

# 复变函数与积分变换复习提纲

## 第一章 复变函数

### 一、复变数和复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

### 二、复变函数的极限与连续

$$\text{极限 } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad \text{连续 } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

## 第二章 解析函数

### 一、复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可导与解析的概念。

### 二、柯西——黎曼方程

$$\text{掌握利用 C-R 方程 } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ 判别复变函数的可导性与解析性。}$$

$$\begin{aligned} \text{掌握复变函数的导数: } f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -iu_y + v_y \\ &= u_x - iu_y = \dots = iv_x + v_y \end{aligned}$$

### 三、初等函数

重点掌握初等函数的计算和复数方程的求解。

#### 1、幂函数与根式函数

$$w = z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta} \quad \text{单值函数}$$

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad n \text{ 多值函数}$$

#### 2、指数函数: $w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

性质: (1) 单值. (2) 复平面上处处解析,  $(e^z)' = e^z$  (3) 以  $2\pi i$  为周期

#### 3、对数函数

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln z + i2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

性质: (1) 多值函数, (2) 除原点及负实轴处外解析, (3) 在单值解析分枝上:  $(\ln z)'_k = \frac{1}{z_k}$ 。

$$4、三角函数: \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

性质: (1) 单值 (2) 复平面上处处解析 (3) 周期性 (4) 无界

#### 5、反三角函数 (了解)

$$\text{反正弦函数 } w = \operatorname{Arc} \sin z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\text{反余弦函数 } w = \text{Arc cos } z = \frac{1}{i} \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

性质与对数函数的性质相同。

$$6、\text{一般幂函数: } z^s = e^{s \text{Ln} z} = e^{s[\ln|z| + (2k\pi + \arg z)i]} \quad (k=0, \pm 1 \cdots)$$

四、调和函数与共轭调和函数:

- 1) 调和函数:  $\nabla^2 u(x, y) = 0$
- 2) 已知解析函数的实部 (虚部), 求其虚部 (实部)  
有三种方法: a) 全微分法  
b) 利用 C-R 方程  
c) 不定积分法

### 第三章 解析函数的积分

一、复变函数的积分  $\int_l f(z)dz = \int_l udx - vdy + i \int_l vdx + udy$  存在的条件。

二、复变函数积分的计算方法

- 1、沿路径积分:  $\int_c f(z)dz$  利用参数法积分, 关键是写出路径的参数方程。
- 2、闭路积分: a)  $\oint_c f(z)dz$  利用留数定理, 柯西积分公式, 高阶导数公式。  
b)  $\oint_c [u(x, y) + iv(x, y)]dz$  利用参数积分方法

三、柯西积分定理:

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

推论 1: 积分与路径无关

$$\int_c f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

推论 2: 利用原函数计算积分

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

推论 3: 二连通区域上的柯西定理

$$\oint_{c_1} f(z)dz = \oint_{c_2} f(z)dz$$

推论 4: 复连通区域上的柯西定理

$$\oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z)dz$$

$$\text{四、柯西积分公式: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

五、高阶导数公式：
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

解析函数的两个重要性质：

- 解析函数  $f(z)$  在任一点  $z$  的值可以通过函数沿包围点  $z$  的任一简单闭合回路的积分表示。
- 解析函数有任意阶导数。

**本章重点：**掌握复变函数积分的计算方法

沿路径积分  $\int_C f(z) dz$     1) 利用参数法积分    2) 利用原函数计算积分。

闭路积分  $\oint_C f(z) dz$     利用留数定理计算积分。

## 第四章 解析函数的级数

一、幂级数及收敛半径：
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

1、一个收敛半径为  $R$  ( $\neq 0$ ) 的幂级数，在收敛圆内的和函数  $f(z)$  是解析函数，在这个收敛圆内，这个展开式可以逐项积分和逐项求导，即有：

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1} \quad |z-b| < R$$

$$\int_0^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z a_n (z-b)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad |z-b| < R$$

2、收敛半径的计算方法

1) 比值法：
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$$

2) 根值法：
$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

二、泰勒 (Taylor) 级数

1、如函数  $f(z)$  在圆域  $|z-b| < R$  内解析，那么在此圆域内  $f(z)$  可以展开成 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$$

1) 展开式是唯一的。故将函数在解析点的邻域中展开幂级数一定是 Taylor 级数。

2) 收敛半径是展开点到  $f(z)$  的所有奇点的最短距离。

3) 展开式的系数可以微分计算：
$$a_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

4) 解析函数可以用 Taylor 级数表示。

2、记住一些重要的泰勒级数：

$$1) \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad 2) e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$3) \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{(2n+1)} \quad 4) \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

### 三、罗兰 (Laurent) 级数

如果函数  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z-b| < R_2$  内解析，则  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-b)^n$   $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz$

( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

- 1、展开式是唯一的，即只要把函数在圆环域内展开为幂级数即为 Laurent 级数。
- 2、展开式的系数是不可以利用积分计算。利用已知的幂级数，通过代数运算把函数展开成 Laurent 级数。
- 3、注意展开的区域，在展开点的所有解析区域展开。

### 四、孤立奇点

1、定义：若  $b$  是  $f(z)$  的孤立奇点，则  $f(z)$  在  $0 < |z-b| < \delta$  内解析。在此点  $f(z)$  可展开为罗兰级数，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-b)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-b)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-b)^n$$

2、分类：

$$\text{孤立奇点} \begin{cases} \text{可去奇点: 无负幂项, } \operatorname{Res}[f(z), b] = 0 \\ \text{极点: 有限负幂项} \\ \text{本性奇点: 无穷多负幂项, } \operatorname{Res}[f(z), b] = c_{-1} \end{cases}$$

把函数在奇点的去心邻域中展开为罗兰级数，求解 C-1

3、极点留数计算

a) 如果  $b$  是  $f(z)$  的一阶极点，则  $\operatorname{Res}[f(z), b] = \lim_{z \rightarrow b} (z-b)f(z)$

b) 如果  $b$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), b] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow b} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-b)^m f(z)]$$

c) 如  $b$  是  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  的一阶极点，且  $P(b) \neq 0$ ，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, b\right] = \frac{P(b)}{Q'(b)}$$

$$d) \operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

e) 若  $z = \infty$  是  $f(z)$  的可去奇点, 并且  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ,

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -C_{-1} = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

关系: 全平面留数之和为零。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}[f(z), b_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$$

**本章重点:** 函数展开成 Taylor 级数, 并能写出收敛半径。

函数在解析圆环域内展开成 Laurent 级数。

孤立奇点 (包含  $z = \infty$  点) 的判定及其留数的计算。

## 第五章 留数定理的应用

一、  $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

条件: (1)  $R(\sin \theta, \cos \theta)$  为  $\cos \theta$  与  $\sin \theta$  的有理函数

(2)  $R(\cdot)$  在  $[0, 2\pi]$  或者  $[-\pi, \pi]$  上连续。

令  $z = e^{i\theta}$ , 则  $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ ,  $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ ,  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] \quad |z_k| < 1 \end{aligned}$$

注意留数是计算单位圆中的奇点。

二、  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

条件: (1)  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$   $P(x), Q(x)$  是  $x$  的多项式。

(2)  $Q(x) \neq 0$

(3) 分母阶次比分子阶次至少高二次

则  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{R=1}^n \operatorname{Res}[f(z), b_k]$   $b_k$  是  $f(z)$  在上半平面的奇点。

三、  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx \quad (\alpha > 0)$

条件: (1)  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , 且  $Q(x)$  比  $P(x)$  至少高一阶,

(2)  $Q(x) \neq 0$ , (3)  $\alpha > 0$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [R(z) e^{i\alpha z}, b_k] \quad \left| \quad \operatorname{Im} b_k > 0 \right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} I, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} I$$

重点关注第一和第三种类型

## 第七章 Fourier 变换

一、傅立叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

二、 $\delta$  函数的傅立叶变换

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j\omega x} dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega = \delta(x)$$

三、一些傅立叶变换及逆变换

$$\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = H(x) - \frac{1}{2}$$

四、性质： $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$

1、相似性质

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

2、 $\mathcal{F}[f(x \pm x_0)] = e^{\pm j\omega x_0} F(\omega)$  延迟性质

$$\mathcal{F}[e^{\mp j\omega_0 x} f(x)] = F(\omega \pm \omega_0) \quad \text{位移性质}$$

3、微分性质

$$\mathcal{F}[f'(x)] = j\omega F(\omega) \quad \mathcal{F}[-jxf(x)] = F'(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F(\omega) \quad \mathcal{F}[(j - x^n)f(x)] = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

4、积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{x_0}^x f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

由 Fourier 变换的微分和积分性质，我们可以利用 Fourier 变换求解微积分方程。

四、卷积和卷积定理

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x - \tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_1(x) f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

\*五、三维 Fourier 变换及反演

**本章重点：**利用定义计算 Fourier 变换

## 第八章 Laplace 变换

一、拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-pt} dt = F(p)$$

二、几个重要的拉普拉斯变换及逆变换

$$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{p} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = H(t)$$

$$\mathcal{L}[e^{\pm \alpha t}] = \frac{1}{p \mp \alpha} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p \pm \alpha}\right] = e^{\mp \alpha t}$$

$$\mathcal{L}[\cos \alpha t] = \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + \alpha^2}\right] = \cos \alpha t$$

$$\mathcal{L}[\sin \alpha t] = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}\right] = \sin \alpha t$$

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{p^{m+1}} \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

四、拉普拉斯变换的性质

$$1、\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-pt_0} F(p)$$

$$2、\mathcal{L}[e^{\mp p_0 t} f(t)] = F(p \pm p_0)$$

$$3、\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[(t)^n f(t)] = \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

$$4、\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(p)dp$$

五、卷积：  $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(p)F_2(p)$$

六、Laplace 反演

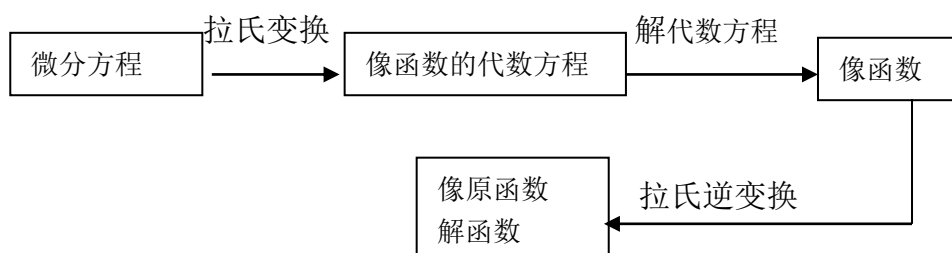
$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{n=1}^n\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},p_n]$$

七、Laplace 逆变换

- (1) 部分分式法
- (2) 卷积定理
- (3) Laplace 反演公式（留数定理）
- (4) 利用 Laplace 变换的性质

八、利用 Laplace 变换求解微积分方程

- (1) 对方程取 Laplace 变换，得到象函数的代数方程
- (2) 解代数方程，得到象函数的表达式
- (3) 求象函数的拉普拉斯逆变换



**本章重点：** 利用定义和性质计算 Laplace 变换。  
 计算 Laplace 逆变换。  
 利用 Laplace 变换求解微积分方程。