2020年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第三章　复变函数的积分

第一节　复变函数积分的概念

一、复变函数的积分定义

二、积分的存在条件及计算法

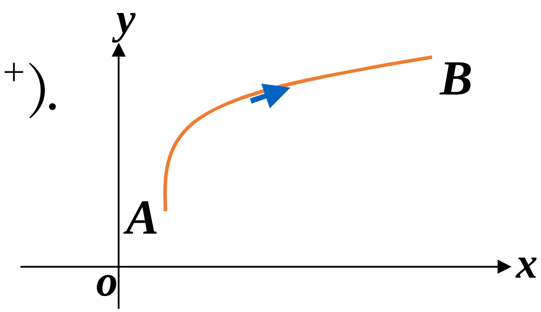
三、积分的性质

一、复变函数的积分定义

1. 有向曲线

设 C 为平面上给定的一条分段光滑曲线. 如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向), 那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线，称为有向曲线.

如果 A 到 B 作为曲线 C 的正向, 记为 C(或C^+). 那么 B 到 A 就是曲线 C 的负向, 记为 C^-.



关于曲线方向的说明

1) 以后把两个端点中的一个作为起点, 另一个作为终点. 除特殊声明外, 正方向总是指从起点到终点的方向.

2) 对简单封闭曲线而言，总默认逆时针方向为正向，除非另有说明.

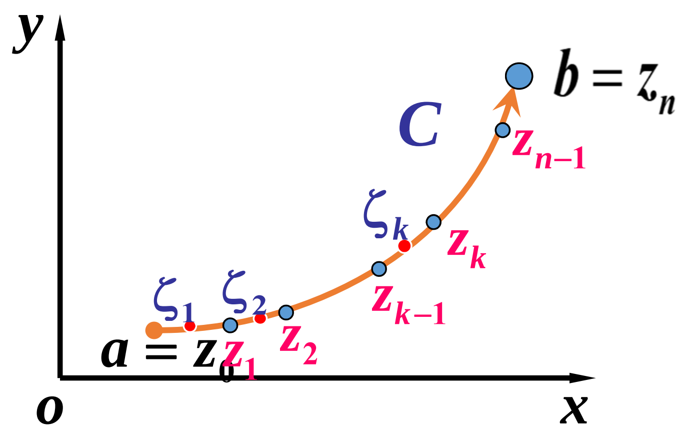
2. 复积分的定义

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是复平面有向曲线C上的有界函数，其中C是以a为起点b为终点.

(1) 分割

在C上插入n-1个分点, 连同两个端点, 共n+1个点按顺序排列为

$$a=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_{k-1},z_k,\cdots,z_{n-1},z_n=b$$



(2) 近似、求和

在每个弧段$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}\,(k=1,2,3,\cdots,n)$上任意取一点$\zeta_k$, 作和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k=S_n$$

这里 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 记 $\delta=\max\{\Delta s_k \mid 1\le k\le n\}$, 其中 $\Delta s_k=\overset{\frown}{z_k z_{k-1}}$的长度.

上页 下页 返回 结束

(3) 求极限

当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时，如果极限

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

存在，则称 $f(z)$ 在 C 上可积. 其极限值称为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

关于复积分的说明

1) 复积分是《微积分》第二类曲线积分的推广.

2) 用 $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 表示函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的负向的积分.

3) 常用 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 表示函数 $f(z)$ 沿封闭曲线 C 的积分.

4) 当 $C=[a,\mathrm{b}]\subset\mathbb{R}$，前面的复积分就是实变复值函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 的定积分. 此时积分记为 $\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$.

5) 复积分与对曲线C的分法无关，也与 ζ_k 取法无关.

复积分一般不写成 $\int_a^b f(z)dz$, 除非意义很明确.

二、积分的存在条件及计算法

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k) \tag{3.1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

假定 $f(z)$ 在C上连续. 则 u,v 也在C上连续. 于是, 据《微积分》关于实变函数的第二类曲线积分的结果, 当$\delta\to 0$时, (3. 1) 式右端极限存在. 因此, $f(z)$ 在C上可积，且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \tag{3.2}$$

注解 公式(3. 2)在形式上可以看成是 $f(z)=u+iv$ 与 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$

$$=\int_C u\mathrm{d}x+iv\mathrm{d}x+iu\mathrm{d}y-v\mathrm{d}y$$

$$=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

总之，复函数的积分可表为两个实的第二类曲线积分.

设有向曲线C的参数方程为

$$z(t)=x(t)+iy(t),\alpha\le t\le\beta,a=z(\alpha),b=z(\beta),$$

其中 a,b 分别为起点与终点. 代入公式(3. 2)右端

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\{u[x(t),y(t)]x'(t)-v[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$
$$+i\int_\alpha^\beta\{v[x(t),y(t)]x'(t)+u[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$
$$=\int_\alpha^\beta\{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}\{x'(t)+iy'(t)\}\mathrm{d}t$$
$$=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

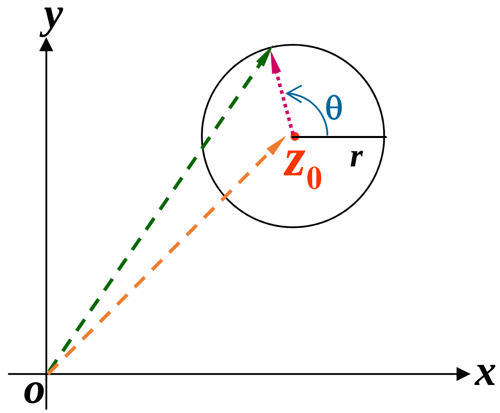
因此, 我们得到复积分计算公式

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t. \longrightarrow \text{积分换元}$$

例1 求 $I_n=\oint_C\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, C为以z_0为中心, r为半径的正向圆周, n为整数.

解： 积分路径的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \theta : 0 \to 2\pi.$$



代入积分换元公式, 并注意到

$$\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

则有

$$I_n = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta.$$

当$n = 0$时,

$$I_0 = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$

当$n \neq 0$时,

$$I_n = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\mathrm{d}\theta - \frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\mathrm{d}\theta = 0.$$

因此, 我们获得公式

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

记住公式(3. 3)！

三、积分的性质

1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$ (方向性)

2) $\int_C \alpha f(z)\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\mathrm{d}z, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z.$

(线性性)

4) 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ (分段光滑曲线)，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}\right) f(z)\mathrm{d}z.$$

(对积分曲线可加性)

5) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|, |\mathrm{d}z| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}s.$

6) 设曲线 C 的长度为 L. 若 $|f(z)| \le M$, 则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML.$

$\left.\begin{matrix} 5) \\ 6) \end{matrix}\right\}$ (积分估值)

证明性质(5)和(6)：

因为 $|\Delta z_k|$ 是 z_k 与 z_{k-1} 两点之间的距离, Δs_k 为这两点之间弧段的长度, 所以, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$$

两端取极限, 并利用极限保不等式性, 得

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$$

易见

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML \Longrightarrow$$ 性质6).

引申 若 $F, f:[a,b]\to\mathbb{C}, F'=f$, 则成立实变复值函数的牛顿−莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

证明： 设 $F=U+iV,\ f=u+iv:[a,b]\to\mathbb{C}$, 则$F'=f\Rightarrow U'=u, V'=v$. 于是

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\mathrm{d}t+i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=\left[U(b)-U(a)\right]-i\left[V(b)-V(a)\right]=F(b)-F(a).$$

例2 设C为从原点到点$3+4i$的直线段, 试求积分$\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$绝对值的一个上界.

解：C 的参数方程为 $z=(3+4i)t$，$(0\le t\le 1)$根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\le\int_C\left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s\le\frac{5}{3}\int_C\mathrm{d}s=\frac{25}{3}$$

因为在 C 上, $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|=\dfrac{1}{|3t+(4t-1)i|}=\dfrac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\le\dfrac{5}{3}.$

第二、三节　柯西定理

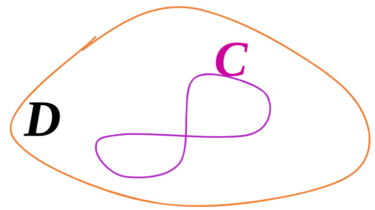
一、Cauchy-Goursat基本定理

二、复合闭路柯西定理

一、Cauchy-Goursat基本定理

定理 (柯西—古萨基本定理) 设$\boldsymbol{D}$为单连通域 ,如有 果函数 $\boldsymbol{f(z)\in A(D)}$,
那么对 $\boldsymbol{D}$ 内的任何一条封闭曲线 $\boldsymbol{C}$,有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$



此定理常称为柯西积分定理.

定理中的 C 可以不是简单曲线. 如右图.

证明: 附加条件"$f'(z)$在D内连续",用格林公式

$$\left.\begin{aligned} \int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y &= -\iint_G (v_x+u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \\ \int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y &= \iint_G (u_x-v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

定理 (推广的柯西定理) 设C是一条周线,D为C之内部, $f(z)$在D内解析,在 $\overline{D}=D+C$上连续,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

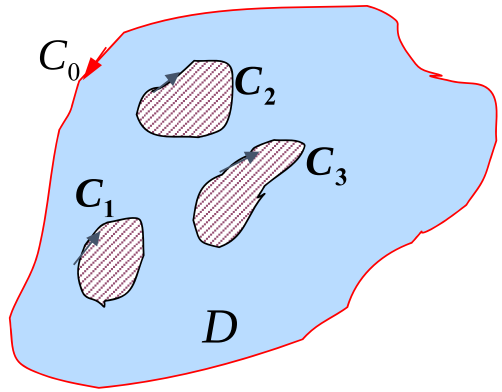
这个定理的证明十分困难，其证明的难度取决于边界曲线光滑性.

二、复合闭路柯西定理

考虑$n+1$条周线$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$,其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$中每一条都在其余各条的外部,而它们又全在$C_0$的内部,在$C_0$的内部又在$C_1, C_2, \cdots, C_n$外部的点构成一个有界的$n+1$连通区域$D$, 以$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$为它的边界,在这种情形下我们称区域$D$的边界是一条复周线,记作

$$C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-.$$

它包括了取正向的C_0,以及取负向的C_1, C_2, $\cdots$, C_n.（如右图）



直观上，假如观察者沿着复周线C 的正向绕行时，区域D 总在它的左手边.

定理 设D是由复周线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 所围的有界$n+1$连通区域.若函数$f(z)$在闭域$\overline{D} = D + C$上解析,即$f \in A(\overline{D})$, 则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$ 或写成

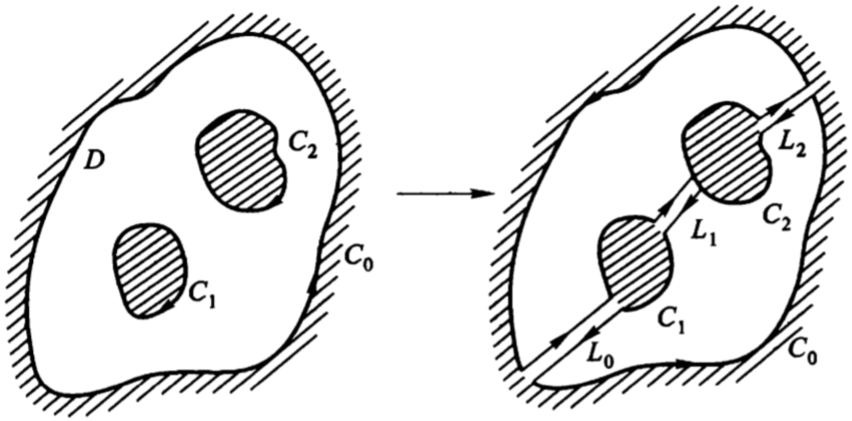
$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

或写成

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

沿外边界积分等于沿内边界积分之和.

证明：取n条互不相交且在D内的光滑弧 $L_0, L_1, \cdots, L_n$作为割线. 用它们顺次与 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 连接，将多连通区域D割开，于是多连通区域D被分成两个单连通域.



这两个单连通域的边界分别记为Γ_0, Γ_1. (如图)

利用单连通域柯西定理,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = 0, \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

将两式相加，并注意到沿着 $L_0, L_1, \cdots, L_n$的积分，从相反的方向各取了一次.

利用复积分的性质,

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

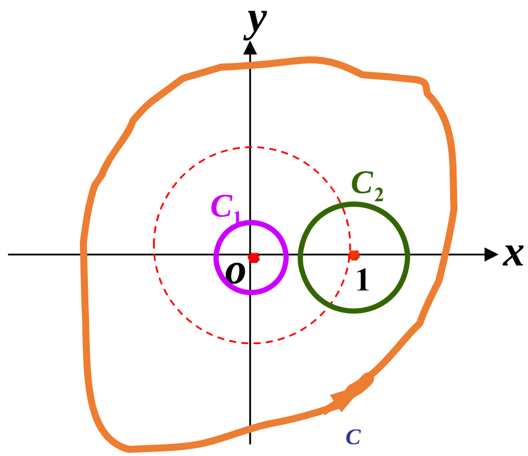
另两个等式容易得到.

复合闭路柯西定理可以推广成下列形式:

设C是一条复周线,D为C之内部,$f(z)$在D内解析,在$\overline{D}=D+C$上连续,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

例 计算积分$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$, C为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.



解: 因为函数$\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点$z=0$和$z=1$,

依题意知, C也包含这两个奇点.在 C内作两个互不包含也互不相交的圆周C_1 和 C_2, C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$, 则$C+C_1^-+C_2^-$构成复周线(如右图)

根据复合闭路定理,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

上页 下页 返回 结束

于是,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz$$

$$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0$$

$$= 4\pi i.$$

第四节　原函数与不定积分

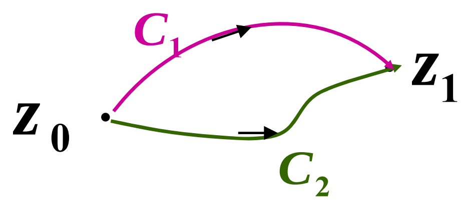
一、积分与路径无关

二、原函数

一、积分与路径无关

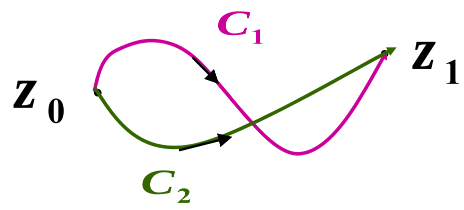
定理一　设f是单连通区域D内的解析函数，则f在D内的积分与路径无关,
即 $\forall z_0, z_1 \in D$, 积分

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$



之值,不依赖于D内连接起点z_0与终点z_1的曲线.

证明: 设C_1与C_2是D内连接起点z_0与终点z_1的任两条曲线,
则正方向曲线C_1与负方向C_2^-曲线就连接成D内一条闭曲线C.



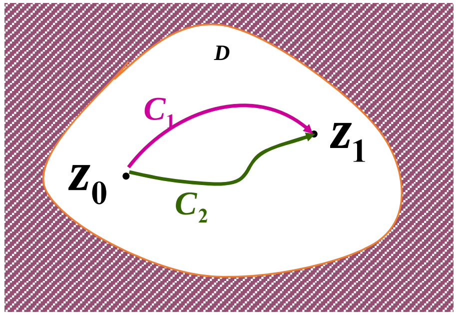
由柯西-古萨基本定理及复积分的基本性质有

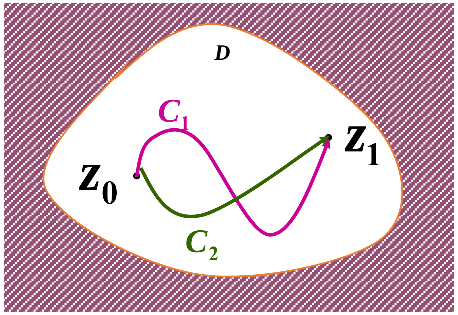
$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

注解 如果起点为 z_0，终点为 z_1，

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$



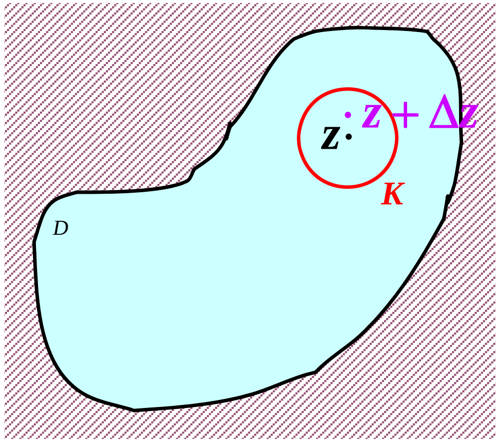


如果固定 z_0, 让 z_1 在 D 内变动, 并令 $z_1 = z$, 便可确定 D 内的一个单值函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta.$$

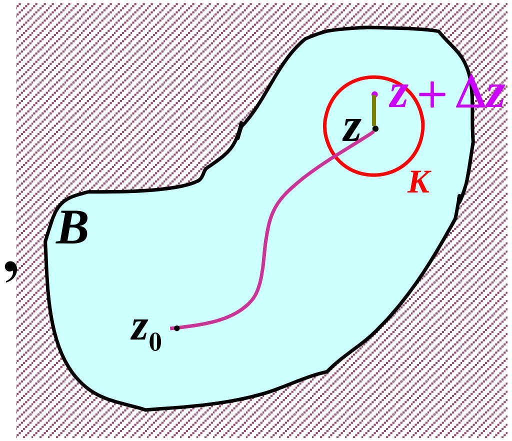
定理二 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 那末函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$ 必为 D 的一个解析函数, 并且 $F'(z) = f(z)$.

证明: 利用导数的定义来证. 设 z 为 D 内任一点, 以 z 为中心作一含于 D 内的小圆 K, 取 $|\Delta z|$ 充分小使 $z + \Delta z$ 在 K 内.



由 $F(z)$ 的定义,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$



由于积分与路线无关, $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路线可先取 z_0 到 z,

(注意:这一段与 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的路线相同)

然后从 z 沿直线到 $z+\Delta z$, 于是

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

因为 $\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z$, 所以

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta$$

由 $f(z)$ 在 D 内连续, 故对 $\forall\varepsilon>0$, 只要开始小圆充分小, 则小圆内任一点 ζ 均合条件 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, 故

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|$$

$$=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0$, 即 $F'(z)=f(z)$. 证毕.

二、原函数

定义 如果函数 $\Phi(z)$ 在区域 D 内的导数为$f(z)$, 即 $\Phi'(z)=f(z)$, 那么称$\Phi(z)$为$f(z)$在区域D内的一个原函数.

显然 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系： $f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

证明：设 $\Phi(z)$ 及 $F(z)$ 都是 $f(z)$ 在 D 内的原函数，我们有

$$[\Phi(z)-F(z)]'=\psi'(z)=0,$$

在这里 $\psi(z)=\Phi(z)-F(z)$. 于是

$$\psi(z)=\alpha,$$

亦即 $\Phi(z)=F(z)+\alpha$，这里 α 是一常数.

注解 如果 f 在区域 D 内有一个原函数 F，那么它就有无穷多个原函数，

其全体原函数可表示为：$F(z)+c$ (c 为任意常数).

定义 称 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c 为任意常数)为 $f(z)$ 的不定积分，记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z=F(z)+c.$$

定理三 (复积分的Newton-Leibnitz公式) 设 $f(z)\in C(D)$, D 是区域，并且在 D 上有原函数. 如果 $\alpha,\beta\in D$, 并且 C 是 D 内连接 α,β 的光滑曲线，那么成立

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(\beta)-F(\alpha).$$

证明：如果曲线 C 是光滑曲线 $z=z(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$, $z(a)=\alpha$, $z(b)=\beta$, 那么

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t))=F'(z(t))z'(t)$, 并且因为微积分基本定理对实变数复数值函数显然成立，所以

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z(t))\Big|_a^b = F(z(b))-F(z(a)) = F(\beta)-F(\alpha).$$

注解 1) 定理三对分段光滑曲线依然成立.

2) 若复函 f,g 满足定理三的条件，那么成立分部积分公式

$$\int_C f(z)\mathrm{d}g(z) = f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta - \int_C g(z)\mathrm{d}f(z).$$

例1　求 $\int_0^i z\cos z dz$ 的值.

解: 因为 $z\cos z$ 是解析函数,它的一个原函数是 $z\sin z+\cos z$, 由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_0^i z\cos z dz=[z\sin z+\cos z]_0^i=i\sin i+\cos i-1=i\frac{e^{-1}-e}{2i}+\frac{e^{-1}+e}{2}-1=e^{-1}-1.$$

另解: $\int_0^i z\cos z dz=\int_0^i z d(\sin z)=[z\sin z]_0^i-\int_0^i \sin z dz=e^{-1}-1.$

例2 试沿区域 $\mathrm{Im}(z)\geq 0, \mathrm{Re}(z)\geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$, 求 $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ 的值.

解: 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析,它的一个原函数为 $\frac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz=\left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i=\frac{1}{2}[\ln^2(1+i)-\ln^2 2]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]$$

$$=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

上页 下页 返回 结束

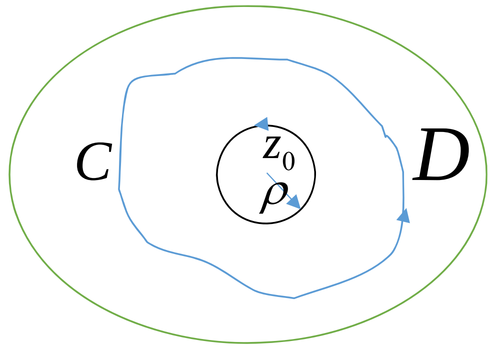
第五、六节　柯西积分公式与高阶导数公式

一、Cauchy积分公式

二、高阶导数公式

一、柯西积分公式

1. 启发性思考



设 $z_0 \in D$, D是单连通区域, $f \in A(D)$.（如右图）

那么 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 不解析. 然而,注意到

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \xlongequal{\text{多连通域柯西定理}} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \xlongequal{z=z_0+\rho e^{i\theta}} i\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\Big\downarrow \rho \to 0$$

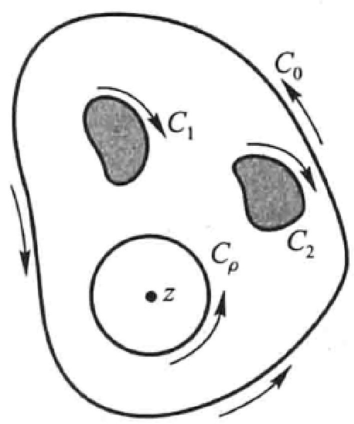
$$2\pi i f(z_0)$$

问题：积分 $\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$与$\rho$无关,那么是否成立

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)?$$

2. 柯西公式

定理 设区域D的边界是周线(或复周线)C. 若函数$f(z)$在D内解析. 在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则有



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \quad (z\in D).$$

柯西(积分)公式

证明： 任意固定 $z\in D, F(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, $\zeta\in\overline{D}$, $\zeta\neq z$ 作为ζ的函数在D内除z外均解析. 今以点z为心，充分小的$\rho>0$为半径作圆周C_ρ, 使C_ρ及其内部均含于D, 对于复周线 $\Gamma=C+C_\rho^-$ 及函数$F(\zeta)$, 引用柯西定理，

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$=2\pi i f(z)+\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

=0.(下面证之)

上页 下页 返回 结束

另一方面, 由于$f(z)$在 z_0连续，那么

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |\zeta - z| = \rho < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (\zeta \in C_\rho).$$

因此, 我们有估计

$$\left| \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \le \oint_{C_\rho} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} ds = \varepsilon,$$

这蕴含

$$\oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

证毕.

注解 1） 条件同定理，则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbb{C} - \overline{D}. \end{cases}$$

柯西公式

柯西定理

2）柯西积分公式表达了一个有趣的事实：在闭区域$\overline{D}$上连续，在区域D上全纯的函数的值完全由它在边界上的值决定.

二、高阶导数公式

定理 设区域D的边界是周线(或复周线)C. 若函数$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，则有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(z\in D,n=1,2,3,\cdots).$$

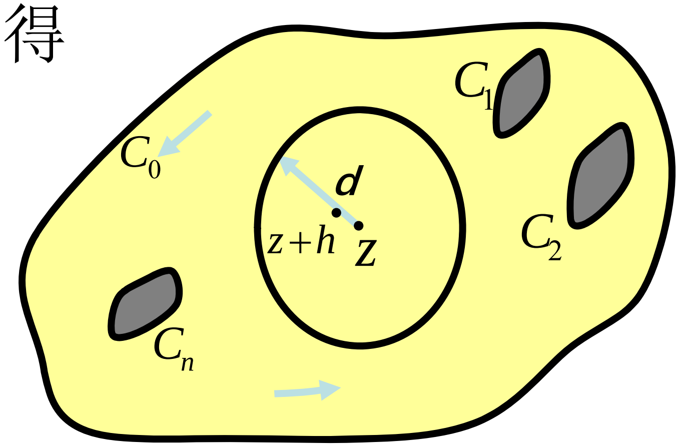
证明: 首先证结论$n=1$时成立. 设$z+h\in D$, 仅需证明,h趋近于0时,下式也趋近于0:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right]$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}d\zeta$$

现在估计上式最后一个积分. 设以z为心, 以d为半径的圆盘完全在D内, 并且在这个圆盘内取$z+h$, 使得$0<|h|<d/2$, 那么当 $\zeta \in C$,

$$|\zeta - z| > d, |\zeta - z - h| > d/2,$$



设$|f(z)|$在C上的一个上界是M, 并且设C的长度是L, 于是, 我们有

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \le \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{ML}{\frac{d}{2} \cdot d^2} \to 0, \quad h \to 0,$$

这蕴含待证积分

$$\frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta \to 0, \quad h \to 0.$$

上页 下页 返回 结束

要完成定理的证明，现在应用数学归纳法．设$n=k$时，结论成立．取z及$z+h$同上，那么有

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}}d\zeta-\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right]-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi ih}\int_C \frac{\left[(\zeta-z)^{k+1}-(\zeta-z-h)^{k+1}\right]f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\int_C \frac{\left[(\zeta-z)^{j+1}(\zeta-z-h)^{k-j}-(\zeta-z-h)^{k+1}\right]f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\int_C \frac{\left[(\zeta-z)^{j+1}-(\zeta-z-h)^{j+1}\right]f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{j+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta=\frac{k!h}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\int_C \frac{(\zeta-z)^{\ell}(\zeta-z-h)^{j-\ell}f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{j+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!h}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{\ell+1}(\zeta-z)^{k-\ell+2}}d\zeta$$

同前部分一样估计，我们有

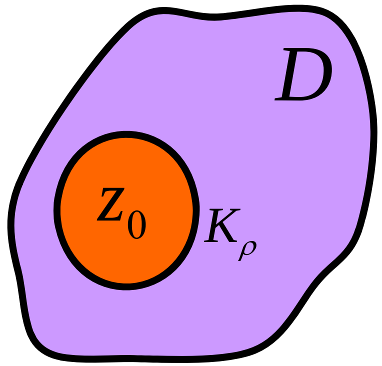
$$\left|\frac{k!h}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{\ell+1}(\zeta-z)^{k-\ell+2}}d\zeta\right| \le \frac{k!|h|}{2\pi}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\frac{ML}{\left(d/2\right)^{\ell+1}d^{k-\ell+2}} = \frac{k!|h|}{2\pi}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\frac{2^{\ell+1}ML}{d^{k+3}} \to 0, h\to 0,$$

这导致

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta \to 0, h\to 0.$$

由此证明了定理的结论当$n=k+1$时成立. 因此, 归纳法原理表明定理得证.

注解 柯西公式应用——证明**解析函数无穷可微性**



结论 若 $f(z)\in A(D)$, D是区域, 则f 在D内有任意阶导数.

证明: $\forall z_0\in D$, 作闭圆$K_\rho:|z-z_0|\le\rho$, 使$K_\rho\subset D$(如右图).

根据定理, $f(z)$在K_ρ内有各阶导数, 因而$f(z)$在z_0有各阶导数.

由z_0的任意性, $f(z)$在D内有各阶导数.

例1 计算下列积分,其中 C 为正向圆周 : $|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz$;　　(2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解: (1) 函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z = 1$ 处不解析, 但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

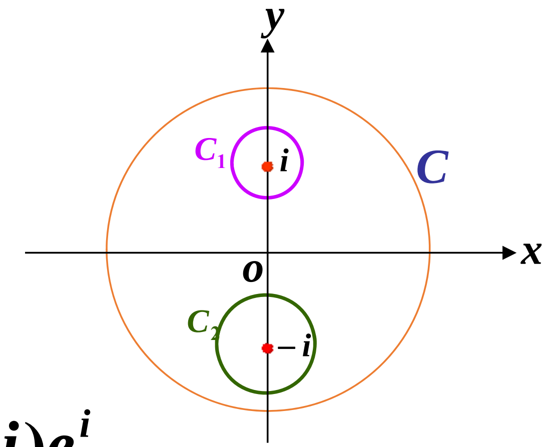
$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos\pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

(2) 函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z = \pm i$ 处不解析,在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2, 则函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2 围成的

区域内解析.

根据复合闭路原理,



$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$

同理可得 $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$, 于是

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi + \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi = \frac{\pi}{2}(1-i)(e^i - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1) = i\pi(\sin 1 - \cos 1).$$

第七节　调和函数

一、调和函数的概念

二、解析函数与调和函数的关系

三、计算实例

一、调和函数的概念

定义　如果二元实变函数 $\phi(x,y)$ 在区域 D内具有二阶连续偏导数，并且满足*Laplace*方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\phi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

说明　工程中的许多问题，如平面上的稳定温度场、静电场和稳定流场等都满足Laplace方程.

二、解析函数与调和函数的关系

定理　任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证明：设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为区域 D 内的一个解析函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据解析函数的导数仍是解析函数，因此 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 具有任意阶的连续偏导数，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 分别关于x, y求导

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

再由二阶导函数的连续性

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，因此 $u(x,y)$ 是调和函数.

同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, 因此$v(x,y)$是调和函数.

问题 任给区域D内的两个调和函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$, $u(x,y)+iv(x,y)$在D内是否为解析函数?

答：不一定. 例如：$f(z)=x^2-y^2-2xyi.$

定义 设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数, 我们把使$u+iv$在D内构成解析函数的调和函数$v(x,y)$称为$u(x,y)$的**共轭调和函数.**

推论：区域 D 内解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

问题 已知 $u(x,y)$是区域D上的调和函数，是否存在$u(x,y)$的共轭调和函数 $v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u+iv$是D上的解析函数?

或者已知调和函数 $v(x,y)$ 时，是否存在调和函数 $u(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 是D上的解析函数?

三、计算实例

例1 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为全平面上的调和函数，并求以其为实部的解析函数.

解：因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$,

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 故 $u(x,y)$ 为调和函数.

令 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$,

$$v=-6\int xy\mathrm{d}y=-3xy^2+g(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x),$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2$,

$$\Rightarrow -3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2,$$

$$g(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + c, \quad (c\text{为任意常数})$$

$$v(x,y)= x^3 - 3xy^2 + c, \qquad w = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + c).$$

$$w = f(z) = i(z^3 + c).$$

解法2:

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=i\left(3x^2-3y^2\right)-6xy=3iz^2, z\in\mathbb{C}$$

$$f(z)=iz^3+iC,\ C\in\mathbb{R}.$$

注解 已知解析函数的实部求虚部，至多相差一个常数。