

一、(20分)单项选择题:

(1) 曲面 $2x^2 + y^2 = z$ 是

(A) 双叶双曲面.

(B) 椭圆锥.

(C) 单叶双曲面.

(D) 椭圆抛物面.

(2) 设 k 为常数, 考虑极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin(kx)}{x^2 + y^4},$$

则

(A) 极限不存在.

(B) 极限为 $\frac{1}{2}$.

(C) 极限为 0.

(D) 以上都不对.

(3) 设 $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$, $t \in (-\infty, +\infty)$. 则在其任意一点处 $\mathbf{r}'(t)$ 与 $\mathbf{r}(t)$ 之间的夹角为

(A) $\frac{\pi}{4}$.

(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) $\frac{3\pi}{4}$.

(D) 以上都不对.

(4) 下列叙述中哪一个一定是正确的?

(A) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n$ 收敛.

(B) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛, 那么该级数在 $x=2$ 处也收敛.

(C) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-R, R)$, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域也为 $(-R, R)$.

(D) 如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不存在, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 0.

(5) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n+2025} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则 α 的取值范围是

(A) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

(C) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

(D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

二、(20分)填空题:

(1) 若 $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -3 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle 4, -5, 0 \rangle$, 则 $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} =$ _____.

(2) 设 $a > 0$ 为常数, 定义函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a+2x^2y^2}-1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

若函数在 $(0, 0)$ 处连续, 则 $a =$ _____.

(3) 螺旋线

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + btk, \quad a, b \geq 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

在任何一点的曲率为 _____.

(4) 设 $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$, 那么 $f^{(10)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)!} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、(10分) 若加速度 $\mathbf{a}(t) = -3k$, 初始位移为 $\mathbf{r}(0) = 10k$, 初始速度为 $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, 求位移函数 $\mathbf{r}(t)$

四、(10分) 求过点 $(2, 1, -1)$ 且与平面 $2x + y - z = 3$ 和平面 $x + 2y + z = 2$ 的交线垂直的平面方程.

五、(10分) 求同时在两个圆 $r = 1$ 和 $r = 2 \sin \theta$ 内部的区域的面积.

六、(10分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 2$.

(1) 证明该数列单调递减且有下界.

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

七、(10分)

(1) 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$$

的收敛半径和收敛域.

(2) x 取哪些值时级数绝对收敛, 取哪些值时级数条件收敛?

八、(10分) 计算下列极限(不允许使用洛必达法则).

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \ln(1-x) - \ln(1-x^2)}{x^2(1-\cos x)}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\ln(1+x^2))}{\sin(x^2)(e^{x^2} - \cos x)}.$