南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试答题本

李xuan 王子杰 x.2.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分	评卷人
分数	20	20	10	10	10	10	10	10			100	
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
分数												

南方科技大学考生须知

1. 考生须按规定考试时间，提前 10 分钟进入考场。开考 30 分钟之后不得进场，开考 30 分钟之内不得离开考场。

2. 考生须携带校园卡进入考场，以便监考教师检查核

（学生填写信息）

考试科目：高等数学

任课教师：李觉先

年级：高大一

一、

(1) (D)

(2) (C)

(3) (D)

(4) (B)

(5) (B)

二、

(1) 0

(2) $y=0$, $y=2x$

(3) $(\frac{7}{8})^{4/3}$

(4) $2\sqrt{3}+2-\pi/3$

(5) $\frac{\sqrt{3}}{48}$

三. $x^2+2xy^2+3y^4=6$.

10

取微分:

$2xdx+2y^2dx+4xydy+12y^3dy=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2(x+y^2)}{4y(x+3y^2)}=\frac{-(x+y^2)}{2y(x+3y^2)}$.

在P(1,-1)处,

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=-1}=\frac{1}{4}$.

故P点切线方程:

$y=\frac{1}{4}(x-1)-1=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$.

四. $y=x\int_2^{x^2}\sin(t^3)dt.=x[F(x^2)-F(2)]$.

其中. $F(x)=\int_a^x\sin(t^3)dt$ $F'(x)=\sin x^3$.

故 $\frac{dy}{dx}=\int_2^{x^2}\sin(t^3)dt+xF'(x^2)\cdot 2x$.

$=\int_2^{x^2}\sin(t^3)dt+2x^2\sin x^6$

10

五：在$x=0$处可导需满足两个条件：

① $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续：

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$$

$$\Rightarrow b=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos x}{x}+a\right)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2}\cdot x\right]+a.$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}x+a$$

$$=0+a=a.$$

故 $b=a$

② $f(x)$ 在 $x=0$ 处左右导数相等.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=a.$$

$$\Rightarrow a=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

故 $a=\frac{1}{2}$

综上所述，$a=b=\frac{1}{2}$.

10

六：$f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x,\quad 0<x<3\pi.$

(a). $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$，在$(0,3\pi)$处处连续，均有定义.

8

令 $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}.$

由于 $f(x)$ 无端点值，故 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}$ 取局部极值.

局部极值分别为：

$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$f(\frac{5\pi}{3})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　$f(\frac{7\pi}{3})=\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $f''(x)=\sin x$,

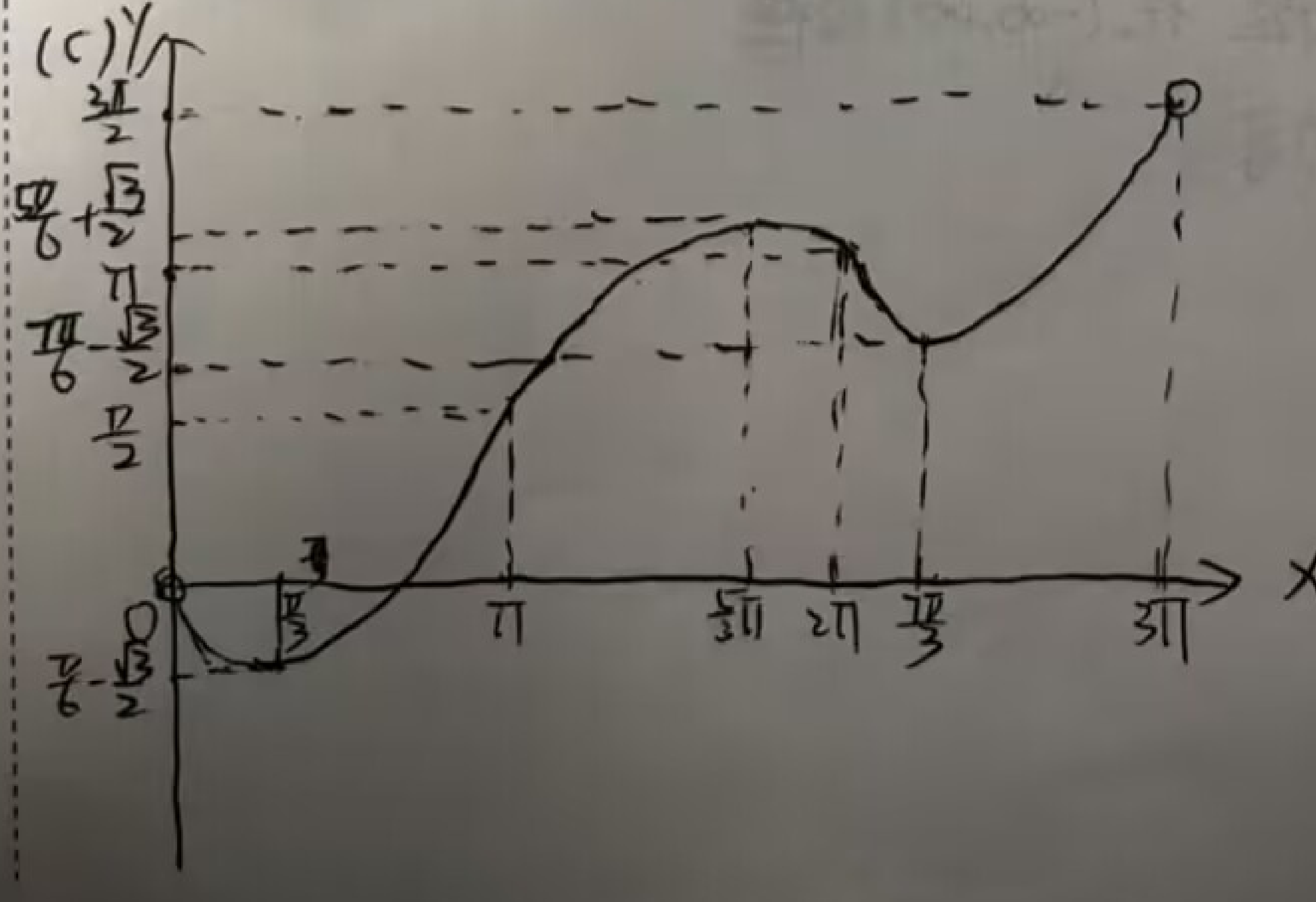
当 $f''(x)>0 \Rightarrow 0<x<\pi$ 或 $2\pi<x<3\pi$，为

当 $f''(x)<0 \Rightarrow \pi<x<2\pi$

故上凹区间为 $(0,\pi)\cup(2\pi,3\pi)$ 下凹区间：$(2\pi,3\pi)$

$f(\pi)=\frac{\pi}{2}.$

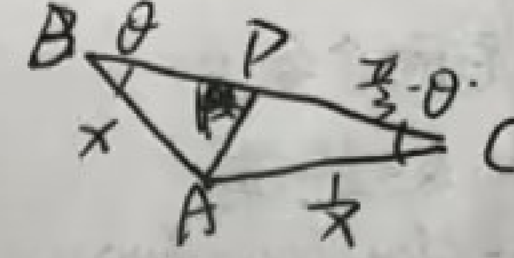
(c)



装订线内不答题！

七：设 $AB=x$，$AC=\frac{1}{x}$，$\angle ABC=\theta$，$\angle ADB=\beta$

$\beta=\frac{2\pi}{3}-\theta$



10

在△ABD中，正弦定理：

$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{AD}{\sin\theta} \quad ①$$

在△ADC中 正弦定理：

$$\frac{\frac{1}{x}}{\sin(\pi-\beta)}=\frac{AD}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{1}{x\sin\beta} \quad ②$$

$$\frac{①}{②}\Rightarrow x^2=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}{\sin\theta}$$

由① $\Rightarrow AD=\frac{\sin\theta}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}x$

$$AD^2=\frac{\sin\theta\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}{\sin^2(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\frac{\cos(2\theta-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}}{2\sin^2(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\frac{\cos(2\theta-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}}{1-\cos(\frac{4\pi}{3}-2\theta)}$$

$$=\frac{\cos(2\theta-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}}{1+\cos(2\theta-\frac{\pi}{3})}=\frac{2u-1}{2+2u}=1-\frac{3}{2+2u}$$

$\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$ $\quad 2\theta-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ $u=\cos(2\theta-\frac{\pi}{3})\in(\frac{1}{2},1]$

令 $f(u)=1-\frac{3}{2(1+u)}$ 在 $u\in(\frac{1}{2},1]$ 单增.

故当且仅当 $u=1$ 时，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时.

AD^2 最大为 $\frac{1}{4}$

故 $|AD|$ 最大值为 $\frac{1}{2}$.

八：

$f(x)$ 导数定义：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)(f(h)-1)}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

10

$f(h)=1+hg(h)$

有：$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}g(h)=1$

故 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)$ ~~存在~~ 在 $(-\infty,\infty)$ 存在

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导.