

Método de la rigidez o método de los desplazamientos

$$[F] = [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{j1} & \cdots & k_{ji} & \cdots & k_{jj} & \cdots & k_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

El coeficiente de rigidez k_{ij} corresponde a la fuerza en el grado de libertad i cuando un desplazamiento unitario es impuesto en el grado de libertad j y el desplazamiento de los otros grados de libertad es nulo.



Estructuras

Método de la rigidez o método de los desplazamientos para armaduras

$$[F] = [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [K_{NN}][U_N] + [K_{NA}][U_A]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1}([F_N] - [K_{NA}][U_A])$$

$$[F_A] = [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$



Estructuras

Método de la rigidez o método de los desplazamientos para armaduras

$$[F] = [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A = [0] \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [K_{NN}][U_N]$$

$$[F_A] = [K_{AN}][U_N]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1}[F_N]$$



Estructuras

Método de la rigidez para armaduras

- 1 Enumerar los nudos, establecer el GIC y definir la orientación de los elementos.

Establecer los grados de libertad de los nudos de la estructura, ordenándolos de tal forma que queden separadas las fuerzas de los nudos libres y las reacciones de los apoyos.

- 2 Determinar el vector de los desplazamientos y el vector de fuerzas externas.

- 3 Calcular la matriz de rigidez de cada elemento referida a las coordenadas globales.

- 4 Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura.



Rigidez

Método de la rigidez para armaduras

5 Calcular los desplazamientos desconocidos

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1} ([F_N] - [K_{NA}][U_A])$$

6 Determinar las reacciones

$$[F_A] = [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$

7 Verificar el equilibrio general de la estructura

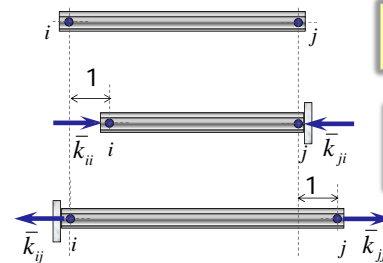
8 Hallar las fuerzas internas de los elementos

9 Determinar los diagramas de fuerzas internas en la estructura



Rigidez

Matriz de rigidez local de una barra tipo armadura



$$\delta = \frac{FL}{AE} \rightarrow F = \frac{AE}{L} \delta \rightarrow k_b = \frac{AE}{L}$$

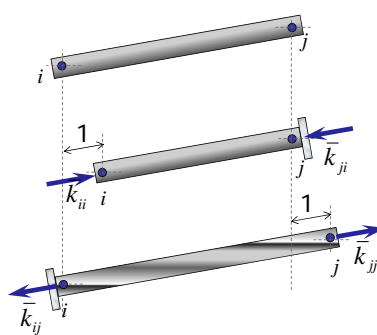
$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & -\bar{k}_{ij} \\ -\bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$



Estructuras

Matriz de rigidez local de una barra tipo armadura



$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & -\bar{k}_{ij} \\ -\bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

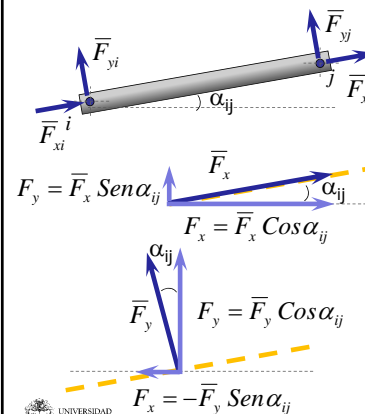
$$\begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ 0 \\ \bar{F}_j \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}^e] = [\bar{K}^e][\bar{U}^e]$$



Estructuras

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo armadura



$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \end{bmatrix}$$

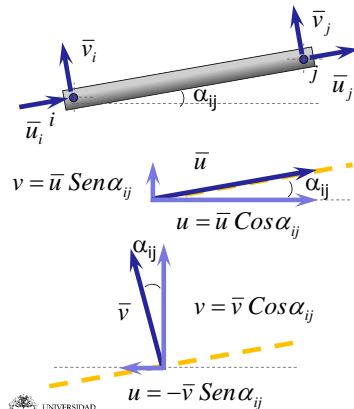
$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix}$$

$$[F^e] = [T][\bar{F}^e]$$



Estructuras

Matriz de transformación de desplazamientos locales a globales en un elemento tipo armadura

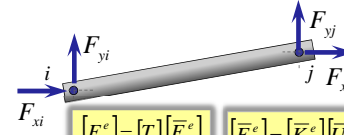


$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}$$

$$[U^e] = [T][\bar{U}^e]$$

Matriz de rigidez global de una barra de armaduras o bastidores



$$[F^e] = [T][\bar{K}^e][\bar{U}^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T [U^e]$$

$$[F^e] = [T][\bar{F}^e]$$

$$[\overline{F}^e] = [\overline{K}^e][\overline{U}^e]$$

$$[K^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T$$

$$[K^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C^2 & -CS \\ 0 & 0 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad [K^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

$$[F^e] = [K^e][U^e]$$

Método de la rigidez o método de los desplazamientos en vigas y pórticos

$$[F] = [F^f] + [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^F \\ F_A^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [F_N^F] + [K_{NN}][U_N] + [K_{NA}][U_A]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1} ([F_N] - [F_N^F] - [K_{NA}][U_A])$$

$$[F_A] = [F_A^F] + [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$

Método de la rigidez o método de los desplazamientos en vigas y pórticos

$$[F] = [F^f] + [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^F \\ F_A^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A = [0] \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [F_N^F] + [K_{NN}][U_N]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1} ([F_N] - [F_N^F])$$

$$[F_A] = [F_A^F] + [K_{AN}][U_N]$$

Método de la rigidez

- 1 Enumerar los nudos, establecer el GIC y definir la orientación de los elementos.

Establecer los grados de libertad de los nudos de la estructura, ordenándolos de tal forma que queden separadas las fuerzas de los nudos libres y las reacciones de los apoyos.

- 2 Determinar el vector de los desplazamientos, el vector de fuerzas externas, y el vector fuerzas fijas de la estructura.

Calcular el vector de fuerzas fijas de cada elemento referido a las coordenadas globales y **ensamblar el vector de fuerzas fijas de la estructura**.

- 3 Calcular la matriz de rigidez de cada elemento referida a las coordenadas globales.



Método de la rigidez

- 4 Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura.

- 5 Calcular los desplazamientos desconocidos

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1} ([F_N] - [F_N^F] - [K_{NA}][U_A])$$

- 6 Determinar las reacciones

$$[F_A] = [F_A^F] + [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$

- 7 Verificar el equilibrio general de la estructura

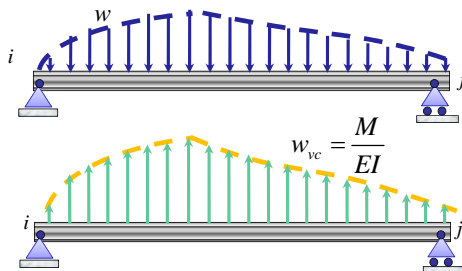
- 8 Hallar las fuerzas internas de los elementos

- 9 Determinar los diagramas de fuerzas internas en la estructura



Análisis de vigas

Método de viga conjugada



$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

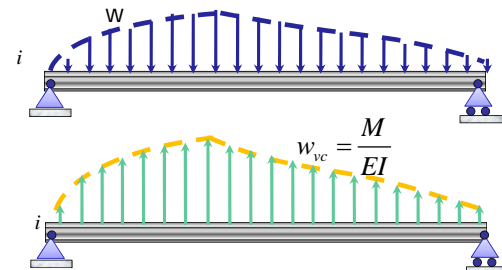
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$



Análisis de vigas

Método de viga conjugada

Teorema 1 La pendiente en un punto de la viga real es igual a la fuerza cortante en el punto correspondiente de la viga conjugada



$$\theta = \int \left(\frac{M}{EI} \right) dx$$

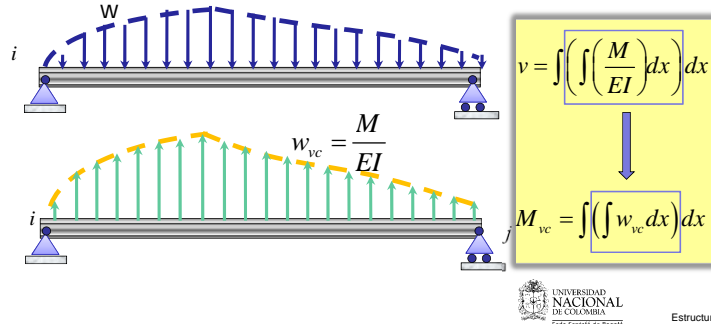
$$V_{vc} = \int w_{vc} dx$$



Análisis de vigas

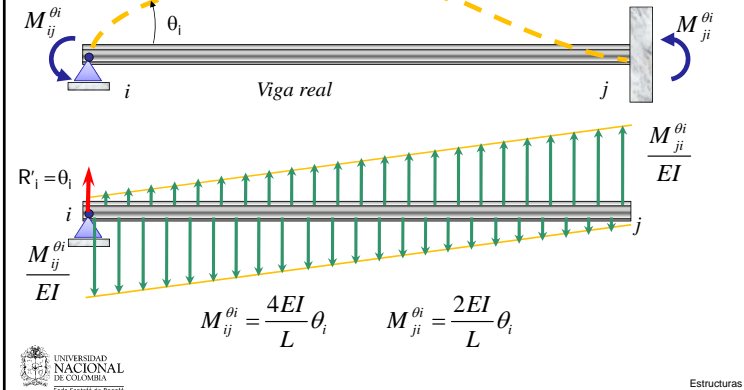
Método de viga conjugada

Teorema 2 El desplazamiento en un punto de la viga real es igual al momento en el punto correspondiente de la viga conjugada



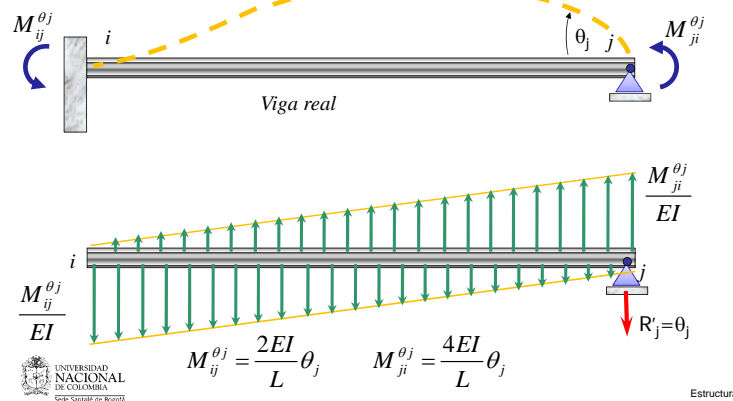
Análisis de vigas

1) Desplazamiento angular θ_i



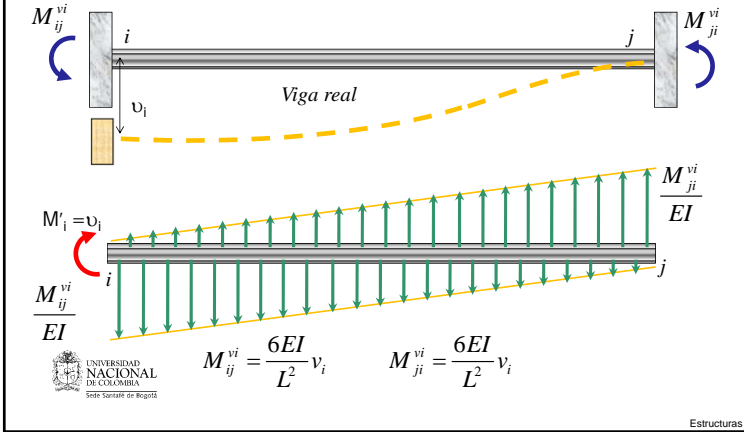
Análisis de vigas

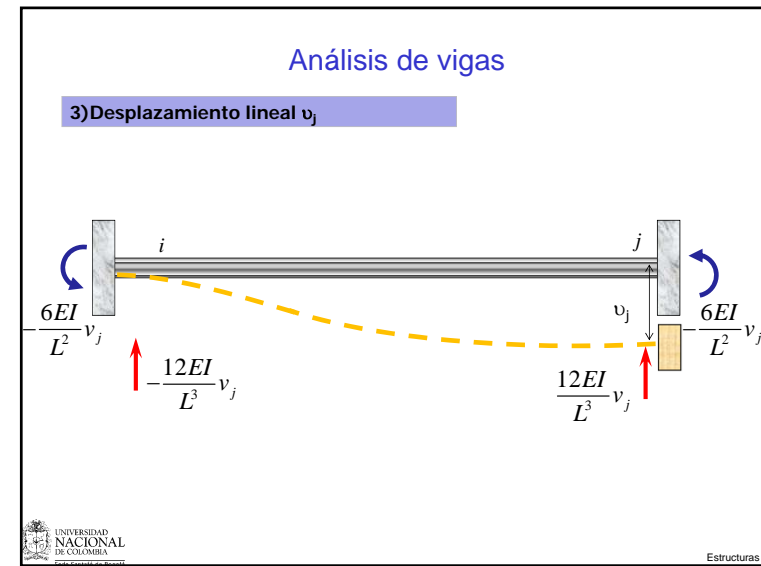
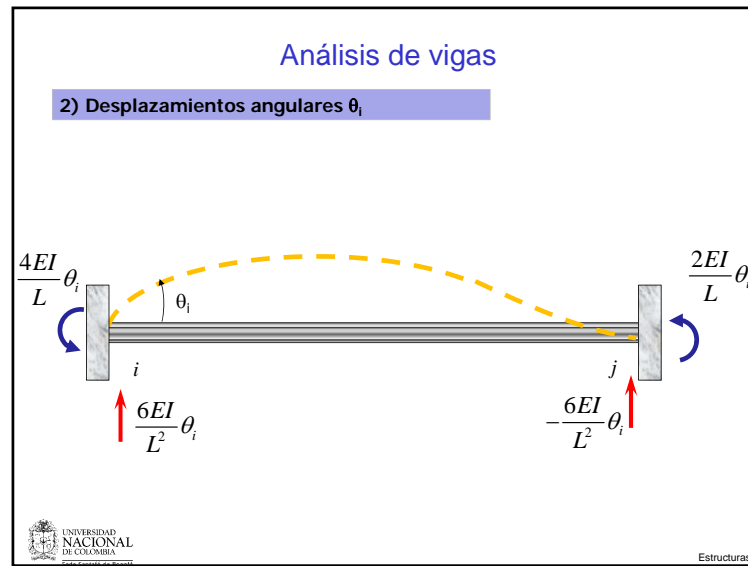
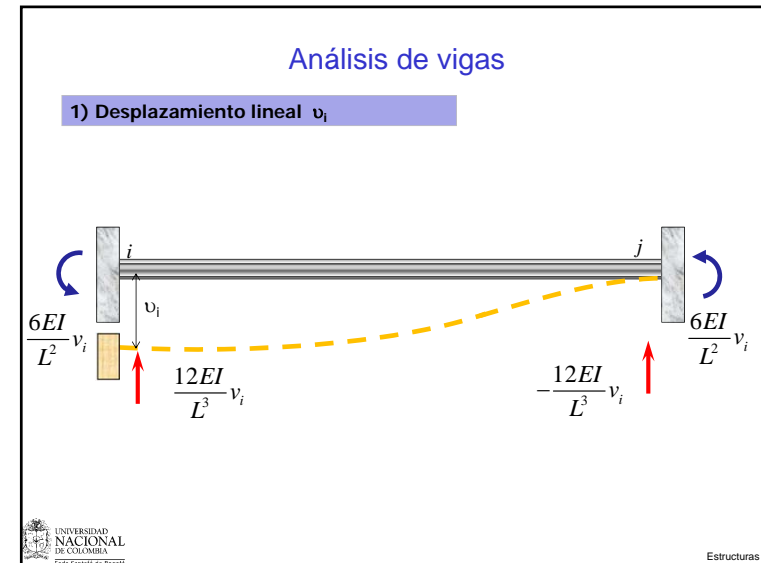
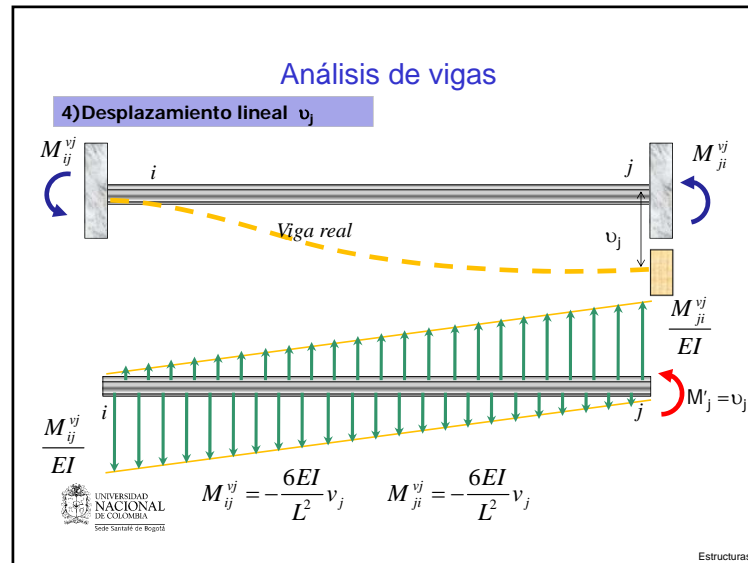
2) Desplazamiento angular θ_j



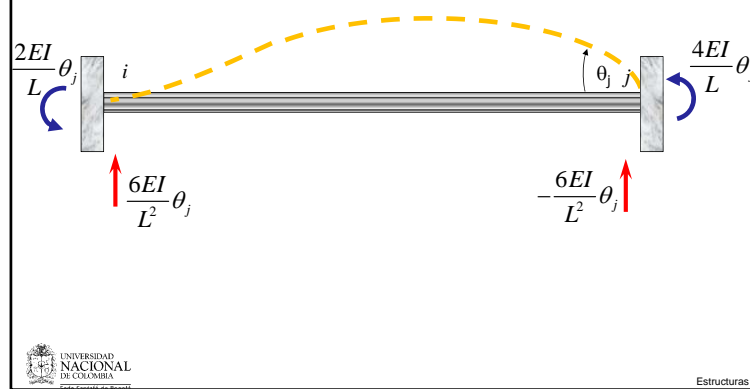
Análisis de vigas

3) Desplazamiento lineal v_i





Análisis de vigas

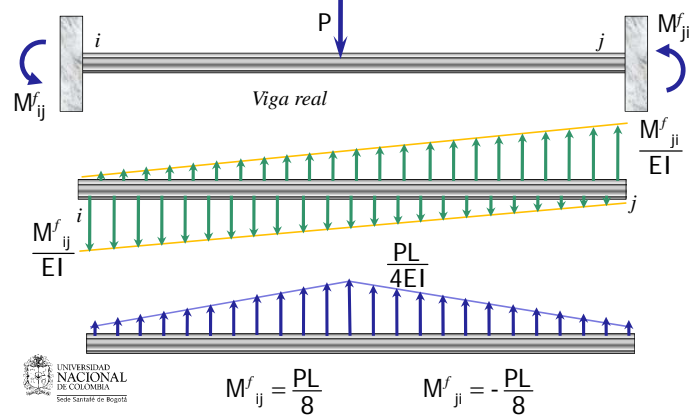
4) Desplazamiento angular θ_j 

Matriz de rigidez de un elemento tipo viga

$$\begin{bmatrix} Y_{ij} \\ M_{ij} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ij}^F \\ M_{ij}^F \\ Y_{ji}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} & -\frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} \\ \frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} \\ -\frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} \\ \frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

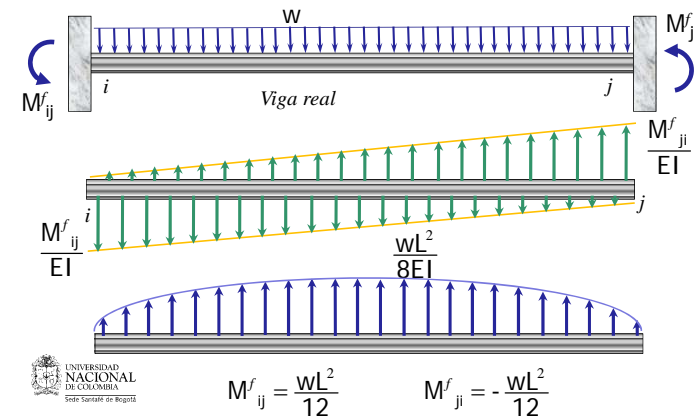
Análisis de vigas

Acciones fijas



Análisis de vigas

Acciones fijas



Análisis de vigas

Acciones fijas

$M_{ij}^f = \frac{Pab^2}{L^2}$
 $M_{ji}^f = -\frac{Pa^2b}{L^2}$

Estructuras

Método de la rigidez o método de los desplazamientos en vigas y pórticos

$$[F] = [F^f] + [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^f \\ F_A^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [F_N^f] + [K_{NN}][U_N] + [K_{NA}][U_A]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1}([F_N] - [F_N^f] - [K_{NA}][U_A])$$

$$[F_A] = [F_A^f] + [K_{AN}][U_N] + [K_{AA}][U_A]$$



Estructuras

Método de la rigidez o método de los desplazamientos en vigas y pórticos

$$[F] = [F^f] + [K][U]$$

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N^f \\ F_A^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{NN} & K_{NA} \\ K_{AN} & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ U_A = [0] \end{bmatrix}$$

$$[F_N] = [F_N^f] + [K_{NN}][U_N]$$

$$[U_N] = [K_{NN}]^{-1}([F_N] - [F_N^f])$$

$$[F_A] = [F_A^f] + [K_{AN}][U_N]$$



Estructuras

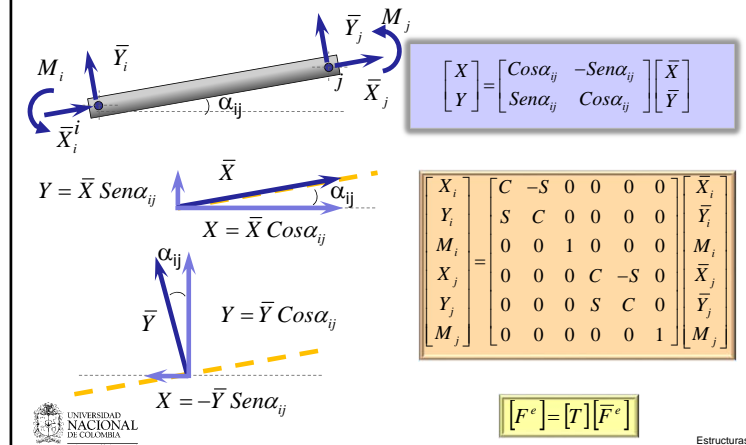
Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{ij} \\ \bar{Y}_{ij} \\ M_{ij} \\ \bar{X}_{ji} \\ \bar{Y}_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{ij}^f \\ \bar{Y}_{ij}^f \\ M_{ij}^f \\ \bar{X}_{ji}^f \\ \bar{Y}_{ji}^f \\ M_{ji}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \theta_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

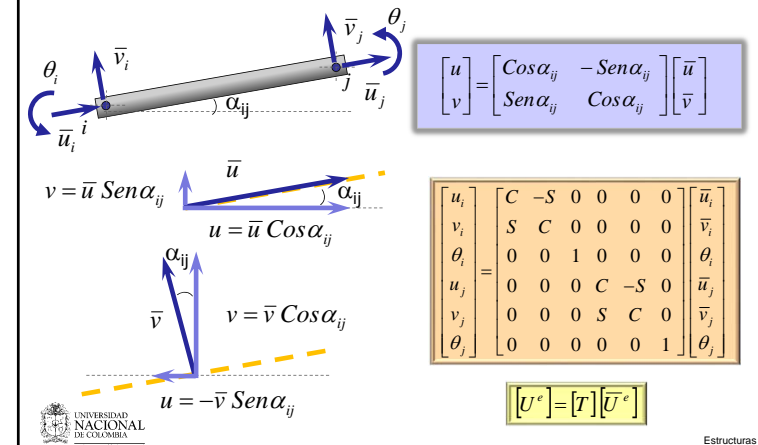


Ecuaciones Giro Deflexión

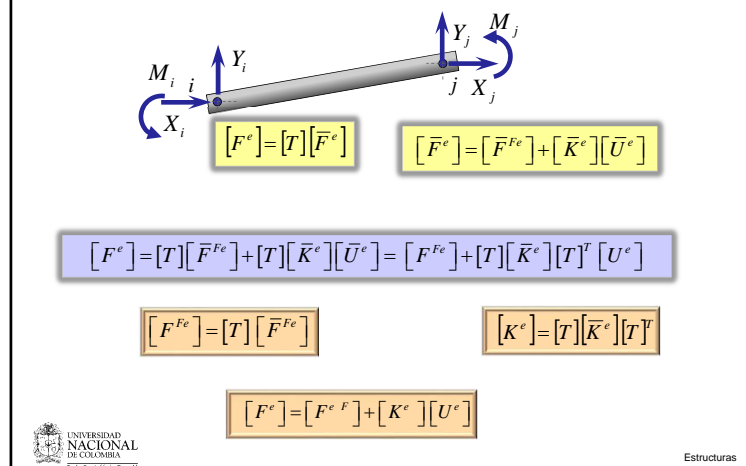
Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo pórtico



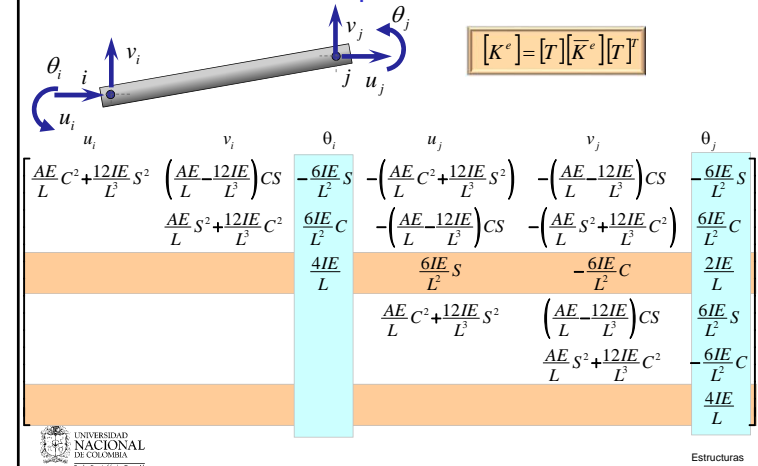
Matriz de transformación de desplazamientos locales a globales en un elemento tipo pórtico



Matriz de rigidez global de un elemento tipo pórtico



Matriz de rigidez global de un elemento tipo pórtico



Matriz de rigidez de una viga en un pórtico

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ij}^F \\ Y_{ij}^F \\ M_{ij}^F \\ X_{ji}^F \\ Y_{ji}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

Ecuaciones Giro Deflexión

Matriz de rigidez de una columna en un pórtico

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ij}^F \\ Y_{ij}^F \\ M_{ij}^F \\ X_{ji}^F \\ Y_{ji}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12IE}{L^3} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & -\frac{12IE}{L^3} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{4IE}{L} & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{2IE}{L} \\ -\frac{12IE}{L^3} & 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{12IE}{L^3} & 0 & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{2IE}{L} & \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

Método de la rigidez

Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{ij} \\ \bar{Y}_{ij} \\ M_{ij} \\ \bar{X}_{ji} \\ \bar{Y}_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{ij}^F \\ \bar{Y}_{ij}^F \\ M_{ij}^F \\ \bar{X}_{ji}^F \\ \bar{Y}_{ji}^F \\ M_{ji}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \theta_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

Ecuaciones Giro Deflexión

Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico con articulación tipo rótula al inicio

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ij}^F \\ Y_{ij}^F - \frac{3}{2L} M_{ij}^F \\ 0 \\ X_{ji}^F \\ Y_{ji}^F + \frac{3}{2L} M_{ij}^F \\ M_{ji}^F - \frac{1}{2} M_{ij}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3IE}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3IE}{L^3} & \frac{3IE}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3IE}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3IE}{L^3} & -\frac{3IE}{L^2} \\ 0 & \frac{3IE}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3IE}{L^2} & \frac{3IE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

Método de la rigidez

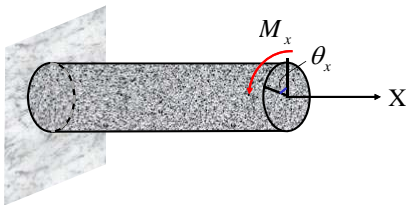
Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico con articulación tipo rótula al final

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ij}^F \\ Y_{ij}^F - \frac{3}{2L} M_{ji}^F \\ M_{ij}^F - \frac{1}{2} M_{ji}^F \\ X_{ji}^F \\ Y_{ji}^F + \frac{3}{2L} M_{ji}^F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3IE}{L^3} & \frac{3IE}{L^2} & 0 & -\frac{3IE}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3IE}{L^2} & \frac{3IE}{L} & 0 & -\frac{3IE}{L^2} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3IE}{L^3} & -\frac{3IE}{L^2} & 0 & \frac{3IE}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico con articulación tipo rótula en ambos extremos

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ij}^F \\ Y_{ij}^F - \frac{1}{L} (M_{ij}^F + M_{ji}^F) \\ 0 \\ X_{ji}^F \\ Y_{ji}^F + \frac{1}{L} (M_{ij}^F + M_{ji}^F) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$






Efecto de torsi n de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x



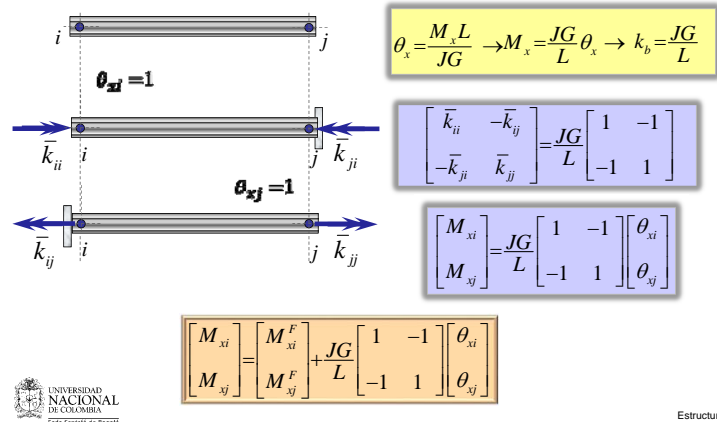
$$\theta_x = \frac{M_x L}{JG} \rightarrow M_x = \frac{JG}{L} \theta_x \rightarrow k_\theta = \frac{JG}{L}$$

Factor de forma para cortante

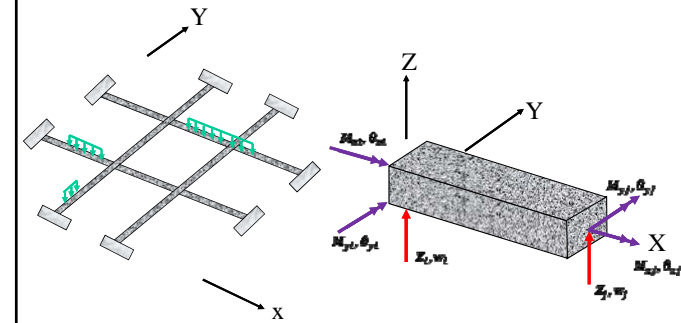
$$J = Ip$$

Sección transversal	Inercia polar
 $a < b$	$J = Cba^3$ $C = \frac{1}{3} - 0.21 \left(\frac{a}{b} \right) \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right]$
	$J = \frac{\pi}{32} \phi^4$
	$J = \frac{\pi}{32} (\phi_{ext}^4 - \phi_{int}^4)$
Sección cerrada de pared delgada con t constante 	$J \approx 4 \frac{A_m t}{L_m}$
Sección abierta de pared delgada con t constante 	$J \approx \frac{L_m t^3}{3}$

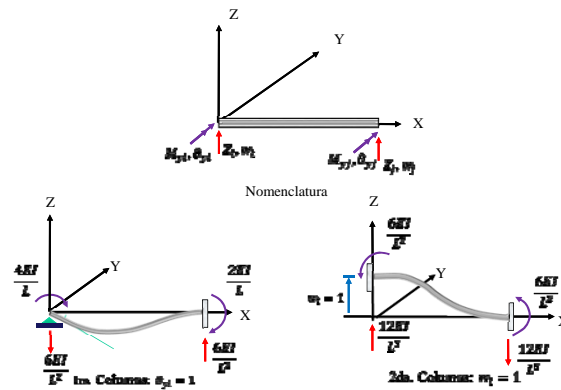
Efecto de torsión de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x



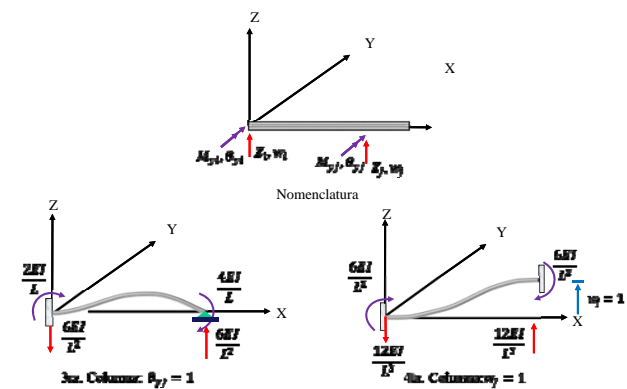
Matriz de rigidez de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x



Efecto de flexión y corte de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x



Efecto de flexión y corte de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x



Efecto de flexión y corte de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x

$$\begin{bmatrix} M_{yi} \\ Z_i \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{yi}^F \\ Z_i^F \\ M_{yj}^F \\ Z_j^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4IE}{L} & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} & \frac{6IE}{L^2} \\ -\frac{6IE}{L^2} & \frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} & -\frac{12IE}{L^3} \\ \frac{2IE}{L} & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} & \frac{6IE}{L^2} \\ \frac{6IE}{L^2} & -\frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} & \frac{12IE}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix}$$



Ecuaciones Giro Deflexión

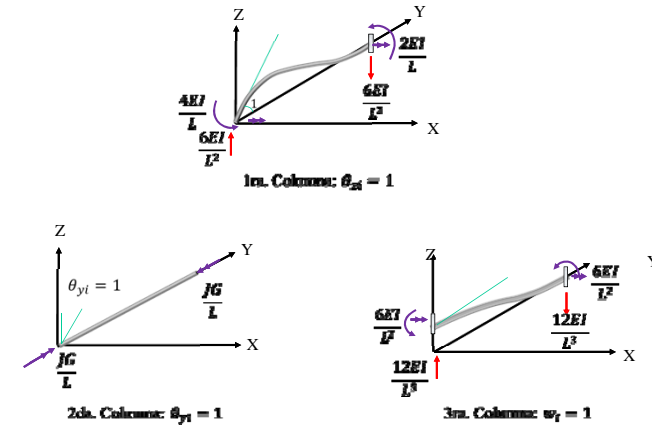
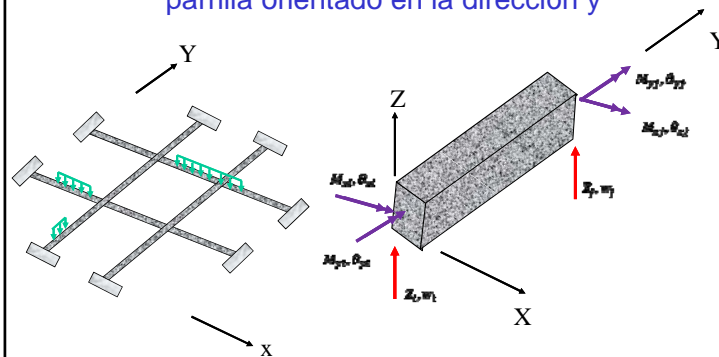
Matriz de rigidez de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección x

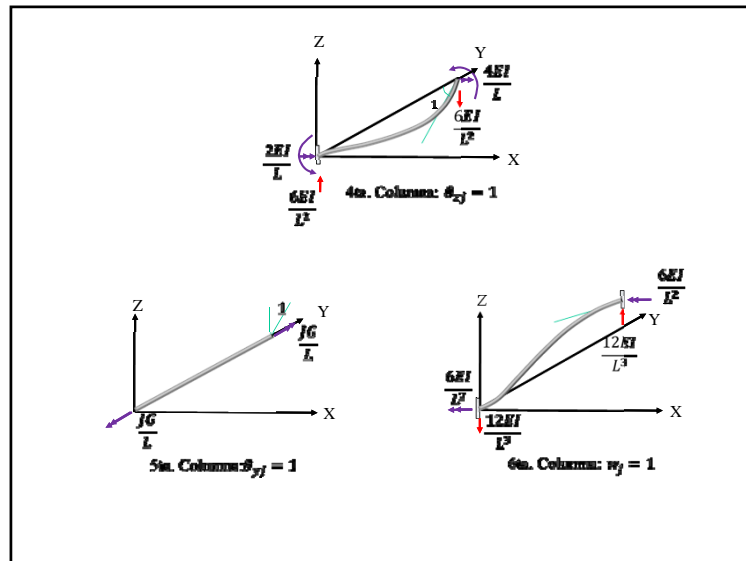
$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ Z_i^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ Z_j^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4IE}{L} & -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{2IE}{L} & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & -\frac{6IE}{L^2} & \frac{12IE}{L^3} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} & -\frac{12IE}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2IE}{L} & -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{4IE}{L} & \frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{6IE}{L^2} & -\frac{12IE}{L^3} & 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{12IE}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix}$$



Ecuaciones Giro Deflexión

Matriz de rigidez de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección y





Matriz de rigidez de un elemento tipo parrilla orientado en la dirección y

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ Z_i^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ Z_j^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4IE}{L} & 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{2IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ \frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{12IE}{L^3} & \frac{6IE}{L^2} & 0 & -\frac{12IE}{L^3} \\ \frac{2IE}{L} & 0 & \frac{6IE}{L^2} & \frac{4IE}{L} & 0 & -\frac{6IE}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6IE}{L^2} & 0 & -\frac{12IE}{L^3} & -\frac{6IE}{L^2} & 0 & \frac{12IE}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix}$$



Ecuaciones Giro Deflexión

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo parrilla

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{xi} \\ \bar{M}_{yi} \\ Z_i \\ \bar{M}_{xj} \\ \bar{M}_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix}$$

$$[F^e] = [T][\bar{F}^e]$$



Estructuras

Matriz de transformación de desplazamientos locales a globales de un elemento tipo parrilla

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{bmatrix}$$

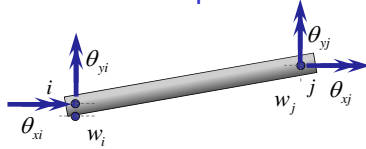
$$\begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ w_i \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \\ w_j \end{bmatrix}$$

$$[U^e] = [T][\bar{U}^e]$$



Estructuras

Matriz de rigidez global de un elemento tipo parrilla



$$[F^e] = [T][\bar{F}^e]$$

$$[\bar{F}^e] = [\bar{F}^{Fe}] + [\bar{K}^e][\bar{U}^e]$$

$$[F^e] = [T][\bar{F}^{Fe}] + [T][\bar{K}^e][\bar{U}^e] = [F^{Fe}] + [T][\bar{K}^e][T]^T [U^e]$$

$$[F^{Fe}] = [T][\bar{F}^{Fe}]$$

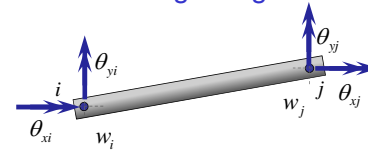
$$[K^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T$$

$$[F^e] = [F^{Fe}] + [K^e][U^e]$$



Estructuras

Matriz de rigidez global de un elemento tipo parrilla



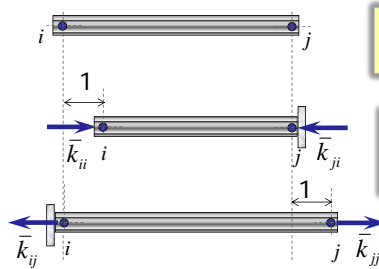
$$[K^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T$$

θ_{xi}	θ_{yi}	w_i	θ_{xj}	θ_{yj}	w_j
$\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{4IE}{L}S^2$	$\left(\frac{GJ}{L} - \frac{4IE}{L}\right)CS$	$\frac{6IE}{L^2}S$	$-\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{2IE}{L}S^2$	$-\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2IE}{L}\right)CS$	$-\frac{6IE}{L^2}S$
$\frac{GJ}{L}S^2 + \frac{4IE}{L}C^2$	$\frac{GJ}{L}CS + \frac{4IE}{L}C^2$	$-\frac{6IE}{L^2}C$	$-\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2IE}{L}\right)CS$	$-\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{2IE}{L}S^2$	$\frac{6IE}{L^2}C$
		$\frac{12IE}{L^3}$	$\frac{6IE}{L^2}S$	$-\frac{6IE}{L^2}C$	$-\frac{12IE}{L^3}$
			$\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{4IE}{L}S^2$	$\left(\frac{GJ}{L} - \frac{4IE}{L}\right)CS$	$-\frac{6IE}{L^2}S$
			$\frac{GJ}{L}CS + \frac{4IE}{L}C^2$	$\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{4IE}{L}S^2$	$\frac{6IE}{L^2}C$
					$\frac{12IE}{L^3}$



Estructuras

Matriz de rigidez local de una barra tipo armadura



$$\delta = \frac{FL}{AE} \rightarrow F = \frac{AE}{L} \delta \rightarrow k_b = \frac{AE}{L}$$

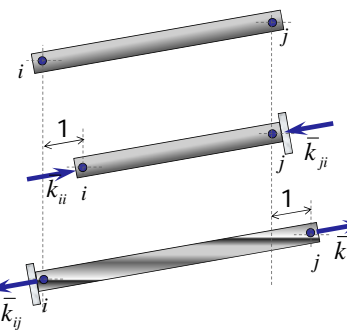
$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & -\bar{k}_{ij} \\ -\bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}$$



Estructuras

Matriz de rigidez local de una barra tipo armadura



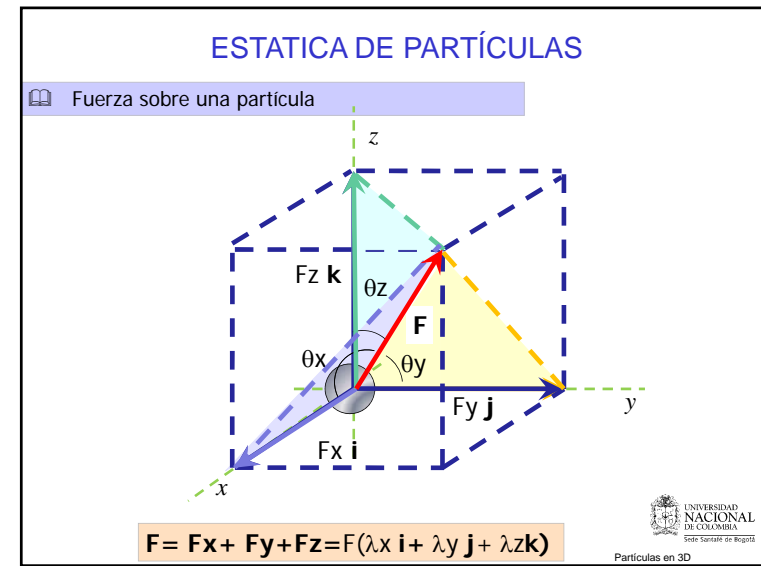
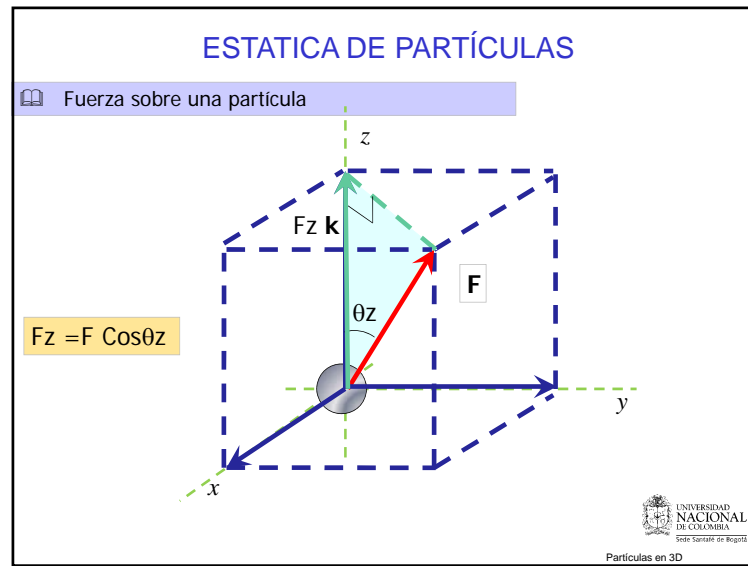
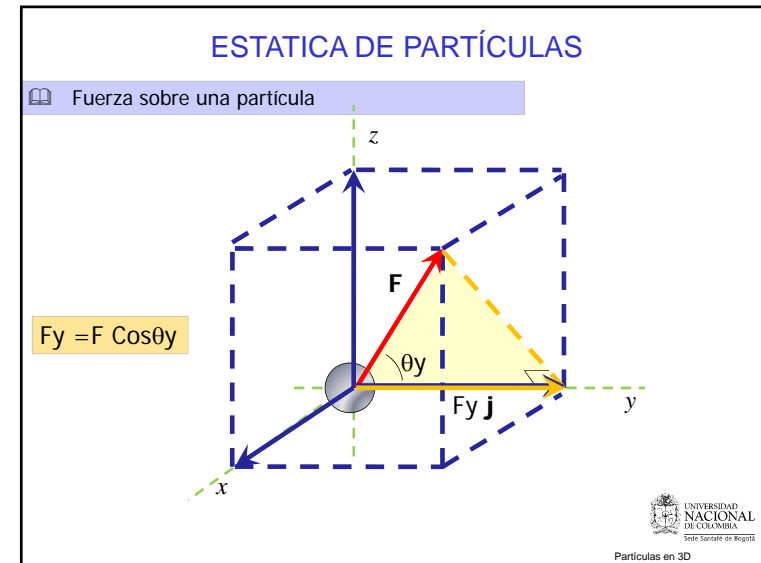
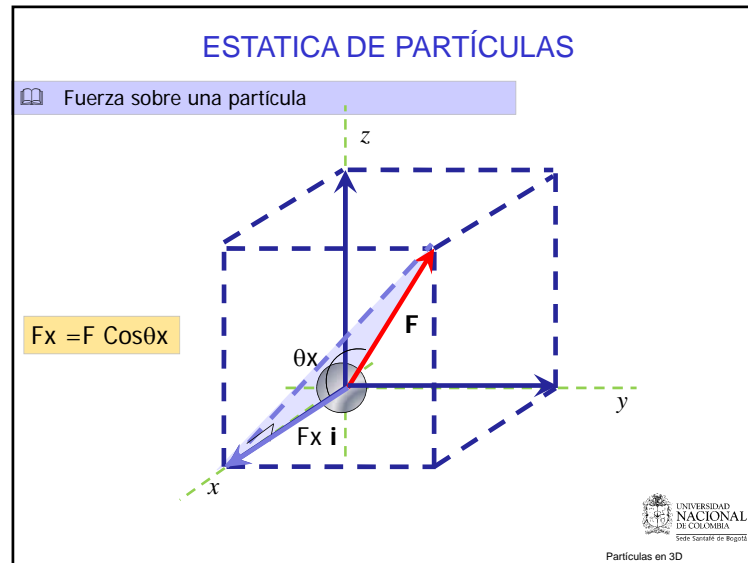
$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & -\bar{k}_{ij} \\ -\bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{X}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}^e] = [\bar{K}^e][\bar{U}^e]$$



Estructuras



ESTADICA DE PARTÍCULAS

Fuerza sobre una partícula

$$\mathbf{F}_x' = \mathbf{F}_x'x + \mathbf{F}_x'y + \mathbf{F}_x'z = F_x'(l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j} + l_z \mathbf{k})$$

Partículas en 3D

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

ESTADICA DE PARTÍCULAS

Fuerza sobre una partícula

$$\mathbf{F}_y' = \mathbf{F}_y'x + \mathbf{F}_y'y + \mathbf{F}_y'z = F_y'(m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k})$$

Partículas en 3D

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

ESTADICA DE PARTÍCULAS

Fuerza sobre una partícula

$$\mathbf{F}_z' = \mathbf{F}_z'x + \mathbf{F}_z'y + \mathbf{F}_z'z = F_z'(n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})$$

Partículas en 3D

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Santafé de Bogotá

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo armadura

$$\begin{aligned} F_x &= F_x'x + F_y'x + F_z'x = F_x'l_x + F_y'm_x + F_z'n_x \\ F_y &= F_x'y + F_y'y + F_z'y = F_x'l_y + F_y'm_y + F_z'n_y \\ F_z &= F_x'z + F_y'z + F_z'z = F_x'l_z + F_y'm_z + F_z'n_z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & n_y & 0 & 0 & 0 \\ l_z & m_z & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & n_x \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & n_y \\ 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}^e] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{F}}^e]$$

Matriz de rigidez global de una barra de armaduras o bastidores

$[F^e] = [T][\bar{K}^e][U^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T [U^e]$

$[F^e] = [T][\bar{F}^e]$ $[\bar{F}^e] = [\bar{K}^e][\bar{U}^e]$ $[K^e] = [T][\bar{K}^e][T]^T$

$$[K^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} lx^2 & lxm & lxn & -lx^2 & -lxm & -lxn \\ mx^2 & mxm & mxn & -lxm & -mx^2 & -mxn \\ nx^2 & -lxn & -mxn & -lxn & -mxn & -nx^2 \\ sym & & & lx^2 & lxm & lxn \\ & & & & mx^2 & mxn \\ & & & & & nx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

$[F^e] = [K^e][U^e]$

Estructuras

Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico en 3D

X_{ij}	X_{ij}^e	$\frac{AE}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{AE}{L}$	0	0	0	0	0	0	u_i
Y_{ij}	Y_{ij}^e	0	$\frac{12I_x E}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6I_x E}{L^2}$	0	0	$-\frac{12I_x E}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6I_x E}{L^2}$	0	v_i
Z_{ij}	Z_{ij}^e	0	0	$\frac{12I_y E}{L^3}$	0	$-\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	0	0	$-\frac{12I_y E}{L^3}$	0	$-\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	w_i
$M_{x,ij}$	$M_{x,ij}^e$	0	0	0	$\frac{JG}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{JG}{L}$	0	0	0	$\theta_{x,i}$
$M_{y,ij}$	$M_{y,ij}^e$	0	0	$\frac{6I_x E}{L^2}$	0	$\frac{4I_x E}{L}$	0	0	0	$\frac{6I_x E}{L^2}$	0	$\frac{2I_x E}{L}$	0	0	0	$\theta_{y,i}$
$M_{z,ij}$	$M_{z,ij}^e$	0	$\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4I_y E}{L}$	0	0	$-\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	$\frac{2I_y E}{L}$	0	0	$\theta_{z,i}$
X_{ji}	X_{ji}^e	$-\frac{AE}{L}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{AE}{L}$	0	0	0	0	0	0	u_j
Y_{ji}	Y_{ji}^e	0	$-\frac{12I_x E}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6I_x E}{L^2}$	0	0	$\frac{12I_x E}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6I_x E}{L^2}$	0	v_j
Z_{ji}	Z_{ji}^e	0	0	$-\frac{12I_y E}{L^3}$	0	$\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12I_y E}{L^3}$	0	$\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	0	w_j
$M_{x,ji}$	$M_{x,ji}^e$	0	0	0	$-\frac{JG}{L}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{JG}{L}$	0	0	0	$\theta_{x,j}$
$M_{y,ji}$	$M_{y,ji}^e$	0	0	$-\frac{6I_x E}{L^2}$	0	$-\frac{2I_x E}{L}$	0	0	0	$\frac{6I_x E}{L^2}$	0	$-\frac{4I_x E}{L}$	0	0	0	$\theta_{y,j}$
$M_{z,ji}$	$M_{z,ji}^e$	0	$\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2I_y E}{L}$	0	0	$-\frac{6I_y E}{L^2}$	0	0	$\frac{4I_y E}{L}$	0	0	$\theta_{z,j}$

Estructuras

Matriz de transformación de fuerzas locales a globales en un elemento tipo armadura

$$\begin{aligned} F_x &= F_x'x + F_y'y + F_z'z = F_x'lx + F_y'mx + F_z'nx \\ F_y &= F_x'y + F_y'y + F_z'z = F_x'ly + F_y'my + F_z'ny \\ F_z &= F_x'z + F_y'z + F_z'z = F_x'lz + F_y'mz + F_z'nz \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lx & mx & nx \\ ly & my & ny \\ lz & mz & nz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} lx & mx & nx \\ ly & my & ny \\ lz & mz & nz \end{bmatrix} [\bar{F}] = [\lambda][\bar{F}]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} lx & mx & nx \\ ly & my & ny \\ lz & mz & nz \end{bmatrix} [\bar{M}] = [\lambda][\bar{M}]$$

Estructuras