dt$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos 2t dt. \quad (5) \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt. \quad (6) \int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin 2t dt.$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{2}t} \operatorname{sh} t \cdot \sin t}{t} dt. \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} dt. \quad (9) \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sin t dt.$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt. \quad (11) \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt. \quad (12) \int_0^{+\infty} J_0(t) dt.$$

其中  $\operatorname{erf} \sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$  称为误差函数,  $J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$  称为零阶贝塞尔(Bessel)函数。

数。

解 (1) 由公式  $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)] ds$  得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}[e^{-t} - e^{-2t}] ds = \int_0^\infty \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) ds = \ln \frac{s+1}{s+2} \Big|_0^\infty = \ln 2$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}[e^{-t}(1 - \cos t)] ds = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \right] ds = \ln \frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2 + 1}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-mt} \cos nt}{t} dt &= \int_0^\infty \mathcal{L}[e^{-at} \cos bt - e^{-mt} \cos nt] ds = \int_0^\infty \left[ \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} - \frac{s+m}{(s+m)^2 + n^2} \right] ds \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{(s+a)^2 + b^2}{(s+m)^2 + n^2} \Big|_{s=0}^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{m^2 + n^2}{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 已知 } \mathcal{L}[\cos 2t] = \int_0^{+\infty} \cos 2t \cdot e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + 4}, \text{ 因此 } \int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos 2t dt = \frac{s}{s^2 + 4} \Big|_{s=3} = \frac{3}{13}$$

$$(5) \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt = \mathcal{L}[t] \Big|_{s=2} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s=2} = \frac{1}{4}$$

$$(6) \text{ 已知 } \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4} \text{ 再由微分性质 } \mathcal{L}[t \sin 2t] = -\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right)' = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\text{得 } \int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin 2t dt = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} \Big|_{s=3} = \frac{12}{169}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{2}t} \operatorname{sh} t \cdot \sin t}{t} dt &= \int_0^\infty \mathcal{L}\left[e^{-\sqrt{2}t} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \sin t\right] ds = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathcal{L}\left[e^{-(\sqrt{2}-1)t} \sin t - e^{-(\sqrt{2}+1)t} \sin t\right] ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{(s+\sqrt{2}-1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+\sqrt{2}+1)^2 + 1} \right] ds = \frac{1}{2} \left[ \arctan(s+\sqrt{2}-1) \Big|_0^\infty - \arctan(s+\sqrt{2}+1) \Big|_0^\infty \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{-} + \right) - \left( \sqrt{2} - \right) \right] = \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned} (8) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} dt &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[e^{-t} \sin^2 t] ds = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[e^{-t}(1 - \cos 2t)] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \right] ds = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2 + 4}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4} \ln 5 \end{aligned}$$

$$(9) \text{ 已知 } \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \text{ 利用微分性质 } \mathcal{L}[t^3 \sin t] = -\left( \frac{1}{s^2 + 1} \right)''' = \frac{24s^3 - 24s}{(s^2 + 4)^4}$$

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sin t dt = \mathcal{L}[t^3 \sin t] \Big|_{s=1} = \frac{24s^3 - 24s}{(s^2 + 4)^4} \Big|_{s=1} = 0$$

$$\begin{aligned} (10) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt &= - \int_0^{+\infty} \sin^2 t \left( \frac{1}{t} \right)' dt = - \frac{\sin^2 t}{t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[\sin 2t] ds = \int_0^{+\infty} \frac{2}{s+4} ds = \arctan \frac{s}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$(11) \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \mathcal{L}[\operatorname{erf}(\sqrt{t})] \Big|_{s=1} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \Big|_{s=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(12) \int_0^{+\infty} J_0(t) dt = \mathcal{L}[J_0(t)] \Big|_{s=0} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \Big|_{s=0} = 1$$

6. 求下列函数的拉氏逆变换.

$$(1) F(s) = \frac{1}{s^2 + 4}, \quad (2) F(s) = \frac{1}{s^4}, \quad (3) F(s) = \frac{1}{(s+1)^4}.$$

$$(4) F(s) = \frac{1}{s+3}, \quad (5) F(s) = \frac{2s+3}{s^2+9}, \quad (6) F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-3)}.$$

$$(7) F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}, \quad (8) F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13}.$$

$$\text{解 (1)} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$(2) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{3!} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\right] = \frac{1}{6} t^3$$

$$(3) \text{ 由 } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{6} t^3 \text{ 及位移性质 } \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t) \text{ 得}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^4}\right] = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$$

$$(4) f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3t}$$

$$(5) f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] = 2 \cos 3t + \sin 3t$$

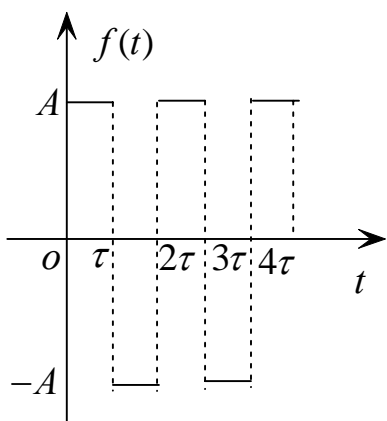


$$\begin{aligned}
 (6) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right)\right] = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
 &= \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}
 \end{aligned}$$

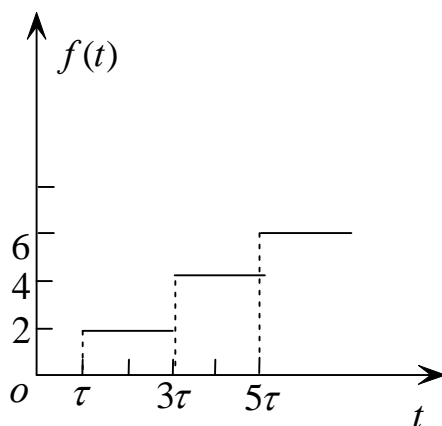
$$\begin{aligned}
 (7) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+s-6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right)\right] \\
 &= \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+5}{s^2+4s+13}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}\right] \\
 &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right] + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] \\
 &= 2e^{-2t}\cos 3t + \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t = \frac{1}{3}e^{-2t}(6\cos 3t + \sin 3t)
 \end{aligned}$$

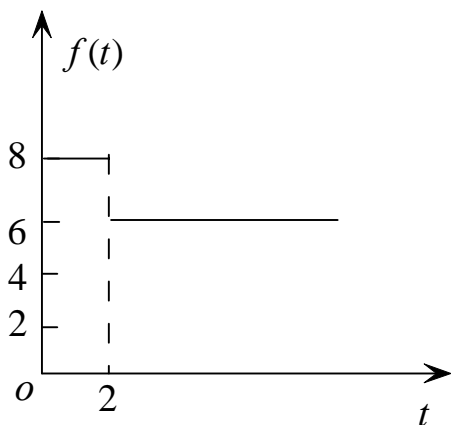
7. 求下列各图所示函数  $f(t)$  的拉氏变换.



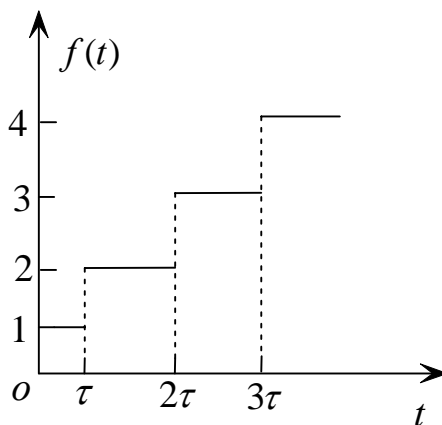
(1)



(2)



(3)



(4)

(1) 由图易知,  $f(t)$  是周期为  $2\tau$  的周期函数, 在一个周期内

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \tau \\ -A, & \tau \leq t < 2\tau \end{cases}$$

由公式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{A}{1-e^{-2\tau s}} \int_0^{2\tau} f(t) e^{-st} dt = \frac{A}{1-e^{-2\tau s}} \left( \int_0^{\tau} e^{-st} dt + \int_{\tau}^{2\tau} (-1) e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{A}{1-e^{-2\tau s}} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\tau} - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=\tau}^{2\tau} \right] = \frac{A}{1-e^{-2\tau s}} \cdot \frac{1-e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} - e^{-\tau s}}{s} \\ &= \frac{A}{s} \cdot \frac{(1-e^{-\tau s})^2}{1-e^{-2\tau s}} = \frac{A}{s} \tanh \frac{\tau s}{2} \end{aligned}$$

(2) 由图易知  $f(t) = 2[u(t-\tau) + u(t-3\tau) + u(t-5\tau) + \cdots] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} u(t-(2k+1)\tau)$ ,

当  $\operatorname{Re}(s) > 0$  时,  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)s\tau} = \frac{2}{s} \cdot \frac{e^{-s\tau}}{1-e^{-2s\tau}} = \frac{1}{s \sinh s\tau}$

(3) 由图易知  $f(t) = 8u(t) - 2u(t-2)$ , 当  $\operatorname{Re}(s) > 0$  时,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-ks\tau} = \frac{8}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s} = \frac{2}{s} (4 - e^{-2s})$$

(4) 由图易知  $f(t) = [u(t) + u(t-\tau) + u(t-2\tau) + \cdots] = \sum_{k=0}^{\infty} u(t-k\tau)$ , 当  $\operatorname{Re}(s) > 0$  时

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-ks\tau} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s\tau}} = \frac{1}{2s} (1 + \coth \frac{s\tau}{2})$$

### 习题三

1. 设  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  均满足拉氏变换存在定理的条件 (若它们的增长指数均为  $c$ ), 且  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ , 则乘积  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  的拉氏变换一定存在, 且

$$\mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F_1(q) F_2(s-q) dq$$

其中  $\beta > c$ ,  $\operatorname{Re}(s) > \beta + c$ 。

证 由于  $f_1(t), f_2(t)$  均满足拉氏变换存在定理的条件以及增长指数均为  $c_0$ , 知乘积  $f_1(t)f_2(t)$  也一定满足拉氏变换存在的定理的条件且增长指数为  $2c_0$ 。根据拉氏存在定理的证明当  $\beta > c_0$  时,

$\mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \int_0^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-st} dt$  在  $\operatorname{Re} s \geq \beta + c_0$  上存在且一致收敛。由于

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F_1(q) e^{qt} dq$$

而  $\mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \int_0^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F_1(q) e^{qt} dq \right) f_2(t) e^{-st} dt$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F_1(q) \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-(s-q)t} dt dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F_1(q) F_2(s-q) dq$$

2. 求下列函数的拉氏逆变换 (像原函数), 并用另一种方法加以验证.

$$(1) F(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}.$$

$$(2) F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}.$$

$$(3) F(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$$

$$(4) F(s) = \frac{s^2 + 2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$(5) F(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)s^3}.$$

$$(6) F(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$$

$$(7) F(s) = \frac{1}{s^4 - a^4}.$$

$$(8) F(s) = \frac{s^2 + 2s - 1}{s(s-1)^2}$$

$$(9) F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}.$$

$$(10) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$(1) \text{ 解法 1 } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2}\right] = \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2 + a^2}\right] = \frac{\sin at}{a}$$

$$\text{解法 2 } f(t) = \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2 + a^2}, ai\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2 + a^2}, -ai\right] = \frac{e^{iat}}{2ai} - \frac{e^{-iat}}{2ai} = \frac{\sin at}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 3 } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + a^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{s-ai} - \frac{1}{s+ai}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2ai} \left( \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-ai}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+ai}\right] \right) = \frac{1}{2ai} (e^{iat} - e^{-iat}) = \frac{\sin at}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解法 1 } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right] = \text{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)}, a\right] + \text{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)}, b\right] \\ &= \frac{ae^{at}}{a-b} + \frac{be^{bt}}{b-a} = \frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 2 } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)\right] \\ &= \frac{1}{a-b} \left( a \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] - b \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right] \right) = \frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 解法 1 } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \text{Res}\left[\frac{(s+c)e^{st}}{(s+a)(s+b)^2}, -a\right] + \text{Res}\left[\frac{(s+c)e^{st}}{(s+a)(s+b)^2}, -b\right] \\ &= \frac{(c-a)e^{-at}}{(b-a)^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s+c}{s+a}e^{st}\right)\Big|_{s=-b} = \frac{c-a}{(a-b)^2}e^{-at} + \frac{c-b}{a-b}te^{-bt} + \frac{a-c}{(a-b)^2}e^{-bt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 2 } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c-a}{(a-b)^2} \cdot \frac{1}{s+a} + \frac{a-c}{(a-b)^2} \cdot \frac{1}{s+b} + \frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{1}{(s+b)^2}\right] \\ &= \frac{c-a}{(a-b)^2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] + \frac{a-c}{(a-b)^2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right] + \frac{c-b}{a-b} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+b)^2}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{c-a}{(a-b)^2} e^{-at} + \frac{a-c}{(a-b)^2} e^{-bt} + \frac{c-b}{a-b} t e^{-bt}$$

(4) 解法 1  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2a} \cdot \frac{a}{s^2+a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right]$

$$= \frac{3}{2a} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right] = \frac{3}{2a} \sin at - \frac{1}{2} t \cos at$$

解法 2  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \text{Res}\left[\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2} e^{st}, a\text{i}\right] + \text{Res}\left[\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2} e^{st}, -a\text{i}\right]$

$$= \frac{d}{ds} \frac{s^2+2a^2}{(s+a\text{i})^2} e^{st} \Big|_{s=a\text{i}} + \frac{d}{ds} \frac{s^2+2a^2}{(s-a\text{i})^2} e^{st} \Big|_{s=-a\text{i}} = \frac{3}{4a\text{i}} e^{a\text{i}t} - \frac{1}{4} t e^{a\text{i}t} - \frac{3}{4a\text{i}} e^{-a\text{i}t} - \frac{1}{4} t e^{-a\text{i}t}$$

$$= \frac{3}{2a} \sin at - \frac{1}{2} t \cos at$$

(5) 解法 1  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)s^3}\right] = \frac{1}{a^2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s(s^2+a^2)}\right] = \frac{1}{a^2} \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right]\right)$

$$= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} t^3 - \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] dt\right) = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{2} t^3 - \frac{1}{a} \int_0^t \sin at dt\right)$$

$$= \frac{1}{2a^2} t^3 - \frac{1}{a^4} (1 - \cos at)$$

解法 2  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)s^3}\right]$

$$= \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+a^2)s^3}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+a^2)s^3}, a\text{i}\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+a^2)s^3}, -a\text{i}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{e^{st}}{s^2+a^2}\right) \Big|_{s=0} + \frac{e^{a\text{i}t}}{2a\text{i}(a\text{i})^3} - \frac{e^{-a\text{i}t}}{2a\text{i}(-a\text{i})^3}$$

$$= \frac{1}{2a^2} t^2 - \frac{1}{a^4} (1 - \cos at)$$

(6) 解法 1  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)(s-b)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{s+a} - \frac{1}{b(a-b)} \cdot \frac{1}{s+b}\right]$

$$= \frac{1}{ab} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{a(a-b)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] - \frac{1}{b(a-b)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right]$$

$$= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} e^{-at} - \frac{1}{b(a-b)} e^{-bt}$$

解法 2  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)(s+b)}\right]$

$$= \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)}, -a\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)}, -b\right]$$

$$= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} e^{-at} - \frac{1}{b(a-b)} e^{-bt}$$

$$(7) \text{ 解法 1 } f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^4 - a^4} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4a^3} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) - \frac{1}{2a^3} \frac{a}{s^2 + a^2} \right]$$

$$= \frac{1}{4a^3} (e^{at} - e^{-at}) - \frac{1}{2a^3} \sin at = \frac{1}{2a^3} (\text{sh } at - \sin at)$$

$$\text{解法 2 } f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^4 - a^4} \right]$$

$$= \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^4 - a^4}, a \right] + \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^4 - a^4}, -a \right] + \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^4 - a^4}, ai \right] + \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^4 - a^4}, -ai \right]$$

$$= \frac{e^{st}}{4a^3} - \frac{e^{-at}}{4a^3} + \frac{e^{ait}}{4(ai)^3} + \frac{e^{-ait}}{4(-ai)^3} = \frac{1}{2a^3} (\text{sh } at - \sin at)$$

$$(8) \text{ 解法 1 } f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 2s - 1}{s(s-1)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s-1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s-1)^2} \right] = -1 + 2e^t + 2te^t$$

$$\text{解法 2 } f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 2s - 1}{s(s-1)^2} \right] = \text{Res} \left[ \frac{s^2 + 2s - 1}{s(s-1)^2} e^{st}, 0 \right] + \text{Res} \left[ \frac{s^2 + 2s - 1}{s(s-1)^2} e^{st}, 1 \right]$$

$$= -1 + \frac{d}{ds} \left( \frac{s^2 + 2s - 1}{s} e^{st} \right) \Big|_{s=1} = -1 + 2e^t + 2te^t$$

$$(9) \text{ 解法 1 } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s^2-1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) - \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) - t$$

$$= \text{sh } t - t$$

$$\text{解法 2 } f(t) = \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^2(s^2-1)}, 0 \right] + \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^2(s^2-1)}, 1 \right] + \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{s^2(s^2-1)}, -1 \right]$$

$$= \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{st}}{s^2-1} \right) \Big|_{s=0} + \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} = \text{sh } t - t$$

$$(10) \text{ 解法 1 } f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+4} \right] \right) = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t)$$

$$\text{解法 2 } f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \right]$$

$$= \text{Res} \left[ \frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, i \right] + \text{Res} \left[ \frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, -i \right] + \text{Res} \left[ \frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, 2i \right] + \text{Res} \left[ \frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, -2i \right]$$

$$= \frac{ie^{it}}{2i(i^2+4)} + \frac{-ie^{-it}}{-2i(i^2+4)} + \frac{2ie^{2it}}{(4i^2+1)4i} + \frac{-2ie^{-2it}}{(4i^2+1)(-4i)} = \frac{e^{it}}{6} - \frac{e^{-it}}{6} + \frac{e^{2it}}{6} - \frac{e^{-2it}}{6} = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t)$$

3.求下列函数的拉氏逆变换.

$$(1) F(s) = \frac{1}{(s^2+4)^2}$$

$$(2) F(s) = \frac{s}{s+2}$$

$$(3) F(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$(4) F(s) = \frac{1}{s^4+5s^2+4}$$

$$(5) F(s) = \frac{s+1}{9s^2+6s+5}$$

$$(6) F(s) = \ln \frac{s^2-1}{s^2}$$

$$(7) F(s) = \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$$

$$(8) F(s) = \frac{1}{(s^2+2s+2)^2}$$

$$(9) F(s) = \frac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$$

$$(10) F(s) = \frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$(11) F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$$

$$(12) F(s) = \frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}$$

$$(13) F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{s^2}$$

解 (1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{16} \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{8} \left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\right] = \frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\right]$

$$= \frac{1}{16} \sin 2t - \frac{1}{8} t \cos 2t$$

$$(2) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[1 - \frac{2}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[1] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = \delta(t) - 2e^{-2t}$$

$$(3) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}\right] = \text{Res}\left[\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, -1\right] + \text{Res}\left[\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, -2\right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2)} + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+2)} + \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)} = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

$$(4) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4+5s^2+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{6} \frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] - \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t$$

$$(5) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{9s^2+6s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{9\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+4}\right] = \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{9} \left( \cos \frac{2}{3}t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} + \sin \frac{2}{3}t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \right) = \frac{1}{9} \left( \sin \frac{2}{3}t + \cos \frac{2}{3}t \right) e^{-\frac{1}{3}t}$$

$$(6) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ln \frac{s^2-1}{s^2}\right] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\ln \frac{s^2-1}{s^2}\right)'\right] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2-1} - \frac{2}{s}\right] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s}\right]$$

$$= -\frac{1}{t}(e^t + e^{-t} - 2) = \frac{2}{t}(1 - \cosh t)$$

$$\begin{aligned} (7) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{[(s+2)^2+1]^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)'\right] = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)'\right] \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right] = \frac{t}{2} \sin t \cdot e^{-2t} = \frac{1}{2} t e^{-2t} \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+2s+2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s+1)^2+1]^2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1} + \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]'\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)'\right] \right) = \frac{1}{2} (e^{-t} \sin t - t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-t} \sin t - t e^{-t} \cos t) = \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)^2}{[(s+2)^2+9]^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+9} - \frac{9}{[(s+2)^2+9]^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right)'\right] = \frac{1}{6} e^{-2t} \sin 3t + \frac{1}{2} t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right] \\ &= \frac{1}{6} e^{-2t} \sin 3t + \frac{1}{2} t e^{-2t} \cos 3t = \frac{1}{6} e^{-2t} (\sin 3t + 3t \cos 3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right] \\ &= \text{Res}\left[\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)}, -1\right] + \text{Res}\left[\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)}, -2\right] + \text{Res}\left[\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)}, -3\right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2s^2+s+5}{(s+2)(s+3)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+3)} + \lim_{s \rightarrow -3} \frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)} e^{st} = 3e^{-t} - 11e^{-2t} + 10e^{-3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)^3+3(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3} + \frac{2}{[(s+1)^2+3](s+1)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right] + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin \sqrt{3}t + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-t} \cos \sqrt{3}t = \frac{1}{3} e^{-t} (2 - 2 \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+3} + \frac{3}{2} \frac{1}{(s+3)^2} - 6 \cdot \frac{1}{(s+3)^3}\right] \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right] - 6 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^3}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{3}{2}te^{-3t} - \frac{3}{2}t^2e^{-3t}$$

$$(13) f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1+e^{-2s}}{s^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] = t + (t-2)u(t-2) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2(t-1), & t \geq 2 \end{cases}$$

## 习题四

1. 求下列卷积。

$$(1) 1 * 1.$$

$$(2) t * t$$

$$(3) t^m * t^n (m, n \text{ 为正整数}).$$

$$(4) t * e^t$$

$$(5) \sin t * \cos t.$$

$$(6) \sin kt * \sin kt.$$

$$(7) t * \sinh t.$$

$$(8) \sinh at * \sinh at.$$

$$(9) u(t-a) * f(t).$$

$$(10) \delta(t-a) * f(t).$$

解 卷积定义:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$(1) 1 * 1 = \int_0^t 1 \cdot 1 d\tau = t$$

$$(2) t * t = \int_0^t \tau(t-\tau) d\tau = t \int_0^t \tau d\tau - \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{6}t^3$$

$$\begin{aligned} (3) t^m * t^n &= \int_0^t \tau^m (t-\tau)^n d\tau = \int_0^t \tau^m \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k t^{n-k} \tau^k \right) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k t^{n-k} \int_0^t \tau^{m+k} d\tau = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{m+k+1} t^{m+n+1} \\ &= t^{m+n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{m+k+1} C_n^k = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\dots(m+n+1)} t^{m+n+1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1} \end{aligned}$$

$$(4) t * e^t = \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = e^t \left[ -\tau e^{-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{-\tau} d\tau \right] = e^t - t - 1$$

$$\begin{aligned} (5) \sin t * \cos t &= \int_0^t \sin \tau \cos(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin t d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\tau-t) d\tau \\ &= \frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{4} \cos(2\tau-t) \Big|_{\tau=0}^t = \frac{1}{2} t \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \sin kt * \sin kt &= \int_0^t \sin k\tau \cdot \sin k(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2k\tau-kt) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \cos ktd\tau \\ &= \frac{1}{2k} \sin kt - \frac{1}{2} t \cos kt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) t * \sinh t &= \int_0^t \tau \sinh(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau \frac{e^{t-\tau} - e^{-(t-\tau)}}{2} d\tau = \frac{e^t}{2} \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \tau e^{\tau} d\tau \\ &= \frac{e^t}{2} \left[ -e^{-\tau}(\tau+1) \Big|_0^t \right] - \frac{e^{-t}}{2} \left[ e^{\tau}(\tau-1) \Big|_0^t \right] = \sinh t - t \end{aligned}$$

$$(8) \sinh at * \sinh at = \int_0^t \sinh a\tau \sinh a(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{a\tau} - e^{-a\tau}}{2} \cdot \frac{e^{a(t-\tau)} - e^{-a(t-\tau)}}{2} d\tau$$



$$= \frac{1}{4} \left[ e^{at} \int_0^t d\tau - e^{-at} \int_0^t e^{2a\tau} d\tau - e^{at} \int_0^t e^{-2a\tau} d\tau + e^{-at} \int_0^t d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{2} t \cosh at - \frac{1}{2a} \sinh at$$

$$(9) \quad u(t-a) * f(t) = \int_0^t u(\tau-a) f(t-\tau) d\tau$$

当  $t < a$  时,

$$u(\tau-a) = 0$$

此时,  $u(t-a) * f(t) = 0$

当  $0 \leq a \leq t$  时

$$u(t-a) * f(t) = \int_0^a u(\tau-a) f(t-\tau) d\tau + \int_a^t u(\tau-a) f(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_a^t f(t-\tau) d\tau$$

因此,

$$u(t-a) * f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \int_a^t f(t-\tau) d\tau, & 0 \leq a \leq t \end{cases}$$

$$(10) \quad \delta(t-a) * f(t) = \int_0^t \delta(\tau-a) f(t-\tau) d\tau$$

当  $t < a$  时,  $\delta(\tau-a) = 0$ . 此时

$$\delta(t-a) * f(t) = 0$$

当  $0 \leq a \leq t$  时,

$$\delta(t-a) * f(t) = \int_0^a \delta(\tau-a) f(t-\tau) d\tau + \int_a^{a^+} \delta(\tau-a) f(t-\tau) d\tau + \int_a^t \delta(\tau-a) f(t-\tau) d\tau$$

$$= 0 + \int_a^{a^+} \delta(\tau-a) f(t-\tau) d\tau + 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-a) f(t-\tau) d\tau$$

$$= f(t-\tau) \Big|_{\tau=a} = f(t-a)$$

$$\text{因此, } \delta(t-a) * f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & 0 \leq a \leq t \end{cases}$$

$$2. \text{ 利用卷积定理, 证明 } \& \left[ \int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}.$$

$$\text{证 } \frac{F(s)}{s} = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \& [f(t) * u(t)] = \int_0^t f(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t) dt$$

$$3. \text{ 利用卷积定理证明 } \&^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \frac{t}{2a} \sin at.$$

$$\text{证 设 } F_1(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad F_2(s) = \frac{1}{a} \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\text{于是 } f_1(t) = \&^{-1}[F_1(s)] = \cos at, \quad f_2(t) = \&^{-1}[F_2(s)] = \frac{\sin at}{a}$$

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \cos a\tau \sin[a(t-\tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t [\sin at - \sin(2a\tau - at)] a\tau = \frac{1}{2a} \left[ t \sin at - \frac{1}{2a} \cos(2a\tau - at) \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{2a} t \sin at = \text{右边}\end{aligned}$$

4. 利用卷积定理证明

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$\text{并求 } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right].$$

证 设  $F_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}, F_2(s) = \frac{1}{s-1}$ , 于是

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^t$$

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} d\tau \stackrel{\tau=x^2}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx = \text{右边}\end{aligned}$$

设  $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$ , 前面已证  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau$  但

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}[F(s+1)] = e^{-t} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau$$

5. 证明卷积满足对加法的分配律:  $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

$$\begin{aligned}\text{证 } f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] &= \int_0^t f_1(\tau) [f_2(t-\tau) + f_3(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau + \int_0^t f_1(\tau) f_3(t-\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)\end{aligned}$$

6. 证明卷积满足结合律:  $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$

$$\begin{aligned}\text{证 } f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] &= \int_0^t f_1(s) \int_0^{t-s} f_2(t-s-\tau) f_3(\tau) d\tau ds \\ &= \int_0^t f_3(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} f_1(s) f_2(t-\tau-s) ds = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)\end{aligned}$$

## 习题五

1. 求下列微分方程式及方程组的解.

$$(1) y'' + 4y' + 3y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

$$(2) y'''+3y''+3y'+y=1, \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$$

$$(3) y''+3y'+2y=u(t-1), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

$$(4) y''-y=4\sin t+5\cos 2t, \quad y(0)=-1, \quad y'(0)=-2.$$

$$(5) y''-2y'+2y=2e^t \cos t, \quad y(0)=y'(0)=0$$

$$(6) y''+4y'+5y=F(t), \quad y(0)=c_1, y'(0)=c_2, (c_1, c_2 \text{ 为常数})$$

$$(7) y'''+y'=e^{2t}, \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$$

$$(8) y'''+3y''+3y'+y=6e^{-t}, \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$$

$$(9) y^{(4)}+2y''+y=0, \quad y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1.$$

$$(10) y^{(4)}+y''=\cos t, \quad y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=c \text{ (常数)}$$

$$(11) \begin{cases} x'+x-y=e^t, \\ 3x+y'-2y=2e^t, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$$

$$(12) \begin{cases} y'-2z'=F(t), \\ y''-z''+z=0, \end{cases} \quad y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0.$$

$$(13) \begin{cases} (2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0, & x(0)=x'(0)=1, \\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} x''-x+y+z=0, \\ x+y''-y+z=0, \\ x+y+z''-z=0, \end{cases} \quad x(0)=1, y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0.$$

解 (1) 对方程两边取拉氏变换, 并考虑到初始条件, 得

$$s^2Y(s)-s-1+4sY(s)-4+3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理后解出  $Y(s)$  得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)^2} + \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

再取拉氏逆变换得其解为

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] - \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \frac{7}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{7}{4}e^{-t} = \frac{1}{4}[(2t+7)e^{-t} - 3e^{-3t}] \end{aligned}$$

(2) 对方程两边取拉氏变换, 并考虑到初始条件, 得

$$s^3 Y(s) + 3s^2 Y(s) + 3s Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$$

整理后解出  $Y(s)$  得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)} = \frac{1}{s(s+1)^3} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} \end{aligned}$$

再取拉氏逆变换得其解为

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right] \\ &= 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} = 1 - \left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)e^{-t} \end{aligned}$$

(3) 对方程两边取拉氏变换, 并代入初始条件, 得

$$s^2 Y(s) - 1 + 3Y(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s} e^{-s}$$

解出  $Y(s)$ , 得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \left[ \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} \right] e^{-s} \end{aligned}$$

取拉氏逆变换, 得  $y(t)$ ,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-t} - e^{-2t} + \left[ -e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{2} \right] u(t-1)$$

(4) 方程两边取拉氏变换, 并代入初始条件, 得

$$s^2 Y(s) + s + 2 - Y(s) = \frac{4}{s^2 + 1} + \frac{5s}{s^2 + 4}$$

整理后, 得

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} + \frac{5s}{(s^2 - 1)(s^2 + 4)} - \frac{s + 2}{s^2 - 1} = -\frac{2}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 4}$$

取拉氏逆变换得

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] = -2 \sin t - \cos 2t$$

(5) 对方程两边取拉氏变换, 且代入初始条件得

$$s^2 Y(s) - 2s Y(s) + 2Y(s) = 2 \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1}$$

解出  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)'\right] = te^t \sin t$$

(6) 对方程两边取拉氏变换得 ( $F(s)$  为  $f(t)$  的拉氏变换)

$$s^2 Y(s) - c_1 s - c_2 + 4s Y(s) - 4c_1 + 5Y(s) = F(s)$$

整理得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{F(s)}{s^2+4s+5} + \frac{c_1 s + c_2 + 4c_1}{s^2+4s+5} \\ &= \frac{F(s)}{(s+2)^2+1} + c_1 \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{c_2+2c_1}{(s+2)^2+1} \end{aligned}$$

取拉氏逆变换并利用卷积定理得

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s) \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1}\right] + c_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] + (c_2+2c_1) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right] \\ &= F(t) * e^{-2t} \sin t + c_1 e^{-2t} \cos t + (c_2+2c_1) e^{-2t} \sin t \\ &= F(t) * e^{-2t} \sin t + e^{-2t} [c_1 \cos t + (c_2+2c_1) \sin t] \end{aligned}$$

(7) 对方程两边取拉氏变换得

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) + s Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-2)s(s^2+1)} \end{aligned}$$

部分分式

$$\frac{1}{(s-2)s(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

用待定系数法得

$$A = \frac{1}{10}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{2}{5}, D = -\frac{1}{5}$$

因此

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)s(s^2+1)}\right] \\ &= \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{2}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$$

(8) 对方程两边取拉氏变换, 且代入初始条件得

$$s^3 Y(s) + 3s^2 Y(s) + 3s Y(s) + Y(s) = 6 \frac{1}{s+1}$$

解出  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{6}{(s-1)^4}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-1}\right)^4\right] = t^3 e^{-t}$$

(9) 对方程两边取拉氏变换, 且代入初始条件得

$$s^4 Y(s) - s + 2s^2 Y(s) + Y(s) = 0$$

解出  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right] = \frac{1}{2} t \sin t$$

(10) 方程两边取拉氏变换, 得

$$s^4 Y(s) - cs + s^3 Y(s) - c = \frac{s}{s^2+1}$$

解出  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{c}{s^3} + \frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}\right] &= \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)}, -1\right] \\ &\quad + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)}, i\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)}, -i\right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+1)}\right)' + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{e^{st}}{s^2(s^2+1)} + \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s+i)} + \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s-i)} \\ &= t - 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{aligned}$$

因此原方程的解为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = c \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}\right]$$

$$= \frac{c}{2}t^2 + t - 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$$

(11)对方程组两边取拉氏变换并代入初始条件,得

$$\begin{cases} sX(s) - 1 + X(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} \\ 3X(s) + sY(s) - 1 - 2Y(s) = 2\frac{1}{s-1} \end{cases}$$

整理后,得

$$\begin{cases} (s+1)X(s) - Y(s) = \frac{s}{s-1} \\ 3X(s) + (s-2)Y(s) = \frac{s+1}{s-1} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} X(s) = \frac{1}{s-1} \\ Y(s) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

取拉氏逆变换得到原方程组的解为

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t \end{cases}$$

(12)对方程组两边取拉氏变换并代入初始条件,设

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], Z(s) = \mathcal{L}[z(t)], F(s) = \mathcal{L}[F(t)], \text{得}$$

$$\begin{cases} sY(s) - 2sZ(s) = F(s) \\ s^2Y(s) - s^2Z(s) + Z(s) = 0 \end{cases}$$

整理后,解之得

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{F(s)}{s} - 2\frac{sF(s)}{s^2+1} \\ Z(s) = -\frac{sF(s)}{s^2+1} \end{cases}$$

取拉氏逆变换得到原方程组的解为

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot F(s)\right] - 2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \cdot F(s)\right] \\ &= 1 * F(t) - 2 \cos t * F(t) = (1 - 2 \cos t) * F(t) \\ z(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Z(s)] = - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \cdot F(s)\right] = - \cos t * F(t) \end{aligned}$$

即解为

$$\begin{cases} y(t) = (1 - 2 \cos t) * F(t) \\ z(t) = - \cos t * F(t) \end{cases}$$

(13)方程组中每个方程两边取拉氏变换,得

$$\begin{cases} (2s^2 - s + 9)X(s) - (s^2 + s + 3)Y(s) = 1 + 2s \\ (2s^2 + s + 7)X(s) - (s^2 - s + 5)Y(s) = 3 + 2s \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 2X(s) - Y(s) = \frac{2s+2}{s^2+4} \\ X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} X(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4} \\ Y(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4} \end{cases}$$

再取拉氏逆变换得到其解为

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t \\ y(t) = \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t \end{cases}$$

(14) 对方程组中各方程两边取拉氏变换, 得

$$\begin{cases} (s^2 - 1)X(s) + Y(s) + Z(s) = s \\ X(s) + (s^2 - 1)Y(s) + Z(s) = 0 \\ X(s) + Y(s) + (s^2 - 1)Z(s) = 0 \end{cases}$$

由后两个方程得  $Y(s) = Z(s)$ ,  $X(s) = -s^2 Y(s)$  代入第一个方程解得

$$\begin{cases} X(s) = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^2-2)} = \frac{2}{3} \frac{s}{s^2-2} + \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+1} \\ Y(s) = Z(s) = -\frac{1}{3} \frac{s}{s^2-2} + \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

取拉氏逆变换得其解为

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3} \cosh \sqrt{2}t + \frac{1}{3} \cos t \\ y(t) = z(t) = -\frac{1}{3} \cosh \sqrt{2}t + \frac{1}{3} \cos t \end{cases}$$

2. 求解积分方程:  $f(t) = at + \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$ .

解 将积分方程取拉氏变换并利用卷积定理, 设  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$F(s) = \mathcal{L}[at] + \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau\right] = \frac{a}{s^2} + F(s) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

整理后得

$$F(s) = a \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \right)$$

再取拉氏逆变换得到原方程的解



$$f(t) = a \left( t + \frac{1}{6} t^3 \right)$$

3. 设在原处质量为  $m$  的一质点在  $t = 0$  时, 在  $x$  方向上受到冲击力  $k\delta(t)$  的作用, 其中  $k$  为常数, 假定质点的初速度为零, 求其运动规律.

解 设  $t$  时刻质点为  $x$  轴正方向上点  $x(t)$  处, 由题意质点运动的 (瞬间) 速度为  $x'(t)$ , 加速度为  $x''(t)$ , 且  $x(0) = x'(0) = 0$  所以质点的运动规律满足微分方程:

$$mx''(t) = k\delta(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

为解上面的微分, 将方程两边取拉氏变换并代入初始条件, 得

$$ms^2 X(s) = k,$$

即

$$X(s) = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{s^2}$$

再取拉氏逆变换得质点的运动规律为

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{k}{m} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{k}{m} t.$$

4. 设有如图所示的  $RL$  串联电路, 在  $t = t_0$  时, 将电路接上直流电源  $E$ , 求电路中的电流  $i(t)$ .

5. 如图所示的电路, 在  $t = 0$  时接入直流电源  $E$ , 求回路中电流  $i(t)$ .

6. 某系统的传递函数  $G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$ , 求当激励  $x(t) = A \sin \omega t$  时的系统响应  $y(t)$ .

解 由系统的传递函数  $G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$ , 易知系统的脉冲响应函数

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{1 + Ts}\right] = \frac{K}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$$

于是当激励  $x(t) = A \sin \omega t$  时的系统响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * x(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t A \sin \omega \tau \frac{K}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = \frac{AK}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t \sin \omega \tau e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \\ &= \frac{AK}{T} e^{-\frac{t}{T}} \left[ \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{T^2}} e^{\frac{\tau}{T}} \left( \frac{1}{T} \sin \omega \tau - \omega \cos \omega \tau \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{AK}{1 + \omega^2 T^2} \left[ (\sin \omega t - T \omega \cos \omega t) + T \omega e^{\frac{t}{T}} \right] \\ &= \frac{AK}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T) + \frac{AKT\omega}{1 + \omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} \end{aligned}$$

# 傅氏变换习题解答

## 习题一

1. 试证：若  $f(t)$  满足傅氏积分定理的条件，则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega$$

其中

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

$$\begin{aligned} \text{证 } f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) (\cos \omega \tau - j \sin \omega \tau) \cos \omega t d\tau d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) (\cos \omega \tau - j \sin \omega \tau) j \sin \omega t d\tau d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \cos \omega t d\omega \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \sin \omega t d\omega = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

因  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \cos \omega t d\tau d\omega$  为  $\omega$  的奇函数， $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau \cos \omega t d\tau d\omega$  为  $\omega$  的偶函数。

2. 试证：若  $f(t)$  满足傅氏积分定理的条件，当  $f(t)$  为奇函数时，则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

其中

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau$$

当  $f(t)$  为偶函数时，则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

其中

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau$$

证 设  $f(t)$  是奇函数

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) (\cos \omega \tau - j \sin \omega \tau) d\tau e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (b(\omega) \text{ 是 } \omega \text{ 的奇函数}) \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\omega) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

设  $f(t)$  是偶函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) (\cos \omega\tau - j\sin \omega\tau) d\tau e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$a(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数。(注也可由 1 题推证 2 题)

3. 在题 2 中, 设  $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ , 试算出  $a(\omega)$ , 并推证

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

证  $f(t)$  是偶函数

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}$$

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega$$

$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |t| < 1 \\ \frac{\pi}{2} \frac{0+1}{2} = \frac{\pi}{4} & |t| = 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

## 习题二

1. 求矩形脉冲函数  $f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  的傅氏变换。

解  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} A e^{-j\omega t} dt$

$$= A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{\tau} = A \frac{e^{-j\omega\tau} - 1}{-j\omega} = A \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega}$$

2. 求下列函数的傅氏积分:

$$(1) f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & t^2 < 1 \\ 0, & t^2 > 1 \end{cases} \quad (2) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t} \sin 2t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3) f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -1 \\ -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < +\infty \end{cases}$$

解 (1) 函数  $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$  满足傅氏积分定理的条件, 傅氏积分公式为

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 (1-t^2) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 (1-t^2) \cos \omega t dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega} - \left( \frac{2t \cos \omega t}{\omega^2} - \frac{2 \sin \omega t}{\omega^3} + \frac{t^2 \sin \omega t}{\omega} \right) \right]_0^1 e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(\sin \omega - \omega \cos \omega)}{\omega^3} e^{i\omega t} d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \cos \omega t d\omega
\end{aligned}$$

(2)  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t} \sin 2t, & t \geq 0 \end{cases}$  满足傅氏积分定理的条件，其傅氏积分公式为

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin 2t e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-t+i(2-\omega)t} - e^{-t-i(2+\omega)t}) dt e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{e^{[-1+i(2-\omega)]t}}{-1+i(2-\omega)} - \frac{e^{[-1-i(2+\omega)]t}}{-1-i(2+\omega)} \right]_0^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-1}{-1+i(2-\omega)} - \frac{-1}{-1-i(2+\omega)} \right] e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-\omega^2) - 2\omega i}{25-6\omega^2+\omega^4} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-\omega^2) \cos \omega t + 2\omega \sin \omega t}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-\omega^2) \sin \omega t - 2\omega \cos \omega t}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(5-\omega^2) \cos \omega t + 2\omega \sin \omega t}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega
\end{aligned}$$

(3) 函数  $f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  是奇函数，满足傅氏积分定理的条件，其傅氏积分公式为

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 1 \cdot \sin \omega t dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t d\omega
\end{aligned}$$

在  $f(t)$  的间断点  $t_0 = -1, 0, 1$  处以  $\frac{f(t_0+0) + f(t_0-0)}{2}$  代替。

3. 求下列函数的傅氏变换，并推证下列积分结果。

(1)  $f(t) = e^{-\beta|t|}$  ( $\beta > 0$ )，证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$

(2)  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ ，证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos(\omega t) d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t$

$$(3) f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}, \text{证明 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi \sin \omega t}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin t, & |t| \leq \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad F(t) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-i\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [e^{-(\beta-i\omega)t} + e^{-(\beta+i\omega)t}] dt = \frac{e^{-(\beta-i\omega)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(\beta-i\omega)} + \frac{e^{-(\beta+i\omega)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(\beta+i\omega)} \\ &= \frac{1}{\beta-i\omega} + \frac{1}{\beta+i\omega} = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$f(t)$  的积分表达式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} \cos \omega t d\omega$$

$$\text{即} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos te^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{[1+i(1-\omega)]t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{[1-i(1+\omega)]t} dt + \int_0^{+\infty} e^{[-1+i(1-\omega)]t} dt + \int_0^{+\infty} e^{[-1-i(1+\omega)]t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{[1+i(1-\omega)]t} \Big|_{-\infty}^0}{1+i(1-\omega)} + \frac{e^{[1-i(1+\omega)]t} \Big|_{-\infty}^0}{1-i(1+\omega)} + \frac{e^{[-1+i(1-\omega)]t} \Big|_0^{+\infty}}{-1+i(1-\omega)} + \frac{e^{[-1-i(1+\omega)]t} \Big|_0^{+\infty}}{-1-i(1+\omega)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+i(1-\omega)} + \frac{1}{1-i(1+\omega)} + \frac{1}{-1+i(1-\omega)} + \frac{1}{-1-i(1+\omega)} \right] = \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4} \end{aligned}$$

$f(t)$  的积分表达式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega$$

$$\text{因此有} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t$$

$$\begin{aligned} (3) \quad F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t e^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt = -2i \int_0^{\pi} \sin t \sin \omega t dt \\ &= i \int_0^{\pi} [\cos(1+\omega)t - \cos(1-\omega)t] dt = i \left[ \frac{\sin(1+\omega)t \Big|_0^{\pi}}{1+\omega} - \frac{\sin(1-\omega)t \Big|_0^{\pi}}{1-\omega} \right] \\ &= i \frac{\sin(1+\omega)\pi - \omega \sin(1+\omega)\pi - \sin(1-\omega)\pi - \omega \sin(1-\omega)\pi}{1-\omega^2} = -2i \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega^2} \end{aligned}$$

$f(t)$  的积分表达式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -2i \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega^2} \right) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi \sin \omega t}{1-\omega^2} d\omega$$

因此有  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi \sin \omega t}{1-\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin t, & |t| \leq \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$

4. 已知某函数  $f(t)$  的傅氏变换为  $F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$ , 求该函数  $f(t)$ 。

解 
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+t)\omega + \sin(1-t)\omega}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+t)\omega}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-t)\omega}{\omega} d\omega \quad (*) \end{aligned}$$

而由  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  得

当  $u > 0$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u\omega}{\omega} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u\omega}{u\omega} du\omega = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

当  $u < 0$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u\omega}{\omega} d\omega = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(-u)\omega}{\omega} d\omega = -\frac{\pi}{2}$

当  $u = 0$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u\omega}{\omega} d\omega = 0$ , 所以由(\*)式有

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1 \\ \frac{1}{4}, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

5. 已知某函数的傅氏变换为  $F(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ , 求该函数  $f(t)$ 。

解 
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}}{2} = \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

6. 求符号函数 (又称正负号函数)  $\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$  的傅氏变换。

解 符号函数不满足傅氏积分定理的条件, 显然  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sgn} t| dt \rightarrow +\infty$  不收敛。按照如下方式推广傅氏

变换的定义。首先注意到可取  $f_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -e^{t/n}, & t < 0 \end{cases}$ , 且  $\operatorname{sgn} t = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ ,  $F[\operatorname{sgn} t] = \lim_{n \rightarrow \infty} F[f_n(t)]$ , 而

$f_n(t)$  满足傅氏积分定理的条件, 且

$$F_n[\omega] = \mathcal{F}[f_n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t/n} e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{t/n} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n} + i\omega} - \frac{1}{\frac{1}{n} - i\omega} = \frac{-2\omega i}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \omega^2}$$

$$\text{故 } F[\omega] = \mathcal{F}[f(t)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n[\omega] = \frac{-2\omega i}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \omega^2} = \begin{cases} \frac{2}{i\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

注：一般地，若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ，且  $f_n(x)$  古典意义下的傅氏变换  $F_n[\omega] = \mathcal{F}[f_n(t)]$ ， $(n=1, 2, \dots)$  都存在，且当  $n \rightarrow +\infty$ ，函数族  $\{F[\omega]\}$  收敛，则称该极限为  $f(x)$  在极限意义下的傅氏变换，即

$$F[\omega] = \mathcal{F}[f(x)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n[\omega]$$

7. 求函数  $f(t) = \frac{1}{2}[\delta(t+a) + \delta(t-a) + \delta(t+\frac{a}{2}) + \delta(t-\frac{a}{2})]$  的傅氏变换。

解  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+a) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t+\frac{a}{2}\right) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t-\frac{a}{2}\right) e^{-i\omega t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-i\omega a} + e^{i\omega a} + e^{-i\omega \frac{a}{2}} + e^{i\omega \frac{a}{2}} \right) = \cos \omega a + \cos \frac{\omega a}{2} \end{aligned}$$

8. 求函数  $f(t) = \cos t \sin t$  的傅氏变换。

$$\begin{aligned} \text{解 } F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t \sin t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4i} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-2)t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+2)t} dt \right] = -\frac{1}{4i} [2\pi\delta(\omega+2) - 2\pi\delta(\omega-2)] \\ &= \frac{\pi i}{2} [\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)] \end{aligned}$$

9. 求函数  $f(t) = \sin^3 t$  的傅氏变换。

$$\begin{aligned} \text{解 } F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^3 t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (3\sin t - \sin 3t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i\pi}{4} [3\delta(\omega+1) - 3\delta(\omega-1) - \delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)]. \end{aligned}$$

10. 求函数  $f(t) = \sin(5t + \frac{\pi}{3})$  的傅氏变换。

$$\begin{aligned} \text{解 } F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5t + \frac{\pi}{3}) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin 5t + \sqrt{3} \cos 5t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} i\pi [\delta(\omega+5) - \delta(\omega-5)] + \frac{\sqrt{3}}{2} \pi [\delta(\omega+5) + \delta(\omega-5)] = \frac{\pi}{2} [(\sqrt{3}+i)\delta(\omega+5) + (\sqrt{3}-i)\delta(\omega-5)] \end{aligned}$$

11. 证明  $\delta$ -函数是偶函数，即  $\delta(t) = \delta(-t)$ 。

证 设  $f(x)$  为任意一个在  $(-\infty, +\infty)$  无穷次可微的函数, 则

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)f(-u)du = f(0)$ , 又由  $\delta$ -函数的筛选性质知  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$ , 知

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt$ , 故  $\delta$ -函数是偶函数。

12. 证明: 若  $\mathcal{F}[e^{j\varphi(t)}] = F(\omega)$ , 其中  $\varphi(t)$  为一实函数, 则

$$\mathcal{F}[\cos \varphi(t)] = \frac{1}{2}[F(\omega) + \overline{F(-\omega)}], \quad \mathcal{F}[\sin \varphi(t)] = \frac{1}{2j}[F(\omega) - \overline{F(-\omega)}],$$

其中  $\overline{F(-\omega)}$  为  $F(-\omega)$  的共轭函数。

证 因为  $e^{j\varphi(t)} = \cos \varphi(t) + j \sin \varphi(t)$ ,  $e^{-j\varphi(t)} = \cos \varphi(t) - j \sin \varphi(t)$

所以 
$$\cos \varphi(t) = \frac{e^{j\varphi(t)} + e^{-j\varphi(t)}}{2} \quad (*)$$

$$\sin \varphi(t) = \frac{e^{j\varphi(t)} - e^{-j\varphi(t)}}{2j} \quad (**)$$

但 
$$\mathcal{F}[e^{-j\varphi(t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\varphi(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\varphi(t)} e^{-i(-\omega)t} dt} = \overline{F(-\omega)}$$

由本题(\*)、(\*\*)式得

$$\mathcal{F}[\cos \varphi(t)] = \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}[e^{j\varphi(t)}] + \mathcal{F}[e^{-j\varphi(t)}] \} = \frac{1}{2} [F(\omega) + \overline{F(-\omega)}]$$

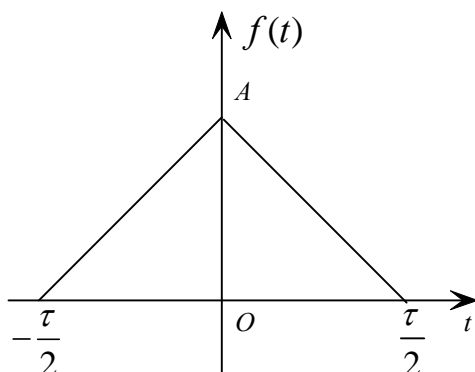
$$\mathcal{F}[\sin \varphi(t)] = \frac{1}{2j} \{ \mathcal{F}[e^{j\varphi(t)}] - \mathcal{F}[e^{-j\varphi(t)}] \} = \frac{1}{2j} [F(\omega) - \overline{F(-\omega)}]$$

13. 证明周期为  $T$  的非正弦函数  $f(t)$  的频谱函数为  $F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - \omega_0)$ , 其中  $c_n$  为  $f(t)$  的傅氏级数展式中的系数。

证 设  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , 则周期为  $T$  的非正弦函数  $f(t)$  的傅氏级数的复指数形式为:  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - n\omega_0)t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

14. 求如图所示的三角形脉冲的频谱函数。



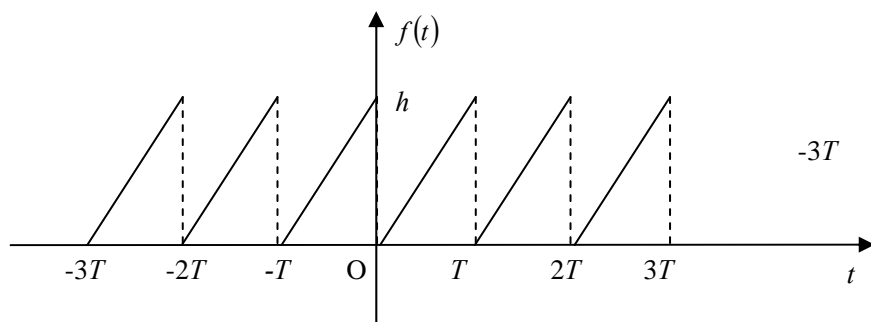


$$\text{解 } f(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \tau/2 \\ -\frac{2A}{\tau}t + A, & 0 \leq t \leq \tau/2 \\ \frac{2A}{\tau}t + A, & -\tau/2 \leq t \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } f(t) \text{ 的频谱函数为}$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\tau/2}^0 \left(\frac{2A}{\tau}t + A\right)e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\tau/2} \left(-\frac{2A}{\tau}t + A\right)e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{2A}{\tau} \left[ \frac{2 - 2e^{\frac{i\omega\tau}{2}} + i\omega\tau}{2\omega^2} - \frac{-2 + 2e^{\frac{i\omega\tau}{2}} + i\omega\tau}{2\omega^2} \right] = \frac{4A}{\tau\omega^2} \left( 1 - \cos \frac{\omega\tau}{2} \right)$$

15. 求作如图所示的锯齿形波的频谱图。



解 如图可知,在一个周期  $T$  内的表达式为  $f(t) = \frac{h}{T}t (0 \leq t < T)$ , 它的傅氏级数的复指数形式为:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega t}$$

可见  $f(t)$  的傅氏系数为

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h}{T} t dt = \frac{h}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{h}{2}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h}{T} t e^{in\omega t} dt = \frac{h}{T^2} \int_0^T t e^{-in\omega t} dt$$

$$= \frac{h}{T^2} \left[ t \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right]_0^T + \frac{1}{in\omega} \int_0^T e^{-in\omega t} dt = \frac{h}{T^2} \left[ \frac{T e^{-in\omega T}}{-in\omega} + \frac{e^{-in\omega T} - 1}{n^2 \omega^2} \right]$$

$$= \frac{hi}{n\omega T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

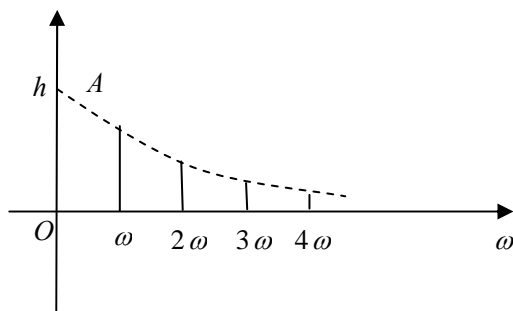
它的频谱为

$$A_0 = 2|C_0| = h, \quad A_n = 2|C_n| = \frac{2h}{n\omega T} = \frac{h}{n\pi},$$

其中

$$\omega_n = n\omega = \frac{2n\pi}{T} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

这样对应不同的频率得出各次谱波的振幅, 因此频谱图如图所示.



16. 求高斯 ( Gauss ) 分布函数  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$  的频谱函数

解 教科书中 P10, 例 2 已解得钟形脉冲函数  $Ae^{-\beta t^2}$  的傅氏变换为  $A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/4\beta}$ , 本题中  $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ ,

$\beta = \frac{1}{2\sigma^2}$ , 所以

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

### 习题三

1. 若  $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ ,  $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ ,  $\alpha, \beta$  是常数, 证明 (线性性质):

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)] = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t).$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] e^{-i\omega t} dt = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) \end{aligned}$$

2. 若  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 证明 (对称性质):  $f(\pm\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mp t) e^{-i\omega t} dt$ , 即  $\mathcal{F}[F(\mp t)] = 2\pi f(\pm\omega)$ 。

$$\text{证 因 } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ 令 } x = -t, f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (*)$$

$$\text{令 } t = \omega, \text{ 则 } f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(t)], \text{ 即 } \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega);$$

$$(*) \text{ 式中令 } -t = \omega, \text{ 则 } f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-t) e^{-i\omega t} d(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(t)], \text{ 即}$$

$$\mathcal{F}[F(-t)] = 2\pi f(\omega).$$

3. 若  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ,  $a$  为非零常数, 证明 (相似性质)  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 。

$$\text{证 设 } a > 0, \text{ 有 } \mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\frac{\omega}{a}u} \frac{1}{a} d(at) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\frac{\omega}{a}u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

同理  $a > 0$  时,  $\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{1}{a} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} du = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$  ;

综上,  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 。

4. 若  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 证明 (象函数的位移性质):

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega \mp \omega_0)] = e^{\pm j\omega_0 t} f(t), \text{ 即 } F(\omega \mp \omega_0) = \mathcal{F}[e^{\pm j\omega_0 t} f(t)].$$

证  $\mathcal{F}[e^{\pm j\omega_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt = F(\omega \mp \omega_0)$ 。

5. 若  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 证明 (象函数的微分性质):  $\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \mathcal{F}[-jtf(t)]$ 。

证  $\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtf(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[-jtf(t)]$ 。

6. 若  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 证明 (翻转性质)

$$F(-\omega) = \mathcal{F}[f(-t)]$$

证  $F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-j(\omega)(-t)} d(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[f(-t)]$ 。

7. 若  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 证明:  $\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$ ,

$$\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]。$$

证  $\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right]$

$$= \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] ;$$

$\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right]$

$$= \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]。$$

8. 利用能量积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ , 求下列积分的值:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx ; \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx ; \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx ; \quad (4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

解 (1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathcal{F}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \right|^2 d\omega \quad (*)$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-j\omega x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \omega x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+\omega)x + \sin(1-\omega)x}{x} dx \quad (**)$$

再由

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+\omega)x}{x} dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega < -1 \\ 0, & \omega = -1 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega > -1 \end{cases}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\omega)x}{x} dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 1 \\ 0, & \omega = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 1 \end{cases}$$

所以由 (\*\*) 式得

$$\eta\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \begin{cases} \pi, & -1 < \omega < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此由 (\*) 式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \pi^2 d\omega = \pi$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\eta\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \pi^2 d\omega = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(3) 参见本题第 4 小题。

$$\begin{aligned} (4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dt = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\eta\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\right|^2 d\omega$$

$$\eta\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx \quad (\text{利用留数理论计算})$$

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|\omega|t}}{1+t^2} dt\right\} = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i|\omega|z}}{1+z^2}, i\right]\right\}$$

$$\operatorname{Re}\left\{2\pi i \frac{e^{-|\omega|}}{1+i}\right\} = \operatorname{Re}\left\{(\pi i + \pi)e^{-|\omega|}\right\} = \pi e^{-|\omega|}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 e^{-2|\omega|} d\omega = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2\omega} d\omega = \pi \frac{e^{-2\omega} \Big|_0^{+\infty}}{-2} = \frac{\pi}{2}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

## 习题四

1、证明下列各式：

$$(1) f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) ;$$

$$(2) f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) ;$$

$$(3) a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)] \quad (a \text{ 为常数}) ;$$

$$(4) e^{at} [f_1(t) * f_2(t)] = [e^{at} f_1(t)] * [e^{at} f_2(t)] \quad (a \text{ 为常数}) ;$$

$$(5) [f_1(t) + f_2(t)] * [g_1(t) + g_2(t)] = f_1(t) * g_1(t) + f_2(t) * g_1(t) + f_1(t) * g_2(t) + f_2(t) * g_2(t) ;$$

$$(6) \frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \left( \frac{df_1(t)}{dt} \right) * f_2(t) = f_1(t) * \left( \frac{df_2(t)}{dt} \right).$$

证 (1)  $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-u) f_2(u) du = f_2(t) * f_1(t) ;$

(2) 记  $g(t) = f_2(t) * f_3(t) ,$

$$\begin{aligned} [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\zeta) f_2(\tau-\zeta) d\zeta \right] f_3(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\zeta) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau-\zeta) f_3(t-\tau) d\tau \right] d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\zeta) g(t-\zeta) d\zeta \\ &= f_1(t) * g(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) a[f_1(t) * f_2(t)] &= a \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [af_1(\tau)] f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) [af_2(t-\tau)] d\tau \\ &= [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) [e^{at} f_1(t)] * [e^{at} f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\tau} f_1(\tau) e^{a(t-\tau)} f_2(t-\tau) d\tau \\ &= e^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = e^{at} [f_1(t) * f_2(t)] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) [f_1(t) + f_2(t)] * [g_1(t) + g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\tau) + f_2(\tau)] \cdot [g_1(t-\tau) + g_2(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot g_1(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot g_2(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) \cdot g_1(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) \cdot g_2(t-\tau) d\tau \\ &= f_1(t) * g_1(t) + f_2(t) * g_1(t) + f_1(t) * g_2(t) + f_2(t) * g_2(t) ; \end{aligned}$$

$$(6) \frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[ \frac{d}{dt} f_2(t-\tau) \right] d\tau = f_1(t) * \left[ \frac{d}{dt} f_2(t) \right]$$

$$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} [f_2(t) * f_1(t)] = f_2(t) * \left[ \frac{d}{dt} f_1(t) \right] = \left[ \frac{d}{dt} f_1(t) \right] * f_2(t)$$

因此有  $\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \left[ \frac{df_1(t)}{dt} \right] * f_2(t) = f_1(t) * \left[ \frac{df_2(t)}{dt} \right] .$

3. 若  $f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$  与  $f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$  求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解  $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} f_2(t-\tau) d\tau \quad (*)$

当  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$  时, (\*) 式为

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} \frac{e^{i(t-\tau)} - e^{-i(t-\tau)}}{2i} d\tau \\ &= \frac{1}{2i} \left[ e^{it} \int_0^t e^{-(1+i)\tau} d\tau - e^{-it} \int_0^t e^{-(1-i)\tau} d\tau \right] = \frac{1}{2i} \left[ e^{it} \frac{e^{-(1+i)t} - 1}{-(1+i)} - e^{-it} \frac{e^{-(1-i)t} - 1}{-(1-i)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left( e^{it} \frac{e^{-(1+i)t} - 1}{-(1+i)} - e^{-it} \frac{e^{-(1-i)t} - 1}{-(1-i)} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{it} - e^{-t}}{1+i} + \frac{e^{-t} - e^{-it}}{1-i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{it} - e^{-t} - i e^{it} + i e^{-t} + e^{-t} - e^{-it} + i e^{-t} - i e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{i(e^{it} + e^{-it})}{2i} + \frac{2i e^{-t}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) \end{aligned}$$

当  $t > \frac{\pi}{2}$  时, (\*) 式为

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{t-\frac{\pi}{2}}^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2i} \left[ e^{it} \frac{e^{-(1+i)\tau} \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t}{-(1+i)} - e^{-it} \frac{e^{-(1-i)\tau} \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t}{-(1-i)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ e^{it} \frac{e^{-(1+i)(t-\frac{\pi}{2})} - e^{-(1+i)t}}{1+i} + e^{-it} \frac{e^{-(1-i)t} - e^{-(1-i)(t-\frac{\pi}{2})}}{1-i} \right] \\ &= \frac{1}{2i} e^{-t} \left( \frac{i e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} + \frac{1 + i e^{\frac{\pi}{2}}}{1-i} \right) = \frac{e^{-t}}{2i} \cdot \frac{i e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + e^{\frac{\pi}{2}} + i + 1 + i e^{\frac{\pi}{2}} + i - e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \left( 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \right) \end{aligned}$$

当  $t < 0$  时, (\*) 式为 0.

故有

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq 0 \text{ 时} \\ \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}), & \text{当 } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时} \\ \frac{e^{-t}}{2} \left( 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \right), & \text{当 } t > \frac{\pi}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

3. 若  $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ ,  $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ , 证明  $\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$ 。

证  $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) F_2(\omega - \tau) d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - \tau) e^{i(\omega - \tau)t} d(\omega - \tau) e^{i\tau t} F_1(\tau) d\tau = 2\pi f_1(t) \cdot f_2(t)$$

4、求下列函数的傅氏变换.

$$(1) f(t) = \sin(\omega_0 t) u(t); \quad (2) f(t) = e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \cdot u(t); \quad (3) f(t) = e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \cdot u(t);$$

$$(4) f(t) = e^{i\omega_0 t} u(t); \quad (5) f(t) = e^{i\omega_0 t} u(t - t_0); \quad (6) f(t) = e^{i\omega_0 t} \cdot u(t)$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt \right] = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi \delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{i(\omega + \omega_0)} - \pi \delta(\omega + \omega_0) \right] \\ &= -\frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{\pi i}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi i}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t} u(t) \sin \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} \left( e^{-[\beta + i(\omega - \omega_0)]t} - e^{-[\beta + i(\omega + \omega_0)]t} \right) dt = \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{-[\beta + i(\omega - \omega_0)]t} \Big|_0^{+\infty}}{-[\beta + i(\omega - \omega_0)]} - \frac{e^{-[\beta + i(\omega + \omega_0)]t} \Big|_0^{+\infty}}{-[\beta + i(\omega + \omega_0)]} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{\beta + i(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{\beta + i(\omega + \omega_0)} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega_0}{(\beta + i\omega) + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(\beta + i\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t} u(t) \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( e^{-[\beta + i(\omega - \omega_0)]t} + e^{-[\beta + i(\omega + \omega_0)]t} \right) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\beta + i(\omega + \omega_0)} \right) \\ &= \frac{\beta + i\omega}{(\beta + i\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 由像函数的位移性质及 } \mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \text{ 得}$$

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} u(t)] = \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

(5) 根据位移性质

$$\mathcal{F}[u(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[u(t)] = e^{-i\omega t_0} \left[ \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$$

再根据像函数的位移性质

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} u(t - t_0)] &= e^{-i(\omega - \omega_0)t_0} \left[ \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \right] \\ &= \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)t_0}}{i(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

(6) 由微分性质  $\mathcal{F}[(-it)^n f(t)] = F^{(n)}(\omega)$  得

$$\mathcal{F}[tu(t)] = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[u(t)] = i \left( \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right)' = -\frac{1}{\omega^2} + \pi i \delta'(\omega)$$

再由象函数的位移性质得

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} tu(t)] = \frac{-1}{(\omega - \omega_0)^2} + \pi i \delta'(\omega - \omega_0)$$

5. 证明互相关函数和互能量谱密度的下列性质： $R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$ ,  $S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}$ 。

$$\text{证 } R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)f_2(u-\tau)du = R_{12}(-\tau);$$

$$S_{21}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{21}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau} = \overline{S_{12}(\omega)}.$$

6. 已知某信号的相关函数  $R(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2a|\tau|}$ , 求它的能量谱密度  $S(\omega)$ 。

$$\begin{aligned} \text{证 } S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|\tau|} e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{4} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-i(\omega-2a)\tau}d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-i(\omega+2a)\tau}d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{i(\omega-2ai)} - \frac{1}{i(\omega+2ai)} \right] = \frac{a}{4a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

7. 已知某波形的互相关函数  $R(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$  ( $\omega_0$ 为常数), 求这个波形的能量谱密度。

解 波形的能量谱密度

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau \cdot e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

8. 若函数  $f_1(t) = \begin{cases} \frac{b}{a}t, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 与  $f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 求  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的互相关函数  $R_{12}(\tau)$ 。

$$\text{证 当 } |\tau| > a \text{ 时, } R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt = 0;$$

$$\text{当 } 0 < \tau \leq a \text{ 时, } R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt = \int_0^{a-\tau} \frac{b}{a}tdt = \frac{b}{2a}(a-\tau)^2;$$

$$\text{当 } -a \leq \tau \leq 0 \text{ 时, } R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt = \int_{-\tau}^a \frac{b}{a}tdt = \frac{b}{2a}(a^2 - \tau^2).$$