2023秋高数上期末试题（回忆版）

一、单项选择题.

(1) 若 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1+x)}{x}=$

(A) 2　　(B) −2　　(C) 4　　(D) −4.

(2) 若函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+C$，这里 $C>0$，则方程 $f(x)=0$ 的实根的数目是

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(3) 曲线 $e^{x-y}+x(x+2y)=x+\sin x+1$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是

(A) $x+y=0$　　(B) $x-y=0$　　(C) $x+2y=0$　　(D) $x-2y=0$

(4) 若反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x^{k+\frac{1}{2}}(1+x^{k-\frac{1}{2}})}dx$ 收敛，则常数 k 必满足

(A) $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$.　　(B) $k>\frac{1}{2}$.　　(C) $k<\frac{1}{2}$.　　(D) $1<k<\frac{3}{2}$.

(5) 函数 $f(x)$ 满足 $xf''(x)+3x(f'(x))^2=e^{-x}-1$，$\forall x\in(-\infty,\infty)$，且有 $f'(x_0)=0$ $(x_0\neq0)$. 下列叙述中哪一个一定是正确的？

(A) f 在 x_0 处取到局部极大值.　　(B) f 在 x_0 处取到局部极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是一个拐点.　　(D) 上述的 (A)，(B) 和 (C) 都不对.

二、填空题：

(1) 设区域 D 是由如下曲线和直线 $y=x^2$，$y=0$，$x=2$，所围成的区域. 则把区域 D 绕 x-轴旋转所得到的旋转体的体积为 ______.

(2) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3tx}$，则 $f'(1)=$ ______.

(3) 若一条通过原点的曲线与直线 $y=a^x$ $(a\neq1)$ 相切，则该直线的斜率是 ______.

(4) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$ ______.

(5) 若 $f(x)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}e^{\sin t}dt$. 则 ~~$f(-1)$~~ $(f^{-1})'(0)=$ ______.

三、求第一象限内由曲线 $y=\sqrt{x}$，x 轴及直线 $y=x-2$ 所围成的平面区域的面积.

四、考虑函数 $y=\dfrac{x^2+4}{2x}$

(1) 求 f 在哪些点取局部极值，并求函数的局部极值.

(2) 求 f 上凹和下凹的开区间.

(3) 画出 $f(x)$ 的简略图.

五、求解一阶线性常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3$，$y(0)=-6$.

六、求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

七、计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^3x\,dx$.　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+5}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$.　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|x|}{1+\sin x}dx$.

八、若函数 f 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，且满足 $f(x)\left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt+1\right)=\tan^{-1}x$. 求 $f(x)$.