# Tema N° 1

# Cambios del Sistema de Coordenadas. Transformación de Coordenadas

## 1.1- Cambios del Sistema de Coordenadas

Consideremos dos sistemas de coordenadas, uno denominado S=(0, X, Y, Z), al que llamaremos *Viejo Sistema*, y otro denominado T=(C, U, V, W), al que llamaremos *Nuevo Sistema*, *[Figura 1.1a]*.

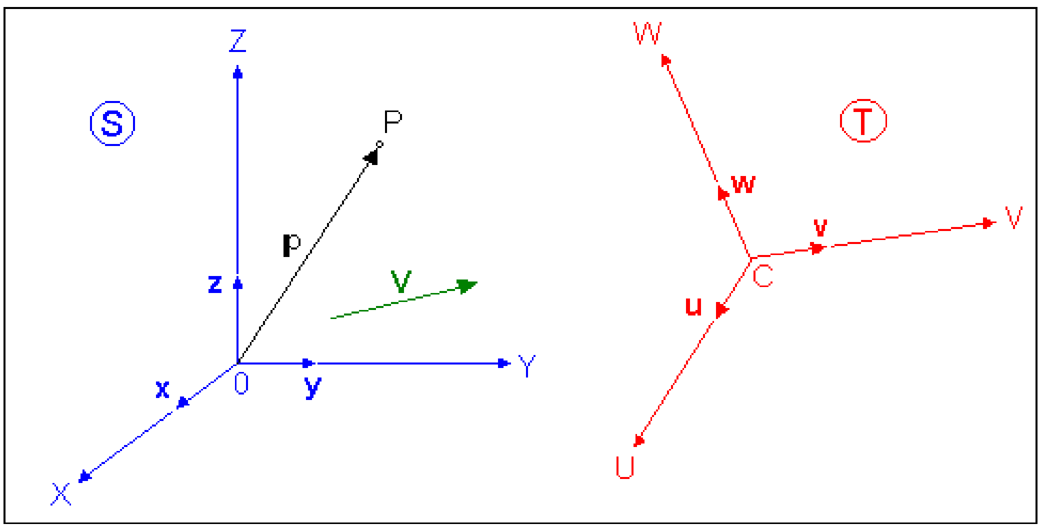


*Figura 1.1a: Cambio de un viejo sistema (S) a un nuevo sistema (T)*

En el viejo sistema S tenemos:

0 = (0,0,0) , coordenadas del punto origen

**x** = {1,0,0}s , componentes del 1 vector unitario

**y** = {0,1,0}s , componentes del 2° vector unitario

**z** = {0,0,1}s , componentes del 3° vector unitario

P = {x,y,z}s , coordenadas del punto P = componentes del vector de posición **p**

**V** = {Δx,Δy,Δz}s  componentes del vector **v**

En el nuevo sistema será:

P = $\{u,v,w\}_T$ , coordenadas del punto P = componentes del vector de posición de P = CP

**V** = $\{\Delta u,\Delta v,\Delta w\}_T$ , componentes del vector **v**

Vamos a suponer que se tiene localizado el viejo sistema S en el nuevo sistema T

0 = $\{uo,vo,wo\}_T$ coordenadas del origen de S en T

**x** = $\{x1,x2,x3\}_T$ componentes del 1° versor de S en T

**y** = $\{y1,y2,y3\}_T$ componentes del 2° versor de S en T

**z** = $\{z1,z2,z3\}_T$ componentes del 3° versor de S en T

Todo vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores unidad:

$\mathbf{V} = \Delta x\,\mathbf{x} + \Delta y\,\mathbf{y} + \Delta z\,\mathbf{z} = \Delta u\,\mathbf{u} + \Delta v\,\mathbf{v} + \Delta w\,\mathbf{w}$

**x** en T será : $\mathbf{x} = x1\,\mathbf{u} + x2\,\mathbf{v} + x3\,\mathbf{w}$

**y** en T será : $\mathbf{y} = y1\,\mathbf{u} + y2\,\mathbf{v} + y3\,\mathbf{w}$

**z** en T será : $\mathbf{z} = z1\,\mathbf{u} + z2\,\mathbf{v} + z3\,\mathbf{w}$

Multiplicando cada una de las expresiones anteriores por Δx, Δy, Δz respectivamente, sumando y sacando factor común, tendremos:

$$\mathbf{V} = (x1\,\Delta x + y1\,\Delta y + z1\,\Delta z)\mathbf{u} + (x2\,\Delta x + y2\,\Delta y + z2\,\Delta z)\mathbf{v} + (x3\,\Delta x + y3\,\Delta y + z3\,\Delta z)\mathbf{w}$$

Comparando con lo obtenido anteriormente: $\mathbf{V} = \Delta u\,\mathbf{u} + \Delta v\,\mathbf{v} + \Delta z\,\mathbf{z}$ tendremos:

$\Delta u = x1\,\Delta x + y1\,\Delta y + z1\,\Delta z$

$\Delta v = x2\,\Delta x + y2\,\Delta y + z2\,\Delta z$

$\Delta w = x3\,\Delta x + y3\,\Delta y + z3\,\Delta z$

Definiendo:

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} \quad , \quad M = \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\Delta U = M\,\Delta X$$

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\mathbf{V}_T \qquad \mathbf{x}_T \quad \mathbf{y}_T \quad \mathbf{z}_T \qquad \mathbf{V}_S$$

La ecuación *(1)* nos da el pasaje de S a T .Se llama *Ley de Variación de las Componentes* para el paso de S a T, independiente de la posición del origen 0 respecto a T.

Para obtener la *Ley de variación de las Coordenadas de los Puntos* aplicamos la ley de variación de las componentes al vector **p** de P en S.

$0P = \mathbf{p} = \{x,y,z\}_S = \{u-uo , v-vo, w-wo\}_T$

Aplicando *(1)* :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uo \\ vo \\ wo \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$P_T \qquad 0_T \qquad \mathbf{x}_T \quad \mathbf{y}_T \quad \mathbf{z}_T \qquad P_S$$

Definiendo las matrices:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad , \quad Uo = \begin{bmatrix} uo \\ vo \\ wo \end{bmatrix}$$

$$U = U\mathrm{o} + M\,X$$

## 1.2- Transformación Inversa

Será cuestión ahora de considerar a T como el viejo sistema y a S como el nuevo sistema.

Para S $\rightarrow$ T teníamos:

$$M = \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta U = M \; \Delta X$$

$$\mathbf{x}_T \quad \mathbf{y}_T \quad \mathbf{z}_T \qquad \mathbf{V}_T \qquad \mathbf{V}_S$$

Ahora para T $\rightarrow$ S tendremos :

$$M' = \begin{bmatrix} u1 & v1 & w1 \\ u2 & v2 & w2 \\ u3 & v3 & w3 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta X = M' \, \Delta U$$

$$\mathbf{u}_S \quad \mathbf{v}_S \quad \mathbf{w}_S \qquad \mathbf{V}_S \qquad \mathbf{V}_T$$

Donde $M$ y $M'$ son inversas, $M' = M^{-1}$

Para la ley de variación de las coordenadas de los puntos teníamos en S $\rightarrow$ T :

$$U = U_o + M \; X \qquad (2)$$

$$P_T \quad 0_T \qquad P_S$$

con :

$$U_o = \begin{bmatrix} uo \\ vo \\ wo \end{bmatrix}$$

$$0_T$$

Ahora tendremos para T $\rightarrow$ S :

$$X = X\mathrm{c} + M'\ U \qquad (3)$$

$$\mathrm{Ps} \quad \mathrm{Pc} \qquad \mathrm{P_T}$$

Reemplazando *(2)* en *(3)* :

$$X = X\mathrm{c} + M'(U\mathrm{o} + M\ X)$$

$$X = X\mathrm{c} + M'\,U\mathrm{o} + M'\ M\ X \ , \quad M'M = \text{Identidad } I$$

$$X = X\mathrm{c} + M'U\mathrm{o} + X$$

$$X - X = 0 = X\mathrm{c} + M'\,U\mathrm{o}$$

$$Xc = -M'\,U\mathrm{o} = -M^{-1}\ U\mathrm{o}$$

En consecuencia, como conozco la matriz *M* y la matriz *U*o (es decir las coordenadas del origen S en T), conozco también *X*c (es decir las coordenadas del origen de T en S).

La matriz que gobierna la transformación en un sistema cartesiano es ortonormal, lo que significa que su inversa no es mas que su transpuesta $M^{-1} = M^{t}$. Las filas y columnas de esta matriz conservan la longitud del vector y el ángulo, es decir que no se produce distorsión.

Como las columnas de $M^{-1}$ son los vectores unidad de T en S, entonces también las filas de *M* son los vectores unidad de T en S.

$$\begin{array}{cc} M = \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{us} \\ \mathbf{vs} \\ \mathbf{ws} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{T}} & \mathbf{y}_{\mathrm{T}} & \mathbf{z}_{\mathrm{T}} \end{array} & \end{array}$$

## 1.3- Traslación y Rotación de Sistemas

### a) <u>Traslación</u>

La traslación de sistemas cartesianos implica un cambio de origen sin cambiar la orientación de los ejes, *[Figura 1.3a]*, es decir que: **x = u**, **y = v**, **z = w**

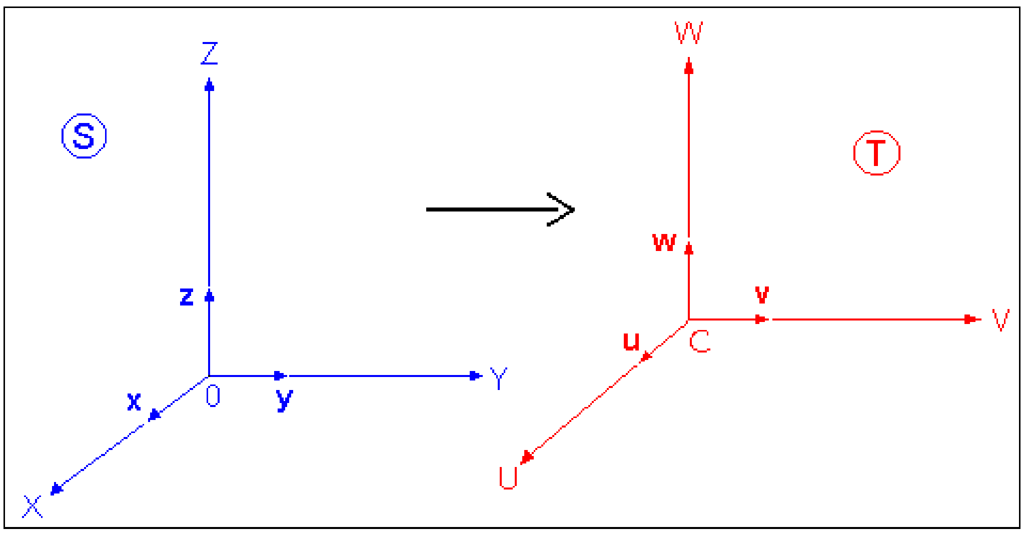


*Figura 1.3 a: Traslación entre sistemas de coordenadas*

En la matriz de traslación M:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathbf{us} \\ \mathbf{vs} \\ \mathbf{ws} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{x}_T & \mathbf{y}_T & \mathbf{z}_T \end{matrix} & \end{array}$$

Como : $\mathbf{u} = \{1,0,0\}_T$ , $\mathbf{x} = \{1,0,0\}s$

$\mathbf{v} = \{0,1,0\}_T$ , $\mathbf{y} = \{0,1,0\}s$

$\mathbf{w} = \{0,0,1\}_T$ , $\mathbf{z} = \{0,0,1\}s$

La matriz M será : $$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

La ley de variación de las componentes de los vectores: $\Delta U = M\,\Delta X \;\rightarrow\; \Delta U = \Delta X$

o sea : $\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$ , de donde : $\Delta u = \Delta x$ , $\Delta v = \Delta y$ , $\Delta w = \Delta x$

Entonces, la traslación lo único que produce es un rebautizo de las componentes del vector **V**, las que en el viejo sistema S se llamaban $\Delta x$ , $\Delta y$, $\Delta z$ , ahora en el nuevo sistema T se llaman Δu , Δv, Δw .

Para la ley de variación de las coordenadas de los puntos:

$$U = U\text{o} + M\,X\,, \quad \text{con} \quad M = I$$

tendremos:

$$U = U\text{o} + X \quad , \quad \text{o sea} \quad \begin{aligned} u &= uo + x \\ v &= vo + y \\ w &= wo + z \end{aligned}$$

donde: (u,v,w) son las coordenadas de P en T

(uo,vo,wo) son las coordenadas de O en T

(x,y,z) son las coordenadas de P en S

**b) <u>Rotación</u>**

La rotación es un cambio de orientación de los ejes sin cambio en el origen, *[Figura 1.3b]*.

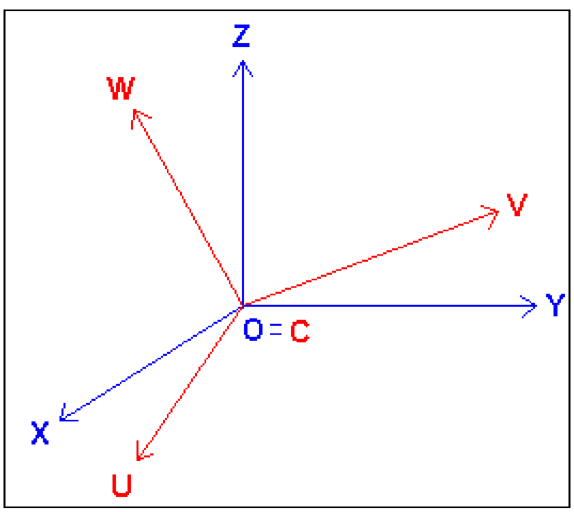


*Figura 1.3b: Rotación del sistema*

El origen O = C , lo que implica que: uo = 0 , vo = 0 , wo = 0 , por lo que las coordenadas de O en T son nulas.

Como la variación de las componentes de los vectores no depende de la posición del origen C del nuevo sistema, se tiene: $\Delta U = M\,\Delta$X .

Pero en la ley de variación de las coordenadas de los puntos: $U \;=\; U\mathrm{o} \;+\; M\,X$ .

Si $U\mathrm{o} = 0$ , tenemos $U \;=\; M\,X$, de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathrm{x1}\,\mathbf{x} + \mathrm{y1}\,\mathbf{y} + \mathrm{z1}\,\mathbf{z} \\ \mathbf{v} &= \mathrm{x2}\,\mathbf{x} + \mathrm{y2}\,\mathbf{y} + \mathrm{z2}\,\mathbf{z} \\ \mathbf{w} &= \mathrm{x3}\,\mathbf{x} + \mathrm{y3}\,\mathbf{y} + \mathrm{z3}\,\mathbf{z} \end{aligned}$$

## 1.4- Esquema de Ángulos Directores y de Cosenos Directores

$$M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{x}_{\mathrm{T}} & \mathbf{y}_{\mathrm{T}} & \mathbf{z}_{\mathrm{T}} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{us} \\ \mathbf{vs} \\ \mathbf{ws} \\ \\ \end{array} \qquad , \qquad \Delta U \;=\; M\,\Delta X$$

Las componentes de un vector respecto de un eje se calculan como el coseno del módulo del ángulo no orientado que el vector forma con el eje.

$$\begin{array}{lclcl} x1 = \cos\left|\mathbf{x}\hat{}\mathbf{u}\right| & & y1 = \cos\left|\mathbf{y}\hat{}\mathbf{u}\right| & & z1 = \cos\left|\mathbf{z}\hat{}\mathbf{u}\right| \\ x2 = \cos\left|\mathbf{x}\hat{}\mathbf{v}\right| & , & y2 = \cos\left|\mathbf{y}\hat{}\mathbf{v}\right| & , & z2 = \cos\left|\mathbf{z}\hat{}\mathbf{v}\right| \\ x3 = \cos\left|\mathbf{x}\hat{}\mathbf{w}\right| & & y3 = \cos\left|\mathbf{y}\hat{}\mathbf{w}\right| & & z3 = \cos\left|\mathbf{z}\hat{}\mathbf{w}\right| \end{array}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \cos\left|\mathbf{x}\hat{}\mathbf{u}\right| & \cos\left|\mathbf{y}\hat{}\mathbf{u}\right| & \cos\left|\mathbf{z}\hat{}\mathbf{u}\right| \\ \cos\left|\mathbf{x}\hat{}\mathbf{v}\right| & \cos\left|\mathbf{y}\hat{}\mathbf{v}\right| & \cos\left|\mathbf{z}\hat{}\mathbf{v}\right| \\ \cos\left|\mathbf{x}\hat{}\mathbf{w}\right| & \cos\left|\mathbf{y}\hat{}\mathbf{w}\right| & \cos\left|\mathbf{z}\hat{}\mathbf{w}\right| \end{bmatrix}$$

En todo problema se puede armar un cuadro de *Ángulos Directores* y de *Cosenos Directores*, que son los ángulos que forman entre sí los ejes de los sistemas, *[Tabla 1]*.

*Tabla 1: Esquema de ángulos directores y Cosenos directores*

| Ángulo | **x** | **y** | **z** | Coseno | **x** | **y** | **z** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **u** | $\lvert\mathbf{x\ u}\rvert$ | $\lvert\mathbf{y\ u}\rvert$ | $\lvert\mathbf{z\ u}\rvert$ | **u** | $\cos\lvert\mathbf{x\ u}\rvert$ | $\cos\lvert\mathbf{y\ u}\rvert$ | $\cos\lvert\mathbf{z\ u}\rvert$ |
| **v** | $\lvert\mathbf{x\ v}\rvert$ | $\lvert\mathbf{x\ v}\rvert$ | $\lvert\mathbf{x\ v}\rvert$ | **v** | $\cos\lvert\mathbf{x\ v}\rvert$ | $\cos\lvert\mathbf{y\ v}\rvert$ | $\cos\lvert\mathbf{z\ v}\rvert$ |
| **w** | $\lvert\mathbf{x\ w}\rvert$ | $\lvert\mathbf{x\ w}\rvert$ | $\lvert\mathbf{x\ w}\rvert$ | **w** | $\cos\lvert\mathbf{x\ w}\rvert$ | $\cos\lvert\mathbf{y\ w}\rvert$ | $\cos\lvert\mathbf{z\ w}\rvert$ |

### 1.4.1- Rotación alrededor del primer eje X

Sea el sistema S = (O, X , Y , Z) directo, sobre cuyo eje X realizamos una rotación θ del mismo sentido que la del sistema, es decir que será positiva [+θ], *[Figura 1.4a]*

| ángulo | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **u** | 0 | 90° | 90° |
| **v** | 90 | θ | 90 –θ |
| **w** | 90° | 90 + θ | θ |

| coseno | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **u** | 1 | 0 | 0 |
| **v** | 0 | cos θ | senθ |
| **w** | 0 | –sen θ | cos θ |

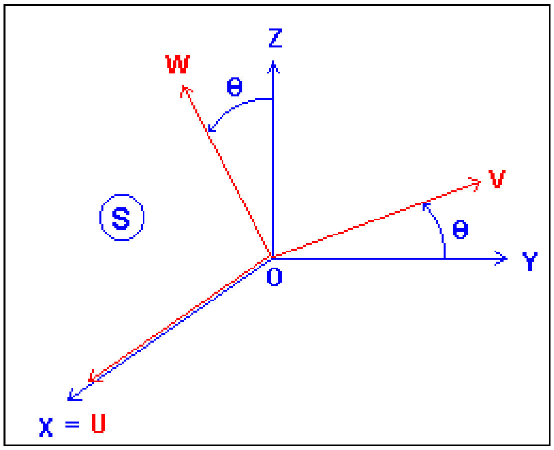


*Figura 1.4a: Rotación alrededor del eje X*

La ecuación de transformación será:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

### 1.4.2- Rotación alrededor del segundo eje Y

Consideremos un sistema S = (O, X , Y , Z) directo y sobre cuyo eje Y realizamos una rotación θ del mismo sentido que el del sistema, positiva [+θ], *[Figura 1.b]*

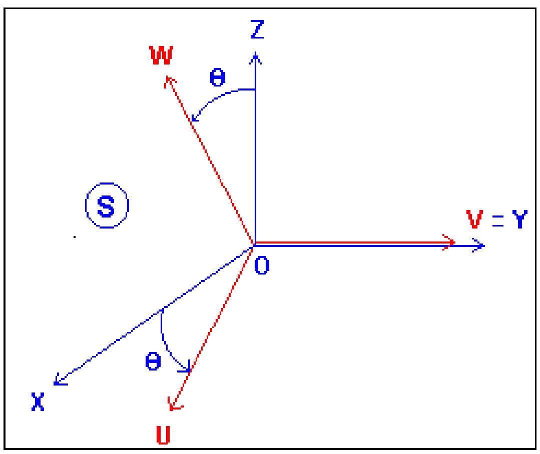


*Figura 1.4b: Rotación alrededor del eje Y*

| ángulo | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **u** | θ | 90° | 90 + θ |
| **v** | 90 | 0 | 90 |
| **w** | 90 –θ | 90 | θ |

| coseno | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **u** | cos θ | 0 | –sen θ |
| **v** | 0 | 1 | 0 |
| **w** | sen θ | 0 | cos θ |

La ecuación de transformación será: $$\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & \mathbf{1} & 0\\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta \mathbf{x}\\ \Delta \mathbf{y}\\ \Delta \mathbf{z}\end{bmatrix}$$

### 1.4.3- Rotación alrededor del tercer eje Z

Consideremos el sistema S = (O, X , Y , Z) directo y sobre cuyo eje Z realizamos una rotación θ del mismo sentido que el del sistema, o sea que será positiva [+θ], *[Figura 1.4c]*.

| ángulo | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **u** | θ | 90° – θ | 90° |
| **v** | 90° + θ | θ | 90° |
| **w** | 90° | 90° | 0 |

| coseno | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **u** | cos θ | sen θ | 0 |
| **v** | –sen θ | cos θ | 0 |
| **w** | 0 | 0 | 1 |

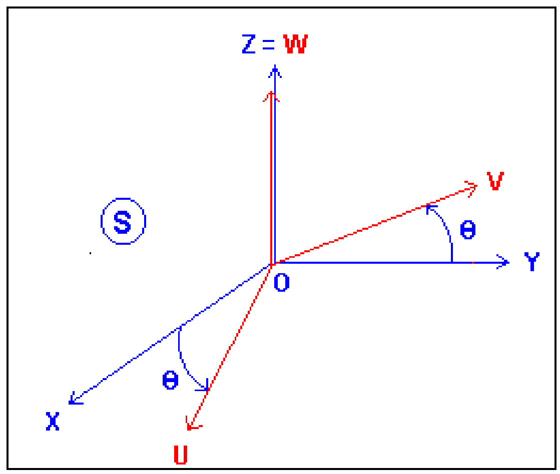

*Figura 1.4c: Rotación alrededor del eje Z*

La ecuación de transformación será : $$\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta \mathbf{x}\\ \Delta \mathbf{y}\\ \Delta \mathbf{z}\end{bmatrix}$$

## 1.5- Transformación de Coordenadas

Para realizar transformaciones de coordenadas se utilizan matrices de rotación, de tal manera que si tenemos un punto en el sistema (x,y,z), después de aplicar rotación a dicho sistema las nuevas coordenadas del punto serán (u,v,w)

Estas matrices, según el eje donde se produce la rotación, son las siguientes:

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad Ry = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad Rz = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La rotación es positiva si es en sentido contrario a las agujas del reloj. Para cambiar el sentido de rotación, debemos tener en cuenta que $\theta = -\theta$, por lo tanto el $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta$ .

Al trabajar con coordenadas astronómicas usualmente debemos pasar de coordenadas cartesianas a esféricas, *[Figura 1.5a]*:

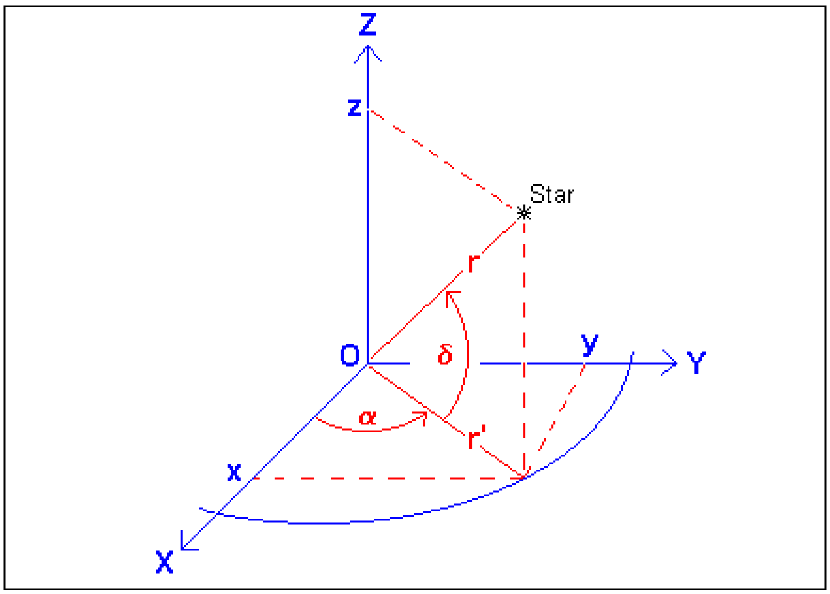


*Figura 1.5a: Pasaje de coordenadas cartesianas a esféricas*

De la figura anterior podemos ver que:

$$z = r \operatorname{sen}\delta$$
$$r' = r \cos\delta$$
$$x = r' \cos\alpha = r \cos\delta \cos\alpha$$
$$y = r' \operatorname{sen}\alpha = r \cos\delta \operatorname{sen}\alpha$$

Por lo que la matriz de transformación será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\delta \cos\alpha \\ r \cos\delta \operatorname{sen}\alpha \\ r \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix}$$

Como los vectores tienen norma igual a uno, entonces r = 1 .

### 1.5.1- Transformación de Coordenadas Ecuatoriales Celestes a Eclípticas

En esta transformación debe llevarse el ecuador hacia la eclíptica girando un ángulo $\in$ = *23° 27´* (oblicuidad de la eclíptica) sobre el eje X, *[Figura 1.5b]*.

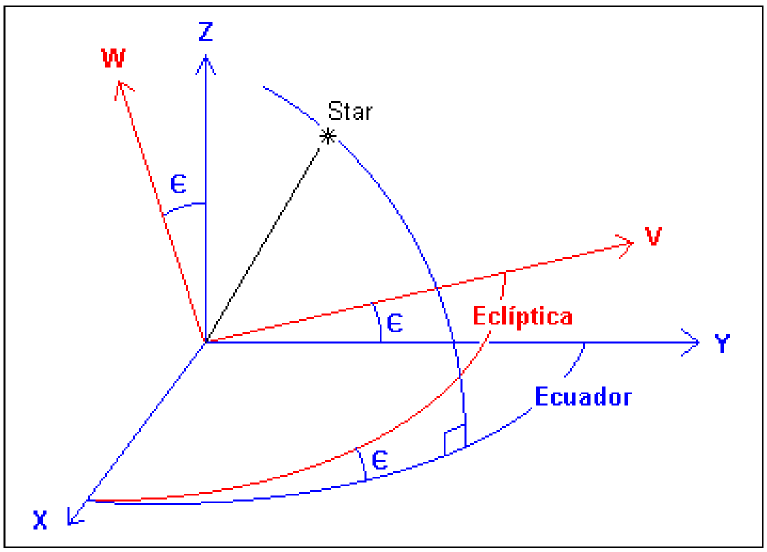


*Figura 1.5b: Rotación [ε] del ecuador sobre la eclíptica*

Definiendo:

L, B = Longitud y Latitud Eclípticas

α, δ = Ascensión Recta y Declinación

La transformación se realiza del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \cos L \cos B \\ \operatorname{sen} L \cos B \\ \operatorname{sen} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\in & \operatorname{sen}\in \\ 0 & -\operatorname{sen}\in & \cos\in \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\delta \\ \operatorname{sen}\alpha \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix}$$

$$X = \cos L \ \cos B = \cos\alpha \ \cos\delta$$

$$Y = \text{sen}\, L \cos B = \cos\in \ \text{sen}\,\alpha \ \cos\delta + \text{sen}\in \ \text{sen}\,\delta$$

$$Z = \text{sen}\, B = -\text{sen}\in \ \text{sen}\,\alpha \ \cos\delta + \cos\in \ \text{sen}\delta$$

$$B = \text{sen}^{-1} Z \quad \text{o mejor usar} \quad B = \text{tg}^{-1}\left( Z / (X^2 + Y^2)^{1/2} \right)$$

$$L = \text{tg}^{-1} (Y / X)$$

Si se desea llevar de coordenadas eclípticas a ecuatoriales se debe tener en cuenta que $\in = -\in$, o bien utilizando la inversa (transpuesta) de la matriz rotación.

## 1.5.2- Transformación de Coordenadas Ecuatoriales Celestes a Galácticas

Sea la *[Figura 1.5c]*, donde se indican los siguientes elementos:

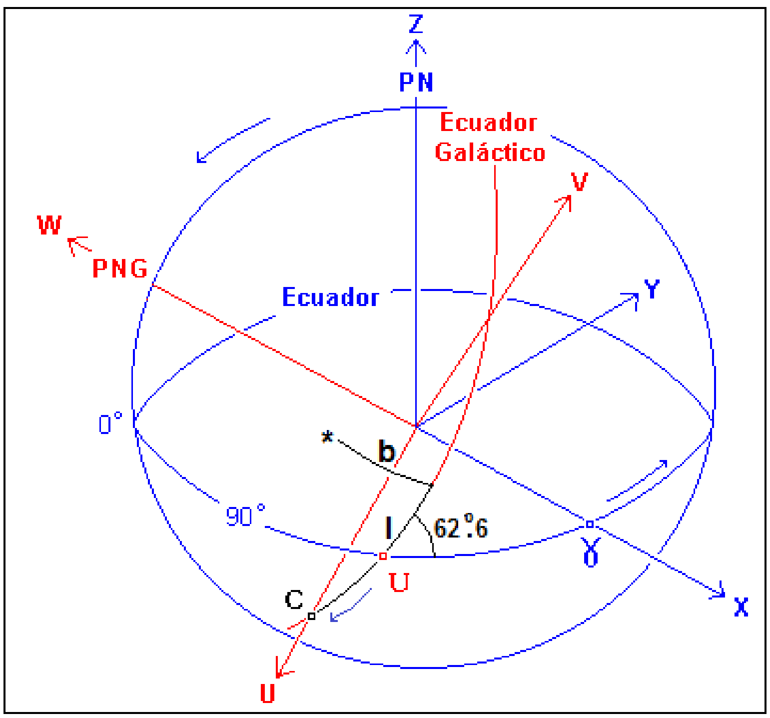


*Figura 1.5c: Elementos del sistema de coordenadas galáctico*

b, l = latitud y longitud galácticas

C = coordenadas del centro galáctico

U = intersección del ecuador celeste con el ecuador galáctico con un ángulo de 66° 33´ 38”.552

$\alpha_{PG} = 12^h\, 51^m\, 26^s.2754$

$\delta_{PG} = 27°\, 07´\, 41”.705$

UC = lo = 32° 55´ 54”.905

$\alpha_{CG} = 17^h\, 45^m\, 37^s.199$

$\delta_{CG} = -28°\, 56´\, 10”.219$

Estas precisiones (J2000.0) son ficticias ya que solo se asegura el minuto, pero a fin de conservar la precisión de los cálculos se usan completamente.

Los vectores de posición son :

$$\begin{bmatrix} \cos l \ \cos b \\ \operatorname{sen} l \ \cos b \\ \operatorname{sen} b \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha \ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\alpha \ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix}$$

Aplicamos:

**(1)** Una rotación sobre el eje Z de $\alpha o + 90° = 18^h\, 51^m$ en sentido antihorario.

Llevo el punto vernal ($\gamma$) a coincidir con U .

**(2)** Una rotación sobre el eje X de *66° 34´* en sentido antihorario.

Llevo el polo norte a coincidir con el polo norte galáctico o lo que es lo mismo el ecuador con el ecuador galáctico.

**(3)** Una rotación sobre el eje Z de *32° 56´* en sentido horario.

Llevo U a coincidir con C.

$$\mathrm{Rot}\,1 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha o & \cos\alpha o & 0 \\ -\cos\alpha o & -\operatorname{sen}\alpha o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot\ 2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\delta o & \cos\delta o \\ 0 & -\cos\delta o & \operatorname{sen}\delta o \end{bmatrix}$$

$$Rot\ 3 = \begin{bmatrix} \cos lo & -\operatorname{sen} lo & 0 \\ \operatorname{sen} lo & \cos lo & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El orden para resolver este producto es el siguiente: A = (R1(R2(R3 B))). Debemos recordar que para el producto de matrices no aplicamos la propiedad conmutativa.

$$R3\ R2\ R1 = \begin{bmatrix} -0.066988739 & -0.872755766 & -0.483538915 \\ 0.492728466 & -0.450346958 & 0.744584633 \\ -0.867600811 & 0.188374602 & 0.460199785 \end{bmatrix}$$

Para pasar de coordenadas eclípticas a galácticas ( L, B $\rightarrow$ l, b ), se tendrá que hacer una rotación mas. Deberemos primero llevar la eclíptica al ecuador girando sobre el eje X un ángulo de $-\epsilon = -23° 27'$ y luego seguir los pasos vistos anteriormente.

### 1.5.3- Transformación de Coordenadas Ecuatoriales Locales a Horizontales

El elemento clave para realizar esta transformación es la latitud del lugar. Si no se conoce la latitud, entonces no se puede operar. Los parámetros que deben relacionarse son:

H, $\delta$ = Ángulo Horario y Declinación

A, h = Acimut (desde el norte pasando por el este) y ángulo de altura

Hacemos dos rotaciones no muy obvias, *[Figura 1.5d]*:

**(1)** Rotación alrededor del eje Z de 180° , para hacer que el Acimut y el Ángulo Horario sean compatibles en signo.

**(2)** Rotación alrededor del eje Y de –(90° – φ ) , para llevar el Ecuador hacia el plano del Horizonte.

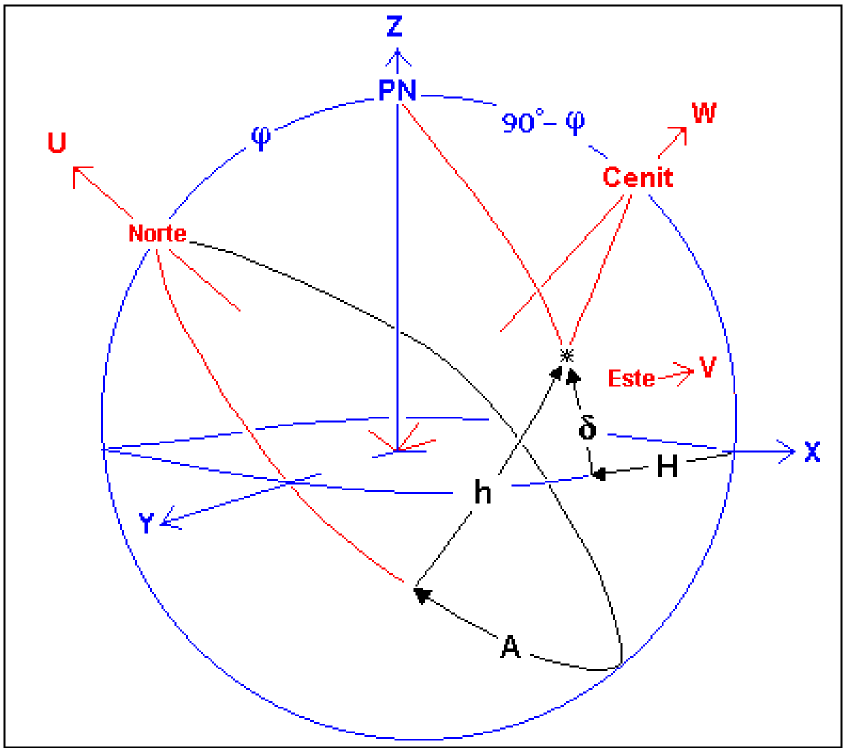


*Figura 1.5d: Transformación entre los sistemas Ecuatorial Local y Horizontal*

Recordamos que: $\cos(90° - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$

$$\operatorname{sen}(90° - \varphi) = \cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} \cos H \ \cos\delta \\ \operatorname{sen} H \ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A \ \cos h \\ \operatorname{sen} A \ \cos h \\ \operatorname{sen} h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos H \ \cos\delta \\ \operatorname{sen} H \ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A \ \cos h \\ \operatorname{sen} A \ \cos h \\ \operatorname{sen} h \end{bmatrix}$$

Como la matriz de rotación es simétrica la transpuesta es la misma, por lo tanto la transformación inversa se hace igual.

$$\begin{bmatrix} \cos A \ \cos h \\ \operatorname{sen} A \ \cos h \\ \operatorname{sen} h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos H \ \cos\delta \\ \operatorname{sen} H \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{bmatrix}$$

$$X = \cos A \ \cos h = -\operatorname{sen}\varphi \ \cos H \ \cos\delta + \cos\varphi \ \operatorname{sen}\delta$$

$$Y = \operatorname{sen} A \ \cos h = -\operatorname{sen} H \ \cos\delta$$

$$Z = \operatorname{sen} h = \cos\varphi \ \cos H \ \cos\delta + \operatorname{sen}\varphi \ \operatorname{sen}\delta$$

$h = \operatorname{sen}^{-1} Z$ , o mejor usar: $h = \operatorname{tg}^{-1} ( Z / (X^2 + Y^2)^{1/2} )$

$A = \operatorname{tg}^{-1} (Y / X)$

-----------------------------------------------