2000年 6月 张 家 口 师 专 学 报 June. 2000
第16卷 第2期 Journal of Zhangjiakou Teachers College Vol.16 No.2

单摆测重力加速度误差分析

郭 文 香

(唐山市第27中学，唐山，063000)

摘 要：文中对用单摆测量重力加速度这一传统实验的误差进行分析，指出用精度不同仪器测量相关量时，偶然误差与系统误差对测量精度的影响。

关键词：重力加速度；测量；误差；偶然误差；系统误差

中图分类号：O313.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-2727(2000)02-088(03)

1 引言

用单摆测量重力加速度是物理学最基本的和传统的实验，依实验原理可知[1]其重力加速度测量可通过测量单摆长和周期后由关系式

$$g=4\pi^2 l/T^2 \tag{1}$$

而间接得到．

根据误差传递规律可知[2]此时测得重力加速度相对误差为

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta T}{T}+2\frac{\Delta\pi}{\pi} \tag{2}$$

由此可见影响测量精度的主要原因有摆长测量的误差和周期测量误差．在一般的实验室条件下，如测时间用手动秒表，测30～50个全振动所用时间而获得单摆周期．用最小刻度为毫米的直尺测摆长．所测得的重力加速度的相对误差在0.3%左右，即g值的测量精度仅在厘米/秒^{2}量级，即g=980±4厘米/秒^2．

长度测量的误差随测长手段、技术和设备的更新，其精度可比用以毫米为最小刻度的直尺提高2~3个量级．

2 测量精度分析

时间测量误差受两个因素影响，一是表的分辨值，机械秒表的分辨值为0.1秒，电子秒表的分辨值为0.01秒，后者比前者可以多读一位有效数字．另一因素是人按表动作产生的误差，统计表明因为一次计时两个按表动作将产生0.2秒的误差[1]．这个误差远比两种秒表由于自身分辨值不同所产生的误差大许多，所以选择电子秒表时减少时间测量的相对误差不起作用．欲提高时间测量精度应排除由于个人按表动作产生的误差，选用光电门控制的数字计时器，并对显示位数加以选择．可以减少计时误差．

如选用J0416多用大屏幕数字显示测量仪，当选用计时功能，分辨值为1毫秒档时，

收稿日期：2000-01-27
作者简介：郭文香(1953-)，女，河北唐山人，唐山市第27中学一级教师．

最大量程9.999秒．测量误差0.001秒．用此计时器测周期，为了减少测量误差，仍用累计周期的方法，而因量程所限仅能累加四个周期时间．因此Δt=0.001秒，则Δt=0.00025秒，$2\Delta T/T$=0.00022.可以看出周期T测量的相对误差减少一个数量级，与摆长测量的相对误差数量级相同．代入(2)式中，有$\Delta g/g$=0.00061，两个误差之和仍是同一数量级．此时g的值可取6位有效数字．

然而，并不是只要我们不断提高长度和时间测量精度就能提高g值的测量精度，因g是用式(1)间接测到的．而式(1)是在把单摆看成谐振动得到的．当测量精度达到万分之一时，单摆不能用谐振动这一理想模型来代替就成为必要的和不可忽视的问题．

3　单摆的周期

众所周知，质量为m，摆长为l的摆，其动力学方程为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta/L \tag{3}$$

当在摆角很小时Σ $\theta\approx\theta$，则式(3)变为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}-\frac{g}{l}\theta=0 \tag{4}$$

则有结果如式(1)．而实际上当精度要求过高时$\sin\theta$不能用θ代替时，周期应从式(3)解出．将$\sin\theta$展开为级数

$$\sin\theta=\theta-\frac{1}{31}\theta^3+\frac{1}{51}\theta^5 \tag{5}$$

用机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mL^2\frac{d\theta}{dt}-mgL\cos\theta=-mgL\cos\theta_0 \tag{6}$$

有

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{2g/L(\cos\theta-\cos\theta_0)} \tag{7}$$

θ_0为最大摆角．从运动对称性可知，当θ角从0增至θ_0经历时间应是周期的四分之一，故振动周期T为

$$T=4\int_0^{\theta_0}dt=4\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\theta_0)}}=2\int_0^{\theta_0}\sqrt{L/g}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}} \tag{8}$$

令　$\sin^2\frac{\theta_0}{2}=K$,、$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{K}\sin\varphi$，则式(8)为

$$T=4\sqrt{L/g}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-K^2\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}d\varphi \tag{9}$$

将被积函数做级数展开为

$$[1-K^2\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}K^2\sin^2\varphi+\frac{1}{2}\frac{3}{4}K^2\sin^4\varphi+\cdots\cdots \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)并积分得

$$T=4\sqrt{l/g}\cdot\frac{\pi}{2}[1+(\frac{1}{2})^2K^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}K^4+\cdots\cdots]=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{L}\cdots\cdots) \quad (11)$$

显然当θ_0=0时周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (12)$$

此时才有式(1)成立. 而真正的测量, 即使是满足式(4)条件$\theta_0<5°$(很小)则真实的周期T'与(12)式给出的周期T的相对误差为

$$\frac{T'-T}{T}=0.00047\approx0.05\% \quad (13)$$

可见系统误差已经在g值取3位有效数字时明显显示出来, 当再提高测量精度, 不用系统误差更小的理论代替式(1)是不能提高测量精度的.

由式(11)可得到代替式(1)的关系式为

$$g=\frac{4\pi^2}{T^2}[1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{L}+\cdots\cdots]^2 \quad (14)$$

使用式(14)可在不断提高摆长和周期的测量精度的同时, 适当选取适当的项数, 从而提高用单摆测重力加速度的精度.

参 考 文 献

1 杨述武. 普通物理学实验. 北京: 高等教育出版社, 1982
2 林抒, 龚镇雄. 普通物理实验. 北京: 人民教育出版社, 1981

Analysis of the Error of Surveying Acceleration of Gravity by Simple Pendulum

Guo Wenxiang

(No.27 Middle School, Tangshan, 063000)

Abstract: This paper analyzes the error of surveying acceleration of gravity by simple pendulum,points out that accidental error and systematic error's effects to the accuracy when surveying instrument's accuracy is various.

Key words: acceleration of gravity;suruvey;error;accidental error;systematic error

(责任编辑 王秀清)