

2021 秋高数上期中试题 (回忆版)

一、单项选择题:

(1) 方程 $x^3 - 12x + 19 = 0$ 的实根的个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(2) 函数 $f(x), g(x)$ 为恒正可微函数, 且满足 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$. 则当 $a < x < b$ 时, 必有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. 则

(A) $f(0) = 1$, 且 $f'(0) = 2$

(B) $f(0) = 0$, 且 $f'(0) = 0$

(C) $f(0) = 0$, 且 $f'(0) = 2$

(D) 前面三个选项都不对.

(4) 设函数 $f(x)$ 可导, $\alpha = f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$, 则

(A) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$

(B) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 1$

(C) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} = 1$

(D) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$

(5) 若函数 $f(x) = |x|g(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必有

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g(0)$

二、填空题:

(1) 若曲线 $y = x^3 + gx^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

(2) 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0) =$ _____.

(3) 若 $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{\sin x}$, 则 $f'(x) =$ _____.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^5}{n^6} + \frac{2^5}{n^6} + \frac{3^5}{n^6} + \cdots + \frac{(n-1)^5}{n^6} \right) =$ _____.

(5) 曲线 $f(x) = x + x \sin x$ 的(所有)渐近线为 _____.

三、两个点 $P(a, 0)$ 和 $Q(0, b)$ 与原点 $O(0, 0)$ 组成一个三角形. 若线段 PQ 的长度为 20, 则 $\triangle OPQ$ 的最大面积为多少? 此时 a 和 b 的值分别是多少?

四、已知曲线方程为 $y^3 + y = 2 \cos x$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

五、已知区域 R 由 x 轴, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$, 和曲线 $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 所围成. 把区域 R 绕 y 轴旋转, 求此旋转体的体积.

六、计算下列积分:

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

(2) $\int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} dx$

七、求极限. (不准使用洛必达法则):

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin(x^3)}$

八、求曲线 $y = 1 + x + \int_0^x \cos((x-t)^2) dt$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

九、求函数 $f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的全局极小值 (即最小值).