

Principio del trabajo y la energía

Si se considera una estructura deformable, las cargas externas P generarán una cargas internas en la estructura F , tal que, P y F se relacionan por las ecuaciones de equilibrio.

Ocurrirán desplazamientos externos u bajo las cargas externas P , y desplazamientos internos δ bajo las cargas internas F en cada punto de estructura, donde u y δ se relacionan por las ecuaciones de compatibilidad.



Crooked house (Polonia)

$$\sum P u = \sum F \delta$$

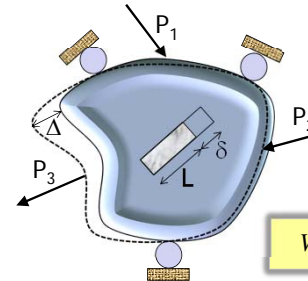
El trabajo de las fuerzas externas es equivalente al trabajo de las cargas internas



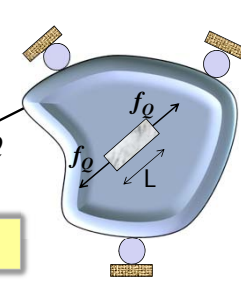
Estructuras

Principio de trabajo virtual

Estructura con carga real



Estructura con la carga virtual



$$W_Q = U_Q$$

$$Q \Delta = \sum f_Q \delta$$



Estructuras

Principio de trabajo virtual

Para calcular la componente de una deflexión, se aplica una fuerza virtual Q en el punto y en la dirección requerida, tal que:

Al deformarse la estructura bajo las cargas reales, la carga virtual Q por el desplazamiento real de la estructura realiza un trabajo virtual externo W_Q

$$W_Q = U_Q$$

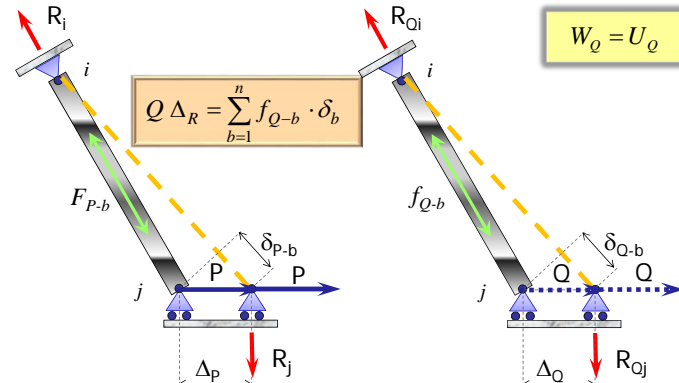
En los elementos de la estructura, sus fuerzas internas f_Q por sus desplazamientos internos reales, indican la energía virtual de deformación U_Q

Los desplazamientos son generados por efectos reales como: cargas reales, asentamientos, cambios de temperatura.



Estructuras

Principio de trabajo virtual en armaduras



$$W_Q = U_Q$$

$$Q \Delta_R = \sum_{b=1}^n f_{Q-b} \cdot \delta_b$$

Las elongaciones son generadas por efectos reales como: cargas reales, cambios de temperatura y defectos de fabricación.

$$\delta_b = \frac{F_{p-b} L_b}{A_b E_b} + \alpha_b \Delta T_b L_b + \delta_{f-b}$$



Estructuras

Principio de trabajo virtual en vigas

$W_Q = U_Q$

$Q\Delta_P = \int_0^L m_Q d\theta$

$Q\Delta_P = \int_0^L m_Q \frac{M_P}{EI} dx$

$d\theta = \frac{M_P}{EI} dx$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Surorte de Bogotá

Estructuras

Principio de trabajo virtual en vigas

$W_Q = U_Q$

$Qv_P = \int_0^L m_Q d\theta + \int_0^L v_Q dv$

$Qv_P = \int_0^L m_Q \frac{M_P}{EI} dx + k \int_0^L v_Q \frac{V_P}{GA} dx$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Surorte de Bogotá

Estructuras

Principio de trabajo virtual en vigas

$W_Q = U_Q$

$Q_M \theta_P = \int_0^L m_Q d\theta$

$Q_M \theta_P = \int_0^L m_Q \frac{M_P}{EI} dx$

$d\theta = \frac{M_P}{EI} dx$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Surorte de Bogotá

Estructuras

Principio de trabajo virtual en vigas

$\int_0^L m_Q M_P dx$

	m_Q	M_P	M_P	M_P	M_P
M_P					
M_1	$M_1 M_2 L$	$\frac{1}{2} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) M_2 L$	$\frac{1}{2} M_1 M_2 L$	
M_2	$\frac{1}{2} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{3} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{6} (M_1 + 2M_2) M_2 L$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 (L + a)$	
M_3	$\frac{1}{2} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{6} (2M_1 + M_2) M_2 L$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 (L + b)$	
M_4	$\frac{1}{2} M_1 (M_1 + M_2) L$	$\frac{1}{6} M_1 (M_1 + 2M_2) L$	$\frac{1}{6} M_1 (2M_1 + M_2) L$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 (L + b)$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 (L + a)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Surorte de Bogotá

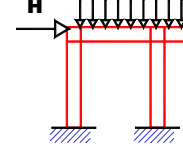
Estructuras

Principio de trabajo virtual en vigas

$$\int_0^L m_Q M_P dx$$

m_Q	M_1	M_2	M_3	M_4
	$\frac{1}{2} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 (L + c)$	$\frac{1}{6} M_1 M_2 (L + d) + \frac{1}{6} M_2 M_3 (L + c)$	para $c \leq a$: $\left(\frac{1}{3} - \frac{(a-c)^2}{6ad} \right) M_1 M_2 L$
	$\frac{2}{3} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{3} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_2 L$	$\frac{1}{3} M_1 M_2 \left(L + \frac{ab}{L} \right)$
	$\frac{1}{3} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{4} M_1 M_2 L$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) M_2 L$	$\frac{1}{12} M_1 M_2 \left(3a + \frac{a^2}{L} \right)$

Principio de trabajo virtual en pórticos en el plano



$$W_Q = U_Q$$

$$Q\Delta = \sum_{el=1}^n \left(\int m_Q d\theta \right)_{el} + \sum_{el=1}^n \left(\int v_Q dv \right)_{el} + \sum_{el=1}^n \left(\int f_Q du \right)_{el}$$

$$Q\Delta = \sum_{el=1}^n \left(\int m_Q \frac{M_P}{EI} dx \right)_{el} + \sum_{el=1}^n \left(k \int v_Q \frac{V_P}{GA} dx \right)_{el} + \sum_{el=1}^n \left(\int f_Q \frac{F_P}{EA} dx \right)_{el}$$

Factor de forma para cortante

$$k = \frac{A}{I^2} \int \frac{Q^2}{b^2} dA$$

Sección transversal	Factor de forma
	6/5
	10/9
	2
	A/Aalma