答案

第一部分　选择题（每题 **4** 分，总共 **20** 分）

D C C A D

第二部分 填空题（每空 **2** 分，总共 **20** 分）

1. 0.9
2. $1-p$
3. 2/3
4. $a+b=1$
5. $N(0,100)$
6. $1-e^{-1}$
7. 0.5
8. 5/8
9. 1/9
10. 5/7

第三部分 大题（每题 10 分，总共 60 分）

1. 学生在做一道有四个选项的单项选择题时，如果他不知道正确答案，就作随机猜测。现从卷面上看题是答对了，试在以下情况下求学生确实知道正确答案的概率。

（1）学生知道正确答案和胡乱猜测的概率都是 1/2.

（2）学生知道正确答案的概率都是 0.2.

解：记事件A为"题目答对了"，事件B为"知道正确答案"，

则$P(A|B)=1$,　　　$P(A|\overline{B})=0.25$.

(1)此时$P(B)=P(\overline{B})=0.5$.　由贝叶斯公式有

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{0.5\times 1}{0.5\times 1+0.5\times 0.25}=0.8.$$

(1) 此时$P(B)=0.2$，　　　$P(\overline{B})=0.8$.　由贝叶斯公式有

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{0.2\times 1}{0.2\times 1+0.8\times 0.25}=0.5.$$

2. 设随机变量X的概率分布$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. *在给定*$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布，$U(0,i)$（$i=1,2$）,求$Y$*的分布函数*$F_Y(y)$*和密度函数*$f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}.$$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$.

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.y=\frac{3}{4}y$.

当$1\le y<2$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}y$.

当$y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$.

所以Y*的分布函数*$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3y}{4}, & 0\le y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\le y<2,\\ 1 & y\ge 2.\end{cases}$

Y*的概率密度函数*$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0\le y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\le y<2,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$

3. 若每只母鸡产蛋的个数服从参数为 λ 的泊松分布，而每个蛋能孵化成小鸡的概率为 p .

试证：每只母鸡有 k 只小鸡的概率服从参数为 λp 的泊松分布。

证明：设 $X=\{蛋数\}$，$Y=\{小鸡数\}$，由全概率公式，对于任意的正整数 k 有

$$P\{Y=\mathrm{k}\}=\sum_{i=k}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=k\mid X=i\}$$
$$=P\{X=k\}P\{Y=k\mid X=k\}+P\{X=k+1\}P\{Y=k\mid X=k+1\}+\cdots$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}p^k+\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}C_{k+1}^k p^k(1-p)+\ldots$$
$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}C_i^k p^k(1-p)^{i-k}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.$$

则 Y 服从参数是 λp 的泊松分布。

4. 设$Y = X^2$，其中随机变量X的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

a) 求常数c；

b) 求Y的密度函数$f_Y(y)$。

解：(1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^2 f_X(x)\,dx = \int_0^2 cx\,dx = 2c$

有 $c = \frac{1}{2}$.

(2) 当 $y \leq 0$ 时，$F_Y(y) = 0$,

当 $y \geq 4$ 时，$F_Y(y) = 1$,

当 $0 < y < 4$ 时,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(0 \leq X < \sqrt{y})$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}y.$$

从而 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{4}y, & 0 < y < 4, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$

于是 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

可知 $Y \sim U(0, 4)$.

5. 已知随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$$

且已知$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$，求：

(1) X 和 Y 的联合频率函数；

(2) X 和Y是否独立？

(3) Y=1 时，X 的条件频率函数$P(X=k|Y=1)$。

解：(1) 根据题意，可知 X 和 Y 均为离散型 r.v.，且

$P(X=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}$，

$P(Y=1)=\frac{1}{2}$，$P(Y=2)=\frac{1}{2}$.

由 $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$，可求得

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

同理可求得

$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{6}$，$P(X=0,Y=2)=\frac{1}{6}$，$P(X=1,Y=2)=\frac{1}{3}$.

于是有：

Y \ X	0	1	$P_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(2). 由 $P(X=0,Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{6}$，

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{3}$，

$P(X=0,Y=2)=P(X=0)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{6}$，

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{3}$.

可知 X 与 Y 相互独立.

(3). $P(X=k|Y=1)=\frac{P(X=k,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{P(X=k)\cdot P(Y=1)}{P(Y=1)}=P(X=k)$，$k=0,1$.

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

6. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<\infty, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1） 确定常数k；

(2) 求边际密度函数$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(3) 求函数$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数.

解

(1) 由

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{1}ke^{-(x+y)}dxdy=k(1-e^{-1}),$$

得

$$k=\frac{1}{1-e^{-1}}.$$

(2) 根据定义

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(3) 由上述可知$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 故X,Y相互独立。分别记$Z=\max\{X,Y\}$, X 和Y的分布函数为$F_Z(z)$, $F_X(x)$和$F_Y(y)$, 则由X,Y的独立性有

$$F_Z(u)=F_X(u)F_Y(u). \tag{1}$$

由(2)知,

$$F_X(u)=\int_{-\infty}^{u}f_X(x)dx=\begin{cases} 0, & u<0 \\ \dfrac{1-e^{-u}}{1-e^{-1}}, & 0\leqslant u<1, \\ 1, & u\geqslant 1. \end{cases}$$

$$F_Y(u)=\int_{-\infty}^{u}f_Y(y)dy=\begin{cases} 0, & u<0 \\ 1-e^{-u}, & u\geqslant 0. \end{cases}$$

将$F_X(u)$,$F_Y(u)$带入(1)中，得到$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为

$$F_Z(u)=\begin{cases} 0, & u<0 \\ \dfrac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}, & 0\leqslant u<1, \\ 1-e^{-u}, & u\geqslant 1. \end{cases}$$