Tarea 7

Optimizacion

César Amilkar Rivera Covarrubias

19 de mayo de 2025

1. Sea $H \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq n$ una matriz de rango completo y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \|y - Hx\|^2.$$

   a) Sea $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ y sea $b \in \mathbb{R}^q$. Muestra que f tiene un mínimo único en el conjunto $S := \{x \in \mathbb{R}^n, Cx = b\}$.

   b) Suponga que C es tal que $C(H^T H)^{-1}C^T$ tiene rango q, determina el mínimo de f en S.

   c) Expresa el mínimo de f en S en función del mínimo de f en $\mathbb{R}^n$.

2. Usando las condiciones KKT, determina el operador proyección en

   a) La bola cerrada de centro (0, 0) y radio R.

   b) La caja cerrada $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ con $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$.

   c) Implementa el algoritmo de descenso de gradiente proyectado para minimizar la función $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 6x_2,$$

   en la bola cerrada de radio 4 centrada en (0,0).

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2 - 24,$$

   en la caja cerrada $[0, 4] \times [0, 2]$.

3. Determina los puntos críticos y su tipo de:

   - De la función
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2,$$
     en el círculo centrado en (0, 0) de radio $\sqrt{3}$.
   - De la función
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
     en el conjunto definido por $2 = x_3 - x_1x_2$.