2023春高数下期末试题 （回忆版）

一、单项选择题：

(1) 下列哪一个向量与曲线 $r(t)=(1+\frac{1}{t^3})i+(1-\frac{2}{t})j+t^2k$ 在点 $P=(2,-2,1)$ 处的切线垂直？

(A) $v=\langle 1,2,1\rangle$　(B) $v=\langle 1,2,2\rangle$　(C) $v=\langle -1,-2,2\rangle$　(D) $v=\langle -1,-2,-2\rangle$

(2) 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $V=\langle 1,2,2\rangle$ 的方向的方向导数是

(A) 12　(B) 6　(C) 4　(D) 2

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a}{n})^{n^2}$

(A) 对任意实数a都收敛.　(B) 当 $a\in(-1,1)$ 时收敛.

(C) 当a为任意正实数时收敛.　(D) 当a为任意负实数时收敛.

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+\sin(xy))^{\frac{1}{x^2+y^2}}=$

(A) 0　(B) 1　(C) e.　(D) 极限不存在.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta=$

(A) $\int_0^1\int_y^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\,dx\,dy$.　(C) $\int_1^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_{-2}^{2}f(x,y)\,dy\,dx$

(B) $\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y}f(x,y)\,dx\,dy$.　(D) $\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,dy\,dx$.

二、填空题：

(1) 曲面 $xyz+e^{z+x}=0$ 在点 $(1,1,-1)$ 处的切平面的方程是 ______.

(2) 若函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+4)2^n}$，则 $f^{(6)}(0)=$ ______.

(3) 曲线 $r(t)=e^t\cos t\,i+e^t\sin t\,j+2k$ 的曲率 $k=$ ______.

(4) 若函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $x=2t+\ln^2 t$，$y=(t+\ln t)^2$，$t>0$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$ ______.

(5) $\int_0^1\int_z^1 xe^{-y^3}\,dy\,dx=$ ______.

三、求函数 $f(x,y)=x^3+2y^2-3x-12y$ 的所有极值.

四、(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{(n+2023)\ln n}$ 的收敛域.

(2) x取哪些值时上述级数绝对收敛，取哪些值时条件收敛.

五、若上半球 $D:x^2+y^2+z^2\le 1$，$z\ge 0$ 的密度函数为 $\delta(x,y,z)=z$，计算此上半球的质心.

六、已知向量场 $F=(y\sin z+2)i+(x\sin z)j+(xy\cos z)k$. 是保守场，求F的势函数，并计算曲线积分 $\int_C F\cdot dr$. 这里C是从点 $A(1,-2,\frac{\pi}{3})$ 到点 $B(2,1,\frac{\pi}{4})$ 的光滑曲线.

七、向量场 $F(x,y,z)=(z+xy^2)i+(2y+y^3)j-4zy^2k$ 的定义域V是夹在如下曲面 S_1 和 S_2 之间的闭区域，

这里 $S_1:=\{(x,y,z):z=(x^2+y^2)^2-1\}$，　$S_2:=\{(x,y,z):z=4-4(x^2+y^2)\}$.

使用散度定理来计算向量场F通过V的边界从内向外的通量(flux).

八、设曲面S是椭圆抛物面 $z=x^2+4y^2$ 在平面 $z=1$ 下方的部分. 曲面S的内法向量n的方向如下图所示.

计算 $\iint_S \nabla\times F\cdot n\,d\sigma$，

这里　$F=(y+x^2\ln(x^4+1))\,i+(e^{\sin y}-xz)\,j+(xz^2+\cos(z^2+1))\,k$.