

‘单摆实验’ 数据处理说明

张欢

物理实验教学中心

2018-3-11

实验回顾

实验名称：单摆测量重力加速度

实验目的：运用单摆原理测量深圳的重力加速度，并要求相对不确定度低于1%

实验仪器：铁架台、棉线、钢球、钢卷尺、游标卡尺和秒表

实验原理：测量摆长 L 和记录 n 个摆动周期的时间间隔 t ，运用公式 $g = 4\pi^2 n^2 L / t^2$ 计算重力加速度；并运用不确定原理设计合理的 n 值。

如何设计 n ?

首先，要找到 n 与相对不确定度的关系。按照实验原理，重力加速度通过 $g = 4\pi^2 n^2 L / t^2$ 计算。因此， g 的相对不确定度为

$$\frac{U_g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{U_L}{\bar{L}}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{U_t}{\bar{t}}\right)^2} \quad (1)$$

上式中， \bar{g} 、 \bar{L} 和 \bar{t} 分别表示 g 、 L 和 t 的平均值， U_g 、 U_L 和 U_t 表示不确定度。部分同学能够从间接测量量的不确定度定义出发推导上式；部分同学能够查阅书本第一册P35表2.1-5得出上式；部分同学查阅表2.1-5依然无法得出上式(何以解忧？唯有翻书)。

其次，需要简化 n 与相对不确定度的关系。由于根号开得太慢，式(1)不方便用于估算相对不确定度。在这个背景下，最大相对不确定度闪亮登场：

$$\frac{U_g}{\bar{g}} \leq \frac{U_L}{\bar{L}} + 2 \frac{U_t}{\bar{t}} \quad (2)$$

与式(1)相比，式(2)确实简化了很多，它给出了相对不确定度上限。考虑到部分同学疏于推导，书本第一册P37表2.1-6罗列了各种间接测量量的最大不确定度和最大相对不确定度。

用(2)式估算最大不确定度，需要知道 \bar{L} 、 \bar{t} 、 U_L 和 U_t 四个量。

首先，对于摆长 \bar{L} 。由于铁架台高度有限，摆长最长能设计成 $\bar{L} \approx 80 \text{ cm}$ ；

其次，对于摆长的不确定度 U_L 。由于 $L = l + 0.5D$ ，即摆长等于棉线长加钢球半径。根据第一册P37表2.1-6， $U_L \leq U_l + 0.5U_D$ ，其中 U_l 和 U_D 分别表示棉线长和钢球直径的不确定度。假设棉线长和钢球直径的A类不确定度近乎零， U_l 和 U_D 分别近似等于钢卷尺和游标卡尺的仪器允差(约为最小刻度)，即 $U_L \approx 1 \text{ mm}$ ， $U_L/\bar{L} \leq 0.1\%$ ；

第三，对于 $\bar{L} \approx 80 \text{ cm}$ 的单摆，周期 $\bar{T} \approx 2 \text{ s}$ ；

第四，对于时间间隔的不确定度 U_t 。由于秒表允差约为 0.01 s ，而人的反应时间约为 0.2 s ，那么 $U_t \approx 0.2 \text{ s}$ 。

将以上估算带入式(2)可得：

$$\frac{U_g}{\bar{g}} \leq 0.1\% + 2 \frac{0.2}{\bar{t}} \quad (3)$$

根据式(3)，如果时间间隔 $\bar{t} \geq 40 \text{ s}$ ，即周期个数 $n \geq 20$ ，则可基本实现 $U_g/\bar{g} \leq 1\%$ 的目标。

注意：式(3)已假设了棉线长和钢球直径的A类不确定度近乎零。然而在测量 $\bar{L} \approx 80 \text{ cm}$ 的摆长过程中，由于部分同学未完全领会测量规范，导致摆长的A类不确定度经常超出 5 mm 。因此，需估计 $U_L \approx 5 \text{ mm}$ ，带入式(2)可知：要实现 $U_g/\bar{g} \leq 1\%$ 的目标，需时间间隔 $\bar{t} \geq 100 \text{ s}$ ，即周期个数 $n \geq 50$ 。

原始数据

经以上分析知：对于部分同学，为达到相对不确定度低于1%的实验要求，必须测量 ≥ 50 个周期的时间间隔。

具体要求：摆长设置为80 cm左右，测量时间间隔不低于50个周期，测量次数不低于6次；棉线长度测量次数不低于3次；钢球直径测量次数不低于3次。将所得数据整理成类似表格：

| 测量次序 | 1 | ... | N | 平均值 | 标准差 | A类不确定度 |
|----------------|---|-----|---|-----|-----|--------|
| 50个周期 t (s) | | | | | | |

| 测量次序 | 1 | ... | N | 平均值 | 标准差 | A类不确定度 |
|----------------|---|-----|---|-----|-----|--------|
| 钢球直径 D (mm) | | | | | | |
| 棉线长度 l (cm) | | | | | | |

平均值

棉线长:

$$\bar{l} = \frac{1}{N} \sum l_i$$

钢球直径:

$$\bar{D} = \frac{1}{N} \sum D_i$$

时间间隔:

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum t_i$$

摆长:

$$\bar{L} = \bar{l} + 0.5\bar{D}$$

重力加速度:

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{n}^2 \bar{L}}{\bar{t}^2}$$

A类不确定度

棉线长：

$$u_A(l) = \sqrt{\frac{\sum (l_i - \bar{l})^2}{N(N-1)}}$$

钢球直径：

$$u_A(D) = \sqrt{\frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{N(N-1)}}$$

时间间隔：

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{N(N-1)}}$$

B类不确定度

棉线长（钢卷尺）：

$$u_B(l) = \frac{\Delta}{C}$$

钢球直径（游标卡尺）：

$$u_B(D) = \frac{\Delta}{C}$$

时间间隔（秒表）：

$$u_B(t) = \frac{\Delta}{C}$$

若仪器无特殊说明，可按：

| | 钢卷尺 | 游标卡尺 | 秒表 |
|----------|------|------------|--------|
| Δ | 最小刻度 | 最小刻度 | 0.01 s |
| C | 3 | $\sqrt{3}$ | 3 |

不确定度合成、展伸和传递

棉线长: $U_{0.95}(l) = \sqrt{(t_{0.95}u_A)^2 + (k_{0.95}u_B)^2}$

钢球直径: $U_{0.95}(D) = \sqrt{(t_{0.95}u_A)^2 + (k_{0.95}u_B)^2}$

时间间隔: $U_{0.95}(t) = \sqrt{(t_{0.95}u_A)^2 + (k_{0.95}u_B)^2}$

k_p 见书本第一册
P32表2.1-3

摆长: $U_{0.95}(L) = \sqrt{U_{0.95}^2(l) + 0.5^2 U_{0.95}^2(D)}$

不确定度传递见第一册
P35表2.1-5

重力加速度:

$$U_{0.95}(g) = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 n^2}{\bar{t}^2}\right)^2 U_{0.95}^2(L) + \left(2 \frac{4\pi^2 n^2 \bar{L}}{\bar{t}^3}\right)^2 U_{0.95}^2(L)}$$
$$= \bar{g} \sqrt{\left(\frac{U_{0.95}(L)}{\bar{L}}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{U_{0.95}(t)}{\bar{t}}\right)^2}$$

不确定度传递见第一册
P35表2.1-5

相对不确定度

$$\frac{U_{0.95}(g)}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{U_{0.95}(L)}{\bar{L}}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{U_{0.95}(t)}{\bar{t}}\right)^2}$$

相对不确定度见第一册P35表2.1-5

结果表述

$$g = \bar{g} \pm U_{0.95}(g), P = 0.95$$

$U_{0.95}(g)$ 保留1~2有效数字, \bar{g} 的最后一位与 $U_{0.95}(g)$ 对齐, 比如:

$$\bar{g} = 9.81234 \text{ m/s}^2$$

$$U_{0.95}(g) = 0.08786 \text{ m/s}^2$$

a. $U_{0.95}(g)$ 可先保留到0.088 m/s^2

b. \bar{g} 再保留到9.812 m/s^2

c. 最后 $g = (9.812 \pm 0.088) \text{ m/s}^2$

$$g_{\text{参考}} = 9.7883 \text{ m/s}^2$$

相对误差

$$\frac{|\bar{g} - g_{\text{参考}}|}{g_{\text{参考}}}$$

如有疑问, 来一教335讨论。

谢谢观看！