

Métodos de equilibrio

Cálculo de fuerzas internas en estructuras
estáticamente determinadas

Armaduras

✓ Método de los nudos

✓ Método de las secciones

Vigas y pórticos

✓ Método de integración

✓ Método de las secciones

Cálculo de deflexiones en vigas
estáticamente determinadas

➤ Método de la doble integración

➤ Método de la viga conjugada

➤ Método del área de momentos



Estructuras

Métodos de energía

Cálculo de deflexiones en estructuras
estáticamente determinadas

Armaduras, vigas y pórticos

✓ Método del trabajo real

✓ Método del trabajo virtual



Estructuras

Métodos aproximados

Cálculo de estructuras estáticamente
indeterminadas

Vigas y pórticos

✓ Método de Giro - Deflexión (Pendiente- Desviación)

✓ Método de Cross (Método de distribución de momentos)



Estructuras

Métodos de equilibrio

Cálculo de estructuras estáticamente
indeterminadas con $GIC \leq 2$

Vigas y pórticos

✓ Método del área de momentos

✓ Método de la viga conjugada

Cálculo de estructuras estáticamente
indeterminadas

Armaduras, vigas y pórticos

✓ Método de la flexibilidad o método de las fuerzas

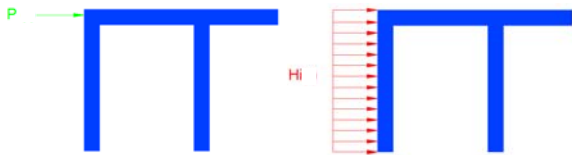
✓ Método de la rigidez o método de los desplazamientos



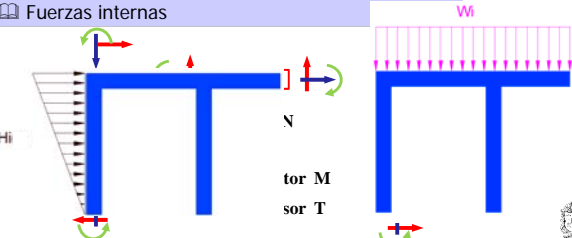
Estructuras

Fuerzas en las Estructuras

fuerzas externas



Fuerzas internas



tor M
sor T

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Escuela Superior de Ingeniería

Principio de superposición

Si los desplazamientos y esfuerzos en todos los puntos de una estructura son proporcionales a las cargas que las causan, **los efectos totales** (desplazamientos, fuerzas internas y esfuerzos) que resultan de la aplicación de varias cargas, **son la suma de los efectos causados por cada carga aplicada separadamente.**

RELACIÓN LINEAL ENTRE CARGAS, ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS

~~Si la estructura cambia considerablemente bajo la acción de las cargas~~

~~Si el material de la estructura tiene un comportamiento no lineal~~



Estructuras

Marco de Referencia de análisis matricial

Definiciones necesarias

Elementos

Son las partes que constituyen el sistema estructural que se está representando.

Nudos

Son los lugares de la estructura donde se conectan los elementos

Grado de libertad

Es un desplazamiento posible en un nudo de una estructura, puede ser de traslación o rotación.

Fuerza

Representa la acción que actúa en un determinado grado de libertad. Fuerza → Traslación, y, Momento → Rotación

Rigidez

Es la fuerza necesaria requerida para generar un desplazamiento unitario.

Estructuras

Estabilidad

La función principal de una estructura es soportar cargas sin que en ella ocurran distorsiones apreciables. Si hay distorsiones apreciables en la configuración inicial de una estructura, hay pérdida de estabilidad lo que conllevará al colapso parcial o total de la estructura.

Estabilidad externa: Depende de la cantidad y de la disposición de los apoyos. La estructura es estable externamente si ésta no se desplaza y no gira.

Estabilidad interna: Depende del equilibrio de los elementos. La estructura es estable internamente si cada nudo de ésta se mantiene fijo por sus soportes o miembros conectados de tal manera que no puede moverse con respecto a los otros nudos.



Estabilidad y Determinación para estructuras planas

Método de flexibilidad o Método de las fuerzas

$$[U_T] = [U_{F0}] + [C][F_R]$$

$$\begin{bmatrix} U_{1T} \\ \vdots \\ U_{iT} \\ \vdots \\ U_{jT} \\ \vdots \\ U_{nT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{10} \\ \vdots \\ U_{i0} \\ \vdots \\ U_{j0} \\ \vdots \\ U_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1i} & \cdots & \delta_{1j} & \cdots & \delta_{1n} \\ & \ddots & & & & & \\ & & \delta_{ii} & \cdots & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{in} \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \delta_{jj} & \cdots & \delta_{jn} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1R} \\ \vdots \\ F_{iR} \\ \vdots \\ F_{jR} \\ \vdots \\ F_{nR} \end{bmatrix}$$

SYM

El coeficiente de flexibilidad δ_{ij} corresponde al desplazamiento en el grado de libertad i cuando una fuerza unitaria es impuesto en el grado de libertad j .



Estructuras

Método de la flexibilidades

- 1 Enumerar los nudos, establecer el GIE y definir la orientación de los elementos.



Rigidez

Grado de indeterminación estática GIE

Corresponde al **mínimo número de acciones de reacción y de acciones internas** que son necesarias conocer para **resolver la estructura a partir de las ecuaciones de la estática**. Es el indicador del número de incógnitas y el número de ecuaciones de la estática que hay para resolver una estructura.

Incógnitas: Son el conjunto formado por los elementos y las acciones de reacción.

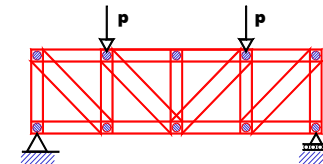
Ecuaciones: Son las ecuaciones de equilibrio de la estructura.
 Según el GIE de una estructura se puede concluir que:
 * Si $GIE < 0$ La estructura es inestable.
 * Si $GIE = 0$ La estructura es estáticamente determinada si es estable.
 * Si $GIE > 0$ La estructura es estáticamente indeterminada si es estable.



Estabilidad y Determinación para estructuras planas

Cercha plana

Se compone de elementos lineales que sólo soportan fuerzas axiales y que están unidos por pasadores. Las cerchas únicamente se pueden soportar cargas puntuales colocadas en los nudos.



Incógnitas: * Acciones internas de los elementos **b**
 * Acciones de reacción **r**

Ecuaciones: * Ecuaciones de equilibrio de los nudos **2j**
 * Ecuaciones de condición **c**

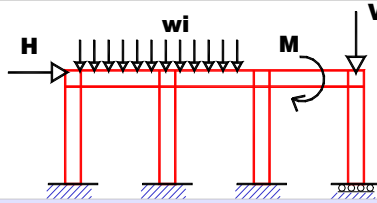
$$GIE = b + r - 2j - c$$



Estabilidad y Determinación para estructuras planas

Pórtico plano

Se compone de elementos lineales (vigas y columnas) unidos rigidamente, que soportan fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flectores.



Incógnitas: * Acciones internas de los elementos **3b**
* Acciones de reacción **r**

Ecuaciones: * Ecuaciones de equilibrio de los nudos **3j**
* Ecuaciones de condición **c**

$$GIE = 3b + r - 3j - c$$



Estabilidad y Determinación para estructuras planas

Método de la flexibilidades

- 1 Enumerar los nudos, establecer el GIE y definir la orientación de los elementos.
- 2 Definir la estructura fundamental y las estructuras requeridas para determinar las acciones redundantes
- 3 Calcular los desplazamientos de la estructura fundamental acorde con las acciones redundantes.
- 4 Determinar la matriz de flexibilidades del sistema
- 5 Hallar las acciones redundantes
- 6 A través del equilibrio general de la estructura calcular las reacciones restantes
- 7 Hallar las fuerzas internas de los elementos
- 8 Determinar los diagramas de fuerzas internas en la estructura



Rigidez

Método de la rigidez o método de los desplazamientos

$$[F] = [F^f] + [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^f \\ \vdots \\ F_i^f \\ \vdots \\ F_j^f \\ \vdots \\ F_n^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{j1} & \cdots & k_{ji} & \cdots & k_{jj} & \cdots & k_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

El coeficiente de rigidez k_{ij} corresponde a la fuerza en el grado de libertad i cuando un desplazamiento unitario es impuesto en el grado de libertad j y el desplazamiento de los otros grados de libertad es nulo.



Estructuras

Método de la rigidez

- 1 Enumerar los nudos, establecer el GIC y definir la orientación de los elementos.



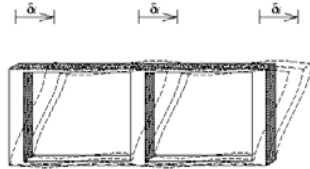
Rigidez

Grado de indeterminación cinemática GIC

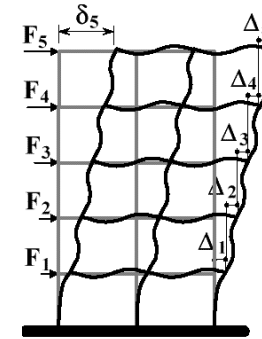
Corresponde al **número de desplazamientos desconocidos** en una estructura.

Incógnitas: Son los desplazamientos y giros desconocidos en los nudos de la estructura.

Reducción: Si las uniones son rígidas se puede asumir que el desplazamiento horizontal es el mismo para un nivel determinado.
En los pórticos se suelen despreciar las deformaciones axiales de los elementos de la estructura por lo tanto no cambia su longitud.



Grado de indeterminación cinemática GIC



Método de la rigidez

- 1 Enumerar los nudos, establecer el GIC y definir la orientación de los elementos.

Establecer los grados de libertad de los nudos de la estructura, ordenándolos de tal forma que queden separadas las fuerzas de los nudos libres y las reacciones de los apoyos.

- 2 Determinar el vector de los desplazamientos, el vector de fuerzas externas, y el vector fuerzas fijas de la estructura.

- 3 Calcular la matriz de rigidez de cada elemento referida a las coordenadas globales.

- 4 Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura.

Método de la rigidez o método de los desplazamientos en vigas y pórticos

$$[F] = [F^f] + [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^f \\ F_A^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [F_N^f] + [K_{NN}][U_N] + [K_{NA}][U_A]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1}([F_N] - [F_N^f] - [K_{NA}][U_A])$$

$$[F_A] = [F_A^f] + [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$

Método de la rigidez

5 Calcular los desplazamientos desconocidos

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1} ([F_N] - [K_{NA}][U_A])$$

6 Determinar las reacciones

$$[F_A] = [F_A^F] + [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$

7 Verificar el equilibrio general de la estructura

8 Hallar las fuerzas internas de los elementos

9 Determinar los diagramas de fuerzas internas en la estructura



Rigidez

Estructuras Hiperestáticas

Una estructura es hiperestática cuando tiene más reacciones externas o fuerzas internas que las fuerzas que pueden determinarse estáticamente

VENTAJAS

✓ Diseño de los elementos con dimensiones menores

✓ Capacidad redistribución de sobreesfuerzos

✓ Mayor rigidez y menores deflexiones

DESVENTAJAS

✗ Dificultad en el análisis y diseño

✗ Aparición de otros esfuerzos

✗ Inversión de fuerzas internas

Cada forma estructural presenta un comportamiento diferente



Estructuras