

实 验 报 告

评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3

实验题目：三线摆

实验目的：掌握用三线摆测定物体的转动惯量的方法，验证转动惯量的平行轴定理

实验原理：两半径分别为 r 、 R ($R > r$) 的刚性圆盘，用对称分布的三条等长的无弹性、质量可以忽略的细线相连，上盘固定，则构成一振动系统，称为三线摆。

如右图，在调平后，利用上圆盘以及悬线张力使下圆盘扭转振动，为扭转角。当很小时，可以认为就是简谐振动，那么：

$$E_p = m_0 g h$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2$$

其中 m_0 为下盘质量， I_0 为下盘对 OO_1 轴的转动惯量。若忽略摩擦，有 $E_p + E_k = \text{恒量}$ 。由于转动能远大于平动能，故在势能表达式中略去后一项，于是有：

$$\frac{1}{2} I_0 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + m_0 g h = \text{Const.}$$

由于很小，故容易计算得：

$$h = \frac{Rr\alpha^2}{2H}$$

联立以上两式，并对 t 求导有：

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{m_0 g R r}{I_0 H} \alpha$$

解得：

$$\omega^2 = \frac{m_0 g R r}{I_0 H}$$

又由于 $T_0 = 2\pi / \omega$ ，于是解得：

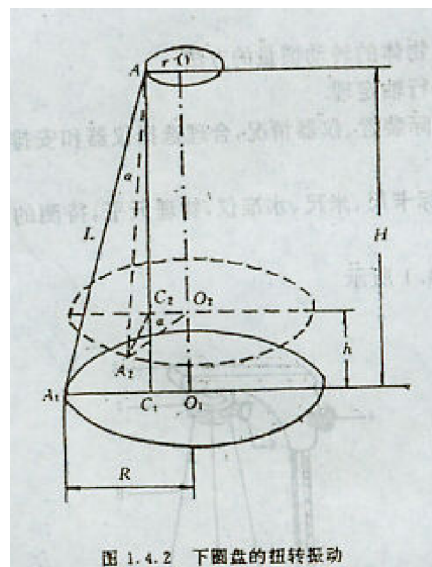
$$I_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H} T_0^2$$

若测量一个质量为 m 的物体的转动惯量，可依次测定无负载和有负载（质心仍在 OO_1 上，忽略其上下的变化）时的振动周期，得：

$$I = \frac{g R r}{4\pi^2 H} [(m_0 + m) T_1^2 - m_0 T_0^2]$$

通过改变质心与三线摆中心轴的距离，测量 I_a 与 d^2 的关系就可以验证平行轴定理 $I_a = I_c + m d^2$ 。

实验仪器：三线摆（包括支架、轻绳、圆盘等）、水平校准仪、游标卡尺、直尺、秒表、钢圈、（两个相同规格的圆柱形）重物



实 验 报 告

评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3

实验内容：1、对三线摆的上盘和下盘依次进行水平调节；

2、测量系统的基本物理量，包括上盘直径、下盘直径、上下盘之间距离、钢圈内外径，每个物理量测量三次，同时根据给出的数据记录当地重力加速度、下盘质量、钢圈质量、重物质量、悬点在下盘构成的等边三角形的边长；

3、下盘转动惯量的测量：扭动上盘使三线摆摆动，测量 50 个周期的时间，重复三次；

4、钢圈转动惯量的测量：将钢圈置于下盘上，使钢圈圆心和下盘圆心在同一竖直轴线上，扭动上盘使系统摆动，测量 50 个周期的时间，重复三次；

5、验证平行轴定理：取 $d=0、2、4、6、8\text{cm}$ ，将两个重物对称置于相应位置上，让系统摆动，测量 50 个周期的时间，每个对应距离测量三次。

实验数据：

下盘质量 $m_0=360.0\text{g}$ 重力加速度 $g=9.7947\text{m/s}^2$

	1	2	3
H (mm)	501.6	501.9	501.2
D (mm) =2R	207.12	207.14	207.16
d (mm) =2r	99.80	99.92	99.94
$T_1=50T_0$ (s)	74.14	74.13	73.83

表一：下盘转动惯量的测量数据

钢圈质量 $m=398.20\text{g}$

	1	2	3
$D_{\text{内}}$ (mm)	169.94	169.96	169.90
$D_{\text{外}}$ (mm)	189.72	189.84	189.80
$T_2=50T$ (s)	83.33	83.75	83.61

表二：钢圈转动惯量测量数据

每个重物质量 $m_1=200\text{g}$

	1	2	3
$t_0=50T_{d0}$ (s)	51.89	52.01	51.80
$t_2=50T_{d2}$ (s)	53.90	53.94	53.93
$t_4=50T_{d4}$ (s)	59.48	59.57	59.59
$t_6=50T_{d6}$ (s)	68.13	68.22	68.12
$t_8=50T_{d8}$ (s)	78.16	78.09	78.20

表三：验证平行轴定理实验数据

数据处理：

测量下盘转动惯量

将公式化为如下形式：

$$I_0 = \frac{m_0 g D d}{40000 \pi^2 H} (T_1)^2$$

测量列 H 的平均值

$$\overline{H} = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} = \frac{501.6 + 501.9 + 501.2}{3} \text{mm} = 501.6 \text{mm}$$

实 验 报 告

评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3

测量列 D 的平均值

$$\bar{D} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3} = \frac{207.12 + 207.14 + 207.16}{3} \text{mm} = 207.14 \text{mm}$$

测量列 d 的平均值

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3} = \frac{99.80 + 99.92 + 99.94}{3} \text{mm} = 99.89 \text{mm}$$

测量列 T_1 的平均值

$$\bar{T}_1 = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{13}}{3} = \frac{74.14 + 74.13 + 73.83}{3} \text{s} = 74.03 \text{s}$$

于是转动惯量的平均值为

$$\bar{I}_0 = \frac{m_0 g \bar{D} \bar{d}}{40000 \pi^2 H} \bar{T}_1^2 = \frac{0.36 \times 9.7947 \times 207.14 \times 99.89 \times 10^{-3}}{40000 \times 3.14^2 \times 501.6} \times 74.03^2 \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 2.02 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

以下取 $P=0.68$ 。

测量列 H 的标准差

$$\sigma(H) = \sqrt{\frac{\sum_i (\bar{H} - H_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(501.6 - 501.6)^2 + (501.6 - 501.9)^2 + (501.6 - 501.2)^2}{3-1}} \text{mm} = 0.4 \text{mm}$$

查表得 t 因子 $t_p=1.32$ ，那么测量列 H 的不确定度的 A 类评定为

$$t_p \frac{\sigma(H)}{\sqrt{n}} = 1.32 \times \frac{0.4}{\sqrt{3}} \text{mm} = 0.3 \text{mm}$$

仪器（直尺）的最大允差 $\Delta_{\text{仪}}=1.0 \text{mm}$ ，人读数的估计误差可取为 $\Delta_{\text{估}}=2.0 \text{mm}$ （考虑到测量的方法），于是有

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{\text{yi}}^2 + \Delta_{\text{gu}}^2} = \sqrt{1.0^2 + 2.0^2} \text{mm} = 2.2 \text{mm}$$

直尺误差服从正态分布，那么 H 的不确定度的 B 类评定为

$$u_B(H) = \frac{\Delta}{C} = \frac{2.2}{3} \text{mm} = 0.7 \text{mm}$$

合成不确定度

$$U(H) = \sqrt{\left[t_p \frac{\sigma(H)}{\sqrt{3}}\right]^2 + [k_p u_B(H)]^2} = \sqrt{0.3^2 + (1 \times 0.7)^2} \text{mm} = 0.8 \text{mm}, P = 0.68$$

测量列 D 的标准差

$$\sigma(D) = \sqrt{\frac{\sum_i (\bar{D} - D_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(207.14 - 207.12)^2 + (207.14 - 207.14)^2 + (207.14 - 207.16)^2}{3-1}} \text{mm} = 0.02 \text{mm}$$

查表得 t 因子 $t_p=1.32$ ，那么测量列 D 的不确定度的 A 类评定为

$$t_p \frac{\sigma(D)}{\sqrt{n}} = 1.32 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}} \text{mm} = 0.02 \text{mm}$$

仪器（游标卡尺）的最大允差 $\Delta_{\text{仪}}=0.02 \text{mm}$ ，人读数的估计误差可取为 $\Delta_{\text{估}}=0.02 \text{mm}$ ，于是有

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{\text{yi}}^2 + \Delta_{\text{gu}}^2} = \sqrt{0.02^2 + 0.02^2} \text{mm} = 0.03 \text{mm}$$

直尺误差服从均匀分布，那么 D 的不确定度的 B 类评定为

实 验 报 告

评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3

$$u_B(D) = \frac{\Delta}{C} = \frac{0.03}{\sqrt{3}} \text{ mm} = 0.02 \text{ mm}$$

合成不确定度

$$U(D) = \sqrt{\left[t_p \frac{\sigma(D)}{\sqrt{3}}\right]^2 + [k_p u_B(D)]^2} = \sqrt{0.02^2 + (1 \times 0.02)^2} \text{ mm} = 0.03 \text{ mm}, P = 0.68$$

类似计算得 d 的合成不确定度 $U(d) = 0.06 \text{ mm}$, $P = 0.68$ 。

测量列 T_1 的标准差

$$\sigma(T_1) = \sqrt{\frac{\sum_i (\bar{T}_1 - T_{1i})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(74.03 - 74.14)^2 + (74.03 - 74.13)^2 + (74.03 - 73.83)^2}{3-1}} \text{ s} = 0.18 \text{ s}$$

查表得 t 因子 $t_p = 1.32$, 那么测量列 H 的不确定度的 A 类评定为

$$t_p \frac{\sigma(T_1)}{\sqrt{n}} = 1.32 \times \frac{0.18}{\sqrt{3}} \text{ s} = 0.14 \text{ s}$$

仪器（秒表）的最大允差相对于人的估计误差可以忽略，人的估计误差可取为 $\Delta_{\text{估}} = 0.2 \text{ s}$ ，秒表误差服从正态分布，那么 H 的不确定度的 B 类评定为

$$u_B(T_1) = \frac{\Delta}{C} = \frac{0.2}{3} \text{ s} = 0.07 \text{ s}$$

合成不确定度

$$U(T_1) = \sqrt{\left[t_p \frac{\sigma(T_1)}{\sqrt{3}}\right]^2 + [k_p u_B(T_1)]^2} = \sqrt{0.14^2 + (1 \times 0.07)^2} \text{ s} = 0.16 \text{ s}, P = 0.68$$

根据公式和不确定度的传递规律，有

$$\left[\frac{U(I_0)}{I_0}\right]^2 = \left[\frac{U(D)}{D}\right]^2 + \left[\frac{U(d)}{d}\right]^2 + \left[\frac{U(H)}{H}\right]^2 + 4\left[\frac{U(T_1)}{T_1}\right]^2$$

那么

$$\begin{aligned} U(I_0) &= \bar{I}_0 \sqrt{\left[\frac{U(D)}{D}\right]^2 + \left[\frac{U(d)}{d}\right]^2 + \left[\frac{U(H)}{H}\right]^2 + 4\left[\frac{U(T_1)}{T_1}\right]^2} \\ &= 2.02 \times 10^{-3} \times \sqrt{\left(\frac{0.03}{207.14}\right)^2 + \left(\frac{0.06}{99.89}\right)^2 + \left(\frac{0.8}{501.6}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{0.16}{74.03}\right)^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 0.01 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

于是最终结果表示成

$$I_0 = \bar{I}_0 \pm U(I_0) = (2.02 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, P = 0.68$$

测量钢圈转动惯量

将计算公式化为

$$I = \frac{gDd}{40000\pi^2 H} [(m_0 + m)T_2^2 - m_0 T_1^2]$$

实 验 报 告

评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3

测量列 T_2 的平均值

$$\overline{T_2} = \frac{T_{21} + T_{22} + T_{23}}{3} = \frac{83.33 + 83.75 + 83.61}{3} s = 83.56s$$

于是计算得

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{g\overline{Dd}}{40000\pi^2\overline{H}}[(m_0 + m)\overline{T_2}^2 - m_0\overline{T_1}^2] \\ &= \frac{9.7947 \times 207.14 \times 99.89 \times 10^{-3}}{40000 \times 3.14^2 \times 501.6} \times [(360.0 + 398.20) \times 10^{-3} \times 83.56^2 - 0.36 \times 74.03^2] kg \cdot m^2 \\ &= 3.40 \times 10^{-3} kg \cdot m^2\end{aligned}$$

而从理论上可以计算钢圈的转动惯量：

测量列 D_{nei} 的平均值

$$\overline{D_{nei}} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3} = \frac{169.94 + 169.96 + 169.90}{3} mm = 169.93mm$$

测量列 D_{wai} 的平均值

$$\overline{D_{wai}} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3} = \frac{189.72 + 189.84 + 189.80}{3} mm = 189.79mm$$

理论上计算的钢圈的转动惯量为

$$I = \frac{1}{8}m(D_{nei}^2 + D_{wai}^2) = \frac{1}{8} \times 398.20 \times 10^{-3} \times (189.79^2 + 169.93^2) \times 10^{-6} kg \cdot m^2 = 3.2 \times 10^{-3} kg \cdot m^2$$

$$\text{相对误差} = \frac{\bar{I} - I}{I} = \frac{(3.40 - 3.23) \times 10^{-3}}{3.23 \times 10^{-3}} = 5.3\%$$

验证平行轴定理

$$\text{转动惯量的计算公式变为 } I = \frac{(m_0 + 2m_1)gDd}{40000\pi^2H}t^2$$

测量列 t_0 的平均值

$$\overline{t_0} = \frac{t_{01} + t_{02} + t_{03}}{3} = \frac{51.89 + 52.01 + 51.80}{3} s = 51.90s$$

从而计算得

$$\begin{aligned}I_c = I_{d0} &= \frac{(m_0 + 2m_1)gDd}{40000\pi^2H}t_0^2 = \frac{(0.36 + 2 \times 0.2) \times 9.7947 \times 207.14 \times 99.89 \times 10^{-3}}{40000 \times 3.14^2 \times 501.6} \times 51.90^2 kg \cdot m^2 \\ &= 2.10 \times 10^{-3} kg \cdot m^2\end{aligned}$$

类似计算得

$$I_{d2} = 2.26 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad I_{d4} = 2.76 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad I_{d6} = 3.61 \times 10^{-3} kg \cdot m^2$$

$$I_{d8} = 4.75 \times 10^{-3} kg \cdot m^2$$

利用 ORIGIN 作出 I-d² 曲线

实 验 报 告

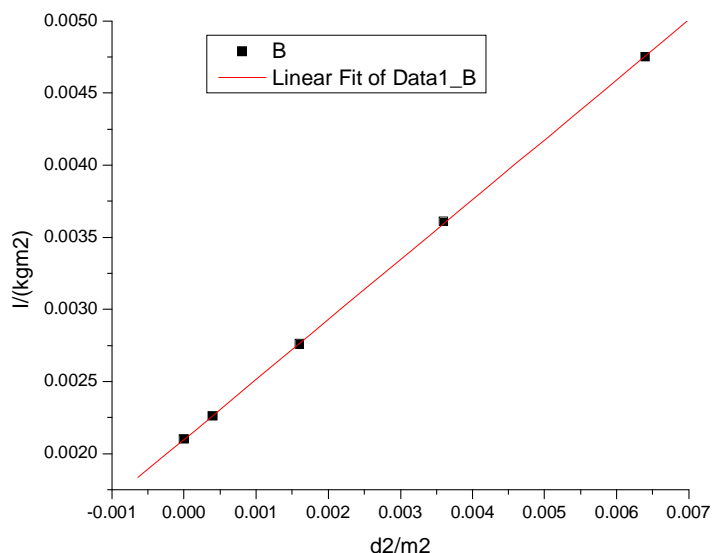
评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3



图一：I-d² 拟合曲线

Linear Regression for Data1_B:

$$Y = A + B * X$$

Parameter	Value	Error
-----------	-------	-------

A	0.0021	6.79195E-6
---	--------	------------

B	0.41537	0.00202
---	---------	---------

R	SD	N	P
---	----	---	---

0.99996	1.06476E-5	5	<0.0001
---------	------------	---	---------

根据图可以读出斜率为 0.41537kg，与纵轴的截距 0.0021kg.m²，也就是 2m₁=415.37g，I_c=2.10 × 10⁻³kg.m²。与标准值 2m₁=400g，I_c=2.10 × 10⁻³kg.m² 比较，差距不大。

实验小结：

- 1、本实验原理比较简单，但是对操作和数据处理有比较高的要求；
- 2、实验过程中应注意保证三线摆只存在转动，避免出现水平方向的平动，因此除了利用上盘和绳的张力使摆开始摆动外，在实验过程中也要尽量减少系统的晃动；
- 3、在验证平行轴定理的数据处理中，考虑下盘加重物的转动惯量或者是只考虑重物的转动惯量都是可以的，无非是一个常数（下盘的转动惯量）的差量，不会影响斜率（重物质量）的测量，简单起见我采用的是前者；
- 4、从实验结果看，与理论值吻合得比较好。

思考题：

- 1、用三线摆测量刚体的转动惯量时，扭转角的大小对实验结果有无影响？若有影响，能否进行修正？

实 验 报 告

评分：

少年班 系 06 级

学号 PB06000680

姓名 张力

日期 2007-12-3

Sol：扭转角的大小对实验结果是有影响的，这是因为只有当扭转角很小的时候，才能将摆的运动近似看成是简谐振动。从实验原理中对于转动惯量的计算公式的推导来看，利用了“当 a 很小时， $\sin(a) = \tan(a) = a$ ”的结论，因此若要修正，则不能作此近似， h 的表达式中将修正出 $\sin(a)$ 和 $\tan(a)$ 的项。

2、三线摆在摆动中受到空气阻尼，振幅越来越小，它的周期将如何变化？请观察实验，并说出理论根据。

Sol：由于空气阻尼的作用，机械能将不是常量，而成为一个和时间相关的函数，在推导中对方程两边求导时将多出一项，而且显然这一项是负的，分析表达式，知道角加速度（负值）的绝对值将更大，意味着角速度将更大，周期变小。

3、加上待测物体偶后，三线摆的周期是否一定比空盘大？为什么？

Sol：根据实验所得数据，显然这是不一定的。因为周期的大小和转动惯量有关，转动惯量的大小除了和总质量有关外，还和质量相对于考察点的分布有关。