试题-24 Spr. 数分二(H) final.(回忆版)

一、设函数 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 由以下方程组确定:

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

其中 a 为常数,求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

二、计算积分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(2+x+y)^2}$$

其中 $D=\{(x,y,z);\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}$

三、(1) 将如下累次积分换成其它不同次序的累次积分,其中 $f(x,y)$ 为连续函数:

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-1}} f(x,y)\, dy.$$

(2) 将如下依次 z,y,x 次序的累次积分换成依 x,y,z 次序的累次积分,其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\, dz.$$

四、计算

$$\int_\Gamma x^2 \ln y\, dx + \frac{x^3}{3y} dy,$$

其中 Γ 为曲线 $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=9$ 从 $(1,4)$ 到 $(4,1)$ 的一段.

五、设实数 x,y,z 满足条件 $x+y+z=12$,$x^2+y^2+z^2=56$. 用Lagrange乘数法,求函数 $f(x,y,z)=x+3y+5z$ 在前述条件下的最大值.

六、设 $P,Q,R\in C^1(R^3)$,$f\in C(R^3)$,且 Ω 为 R^3 中由正则封闭曲面 $\partial\Omega$ 围成的区域,满足条件

$$\iint_{\partial\Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy = 0,$$

其中 $\partial\Omega$ 的定向为区域 Ω 的外侧。~~试~~ 试证明:存在点 $(x_0,y_0,z_0)\in\overline{\Omega}$,使得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)=f(x_0,y_0,z_0)-M(f),$$

其中 $M(f)$ 为函数 f 于 Ω 上的积分平均值

$$M(f)=\frac{1}{V(\Omega)}\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz$$

$V(\Omega)$ 是 Ω 的体积。

七、设 f 是 R^n 到其自身的可微映射,满足条件:

$$\langle f(x)-f(y),\ x-y\rangle \geq \alpha\|x-y\|^2,\quad \forall x,y\in R^n,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 R^n 中内积,$\alpha>0$ 为实数。试证明:

(1) $\det Jf(x)\neq 0,\ \forall x\in R^n$,其中 $Jf(x)$ 为映射 f 于 x 处的Jacobi矩阵;

(2) $f(R^n)=R^n$.

八、设 $f(x,y)$ 于闭区域 $D=\{(x,y),\ x^2+y^2\leq 1\}$ 上连续,于 D 内部有连续偏导数。当 $(x,y)\in\partial D$ 时,$f(x,y)=0$,试证明:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\, dxdy=-2\pi f(0,0).$$