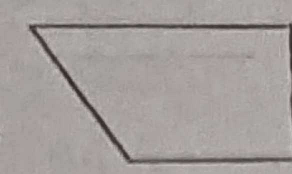
20.Aut. 高代上 final.(回忆版)

1、略

2、$A_{3\times5}$

(1) 求 $P_{3\times3}$，$|P|\neq0$，s.t. $PA=$ 

(2) 求 $C(A)$，$R(A)$ 的基.

(3) $T: X\to AX$，证明：T 是 $R(A)\to C(A)$ 的满的线性映射.

3. M_1，M_2 是 M 的子空间

(1) 求证：$M_1\cap M_2$，M_1+M_2 是 M 的子空间

(2) $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 是 $M_1\cap M_2$ 的一组基.

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ 是 M_1 的一组基

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_t\}$ 是 M_2 的一组基.

求证：$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t\}$ 是 M_1+M_2 的一组基

(3) 求证：$\dim M_1+\dim M_2-\dim(M_1\cap M_2)=\dim(M_1+M_2)$

4、A

(1) 求特征值　　(2) 求特征向量　　(3) 对角化　　(4) 求 A^{100}

5. A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换

(1) 求证：$\exists\ k$，$1\leq k\leq n$，$k\in N^*$，s.t. $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关

且 $\exists$ 不全为 0 的 $a_0,\cdots,a_{k-1}$ s.t. $A^k\alpha=a_0\alpha+a_1A\alpha+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}\alpha$

(2) $M=\langle\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha\rangle$

求证：M 是 A 的不变子空间

并求 $A|_M$ 的矩阵 B.

(3) 求 $|\lambda I-B|$

(4) f 是 A 的特征多项式

求证：$f(A)=0$

6. 含参实二次型　　(1) 求对应矩阵　　(2) 标准化　　(3) 可以正定吗？

7. (1) 求证：A 反对称 $\Leftrightarrow X'AX=0$，$\forall X$

(2) A 对称且 $X'AX=0$，$\forall X$，求证：$A=0$

(3) 求证：任意方阵 A 可分解为对称阵 B 与反对称阵 C 之和.

8. S，T 是 C^n 上的两个线性变换，$\lambda\in C$.

(1) $ST=TS$ 求证：① $\mathrm{Ker}(S-\lambda I)$ 和 $\mathrm{Im}(S-\lambda I)$ 是 S，T 的不变子空间.

② S，T 有公共的特征向量

③ 存在 C^n 的一组基，S，T 在这组基下的矩阵均为上三角.

(2) $\dim\mathrm{Ker}(S-\lambda I)\leq1$　　①…或…　　②③同上