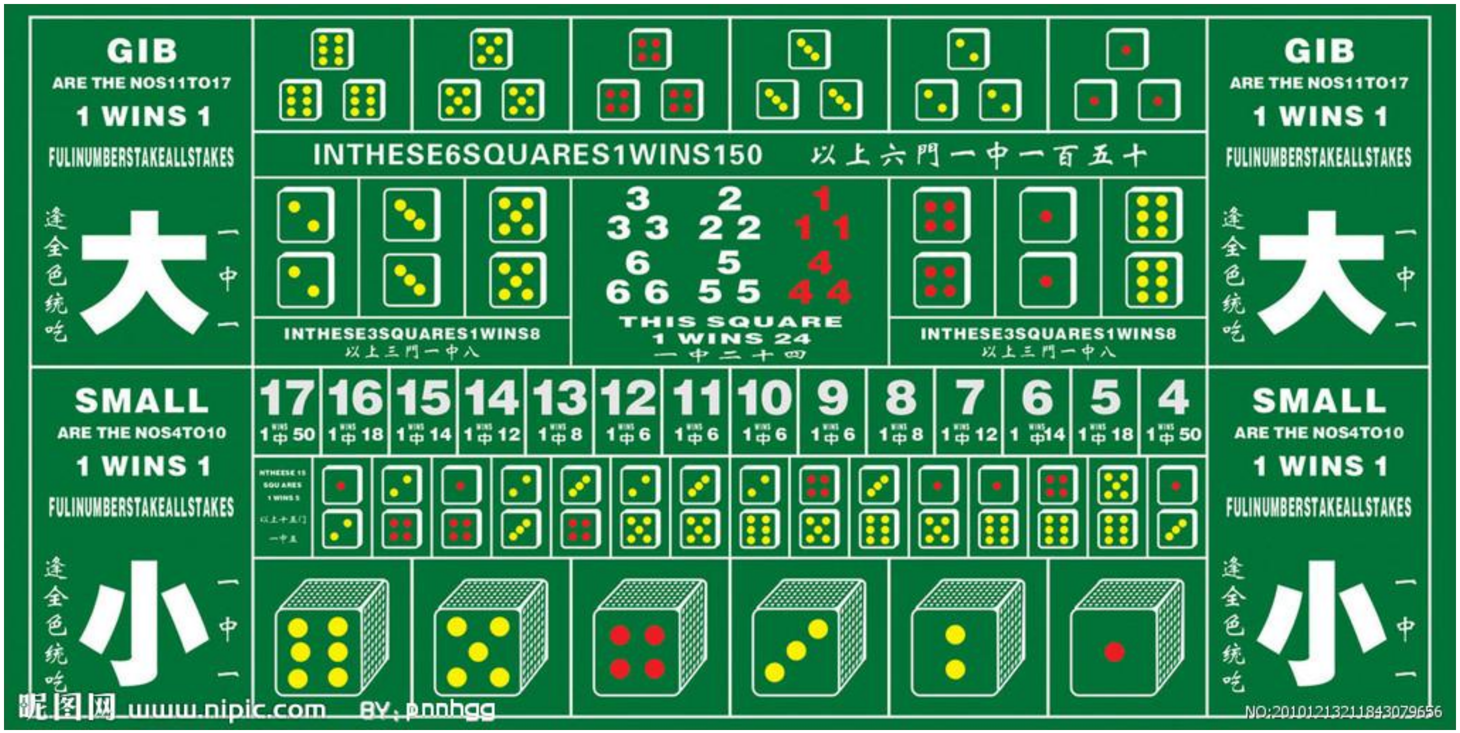


数据分析与R语言 第3周

2012.5.19

随机事件与概率

- 随机试验与样本空间
- 随机事件
- 对立事件与互斥事件
- 随机事件的运算律
- 概率

随机试验

- 三个条件

1 可以重复进行

2 不能预知结果

3 知道所有可能的情况

- 例子

1 投硬币，掷骰子

2 射击命中

3 身高、体重

2012.5.19

样本空间

- 样本空间就是特定随机试验所有可能结果所组成的集合
- 例子

投硬币

掷骰子

身高体重

成绩

随机事件与必然事件

- 样本空间的子集称为随机事件
- 必然事件的例子
- 对立事件与互斥事件

概率——刻画随机事件出现可能性的指标

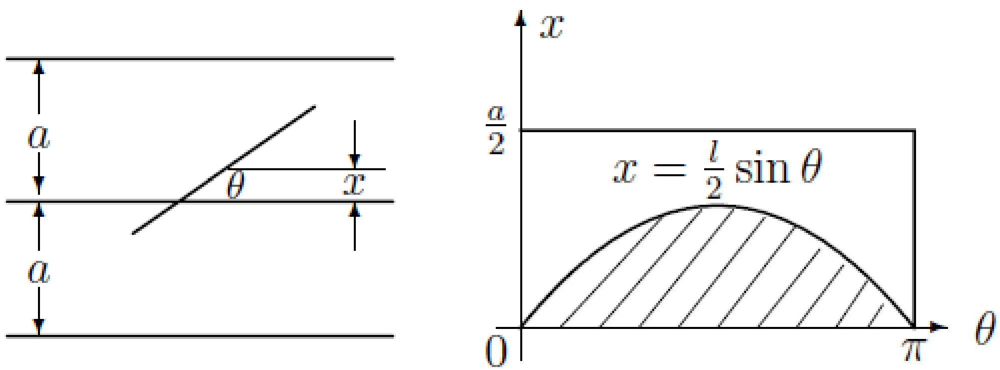
- 直观的概率计算——古典概型

设随机事件 E 的样本空间中只有有限个样本点，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，其中 n 为样本点总数．每个样本点 $\omega_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 出现是等可能的，并且每次试验有且仅有一个样本点发生，则称这类现象为古典概型 (classical probability model)．若事件 A 包含 m 个样本点，则事件 A 的概率定义为

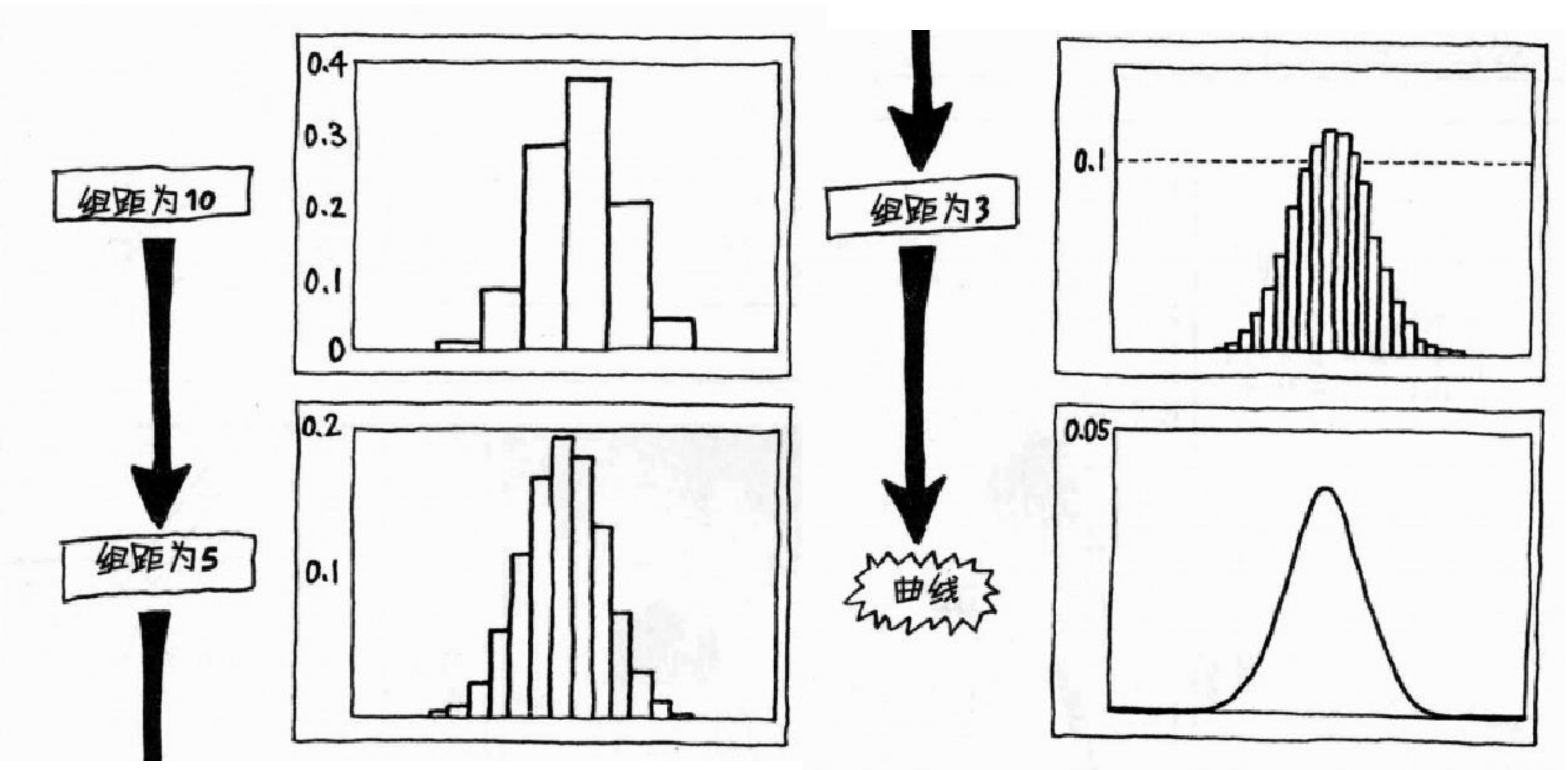
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \tag{1.12}$$

连续样本空间情形下的概率

- 几何概型——布冯投针实验



连续样本空间情形下的概率：概率密度



分布

- 离散型分布：两点分布，二项分布，泊松分布
- 连续型分布：均匀分布，指数分布，正态分布
- 对于某一特定场景，其所符合的分布规律一般先验给出

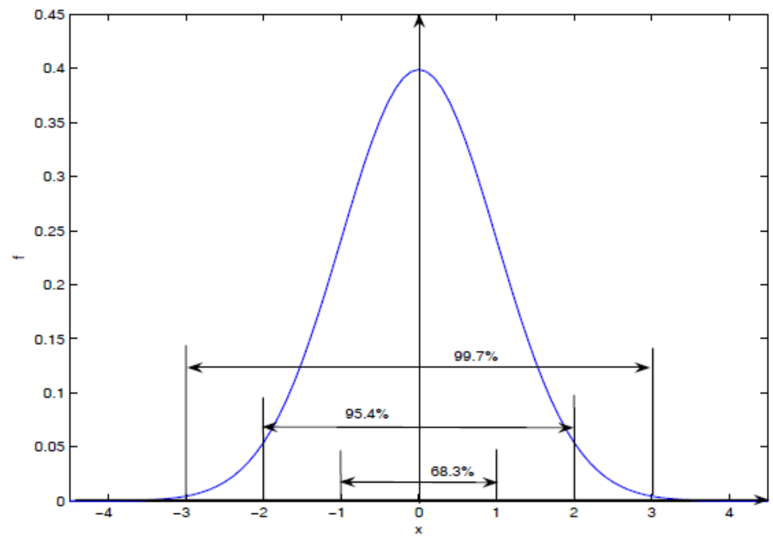
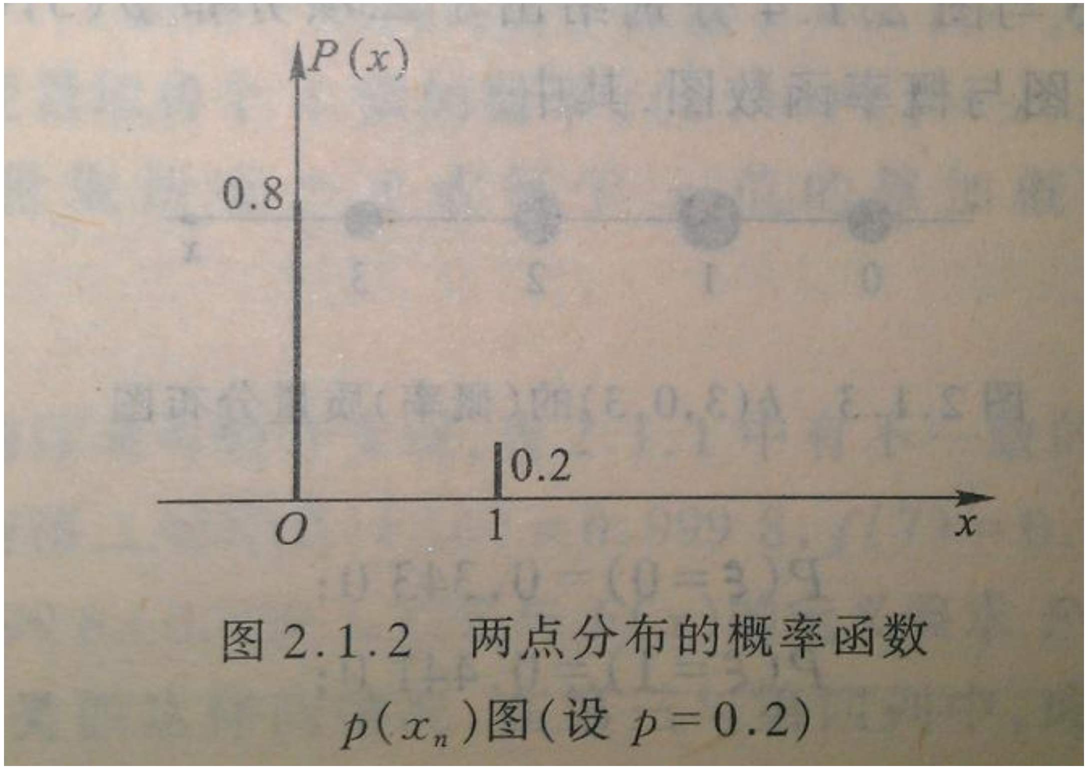


图 1.3: 标准正态分布和对应区间上积分 (面积) 的百分比

两点分布



2012.5.19

二项分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n, \tag{1.27}$$

则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布 (binomial distribution), 记为 $X\sim B(n,p)$,

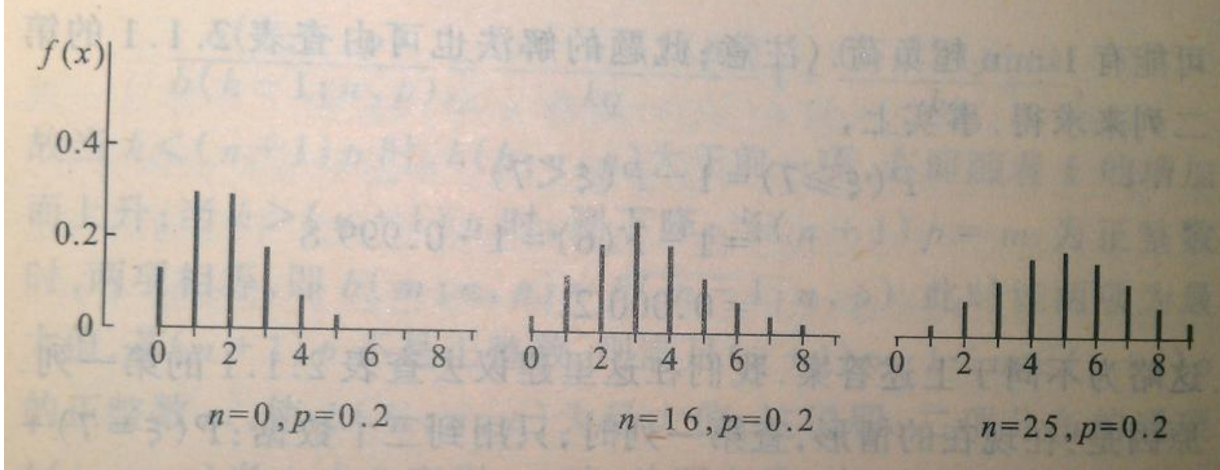


图 2.1.5 二项分布 $b(n,p)$图

泊松分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

则称 X 服从参数为 λ 的 Poisson (泊松) 分布 (Poisson distribution).

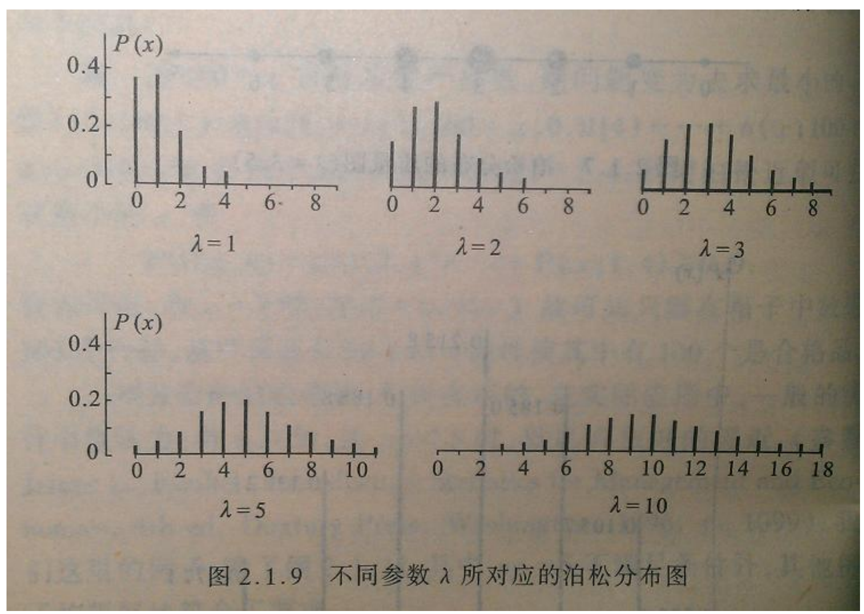


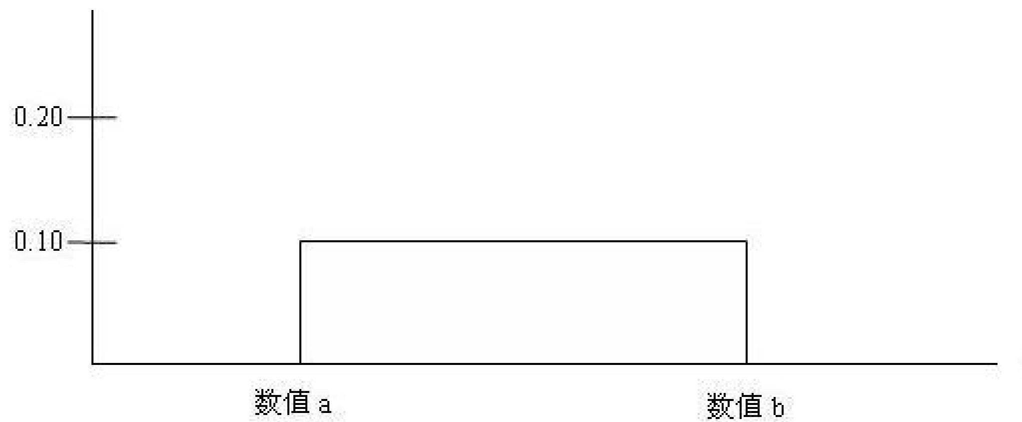
图 2.1.9 不同参数 λ 所对应的泊松分布图

均匀分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布 (uniform distribution),



指数分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

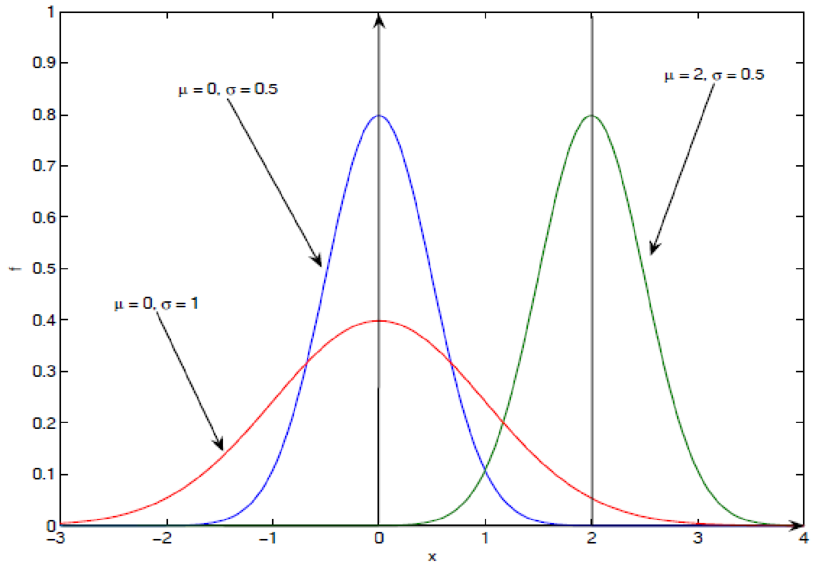
其中 $\lambda>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布

正态分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{1.38}$$

其中 $\mu, \sigma(\sigma > 0)$ 是两个常数，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布 (normal distribution)，也称为 Gauss 分布，记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



R语言的各种分布函数

```
rnorm(n, mean=0, sd=1) 高斯(正态)
rexp(n, rate=1) 指数
rgamma(n, shape, scale=1) γ分布
rpois(n, lambda) Poisson 分布
rweibull(n, shape, scale=1) Weibull 分布
rcauchy(n, location=0, scale=1) Cauchy 分布
rbeta(n, shape1, shape2) β 分布
rt(n, df) t 分布
rf(n, df1, df2) F 分布
rchisq(n, df) χ² 分布
rbinom(n, size, prob) 二项
rgeom(n, prob) 几何
rhyper(nn, m, n, k) 超几何
rlogis(n, location=0, scale=1) logistic 分布
rlnorm(n, meanlog=0, sdlog=1) 对数正态
rnbinom(n, size, prob) 负二项分布
runif(n, min=0, max=1) 均匀分布
rwilcox(nn, m, n), rsignrank(nn, n) Wilcoxon 分布
```

随机变量的数字特征

- 期望（平均值）

定义 1.15 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_i\} = p_i,\ i = 1, 2, \cdots$, 若级数 $\sum_i |x_i| p_i$ 收敛, 则称级数 $\sum_i x_i p_i$ 的和为随机变量 X 的数学期望 *(mathematical expectation)*, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \sum_i x_i p_i. \tag{1.61}$$

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x$ 收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x. \tag{1.62}$$

随机变量的数字特征

DATAGURU 炼数成金

- 方差

定义 1.16 设 X 为随机变量，如果 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差 *(variance)*，记为 $\mathrm{Var}(X)$，即

$$\mathrm{Var}(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}, \tag{1.64}$$

并称 $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 为 X 的标准差 *(standard deviation)* 或均方差 *(root mean square)*.

可以证明：

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

总体与抽样

- 大数定理与中心极限定理的意义
- 常用统计量：样本均值，样本方差，标准差，众数，最小值，最大值，分位数，中位数，上下四分位数

常见的数据描述性分析

- 中位数 median()
- 百分位数 quantile( )

```
> quantile(x$x1)
    0%    25%    50%    75%   100%
 61.00  74.00  80.50  84.25 101.00
> quantile(x$x1,probs = seq(0, 1, 0.2))
   0%   20%   40%   60%   80%  100%
 61.0  73.0  78.0  82.4  87.0 101.0
>
```

常见的数据描述性分析

- 五数总括：

中位数 m_e, 下四分位数 Q_1, 上四分位数 Q_3, 最小值 min 和最大值 max.

```
> fivenum(x$x1, na.rm = TRUE)
[1]  61.0  74.0  80.5  84.5 101.0
> 
```

2012.5.19

常见的数据描述性分析

- 正态性检验：函数shapiro.test( )
- P>0.05，正态分布

```
> shapiro.test(x$x1)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x$x1
W = 0.9937, p-value = 0.9259

> shapiro.test(x$x3)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x$x3
W = 0.9444, p-value = 0.0003618
```

多元数据的数据特征

- 方差与协方差、相关系数

$$
\begin{aligned}
s_{xx} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2, \\
s_{yy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2, \\
s_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}),
\end{aligned}
$$

则称 s_{xx} 为变量 X 的观测样本的方差，称 s_{yy} 为变量 Y 的观测样本的方差，称 s_{xy} 为变量 X, Y 的观测样本的协方差．称

$$S = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{xy} & s_{yy} \end{bmatrix}$$

为观测样本的协方差矩阵．称

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}}$$

为观测样本的相关系数．

协方差与相关系数计算

- 函数cov( )和cor( )

```
> cov(x$x1,x$x2)
[1] 4.928283
> cor(x$x1,x$x2)
[1] 0.03982364

> cov(x[2:4])
          x1         x2        x3
x1 57.626263   4.928283  16.15152
x2  4.928283 265.759495  10.61010
x3 16.151515  10.610101 125.03030
> cor(x[2:4])
           x1         x2         x3
x1 1.00000000 0.03982364 0.19028099
x2 0.03982364 1.00000000 0.05820596
x3 0.19028099 0.05820596 1.00000000
> 
```

相关性检验

```
> cor.test(x$x1,x$x2)

        Pearson's product-moment correlation

data:  x$x1 and x$x2
t = 0.3945, df = 98, p-value = 0.694
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1578290  0.2344082
sample estimates:
       cor
0.03982364
```

相关分析与回归分析

- 变量之间的关系

函数关系：有精确的数学表达式

相关关系：非确定性关系

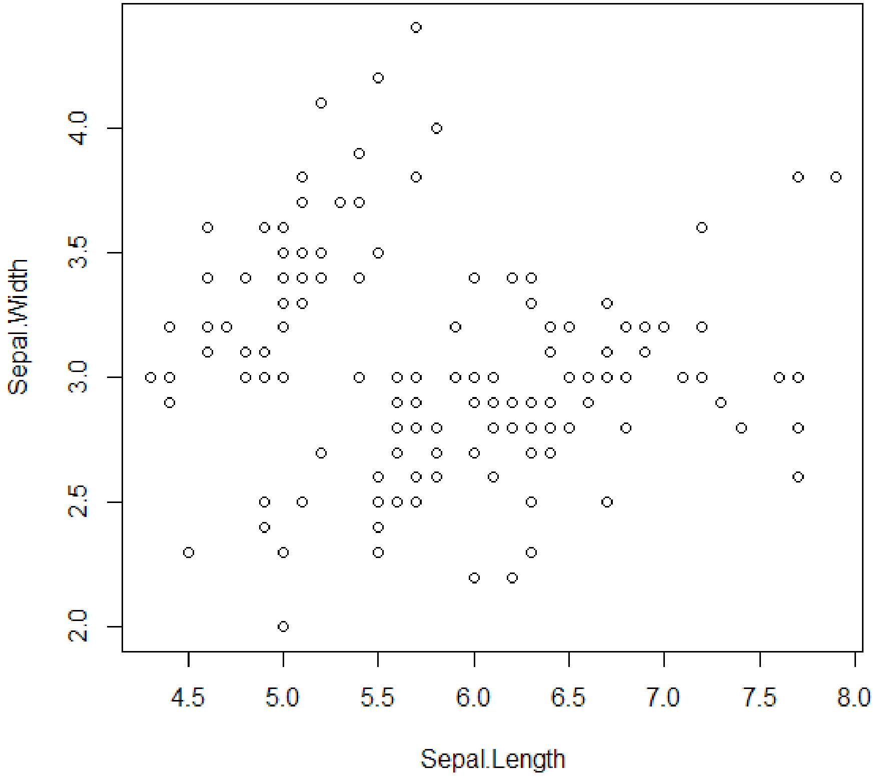
　平行关系：相关分析（一元，多元）

　依存关系：回归分析（一元，多元）

相关分析的例子

- Iris数据集
- 目测相关性

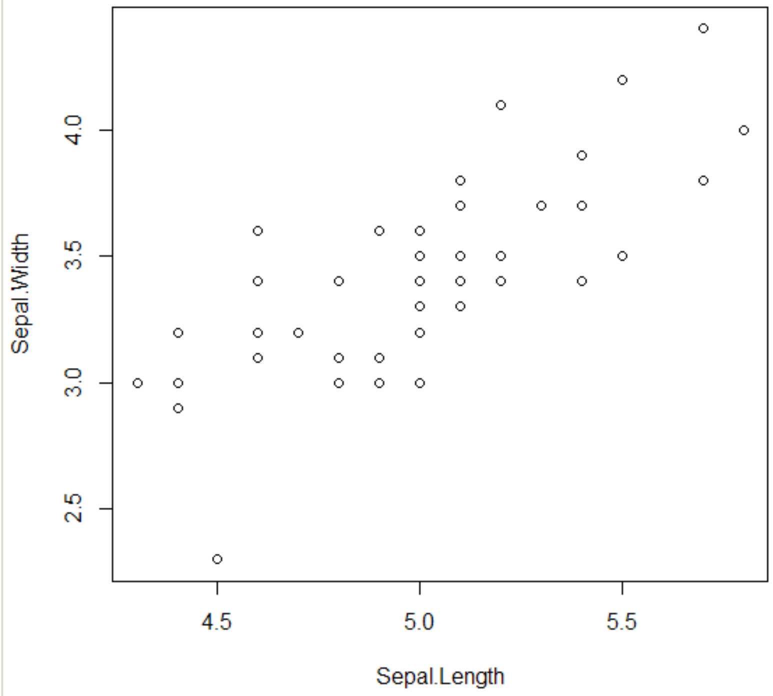
plot(iris[1,2])



相关分析的例子

- 分离种属

```
i1=iris[which(iris$Species=="setosa"),1:2]
plot(i1)
```



相关分析的例子

- 求相关系数
- 相关系数是否显著，不能只根据值的大小还需要进行假设检验

```
> cor(i1[1],i1[2])
             Sepal.Width
Sepal.Length   0.7425467
```

相关分析的例子

- 相关系数显著性的假设检验
- 假设r0为总体相关系数，r0=0则说明没有相关关系，建立假设H0:r0=0，H1:r0<>0(alpha=0.05)
- 计算相关系数r的t值和P-值

```
> cor.test(i1$Sepal.Length,i1$Sepal.Width)

        Pearson's product-moment correlation

data:  i1$Sepal.Length and i1$Sepal.Width
t = 7.6807, df = 48, p-value = 6.71e-10
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.5851391 0.8460314
sample estimates:
      cor
0.7425467
```

一元线性回归分析

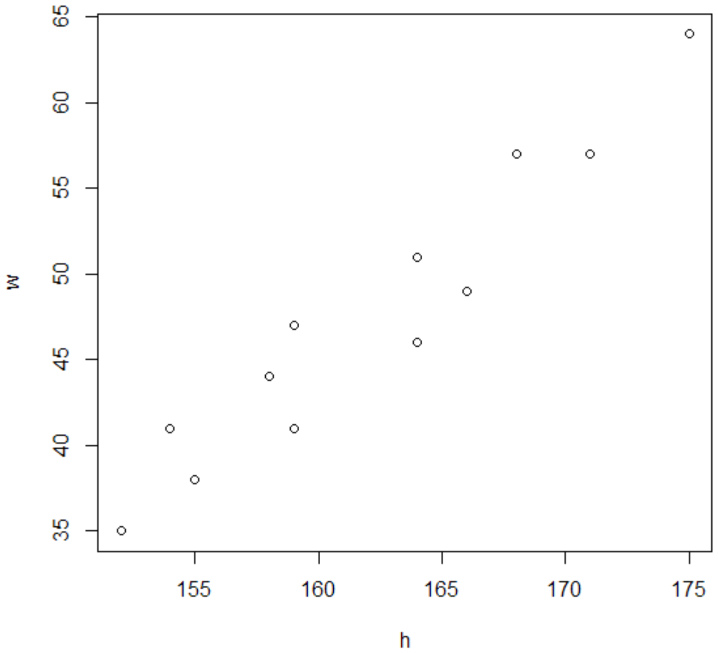
- 原理，最小二乘法
- 步骤：建立回归模型，求解回归模型中的参数，对回归模型进行检验
- 例子

数据：身高-体重

h=c(171,175,159,155,152,158,154,164,168,166,159,164)

w=c(57,64,41,38,35,44,41,51,57,49,47,46)

plot(w~h+1)



一元线性回归分析

自定义函数 lxy<-

function(x,y){n=length(x);sum(x*y)-sum(x)*sum(y)/n}

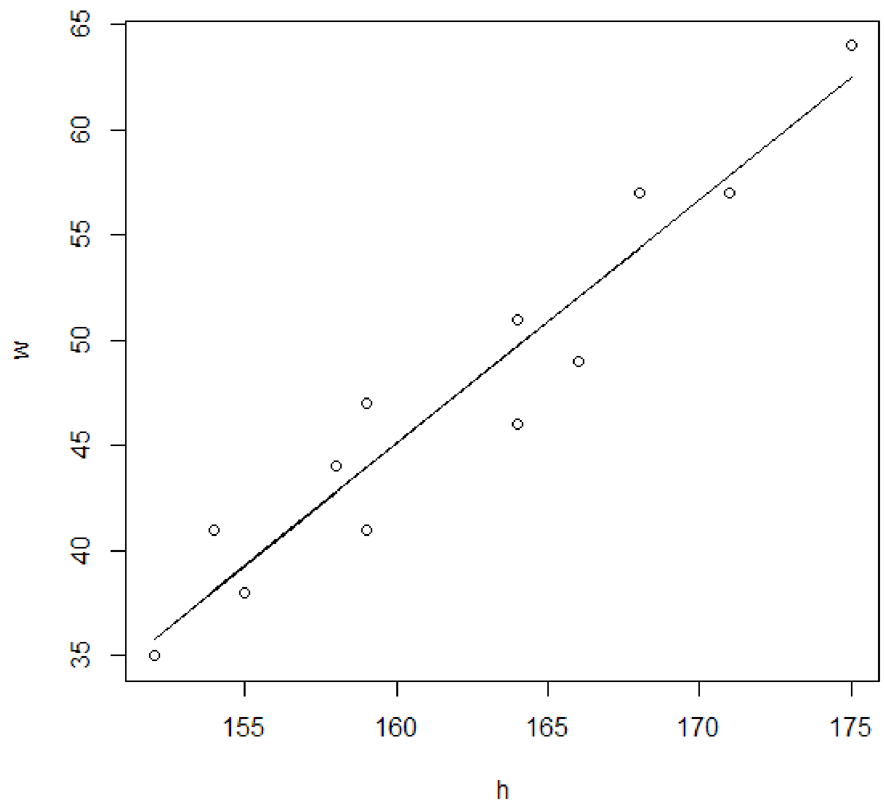
假设w=a+bh

则有

```
> b=lxy(h,w)/lxy(h,h)
> a=mean(w)-b*mean(h)
> a
[1] -140.3644
> b
[1] 1.15906
```

作回归直线

```
lines(h,a+b*h)
```



一元线性回归分析

- 回归系数的假设检验
- 建立线性模型

```
> a=lm(w~1+h)
> a

Call:
lm(formula = w ~ 1 + h)

Coefficients:
(Intercept)            h
   -140.364        1.159
```

一元线性回归分析

- 线性模型的汇总数据，t检验，summary()函数

```
> summary(a)

Call:
lm(formula = w ~ 1 + h)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max 
-3.721 -1.699  0.210  1.807  3.074 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -140.3644    17.5026   -8.02 1.15e-05 ***
h              1.1591     0.1079   10.74 8.21e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 

Residual standard error: 2.546 on 10 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9203,     Adjusted R-squared: 0.9123 
F-statistic: 115.4 on 1 and 10 DF,  p-value: 8.21e-07
```

一元线性回归分析

- 汇总数据的解释
- Residuals：参差分析数据
- Coefficients：回归方程的系数，以及推算的系数的标准差，t值，P-值
- F-statistic：F检验值
- Signif：显著性标记，***极度显著，**高度显著，*显著，圆点不太显著，没有记号不显著

2012.5.19

一元线性回归分析

- 方差分析，函数anova()

```
> anova(a)
Analysis of Variance Table

Response: w
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
h          1 748.17  748.17  115.41 8.21e-07 ***
Residuals 10  64.83    6.48                     
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

一元线性回归分析

- 预测：一个身高185的人，体重大约是多少？

```
> a+b*185
[1] 74.0618
>
```

lm()线性模型函数

适应于多元线性模型的基本函数是 lm(), 其调用形式是

```
fitted.model <- lm(formula, data = data.frame)
```

其中 formula 为模型公式. data.frame 为数据框. 返回值为线性模型结果的对象存放在 fitted.model 中. 例如

```
fm2 <- lm(y ~ x1 + x2, data = production)
```

适应于 y 关于 $x1$ 和 $x2$ 的多元回归模型（隐含着截距项）。

- y~1+x或y~x均表示y=a+bx有截距形式的线性模型
- 通过原点的线性模型可以表达为：y ~ x - 1 或y ~ x + 0 或 y ~ 0 + x

参见help(formula)

与线性模型有关的函数

建立数据：身高-体重

```
x=c(171,175,159,155,152,158,154,164,168,166,159,164)
y=c(57,64,41,38,35,44,41,51,57,49,47,46)
```

建立线性模型

```
a=lm(y~x)
```

求模型系数

```
> coef(a)
(Intercept)          x
 -140.36436    1.15906
```

提取模型公式

```
> formula(a)
y ~ x
```

与线性模型有关的函数

计算残差平方和（什么是残差平方和）

```
> deviance(a)
[1] 64.82657
```

绘画模型诊断图（很强大，显示残差、拟合值和一些诊断情况）

```
> plot(a)
```

计算残差

```
> residuals(a)
         1          2          3          4          5          6          7 
-0.8349544  1.5288044 -2.9262307 -1.2899895 -0.8128086  1.2328296  2.8690708 
         8          9         10         11         12 
 1.2784678  2.6422265 -3.0396529  3.0737693 -3.7215322 
```

2012.5.19

与线性模型有关的函数

打印模型信息

```
> print(a)


Call:
lm(formula = y ~ x)


Coefficients:
(Intercept)           x
   -140.364       1.159
```

与线性模型有关的函数

计算方差分析表

,

```
> anova(a)
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)    
x          1 748.17  748.17  115.41 8.21e-07 ***
Residuals 10  64.83    6.48                      
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
>
```

与线性模型有关的函数

提取模型汇总资料

```
> summary(a)

Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max 
-3.721 -1.699  0.210  1.807  3.074 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -140.3644    17.5026   -8.02 1.15e-05 ***
x              1.1591     0.1079   10.74 8.21e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 

Residual standard error: 2.546 on 10 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9203,     Adjusted R-squared: 0.9123 
F-statistic: 115.4 on 1 and 10 DF,  p-value: 8.21e-07 
```

与线性模型有关的函数

作出预测

```
> z=data.frame(x=185)
> predict(a,z)
      1
74.0618
> predict(a,z,interval="prediction", level=0.95)
      fit     lwr      upr
1 74.0618 65.9862 82.13739
```

课后阅读：薛毅书，p308，计算实例

Thanks

FAQ时间