Conhecida assim em detalhe a resposta ao degrau, podemos deduzir facilmente as respostas do circuito a excitações compostas por degraus. Assim, por exemplo, consideremos que o circuito é excitado por um pulso retangular, de amplitude E e largura T, isto é,

$$e_S(t) = E[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)]$$

Admitindo ainda condições iniciais nulas (ou quiescentes), isto é $i_0 = 0$, a resposta pode ser determinada pelas seguintes considerações: quando vem a frente do pulso inicia-se uma resposta ao degrau, do tipo descrito acima. Quando o pulso termina, o circuito fica livre e, portanto, a resposta prossegue como uma resposta livre, tendo como condição inicial a corrente que prevalecia em $t = T$.

Assim sendo, a resposta $i(t)$ para os t entre 0 e T obtém-se de (5.23), fazendo $i_0 = 0$ e $t_0 = 0$:

$$i(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\frac{E}{R}, \qquad (0 \le t \le T)$$

Para $t = T$, $i(t) = (1 - e^{-T/\tau})\frac{E}{R}$. Como este é o valor inicial para o comportamento livre, a corrente para os $t > T$ obtém-se de (5.16), substituindo i_0 pelo valor $i(T)$ e colocando $(t-T)$ em lugar de t:

$$i(t) = \left(1 - e^{-T/\tau}\right)\frac{E}{R}e^{-(t-T)/\tau}, \qquad (t > T)$$

Na figura 5.5 indicamos os gráficos de $e_S(t)$ e de $i(t)$, na hipótese de $T > \tau$. Recomendamos ao estudante fazer também os gráficos correspondentes a $T \gg \tau$ e $T \ll \tau$.

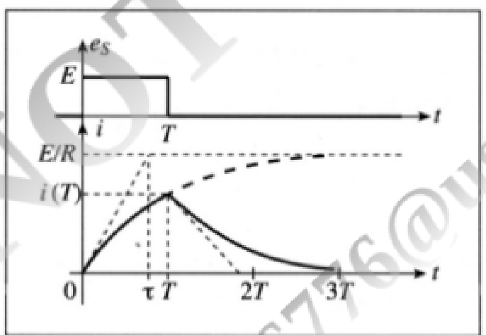

Figura 5.5 Resposta ao pulso do circuito R, L série.

b) Resposta impulsiva:

Tomemos agora como excitação um impulso de amplitude A volts.segundo, isto é,

$$e_S(t) = A\delta(t) \qquad \text{(V)},$$

onde $\delta(t)$ é a função de Dirac.

O impulso de amplitude A ocorre em $t = 0$. Vamos admitir que a corrente no indutor, um pouco antes do impulso, seja i_0, isto é, vamos usá-la como condição inicial em $t = 0_-$: $i(0_-) = i_0$. A equação diferencial do circuito fica então

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{A}{L}\delta(t) \qquad (5.24)$$

Vamos integrar esta equação num intervalo infinitésimo do eixo real, centrado sobre a origem. Indicando simbolicamente por 0_+ e 0_- os extremos desse intervalo, teremos

$$\int_{0_-}^{0_+} \frac{di(t)}{dt}dt + \frac{R}{L}\int_{0_-}^{0_+} i(t)dt = \frac{A}{L}\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)dt \ .$$

A primeira integral do 1º membro dá, evidentemente, $i(0_+) - i(0_-)$. A integral do 2º membro fornece A/L, pela própria definição da função delta. A segunda integral do 1º membro dá zero, pois a função $i(t)$ não deve conter impulsos. Para justificar este resultado, basta considerar que, caso contrário, a equação (5.24) não seria satisfeita para qualquer t, pois no primeiro membro apareceria uma derivada do impulso, que não existe no segundo membro. Então $i(t)$ poderá, no máximo, apresentar uma descontinuidade em degrau, de modo que sua integral num intervalo infinitésimo será nula. Segue-se então que

$$i(0_+) - i(0_-) = A / L$$

e

$$i(0_+) = i(0_-) + A / L = i_0 + A / L \qquad (5.25)$$

Esta expressão mostra que o papel do impulso é de impor uma descontinuidade em degrau na corrente, com amplitude igual a A/L.

Por outro lado, para os $t > 0_+$ o circuito está livre pois a tensão no gerador é constantemente nula; exibirá então o comportamento livre já estudado, ou seja, a corrente será

$$i(t) = \left(i_0 + \frac{A}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad t > 0 \qquad (5.26)$$

onde i_0 é agora a corrente inicial, numa vizinhança à esquerda da origem dos tempos.

Vamos agora calcular a tensão $v_L(t)$. Pela equação constitutiva do indutor,

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \qquad \forall t$$

Antes de efetuar a derivada, devemos escrever uma expressão para $i(t)$, válida para qualquer t. Supondo $i(t) = i_0$ para os $t < 0$, a equação (5.26) pode ser modificada para

$$i(t) = \left[\left(i_0 + \frac{A}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t} - i_0\right]\mathbf{1}(t) + i_0, \qquad \forall t$$

Efetuando a derivada desta expressão, multiplicando-a por L, rearranjando-a e considerando que $\delta(t)$ é nulo para os $t \neq 0$, obtemos a desejada tensão:

$$v_L(t) = R\left(i_0 + \frac{A}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}\mathbf{1}(t) + A\delta(t), \qquad \forall t$$

Esta expressão mostra que a tensão no indutor contém um impulso de amplitude igual ao impulso do gerador.

Como verificação, pode-se calcular v_R e verificar que a soma $v_R + v_L$ é sempre igual à tensão do gerador.

c) Resposta à excitação co-senoidal:

Consideremos agora uma excitação co-senoidal

$$e_S(t) = E_m \cos(\omega t + \theta)$$

Como já sabemos, esta excitação pode ser representada pelo fasor

$$\hat{E}_m = E_m e^{j\theta}$$

de modo que a excitação se pode escrever

$$e_S(t) = \Re e[\hat{E}_m e^{j\omega t}] \tag{5.27}$$

onde $\Re e$ representa o operador que toma a parte real do complexo.

A equação diferencial do circuito fica então

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} \Re e[\hat{E}_m e^{j\omega t}] \tag{5.28}$$

Trata-se agora de determinar uma solução particular desta equação. Nesta altura, a introdução do fasor pode parecer uma complicação desnecessária. Pode-se no entanto verificar, sem muita dificuldade, que esta introdução reduz bastante o trabalho de achar a solução particular (experimente depois fazê-lo, sem usar os fasores!). Além disso, o método a ser empregado pode facilmente ser generalizado para circuitos mais complicados.

É fácil ver que a equação (5.28) admite uma solução particular também co-senoidal e, portanto, representável por um fasor. Esta será a *componente permanente* de nossa resposta, por sua característica de periodicidade no tempo. Indicando-a por $i_p(t)$, vamos procurar satisfazer a (5.28) com uma função

$$i_p(t) = \Re e[\hat{I}_m e^{j\omega t}] \tag{5.29}$$

Introduzindo este valor em (5.28) e levando em conta as duas propriedades seguintes:

a) a derivada da parte real de uma complexo é igual à parte real da derivada do complexo, ou seja

$$\frac{di_p(t)}{dt} = \Re e[j\omega \hat{I}_m e^{j\omega t}]$$

b) a parte real da soma de complexos é igual à soma das suas partes reais, resulta:

$$\Re e\left[j\omega \hat{I}_m e^{j\omega t} + \frac{R}{L} \hat{I}_m e^{j\omega t}\right] = \Re e\left[\frac{1}{L} \hat{E}_m e^{j\omega t}\right]$$

Esta igualdade está contida na igualdade abaixo, pois as partes real e imaginária de ambos os membros devem ser iguais separadamente. Portanto, vale

$$\left[j\omega \hat{I}_m + \frac{R}{L} \hat{I}_m\right] e^{j\omega t} = \frac{1}{L} \hat{E}_m e^{j\omega t}$$

Como a exponencial é sempre diferente de zero, segue-se que o fasor da corrente deve satisfazer a

$$\hat{I}_m = \frac{1}{R + j\omega L}\hat{E}_m \tag{5.30}$$

A relação $Z(j\omega)$ entre os fasores da tensão e da corrente é, por definição, a *impedância complexa* da associação R, L série:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \tag{5.31}$$

Podemos então escrever que

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{E}_m}{Z(j\omega)} \tag{5.32}$$

isto é, o fasor da corrente no circuito obtém-se dividindo o fasor da tensão aplicada por sua impedância complexa. Veremos depois que esta relação se generaliza para circuitos mais complicados.

Finalmente, a corrente permanente no circuito será

$$i_p(t) = \Re e(\hat{I}_m e^{j\omega t}) \tag{5.33}$$

Em conclusão, para determinar a corrente permanente co-senoidal do circuito bastará:

a) Determinar o fasor $\hat{E}_m$ da tensão aplicada;

b) Dividir este fasor pelo complexo $Z(j\omega)$, obtendo o fasor da corrente, $\hat{I}_m$;

c) Determinar a co-senóide representada por este fasor, conhecidos seu módulo e argumento.

À vista de (5.30), o fasor da corrente terá o módulo

$$\left|\hat{I}_m\right| = \frac{\left|\hat{E}_m\right|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{5.34}$$

e o argumento (ou ângulo)

$$\arg \hat{I}_m = \theta - \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} = \Psi \tag{5.35}$$

onde θ é o ângulo de $\hat{E}_m$. A corrente permanente está pois atrasada em relação à tensão de um ângulo igual a $\operatorname{arctg}(\omega L/R)$.

A solução geral de (5.28) será pois

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \left|\hat{I}_m\right|\cos(\omega t + \Psi) \tag{5.36}$$

A constante de integração A será determinada a partir da condição inicial. Assim, por exemplo, se impusermos que $i(0) = i_0$, resulta

$$A = i_0 - \left|\hat{I}_m\right| \cos \Psi$$

e a solução do problema de valor inicial fica

$$i(t) = (i_0 - \left|\hat{I}_m\right| \cos \Psi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \left|\hat{I}_m\right| \cos(\omega t + \Psi) \tag{5.37}$$

Como o componente transitório decai exponencialmente com o tempo, depois de algumas constantes de tempo predomina o componente permanente, última parcela de (5.37).

A expressão (5.37) mostra ainda que fazendo $i_0 = |\hat{I}_m| \cos\Psi$ podemos inicializar o circuito em $t = 0$ sem transitório; o regime permanente se estabelece desde o início.

Exemplo:

Consideremos um circuito constituído pela associação série de $R = 6\Omega$ e $L = 3$ H, alimentado por um gerador com tensão $e_S(t) = 12 \cos 2t$ volts. Determinar:

a) A corrente permanente no circuito;

b) A corrente completa $i(t)$, sabendo que $i(0) = 2\ A$;

c) A tensão $v_L(t)$, nas condições do item (b).

Solução:

a) Como $\omega = 2$, a impedância do circuito é

$$Z(j2) = 6 + j2 \cdot 3 = 6 + j6 \qquad \text{(ohms)}$$

e o fasor da tensão aplicada é $\hat{E}_m = 12\angle 0°$, o fasor da corrente permanente fica

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{E}_m}{Z(j2)} = \frac{12\angle 0°}{6 + j6} = 1{,}41\angle -45°, \qquad \text{(A)}$$

b) A constante de tempo do circuito é $\tau = 3/6 = 0{,}5$ segundos, de modo que a resposta completa é do tipo

$$i(t) = Ae^{-2t} + 1{,}41 \cos(2t - 45°)$$

Para $t = 0$, $i_0 = 2$, de modo que resulta

$$A = 2 \cdot 1{,}41 \cos(-45°) = 1$$

Voltando à corrente, obtemos

$$i(t) = e^{-2t} + 1{,}41 \cos(2t - 45°), \qquad t \geq 0$$

c) A tensão no indutor é

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 3[-2e^{-2t} - 2{,}82\ \mathrm{sen}(2t - 45°)]$$

ou seja,

$$v_L(t) = -6e^{-2t} + 8{,}46\cos(2t + 45°), \qquad \text{volts, } t \geq 0$$

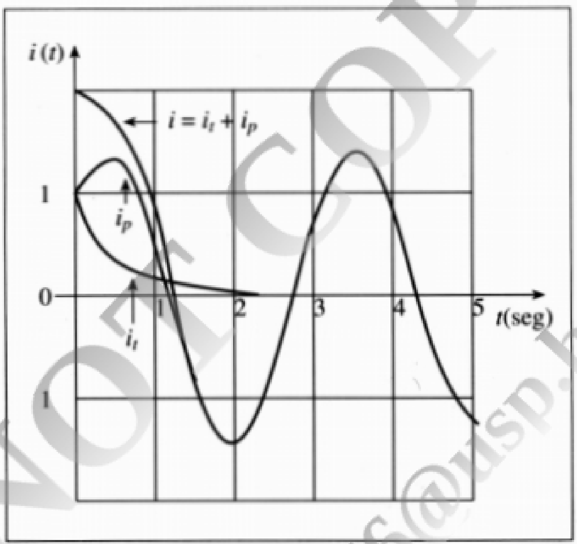

Figura 5.6 Componentes permanente e transitório da corrente no circuito *R, L* com excitação co-senoidal.

O componente permanente desta tensão está adiantado de 45° em relação à tensão do gerador.

Na figura 5.6 representamos a corrente $i(t)$ e seus componentes permanente $i_p(t)$ e transitório $i_t(t)$.

5.4 O circuito R,C

Consideremos agora a associação paralela de um resistor e um capacitor lineares e fixos, alimentada por um gerador de corrente, como indicado na figura 5.7.

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff ao nó A do circuito obtemos

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) = i_S(t)$$

ou

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_S(t) \qquad (5.38)$$