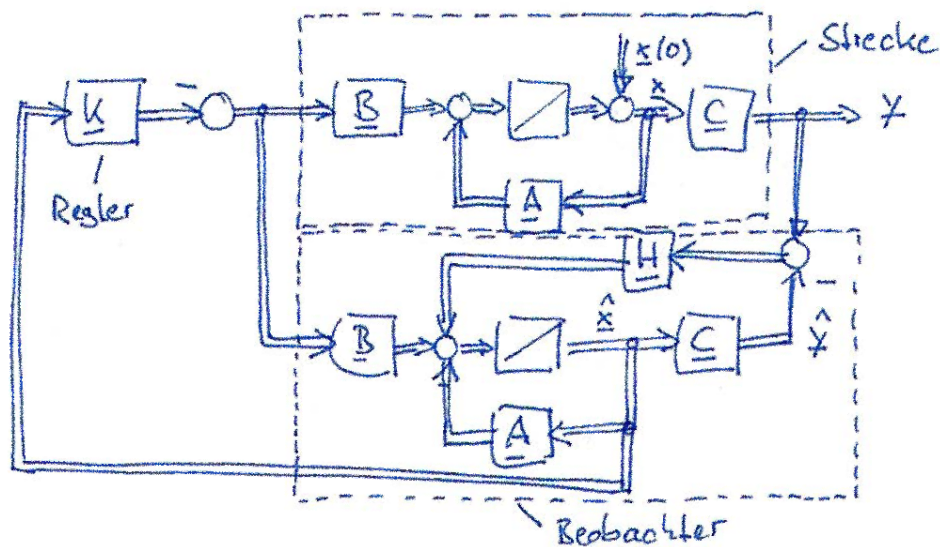


Skript zur Vorlesung

Regelungstechnik 2

Prof. Dr.-Ing Christoph Ament

Lehrstuhl Regelungstechnik in der Ingenieurinformatik



Stand: Juni 2017

Gliederung

Literatur

Teil A: Beschreibung und Analyse von Systemen

1	Systemdarstellung im Zustandsraum	1-1
1.1	Nichtlineare Systeme	1-1
1.2	Lineare Systeme	1-5
1.3	Übersicht: Aufstellen der Zustandsdifferentialgleichung	1-8
1.4	Linearisierung	1-10
1.5	Berechnung von Trajektorien	1-13
1.6	Transformation	1-16
2	Analyse von Systemeigenschaften	2-1
2.1	Jordan-Normalform (JNF)	2-1
2.2	Stabilität	2-2
2.3	Steuerbarkeit	2-3
2.4	Beobachtbarkeit	2-4
2.5	Kalman-Zerlegung	2-5
2.6	Erweiterung auf Systeme mit mehrfachen Eigenwerten	2-6
3	Balancierte Darstellung	3-1
3.1	Analyse der Steuerbarkeit	3-1
3.2	Analyse der Beobachtbarkeit	3-2
3.3	Transformation	3-3
3.4	Ordnungsreduktion	3-5

Teil B: Entwurf durch Eigenwertvorgabe

4	Reglerentwurf	4-1
4.1	Struktur der linearen Zustandsrückführung	4-1
4.2	Entwurf einer Zustandsrückführung durch Eigenwertvorgabe	4-1
4.3	Entwurf in Regelungsnormalform (RNF)	4-3
5	Beobachterentwurf	5-1
5.1	Idee und Struktur des Beobachters	5-1
5.2	Entwurf durch Eigenwertvorgabe	5-2
5.3	Entwurf in Beobachtungsnormalform (BNF)	5-4
5.4	Störbeobachter	5-7
6	Erweiterungen der Regelstruktur	6-1
6.1	Zwei-Freiheitsgrade-Struktur	6-1
6.2	Statisches Vorfilter	6-1
6.3	Dynamisches Vorfilter	6-3

6.4	Störkompensation	6-3
6.5	Integrale Ausgangsrückführung.....	6-4
7	Mehrgrößen-Regelung	7-1
7.1	Vollständig modale Synthese	7-1
7.2	Entwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung	7-2
7.3	Entwurf eines statischen Vorfilters	7-3
7.4	Erweiterung zu einer Folgeregelung	7-5

Teil C: Optimaler Entwurf

8	Einführung in die optimale Regelung	8-1
8.1	Kostenfunktionen.....	8-1
8.2	Dynamische Programmierung	8-3
9	Linear quadratische Regelung	9-1
9.1	Riccati-Differentialgleichung.....	9-1
9.2	Algebraische Riccati-Gleichung	9-1
9.3	Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung.....	9-2
10	Linear quadratische Beobachtung	10-1
11	Robuste Regelung	11-1
11.1	Einleitung	11-1
11.2	Beschreibungsformen der Streckenvariationen.....	11-2
11.3	Robustheitskriterien	11-3
11.4	H_∞ -Optimierungsproblem und generalisierte Streckenstruktur	11-3
11.5	Robuste Stabilität und nominelle Performance	11-4

Literatur

- Föllinger, O:
Regelungstechnik – Einführung in die Methoden und ihre Anwendung, 11. Auflage
2013, VDE Verlag, 1994. € 49,90
- Graichen, K:
Systemtheorie – Theorie linearer Regelsysteme, Skriptum, Universität Ulm
- Lunze, J.:
Regelungstechnik 2 – Mehrgrößensystem, Digitale Regelung, Springer, 7. Auflage,
2013, € 49,95
- Lunze, J.:
Automatisierungstechnik – Methoden für die Überwachung und Steuerung kontinu-
ierlicher und ereignisdiskreter Systeme, Oldenbourg, 3. Auflage 2012. € 54,80
- Unbehauen, H.:
Regelungstechnik II: Zustandsregelung, digitale und nichtlineare Regelsysteme,
Vieweg & Teubner, 9. Auflage, 2000. € 42,99
- Norman S. Nise:
Control Systems Engineering, Wiley Text Books; 4th edition, 2004, € 63,50
- Benjamin Kuo:
Automatic Control Systems, Prentice Hall; 8. Aufl. 2003, € 59,90

Teil A: Beschreibung und Analyse von Systemen

1 Systemdarstellung im Zustandsraum

1.1 Nichtlineare Systeme

Der *Zustand* eines dynamischen Systems wird zum Zeitpunkt t durch eine Reihe von Zustandsgrößen (= Zuständen) $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eindeutig beschrieben. Diese Zustandsgrößen werden im Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ zusammengefasst.

Das dynamische Verhalten des Systems wird durch die *Zustandsdifferentialgleichung* definiert: Sie beschreibt die zeitliche Änderung des Zustandsvektors $\dot{\underline{x}}(t)$ als Funktion des aktuellen Zustands $\underline{x}(t)$ sowie eines Eingangsvektors $\underline{u}(t)$. Es handelt sich um eine vektorielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Die (messbaren) Ausgangsgrößen werden im Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ zusammengefasst. Die *Ausgangsgleichung* bestimmt $\underline{y}(t)$ auf Basis des aktuellen Zustands $\underline{x}(t)$ sowie ggf. des Eingangsvektors $\underline{u}(t)$. Die Ausgangsgleichung ist eine algebraische Gleichung.

Systemdarstellung

Zustandsdifferentialgleichung: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$

Ausgangsgleichung: $\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$

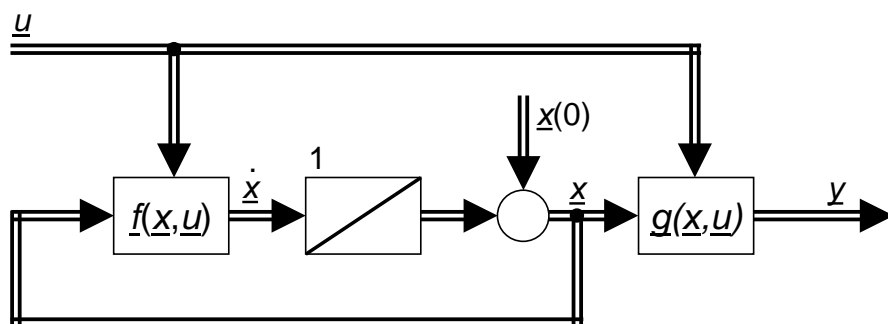
mit folgenden Größen:

Zustandsvektor $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ mit n : Anzahl der Zustände

Eingangsvektor $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ mit m : Anzahl der Eingänge

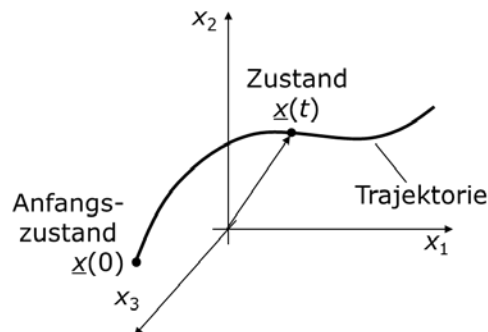
Ausgangsvektor $\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$ mit p : Anzahl der Ausgänge

Blockschaltbild:



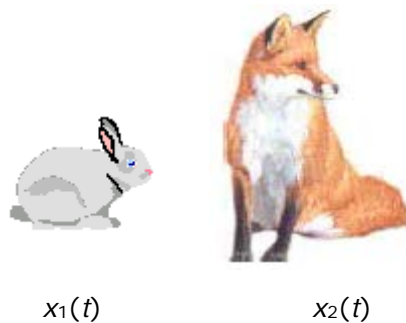
Geometrische Interpretation

Der Zustand $\underline{x}(t)$ des Systems bildet einen Punkt im n -dimensionalen *Zustandsraum*. Beginnend im Anfangszustand $\underline{x}(0)$ wandert dieser Zustandspunkt mit fortschreitender Zeit t und schreibt eine Trajektorie im Zustandsraum. Dies ist nachfolgend für den Fall $n=3$ skizziert:



Beispiel 1-1: Modell einer Räuber-Beute-Beziehung

Als sehr einfaches Modell eines ökologischen Systems soll eine Räuber-Beute-Beziehung beschrieben werden. Mit $x_1(t)$ wird die Zahl der Hasen (Beutetiere) zum Zeitpunkt t bezeichnet, $x_2(t)$ entspricht der Zahl der Füchse (Räuber).



Die Anzahl der Geburten pro Zeit der Hasen ist proportional zum Bestand (Geburtenrate a_1). Ebenso ist die Zahl der natürlichen Tode proportional zum Bestand (natürliche Todesrate b_1). Zusätzlich werden Hasen von den Füchsen getötet, diese Zahl ist proportional zum Produkt der Bestände von Hasen bzw. Füchsen (Todesrate durch Räuber c_1). Die Bilanzierung des Bestands der Hasen ergibt:

$$\dot{x}_1(t) = (a_1 - b_1) \cdot x_1(t) - c_1 \cdot x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Die Zahl der Geburten pro Zeit der Füchse ist nahrungsabhängig: Diese Zahl ist proportional zum Produkt der Bestände von Hasen bzw. Füchsen (nahrungsabhängige Geburtenrate a_2). Wie bei den Hasen ist auch die Zahl der natürlichen Tode proportional zum Bestand (natürliche Todesrate b_2). Die Bilanzierung des Bestands der Füchse ergibt:

$$\dot{x}_2(t) = a_2 \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - b_2 \cdot x_2(t)$$

Beide Gleichungen, die auch als Lotka-Volterra-Gleichungen bekannt sind, bilden gemeinsam die Zustands-Differenzialgleichung des Systems. Das System ist nichtlinear aufgrund der multiplikativen Terme $x_1(t) \cdot x_2(t)$.

Für eine numerische Simulation eignen sich folgende Werte:

Hasen	Füchse
$a_1 = 0,05$	$a_2 = 0,0001$
$b_1 = 0,02$	$b_2 = 0,01$
$c_1 = 0,0005$	
$x_1(0) = 100$	$x_2(0) = 20; 60; 100$

Numerische Simulation

Ein im Allgemeinen nichtlineares dynamisches System ist durch die Zustandsdifferenzialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

und den Anfangswert $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ definiert.

Von diesem Anfangswert ausgehend soll ein numerisches Verfahren den Zustandspunkt für nachfolgende diskrete Zeitpunkte t_1, t_2, t_3, \dots näherungsweise bestimmen.

Mit Hilfe eines Einschrittverfahrens kann eine Näherung $\tilde{\underline{x}}(t_i)$ des Zustandspunktes rekursiv bestimmt werden:

$$\tilde{\underline{x}}(t_{i+1}) = \tilde{\underline{x}}(t_i) + h \cdot \underline{\Phi}(\tilde{\underline{x}}(t_i), \underline{u}(t_i), h)$$

mit Zeitschrittweite h zwischen den Zeitpunkten t_{i+1} und t_i sowie der Verfahrensfunktion $\underline{\Phi}$.

Je nach der Ordnung p des gewählten Verfahrens bestimmt sich die Verfahrensfunktion in folgender Weise:

$p=1$: Verfahren von Euler

$$\underline{\Phi}(\underline{x}, \underline{u}, h) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

$p=2$: Verfahren von Heun:

$$\underline{\Phi}(\underline{x}, \underline{u}, h) = \frac{1}{2} [\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{f}(\underline{x} + h \cdot \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}), \underline{u})]$$

$p=4$: Verfahren von Runge-Kutta:

$$\underline{\Phi}(\underline{x}, \underline{u}, h) = \frac{1}{6} \cdot \underline{k}_1 + \frac{2}{6} \cdot \underline{k}_2 + \frac{2}{6} \cdot \underline{k}_3 + \frac{1}{6} \cdot \underline{k}_4$$

mit

$$\underline{k}_1 = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

$$\underline{k}_2 = \underline{f}(\underline{x} + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{k}_1, \underline{u})$$

$$\underline{k}_3 = \underline{f}(\underline{x} + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{k}_2, \underline{u})$$

$$\underline{k}_4 = \underline{f}(\underline{x} + h \cdot \underline{k}_3, \underline{u})$$

Beispiel 1-1 (Fortsetzung): Simulation des Modells Räuber-Beute-Beziehung

Implementierung des Euler-Verfahrens für das Beispielsystem in *Matlab*:

```
% Systemkonstanten:
a1 = 0.05;      % Geburtenrate Hasen
b1 = 0.02;      % nat. Todesrate Hasen
c1 = 0.0005;    % Todesrate durch Räuber Hasen
a2 = 0.0001;    % beuteabh. Geburtenrate Füchse
b2 = 0.01;      % nat. Todesrate Füchse

% Konstanten Simulation:
h = 0.1;        % Zeitschrittweite
tmax = 410;     % Ende der Simulation

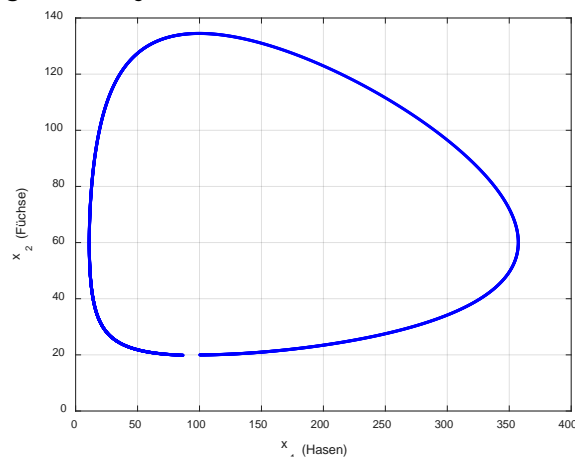
% Anfangsbedingung des Zustandsvektors:
x = [100 20]';  % [Hasen Füchse]' z.B. [100 20]', [100 60]', [100 100]'

% Definition der Verfahrensfunktion (Euler):
f = @(x) [ (a1-b1)*x(1)-c1*x(1)*x(2)
           a2*x(1)*x(2)-b2*x(2) ];

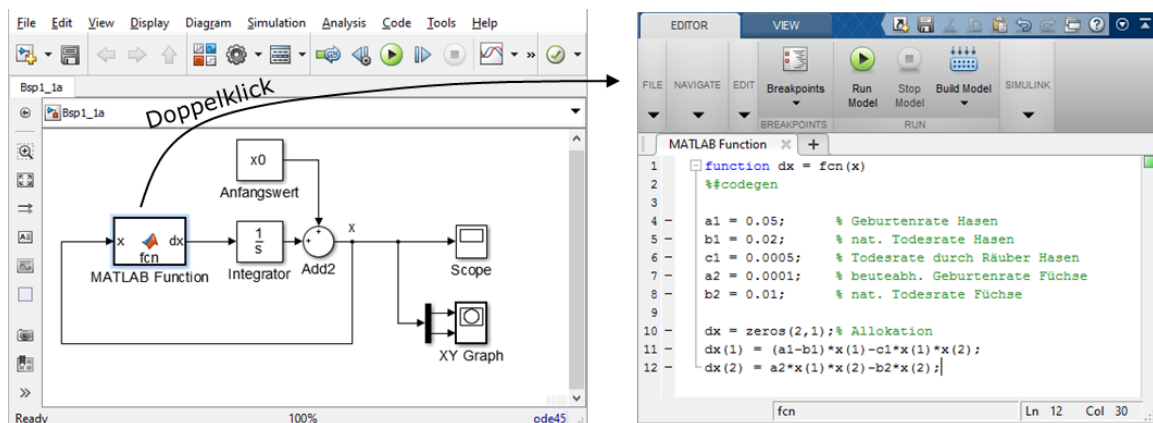
% Simulation über Zeit:
for t=0:h:tmax
    x = x + h * f(x);          % Rekursion Einschrittverfahren
    plot(x(1),x(2),'b.'), hold on
end

xlabel('x_1 (Hasen)'), ylabel('x_2 (Füchse)'), grid
```

Damit lässt sich die folgende Trajektorie in der Zustandsebene berechnen:



Alternativ kann das Blockschaltbild in Zustandsraum-Darstellung (entsprechend Seite 1-1, unten) in *Simulink* implementiert werden:



Das Simulationsverfahren kann in den Einstellungen unter „Solver“ gewählt werden.

1.2 Lineare Systeme

Auch lineare Systeme werden durch die Zustandsdifferentialgleichung und die Ausgangsgleichung beschrieben. Der Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ und der Eingangsvektor $\underline{u}(t)$ gehen jeweils linear in die Gleichungen ein.

Systemdarstellung

Zustandsdifferenzialgleichung: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$

Ausgangsgleichung: $\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$

mit folgenden Größen:

Zustandsvektor $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ mit n : Anzahl der Zustände

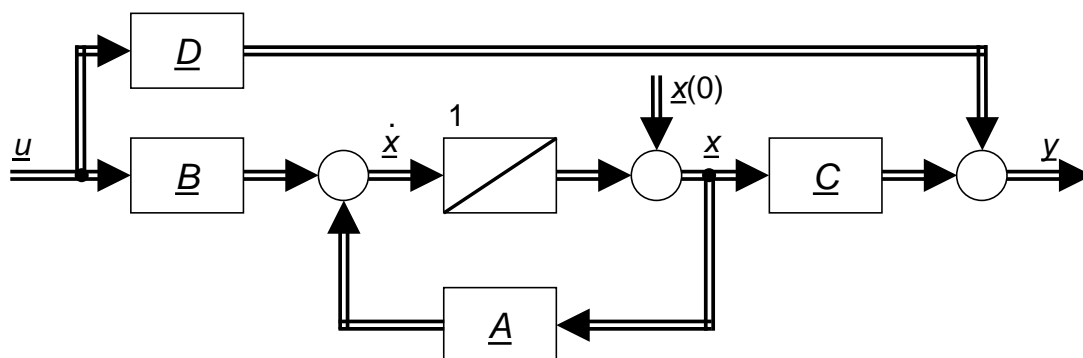
Eingangsvektor $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ mit m : Anzahl der Eingänge

Ausgangsvektor $\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$ mit p : Anzahl der Ausgänge

Systemmatrix $\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, Eingangsmatrix $\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$

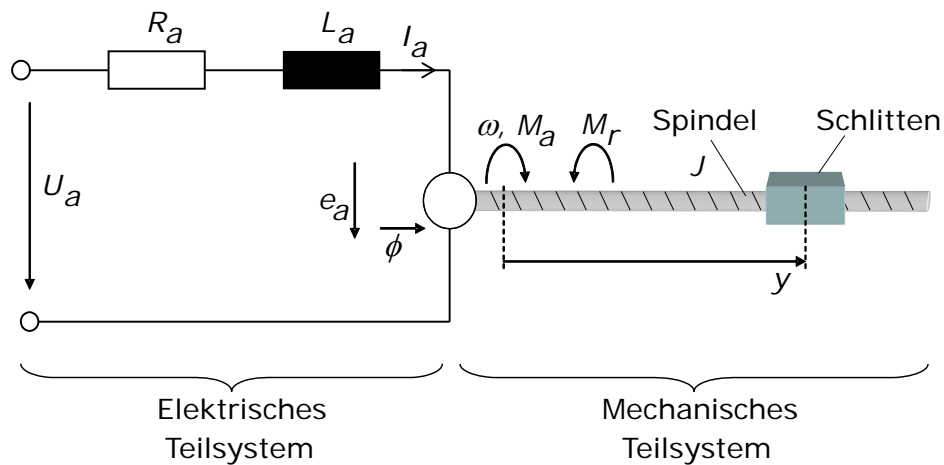
Ausgangsmatrix $\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}$, Durchgangsmatrix $\underline{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$

Blockschaltbild



Beispiel 1-2: Modell einer Maschinenachse

Eine fremderregte Gleichstrommaschine bewegt über einen Spindelvortrieb den Schlitten einer Maschinenachse, siehe Bild:



Aus den physikalischen Gesetzen des Systems soll ein dynamisches Modell in Zustandsraum-Darstellung gewonnen werden. Dies kann später z.B. die Grundlage für einen modellbasierten Reglerentwurf sein.

- Mittels der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich die Spannung $U_a(t)$ im Ankerkreis der Gleichstrommaschine als Funktion des Stroms $I_a(t)$ bestimmen:

$$U_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + e_a(t)$$

Darin ist $R_a = 20 \, \Omega$ der Widerstand und $L_a = 200 \, \text{mH}$ die Induktivität des Ankerkreises¹.

- Dreht sich der Antrieb, wird die Spannung $e_a(t)$ induziert:

$$e_a(t) = c \phi \omega(t)$$

Für das Produkt aus Maschinenkonstante und Hauptfluss der Fremderregung gilt $c \phi = 15 \, \text{Nm/A} = 15 \, \text{Vs}$.

- Bei der verlustfreien Maschine ist dies auch der Proportionalitätsfaktor zwischen Ankerstrom und mechanischem Antriebsmoment:

$$M_a(t) = c \phi I_a(t)$$

- Dem Antriebsmoment steht ein Reibmoment gegenüber, das proportional zur Winkelgeschwindigkeit angenommen wird

$$M_r(t) = K_m \omega(t)$$

mit der Reibkoeffizienten $K_m = 2,0 \, \text{Nms}$.

- Die Momentenbilanz ist

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_a(t) - M_r(t)$$

mit dem Trägheitsmoment $J = 10 \, \text{kg m}^2$.

¹ Entsprechend der DC-Maschine IC 410 der Firma ABB (Nennwerte: $U_N = 400 \, \text{V}$, $I_N = 3 \, \text{A}$, $P_N = 1 \, \text{kW}$) (gerundete Werte).

- Mit der Steigung $K_s = 0,005 \text{ m/rad}$ der Spindel gilt schließlich für die Position des Schlittens:

$$y(t) = K_s \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Wählt man als Zustandsvektor

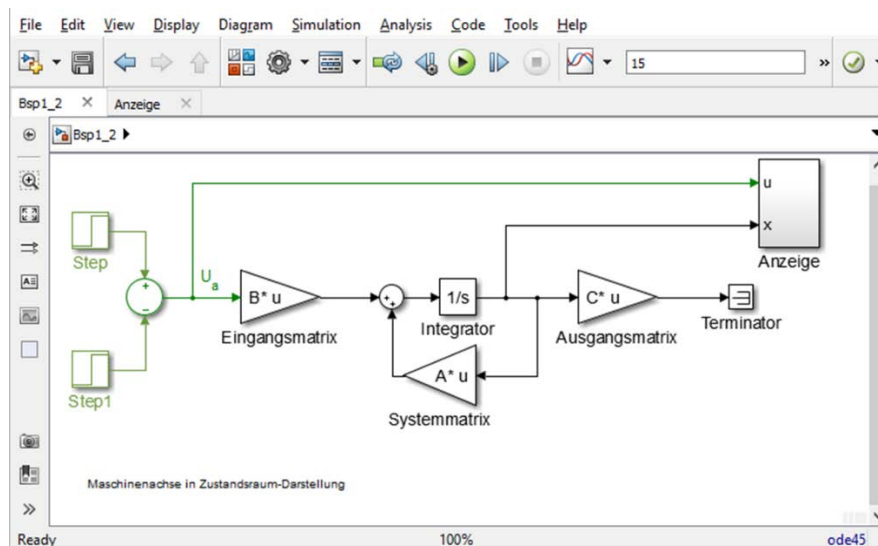
$$\underline{x}(t) := \begin{bmatrix} I_a(t) \\ \omega(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

und wählt die Position des Schlittens als Messgröße, so lässt sich aus den zuvor gewonnen Gleichungen folgende lineare Zustandsraum-Darstellung entwickeln:

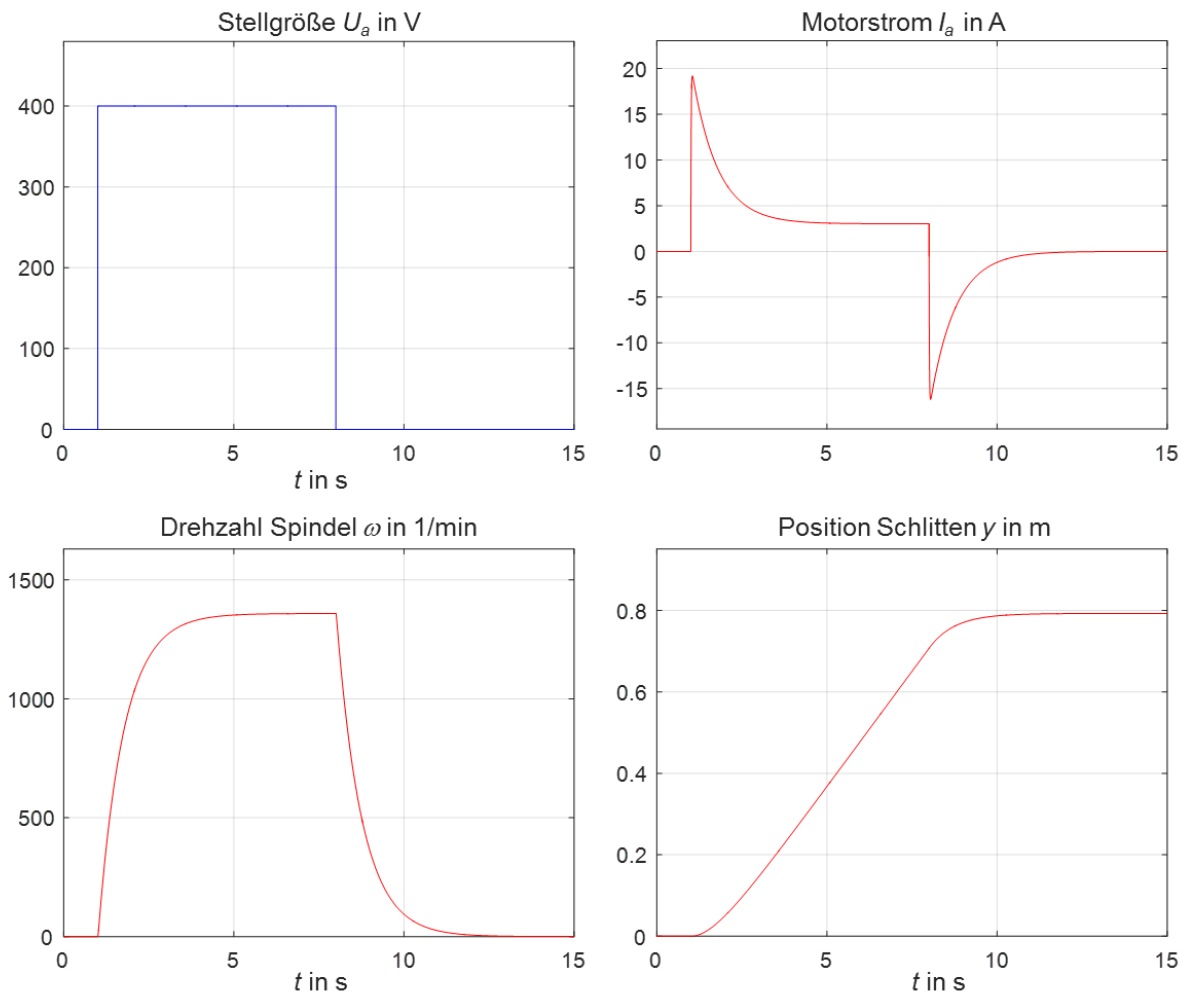
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{c\phi}{L_a} & 0 \\ \frac{c\phi}{J} & -\frac{K_m}{J} & 0 \\ 0 & K_s & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = [0 \ 0 \ 1]; \quad \underline{D} = [0]$$

Beispiel 1-2 (Fortsetzung): Numerische Simulation der Maschinenachse

Das System in Zustandsraum-Darstellung lässt sich (entsprechend Seite 1-5, unten) in Simulink implementieren:



Für das System der Maschinenachse mit den oben bestimmten Matrizen \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} ist nachfolgend die Antwort der drei Zustandsgrößen $I_a(t)$, $\omega(t)$ und $y(t)$ auf ein rechteckförmiges Stellsignal $U_a(t)$ dargestellt.



Bei linearen Systemen ist die numerische Simulation nicht der effizienteste Weg, um Trajektorien zu bestimmen. Die Trajektorie kann auch als exakte Lösung der Zustandsdifferentialgleichung direkt berechnet werden, siehe Abschnitt 1.5.

1.3 Übersicht: Aufstellen der Zustandsdifferentialgleichung

Um die in den nachfolgenden Kapiteln dargestellten Methoden nutzen zu können, muss das Modell zuerst immer in Zustandsraum-Darstellung vorliegen.

Dabei ist die Wahl der Zustände nicht eindeutig, so könnte beispielsweise die Reihenfolge der Einträge im Zustandsvektor \underline{x} permutiert werden (mehr dazu in Abschnitt 1.6). Es ist aber völlig ausreichend, eine Zustandsraum-Darstellung zu finden.

Ein häufig geschickter Ansatz ist es, die „Speicher“ in einem System zu finden und deren Ausgänge als Zustände x_i einzuführen. Diese beschreiben den Füllstand der Speicher und „merken“ sich so also deren Zustand.

Das Vorgehen zum Aufstellen der Zustandsraum-Darstellung wird nachfolgend für einige häufige Fälle zusammengefasst.

Blockschaltbild

Ansatz: Jedes I-Glied (und jedes PT₁-Glied) „speichert“ einen Zustand!

Vorgehensweise:

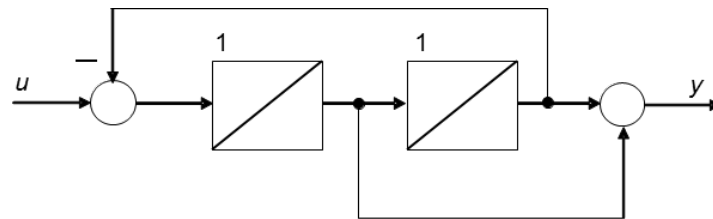
1. Eventuell vorhandene PT₂-Glieder müssen zerlegt werden.
2. Alle Ausgänge von I- und PT₁-Gliedern werden als Zustände eingeführt.
3. Man geht gegen die Signalfflussrichtung durch das Blockschaltbild und liest die Funktionszusammenhänge (in Abhängigkeit der bekannten Zustände $x_i(t)$ und Eingangsgrößen $u_i(t)$) ab.
4. Die Gleichungen in vektorieller Schreibweise

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t), \quad y(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

zusammenfassen.

Beispiel 1-3

Ein dynamisches System ist durch nachstehendes Blockschaltbild gegeben.



Führt man den Ausgang des linken Integrators als x_1 und den des rechten als x_2 ein, erhält man folgende Zustandsraum-Darstellung:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Elektrische Systeme

In einem linearen elektrischen Netzwerk finden sich die folgenden drei Bauteile:

1. *Ohmscher Widerstand*: Beschreibt eine statische Strom-Spannungs-Beziehung. Es ist also kein „Speicher“ und benötigt keinen Zustand.
2. *Kondensator*: „Speichert“ die am Bauteil anliegende Spannung, daher wird die Kondensator-Spannung als Zustand eingeführt.
3. *Spule*: „Speichert“ den durch sie fließenden Strom, also wird der Spulenstrom als Zustand eingeführt.

Im elektrischen Teil des Beispiels 1.2 findet sich eine Spule. Entsprechend wurde der Spulenstrom I_a als Zustand x_1 eingeführt.

Mechanische Systeme

Mechanische Systeme können im Prinzip auf Basis des 2. Newtonschen Bewegungsgesetzes

$$\underline{F}(t) = m \underline{\ddot{x}}(t)$$

modelliert werden. Dies führt auf lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Pro Bewegungsfreiheitsgrad müssen daher zwei Zustände gespeichert werden. Ein guter Ansatz ist, für jeden Bewegungsfreiheitsgrad seine *Position* und seine *Geschwindigkeit* als Zustand einzuführen.

Das gilt analog auch für rotatorische Systeme, in denen *Winkel* und *Winkelgeschwindigkeit* als Zustand eingeführt werden können.

Im mechanischen Teil des Beispiels 1.2 bildet die Rotation der Spindel einen Bewegungsfreiheitsgrad, und es können der Winkel $\varphi(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ als Zustände eingeführt werden. Im Beispiel wurde anstelle von $\varphi(t)$ die proportionale Spindelposition $y(t)$ verwendet. Dies sind die Zustände $\omega = x_2$ und $y = x_3$ des Beispiels.

Differentialgleichung oder Übertragungsfunktion

Ein System, das als Differentialgleichung gegeben ist, lässt sich am einfachsten in *Regelungs- oder Beobachter-Normalform* überführen, da die Koeffizienten der Differentialgleichung direkt abgelesen werden können. Dies wird erst in Kapitel 3 und 4 eingeführt.

1.4 Linearisierung

Zielsetzung

Für lineare Systeme kann man auf eine gut entwickelte Methodik zurückgreifen, die auch Gegenstand dieser Vorlesung ist – während die Behandlung nichtlinearer Systeme aufwändiger und nicht in geschlossener Weise möglich ist. Daher ist es sinnvoll, ein nichtlineares System zu *linearisieren*, um darauf lineare Methoden anwenden zu können.

Die Linearisierung kann in drei Schritte gegliedert werden. Zuerst bestimmt man einen *Arbeitspunkt* (oder *Ruhelage*), nun verschiebt man die Koordinaten in Zustandsraum in die Ruhelage und linearisiert schließlich das System in diesem Arbeitspunkt.

In einer Umgebung um den Arbeitspunkt herum wird das nichtlineare System gut durch das linearisierte System beschrieben. Realisiert man z.B. eine Regelung, die den Zustand des Systems immer in dieser Umgebung des Arbeitspunkt hält, ist die Verwendung des linearen Modells (auch zum Entwurf dieses Reglers) gerechtfertigt. Aber Achtung, es kann prinzipiell auch das Umgekehrte passieren: Entfernt sich der Zustand des Systems (z.B. durch eine starke Störung) aus der Umgebung des Arbeitspunkts, passt Linearisierung und der daraus entworfene Regler nicht mehr, und das Gesamtsystem wird möglicher Weise instabil.

1. Schritt: Arbeitspunkt bestimmen

Als Arbeitspunkt soll ein Zustand des Systems gewählt werden, in dem das System später betrieben werden soll. Wir setzen voraus, dass der Arbeitspunkt eine Ruhelage ist, in dem sich der Zustand $\underline{x}(t)$ nicht zeitlich verändert. Aus der Zustandsdifferentialgleichung wird dann:

$$\underline{0} = \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{u}_0)$$

Der Index „0“ bezeichnet die Größen in der Ruhelage. Man gibt konstante Eingangsgrößen \underline{u}_0 vor und kann mit dieser Gleichung den zugehörigen Zustand \underline{x}_0 bestimmen, in dem sich das System in Ruhe befindet. Der zugehörige Arbeitspunkt des Ausgangs ist:

$$\underline{y}_0 = \underline{g}(\underline{x}_0, \underline{u}_0)$$

2. Schritt: Verschiebung in den Arbeitspunkt

Für Zustand, Ein- und Ausgang werden die Abweichungen vom Arbeitspunkt eingeführt (jeweils mit Δ bezeichnet):

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \underline{\Delta x}(t), \quad \underline{u}(t) = \underline{u}_0 + \underline{\Delta u}(t), \quad \underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \underline{\Delta y}(t)$$

Der Ursprung des Zustandsraumes zu $\underline{\Delta x}$ liegt dadurch in der zuvor bestimmten Ruhelage.

3. Schritt: Linearisierung im Arbeitspunkt

Mit den Abweichungen vom Arbeitspunkt wird die Zustandsdifferentialgleichung und die Ausgangsgleichung in Taylor-Reihen entwickelt und die Entwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta \dot{x}}(t) &= \underbrace{f(\underline{x}_0, \underline{u}_0)}_{\underline{0}} + \underbrace{\left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}}_{\underline{A}} \underline{\Delta x}(t) + \underbrace{\left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}}_{\underline{B}} \underline{\Delta u}(t) \\ \underline{y}_0 + \underline{\Delta y}(t) &= \underbrace{g(\underline{x}_0, \underline{u}_0)}_{\underline{y}_0} + \underbrace{\left. \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}}_{\underline{C}} \underline{\Delta x}(t) + \underbrace{\left. \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}}_{\underline{D}} \underline{\Delta u}(t) \end{aligned}$$

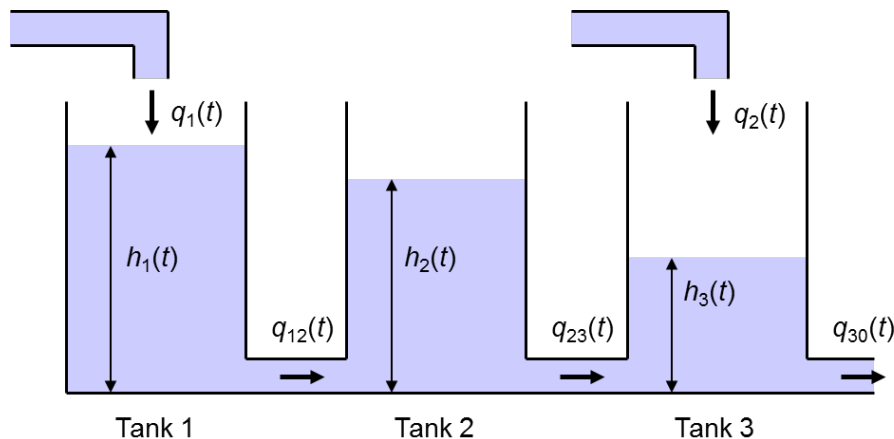
Darin sind die Ableitungen *Jacobi-Matrizen* mit folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} \underline{A} = \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}, \quad \underline{B} = \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} \\ \underline{C} = \left. \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}, \quad \underline{D} = \left. \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} \end{aligned}$$

Mit \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} ist die gesuchte lineare Zustandsraum-Darstellung definiert.

Beispiel 1-4: System aus 3 Tanks

Entsprechend nachstehendem Bild besteht das System aus 3 Tanks, die miteinander verkoppelt sind. Die Tanks 1 und 3 besitzen je einen Zulauf, ein Ablauf findet sich an Tank 3.



Ermittlung der Zustandsdifferentialgleichung

- Ansatz für die physikalische Modellierung ist eine Volumenbilanz für jeden der 3 Tanks. Mit einer einheitlichen Querschnittsfläche A für alle Tanks gilt:

$$\text{Tank 1:} \quad \frac{d}{dt} h_1(t) = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_{12}(t))$$

$$\text{Tank 2:} \quad \frac{d}{dt} h_2(t) = \frac{1}{A} (q_{12}(t) - q_{23}(t))$$

$$\text{Tank 3:} \quad \frac{d}{dt} h_3(t) = \frac{1}{A} (q_2(t) + q_{23}(t) - q_{30}(t))$$

- Für die Ausflussgeschwindigkeit gilt der nichtlineare Zusammenhang (Gesetz von Torricelli):

$$v_{ij}(t) = \sqrt{2g(h_i(t) - h_j(t))} \quad \text{für } h_i > h_j$$

Mit der Querschnittsfläche des Rohres a ist das Ausflussvolumen pro Zeit:

$$q_{ij}(t) = a\sqrt{2g(h_i(t) - h_j(t))} \quad \text{für } h_i > h_j$$

- Setzt man dies in die Bilanzgleichungen ein (mit $h_0 = 0$ am Abfluss), erhält man die nichtlineare Zustandsdifferentialgleichung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} (q_1(t) - a\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))}) \\ \frac{1}{A} (a\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - a\sqrt{2g(h_2(t) - h_3(t))}) \\ \frac{1}{A} (q_2(t) + a\sqrt{2g(h_2(t) - h_3(t))} - a\sqrt{2g(h_3(t))}) \end{bmatrix}$$

mit $\underline{x} = [h_1 \ h_2 \ h_3]^T$ und $\underline{u} = [q_1 \ q_2]^T$.

Die (dimensionslosen) Parameter seien $A = 3,0$; $a = 0,3$ und $g = 9,81$.

Schritt 1: Arbeitspunkt bestimmen

- Vorgegeben wird am Eingang des Systems $\underline{u}_0 = [q_{1,0} \ q_{2,0}]^T = [a\sqrt{g} \ 0]^T$. Nun wird entsprechend \underline{x}_0 für die Ruhelage benötigt.
- Stationär muss gelten:

$$\text{Tank 1:} \quad 0 = \frac{1}{A} (q_{1,0} - a\sqrt{2g(h_{1,0} - h_{2,0})}) \Rightarrow h_{1,0} - h_{2,0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tank 2:} \quad 0 = \frac{1}{A} (a\sqrt{2g(h_{1,0} - h_{2,0})} - a\sqrt{2g(h_{2,0} - h_{3,0})}) \Rightarrow h_{2,0} = \frac{2}{3} h_{1,0}$$

$$\text{Tank 3:} \quad 0 = \frac{1}{A} (q_{2,0} + a\sqrt{2g(h_{2,0} - h_{3,0})} - a\sqrt{2g(h_{3,0})}) \Rightarrow h_3 = \frac{1}{2} h_{2,0}$$

- Die Lösung ist $\underline{x}_0 = [1,5 \ 1,0 \ 0,5]^T$.

Schritt 2: Verschiebung in den Arbeitspunkt

$$\underline{\Delta x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_0, \quad \underline{\Delta u}(t) = \underline{u}(t) - \underline{u}_0$$

Schritt 3: Linearisierung im Arbeitspunkt

$$\underline{A} = \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} = \frac{a g}{A} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2g(h_1 - h_2)}} & \frac{1}{\sqrt{2g(h_1 - h_2)}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2g(h_1 - h_2)}} & \frac{-1}{\sqrt{2g(h_1 - h_2)}} + \frac{-1}{\sqrt{2g(h_2 - h_3)}} & \frac{1}{\sqrt{2g(h_2 - h_3)}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2g(h_2 - h_3)}} & \frac{-1}{\sqrt{2g(h_2 - h_3)}} + \frac{-1}{\sqrt{2g(h_3)}} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, \underline{u}_0}$$

$$= 0,1 \sqrt{g} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} = \frac{1}{3,0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ist die lineare Zustandsdifferentialgleichung $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$ bestimmt.

1.5 Berechnung von Trajektorien

Bei linearen Systemen ist man nicht auf die numerische Simulation (siehe Abschnitt 1.1) angewiesen, sondern kann die Trajektorie $\underline{x}(t)$ auch direkt aus der Lösung der Zustandsdifferentialgleichung ermitteln.

Lösung der linearen Zustandsdifferentialgleichung

Ein lineares, zeitinvariantes dynamisches System

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$$

mit dem Anfangswert $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ besitzt die Zustandstrajektorie $\underline{x}(t)$ die Lösung:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A} t} \underline{x}_0}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

Der Verlauf der Ausgangsgröße kann daraus mit der Ausgangsgleichung bestimmt werden:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

Transitionsmatrix

Darin wird der Term $\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A} t}$ als *Transitionsmatrix* bezeichnet. Sie charakterisiert den Übergang (die „Transition“) von einem Start- in einen Endzustand (ohne Anregung). Damit lautet die Lösung für die Zustandstrajektorie:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \underline{x}_0 + \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau$$

Für das Rechnen mit der Transitionsmatrix gilt:

1. Anfangswert: $\underline{\Phi}(0) = \underline{I}$
2. Produkt: $\underline{\Phi}(t_1) \underline{\Phi}(t_2) = \underline{\Phi}(t_1 + t_2)$
3. Inverse: $\underline{\Phi}(t) \underline{\Phi}(-t) = \underline{I}$ und folglich: $\underline{\Phi}(t) = \underline{\Phi}^{-1}(-t)$
4. Differentiation: $\frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} = \underline{A} e^{\underline{A}t} = e^{\underline{A}t} \underline{A}$

Zur Berechnung der Transitionsmatrix muss die *Matrixexponentialfunktion* ausgewertet werden. Dies ist auf mehrere Weise möglich:

1. Durch Erweiterung die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion auf Matrizen:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\underline{A}^3 t^3}{3!} + \dots$$

2. Durch die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung im Bildbereich:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \right\} \quad \text{falls } (s \underline{I} - \underline{A}) \text{ invertierbar ist}$$

3. Durch Transformation auf Jordan-Normalform (s. Abschnitt 2.1): Es gilt:

$$e^{\underline{A}t} = e^{\begin{bmatrix} s_1 t & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & s_n t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{s_n t} \end{bmatrix}$$

4. Numerisch in Matlab mit der Funktion `expm` (nicht `exp`!)

Impulsantwort

Für die Impulsantwort auf $\underline{u}(t) = [\delta(t) \dots \delta(t)]^T$ mit $\underline{D} = \underline{0}$ gilt:

$$\underline{g}(t) = \underline{C} \underline{\Phi}(t) \underline{B}$$

Die Impulsantwort ist für Mehrgrößensysteme eine Matrix. Das Element $g_{ji}(t)$ enthält die Impulsantwort auf einen Impuls am Eingang u_i am Ausgang $y_j(t)$.

Sprungantwort

Für die Sprungantwort auf $\underline{u}(t) = [\sigma(t) \dots \sigma(t)]^T$ mit $\underline{D} = \underline{0}$ gilt entsprechend:

$$\underline{h}(t) = \int_0^t \underline{C} \underline{\Phi}(\tau) \underline{B} d\tau$$

Das Element $h_{ji}(t)$ enthält die Sprungantwort auf einen Sprung am Eingang u_i am Ausgang $y_j(t)$. Falls die Systemmatrix \underline{A} invertierbar ist, lässt sich die Sprungantwort auch geschlossen angeben:

$$\underline{h}(t) = \underline{C} \underline{A}^{-1} [\underline{\Phi}(t) - \underline{I}] \underline{B}$$

Beispiel 1-5: Sprungantwort

Für das schwingungsfähige System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

soll die Sprungantwort bestimmt werden.

Die Transitionsmatrix ist

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Damit in die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung einsetzen (für Einheitssprung mit verschwindenden Anfangswerten gilt $\underline{x}_0 = \underline{0}$ und $u(\tau)=1$) ergibt:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \underline{x}_0 + \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{B} u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{bmatrix} \Big|_0^t = \begin{bmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix} \quad \text{für } t \geq 0$$

Mit der Ausgangsgleichung erhält man die Sprungantwort:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) = 1 - \cos t \quad \text{für } t \geq 0$$

Systemdarstellung im Bildbereich

Für ein lineares, zeitinvariantes dynamisches System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} u(t), \quad y(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} u(t)$$

lautet die entsprechende Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}.$$

Sie verallgemeinert die von Eingrößensystemen her bekannte skalare Übertragungsfunktion $G(s)$ für Mehrgrößensysteme. Die Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ verknüpft den m -dimensionalen Eingangsvektor $\underline{U}(s)$ mit dem p -dimensionalen Ausgangsvektor $\underline{Y}(s)$:

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}(s) \underline{U}(s)$$

mit

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}.$$

Das Element $G_{ji}(s)$ der Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ ist eine Übertragungsfunktion, welche die Wirkung des Eingangssignals $U_i(s)$ auf den Ausgang $Y_j(s)$ beschreibt.

1.6 Transformation

Ein System in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) , \quad \underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

kann durch die Ähnlichkeitstransformation des Zustandsvektors

$$\bar{\underline{x}}(t) = \underline{T} \cdot \underline{x}(t)$$

in ein System

$$\dot{\bar{\underline{x}}}(t) = \bar{\underline{A}} \bar{\underline{x}}(t) + \bar{\underline{B}} \underline{u}(t) , \quad \underline{y}(t) = \bar{\underline{C}} \bar{\underline{x}}(t) + \bar{\underline{D}} \underline{u}(t)$$

umgewandelt werden. Dazu muss die Transformationsmatrix \underline{T} invertierbar sein.

Beide Systeme sind äquivalent, falls gilt:

$$\bar{\underline{A}} = \underline{T} \underline{A} \underline{T}^{-1} , \quad \bar{\underline{B}} = \underline{T} \underline{B} , \quad \bar{\underline{C}} = \underline{C} \underline{T}^{-1} , \quad \bar{\underline{D}} = \underline{D}$$

Dies kann gezeigt werden, in dem $\underline{x}(t) = \underline{T}^{-1} \cdot \bar{\underline{x}}(t)$ in der originalen Darstellung substituiert wird.

Die *Eigenschaften* eines Systems sollten unabhängig von der speziellen Wahl des Zustandsvektors und daher invariant gegenüber einer Transformation sein. Tatsächlich bleiben folgende Eigenschaften bei einer Transformation erhalten (in Vorgriff auf Kapitel 2):

- Ein-Ausgangsverhalten: Die Wirkung von \underline{u} auf \underline{y} hängt nicht von der speziellen Wahl des Zustandsvektors ab.
- Stabilität
- Steuerbarkeit
- Beobachtbarkeit

Die Transformationsbeziehungen weiterer beschreibender Größen eines Systems im Zustandsraum werden hier (im Vorgriff) zusammengestellt:

- Eigenwerte: $\bar{s}_i = s_i$ für $i=1, \dots, n$
- Transitionsmatrix: $\bar{\underline{\Phi}} = \underline{T} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{T}^{-1}$
- Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix: $\bar{\underline{Q}}_S = \underline{T} \cdot \underline{Q}_S$
- Kalmansche Beobachtbarkeitsmatrix: $\bar{\underline{Q}}_B = \underline{Q}_B \cdot \underline{T}^{-1}$
- Gramsche Steuerbarkeitsmatrix: $\bar{\underline{W}}_S = \underline{T} \cdot \underline{W}_S \cdot \underline{T}^T$
- Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix: $\bar{\underline{W}}_B = (\underline{T}^T)^{-1} \cdot \underline{W}_B \cdot \underline{T}^{-1}$
- Hankel Singulärwerte: $\bar{\sigma}_i = \sigma_i$ für $i=1, \dots, n$

2 Analyse von Systemeigenschaften

2.1 Jordan-Normalform (JNF)

Der Übersichtlichkeit wegen wird zunächst vorausgesetzt, dass die Systemmatrix \underline{A} nur einfache Eigenwerte besitzt. Die Erweiterung auf den Fall mehrfacher Eigenwerte wird in Abschnitt 2.6 vorgestellt.

Die Systemmatrix $\underline{\bar{A}}$ eines Systems in Jordan-Normalform (JNF) besitzt Diagonalstruktur:

$$\frac{d}{dt} \underline{\bar{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{A}}} \cdot \underline{\bar{x}}(t) + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = \underline{\bar{C}} \underline{\bar{x}}(t) + \underline{\bar{D}} \underline{u}(t)$$

Die Diagonalelemente s_i sind die Eigenwerte der Systemmatrix.

Transformation

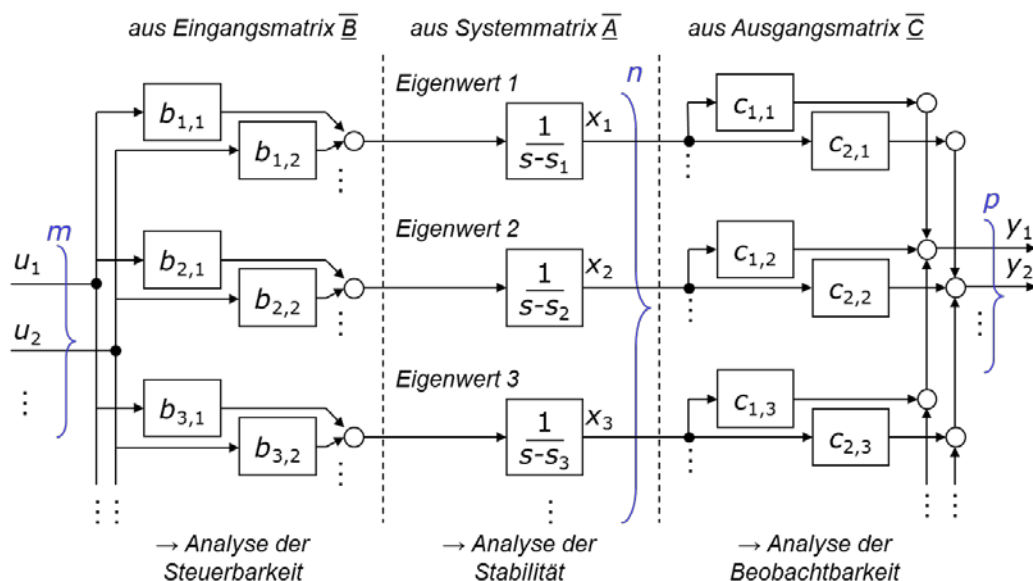
Um ein System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

(mit nur einfachen Eigenwerten von \underline{A}) in JNF zu transformieren, gehen Sie wie folgt vor:

1. Zuerst werden alle *Eigenwerte* s_i der Systemmatrix \underline{A} als Lösungen der Gleichung $|\underline{A} - s \underline{I}| = 0$ bestimmt.
2. Zu jedem Eigenwert s_i wird der zugehörige *Eigenvektor* \underline{v}_i aus $(\underline{A} - s_i \underline{I}) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$ bestimmt. Er enthält einen skalaren Freiheitsgrad.
3. Für die *inverse Transformationsmatrix* gilt: $\underline{T}^{-1} = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \dots \quad \underline{v}_n]$

Blockschaltbild



In JNF sind also die Zustände x_1, \dots, x_n voneinander entkoppelt. In dieser Form können Systemeigenschaften wie Stabilität (Abschnitt 2.2), Steuerbarkeit (Abschnitt 2.3) und Beobachtbarkeit (Abschnitt 2.4) besonders einfach analysiert werden.

Zusammenhang zur Übertragungsfunktion $G(s)$

Die Darstellung in JNF kann als eine Partialbruchzerlegung der zugehörigen Übertragungsfunktion interpretiert werden. Für ein System mit einem Eingang ($m = 1$), einem Ausgang ($p = 1$) und mit nur einfachen Eigenwerten gilt:

$$G(s) = c_{1,1} \frac{1}{s - s_1} b_{1,1} + c_{1,2} \frac{1}{s - s_2} b_{2,1} + \dots$$

Beispiel 2-1: Transformation auf JNF

Transformieren Sie das folgende System in JNF und zeichnen Sie das Blockschaltbild:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

2.2 Stabilität

	Stabilitätsdefinition	Stabilitätsbedingung für ein System in Zustandsraumdarstellung
(asymptotisch) stabil	Der Ausgang des nicht angeregten Systems klingt nach einer beliebigen Anfangsauslenkung asymptotisch auf null ab: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$	Falls alle Eigenwerte der Systemmatrix \underline{A} in der linken komplexen Ebene liegen.
Grenzstabil	Der Ausgang des nicht angeregten Systems bleibt nach einer beliebigen Anfangsauslenkung für wachsende Zeiten t in endlichen Grenzen: $\left \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \right \leq C < \infty$	Falls alle Eigenwerte der Systemmatrix \underline{A} in der linken komplexen Ebene oder auf der imaginären Achse liegen, wobei die Eigenwerte auf der imaginären Achse alle einfach sind.
instabil	Der Ausgang des nicht angeregten Systems strebt nach einer beliebigen Anfangsauslenkung mit wachsender Zeit t gegen Unendlich: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow \infty$	Falls mindestens ein Eigenwert der Systemmatrix \underline{A} in der rechten komplexen Ebene liegt oder ein mehrfacher Eigenwert auf der imaginären Achse vorhanden ist.

System in JNF

Die über die Stabilität entscheidenden Eigenwerte sind auf der Diagonalen der Systemmatrix \bar{A} sofort ablesbar. Das Gesamtsystem ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte in der linken komplexen Ebene liegen.

2.3 Steuerbarkeit**Definition**

Das System in der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \quad , \quad \underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

heißt steuerbar, wenn sein Zustandspunkt $\underline{x}(t)$ durch geeignete Wahl des Eingangsvektors $\underline{u}(t)$ in endlicher Zeit aus einem beliebigen Anfangszustand \underline{x}_0 in den Endzustand $\underline{0}$ bewegt werden kann.

Anschauliche Interpretation

Ein steuerbares System ist so strukturiert, dass man durch die Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ auf alle inneren Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ des Systems einwirken kann.

Sind im umgekehrten Fall Teile des Systems nicht durch Eingangsgrößen beeinflussbar, dann sind diese Systemteile nicht steuerbar. Diese können dann auch nicht von außen dynamisch beeinflusst werden.

Daher ist die Steuerbarkeit eines Systems die Voraussetzung, um einen Zustandsregler (siehe Kapitel 4) erfolgreich entwerfen zu können.

Kriterium nach Gilbert (für Systeme in JNF)

Die Steuerbarkeit lässt sich nur auf Basis der Eingangsmatrix \bar{B} bestimmen. Jeder separate Eigenwert muss durch mindestens einen Eingang ansteuerbar sein. Das Kriterium nach Gilbert lautet:

Das durch \bar{A} , \bar{B} bestimmte System in Jordan-Normalform mit einfachen Eigenwerten in \bar{A} ist genau dann steuerbar, wenn die Zeilenvektoren der Eingangsmatrix \bar{B} alle vom Nullvektor verschieden sind.

In JNF lässt sich ablesen, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind. Sind diese stabil, ist das System zumindest *stabilisierbar*.

Kriterium nach Kalman (für Systeme in beliebiger Form)

Die Steuerbarkeit eines Systems wird durch die Matrizen \underline{A} , \underline{B} bestimmt.

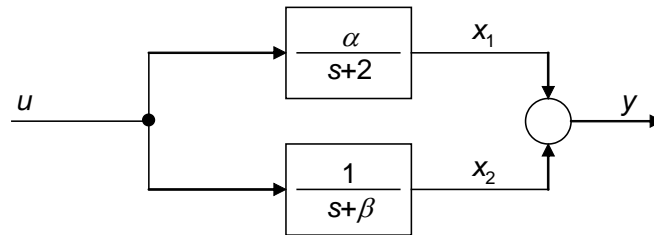
Es wird die Steuerbarkeitsmatrix \underline{Q}_s (mit n Zeilen und $n \cdot m$ Spalten) berechnet:

$$\underline{Q}_s = [\underline{B}, \underline{A} \underline{B}, \underline{A}^2 \underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1} \underline{B}]$$

Das System ist genau dann steuerbar, wenn \underline{Q}_s den Höchstrang n hat, also n linear unabhängige Spaltenvektoren besitzt.

Beispiel 2-2: Steuerbarkeit eines Systems

Für welche Werte α, β ist das folgende System steuerbar?

**2.4 Beobachtbarkeit****Definition**

Das System in der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

heißt beobachtbar, wenn man bei bekanntem $\underline{u}(t)$ aus der Messung von $\underline{y}(t)$ über eine endliche Zeitspanne den Anfangszustand \underline{x}_0 eindeutig ermitteln kann, ganz gleich, wo dieser liegt.

Anschauliche Interpretation

Ein beobachtbares System ist so strukturiert, dass man durch die Messung der Ausgangsgrößen $\underline{y}(t)$ in ihrem zeitlichen Verlauf (bei bekannten Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$) auf alle inneren Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ des Systems schließen kann.

Haben Teile des Systems keinerlei Wirkung auf die Ausgangsgrößen, dann sind diese Systemteile nicht beobachtbar. Damit können die Zustände dieser Systemteile nicht von außen geschätzt werden.

Daher ist die Beobachtbarkeit eines Systems die Voraussetzung, um einen Zustandsbeobachter (siehe Kapitel 5) erfolgreich entwerfen zu können.

Kriterium nach Gilbert (für Systeme in JNF)

Die Beobachtbarkeit lässt sich entsprechend nur auf Basis der Ausgangsmatrix $\overline{\underline{C}}$ bestimmen: Jeder separate Eigenwert muss über mindestens einen Ausgang messbar sein. Das Kriterium nach Gilbert lautet:

Das durch $\overline{\underline{A}}$, $\overline{\underline{C}}$ bestimmte System in Jordan-Normalform mit einfachen Eigenwerten in $\overline{\underline{A}}$ ist genau dann beobachtbar, wenn die Spaltenvektoren der Ausgangsmatrix in Jordan-Normalform $\overline{\underline{C}}$ alle vom Nullvektor verschieden sind.

JNF lässt sich ablesen, welche Eigenwerte nicht beobachtbar sind. Sind diese stabil, ist das System zumindest *ermittelbar* (*entdeckbar*).

Kriterium nach Kalman (für Systeme in beliebiger Form)

Die Beobachtbarkeit eines Systems wird durch die Matrizen \underline{A} , \underline{C} bestimmt.

Es wird die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{Q}_B (mit $n \cdot p$ Zeilen und n Spalten) berechnet:

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \underline{A} \\ \underline{C} \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Das System ist genau dann beobachtbar, wenn \underline{Q}_B den Höchstrang n hat, also n linear unabhängige Zeilenvektoren besitzt.

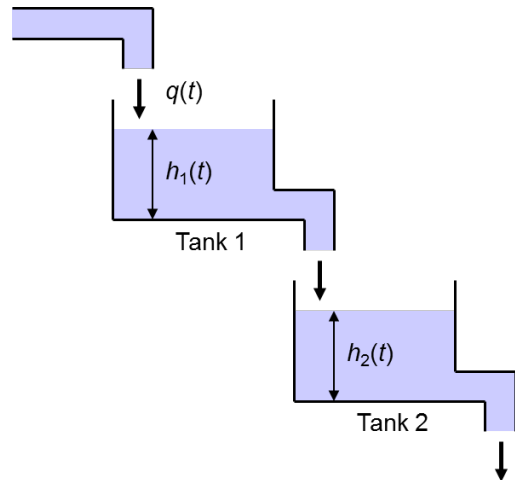
Beispiel 2-3: Beobachtbarkeit

Es wird ein System aus zwei aufeinanderfolgenden Tanks (s. Bild) betrachtet. Die Bilanzierung der Volumen von Tank 1 und 2, eine Linearisierung und Normierung führt auf folgende Differentialgleichungen:

$$\text{Tank 1: } \frac{dh_1}{dt}(t) = -h_1(t) + q(t)$$

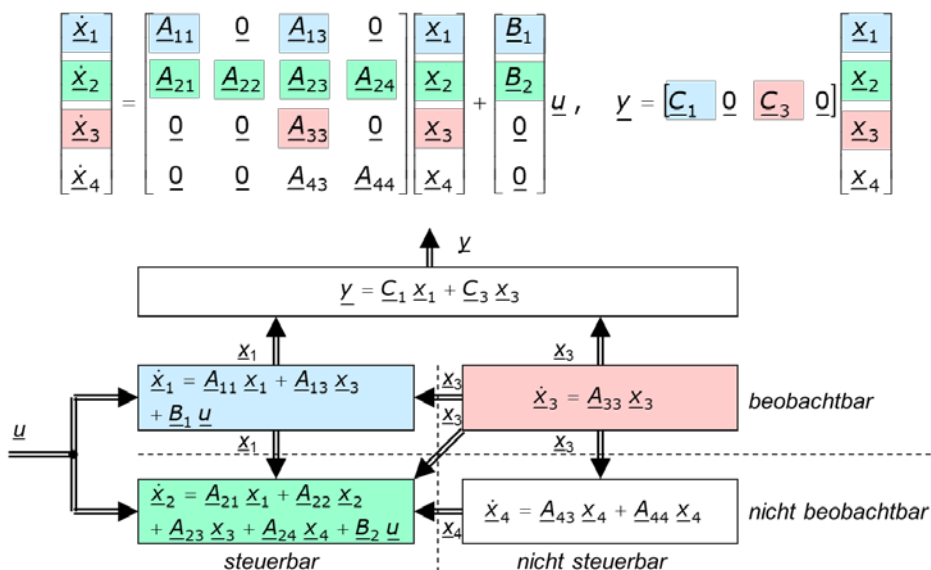
$$\text{Tank 2: } \frac{dh_2}{dt}(t) = +h_1(t) - h_2(t)$$

Es steht nur ein Füllstandssensor zur Verfügung. Stellen Sie die Zustandsraum-Darstellung bei Messung in Tank 1 bzw. in Tank 2 auf, analysieren Sie jeweils die Beobachtbarkeit und entscheiden Sie, wo der Sensor eingesetzt werden soll.



2.5 Kalman-Zerlegung

Jeder Zustand x_i kann steuerbar oder nicht steuerbar bzw. beobachtbar oder nicht beobachtbar sein. Alle Zustände eines Systems können entsprechend dieser 4 Fälle aufgeteilt werden („Kalman-Zerlegung“). Zustandsraum-Darstellung [nach O. Nelles] und Blockschaltbild:



Für das Ein-Ausgangs-Verhalten ist nur das steuer- und beobachtbare Teilsystem maßgeblich.

2.6 Erweiterung auf Systeme mit mehrfachen Eigenwerten

Bisher wurde vorausgesetzt, dass jeder Eigenwert s_i nur einmal vorhanden ist. Damit war seine algebraische Vielfachheit jeweils $p_i = 1$. Nun wird der Fall mehrfacher Eigenwerte betrachtet.

- Die *algebraische Vielfachheit* p_i eines Eigenwertes s_i entspricht der Anzahl des Auftauchens des *Eigenwertes*.
- Die *geometrische Vielfachheit* q_i ist die Anzahl der linear unabhängigen *Eigenvektoren*.

Systemeigenschaften

Stabilität

Das Gesamtsystem ist genau dann stabil, wenn alle Jordanblöcke von stabil sind.

Steuerbarkeit (Kriterium nach Gilbert)

Jeder separate Jordanblock muss durch mindestens einen Eingang ansteuerbar sein. Bei einem mehrfachen Eigenwerten s_i sei p_i seine algebraische und q_i seine geometrische Vielfachheit.

- Falls $p_i > 1$ aber $q_i = 1$ gilt, besitzt \bar{A} Blockdiagonalgestalt mit Jordan-Blöcken. Es muss gelten: Nur die jeweils letzten zu einem Jordan-Block gehörenden Zeilen der Eingangsmatrix \bar{B} müssen vom Nullvektor verschieden sein.
- Falls $q_i = p_i$ gilt, besitzt \bar{A} wie im Fall einfacher Eigenwerte Diagonalgestalt. Es muss gelten: Alle zum Eigenwert s_i gehörenden Zeilen in \bar{B} müssen linear unabhängig sein.

Beobachtbarkeit (Kriterium nach Gilbert)

Jeder separate Jordan-Block muss durch mindestens einen Ausgang messbar sein. Bei einem mehrfachen Eigenwerten s_i sei p_i seine algebraische und q_i seine geometrische Vielfachheit.

- Falls $p_i > 1$ aber $q_i = 1$ gilt, besitzt \bar{A} Blockdiagonalgestalt mit Jordan-Blöcken. Es muss gelten: Nur die jeweils ersten zu einem Jordan-Block gehörenden Spalten der Ausgangsmatrix \bar{C} müssen vom Nullvektor verschieden sein.
- Falls $q_i = p_i$ gilt, besitzt \bar{A} wie im Fall einfacher Eigenwerte Diagonalgestalt. Es muss gelten: Alle zum Eigenwert s_i gehörenden Spalten in \bar{C} müssen linear unabhängig sein.

Transformation

Um ein beliebiges System $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$, $\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$ in Jordan-Normalform zu transformieren, gehen Sie wie folgt vor:

1. Zuerst werden alle *Eigenwerte* s_i der Systemmatrix \underline{A} mit ihren jeweiligen algebraischen Vielfachheiten p_i als Lösungen der Gleichung $|\underline{A} - s \underline{I}| = 0$ bestimmt.
2. Zu jedem Eigenwert s_i wird der zugehörige *Eigenvektor* \underline{v}_i aus $(\underline{A} - s_i \underline{I}) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$ bestimmt. Er enthält in der Regel einen skalaren Freiheitsgrad, dann ist die geometrischen Vielfachheit $q_i = 1$ (vgl. Bsp. 2-4, Reihenschaltung). Grundsätzlich kann auch der Fall auftreten, dass der Eigenvektor \underline{v}_i mehr als einen skalaren Freiheitsgrad besitzt, entsprechend gilt $q_i > 1$ (vgl. Bsp. 2-4, Parallelschaltung). Dieser Fall entsteht durch redundante identische Subsysteme innerhalb des Gesamtsystems. Dies ist i.d.R. technisch nicht sinnvoll und sollte ggf. kritisch geprüft werden!
3. Zu jedem mehrfachen Eigenwert mit $p_i > 1$ und $q_i = 1$ werden $p_i - 1$ *Hauptvektoren* berechnet, die zusammen mit dem Eigenvektor eine Basis des p_i -dimensionalen Unterraums zu s_i bilden. Beginnend mit $\underline{v}_{i,1} = \underline{v}_i$ wird eine Hauptvektorkette aus $(\underline{A} - s_i \underline{I}) \cdot \underline{v}_{i,j+1} = \underline{v}_{i,j}$ für $j = 1, \dots, q_i - 1$ entwickelt.
4. Für die *inverse Transformationsmatrix* gilt:

$$\underline{T}^{-1} = \left[\underline{v}_{1,1} \quad \dots \quad \underline{v}_{1,q_1} \mid \underline{v}_{2,1} \quad \dots \quad \underline{v}_{2,q_2} \mid \dots \right]$$

Jordan-Normalform im Fall $p_i > 1$, $q_i = 1$

Die Systemmatrix $\underline{\bar{A}}$ eines Systems in Jordan-Normalform (JNF) besitzt Blockdiagonalstruktur:

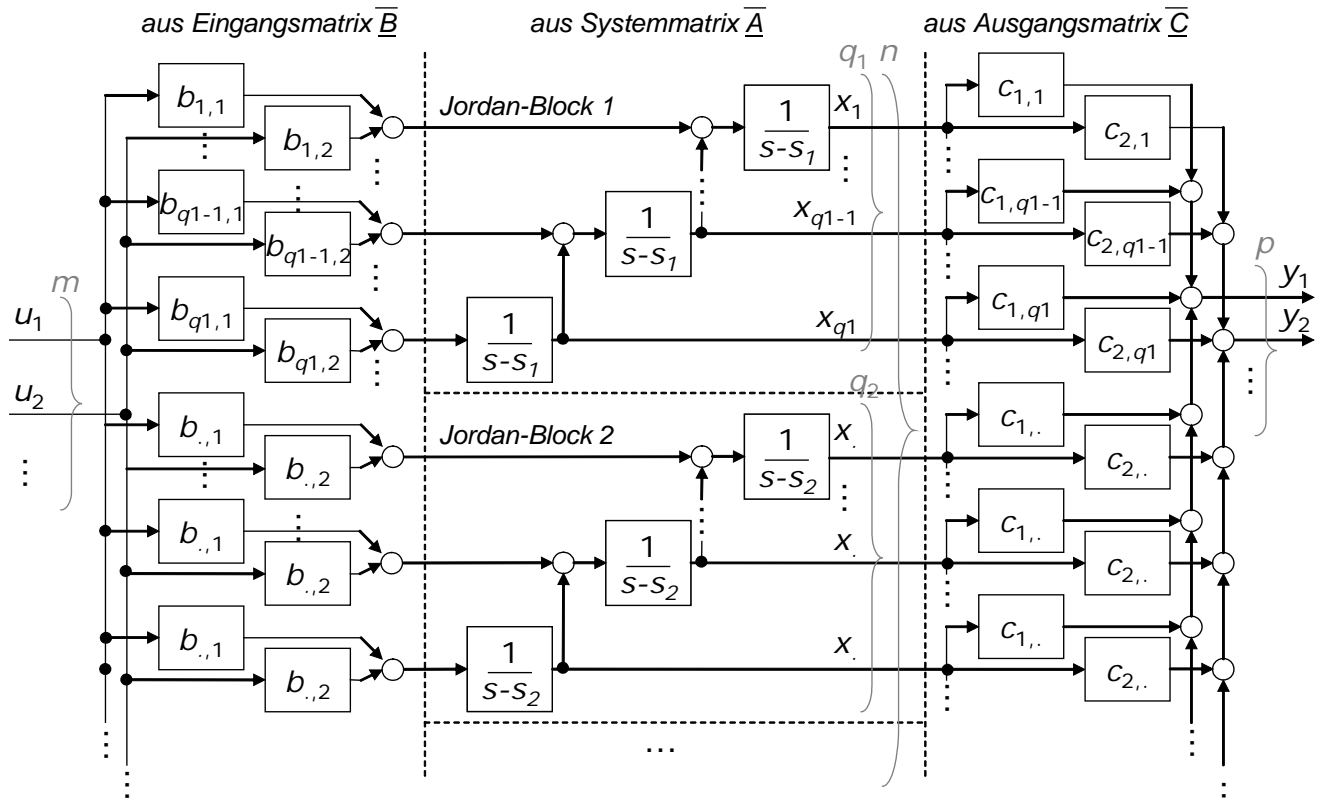
$$\frac{d}{dt} \underline{\bar{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{J}_1 & & \underline{0} \\ & \underline{J}_2 & \\ \underline{0} & & \ddots \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{A}}} \cdot \underline{\bar{x}}(t) + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = \underline{\bar{C}} \underline{\bar{x}}(t) + \underline{\bar{D}} \underline{u}(t)$$

Zu jedem Eigenwert s_i der Systemmatrix \underline{A} mit $p_i > 1$ und $q_i = 1$ gehört ein Jordan-Block \underline{J}_i mit folgender Gestalt:

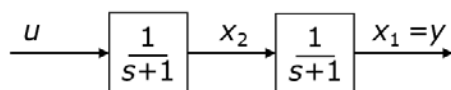
$$\underline{J}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} s_i & 1 & & \underline{0} \\ & s_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \underline{0} & & & s_i \end{bmatrix}}_{p_i \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} s_i & 1 & & \underline{0} \\ & s_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \underline{0} & & & s_i \end{bmatrix}} \right\} p_i \text{ Zeilen}$$

(Für einfache Eigenwerte $p_i = 1$ entspricht der Jordanblock dem Eigenwert: $J_i = s_i$.)

Blockschaltbild

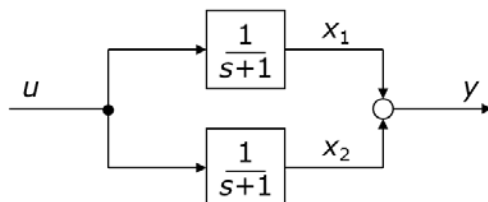
**Beispiel 2-4: Reihen- bzw. Parallelschaltung von zwei gleichen Verzögerungsgliedern**

Führt man jeweils die Zustände dem Blockschaltbild entsprechend ein, erhält man direkt eine Zustandsraum-Darstellungen in Jordan-Normalform. Für die Reihenschaltung gilt



$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = [1 \quad 0]$$

und für die Parallelschaltung gilt:



$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = [1 \quad 1]$$

Beide Systeme haben einen doppelten Eigenwert in $s_1 = -1$, also ist die algebraische Vielfachheit in beiden Fällen $p_1 = 2$.

Im Fall der **Reihenschaltung** ist in \bar{A} die Nebendiagonale mit „1“ besetzt, damit besitzt \bar{A} die Gestalt eines *Jordan-Blocks*. Es gibt nur einen Eigenvektor

$$\underline{v}_{1,1} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{mit dem skalaren Freiheitsgrad } a),$$

damit ist die geometrische Vielfachheit $q_1=1$ geringer als die algebraische. Für die Differenz zwischen der algebraischen und der geometrischen Vielfachheit kann eine Hauptvektorkette entwickelt werden. Hier ist die Differenz $p_1 - q_1 = 1$, so dass ein Hauptvektor aus

$$(\underline{A} - s_1 \underline{I}) \cdot \underline{v}_{1,2} = \underline{v}_{1,1} \quad \text{zu} \quad \underline{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad (\text{mit dem skalaren Freiheitsgrad } b)$$

bestimmt wird.

Für die *Steuerbarkeit* muss sichergestellt sein, dass die letzte zu einem Jordan-Block gehörende Zeile in \bar{B} von Null verschieden ist. Für die *Beobachtbarkeit* muss die erste zu einem Jordan-Block gehörende Zeile in \bar{C} von Null verschieden sein. Im Beispiel steht jeweils eine „1“, so dass beide Eigenschaften erfüllt sind!

Im Fall der **Parallelschaltung** besitzt \bar{A} Diagonalgestalt. Bei der Bestimmung des zugehörigen Eigenvektors erhält man zwei Freiheitsgrade und man kann zwei linear unabhängige Eigenvektoren wählen, z.B.:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit $q_1=2$ entspricht der algebraischen.

Für die *Steuerbarkeit* muss jetzt gelten, dass alle zum Eigenwert s_1 gehörenden Zeilen in \bar{B} linear unabhängig sein müssen. Analog müssen für die Beobachtbarkeit alle zum Eigenwert s_1 gehörenden Spalten in \bar{C} linear unabhängig sein. Das ist in beiden Fällen nicht erfüllt! Offenbar ist die Parallelschaltung von zwei identischen Teilsystemen nicht steuer- und beobachtbar.

3 Balancierte Darstellung

Es gibt dynamische Systeme, die sich nicht durch Modelle mit konzentrierten Parametern beschreiben lassen, sondern durch Feldprobleme gekennzeichnet sind. Dies können z.B. thermische, elastomechanische oder elektromagnetische Felder sein, die durch *partielle Differentialgleichungen* beschrieben werden.

Möchte ein solches System in eine Beschreibung mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen (z.B. im Zustandsraum) überführen, muss eine *Ortsdiskretisierung* durchgeführt werden, z.B. mit Hilfe Finiter Differenzen oder Finiter Elemente.

Das wird in der Regel zu Systemen führen, die eine sehr große Zahl von Elementen und damit auch eine hohe Systemordnung besitzen. Für den Reglerentwurf oder eine echtzeitfähige Auswertung des Modells wäre aber ein Modell niedriger Ordnung erforderlich. Es sind also Methoden zur *Ordnungsreduktion* erforderlich.

Dazu müssen zunächst die „dominanten“ Zustände gefunden werden. Wesentlich für das Ein- und Ausgangsverhalten eines Systems sind die Systemzustände, die sowohl gut steuerbar als auch gut beobachtbar sind. Ziel der Zustandsraumtransformation in die *balancierte Darstellung* ist eine Beschreibung, in der die Zustände hinsichtlich ihrer Dominanz für das Ein- und Ausgangsverhalten sortiert vorliegen.

In einem zweiten Schritt können dann die weniger dominanten Zustände gestrichen werden, um die Systemordnung zu reduzieren.

3.1 Analyse der Steuerbarkeit

Welche Zustände sind gut steuerbar?

Regt man ein System aus dem Ruhezustand $\underline{x}(0) = \underline{0}$ durch einen Vektor von Einheitsimpulsen $\underline{u}(t) = \underline{\delta}(t)$ an, so gilt entsprechend der Lösung der Zustandsdifferentialgleichung für die Trajektorien der Zustände:

$$\underline{x}(t) = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau = e^{\underline{A}t} \underline{B}$$

Der Energieeintrag von den Eingängen in die Zustände kann als Maß für die Steuerbarkeit verwendet werden. Der verallgemeinerte Energieeintrag E_S wird als Summe der quadrierten Zustände definiert, welche nach dem Impuls in $t=0$ über einen unendlichen Zeitraum integriert werden:

$$E_S = \int_0^\infty \underline{x}^T(\tau) \cdot \underline{x}(\tau) d\tau = \text{spur} \left[\int_0^\infty \underline{x}(\tau) \cdot \underline{x}^T(\tau) d\tau \right] = \text{spur} \left[\int_0^\infty e^{\underline{A}\tau} \underline{B} \underline{B}^T e^{\underline{A}^T\tau} d\tau \right] = \text{spur} \underline{W}_S$$

Diese Energie ist also gleich der Spur (=Summe der Diagonalelemente) der *Gramschen Steuerbarkeitsmatrix* \underline{W}_S . Das Hauptdiagonalelement $\underline{W}_{S,ii}$ bestimmt den Energieeintrag in den Zustand x_i ; Zustände mit $\underline{W}_{S,ii}=0$ sind z.B. nicht steuerbar. Darüber hinaus definieren die Nebendiagonalelemente von \underline{W}_S die Verkopplung der Zustände. Auch dies hat Auswirkungen auf die Steuerbarkeit; sind die Zeilen und Spalten zweier Zustände in \underline{W}_S z.B. identisch, lassen sie sich nicht getrennt steuern und das System ist nicht steuerbar. Allgemein gilt folgendes Steuerbarkeitskriterium:

Steuerbarkeitskriterium

Das System ist genau dann steuerbar, wenn die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{W}_S(t) = \int_0^t e^{\underline{A}\tau} \underline{B} \underline{B}^T e^{\underline{A}^T \tau} d\tau$$

für jede Zeitspanne $t > 0$ invertierbar ist.

Eigenschaften der Gramsche Steuerbarkeitsmatrix

Die Matrix \underline{W}_S charakterisiert den Energieeintrag in die Zustände, sie ist symmetrisch $\underline{W}_S = \underline{W}_S^T$ und positiv definit.

Für stabile Systeme existiert das uneigentliche Integral für $t \rightarrow \infty$, und \underline{W}_S kann in diesem Fall als positiv definite Lösung der Ljapunow-Gleichung berechnet werden:

$$\underline{A} \underline{W}_S + \underline{W}_S \underline{A}^T = -\underline{B} \underline{B}^T$$

3.2 Analyse der Beobachtbarkeit**Welche Zustände sind gut beobachtbar?**

Nun betrachtet man das homogene System, also ohne Anregung $\underline{u}(t) = \underline{0}$ und dem Anfangswert $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$. Die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung ist $\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{x}_0$, mit der Ausgangsgleichung gilt: $\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) = \underline{C} e^{\underline{A}t} \underline{x}_0$

Der verallgemeinerte Energietransfer E_B von den Zuständen in die Ausgänge (als Maß für die Beobachtbarkeit) ist dabei:

$$E_B = \int_0^\infty \underline{y}^T(\tau) \cdot \underline{y}(\tau) d\tau = \underline{x}_0^T \int_0^\infty e^{\underline{A}^T \tau} \underline{C}^T \underline{C} e^{\underline{A} \tau} d\tau \underline{x}_0 = \underline{x}_0^T \underline{W}_B \underline{x}_0$$

Diese Energie ist also gleich der quadratischen Form der Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix \underline{W}_B mit den Anfangszuständen. Das Hauptdiagonalelement $\underline{W}_{B,ii}$ ist ein Maß für den Energietransfer vom Zustand x_i in die Ausgänge; Zustände mit $\underline{W}_{B,ii}=0$ sind nicht beobachtbar. Die Nebendiagonalelemente von \underline{W}_B charakterisieren Verkopplungen; sind z.B. Zeilen und Spalten von zwei Zuständen identisch, kann ihre Wirkung auf die Ausgänge nicht unterschieden werden und das System nicht beobachtbar sein. Allgemein gilt folgendes Kriterium:

Beobachtbarkeitskriterium

Das System ist genau dann beobachtbar, wenn die Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{W}_B(t) = \int_0^t e^{\underline{A}^T \tau} \underline{C}^T \underline{C} e^{\underline{A} \tau} d\tau$$

für jede Zeitspanne $t > 0$ invertierbar ist.

Eigenschaften der Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix

Die Matrix \underline{W}_B ist wiederum symmetrisch $\underline{W}_B = \underline{W}_B^T$ und positiv definit.

Für stabile Systeme existiert das uneigentliche Integral für $t \rightarrow \infty$, und \underline{W}_B kann als positiv definite Lösung der Ljapunow-Gleichung berechnet werden:

$$\underline{A}^T \underline{W}_B + \underline{W}_B \underline{A} = -\underline{C}^T \underline{C}$$

3.3 Transformation

Wie verhalten sich die Gramschen Matrizen bei einer Zustandsraum-Transformation?

Für die Ähnlichkeitstransformation des ursprünglichen Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ in die transformierte Darstellung $\bar{\underline{x}}(t)$ lautet $\bar{\underline{x}}(t) = \underline{T} \cdot \underline{x}(t)$, siehe Abschnitt 1.6. Damit gilt

$$\bar{\underline{W}}_S = \int_0^\infty \bar{\underline{x}}(\tau) \cdot \bar{\underline{x}}^T(\tau) d\tau = \int_0^\infty \underline{T} \underline{x}(\tau) \cdot (\underline{T} \underline{x}(\tau))^T d\tau = \underline{T} \int_0^\infty \underline{x}(\tau) \cdot \underline{x}^T(\tau) d\tau \underline{T}^T = \underline{T} \underbrace{\underline{W}_S \underline{T}^T}_{\bar{\underline{W}}_S}$$

und

$$E_B = \int_0^\infty \underline{y}^T(\tau) \cdot \underline{y}(\tau) d\tau = \underline{x}_0^T \underline{W}_B \underline{x}_0 = (\underline{T}^{-1} \bar{\underline{x}}_0)^T \underline{W}_B (\underline{T}^{-1} \bar{\underline{x}}_0) = \bar{\underline{x}}_0^T \underbrace{(\underline{T}^T)^{-1} \underline{W}_B \underline{T}^{-1}}_{\bar{\underline{W}}_B} \bar{\underline{x}}_0$$

D.h. zusammenfassend gilt für die Transformation der Gramschen Matrizen:

$$\bar{\underline{W}}_S = \underline{T} \cdot \underline{W}_S \cdot \underline{T}^T \quad \text{und} \quad \bar{\underline{W}}_B = (\underline{T}^T)^{-1} \cdot \underline{W}_B \cdot \underline{T}^{-1}$$

Während sich die Eigenwerte der Gramschen Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix durch eine Transformation verändern, gilt das nicht für das Produkt beider Matrizen:

$$\bar{\underline{W}}_S \bar{\underline{W}}_B = \underline{T} \underline{W}_S \underline{W}_B \underline{T}^{-1}$$

Diese Eigenwerte sind also invariant gegenüber einer Transformation. Die Wurzel dieser Eigenwerte werden als *Hankel-Singulärwerte* σ_i bezeichnet und stellen ein Maß für den Energietransfer von den Eingängen zu den Ausgängen dar:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\bar{\underline{W}}_S \bar{\underline{W}}_B)}$$

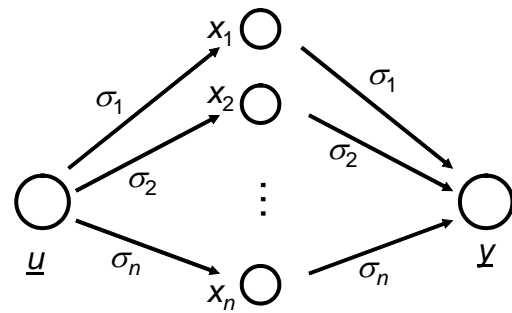
Balancierte Transformation

Gesucht ist eine Zustandsraum-Darstellung, bei der erstens die Gramsche Steuerbarkeitsgleich der Beobachtbarkeitsmatrix ist und zweitens beide Matrizen Diagonalgestalt besitzen:

$$\bar{\underline{W}}_S = \bar{\underline{W}}_B = \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Gelingt dies, ist der Energietransfer von den Eingängen in die Zustände bzw. von den Zuständen in die Ausgänge zwischen den Zuständen entkoppelt und jeweils gleich gewichtet (siehe Bild).

Für $\underline{u}(t) = \underline{\delta}(t)$ und $\underline{x}_0 = \underline{1}$ sind dann beide Energietransfers gleich groß, d.h. „balanciert“ mit $E_S = E_B$.



Für eine effiziente Implementierung können anstelle der Gramschen Matrizen deren „Wurzeln“ \underline{L}_S und \underline{L}_B aus einer Cholesky-Zerlegung heraus verwendet werden.

Vorgehensweise:

1. Berechnung der Gramschen Matrizen \underline{W}_S und \underline{W}_B .
2. Bestimmung der Cholesky-Zerlegungen der Gramschen Matrizen:

$$\underline{W}_S = \underline{L}_S \underline{L}_S^T \text{ und } \underline{W}_B = \underline{L}_B \underline{L}_B^T$$

Für symmetrische und positive Matrizen existiert eine Cholesky-Zerlegung; \underline{L}_S und \underline{L}_B sind untere Dreiecksmatrizen.

3. Singulärwertzerlegung:

$$\underline{L}_B^T \underline{L}_S = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^T$$

Darin ist $\underline{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ die Diagonalmatrix. Die Gewichte σ_i werden als *Hankel-Singulärwerte* bezeichnet und am besten absteigend sortiert $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

4. Für die Zustandsraum-Transformation auf balancierte Darstellung gilt:

$$\underline{T} = \underline{\Sigma}^{-1/2} \underline{U}^T \underline{L}_B^T \text{ und } \underline{T}^{-1} = \underline{L}_S \underline{V} \underline{\Sigma}^{-1/2}$$

5. Nun kann die Transformation durchgeführt werden (vgl. Abschnitt 1.6):

$$\underline{\bar{A}} = \underline{T} \underline{A} \underline{T}^{-1}, \quad \underline{\bar{B}} = \underline{T} \underline{B}, \quad \underline{\bar{C}} = \underline{C} \underline{T}^{-1}, \quad \underline{\bar{D}} = \underline{D}$$

In der Matlab Control Toolbox steht der Befehl `balreal` hierzu zur Verfügung.

Die Richtigkeit der Transformationen in Schritt 4 lässt sich prüfen, wenn in die Transformationen für $\underline{\bar{W}}_S$ und $\underline{\bar{W}}_B$ eingesetzt wird. Für den ersten Fall gilt:

In $\underline{\bar{W}}_S = \underline{T} \cdot \underline{W}_S \cdot \underline{T}^T$ mit $\underline{W}_S = \underline{L}_S \underline{L}_S^T$ und $\underline{T} = \underline{\Sigma}^{-1/2} \underline{U}^T \underline{L}_B^T$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{W}}_S &= \underline{\Sigma}^{-1/2} \underline{U}^T \underline{L}_B^T \cdot \underline{L}_S \underline{L}_S^T \cdot \left(\underline{\Sigma}^{-1/2} \underline{U}^T \underline{L}_B^T \right)^T = \underline{\Sigma}^{-1/2} \underline{U}^T \underbrace{\underline{L}_B^T \cdot \underline{L}_S}_{\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^T} \underbrace{\underline{L}_S^T \cdot \underline{L}_B}_{\left(\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^T \right)^T} \underline{U} \underline{\Sigma}^{-1/2} \\ \underline{\bar{W}}_S &= \underline{\Sigma}^{-1/2} \underbrace{\underline{U}^T \underline{U}}_{\underline{I}} \underbrace{\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^T}_{\underline{I}} \underbrace{\underline{V} \underline{\Sigma} \underline{U}^T}_{\underline{I}} \underline{U} \underline{\Sigma}^{-1/2} = \underline{\Sigma}^{-1/2} \underline{\Sigma} \underline{\Sigma}^{-1/2} = \underline{\Sigma} \end{aligned}$$

3.4 Ordnungsreduktion

Zustände i mit geringem Gewicht σ_i tragen weniger zum Energietransfer zwischen Ein- und Ausgang bei. Sie können also zuerst vernachlässigt werden, um die Systemordnung n auf $k < n$ zu reduzieren.

Zuerst werden die Zustände entsprechend der Gewichtung absteigend sortiert, so dass

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

gilt. Dies kann auch als eine Zustandsraumtransformation aufgefasst werden.

Der Zustandsvektor \underline{x} wird jetzt in den Teil \underline{x}_1 der k relevanten Zustände sowie den Rest \underline{x}_2 der $n-k$ zu streichenden Zustände aufgeteilt. Entsprechend lautet die Zustandsdifferential- und Ausgangsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \underline{D} \cdot \underline{u}$$

Für das mit $\underline{x}_2 := 0$ reduzierte System lautet die reduzierte Systemdarstellung:

$$\frac{d}{dt} \underline{x}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{x}_1 + \underline{B}_1 \cdot \underline{u}, \quad \underline{y} = \underline{C}_1 \cdot \underline{x}_1 + \underline{D} \cdot \underline{u}$$

In der Matlab Control Toolbox führt der Befehl `modred` (mit der Option `truncate`) diese Reduktion aus.

Der Approximationsfehler der Ordnungsreduktion kann über die H_∞ -Norm der Frequenzgangsdifferenz zwischen originalem und reduziertem System abgeschätzt werden:

$$\|G_{\text{orig}}(j\omega) - G_{\text{red}}(j\omega)\|_\infty \leq 2(\sigma_{k+1} + \dots + \sigma_n)$$

Algorithmus zur Ordnungsreduktion

Balancierte Transformation (aus Abschnitt 3.3) und Ordnungsreduktion (oben) können zu einem Schritt zusammengefasst werden. Man erhält folgende Vorgehensweise:

1. Berechnung der Gramschen Matrizen \underline{W}_S und \underline{W}_B .
2. Bestimmung der Cholesky-Zerlegungen der Gramschen Matrizen:

$$\underline{W}_S = \underline{L}_S \underline{L}_S^T \text{ und } \underline{W}_B = \underline{L}_B \underline{L}_B^T$$

\underline{L}_S und \underline{L}_B sind untere Dreiecksmatrizen.

3. Singularwertzerlegung:

$$\underline{L}_B^T \underline{L}_S = [\underline{U}_1 \quad \underline{U}_2] \cdot \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \underline{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \cdot [\underline{V}_1 \quad \underline{V}_2]^T$$

Darin ist $\underline{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ die Diagonalmatrix mit den Gewichten der relevanten Zustände und $\underline{\Sigma}_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$ die Diagonalmatrix mit den Gewichten der zu streichenden Zustände mit absteigender Sortierung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

4. Transformationsmatrizen (\underline{T}_L und \underline{T}_R sind nicht quadratisch):

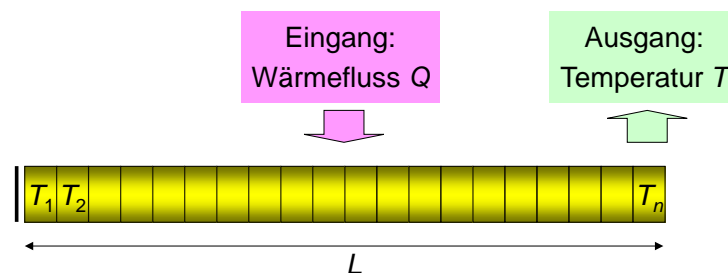
$$\underline{T}_L = \underline{\Sigma}_1^{-1/2} \underline{U}_1^T \underline{L}_B^T \text{ und } \underline{T}_R = \underline{L}_S \underline{V}_1 \underline{\Sigma}_1^{-1/2}$$

5. Transformation mit Ordnungsreduktion:

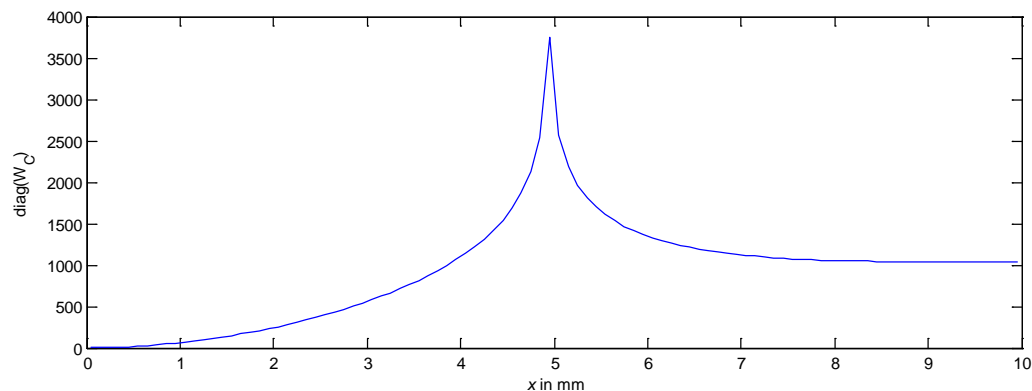
$$\bar{A} = A_{11} = \underline{T}_L A \underline{T}_R, \quad \bar{B} = B_{11} = \underline{T}_L B, \quad \bar{C} = C_1 = C \underline{T}_R, \quad \bar{D} = D$$

Beispiel 3-1: Wärmeleitung in einem Stab

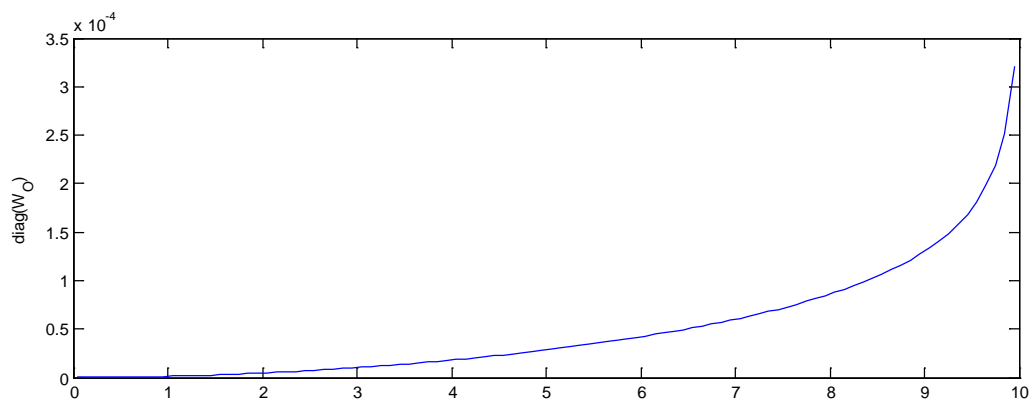
Ein (eindimensionaler) wärmeleitfähiger Stab ist an seinem linken Ende thermisch isoliert und wird in der Mitte mit einem Wärmefluss Q angeregt. Wie lautet die thermische Antwort T am rechten Ende des Stabs?



Um eine Darstellung im Zustandsraum zu erhalten, wird eine Ortsdiskretisierung in $n=100$ Elemente durchgeführt. Die Diagonalelemente der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix charakterisieren die Steuerbarkeit der jeweiligen Zustände. Man erkennt, dass die Steuerbarkeit am Ort des Aktuators (Wärmeeintrag) am höchsten ist und am thermisch fixierten Ende links auf null abnimmt:



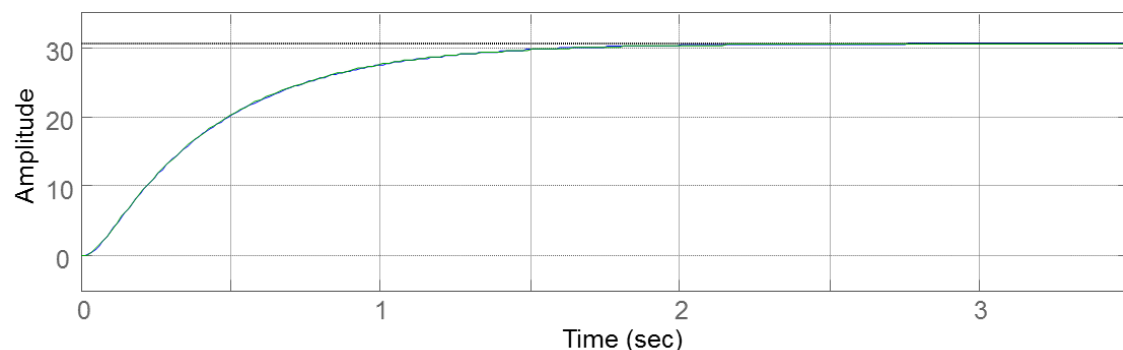
Entsprechend beschreiben die Diagonalelemente der Gramschen Beobachtbarkeitsmatrix die Beobachtbarkeit der jeweiligen Zustände. Die Beobachtbarkeit ist am Ort des Sensors (rechtes Ende) am höchsten und nimmt bis zum thermisch fixierten linken Ende auf Null ab:



Das System wird in balancierte Darstellung transformiert. Die Gramsche Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix haben im Beispiel folgende Gestalt:

$$\overline{W}_S = \overline{W}_B = \underline{\Sigma} = \text{diag}(16.88 \quad 1.59 \quad 0.079 \quad 0.025 \quad 0.005 \quad 0.0007 \dots)$$

Man erkennt, dass die absteigend sortierten Werte rasch kleiner werden. Reduziert man das ursprüngliche System mit der Ordnung $n=100$ auf nur $k=2$, wird das Ein-Ausgangsverhalten gut approximiert, wie der Vergleich der Sprungantworten zeigt:



Teil B: Entwurf durch Eigenwertvorgabe

4 Reglerentwurf

Damit der Regler die inneren Zustände der Strecke in gewünschter Weise beeinflussen kann, muss die Steuerbarkeit des Systems gegeben sein, das System kann dann auch instabil sein.

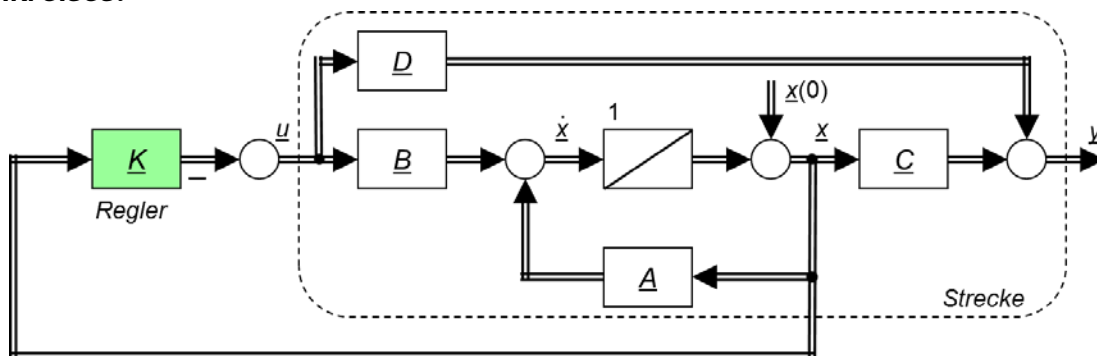
4.1 Struktur der linearen Zustandsrückführung

Es muss ein Ansatz für die Struktur des Reglers gewählt werden. Da im Zustandsvektor \underline{x} die gesamte aktuelle Information der Strecke zusammengefasst ist, soll dieser dem Regler für die Bestimmung der Stellgröße u zur Verfügung gestellt werden. Naheliegender ist ein linearer Ansatz, so dass die Stellgröße als Linearkombination der Zustände bestimmt wird. Dies wird als *lineare Zustandsrückführung* bezeichnet:

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t)$$

Über die Matrix \underline{K} ist eine Gewichtung möglich; sie wird *Reglermatrix* genannt. Das negative Vorzeichen wird als Konvention meist so gewählt, könnte aber ebenso gut in die Elemente von \underline{K} gezogen werden. Damit ist eine Struktur definiert (siehe auch Blockschaltbild), und es bleibt als nächste Aufgabe, eine geeignete Reglermatrix \underline{K} zu berechnen.

Blockschaltbild eines über eine lineare Zustandsrückführung geschlossenen Regelkreises:



4.2 Entwurf einer Zustandsrückführung durch Eigenwertvorgabe

Setzt man die lineare Zustandsrückführung $\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t)$ in die Darstellung der Strecke mit

Zustandsdifferenzialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$$

Ausgangsgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

ein, erhält man ein homogenes System (ohne äußeren Eingang), das durch die

Zustandsdifferenzialgleichung des geregelten Systems: $\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{BK}) \underline{x}(t)$

Ausgangsgleichung des geregelten Systems:

$$\underline{y}(t) = (\underline{C} - \underline{DK}) \underline{x}(t)$$

beschrieben ist.

Betrachtet man die Form der Zustandsdifferentialgleichung des geregelten Systems, fällt auf, dass der Ausdruck

$$\underline{A}_R = (\underline{A} - \underline{B}\underline{K})$$

die Rolle einer Systemmatrix übernimmt. Es ist die Systemmatrix des geregelten Systems, die mit \underline{A}_R bezeichnet werden soll und von der noch unbekannten Reglermatrix \underline{K} abhängt.

Die *Eigenwerte der Systemmatrix* bestimmen weitgehend die dynamischen Eigenschaften eines Systems, wie z.B. seine Stabilität. Sie entsprechen in ihrer Bedeutung den Polen der Übertragungsfunktion (vgl. Vorlesung „Mess- und Regelungstechnik“).

Daraus entsteht die *Idee der Eigenwertvorgabe*: Für das geregelte System werden die Eigenwerte (als Entwurfsparameter) vorgegeben und dann die Reglermatrix \underline{K} so bestimmt, dass \underline{A}_R diese gewünschten Eigenwerte besitzt!

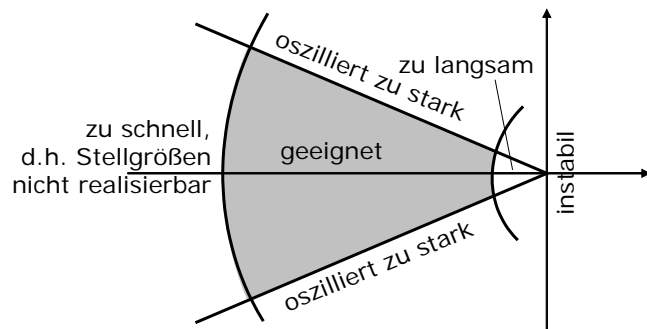
Unter der Voraussetzung, dass die Strecke nur einen Eingang besitzt ($m = 1$), ist die Reglermatrix \underline{K} ein Zeilenvektor mit n Elementen. Für \underline{A}_R können n Eigenwerte vorgegeben werden. Unter der Voraussetzung, dass das System steuerbar ist, lassen sich n Bedingungen auswerten, um die n Elemente in \underline{K} eindeutig festzulegen.

Vorgehensweise zum Reglerentwurf (für Systeme mit einem Eingang, $m=1$)

1. Prüfen: Ist die Strecke *steuerbar*?
2. Ansatz für die *Systemmatrix des geregelten Systems*:

$$\underline{A}_R = \underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{K} \quad \text{mit zunächst unbekanntem } \underline{K} = [k_1 \quad \dots \quad k_n]$$
3. Berechnung des *charakteristischen Polynoms des geregelten Systems* aus $\det(s \underline{I} - \underline{A}_R)$ mit unbekannten k_i .
4. Vorgabe der Eigenwerte s_{R1}, \dots, s_{Rn} des geregelten Systems. Daraus erhält man das *gewünschte charakteristische Polynom* $(s - s_{R1})(s - s_{R2}) \dots (s - s_{Rn})$

Durch die Eigenwertvorgabe legen Sie das dynamische Verhalten des geregelten Systems fest, in diesem Schritt findet also der eigentliche Entwurf statt. Entsprechend nebenstehendem Bild erhält man durch Ausschluss einen Sektor in der komplexen Ebene, in dem die Eigenwerte liegen sollten. Tipps:

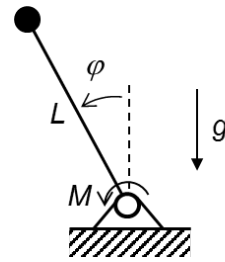


- Bestimmen Sie anfangs die Eigenwerte von \underline{A} des unregulierten Systems und „verschieben“ diese nur so viel wie nötig.
 - Jeder reeller Eigenwert entspricht z.B. einer negativen inversen Zeitkonstante $s_{Ri} = -1/T_{Ri}$. Die Zeitkonstanten T_{Ri} sind ein gutes quantitatives Maß für die Dynamik des geregelten Systems.
 - Simulieren Sie das geregelte System, um Dynamik der Zustände \underline{x} und den Wertebereich der Stellgröße u zu prüfen.
5. *Koeffizientenvergleich* der charakteristischen Polynome aus Schritt 3. und 4. liefert die gesuchten Koeffizienten k_i .

Beispiel 4-1: Reglerentwurf für ein inverses Pendel

Ein Pendel mit der Länge L wird im Lager mit dem Moment M angetrieben. Das um die stehende Ruhelage linearisierte und normierte Zustandsraum-Modell lautet:

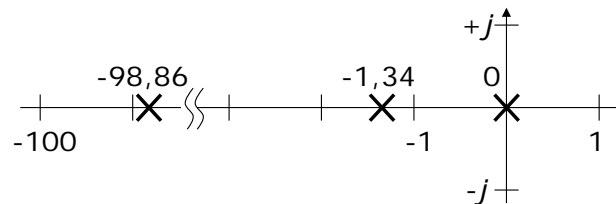
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} M(t)$$



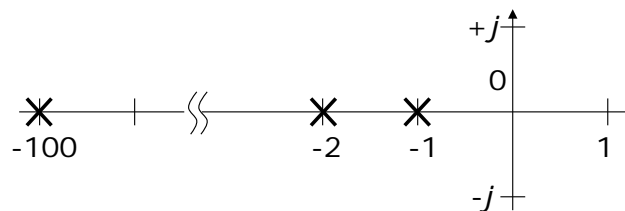
Entwerfen Sie eine lineare Zustandsrückführung, die alle Eigenwerte des geregelten Systems in -1 verschiebt.

Beispiel 4-2: Reglerentwurf für eine Maschinenachse

- Modell der Strecke ist in Zustandsraum-Darstellung gegeben (Bsp. in Abschnitt 1.2)
- Analyse der Eigenwerte der (ungeregelten) Strecke: in Matlab mit `eig(A)`



- Entwurf einer linearen Zustandsrückführung durch Vorgabe von Eigenwerten, z.B.:



- Berechnung der Reglermatrix \underline{K} : in Matlab mit `K = acker(A,B,[-1 -2 -100])`

4.3 Entwurf in Regelungsnormalform (RNF)

Bereits im Abschnitt 1.6 wurde klar, dass es mehrere gleichwertige Zustandsraumdarstellungen desselben Systems gibt. Eine solche spezielle Darstellung ist die *Regelungsnormalform (RNF)*. Sie besitzt zwei Vorteile:

1. In den Matrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} der Zustandsraum-Darstellung tauchen die Koeffizienten der entsprechenden DGL oder Übertragungsfunktion direkt auf. Liegt das System also als DGL oder Übertragungsfunktion vor, kann es schnell (und fehlerfrei) in eine Zustandsraum-Darstellung überführt werden.
2. Für ein System in RNF kann der Regler \underline{K} einfach und in geschlossener Form berechnet werden.

Systemdarstellung

Ein Eingrößensystem in RNF hat die folgende Gestalt:

$$\frac{d}{dt} \underline{\bar{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{\bar{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n]}_{\underline{C}} \cdot \underline{\bar{x}}(t) + \underbrace{b_n}_{\underline{D}} \cdot u(t)$$

Ein Vorteil dieser Darstellung ist, dass die Koeffizienten direkt aus der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \text{ mit } a_n = 1$$

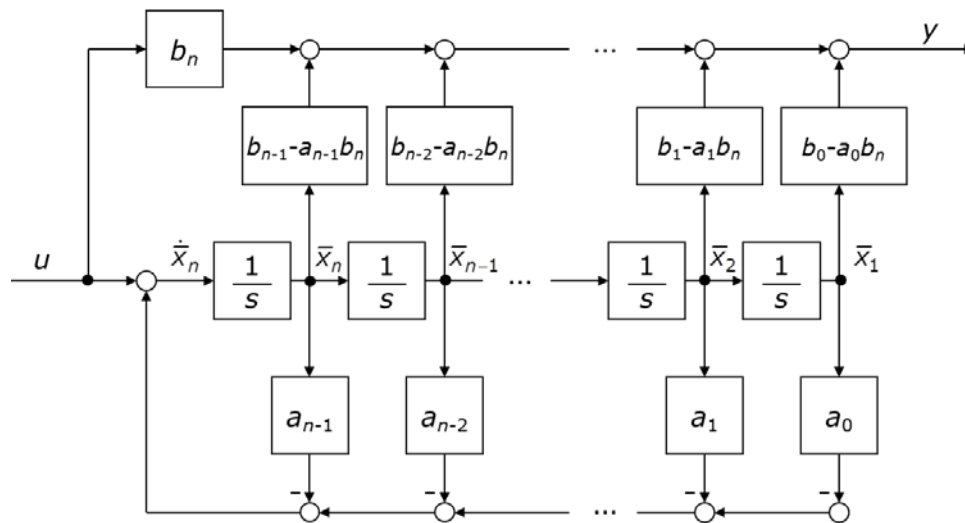
oder auch aus der entsprechenden DGL

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t) \text{ mit } a_n = 1$$

des Systems abgelesen werden können.

Blockschaltbild

Im nachstehendem Blockschaltbild der RNF ist auch die Wahl der Zustände mit eingezeichnet. Es kann z.B. genutzt werden, um eine Übertragungsfunktion zu realisieren.



Transformation

Ein beliebiges System $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} u(t)$, $y(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} u(t)$ kann durch die Transformation $\underline{\bar{x}}(t) = \underline{T} \cdot \underline{x}(t)$ in Regelungsnormalform überführt werden.

Dabei ist $\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{e}^T \\ \underline{e}^T \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{e}^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ und \underline{e}^T ist die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix \underline{Q}_S^{-1}

mit $\underline{Q}_S = [\underline{B}, \underline{A} \underline{B}, \underline{A}^2 \underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1} \underline{B}]$.

Reglerentwurf

Für das auf RNF transformierte System kann die Reglermatrix einer linearen Zustandsrückführung $\underline{u} = -\bar{\underline{K}} \cdot \bar{\underline{x}}$ direkt angegeben werden:

$$\bar{\underline{K}} = [p_0 - a_0 \quad p_1 - a_1 \quad \dots \quad p_{n-1} - a_{n-1}]$$

Darin sind p_0, \dots, p_{n-1} die Koeffizienten des vorgegebenen charakteristischen Polynoms, das durch die Vorgabe der Eigenwerte s_{R1}, \dots, s_{Rn} für den geschlossenen Regelkreis bestimmt ist:

$$(s - s_{R1}) \cdot (s - s_{R2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{Rn}) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0 = 0$$

Beispiel 4-3: Reglerentwurf in RNF

Überprüfen Sie, ob das Modell des inversen Pendels aus Beispiel 4-1 bereits in RNF vorliegt. Entwerfen Sie eine lineare Zustandsrückführung (alle Eigenwerte in -1) für das System in RNF.

Verallgemeinerung des Reglerentwurfs (für Systeme nicht in RNF)

Für Systeme, die in einer beliebigen Zustandsraum-Darstellung gegeben sind, ist

1. vorab die Transformation auf RNF erforderlich.
2. In RNF wird dann der Reglerentwurf für $\bar{\underline{K}}$ wie zuvor beschrieben durchgeführt.
3. Um den Regler beim originalen System wieder einsetzen zu können, muss in der linearen Zustandsrückführung $\bar{\underline{x}}(t) = \underline{T} \cdot \underline{x}(t)$ substituiert werden:

$$\underline{u}(t) = -\bar{\underline{K}} \cdot \bar{\underline{x}}(t) = -\underbrace{\bar{\underline{K}} \cdot (\underline{T} \underline{x}(t))}_{=\underline{K}} \Rightarrow \underline{K} = \bar{\underline{K}} \cdot \underline{T}$$

Setzt man die Berechnung von \underline{T} ein (s. oben im Abschnitt „Transformation“) kann man unter Anwendung des Theorems von Cayley-Hamilton die *Gleichung nach Ackermann* herleiten, die eine geschlossene Berechnung der Reglermatrix für Systeme in beliebiger Zustandsraum-Darstellung erlaubt:

$$\underline{K} = \underline{e}^T \left(p_0 \underline{I} + p_1 \underline{A}^1 + p_2 \underline{A}^2 + \dots + p_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n \right)$$

Darin ist \underline{e}^T die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix und p_0, \dots, p_{n-1} sind die Koeffizienten des vorgegebenen charakteristischen Polynoms.

5 Beobachterentwurf

Um eine lineare Zustandsrückführung in Kapitel 4 zu realisieren, wurde vorausgesetzt, dass der Zustandsvektor \underline{x} zur Verfügung steht (siehe z.B. Abgriff von \underline{x} im Blockschaltbild auf Seite 4-1) – dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall!

Es muss also eine Einrichtung entworfen werden, die auf Basis der zugänglichen Größen (das sind \underline{y} und \underline{u}) den Zustandsvektor \underline{x} schätzt! Diese wird nachfolgend als *Beobachter* bezeichnet werden.

Der Beobachter „rettet“ also das Konzept der linearen Zustandsrückführung für den häufigen Fall, dass nicht alle Zustände messbar sind. Darüber hinaus kann er aber auch unabhängig von einer Zustandsrückführung zur Schätzung nicht direkt messbarer Zustände beispielsweise eines Sensorsystems eingesetzt werden.

5.1 Idee und Struktur des Beobachters

Zur Schätzung des tatsächlichen, aber unbekannten Zustands $\underline{x}(t)$ der realen Strecke wird in einem parallelen Streckenmodell die Schätzung $\hat{\underline{x}}(t)$ berechnet:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{A} \hat{\underline{x}}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$$

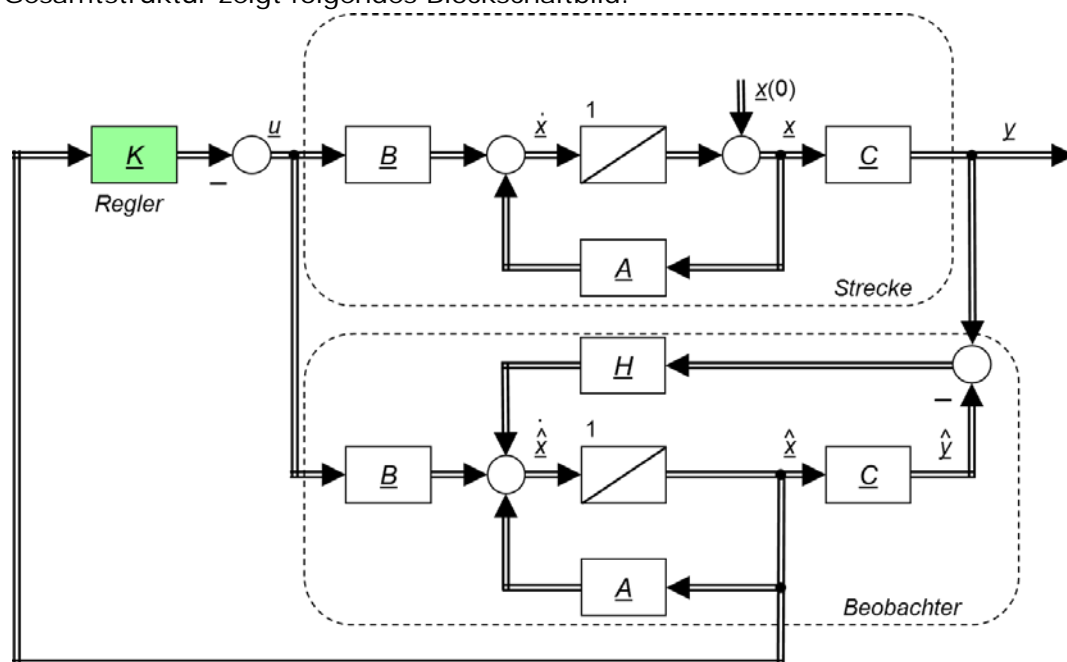
Um Abweichungen zwischen $\underline{x}(t)$ und $\hat{\underline{x}}(t)$ korrigieren zu können, wird der reale Ausgang $\underline{y}(t)$ mit dem Modellausgang $\hat{\underline{y}}(t) = \underline{C} \hat{\underline{x}}(t)$ verglichen und deren Differenz mit \underline{H} gewichtet zur Korrektur von $\hat{\underline{x}}(t)$ verwendet. Die Zustandsdifferentialgleichung des Beobachters lautet mit diesem Ansatz:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{A} \hat{\underline{x}}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{H} (\underline{y} - \underline{C} \hat{\underline{x}})$$

Darin ist \underline{H} die *Beobachtermatrix*, deren Entwurf im nächsten Abschnitt zu diskutieren sein wird. Die lineare Zustandsrückführung kann jetzt auf Basis von $\hat{\underline{x}}(t)$ geschlossen werden:

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \hat{\underline{x}}(t)$$

Die Gesamtstruktur zeigt folgendes Blockschaltbild:



5.2 Entwurf durch Eigenwertvorgabe

Ziel des Entwurfs muss es sein, dass die Schätzung $\hat{x}(t)$ dem realen Zustand $x(t)$ möglichst exakt entspricht. Ist z.B. der Anfangswert $x(0)$ nicht bekannt, wird es nicht sofort möglich sein, sofort eine korrekte Schätzung zu finden. Eine schwächere Forderung ist, dass der Schätzfehler

$$\underline{\Delta x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

wenigstens für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

Setzt man in die differenzierte Gleichung des Schätzfehlers $\underline{\Delta \dot{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$ die Zustandsdifferentialgleichung von Strecke und Beobachter ein, erhält man folgende Differentialgleichung des Schätzfehlers:

$$\underline{\Delta \dot{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{H}\underline{C})\underline{\Delta x}(t)$$

Darin besitzt der Ausdruck $\underline{A}_B = (\underline{A} - \underline{H}\underline{C})$ die Funktion einer Systemmatrix. Es ist die Systemmatrix des Beobachters. Nun kann eine „alte“ Idee wieder genutzt werden: Durch Eigenwertvorgabe für \underline{A}_B wird die Dynamik des Beobachters vorgegeben. Daraus werden dann die Koeffizienten der Beobachtermatrix \underline{H} bestimmt.

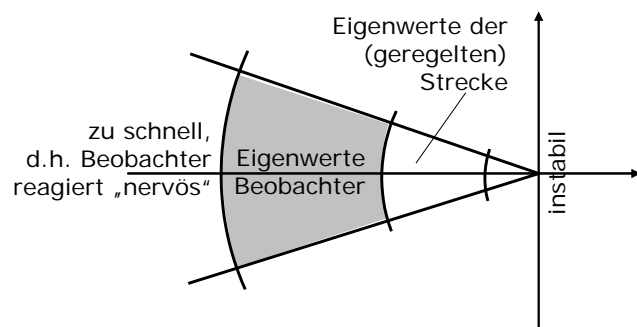
Wir beschränken uns auf Systeme mit einem skalaren Ausgang bzw. einer Messgröße ($p = 1$). Dann ist \underline{H} ein Spaltenvektor mit n Einträgen, der aus n Eigenwertvorgaben exakt bestimmt werden kann, falls das System beobachtbar ist.

Vorgehensweise zum Beobachterentwurf

1. Prüfen: Ist die Strecke *beobachtbar*?
2. Ansatz für die Systemmatrix des Beobachters:
 $\underline{A}_B = \underline{A} - \underline{H} \cdot \underline{C}$ mit zunächst unbekanntem $\underline{H} = [h_1 \ \dots \ h_n]^T$
3. Berechnung des *charakteristischen Polynoms des Beobachters* aus $\det(s\underline{I} - \underline{A}_B)$ mit unbekannten h_i .
4. Vorgabe der Eigenwerte s_{B1}, \dots, s_{Bn} des Beobachters. Daraus erhält man das *gewünschte charakteristische Polynom*: $(s - s_{B1})(s - s_{B2}) \dots (s - s_{Bn})$

Durch die Eigenwertvorgabe findet der eigentliche Entwurf statt. Wo sollten die Eigenwerte liegen?

Es ist i.d.R. sinnvoll, sie in der komplexen Ebene links von den Eigenwerten der (evtl. geregelten) Strecke zu platzieren. Somit ist die Dynamik des Beobachters schneller als die der Strecke und die Schätzungen entsprechend schneller eingeschwungen. Gibt man andererseits Eigenwerte zu weit links vor, reagiert der Beobachter „nervös“ und verstärkt z.B. ein Rauschen im Messsignal stark. Je besser also der Sensor ist, desto schneller können Sie auch den Beobachter auslegen.



5. *Koeffizientenvergleich* der charakteristischen Polynome aus Schritt 3. und 4. liefert die gesuchten Koeffizienten h_i .

Beispiel 5-1: Beobachterentwurf

Für das System aus 2 Tanks aus Beispiel 2-3 (beobachtbarer Fall) soll ein Beobachter entworfen werden. Die Eigenwerte des Beobachters werden in $s_{B1} = -4$ und $s_{B2} = -5$ vorgegeben.

Dualität von Regler- und Beobachterentwurf

Regler- und Beobachterentwurf sind dual zueinander. Formal kann entsprechend ausgetauscht werden:

Regler		Beobachter
steuerbar	\leftrightarrow	beobachtbar
(A, B)	\leftrightarrow	(A^T, C^T)
K	\leftrightarrow	H^T

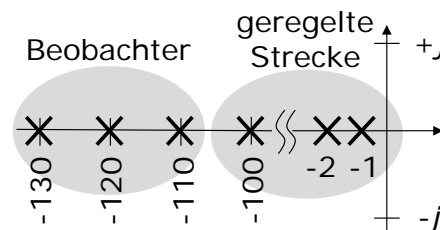
Separationstheorem

Die Eigenwerte des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises werden durch die Einführung des Beobachters nicht verschoben. Zu ihnen treten lediglich die Eigenwerte des Beobachters hinzu.

Ist die Strecke steuer- und beobachtbar, so kann man die Eigenwerte des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises und die Eigenwerte des Beobachters unabhängig voneinander beliebig vorgeben.

Beispiel 5-2: Entwurf eines Beobachters für eine Maschinenachse

- Modell der Strecke ist in Zustandsraum-Darstellung gegeben (Bsp. 1-2)
- Eigenwerte des Beobachters werden links von denen der geregelten Strecke vorgegeben, z.B. in -110 ; -120 ; -130 :



Nach dem Separationstheorem treten die Eigenwerte des Beobachters zu denen der geregelten Strecke hinzu.

- Berechnung der Beobachtermatrix H , z.B. in Matlab unter Nutzung des Dualitätsprinzips: $H = (\text{acker}(A', C', [-110 \ -120 \ -130]))'$

5.3 Entwurf in Beobachtungsnormalform (BNF)

Analog zur Regelungsnormalform gehen auch bei der *Beobachtungsnormalform (BNF)* die Koeffizienten der Übertragungsfunktion bzw. der DGL direkt in die Matrizen der Zustandsraum-Darstellung ein.

Das zugehörige Blockschaltbild (siehe S. 5-5) ist besonders übersichtlich und daher gut geeignet, um ein System (z.B. als analoge Schaltung) zur realisieren.

Die Darstellung in BNF ist dual zur RNF und eignet insbesondere für den Beobachterentwurf.

Systemdarstellung

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

oder die entsprechende DGL eines Systems

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + b_n u^{(n)}(t)$$

jeweils mit der Normierung $a_n = 1$.

Die DGL wird nach der höchsten Ableitung von $y(t)$ aufgelöst und Zustandsvariablen $\bar{x}_i(t)$ in der folgenden Weise definiert:

$$y^{(n)}(t) = \underbrace{b_0 u(t) - a_0 y(t)}_{:= \ddot{\bar{x}}_1(t)} + b_1 \dot{u}(t) - a_1 \dot{y}(t) + \dots + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) - a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + b_n u^{(n)}(t)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{:= \ddot{\bar{x}}_2(t)}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{:= \ddot{\bar{x}}_n^{(n)}(t)}$$

Aus der letzten Definition $y^{(n)}(t) = \bar{x}_n^{(n)}(t) + b_n u^{(n)}$ ergibt sich zunächst die Ausgangsgleichung:

$$y(t) = \bar{x}_n(t) + b_n u(t)$$

Für die Ableitungen der Zustandsgrößen lässt sich jeweils ablesen und für $y(t)$ einsetzen:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = b_0 u(t) - a_0 y(t) = b_0 u(t) - a_0 \bar{x}_n(t) - a_0 b_n u(t)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = b_1 u(t) - a_1 y(t) = b_1 u(t) - a_1 \bar{x}_n(t) - a_1 b_n u(t)$$

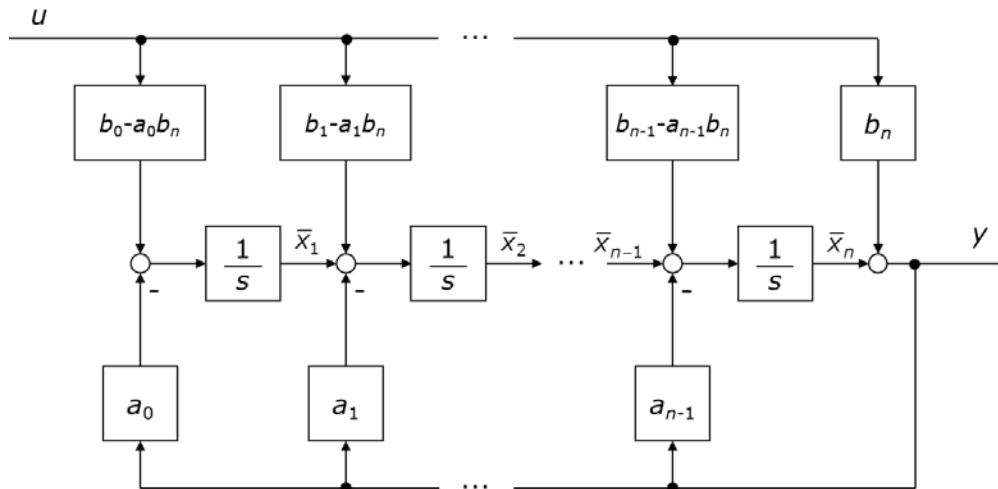
...

$$\dot{\bar{x}}_n(t) = b_{n-1} u(t) - a_{n-1} y(t) = b_{n-1} u(t) - a_{n-1} \bar{x}_n(t) - a_{n-1} b_n u(t)$$

In vektorieller Schreibweise:

$$\dot{\underline{\bar{x}}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{\bar{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}}_{\underline{B}} u(t) \quad \text{sowie}$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \ \dots \ 0 \ 1]}_{\underline{C}} \bar{x}(t) + \underbrace{b_n}_{\underline{D}} u(t)$$

Blockschaltbild**Transformation**

Ein beliebiges System $\dot{x}(t) = \underline{A} x(t) + \underline{B} u(t)$, $y(t) = \underline{C} x(t) + \underline{D} u(t)$ kann durch die Transformation $\bar{x}(t) = \underline{T} \cdot x(t)$ in Beobachtungsnormalform überführt werden.

Dabei ist $\underline{T} = [\underline{e} \ \underline{A} \underline{e} \ \dots \ \underline{A}^{n-1} \underline{e}]^{-1}$ und \underline{e} ist die letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix \underline{Q}_B^{-1}

$$\text{mit } \underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \underline{A} \\ \underline{C} \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Beobachterentwurf

Für das auf BNF transformierte System kann die Beobachtermatrix direkt angegeben werden:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 \\ p_1 - a_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Darin sind p_0, \dots, p_{n-1} die Koeffizienten des vorgegebenen charakteristischen Polynoms, das durch die Vorgabe der Eigenwerte s_{B1}, \dots, s_{Bn} für den Beobachter bestimmt ist:

$$(s - s_{B1}) \cdot (s - s_{B2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{Bn}) = s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0 = 0$$

Die Beobachtermatrix im originalen System erhält man erforderlichen Falls durch Rücktransformation:

$$\underline{H} = \underline{T}^{-1} \cdot \bar{\underline{H}}$$

Beispiel 5-3: Entwurf eines Beobachters in BNF

Ein System ist durch seine Übertragungsfunktion gegeben:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2}$$

Entwerfen Sie einen entsprechenden Beobachter mit der Vorgabe $s_{B1} = s_{B2} = -1$.

5.4 Störbeobachter

Bisher hat der Beobachter sämtliche Zustände \underline{x} der Strecke geschätzt. Ist es möglich, dass der Beobachter zusätzlich externe Störungen, die auf die Strecke wirken, ebenfalls schätzt?

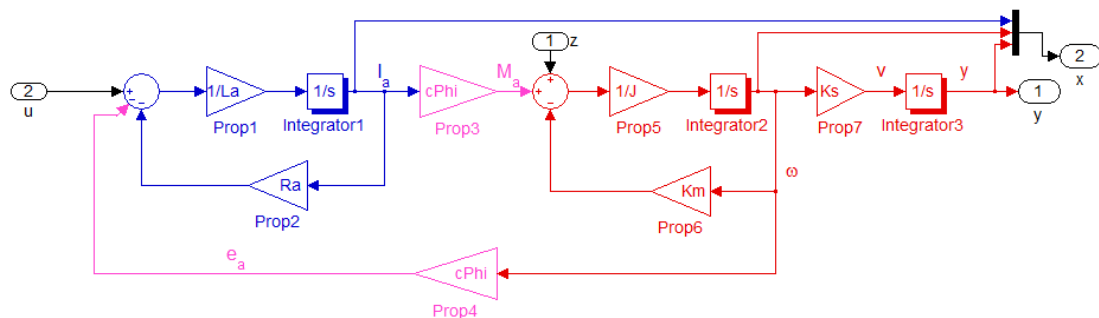
Dazu muss bekannt sein, wie die externe Störung auf die Strecke einwirkt. Das Streckenmodell wird um diese Störgröße erweitert. Die Störgröße kann dann als zusätzliche Komponente in den Zustandsvektor \underline{x} aufgenommen werden. Ist das so erweiterte System beobachtbar, lässt sich ein Beobachter entwerfen, der den erweiterten Zustandsvektor – also auch die hinzugenommene Störgröße – schätzt!

Typische Einsatzfelder eines Störbeobachters sind:

- *Dynamische Sensorsysteme*, in denen die Messgröße nicht direkt auslesbar ist. Die Messgröße kann dann als externe Störung auf die Sensordynamik verstanden werden und so von einem Störbeobachter geschätzt werden.
- Die geschätzte Störgröße kann für eine *Störkompensation* genutzt werden (siehe Abschnitt 6.4).

Beispiel 5-4: Entwurf eines Störbeobachters für eine Maschinenachse

- Das Modell der Strecke (Bsp. 1-2) wird um die Wirkung der Störung z erweitert, z.B. im Blockschaltbild:

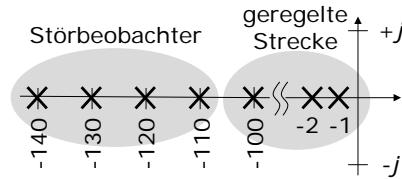


- Der Zustandsvektor wird um die Störung z erweitert: $\underline{x}_z = [I_a \quad \omega \quad y \quad z]^T$ und das entsprechend erweiterte Zustandsraum-Modell aufgestellt:

$$\underline{A}_z = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{c\phi}{L_a} & 0 & 0 \\ \frac{c\phi}{J} & -\frac{K_M}{J} & 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & K_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{B}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{C}_z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

Es dient als Parallel-Modell im Störbeobachter.

- Für den Beobachterentwurf müssen vier Eigenwerte vorgegeben werden, z.B. in -110 ; -120 ; -130 ; -140 :

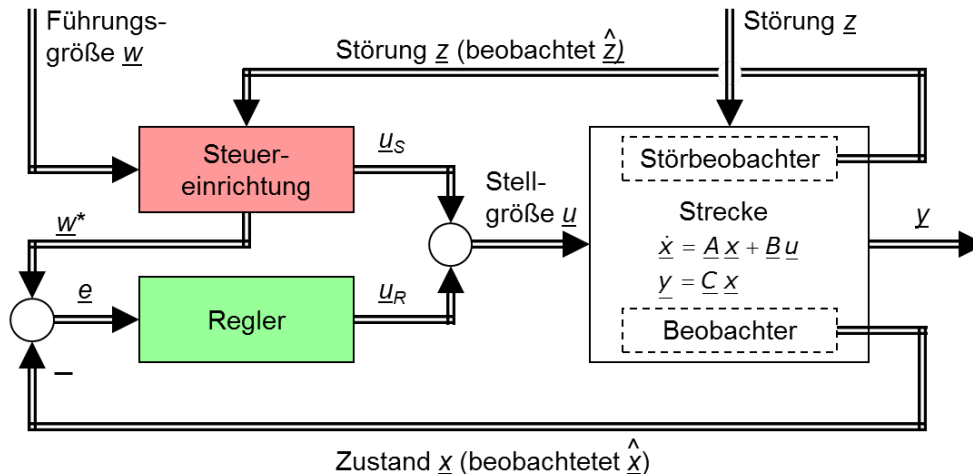


- Berechnung der Beobachtermatrix \underline{H}_{erw} , z.B. in Matlab unter Nutzung des Dualitätsprinzips: $H_z = (\text{acker}(\underline{A}z', \underline{C}z', [-110 \ -120 \ -130 \ -140]))'$

6 Erweiterungen der Regelstruktur

6.1 Zwei-Freiheitsgrade-Struktur

Mit der in Abschnitt 4.1 eingeführten linearen Zustandsrückführung lassen sich über die Eigenwertvorgabe gewünschte dynamische Eigenschaften vorgeben. Wurde das System stabil entworfen, regelt es also mögliche Anfangswertauslenkungen oder temporär wirkende Störungen aus und wird die Zustandstrajektorie \underline{x} in den Ursprung $\underline{0}$ überführen. Damit ist die lineare Zustandsrückführung Teil des reaktiven Systems, das im folgenden Blockschaltbild als „Regler“ bezeichnet wird.



Es gibt aber noch keine Möglichkeit, eine explizite Führungsgröße vorzugeben oder eine bekannte Störung direkt zu kompensieren. Dazu soll die Struktur um eine „Steuereinrichtung“ erweitert werden (siehe Blockschaltbild), welche eine Führungsgröße \underline{w} und eine Störung \underline{z} berücksichtigt. Sie gibt eine Stellgröße \underline{u}_S und eine Führungszustand \underline{w}^* zur Abstimmung mit dem Regler aus.

Man erhält eine *Zwei-Freiheitsgrade-Struktur* (mit einem regelnden und einem steuernden Anteil), wie sie bereits aus der „Mess- und Regelungstechnik“, Abschnitt 10.3 bekannt ist.

Nachfolgend werden vier spezielle Konzepte zum Entwurf von Steuereinrichtung und Regler vorgestellt. Je nach Anforderung der Anwendung kann auch eine Kombination dieser Konzepte sinnvoll sein.

6.2 Statisches Vorfilter

Gesucht ist eine Steuereinrichtung, die im stationären Zustand mit $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{0}$ und bei verschwindender Störung mit $\underline{z} = \underline{0}$ ein stationär genaues Führungsverhalten sicherstellt, d.h. dass im eingeschwungenen Zustand der Ausgang \underline{y} der Führungsgröße \underline{w} entspricht. Wählt man einen linearen Ansatz – wie das bereits für die Zustandsrückführung in Kapitel 4 angesetzt wurde – lässt sich schreiben:

$$\underline{u}_S(t) = \underline{S}_u \underline{w}(t) \quad \text{und} \quad \underline{w}^*(t) = \underline{S}_x \underline{w}(t)$$

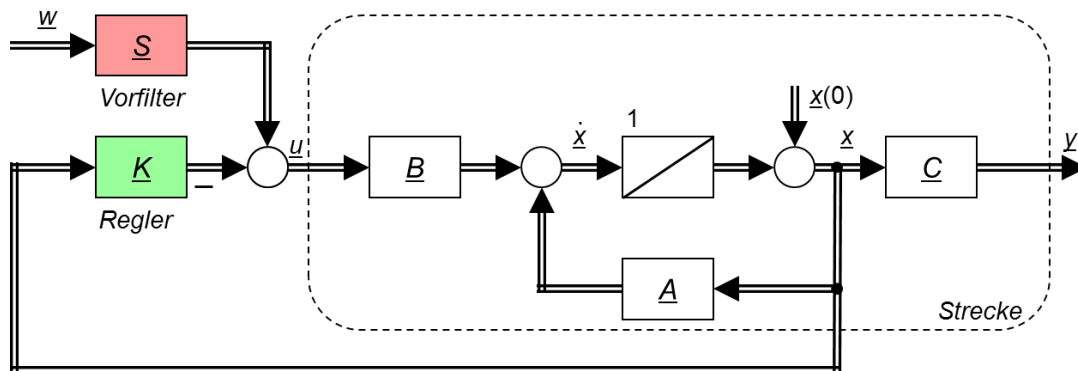
Die Stellgröße berechnet sich folglich als

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_R(t) + \underline{u}_S(t) = \underline{K}(-\underline{x}(t) + \underline{S}_x \underline{w}(t)) + \underline{S}_u \underline{w}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t) + (\underline{K} \underline{S}_x + \underline{S}_u) \underline{w}(t)$$

Mit der Zusammenfassung $\underline{S} = \underline{K} \underline{S}_x + \underline{S}_u$ erhält man eine vereinfachte Struktur

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t) + \underline{S} \underline{w}(t),$$

in der \underline{S} die Aufgabe eines linearen und statischen *Vorfilters* übernimmt. Das Blockschaltbild zeigt die entsprechende Struktur.



Es ist zu beachten, dass bei dieser Struktur kein expliziter Soll-Istwert-Vergleich stattfindet. Die Stellgröße wird stattdessen aus der Superposition eines *Feedback*-Anteils (über \underline{K}) und eines *Feedforward*-Anteils (über \underline{S}) gebildet.

Die Gewichtung der Führungsgröße ist über die *Vorfiltermatrix* \underline{S} möglich, die nun geeignet zu berechnen ist. Setzt man die Gleichung der erweiterten linearen Zustandsrückführung in die Zustandsgleichung der Strecke ein und fordert, dass im stationären Zustand ($\dot{\underline{x}}(t) = 0$) die Führungsgröße \underline{w} gleich der Ausgangsgröße \underline{y} sein soll, erhält man folgende Bedingung zur Berechnung des Vorfilters:

$$\underline{S} = -[\underline{C}(\underline{A} - \underline{B}\underline{K})^{-1} \underline{B}]^{-1}$$

Für jeden Ausgang y_i wird über w_i eine entsprechende Vorgabe gemacht, d.h. auch dass \underline{w} und \underline{y} die gleiche Dimension besitzen. Damit eine Lösung existiert, muss \underline{S} eine quadratische Matrix sein, d.h. die Zahl der Stellgrößen m muss gleich der Zahl der Messgrößen p sein. Für SISO-Systeme ist \underline{S} ein skalarer Verstärkungsfaktor (ein P-Glied).

Anmerkung: Um die Bedingung $m = p$ zu erfüllen, kann sinnvoll sein, für den Entwurf des Vorfilters eine spezielle Wahl für die Ausgangsmatrix \underline{C} zu treffen, die von der üblichen Verwendung als Messmatrix abweicht. Besitzt ein System beispielsweise zwei Zustände $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$ und möchte man für diese den gemeinsamen Mittelwert (über w_1) sowie deren Abweichung zueinander (über w_2) vorgeben, lautet die zur Berechnung von \underline{S} geeignete Ausgangsmatrix:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Der gezeigte Ansatz ist einfach und in vielen Anwendungen gut verwendbar. Er besitzt aber prinzipiell zwei praktische Nachteile:

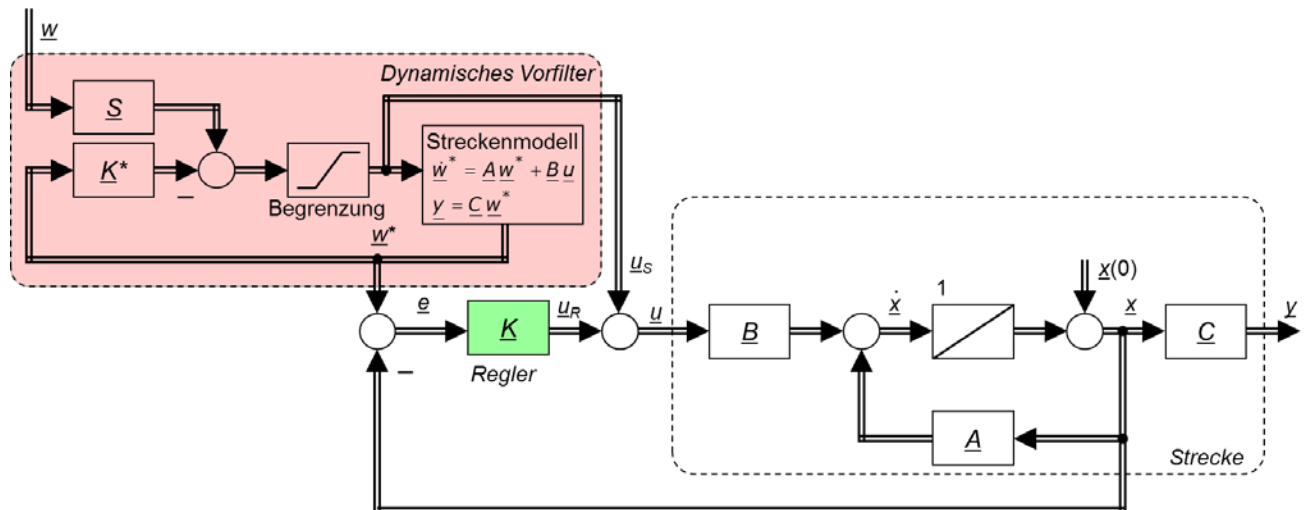
1. Sprunghafte Führungsgrößen \underline{w} führen meist zu großen Stellgrößen, die den Wertebereich überschreiten können. Dann ist ein dynamisches Vorfilter (Abschnitt 6.3) von Vorteil.
2. Konstante Störungen oder Abweichungen bei der Modellierung der Strecke führen zu bleibenden Regelabweichungen. Ist z.B. mit andauernden Störungen der Strecke zu rechnen, ist eine integrale Ausgangsrückführung (Abschnitt 6.5) besser geeignet.

Beispiel 6-1: Berechnung eines Vorfilters

Berechnen Sie für das System aus Beispiel 4-1 ein Vorfilter, das stationäre Genauigkeit herstellt.

6.3 Dynamisches Vorfilter

Auf Basis des Streckenmodells, einer linearen Zustandsrückführung (mit Reglermatrix \underline{K}^*) und einem statischen Vorfilter (mit Vorfiltermatrix \underline{S}) kann eine Simulation des geschlossenen Regelkreises betrieben werden. Diese Simulation liefert dann eine Zustandstrajektorie und den zugehörigen Stellgrößenverlauf. Dies kann als Vorgabe eines Führungszustands $\underline{w}^*(t)$ mit entsprechendem Stellgrößenverlauf $\underline{u}_s(t)$ verwendet werden, siehe Blockschaltbild.



Wird zunächst der Regler $\underline{K}^* = \underline{K}$ für die Simulation im dynamischen Vorfilter verwendet, wird auch $\underline{u}_s(t)$ den Wertebereich der Stellgröße in gleicher Weise überschreiten. Dies kann aber nun verbessert werden, in dem entweder

- der Regler \underline{K}^* mit anderer Eigenwertvorgabe langsamer ausgelegt wird oder
- in der Simulation eine (nichtlineare) Begrenzung der Stellgrößen eingeführt wird (siehe Blockschaltbild).

Anmerkung: Bei dynamischen Vorgaben der Führungsgröße wird es zu einem *Schleppfehler* kommen. Dies lässt sich durch eine Folgeregelung verbessern, die in Abschnitt 7.3 vorgestellt wird.

Beispiel 6-2: Regelung einer Maschinenachse mit statischem und dynamischen Vorfilter

Entwerfen Sie für das System der Maschinenachse aus Beispiel 4-2 ein statisches und ein dynamisches Vorfilter und vergleichen Sie die Reaktionen auf einen Führungssprung.

6.4 Störkompensation

Neben der Vorsteuerung von Führungsgrößen (wie in den Abschnitten 6.2 und 6.3) kann auch die Kompensation von Störungen Aufgabe der Steuereinrichtung sein (vgl. Blockschaltbild in Abschnitt 6.1).

Können Störungen auf die Strecke zwar nicht vermieden, aber doch gemessen oder wenigstens beobachtet werden (siehe Abschnitt 5.4), so kann eine *Störkompensation* entworfen

werden. Unter der Annahme $\underline{w} = \underline{0}$ soll sie die Stellgröße \underline{u}_s so bestimmen, dass die Störung bestmöglich kompensiert wird.

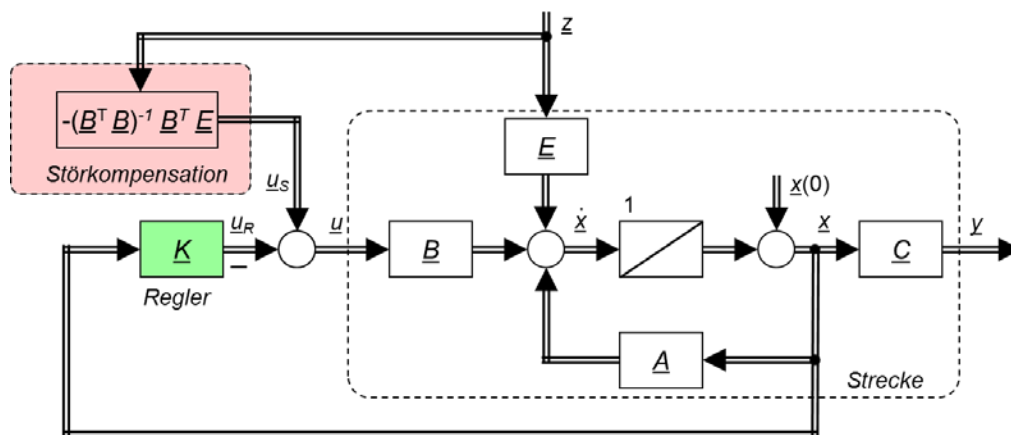
Das Modell der Strecke wird um die Wirkung der Störung \underline{z} erweitert:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{E} \underline{z}(t)$$

Eine im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimale Störkompensation ist:

$$\underline{u}_z(t) = -(\underline{B}^T \underline{B})^{-1} \underline{B}^T \underline{E} \underline{z}(t)$$

Im nachstehenden Blockschaltbild ist eine lineare Zustandsrückführung um eine Störkompensation erweitert worden:



Anmerkung: Falls \underline{z} keine zeitlich konstante Störung ist, sondern ihre zeitliche Änderung durch ein Modell beschrieben werden kann, so kann ein Störmodell ergänzt werden (Details z.B. in Föllinger: Regelungstechnik).

Beispiel 6-3: Kompensation von Prozesskräften für eine Maschinenachse

Durch Prozesskräfte wirkt ein externes Moment $M_p(t)$ als Störung auf die Maschinenachse, so dass in Erweiterung zu Beispiel 1-2 gilt:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_a(t) - M_r(t) + M_p(t)$$

Wie lautet die entsprechende Matrix \underline{E} ? Zeigen Sie, dass in diesem Fall keine Störkompensation möglich ist.

6.5 Integrale Ausgangsrückführung

Beim klassischen PI-Regler dient beispielsweise der I-Anteil dazu, eine Regelabweichung langfristig auszuregulieren. Diesem Gedanken folgend kann auch für ein System in Zustandsraum-Darstellung ein Soll-Istwert-Vergleich ergänzt werden, dessen Regelfehler auf einen Integrator geführt wird:

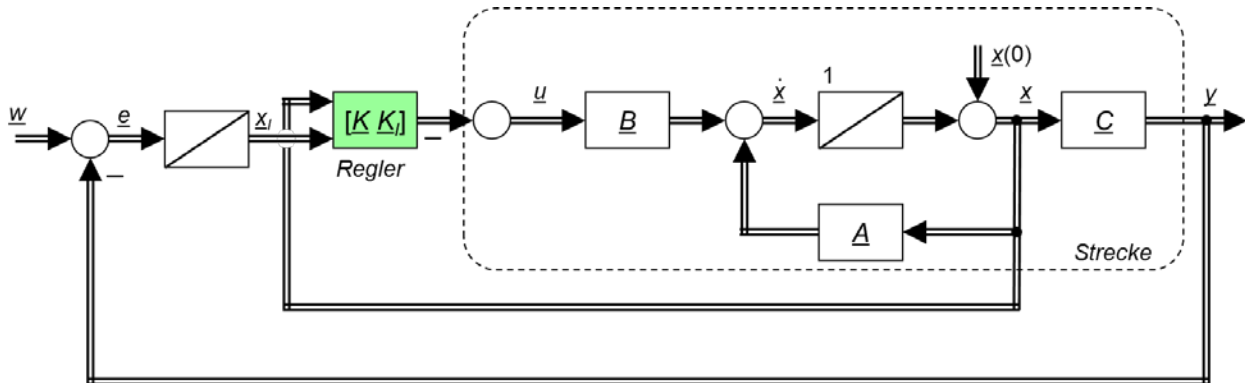
- Analog zum klassischen Regelkreis wird ein Soll-Istwert-Vergleich eingeführt:

$$\underline{e}(t) = \underline{w}(t) - \underline{y}(t)$$

- Die Regeldifferenz $\underline{e}(t)$ wird integriert. Der Ausgänge des Integrators werden als neue Zustände $\underline{x}_I(t)$ eingeführt, die den bisherigen Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ erweitern:

$$\underline{x}_I(t) = \int_0^t \underline{e}(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad \underline{x}_{erw}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_I(t) \end{bmatrix}$$

Diese Reglerstruktur ist nachfolgend im Blockschaltbild dargestellt:



Im stationären Zustand müssen die Ausgänge des Integrators $\underline{x}_I(t)$ konstant sein. Das ist nur möglich, falls die Eingänge des Integrators $\underline{e}(t)$ Null sind – somit verschwindet die Regeldifferenz und die Regelung arbeitet stationär genau!

Reglerentwurf

Formal kann die Erweiterung der integralen Ausgangsrückführung der Strecke zugeschlagen werden:

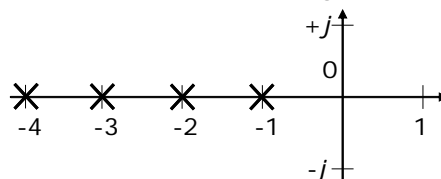
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_I(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ -\underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{erw}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_I(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}_{erw}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix}}_{\underline{B}_{erw}} u(t) + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{I} \end{bmatrix} \underline{w}(t)$$

Für die so erweiterte Strecke (\underline{A}_{erw} , \underline{B}_{erw}) kann in bekannter Weise eine lineare Zustandsrückführung $\underline{K}_{erw} = [\underline{K} \quad \underline{K}_I]$ entworfen werden.

Es handelt sich hierbei also im Wesentlichen um den Entwurf des Reglers – mit dem Trick, einen zusätzlichen Integrator einzuführen und diesen für den Reglerentwurf der Strecke zuzuordnen. (Als Teil einer Steuereinrichtung kann die Einkopplung von $\underline{w}(t)$ aufgefasst werden.)

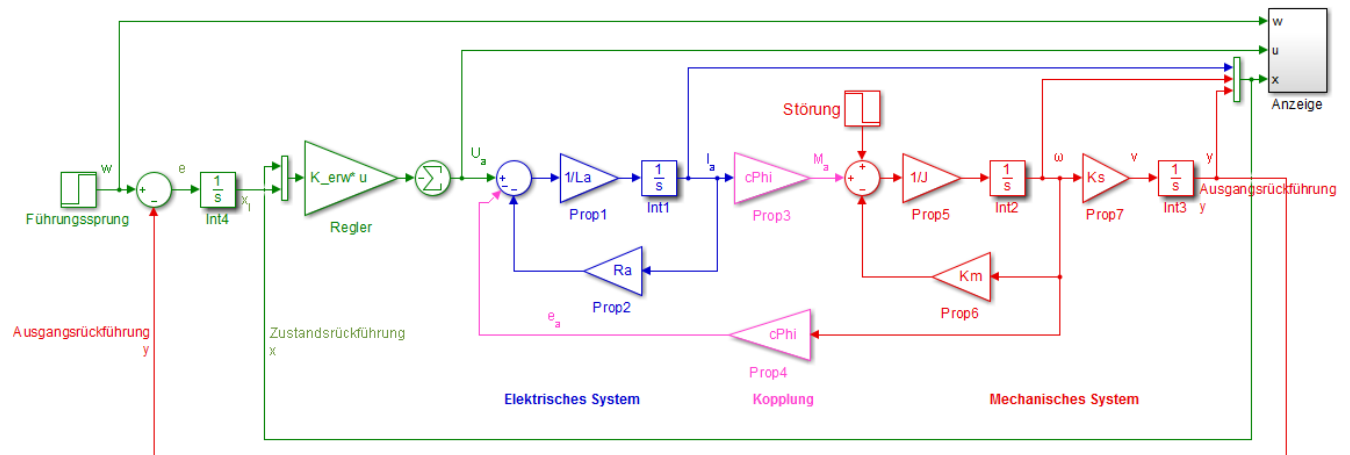
Beispiel 6-4: Entwurf einer Zustandsregelung mit integraler Ausgangsrückführung für eine Maschinenachse

Die integrale Ausgangsrückführung wird in Simulink implementiert (siehe umseitiges Bild). Für den Entwurf werden die Matrizen \underline{A}_{erw} und \underline{B}_{erw} der erweiterten Strecke bestimmt, diese hat jetzt die Ordnung $n = 4$. Entsprechend sind 4 Eigenwerte vorzugeben, z.B.:

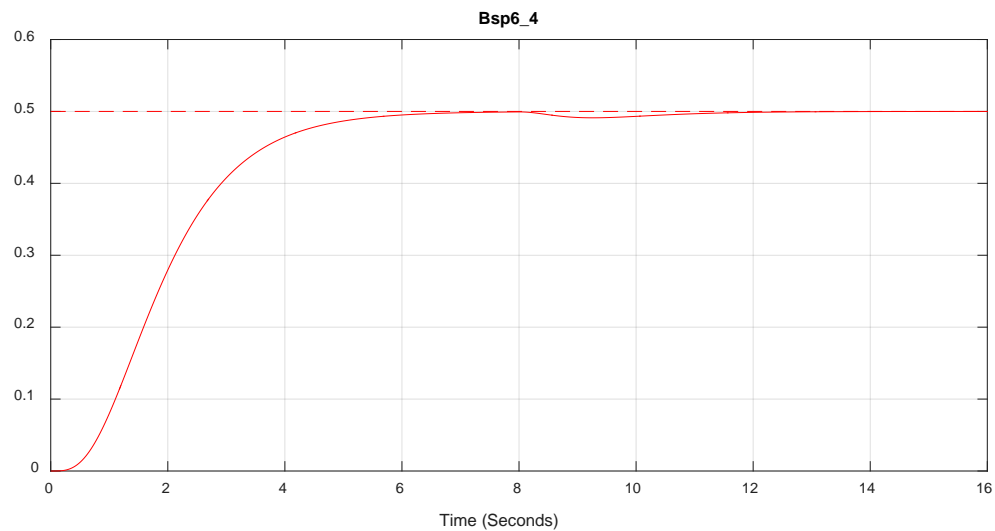


Der Regler kann z.B. mit der Control Toolbox in Matlab bestimmt werden:

```
K_erw = acker(A_erw,B_erw,[-1 -2 -3 -4]);
```



Die numerische Simulation zeigt das Einregeln nach einem Führungssprung auf 0,5m in $t = 0s$ sowie nach einem zusätzlichen Störungssprung auf $-100Nm$ in $t = 8s$.

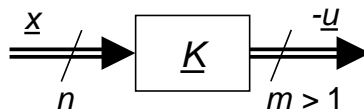


7 Mehrgrößen-Regelung

Wenngleich die in Abschnitt 4.1 eingeführte Struktur der linearen Zustandsrückführung mehrere Stellgrößen ($m > 1$) mit einschloss, wurden der in den Abschnitten 4.2 und 4.3 vorgestellte Reglerentwurf durch Eigenwertvorgabe nur für Systeme mit einer Stellgröße ($m=1$) angewandt.

Stehen mehrere Stelleingänge zur Verfügung ($m > 1$) ist für eine Regelung prinzipiell günstig, da sich damit die Möglichkeiten, auf die Strecke einzuwirken, erhöhen. Allerdings muss diese größere „Freiheit“ im Entwurf gestaltet werden!

Die Reglermatrix \underline{K} hat die Dimension (m, n):



Von den $n \cdot m$ Elementen in \underline{K} können aber nur n durch die Eigenwertvorgabe festgelegt werden. Durch die Bestimmung der $n \cdot (m-1)$ weiteren Elemente in \underline{K} können zusätzliche Forderungen erfüllt werden, z.B.:

- Bei der Vollständig Modalen Synthese (Abschnitt 7.1) werden diese Freiheitsgrade durch wählbare Parametervektoren explizit beschrieben.
- Der Entwurf auf Ein-/Ausgangsentkopplung (Abschnitt 7.2) hat zum Ziel, zu jedem Ausgang gehörige Subsysteme zu bilden, die im geregelten System voneinander dynamisch entkoppelt sind. Dies ist insbesondere für die Regelung mechanischer Mehrgrößensysteme wie Roboter interessant.
- Der Linear Quadratische Optimalregler (siehe Kapitel 9) minimiert eine Kostenfunktion. So können beispielsweise Regler entworfen werden, die den Energieverbrauch minimieren.

7.1 Vollständig modale Synthese

Durch die *Vollständige modale Synthese* können die Koeffizienten der Reglermatrix \underline{K} explizit berechnet werden:

$$\underline{K} = [\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n] \cdot \left[(\underline{A} - s_{R1} \underline{I})^{-1} \underline{B} \underline{p}_1, \dots, (\underline{A} - s_{Rn} \underline{I})^{-1} \underline{B} \underline{p}_n \right]^{-1}$$

Darin sind s_{Ri} die frei vorzugebenden Eigenwerte des geregelten Systems und \underline{p}_i frei wählbare Parametervektoren, deren Wahl unabhängig von den Eigenwerten s_{Ri} des geregelten Systems ist.

Über die Festlegung der Eigenwerte sind n Freiheitsgrade bestimmt. Die n Parametervektoren der Länge m besitzen jeweils einen frei wählbaren, skalaren Faktor und legen somit insgesamt $n \cdot (m-1)$ Freiheitsgrade fest. Somit sind alle $n \cdot m$ Elemente von \underline{K} definiert.

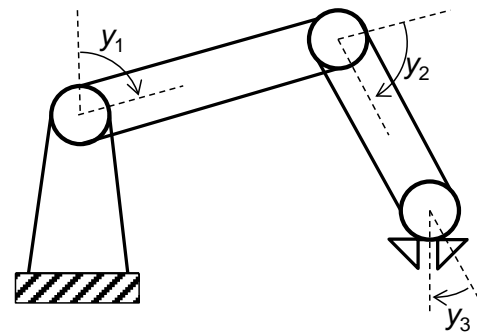
Beispiel 7-1: Entwurf durch vollständig modale Synthese

Entwerfen Sie einen Regler mittels vollständiger modaler Synthese für das Eingrößensystem:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

7.2 Entwurf durch Ein-/Ausgangsentkopplung

Als Beispiel für ein mechanisches Mehrgrößensystem ist nebenstehend ein Roboter mit 3 Achsen dargestellt. Das unregelte System stellt vom Prinzip her ein Mehrfachpendel dar, dessen Achsen verkoppelt sind. Kinetische Energie kann z.B. von einem Segment an ein benachbartes übertragen werden. Die 3 Achsen sind im unregulierten System also verkoppelt.



Eine Regelung soll eine geeignete Dynamik für das Gesamtsystem vorgeben. Werden die Achswinkel des Roboters als Ausgänge der Strecke zusammengefasst

$\underline{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$, so wäre es darüber hinaus wünschenswert, dass das dynamische Verhalten der 3 Achsen im geregelten System voneinander entkoppelt ist. Das ist das Ziel der Reglerentwurfs durch Ein-/Ausgangsentkopplung.

Relativer Grad und Nulldynamik

Der relative Grad r_i des Ausgangs $y_i(t)$ gibt an, wie oft diese Ausgangstrajektorie $y_i(t)$ zeitlich differenziert werden muss, bis sie eine Funktion eines Eingangs in $\underline{u}(t)$ ist.

Zur Bestimmung des relativen Grades differenziert man für alle Ausgangsgröße y_i sukzessive:

- | | |
|--|--|
| Ist $\underline{c}_i^T \underline{B} = \underline{0}$? | falls nein: $r_i = 1$, sonst weiter ... |
| Ist $\underline{c}_i^T \underline{A} \underline{B} = \underline{0}$? | falls nein: $r_i = 2$, sonst weiter ... |
| Ist $\underline{c}_i^T \underline{A}^2 \underline{B} = \underline{0}$? | falls nein: $r_i = 3$, sonst weiter ... |
| bis $\underline{c}_i^T \underline{A}^{r_i-1} \underline{B} \neq \underline{0}$ | erreicht ist. |

Darin ist \underline{c}_i^T die Zeile i der Ausgangsmatrix \underline{C} . Für den relativen Grad des Gesamtsystems gilt:

$$r = \sum_{i=1}^p r_i \leq n$$

Im Fall $r = n$ ist das System vollständig entkoppelbar, das heißt dass seine gesamte Dynamik durch die Vorgabe der Ein-/Ausgangsdynamik bestimmt werden kann. Im Fall $r < n$ besitzt das System eine *interne Dynamik* (oder *Nulldynamik*) mit der Ordnung $n-r$, die unabhängig von der Ein-/Ausgangsdynamik ist. Damit ein Regler erfolgreich entworfen werden kann, muss diese Nulldynamik stabil sein.

Es kann gezeigt werden, dass die Nullstellen der Übertragungsfunktion der Strecke den Eigenwerten der Nulldynamik entsprechen. Es muss also vorausgesetzt werden, dass keine Nullstelle der Strecke in der rechten komplexen Halbebene liegt (dass das zu regelnde System also *minimalphasig* ist), um einen Regler zur Ein-/Ausgangsentkopplung entwerfen zu können.

Reglerentwurf zur Ein-/Ausgangsentkopplung und Eigenwertvorgabe

Es soll eine lineare Zustandsrückführung in der bekannten Struktur

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t)$$

entworfen werden, die folgende Ziele erreicht:

- Die Subsysteme $i=1, \dots, p$, die den jeweiligen Ausgängen y_i zugeordnet sind, sollen dynamisch entkoppelt werden.
- Die Ordnung dieser Subsysteme $i=1, \dots, p$ entspricht dem jeweiligen relativen Grad r_i . Für jedes Subsystem sollen entsprechend r_i Eigenwerte vorgegeben werden können.

Es wird nachfolgend vorausgesetzt, dass es ebenso viele Stellgrößen wie Ausgangsgrößen gibt ($m = p$).

Zunächst wird die *Kopplungsmatrix* \underline{D}^* berechnet:

$$\underline{D}^* = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{r_1-1} \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{r_m-1} \underline{B} \end{bmatrix}$$

Die Zeilen der Kopplungsmatrix wurden übrigens bereits bei der Bestimmung des relativen Grads berechnet. Die Kopplungsmatrix \underline{D}^* gibt an, wie der Eingang \underline{u} auf die jeweilige r_i -te Ableitung des Ausgangs y_i wirkt:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_m)} \end{bmatrix} = \underline{D}^* \underline{u}(t)$$

Für das Subsystem i werden die Eigenwerte $s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,r_i}$ vorgegeben. Die Koeffizienten des jeweils zugehörigen charakteristischen Polynoms lauten:

$$(s - s_{i,1})(s - s_{i,2}) \cdots (s - s_{i,r_i}) = q_{i0} + q_{i1}s + q_{i2}s^2 + \dots + q_{i,r_i-1}s^{r_i-1} + s^{r_i}$$

Die Reglermatrix berechnet sich dann als:

$$\underline{K} = (\underline{D}^*)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_{10} \underline{c}_1^T + q_{11} \underline{c}_1^T \underline{A} + q_{12} \underline{c}_1^T \underline{A}^2 + \dots & + \underline{c}_1^T \underline{A}^{r_1} \\ \vdots \\ q_{m0} \underline{c}_p^T + q_{m1} \underline{c}_p^T \underline{A} + q_{m2} \underline{c}_p^T \underline{A}^2 + \dots & + \underline{c}_p^T \underline{A}^{r_m} \end{bmatrix}$$

7.3 Entwurf eines statischen Vorfilters

Der einfachste Weg eine Führungsgröße für die Regelung vorzugeben, ist die Erweiterung auf ein statisches Vorfilter (vgl. Abschnitt 6.2):

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t) + \underline{S} \underline{w}(t)$$

Um die Übertragungsfunktion

$$G_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = \frac{p_{i0}}{q_{i0} + q_{i1}s + q_{i2}s^2 + \dots + q_{i,r_i-1}s^{r_i-1} + s^{r_i}}$$

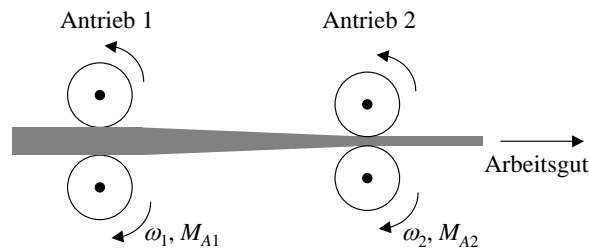
für das Subsystem i vorzugeben, wird die Vorfiltermatrix zu

$$\underline{S} = (\underline{D}^*)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_{10} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{m0} \end{bmatrix}$$

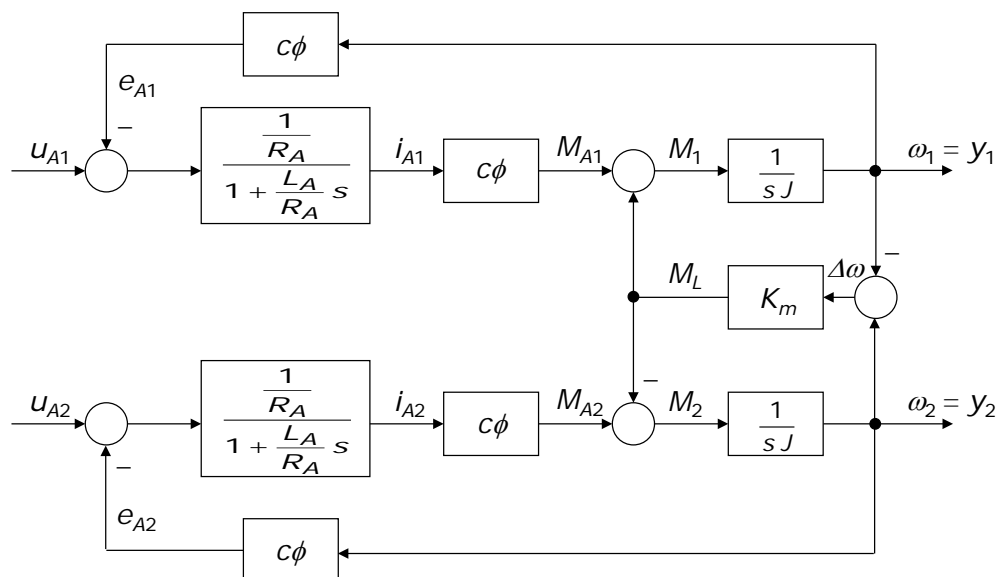
gewählt. Stationäre Genauigkeit wird also gewährleistet, wenn $p_{10} = q_{10}$ gewählt wird.

Beispiel 7-2: Reglerentwurf für eine Durchlaufpresse

In einem Walzwerk wird das durchlaufende Arbeitsgut aufgrund unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeiten zweier aufeinander folgender Walzen plastisch verformt.



Es werden zwei identische Antriebe mit fremderregten Gleichstrommaschinen verwendet. Das durch plastische Verformung entstehende Moment M_L kann als proportional zur Differenz der Winkelgeschwindigkeiten $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0$ angenommen werden. Es ergibt sich das folgende Blockschaltbild:



Parameter der Strecke:

$R_A = 0.5$	Widerstand des Ankerkreises
$L_A = 1$	Induktivität des Ankerkreises
$c\phi = 10$	Produkt aus Maschinenkonstante und Hauptfluss
$J = 5$	Trägheitsmoment des Antriebs
$K_m = 20$	Proportionalitätskonstante zwischen Drehzahldifferenz und Lastmoment

Führen Sie für dieses Mehrgrößensystem einen Regelentwurf mit Ein-/Ausgangsentkopplung durch. Bestimmen Sie dazu die Systemdarstellung im Zustandsraum und die relativen Grade r_1 und r_2 . Prüfen Sie, ob das System entkoppelbar ist. Bestimmen Sie die Reglermatrix \underline{K} für die Eigenwertvorgabe $s_1 = s_2 = -5$ für beide Teilsysteme sowie die Vorfiltermatrix \underline{S} .

7.4 Erweiterung zu einer Folgeregelung

Es gibt Anwendungen, bei denen es nur darauf ankommt, dass der Zielzustand präzise erreicht wird. In diesem Fall genügt die Berücksichtigung der Führungsgröße über das Vorfilter. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn ein Roboter eine „Pick and Place“ Aufgabe lösen muss. Der Roboter muss den Aufnahme- und Ablagepunkt genau erreichen, für den Bahnverlauf dazwischen kann ein *Schleppfehler* toleriert werden.

Wird ein Roboter hingegen z.B. zum Kleben oder Schweißen eingesetzt, muss auch der Bahnverlauf präzise (ohne Schleppfehler) eingehalten werden. Dies ist Aufgabe einer *Folgeregelung*.

Für die Erweiterung auf eine Folgeregelung wird das dynamische Verhalten des Folgefehlers im Subsystem i betrachtet:

$$e_i(t) = y_i(t) + w_i(t)$$

Die Dynamik des Folgefehlers im Subsystem i kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$p_{i0} e_i(t) + p_{i1} \dot{e}_i(t) + \dots + p_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)}(t) + e_i^{(r_i)}(t) = 0$$

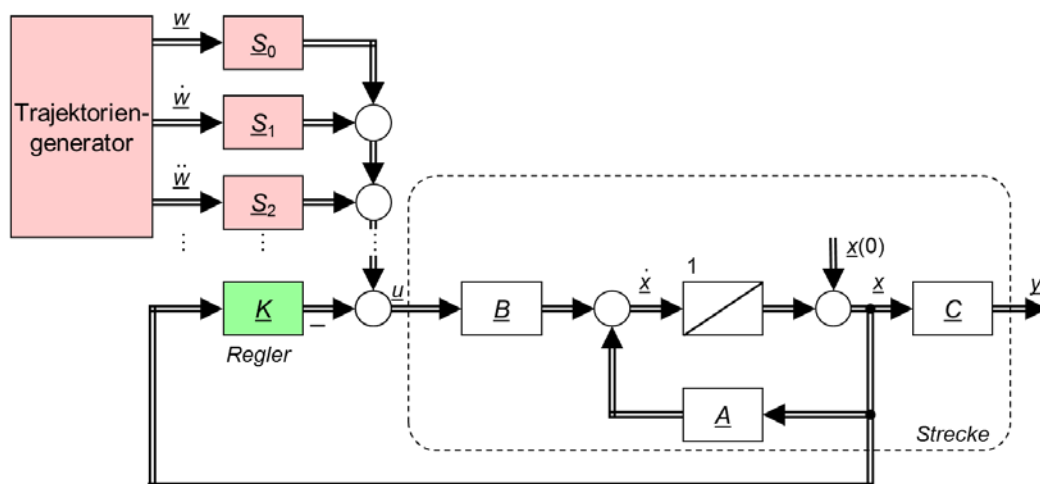
Über die Koeffizienten $p_{i,j}$ kann eine gewünschte Fehlerdynamik eingestellt werden. Die Regelungsstruktur, die diese Dynamik im geregelten System einstellt, lautet:

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t) + (\underline{D}^*)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_{10} w_1(t) + p_{11} \dot{w}_1(t) + p_{1,r_1-1} w_1^{(r_1-1)}(t) + \dots + w_1^{(r_1)}(t) \\ \vdots \\ p_{m0} w_p(t) + p_{m1} \dot{w}_m(t) + p_{m,r_m-1} w_p^{(r_m-1)}(t) + \dots + w_m^{(r_m)}(t) \end{bmatrix}$$

Man kann dieses auch als Superposition der Führungsgröße und ihrer Ableitungen mit den Vorfiltern $\underline{S}_0, \underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots$ interpretieren. Es gilt

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \underline{x}(t) + \underline{S}_0 \underline{w}(t) + \underline{S}_1 \dot{\underline{w}}(t) + \underline{S}_2 \ddot{\underline{w}}(t) + \dots \quad \text{mit} \quad \underline{S}_j = (\underline{D}^*)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_{1,j} & \underline{0} \\ & \ddots \\ \underline{0} & p_{m,j} \end{bmatrix}$$

und dem entsprechenden Blockschaltbild:



Die Ableitungen der Führungsgröße müssen in der Regel nicht explizit differenziert werden, da es sich nicht um ein gemessenes Signal handelt, sondern um eine Sollvorgabe, die z.B. von einem *Trajektorien-generator* definiert wird. Liefert dieser Trajektorien-generator nicht nur die Vorgabe $\underline{w}(t)$, sondern zusätzlich die benötigten Ableitungen $\dot{\underline{w}}(t), \ddot{\underline{w}}(t), \dots$, können diese direkt genutzt werden (siehe vorstehendes Blockschaltbild).

Häufig ist es nicht erforderlich, das Fehlerpolynom bis zur jeweiligen Ordnung n_i zu verwenden, sondern man bricht bei niedrigerer Ordnung ab. Mit $p_{i1} = q_{i1}$ kann sichergestellt werden, dass einer Rampenfunktion ohne Schleppfehler gefolgt werden kann. Entsprechend wird mit $p_{i2} = q_{i2}$ einer quadratischen Führungsfunktion exakt gefolgt, etc.

Beispiel 7-2 (Fortsetzung): Reglerentwurf für eine Durchlaufpresse

Ergänzen Sie den Reglerentwurf um einen Trajektorien-generator und erweitern die Vorsteuerung zur Folgeregelung.

Teil C: Optimaler Entwurf

8 Einführung in die optimale Regelung

Ergänzend zum Reglerentwurf durch Eigenwertvorgabe sollen im Folgenden Verfahren zum *optimalen Reglerentwurf* vorgestellt werden. Diese eignen sich insbesondere bei Mehrgrößensystemen (bei denen keine eindeutige Festlegung über die Eigenwertvorgabe möglich ist) oder dann, wenn z.B. die Minimierung des Energieverbrauchs Entwurfsziel ist, was bei der Eigenwertvorgabe nicht direkt berücksichtigt werden kann.

8.1 Kostenfunktionen

Um quantitativ zu bewerten, was „optimal“ ist, wird eine *Kostenfunktion* eingeführt. Sie ist also ein Maß, das z.B. den zeitlichen Verlauf (Trajektorien) von Zuständen oder Stellgröße bewertet.

Eine Kostenfunktion, welche für das im Allgemeinen nichtlineare System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \quad \text{mit} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

die Zustände $\underline{x}(t)$ und die Stellgröße $\underline{u}(t)$ in einem Zeitintervall der Länge T bewertet, kann wie folgt definiert werden:

$$J(\underline{x}_0, \underline{u}(t)) = \varphi(\underline{x}(T)) + \int_0^T \ell(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt$$

Die Funktion ℓ bewertet darin Zustände und Stellgrößen in ihrem zeitlichen Verlauf innerhalb des Intervalls T ; φ ermöglicht eine abschließende Bewertung der Zustände am Ende des Intervalls. Eine sinnvolle Definition der Funktionen ℓ und φ liegt im Ermessen desjenigen, der den optimalen Entwurf durchführt.

Ein möglicher Ansatz ist die Verwendung quadratischer Formen der Zustände und Stellgrößen:

$$\ell(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) := \frac{1}{2} \underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) + \frac{1}{2} \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t)$$

$$\varphi(\underline{x}(T)) := \frac{1}{2} \underline{x}^T(T) \underline{S} \underline{x}(T)$$

Darin sind \underline{Q} , \underline{R} und \underline{S} Gewichtungsmatrizen. \underline{Q} und \underline{S} gewichten die Zustände und werden positiv semi-definit vorausgesetzt, während \underline{R} die Stellgrößen gewichtet und positiv definit vorausgesetzt wird (vgl. Kasten auf der nächsten Seite).

Der Regler, der die Kostenfunktion $J(\underline{x}_0, \underline{u}(t))$ minimiert, wird als optimaler Regler bezeichnet. Die Berechnung dieses Reglers für lineare dynamische Systeme wird in Kapitel 9 vorgestellt.

Positiv, negativ (semi-)definite und indefinite Funktionen und Matrizen

Eine Funktion $V(\underline{x})$ heißt

- positiv definit, falls $V(\underline{x}) = 0$ für $\underline{x} = \underline{0}$ und $V(\underline{x}) > 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- positiv semidefinit, falls $V(\underline{x}) = 0$ für $\underline{x} = \underline{0}$ und $V(\underline{x}) \geq 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- negativ definit, falls $V(\underline{x}) = 0$ für $\underline{x} = \underline{0}$ und $V(\underline{x}) < 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- negativ semidefinit, falls $V(\underline{x}) = 0$ für $\underline{x} = \underline{0}$ und $V(\underline{x}) \leq 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- andernfalls ist $V(\underline{x})$ indefinit.

Eine Matrix \underline{P} heißt

- positiv definit, falls alle für alle Eigenwerte gilt: $\lambda_i > 0$
- positiv semidefinit, falls alle für alle Eigenwerte gilt: $\lambda_i \geq 0$
- negativ definit, falls alle für alle Eigenwerte gilt: $\lambda_i < 0$
- negativ semidefinit, falls alle für alle Eigenwerte gilt: $\lambda_i \leq 0$
- andernfalls ist $V(\underline{x})$ indefinit.

Die genannten Eigenschaften für $V(\underline{x})$ bzw. die symmetrische Matrix \underline{P} entsprechen sich über die quadratische Form:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$$

Zur Anwendung des Gütekriteriums auf Basis quadratischer Formen:

Kennt man die Gestalt der Gewichtungsmatrizen nicht, kann man sie als Diagonalmatrizen mit positiven Diagonalelementen annehmen

$$\underline{Q} = \text{diag}(q_1 \dots q_n), \quad \underline{S} = \text{diag}(s_1 \dots s_n) \quad \text{und} \quad \underline{R} = \text{diag}(r_1 \dots r_m) \quad \text{mit} \quad q_i, s_i \geq 0 \quad \text{und} \quad r_i > 0$$

und initial alle Diagonalelemente auf Eins setzen, um dann die Kostenfunktion schrittweise zu modifizieren:

- Eine Vergrößerung von \underline{Q} im Verhältnis zu \underline{R} führt auf ein schnelleres Einschwingen der Zustände aber folglich auch zu höheren Werten der Stellgrößen.
- Vergrößert man umgekehrt \underline{R} im Verhältnis zu \underline{Q} , erhält man ein langsames aber energieeffizienteres System.
- Ist das rasche Einschwingen eines speziellen Zustands x_i besonders wichtig, vergrößert man das zugehörige Gewicht q_i .
- Ist der Einsatz einer speziellen Stellgröße u_i besonders „teuer“ im Vergleich zu anderen Stellgrößen, kann ihr Einsatz reduziert werden, indem das zugehörige Gewicht r_i vergrößert wird.

Wird in einer Anwendung mit dimensionsbehafteten Zuständen und Stellgrößen gearbeitet, haben die zugehörigen Gewichte die inverse Dimension im Quadrat. Wird z.B. x_1 in m gemessen, so kann für q_1 die Einheit $1/\text{m}^2$ gewählt werden, damit J dimensionslos ist. Je nach Wahl der Dimension (z.B. wären auch μm oder km möglich!) kann der Zahlenwert der Koeffizienten in sehr unterschiedlichen Größenordnungen liegen.

8.2 Dynamische Programmierung

Das *Optimalitätsprinzip* (nach Bellman) lautet:

Eine Gesamtstrategie kann nur optimal sein, wenn jede Reststrategie optimal ist, ganz gleich, von welchem Zwischenzustand sie ausgeht.

Diese notwendige Voraussetzung für ein optimales dynamisches System kann genutzt werden, um Optimierungsaufgaben effizient zu lösen. Von einem vorgegebenen Startzustand aus müssen nicht alle möglichen Kombinationen von Stellgrößen durchgespielt und jeweils bewertet werden, um die beste Strategie (=Folge von Stellgrößen) zu finden.

Rückwärts vom Ziel beginnend kann man für Zwischenzustände deren optimale *Überführungskosten* zum Ziel jeweils notieren. Um die optimale Strategie für davor liegende Zustände zu finden, genügt es nun, die optimale Teilstrategie zu einem der Zwischenzustände zu finden. Durch dieses Vorgehen der *dynamischen Programmierung* reduziert sich der Aufwand zur Suche der optimalen Strategie u.U. erheblich.

Mit der Kostenfunktion aus Abschnitt 8.1 gilt für die Überführungskosten:

$$V(\underline{x}(t), t) = \min_{\underline{u}(\cdot)} \left[\int_t^T \ell(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau), \tau) d\tau + \phi(\underline{x}(T)) \right]$$

Führt man einen Zwischenzustand zum Zeitpunkt t' ein, lassen sich die Überführungskosten aufteilen und das Optimalitätsprinzip anwenden:

$$V(\underline{x}(t), t) = \min_{\underline{u}(\cdot)} \left[\underbrace{\int_t^{t'} \ell(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau), \tau) d\tau}_{\text{Teilstrategie}} + \underbrace{\int_{t'}^T \ell(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau), \tau) d\tau + \phi(\underline{x}(T))}_{\text{nach Optimalitätsprinzip} = V(\underline{x}(t'), t')} \right]$$

Entwickelt man die Überführungskosten $V(\underline{x}(t), t)$ im Zeitpunkt t in eine Taylorreihe, bricht für Teilstrategien mit kleinem Zeitschritt $\Delta t = t' - t$ nach dem linearen Glied ab und setzt $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)$ ein, so erhält man die *Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung* als Bedingung für optimale Systeme:

$$0 = V_t(\underline{x}(t), t) + \min_{\underline{u}(t)} [\ell(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) + \underline{V}_x^T(\underline{x}(t), t) \cdot \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)]$$

Darin ist $V_t(\underline{x}(t), t) = \frac{dV(\underline{x}(t), t)}{dt}$ und $V_x(\underline{x}(t), t) = \frac{\partial V(\underline{x}(t), t)}{\partial \underline{x}}$.

Weiterhin stellt die Lösung für $V(\underline{x}(t), t)$ aus

$$\min_{\underline{u}(t)} [\ell(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) + \underline{V}_x^T(\underline{x}(t), t) \cdot \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)] \quad \text{für } t = 0, \dots, T$$

mit der Endbedingung $V(\underline{x}(T), T) = \phi(\underline{x}(T))$ die optimalen Überführungskosten für das optimale $\underline{u}(t)$ dar.

Während dies für nichtlineare Systeme im Allgemeinen nicht lösbar ist, soll die Lösung für lineare dynamische Systeme im folgenden Kapitel gefunden werden.

9 Linear quadratische Regelung

9.1 Riccati-Differentialgleichung

Setzt man die Kostenfunktion auf Basis quadratischer Funktionen aus Abschnitt 8.1 und die lineare Zustandsdifferentialgleichung $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$ in die Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung (Abschnitt 8.2) ein, so erhält man:

$$0 = V_t(\underline{x}(t), t) + \min_{\underline{u}(t)} \left[\frac{1}{2} \underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) + \frac{1}{2} \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) + \underline{V}_x^T(\underline{x}(t), t) \cdot (\underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)) \right]$$

Wird die Minimierung ausgeführt, ergibt sich folgende Bedingung für die Stellgröße:

$$\underline{u}(t) = -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{V}_x(\underline{x}(t), t)$$

Auch für die Überführungskosten wird ein Ansatz in Form einer quadratischen Form gemacht:

$$V(\underline{x}(t), t) = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t) \underline{P}(t) \underline{x}(t), \text{ daraus: } V_t(\underline{x}(t), t) = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t) \dot{\underline{P}}(t) \underline{x}(t), \underline{V}_x(\underline{x}(t), t) = \underline{P}(t) \underline{x}(t)$$

Setzt man für \underline{V}_x in die Bedingung für die Stellgröße ein, erhält man ein Regelgesetz, das der Struktur einer linearen Zustandsrückführung mit der Reglermatrix $\underline{K}(t)$ entspricht:

$$\underline{u}(t) = -\underbrace{\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(t)}_{\underline{K}(t)} \underline{x}(t)$$

Weiterhin kann für V_t , \underline{V}_x und \underline{u} in die obige Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung einsetzen werden, und man erhält die folgende Bedingung für $\underline{P}(t)$:

$$\dot{\underline{P}}(t) = -\underline{P}(t) \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P}(t) + \underline{P}(t) \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(t) - \underline{Q}$$

Dies ist die *Riccati-Differentialgleichung*. Durch zeitlich rückwärts laufende Integration beginnend mit der Endbedingung $\underline{P}(T) = \underline{S}$ kann prinzipiell eine Lösung für $\underline{P}(t)$ bestimmt werden. Somit sind die Überführungskosten $V(\underline{x}(t), t)$ und die Stellgröße $\underline{u}(t)$ bekannt.

9.2 Algebraische Riccati-Gleichung

Man betrachtet die Kostenfunktion J über ein unendliches Zeitintervall mit $T \rightarrow \infty$ hinweg. Damit der Wert von J endlich bleibt, müssen die Beiträge aus $\frac{1}{2} \underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t)$ für große Zeiten t verschwinden. Dies ist gegeben, falls das System stabil ist. Dann muss aber auch die Bewertung zum Endzeitpunkt verschwinden, d.h. es gilt $\varphi = 0$.

Für diesen Fall erhält man die gesuchte Kostenfunktion für stabile und steuerbare Systeme als positiv definite Lösung \underline{P} aus der stationären Riccati-Gleichung:

$$\underline{0} = -\underline{P} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{Q}$$

Diese wird als *algebraische Riccati-Gleichung* bezeichnet.

9.3 Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

Numerische Simulation

Die Riccati-Differentialgleichung wird zeitlich rückwärts simuliert, bis eine stationäre Lösung für \underline{P} erreicht ist. Dazu kann ein numerisches Simulationsverfahren aus Abschnitt 1.1 verwendet werden.

Direkte Methode

Vorgehensweise:

- Hamiltonsche Matrix berechnen: $\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \\ \underline{Q} & -\underline{A}^T \end{bmatrix}$
- Berechnung der Eigenwerte s_1, \dots, s_n von $\tilde{\underline{A}}$ mit $\text{Re}\{s_i\} < 0$
- Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n
- Bestimmung von $\underline{V} = [\underline{v}_1 \quad \dots \quad \underline{v}_n] = \begin{bmatrix} \underline{V}_{11} \\ \underline{V}_{21} \end{bmatrix}$
- Die Lösung ist $\underline{P} = -\underline{V}_{21} \underline{V}_{11}^{-1}$

Matlab

Es steht der Befehl `care` (= continuous algebraic Riccati equation) der „Control Toolbox“ zur Verfügung.

Beispiel 9-1: Linear quadratischer Regler für eine Durchlaufpresse

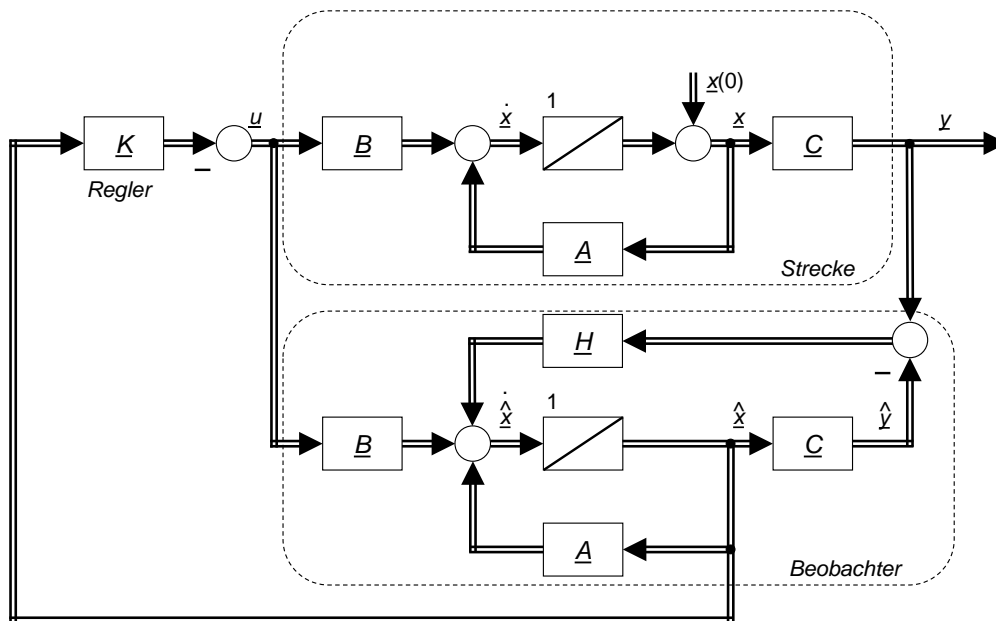
In Beispiel 7-2 wurde ein Walzwerk mit zwei Antrieben als Strecke betrachtet, und es wurde eine Regler mit Ein-/Ausgangsentkopplung dazu entworfen. Für diese Strecke soll nun ein Linear Quadratischer Regler entworfen werden.

Bestimmen Sie den optimalen Regler \underline{K} aus der Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung zunächst mit $\underline{Q} = \underline{I}$ und $\underline{R} = \underline{I}$. Variieren Sie \underline{Q} und \underline{R} und analysieren Sie die Sprungantwort des Systems in der numerischen Simulation.

10 Linear quadratische Beobachtung

Die Dualität von Regler- und Beobachterentwurf lässt sich nutzen, um die Entwurfsmethodik für den Linear Quadratischen Regler auf den Beobachter zu übertragen. Man erhält den Entwurf eines Linear Quadratischen Beobachters.

Die Verwendung dieses Entwurfs ist in dem nicht seltenen Fall sinnvoll, wenn mehr als eine Messgröße zur Verfügung steht. Dann ist nämlich der Entwurf des Beobachters über Eigenwertvorgabe (siehe Kapitel 5) nicht mehr eindeutig. Zustandsbeobachter und lineare Zustandsrückführung haben die aus Kapitel 5 bekannte Struktur:



Die Beobachtermatrix \underline{H} wird aus der dualen Riccati-Gleichung bestimmt:

$$\dot{\underline{P}}_B(t) = \underline{P}_B(t) \underline{A}^T + \underline{A} \underline{P}_B(t) - \underline{P}_B(t) \underline{C}^T \underline{R}_B^{-1} \underline{C} \underline{P}_B(t) + \underline{Q}_B$$

Vorteilhaft ist beim Beobachter, dass die zeitliche Integration dieser Riccati-Differentialgleichung zeitlich vorwärts abläuft. Bei unendlichem Zeithorizont wird die positiv definite Lösung \underline{P}_B aus der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\underline{0} = -\underline{P}_B \underline{A}^T - \underline{A} \underline{P}_B + \underline{P}_B \underline{C}^T \underline{R}_B^{-1} \underline{C} \underline{P}_B - \underline{Q}_B$$

bestimmt. Die optimale Beobachtermatrix ist dann

$$\underline{H} = \underline{P}_B \underline{C}^T \underline{R}_B^{-1}.$$

Die Interpretation der dualen Kostenfunktion einschließlich der beiden positiv definiten Gewichtungsmatrizen \underline{Q}_B und \underline{R}_B ist allerdings weniger anschaulich. Hier sei auf das Kalman-Filter verwiesen. Das stationäre Kalman-Filter kann in einer identischen Struktur realisiert werden und liefert eine stochastische Interpretation dieser Matrizen.

Dualität von Regler- und Beobachterentwurf

Nachfolgende Übersicht vergleicht die eingeführten Entwurfsverfahren für Regler und Beobachter durch Eigenwertvorgabe bzw. optimalen Entwurf.

	Regler	Beobachter
Dualität	In den Gleichungen kann formal ausgetauscht werden: $\underline{A} \leftrightarrow \underline{A}^T, \quad \underline{B} \leftrightarrow \underline{C}^T, \quad \underline{K} \leftrightarrow \underline{H}^T$	
Voraussetz.	Das System muss steuerbar sein.	Das System muss beobachtbar sein.
Entwurf durch Eigenwertvorgabe	Bestimmung der Zustandsrückführung \underline{K} : $\det(s \underline{I} - \underline{A} + \underline{B} \underline{K}) = (s - s_{R1}) \cdot (s - s_{R2}) \cdots (s - s_{Rn})$ Entwurfsparameter sind die Eigenwerte s_{R1}, \dots, s_{Rn} : <ul style="list-style-type: none"> • s_{Ri} in der linken komplexen Ebene (Stabilität) • s_{Ri} nach links schieben: System schneller • s_{Ri} zu weit links: Stellgrößen werden größer und sind nicht mehr realisierbar 	Bestimmung der Beobachtermatrix \underline{H} : $\det(s \underline{I} - \underline{A} + \underline{H} \underline{C}) = (s - s_{B1}) \cdot (s - s_{B2}) \cdots (s - s_{Bn})$ Entwurfsparameter sind die Eigenwerte s_{B1}, \dots, s_{Bn} : <ul style="list-style-type: none"> • s_{Bi} in der linken komplexen Ebene (Stabilität) • s_{Bi} links der Eigenwerte des geregelten Systems, damit der Beobachter schneller ist als die Regelung • s_{Bi} nicht zu weit links, sonst reagiert Beobachter „nervös“ auf Störungen
Matlab	$\underline{K} = \text{place}(\underline{A}, \underline{B}, [s_{R1} \ s_{R2} \ \dots])$ oder $\underline{K} = \text{acker}(\underline{A}, \underline{B}, [s_{R1} \ s_{R2} \ \dots])$	$\underline{H} = (\text{place}(\underline{A}', \underline{C}', [s_{B1} \ s_{B2} \ \dots]))'$ oder $\underline{H} = (\text{acker}(\underline{A}', \underline{C}', [s_{B1} \ s_{B2} \ \dots]))'$
Entwurf durch Minimierung eines quadratischen Gütemaßes	Linear Quadratischer Regler (LQR): Positiv definite Lösung für \underline{P} aus der algebr. Riccati-Gleichung: $-\underline{P} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{Q} = 0$ Reglermatrix $\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}$ stabilisiert den Regelkreis und minimiert die Gütefunktion: $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t)] d\tau$ Entwurfsparameter sind die Diagonalelemente $q_i, r_i > 0$: <ul style="list-style-type: none"> • alle q_i vergrößern: System schneller, aber auch größere Stellenergie notwendig • einzelnes Gewicht q_i vergrößern: Zustand i schwingt schneller ein 	Linear Quadratischer Beobachter (LQE): Positiv definite Lösung für \underline{P}_B aus der algebr. Riccati-Gleichung: $-\underline{P}_B \underline{A}^T - \underline{A} \underline{P}_B + \underline{P}_B \underline{C}^T \underline{R}_B^{-1} \underline{C} \underline{P}_B - \underline{Q}_B = 0$ Beobachtermatrix: $\underline{H} = \underline{P}_B \underline{C}^T \underline{R}_B^{-1}$ Analogie zum stationären Kalman-Filter.
Matlab	$\underline{K} = \text{lqr}(\underline{A}, \underline{B}, \underline{Q}, \underline{R})$	$\underline{H} = (\text{lqr}(\underline{A}', \underline{C}', \underline{Q}_b, \underline{R}_b))'$

11 Robuste Regelung

von A. Lorenz

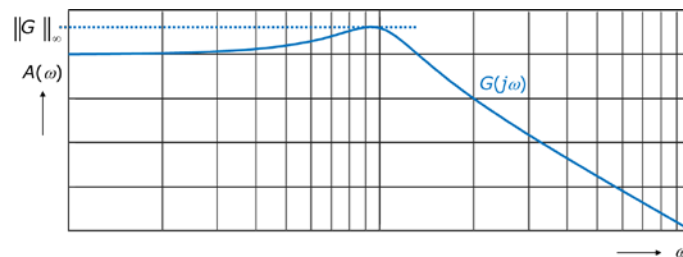
11.1 Einleitung

Definition der H_∞ -Norm für Eingrößen-Systeme

Für Eingrößen-Systeme gilt mit $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

Die H_∞ -Norm einer skalaren Übertragungsfunktion entspricht somit per Definition dem größten Wert des Amplituden-Frequenzgangs.



Daraus folgt ebenfalls der Bezug zum Zeitbereich: $\|G\|_\infty$ ist die „worst case“ Verstärkung eines sinusförmigen Signals entsprechender Frequenz durch das System.

Definition der Singulärwerte

Sei \underline{A} eine i.A. komplexe (m,n) -Matrix. Die Singulärwerte von \underline{A} entsprechen den Wurzeln R_i der $k = \min(n,m)$ größten Eigenwerte der Matrix $\underline{A} \cdot \underline{A}^H$ oder $\underline{A}^H \cdot \underline{A}$, so dass

$$\sigma_i(\underline{A}) = \sqrt{R_i(\underline{A} \cdot \underline{A}^H)} = \sqrt{R_i(\underline{A}^H \cdot \underline{A})}$$

für $i = 1, \dots, k$ gilt.

- Übertragungsmatrizen $\underline{G}(j\omega)$ haben frequenzabhängige Elemente. Somit sind die Singulärwerte von Übertragungsmatrizen ebenso frequenzabhängig.
- Es lassen sich somit analog zum Amplituden-Frequenzgang die Frequenzgänge der Singulärwerte darstellen.
- Der Frequenzgang des größten Singulärwertes ist eine wichtige Systeminformation bei MIMO-Systemen.

Definition der H_∞ -Norm für Mehrgrößen-Systeme

Sei $\underline{G}(s)$ die Übertragungsmatrix eines Mehrgrößen-Systems. Dann erfolgt die Definition der H_∞ -Norm mit $\omega \in \mathbb{R}$ durch

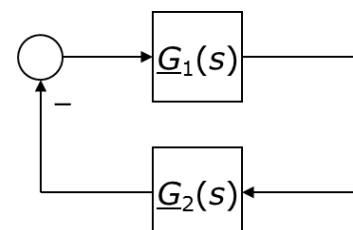
$$\|\underline{G}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\underline{G}(j\omega))$$

wobei $\bar{\sigma}$ der maximale Singulärwert ist.

Satz der kleinen Verstärkungen

Eine rückgekoppelte Struktur entsprechend nebenstehendem Blockschaltbild ist stabil, wenn für alle $\omega \geq 0$ gilt:

$$\|\underline{G}_1(j\omega) \underline{G}_2(j\omega)\|_\infty \leq 1$$



Definition von RH_∞

Die Menge aller asymptotisch stabilen und realisierbaren Übertragungsfunktionen bezeichnet man mit RH_∞ .

Die Menge aller (p,q) -Matrizen mit Elementen $g_{ik}(s) \in RH_\infty$ werden $RH_\infty^{p \times q}$ genannt.

- Eine rationale Funktion in s mit reellen Koeffizienten wird *verallgemeinertes Polynom* oder reell-rationale Funktion genannt.
- Der Hardy-Raum H_∞ ist der Funktionsraum aller komplexwerteten Funktionen einer komplexen Variable s , welche für $\text{Re}\{s\} > 0$ analytisch und beschränkt sind. Alle reell-rationalen Funktionen dieses Raumes bilden einen Unterraum, welcher mit RH_∞ bezeichnet wird.

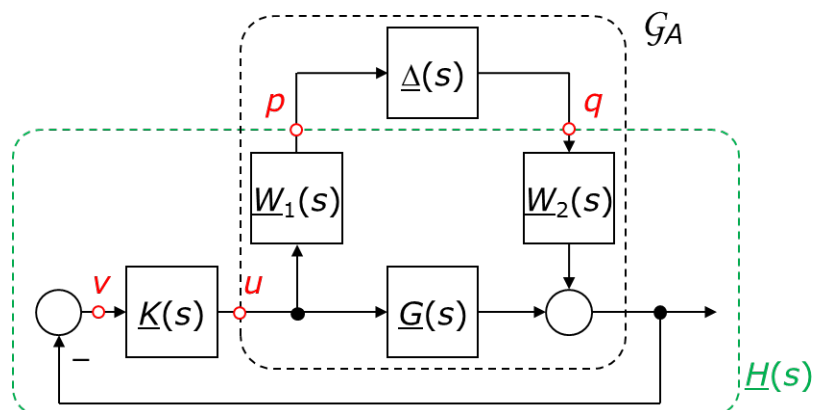
11.2 Beschreibungsformen der Streckenvariationen

Nachfolgend werden typische Fälle von Streckenunsicherheiten diskutiert.

Additive Unsicherheit

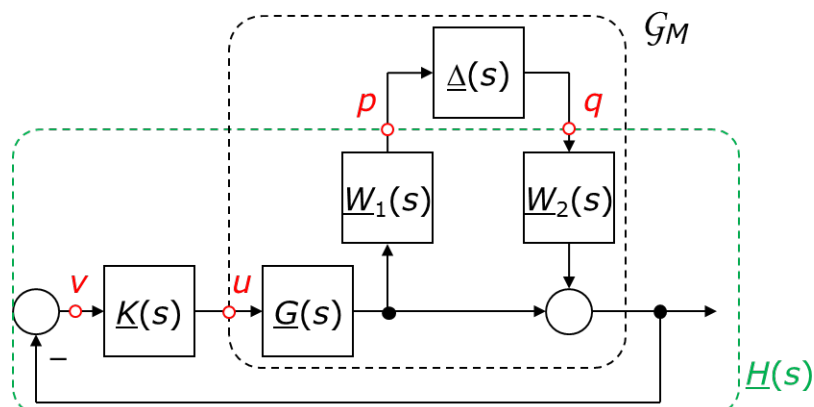
Mit $\underline{W}_1(s)$, $\underline{W}_2(s)$, $\underline{\Delta}(s) \in RH_\infty$ und $\|\underline{\Delta}(s)\|_\infty \leq 1$ ist:

$$\underline{G}_A(s) := \{\underline{G}(s) + \underline{W}_1(s)\underline{\Delta}(s)\underline{W}_2(s)\}$$

**Multiplikative Unsicherheit**

Mit $\underline{W}_1(s)$, $\underline{W}_2(s)$, $\underline{\Delta}(s) \in RH_\infty$ und $\|\underline{\Delta}(s)\|_\infty \leq 1$ ist:

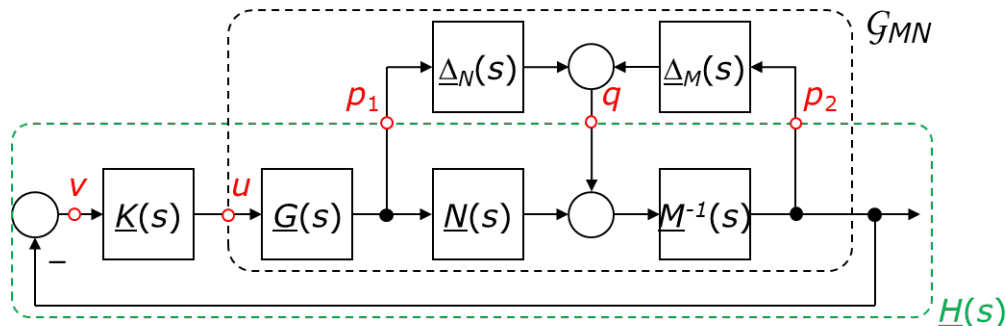
$$\underline{G}_M(s) := \{(I + \underline{W}_1(s)\underline{\Delta}(s)\underline{W}_2(s))\underline{G}(s)\}$$



Faktorierte Unsicherheit

Mit $\underline{M}(s)$, $\underline{N}(s)$, $\underline{\Delta}_M(s)$, $\underline{\Delta}_N(s) \in RH_\infty$ und $\|\underline{\Delta}(s)\|_\infty \leq 1$ ist:

$$\underline{G}_{MN}(s) := \{(\underline{M}(s) + \underline{\Delta}_M(s))^{-1}(\underline{N}(s) + \underline{\Delta}_N(s))\}$$



11.3 Robustheitskriterien

Kriterium für robuste Stabilität

Sei \mathcal{G} die Menge von Modellvariationen des nominalen Streckenmodells $\underline{G}(s) \in \mathcal{G}$ und $\underline{K}(s)$ ein das nominale Modell stabilisierender Regler. Der Regler stabilisiert ebenfalls jede Strecke der Menge \mathcal{G} genau dann, wenn das zu dieser Menge gehörende Robustheitskriterium erfüllt ist.

Robustheitskriterien für die Streckenunsicherheiten aus Abschnitt 11.2:

Menge der Streckenvariationen	Robustheitskriterium
\mathcal{G}^A	$\left\ \underline{W}_1(s) (\underline{I} + \underline{K}(s) \underline{G}(s))^{-1} \underline{K}(s) \underline{W}_2(s) \right\ _\infty \leq 1$
\mathcal{G}^M	$\left\ \underline{W}_1(s) (\underline{I} + \underline{K}(s) \underline{G}(s))^{-1} \underline{K}(s) \underline{G}(s) \underline{W}_2(s) \right\ _\infty \leq 1$
\mathcal{G}^{MN}	$\left\ \frac{1}{(\underline{I} + \underline{G}(s) \underline{K}(s)) \underline{M}(s)} \begin{bmatrix} \underline{K}(s) \\ \underline{I} \end{bmatrix} \right\ _\infty \leq 1$

11.4 H_∞ -Optimierungsproblem und generalisierte Streckenstruktur

Ein robust stabilisierender Regler kann ermittelt werden, in dem die Robustheitskriterien aus Abschnitt 11.3 genutzt werden, um folgendes H_∞ -Optimierungsproblem zu formulieren:

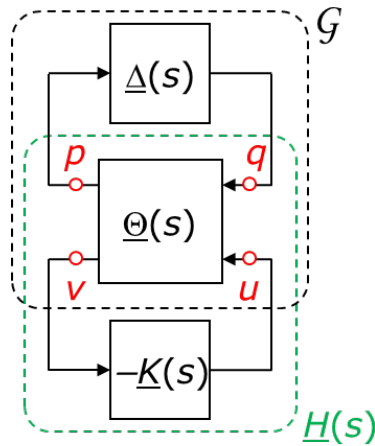
$$\min_{\underline{K}(s)} \|\underline{H}(s)\|_\infty \leq 1$$

Dabei liegt $\underline{K}(s)$ in der Menge aller den Regelkreis stabilisierenden Regler und $\underline{H}(s)$ ist die jeweilige Übertragungsfunktion des Robustheitskriteriums.

- Der Einfluss des Reglers auf die zu beschränkende Übertragungsfunktion unterscheidet sich je nach Beschreibung der Menge der Streckenvariationen.

- Für die Lösung des H_∞ -Optimierungsproblems stehen numerische Werkzeuge wie die Robust Control Toolbox in Matlab zur Verfügung.

Alle Streckenvariationen (z.B. aus Abschnitt 11.2) lassen in die nachfolgende generalisierte Darstellung bringen. Somit können Methoden und Werkzeuge zur Lösung des Optimierungsproblems einheitlich nutzen.



11.5 Robuste Stabilität und nominelle Performance

Normaler Weise gibt es mehr als einen Regler, welcher die Bedingung $\|H(s)\|_\infty \leq 1$ erfüllt. Daher können verbleibende Freiheitsgrade genutzt werden, um die Performance zu optimieren. Es können prinzipiell zwei Wege verfolgt werden:

1. Verbesserung der *nominellen Performance* oder
2. Garantie eines Mindestmaßes an Performance für alle Streckenvariationen („*robuste Performance*“).

Diese Ziele können wiederum durch H_∞ -Normschränken beschrieben werden und somit als H_∞ -Optimierungsproblem formuliert und gelöst werden.