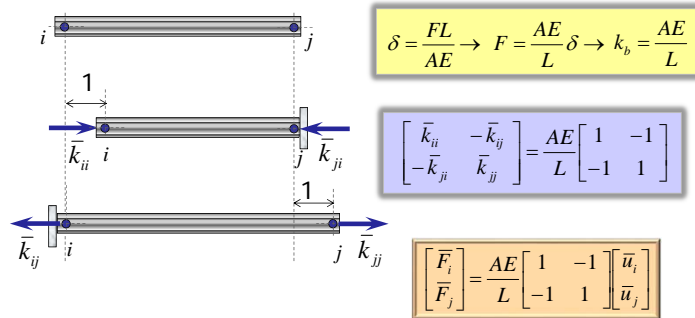
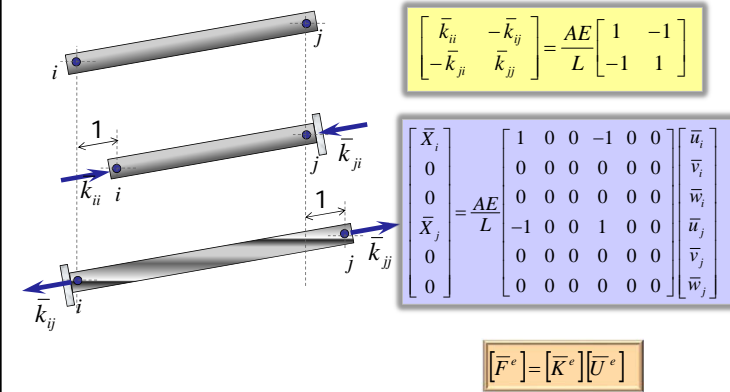


Matriz de rigidez local de una barra tipo armadura



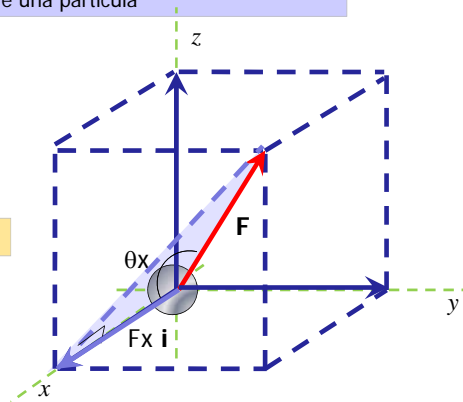
Matriz de rigidez local de una barra tipo armadura



ESTADICA DE PARTÍCULAS

Fuerza sobre una partícula

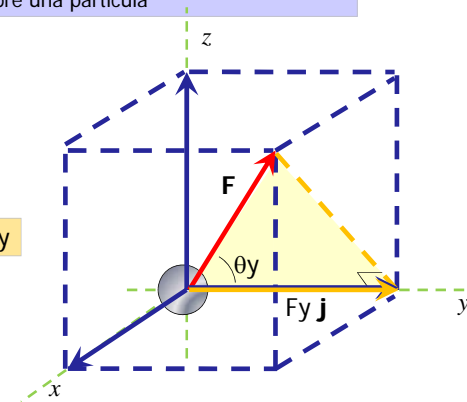
$$F_x = F \cos \theta_x$$

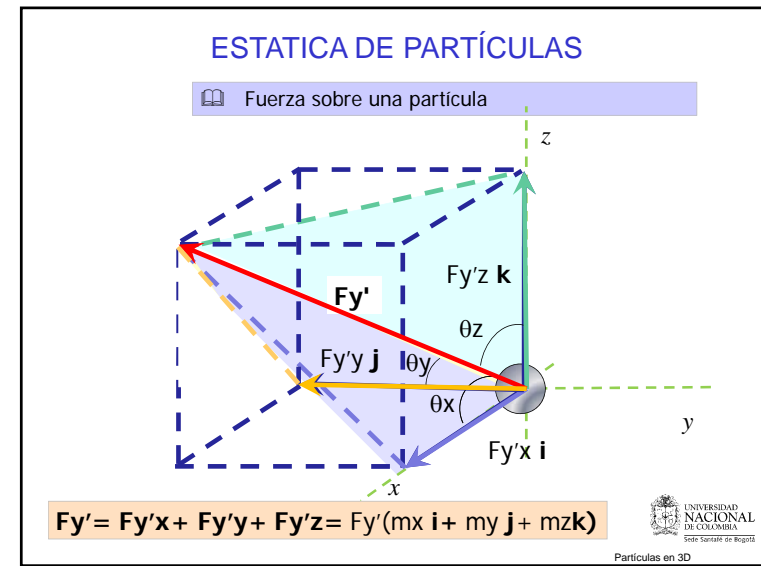
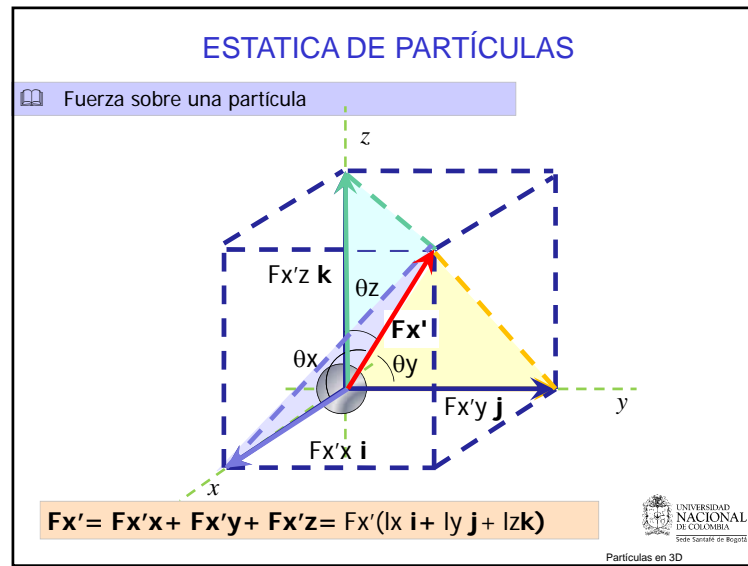
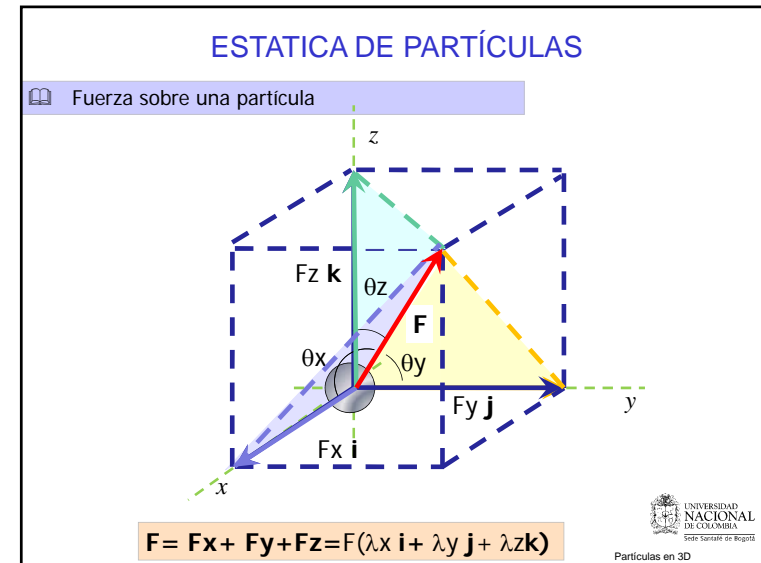
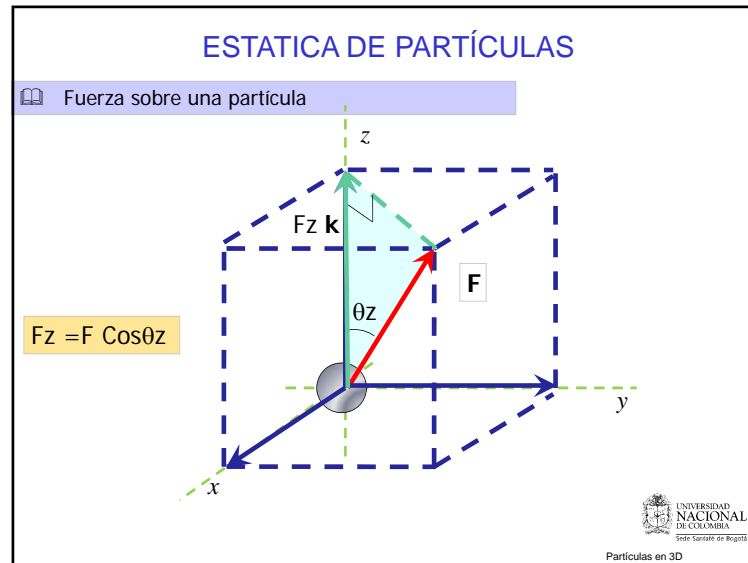


ESTADICA DE PARTÍCULAS

Fuerza sobre una partícula

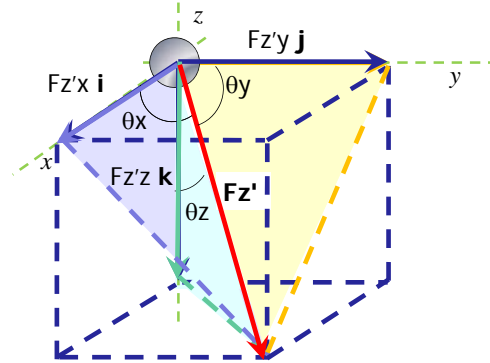
$$F_y = F \cos \theta_y$$





ESTATICA DE PARTÍCULAS

Fuerza sobre una partícula



$$\mathbf{Fz}' = \mathbf{Fz}'x + \mathbf{Fz}'y + \mathbf{Fz}'z = \mathbf{Fz}'(nx \mathbf{i} + ny \mathbf{j} + nz \mathbf{k})$$



Partículas en 3D

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo armadura

$$F_x = F_x'x + F_y'y + F_z'z = F_x'lx + F_y'mx + F_z'nx$$

$$F_y = F_x'y + F_y'y + F_z'z = F_x'ly + F_y'my + F_z'ny$$

$$F_z = F_x'z + F_y'z + F_z'z = F_x'lz + F_y'mz + F_z'nz$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lx & mx & nx & 0 & 0 & 0 \\ ly & my & ny & 0 & 0 & 0 \\ lz & mz & nz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & lx & mx & nx \\ 0 & 0 & 0 & ly & my & ny \\ 0 & 0 & 0 & lz & mz & nz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}^e] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{F}}^e]$$



Estructuras

Matriz de rigidez global de una barra de armaduras o bastidores



$$[\mathbf{F}^e] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{K}}^e][\bar{\mathbf{U}}^e] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{K}}^e][\mathbf{T}]^T [\mathbf{U}^e]$$

$$[\mathbf{F}^e] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{F}}^e]$$

$$[\bar{\mathbf{F}}^e] = [\bar{\mathbf{K}}^e][\bar{\mathbf{U}}^e]$$

$$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{K}}^e][\mathbf{T}]^T$$

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} lx^2 & lxtl & lxlz & -lx^2 & -lxtl & -lxlz \\ ly^2 & lytl & lytz & -ly^2 & -lytl & -lytz \\ lz^2 & -lxlz & -lytz & -lxlz & -lytz & -lz^2 \\ sym & lx^2 & lxtl & lxlz & ly^2 & lytl & lytz & lz^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}^e] = [\mathbf{K}^e][\mathbf{U}^e]$$



Estructuras

Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico espacial

$$\begin{bmatrix} X_{\theta} \\ Y_{\theta} \\ Z_{\theta} \\ M_{x,\theta} \\ M_{y,\theta} \\ M_{z,\theta} \\ X_{\beta} \\ Y_{\beta} \\ Z_{\beta} \\ M_{x,\beta} \\ M_{y,\beta} \\ M_{z,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\theta}^e \\ Y_{\theta}^e \\ Z_{\theta}^e \\ M_{x,\theta}^e \\ M_{y,\theta}^e \\ M_{z,\theta}^e \\ X_{\beta}^e \\ Y_{\beta}^e \\ Z_{\beta}^e \\ M_{x,\beta}^e \\ M_{y,\beta}^e \\ M_{z,\beta}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{4IE}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{2IE}{L} \\ 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4IE}{L} & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2IE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12IE}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{2IE}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{4IE}{L} \\ 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2IE}{L} & 0 & 0 & \frac{6IE}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\theta} \\ v_{\theta} \\ w_{\theta} \\ \theta_{x,\theta} \\ \theta_{y,\theta} \\ \theta_{z,\theta} \\ u_{\beta} \\ v_{\beta} \\ w_{\beta} \\ \theta_{x,\beta} \\ \theta_{y,\beta} \\ \theta_{z,\beta} \end{bmatrix}$$



Método de la rigidez

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo armadura

$$\begin{aligned} Fx &= Fx'x + Fy'y + Fz'z = Fx'l_x + Fy'm_x + Fz'n_x \\ Fy &= Fx'y + Fy'y + Fz'z = Fx'l_y + Fy'm_y + Fz'n_y \\ Fz &= Fx'z + Fy'z + Fz'z = Fx'l_z + Fy'm_z + Fz'n_z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} [\bar{F}] = [\lambda] [\bar{F}]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} [\bar{M}] = [\lambda] [\bar{M}]$$



Estructuras

Matriz de rigidez global de un elemento tipo pórtico espacial

$$[F^e] = [T] [\bar{F}^e]$$

$$[F^e] = [T] [\bar{F}^e]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_z & m_z & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & n_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & n_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$



Estructuras

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo armadura

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [\lambda]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [\lambda]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [\lambda]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [\lambda]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$



Estructuras

Matriz de rigidez global de un elemento tipo pórtico espacial

$$[F^e] = [T] [\bar{F}^e]$$

$$[\bar{F}^e] = [\bar{F}^{Fe}] + [\bar{K}^e] [\bar{U}^e]$$

$$[F^e] = [T] [\bar{F}^{Fe}] + [T] [\bar{K}^e] [\bar{U}^e] = [F^{Fe}] + [T] [\bar{K}^e] [T]^T [U^e]$$

$$[F^{Fe}] = [T] [\bar{F}^{Fe}]$$

$$[K^e] = [T] [\bar{K}^e] [T]^T$$

$$[F^e] = [F^{Fe}] + [K^e] [U^e]$$



Estructuras

Condensación

$$\begin{bmatrix} F_I \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^F \\ F_D^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{II} & K_{ID} \\ K_{DI} & K_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_I \\ U_D \end{bmatrix}$$

$$\{F_I\} = \{F_I^F\} + [K_{II}]\{U_I\} + [K_{ID}]\{U_D\}$$

$$\{F_D\} = \{F_D^F\} + [K_{DI}]\{U_I\} + [K_{DD}]\{U_D\}$$

$$\{U_D\} = [K_{DD}]^{-1}(\{F_D\} - \{F_D^F\}) - [K_{DD}]^{-1}[K_{DI}]\{U_I\}$$

$$\{F_I\} = \underbrace{\{F_I^F\} + [K_{ID}][K_{DD}]^{-1}(\{F_D\} - \{F_D^F\})}_{\{\hat{F}_I^F\}} + \underbrace{([K_{II}] - [K_{ID}][K_{DD}]^{-1}[K_{DI}])}_{[\hat{K}_{II}]} \{U_I\}$$

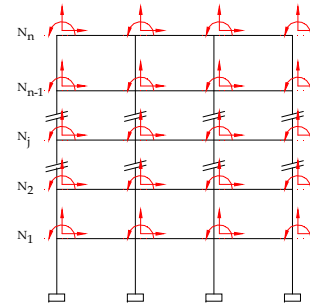
$$\{F_I\} = \{\hat{F}_I^F\} + [\hat{K}_{II}]\{U_I\}$$



Deformaciones por cortante

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez – Método de la condensación



1 Enumerar los nudos, establecer el GIC y definir la orientación de los elementos.

2 Calcular la matriz de rigidez de cada elemento referida a las coordenadas del plano del pórtico



Reducciones de la matriz de rigidez

Matriz de rigidez global de un elemento tipo pórtico

$$[K^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T$$

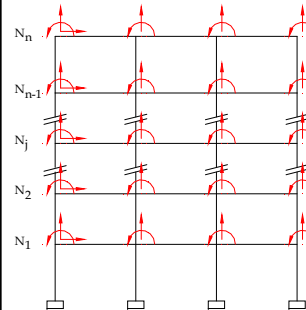
	u_i	v_i	θ_i	u_j	v_j	θ_j
$\frac{AE}{L} C^2 + \frac{12IE}{L^3} S^2$	$\left(\frac{AE}{L} - \frac{12IE}{L^3}\right) CS$	$-\frac{6IE}{L^2} S$	$-\left(\frac{AE}{L} C^2 + \frac{12IE}{L^3} S^2\right)$	$-\left(\frac{AE}{L} - \frac{12IE}{L^3}\right) CS$	$-\frac{6IE}{L^2} S$	
$\frac{AE}{L} S^2 + \frac{12IE}{L^3} C^2$	$\frac{6IE}{L^2} C$	$-\left(\frac{AE}{L} - \frac{12IE}{L^3}\right) CS$	$-\left(\frac{AE}{L} S^2 + \frac{12IE}{L^3} C^2\right)$	$\frac{6IE}{L^2} C$	$-\frac{6IE}{L^2} S$	
$\frac{4IE}{L}$	$\frac{6IE}{L^2} S$	$-\frac{6IE}{L^2} C$	$\frac{2IE}{L}$	$\frac{6IE}{L^2} S$	$-\frac{6IE}{L^2} C$	
$\frac{AE}{L} C^2 + \frac{12IE}{L^3} S^2$	$\left(\frac{AE}{L} - \frac{12IE}{L^3}\right) CS$	$-\frac{6IE}{L^2} S$	$-\left(\frac{AE}{L} C^2 + \frac{12IE}{L^3} S^2\right)$	$-\left(\frac{AE}{L} - \frac{12IE}{L^3}\right) CS$	$-\frac{6IE}{L^2} S$	
$\frac{AE}{L} S^2 + \frac{12IE}{L^3} C^2$	$\frac{6IE}{L^2} C$	$-\left(\frac{AE}{L} - \frac{12IE}{L^3}\right) CS$	$-\left(\frac{AE}{L} S^2 + \frac{12IE}{L^3} C^2\right)$	$\frac{6IE}{L^2} C$	$-\frac{6IE}{L^2} S$	
$\frac{4IE}{L}$	$\frac{6IE}{L^2} S$	$-\frac{6IE}{L^2} C$	$\frac{2IE}{L}$	$\frac{6IE}{L^2} S$	$-\frac{6IE}{L^2} C$	



Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez – Método de la condensación



3 Se hacen las vigas inextensibles debido al efecto de diafragma rígido.

$$u_j = u_{ij} \quad \{i=1, \dots, m\}$$

4 Ensamblar la matriz de rigidez del pórtico

$$[k_{pl}]_{(2m+1)^*n, (2m+1)^*n}$$

Si se ensamblara la matriz de rigidez del pórtico sin tomar las vigas inextensibles $[k_p]_{3m^*n, 3m^*n}$



Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez – Método de la condensación

- 5 Se ajustan los grados de libertad verticales.

$$\frac{H}{B} < 5 \quad v_{ij} = 0 \quad \{i = 1, \dots, m\}$$

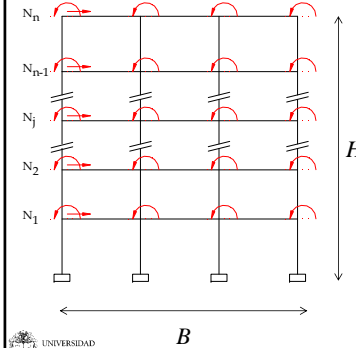
Se deben anular las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad verticales

$$\{v\} = \{0\}$$

$$[k_{sv}] \equiv [k_{pl}(v=0)]$$

$$[k_{sv}]_{(m+1)*n, (m+1)*n}$$

Reducciones de la matriz de rigidez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez – Método de la condensación

- 5 Se ajustan los grados de libertad verticales.

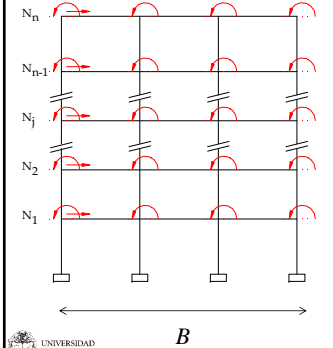
$$\frac{H}{B} \geq 5 \quad v_{ij} \neq 0 \quad \{i = 1, \dots, m\}$$

Se debe condensar la matriz de rigidez en función de los grados de libertad verticales

$$\begin{bmatrix} \{F^{sv}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ss}^{ss}] & [k_{pl}^{sv}] \\ [k_{pl}^{vs}] & [k_{pl}^{vv}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_{sv}\} \\ \{u_v\} \end{bmatrix}$$

$$[k_{sv}] = [k_{ss}^{ss}] - [k_{pl}^{sv}][k_{pl}^{vv}]^{-1}[k_{pl}^{vs}]$$

Reducciones de la matriz de rigidez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez – Método de la condensación

- 6 Se ajustan los grados de libertad de giro.

$$\theta_{ij} \neq 0 \quad \{i = 1, \dots, m\}$$

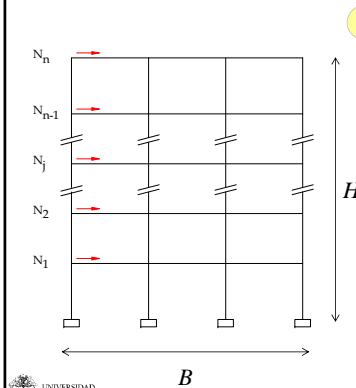
Se debe condensar la matriz de rigidez en función de los grados de libertad de giro

$$\begin{bmatrix} \{F^p\} \\ \{0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{sv}^{pp}] & [k_{sv}^{p\theta}] \\ [k_{sv}^{\theta p}] & [k_{sv}^{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_\theta\} \end{bmatrix}$$

$$[k_p] = [k_{sv}^{pp}] - [k_{sv}^{p\theta}][k_{sv}^{\theta\theta}]^{-1}[k_{sv}^{\theta p}]$$

$$[k_p]_{n,n}$$

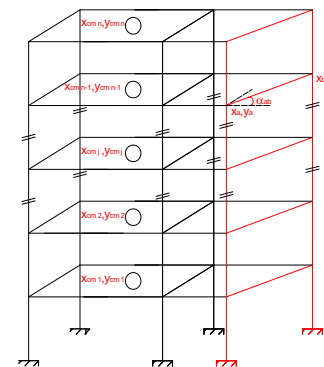
Reducciones de la matriz de rigidez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Idealización dinámica de la estructura

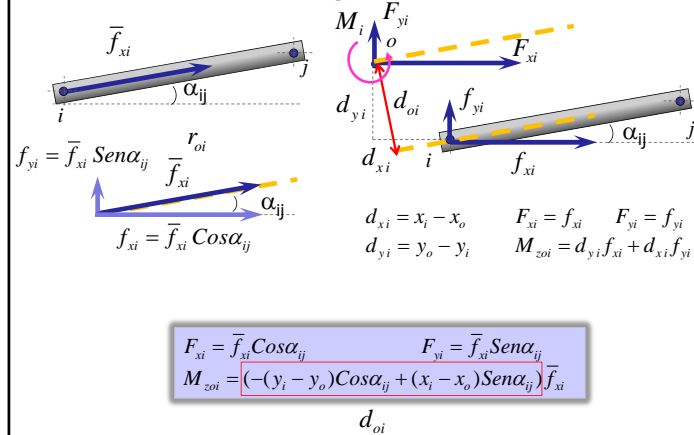
Idealización de la matriz de rigidez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Reducciones de la matriz de rigidez

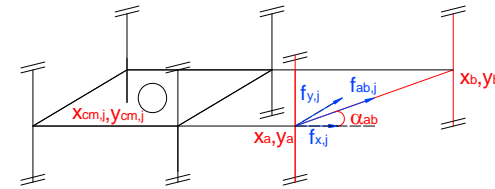
Matriz de transformación de fuerzas locales a globales



Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez – Transformación de las fuerzas locales a globales



$$\alpha_{ab} = \text{Atan} \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right)$$

$$f_{x,j} = f_{ab,j} \cos \alpha_{ab}$$

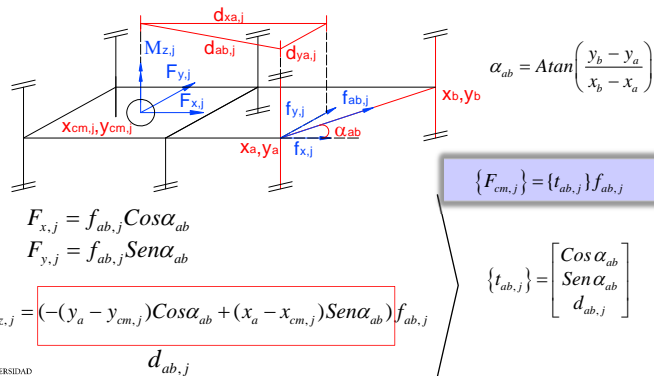
$$f_{y,j} = f_{ab,j} \sin \alpha_{ab}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez -Traslado de fuerzas de un pórtico al c.m.

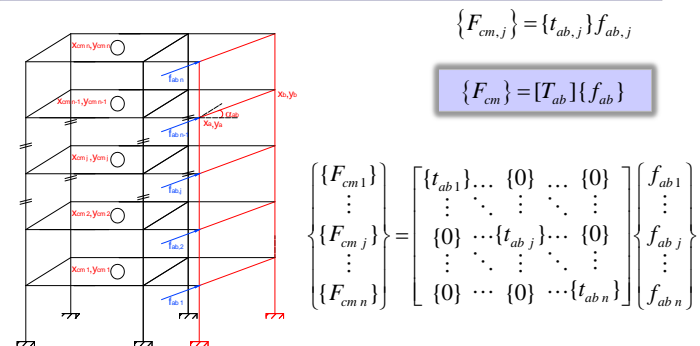


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

Idealización de la matriz de rigidez - Traslado de fuerzas de un pórtico a los c.m.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA Sede Santafé de Bogotá

Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

📖 Idealización de la matriz de rigidez - Traslado de fuerzas de un pórtico a los c.m.

$$\{F_{cm}\} = [T_{ab}]\{f_{ab}\}$$

$$\alpha_{ab} = \text{Atan}\left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right)$$

$$d_{ab,j} = (x_a - x_{cm,j}) \text{Sen} \alpha_{ab} - (y_a - y_{cm,j}) \text{Cos} \alpha_{ab}$$

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} \text{Cos} \alpha_{ab} & 0 & 0 \\ \text{Sen} \alpha_{ab} & \dots & 0 \\ d_{ab,1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \text{Cos} \alpha_{ab} & 0 \\ 0 & \text{Sen} \alpha_{ab} & \dots \\ 0 & d_{ab,j} & \vdots \\ 0 & 0 & \text{Cos} \alpha_{ab} \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{ab,n} \end{bmatrix}$$



Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura

📖 Idealización de la matriz de rigidez

$$\{F_{cm}\} = [T_{ab}]\{f_{ab}\}$$

$$\{F_p\} = [T_p]\{f_p\}$$

$$\{U_p\} = [T_p]\{u_p\}$$

$$\{f_p\} = [k_p]\{u_p\}$$

$$[K_p]$$

$$\{F_p\} = [T_p][k_p]\{u_p\} = [T_p][k_p][T_p]^T\{U_p\}$$

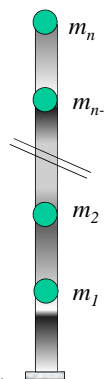
$$[K_p] = [T_p][k_p][T_p]^T$$

$$[K_E] = \sum_{p=1}^{n \text{ port}} [K_p]$$



Reducciones de la matriz de rigidez

Idealización dinámica de la estructura



📖 Análisis modal cronológico

$$[m_E]\{\ddot{U}\} + [c_E]\{\dot{U}\} + [k_E]\{U\} = \{p(t)\} - [m_E]\{\lambda\}\ddot{U}_g$$

📖 Análisis modal espectral

$$[m_E]\{\ddot{U}\} + [c_E]\{\dot{U}\} + [k_E]\{U\} = -[m_E]\{\lambda\}\ddot{U}_g$$



Principios de la Dinámica