2021-2022秋 高数上 期末（仅供参考，有误不许打我）

一、A A C B B

一、(5) $x\in(0,1)$时，$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x^8}\le 1$

$\therefore f(1)=3-\int_0^1\frac{dt}{1+t^8}>0$，$f(0)=-2<0$，

且 $f'(x)=5-\frac{1}{1+x^8}>0$，$\therefore f(x)$在$(0,1)\uparrow$

二、(1) 7200

(2) $\frac{3}{8}$

(3) 套公式

(4) $\frac{3}{2}\ln 2$

(5) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

二、(1)、$f^{(6)}(0)$ x^n 中 $n\le5$时，为0

x^n 中 $n>6$时，$x=0\rightarrow$为0.

x^6 求6次导，常数

$f(x)$中 x^6的系数：$4+3+2+1=10$

$10x^6$	1	2	3	4	5	6
	$60x^5$	$300x^4$	$1200x^3$	$3600x^2$	$7200x$	7200

二、(2) $\int_0^\pi\cos^4x\,dx$

$=\int_0^\pi\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2dx$

$=\frac{1}{8}\int_0^\pi(3+4\cos2x+\cos4x)dx$

$=\frac{3}{8}\pi+\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos2x\,d2x+\frac{1}{32}\int_0^\pi\cos4x\,d4x$

$=\frac{3}{8}\pi+\frac{1}{4}\sin2x\Big]_0^\pi+\frac{1}{32}\sin4x\Big]_0^\pi=\frac{3}{8}\pi$

平均值 $=\frac{\frac{3}{8}\pi}{\pi}=\frac{3}{8}$

二、(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$

$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\frac{\frac{x-a}{x+a}\cdot\frac{-2a}{(x-a)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax^2}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2a}{1-\frac{a^2}{x^2}}=2a$

$\therefore e^{2a}=\cancel{\ln 8}\ 8$，$2a=\ln8=3\ln2\Rightarrow a=\frac{3}{2}\ln2$

二、(5). 令 $\frac{1}{n}=dx$ $(n\to\infty)$

原式 $=\left|\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,dx\right|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,d\frac{\pi x}{2}\right|=-\frac{2}{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}>0$

三、解 $ds=\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy=\sqrt{1+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2}\,dy=\sqrt{1+\frac{1}{y}}\,\cancel{dy}=\sqrt{\frac{1+y}{y}}$

$\int_1^3 2\pi\cdot 2\sqrt{y}\cdot\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{y}}\,dy=4\pi\int_1^3\sqrt{1+y}\,dy=4\pi\cdot\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^3$

$=\frac{8}{3}\pi(8-2\sqrt{2})=\frac{16}{3}\pi(4-\sqrt{2})$

∴旋转面的面积为 $\frac{16}{3}\pi(4-\sqrt{2})$

四. $y=x\ln^2x+Cx$

解: $xy'-y=2x\ln x$

$y'-\frac{y}{x}=2\ln x$

$p(x)=-\frac{1}{x}$, $v(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int(-\frac{1}{x})dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$

∴ $\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=\frac{2\ln x}{x}$

$(\frac{y}{x})'=\frac{2\ln x}{x}$, $\frac{y}{x}=\int\frac{2\ln x}{x}dx=\int\frac{2\ln x}{1}d(\ln x)=\ln^2x+C$

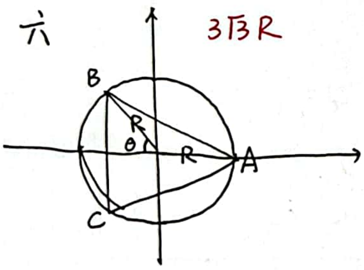
$\Rightarrow y=x\ln^2x+Cx$

五、 $a=e^{\frac{1}{e}}$

解: y值相同 : $x=\log_a x$
"斜率相同 : $1=\frac{1}{x\ln a}$
$\Rightarrow x=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$ ∴ $\ln x=1$, $x=e$

$x=\frac{1}{\ln a}=e$, $a=e^{\frac{1}{e}}$

六 $3\sqrt{3}R$



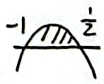
解: $R\sin\theta+\sqrt{2}R\sqrt{1+\cos\theta}=R(\underset{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\underset{\parallel}{\sin\theta}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2})$

$=2R\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2})$

令 $t=\frac{\theta}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 则 $(\cos t(1+\sin t))'=-\sin t+\cos 2t$

$=-2\sin^2t-\sin t+1$

$=(-2\sin t+1)(\sin t+1)$



max时, $\sin t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

即△为等边△ABC时, $S_{\triangle ABC}\max=3\sqrt{3}R$

七、$p<1$

解：① $p\le 0$ 时，其为反常积分且收敛

② $p>0$ 时

a: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{e^{-x}}{x^p}}{\frac{1}{x^p}}=1$，且 $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ 在 $p<1$ 时收敛

当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{e^{-x}}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}$，积分 $\int_0^1\frac{e^{-x}}{x^p}$ 和积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}$ 同时敛散

(极限比较判别法)

$\therefore \int_0^1\frac{e^{-x}}{x^p}dx$ 在 $p<1$ 时收敛

b: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{e^{-x}}{x^p}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2-p}}{e^x}=0$ （ $2-p<0$ 时，显然
$2-p>0$ 时，洛比达求多次即可得）

$\therefore 0<\frac{e^{-x}}{x^p}<\frac{1}{x^2}$，且 $\frac{1}{x^2}$ 收敛

综上：$p\in(0,1)\cup(-\infty,0]$

八、(1) $-\frac{1}{2}e$　(2) $\frac{3}{2}$

(1) 解：$x\to 0$ 时，$\frac{0}{0}$，洛比达

$\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'$

$=\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)'$

$=\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(x+1)}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$\therefore$ 洛：原式 $=\dfrac{\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\underbrace{e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}}_{=(x+1)^{\frac{1}{x}}\to e}-0}{1}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$　(0/0)

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{1+x^2}}{2x}=-\frac{1}{2}e$

(2) 解：$x\to 0$ 时

$(\cos x+1)\to 2$

原式 $=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$

九 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$ (3) $\frac{1}{20}+\frac{-\ln 5}{80}$ (4) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{8}{9}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1}+C$

(1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx$

$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln^2 x\, d(\ln x)$

$=\frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}$

$=\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$

(2) $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$

令 $x=\sec\theta$,

$dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$x=\sqrt{2}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

$x=1$ $\theta=0$

原 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^3\theta\tan\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\, d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta+1}{2\cdot 2}d2\theta$

$=\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$

(3) $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^6(x^5+4)}dx=\int_1^{\infty}\frac{-\frac{1}{5}}{x^5+4}dx^{-5}$

令 $x^{-5}=t$

则 $\int\frac{1}{x^6(x^5+4)}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{\frac{1}{t}+4}dt=-\frac{1}{5}\int\frac{t}{4t+1}dt$

$=-\frac{1}{5}\int(\frac{1}{4}-\frac{\frac{1}{4}}{4t+1})dt$

$=-\frac{t}{20}+\frac{1}{80}\int\frac{1}{t+\frac{1}{4}}dt$

$=-\frac{t}{20}+\frac{1}{80}\ln|t+\frac{1}{4}|+C$

$=-\frac{x^{-5}}{20}+\frac{1}{80}\ln|x^{-5}+\frac{1}{4}|+C$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{x^{-5}}{20}\Big]_1^{\infty}+\frac{\ln|x^{-5}+\frac{1}{4}|}{80}\Big]_1^{\infty}$

$=(0-\frac{1}{20})+\frac{-\ln 4-\ln\frac{5}{4}}{80}=\frac{1}{20}+\frac{-\ln 5}{80}$

法二: 原 $=\int_1^{\infty}\frac{x^4}{x^{10}(x^5+4)}dx$

$=\int_1^{\infty}\frac{1}{5}\frac{1}{x^{10}(x^5+4)}dx^5$

$=\frac{1}{5}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2(t+4)}dt$

$=-\frac{1}{5}\int_1^{\infty}\frac{1}{t+4}d\frac{1}{t}$

⋮

(4) $\int\frac{1}{(1+x+x^2)^2}dx$

$=\int\frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}d(x+\frac{1}{2})$

令 $\frac{3}{4}\tan^2\theta=(x+\frac{1}{2})^2$

则 $\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta=(x+\frac{1}{2})$

$=\int\frac{\frac{16}{9}d\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{16}{9}\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta=\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\cos^2\theta\, d\theta$

$=\frac{8\sqrt{3}}{9}\int\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta=\frac{4\sqrt{3}}{9}\theta+\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2\theta+C$

$\because\theta=\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))=\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\therefore$ 原式 $=\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})+\frac{8}{9}\cdot\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1}+C$

社恐、害怕…… 仅供参考

ID: