25/03/2024
Álgebra Matricial | Tarea 01
Aguirre Calzadilla César M.

1. Utilizando la definición de espacio vectorial, demuestre que los sig. conjuntos son espacios vectoriales:

a) El conjunto $M_{n\times m}$

Sol:

Para demostrar que cierto espacio es, en efecto, un espacio vectorial, debemos verificar que se cumplen los axiomas que definen un espacio vectorial, los cuales son:

1 Cerradura bajo la suma
2 Asociatividad bajo suma
3 Conmutatividad bajo suma
4 Existencia del neutro aditivo
5 Existencia del inv. aditivo
6 Cerradura bajo multiplicación
7 Multiplicación por escalares
8 Distributividad multiplicativa
9 Distributividad multiplicativa respecto a la suma de escalares

Entonces, para matrices $M_{n\times m}$, podemos comenzar definiendo dos matrices $A_{n\times m}$ y $B_{n\times m}$ tq:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Cerradura: nos pide que dada la suma de dos o más elementos de un esp. => el resultado sea un elemento de ese mismo espacio

1. Cerradura Bajo Suma para $M_{n\times m}$:

Hay que probar que la suma de dos matrices $A_{n\times m}$ y $B_{n\times m}$ nos devuelve otra matriz, a saber, $C_{n\times m}$

Entonces:

$$A+B \overset{?}{=} C \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nm} \end{pmatrix}$$

con cada $a_{nm}+b_{nm} \in A+B$ como un elemento de C

$\therefore A+B=C$ con $C \in M_{n\times m}$; se cumple la cerradura

El resultado de la suma $A+B$ se puede extender a más cantidad de sumas, concluyendo que siempre $A+B$ dará un $C \in M_{n\times m}$. Podemos expresar a B como:

$$B = \sum_{i=1}^{k} M_i \quad \text{con} \quad B = M_1 + M_2 + \cdots M_k \quad y \quad M \in M_{n\times m}$$

$\therefore$ la cerradura se expande a "k" sumas ■

2. Asociatividad de la suma: para cada matriz A, B y C se cumple que:

$(A+B)+C = A+(A+B)$

Por un lado, tenemos que: $(A+B)+C = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (A+B)+C = \left\{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & \cdots & (a_{1m}+b_{1m})+c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1})+c_{n1} & \cdots & (a_{nm}+b_{nm})+c_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & \cdots & a_{1m}+(b_{1m}+c_{1m}) \\ \vdots & & \\ a_{1m}+(b_{1m}+c_{1m}) & \cdots & a_{nm}+(b_{nm}+c_{nm}) \end{pmatrix}$$

Cada $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$ puede representarse como la suma de 3 elementos en $\mathbb{R}$, y por lo tanto, es una suma conmutativa y asociativa $\Rightarrow (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \cdots & b_{1m}+c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & \cdots & b_{nm}+c_{nm} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}\right\}$$

$= A + (B+C)$ ■

7. Compatibilidad de la multiplicación por escalares: para cualquier escalar α y β, con $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$, se cumple que $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Entonces;

$$\text{Sea } \alpha(\beta A) = \alpha\left\{\beta\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}\right\} = \alpha\left\{\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \cdots & \beta a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nm}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\alpha\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \cdots & \beta a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nm}\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \cdots & \alpha(\beta a_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(\beta a_{n1}) & \cdots & \alpha(\beta a_{nm})\end{pmatrix}$$

Asociatividad en la multiplicación de reales $x, y, z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $(xy)z = x(yz)$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_{11} & \cdots & (\alpha\beta)a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha\beta)a_{n1} & \cdots & (\alpha\beta)a_{nm}\end{pmatrix} = \left\{(\alpha\beta)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= (\alpha\beta)\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}\right\} = (\alpha\beta)A \ \blacksquare$$

8. Distributividad multiplicativa por escalares: para cualquier escalar α y matrices A y $B \in \mathbb{M}_{n\times m}$, se cumple que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$$\text{Sea } \alpha(A+B) = \alpha\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix}\right\} = \alpha\left\{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\alpha\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}+b_{11}) & \cdots & \alpha(a_{1m}+b_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(a_{n1}+b_{n1}) & \cdots & \alpha(a_{nm}+b_{nm})\end{pmatrix}$$

Distributividad de la ~~multi~~ multiplicación en la suma | si $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x(y+z) = xy + xz$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \cdots & \alpha a_{1m}+\alpha b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1}+\alpha b_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm}+\alpha b_{nm}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \cdots & \alpha b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{n1} & \cdots & \alpha b_{nm}\end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix} = \alpha A + \alpha B \ \blacksquare$$

9. Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la suma de escalares: pa' cualquier escalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y matriz $A \in M_{n \times m}$ se cumple que $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

Sea $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & \cdots & (\alpha+\beta)a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha+\beta)a_{n1} & \cdots & (\alpha+\beta)a_{nm} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\beta a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m}+\beta a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1}+\beta a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm}+\beta a_{nm} \end{pmatrix}$ } Distributividad de la multiplicación en la suma pa' reales $x(y+z) = xy + xz$, ~~[illegible]~~ y $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para el caso

$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \cdots & \beta a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nm} \end{pmatrix}$

$= \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

$= \alpha A + \beta A$ ∎

3a) Conmutatividad bajo la suma: para cualquier $A, B \in M_{n\times m}$, se cumple que

$A+B = B+A$

Sea $A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$

Conmutatividad en los $\mathbb{R}$
$a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij}$
ó $a+b=b+a$; $a,b \in \mathbb{R}$

$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1m}+a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+a_{n1} & \cdots & b_{nm}+a_{nm} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = B+A$ ■

4. Existencia del neutro aditivo: debe existir una matriz $0_{n\times m}$ tq $A+0=A$ para $A \in M_{n\times m}$

Sea $0_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Entonces:

$A+0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \cdots & a_{1m}+0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+0 & \cdots & a_{nm}+0 \end{pmatrix}$

Existencia de $0 \in \mathbb{R}$
tq $x+0=x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = A$ ■

5. Existencia del inverso aditivo

Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times m} \Rightarrow A+(-A)=\mathbb{O}$

Como $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow (-A)=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{nm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & & -a_{nm} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A+(-A)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+(-a_{11}) & \cdots & a_{1m}+(-a_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+(-a_{n1}) & \cdots & a_{nm}+(-a_{nm}) \end{pmatrix}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ $\exists$ $-x \in \mathbb{R}$ tq $-x+x=\mathbb{O}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & \cdots & a_{1m}-a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n1} & \cdots & a_{nm}-a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \end{pmatrix}=\mathbb{O}_{n\times m}$$

■

6. Cerradura bajo multiplicación: Si $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ (un escalar)

$\Rightarrow \alpha A \in \mathbb{M}_{n\times m}$

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Entonces:

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(a_{11}) & \cdots & \alpha(a_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(a_{n1}) & \cdots & \alpha(a_{nm}) \end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{n\times m}$$

$\therefore \alpha A \in \mathbb{M}_{n\times m}$

■

b) Demostrar que el conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ con $3x-y-4z=0$ es un espacio vectorial

1. Cerradura bajo la suma.

Antes que cualquier cosa, podemos describir nuestro conjunto como:

$$V=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x-y-4z=0\right\}$$

Esto nos describirá, a su vez, cualquier "variación" de V necesaria para demostrar que V es espacio vectorial

Ahora, sean u y $v \in V \Rightarrow u=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1-y_1-4z_1=0\right\}$

y $v=\left\{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_2-y_2-4z_2=0\right\}$

$$\Rightarrow u+v=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_2+z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow u+v=\left\{\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-4(z_1+z_2)=0\right\}$$

pues $3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-4(z_1+z_2)=\underbrace{(3x_1-y_1-4z_1)}_{\to 0}+\underbrace{(3x_2-y_2-4z_2)}_{\to 0}=0$

$\therefore$ es cerrado bajo la suma

■

2. Verifiquemos cerradura bajo multiplicación

Sea $u=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1-y_1-4z_1=0\right\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$

Entonces

$$\mu u=\mu\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \\ \mu z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3(\mu x_1)-(\mu y_1)-4(\mu z_1)$$

$$=3\mu(x_1)-\mu(y_1)-4\mu(z_1)=\mu\,\underbrace{(3x_1-y_1-4z_1)}_{\to 0}=\mu\cdot 0=0$$

$\therefore$ es cerrado bajo multiplicación

■

3. Asociatividad bajo la suma: para cada vector u, v y $w \in V$ se cumple que: $(u+v)+w = u+(v+w)$

Sean $u = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 3x_1 - y_1 - 4z_1 = 0 \right\}$; $v = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 3x_2 - y_2 - z_2 4 = 0 \right\}$

y $w = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 3x_3 - y_3 - 2/z_3 = 0 \right\}$

Entonces: $(u+v)+w = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} x_3 \\ z_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$

prop. de $\mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+x_3 \\ (y_1+y_2)+y_3 \\ (z_1+z_2)+z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+(x_2+x_3) \\ y_1+(y_2+y_3) \\ z_1+(z_2+z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ y_2+y_3 \\ z_2+z_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\} = u+(v+w)$$

Además, $\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \\ z_1+z_2+z_3 \end{pmatrix} = 3(x_1+x_2+x_3) - (y_1 - y_2 - y_3) - 4(z_1+z_2+z_3)$

$$= \cancelto{0}{(3x_1 - y_1 - 4z_1)} + \cancelto{0}{(3x_2 - y_2 - 4z_2)} + \cancelto{0}{(3x_3 - y_3 - z_3)} = 0 \quad ■$$

Por cerradura de suma

4. Conmutatividad bajo suma: para cualquier $u, v \in V$ se cumple que $u+v = v+u$

Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $u+v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2+x_1 \\ y_2+y_1 \\ z_2+z_1 \end{pmatrix}$

prop. de $x, y \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = v+u \quad ■$$

Por cerradura de la suma se mantiene lo demás

5. Existencia del neutro aditivo: debe existir un vector $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ tq $u + \vec{0} = u$, $u \in V$

Sea $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

prop. de $x \in \mathbb{R}$
$0 \in \mathbb{R}$ tq $x + 0 = x$

$$\Rightarrow u + \vec{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+0 \\ y_1+0 \\ z_1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = u \quad ■$$

6. Existencia del inverso aditivo: debe existir un $-u \in V$ tq $-u+u=\theta$

Sea $-u = \left\{ \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3(-x_1)-(-y_1)-4(-z_1)=\theta \right\}$

y $u = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 - y_1 - 4z_1 = \theta \right\}$

$$\Rightarrow -u+u = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+x_1 \\ -y_1+y_1 \\ -z_1+z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \vec{\theta} \in V$$

se cumple porque

$3(\theta)-(\theta)-4(\theta)=\theta$

$\underbrace{\theta=\theta}_{\text{Cerradura a suma}}$

7. Compatibilidad de la multiplicación por escalares: pa' cualquier escalar $\mu\, \alpha \in \mathbb{R}$ con $u \in V$, se cumple que $\alpha(\mu u) = (\alpha\mu)u$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha(\mu u) = \alpha \cdot \left\{ \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\} = \alpha \left\{ \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \\ \mu z_1 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \\ \mu z_1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu x_1) \\ \alpha(\mu y_1) \\ \alpha(\mu z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\mu) x_1 \\ (\alpha\mu) y_1 \\ (\alpha\mu) z_1 \end{pmatrix}$$

Asociatividad en la mult. $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (xy)z = x(yz)$

$$= \left\{ (\alpha\mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\} = (\alpha\mu) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\} = (\alpha\mu)u$$

y por cerradura de la multiplicación se mantiene que: $3(\alpha\mu x_1) - (\alpha\mu y_1) - 4(\alpha\mu z_1) = \theta$

8. Distributividad multiplicativa por escalares: pa' cualquier $\mu \in \mathbb{R}$ y vectores $u, v \in V$, se debe cumplir que $\mu(u+v) = \mu u + \mu v$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu(u+v) = \mu \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\} = \mu \left\{ \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \mu \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \mu(x_1+x_2) \\ \mu(y_1+y_2) \\ \mu(z_1+z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x_1 + \mu x_2 \\ \mu y_1 + \mu y_2 \\ \mu z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \\ \mu z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_2 \\ \mu y_2 \\ \mu z_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \mu u + \mu v \quad \blacksquare$$

Por cerradura de suma y escalares se mantiene que $\mu u + \mu v = \theta$

9. Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la suma de escalares: pà cualquier $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$ y $u \in V$, se cumple que:

$$(\mu + \alpha)u = \mu u + \alpha u$$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mu+\alpha)u = (\mu+\alpha)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu+\alpha)x_1 \\ (\mu+\alpha)y_1 \\ (\mu+\alpha)z_1 \end{pmatrix}$

Distributividad de multiplicación en suma de reales

$$= \begin{pmatrix} \mu x_1 + \alpha x_1 \\ \mu y_1 + \alpha y_1 \\ \mu z_1 + \alpha z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \\ \mu z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \mu u + \alpha u \quad \blacksquare$$

Por cerradura se mantiene que $\mu u + \alpha u = \theta$

c)

Demostrar que el conjunto de polinomios de grado n son un espacio vectorial.

Sean los polinomios de grado "n" para la variable X representados como:

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X^1 + a_0 X^0$$

lo primero que deberíamos verificar es que el conjunto de los polinomios de grado "n" es cerrado bajo la suma, entonces:

Sean $p(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0$

y $q(X) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X^1 + b_0 X^0$

$$\Rightarrow \quad p(X) + q(X) = (a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0) + (b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X^1 + b_0 X^0)$$

$$= (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) X^1 + (a_0 + b_0) X^0$$

Sin embargo, aquí hay un problema. Si llega a suceder que alguno o algunos de todos los $a_n + b_n$ sumen un cero, i.e. que algún $a_n + b_n = 0$. Este hecho "bajaría" el nivel del polinomio. Si, por ejemplo, justo $a_n + b_n = 0$

$$\Rightarrow \quad p(X) + q(X) = \underbrace{\cancel{(a_n + b_n)}}_{0} X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0$$

$$= 0 \cdot X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0$$

$$= 0 + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0$$

de aquí se sigue que el grado de $P(X) + q(X)$ es menor al de $P(X)$ y $q(x)$ por sí solos.

$\therefore$ los polinomios de grado n no son espacio vectorial ∎

Problema 2: determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales

a) $H_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x+y-z=0 \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ b) $H_b = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x-2y=0 \right\}$ de $\mathbb{R}^2$

Por lo visto en clase, tenemos la siguiente definición:

Def. Sea V un espacio vectorial sobre K. $W \subset V$ es un subespacio de V si W es un espacio vectorial con las operaciones inducidas por V

Proposición Sea V un espacio vectorial sobre K, $W \subset V$ y $W \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ W es subespacio de V si:

•) $w_1, w_2 \in W$ con $w_1 + w_2 \in W$ (cerradura bajo suma)

••) $w \in W, \alpha \in K$ con $\alpha w \in W$ (cerradura bajo multiplicación)

Entonces, con ello, podemos comprobar si H_a y H_b son subespacios de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Sol (a):

Sea $H_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x+y-z=0 \right\}$, ¿es H_a subespacio de $\mathbb{R}^3$?

Lo primero que haremos será verificar que H_a no es vacío, i.e. verificar que contiene al vector $\vec{0}$ (i.e. el plano pasa por el origen)

$\Rightarrow$ H_a es no vacío $\Leftrightarrow (0,0,0) \in H_a$

evaluamos: $H_b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0) + (0) - (0) = 0$ ■ $\therefore$ H_a contiene a $\vec{0}$ y es no vacío.

Ahora, hay que verificar cerraduras:

•) Cerradura bajo la suma:

Sean u y $v \in H_a$ tq $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, por construcción sabemos que $x_1 + y_1 - z_1 = 0$ y que $x_2 + y_2 - z_2 = 0$

Entonces: $u+v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

esto nos da como resultado: $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)$

$$= \underbrace{(x_1+y_1-z_1)}_{0} + \underbrace{(x_2+y_2-z_2)}_{0} = 0 \quad \blacksquare$$

$\therefore$ es cerrado bajo la suma. la suma de $u, v \in H_b$ está en H_a.

Ahora, falta la cerradura bajo la multiplicación.

Sea $\mu \in \mathbb{R}$ y $u \in H_b$ tq $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mu \cdot u = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \\ \mu z_1 \end{pmatrix}$ tq $\mu u = (\mu x_1) + (\mu y_1) - (\mu z_1)$

$$= \mu(x_1) + \mu(y_1) - \mu(z_1)$$
$$= \mu(x_1 + y_1 - z_1)$$
$$= \mu \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

$\therefore$ H_a es cerrado bajo la multiplicación con $\mu u \in H_a$

$\therefore$ H_a es subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) $H_b = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x - 2y = 0 \right\}$ en $\mathbb{R}^2$?

Ya con H_b definido, vamos a comprobar que sea no vacío.

$\Rightarrow$ H_b es no vacío $\Leftrightarrow$ $\vec{0} \in H_b$

al evaluar $H_a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0) - 2(0) = 0 - 0 = 0$ // $\therefore$ es no vacío

el vector pasa por el origen.

Ahora, comprobemos cerraduras.

- Cerradura bajo la suma: Sean $u, v \in H_b$ tq $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $u = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2y_1 = 0 \right\}$ y $v = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid x_2 - 2y_2 = 0 \right\}$

$\Rightarrow$ $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $u + v = (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) - (2y_1 - 2y_2)$

$= (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2)$

$= 0 + 0 = 0$ ∎ $\therefore$ H_b es cerrado bajo suma

- Cerradura bajo multiplicación: Sean $\mu \in \mathbb{R}$ y $u \in H_b$

tq $u = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2y_1 = 0 \right\}$

$\Rightarrow$ $\mu \cdot u = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu y_1 \end{pmatrix}$ y $\mu u = (\mu x_1) - 2(\mu y_1)$

$= \mu(x_1) - 2\mu(y_1)$

$= \mu(x_1 - 2y_1)$

$= \mu \cdot 0$

$= 0$ ∎ $\therefore$ H_b es cerrado bajo multiplicación

$\therefore$ H_a es subespacio de $\mathbb{R}^2$

∎

Problema 3: Compruebe si los siguientes vectores generan $\mathbb{R}^2$:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Para resolver este problema, podemos recurrir a la siguiente definición vista en clase:

Def | Sea V un espacio vectorial, con $W \subset V$ un subespacio. Una base de W es un subconjunto de W linealmente independiente que genera a V.

Además, recordemos que:

Proposición | Sea V un espacio vectorial. Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$
S es linealmente independiente (l.i.) si:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

lo que implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Si el conjunto no es l.i. se dice que es l.d. (linealmente dependiente)

Entonces: a) ¿$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a $\mathbb{R}^2$?

Por la proposición, sabemos que dos vectores son l.i. si no son múltiplo escalar uno del otro, en nuestro caso, tenemos:

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = v$ hay que comprobar que no suceda algo del estilo: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Sin embargo $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $\lambda = -2$ pues: $(-2)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore u = \lambda v$; $\lambda = 2$ $\therefore$ u y v son l.d. y no generan $\mathbb{R}^2$ ∎

b) $\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ genera $\mathbb{R}^2$?

Aquí no parece tan sencillo exponer que sean l.d. para verificar independencia lineal lo que haremos será plantear una combinación lineal tq:

$$\alpha \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{u} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Esto nos deja con el sistema de ecuaciones: $\left(\begin{array}{cc|c} 2\alpha & \mu & 0 \\ \alpha & -\mu & 0 \end{array}\right)$

resolvemos: $\begin{cases} 2\alpha + \mu = 0 \\ \alpha - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \mu \Rightarrow 2(\mu) + \mu = 0$

$\hookrightarrow 3\mu = 0$

$\mu = 0$ y $\alpha = 0$

$\therefore$ $\alpha u + \mu v$ son l.i. pues la única forma de que su suma sea igual a 0 es que $\alpha = \mu = 0$

$\therefore$ u y v generan a $\mathbb{R}^2$ y son base ■

Problema 4: Verifica si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ya tenemos la proposición que nos indica como determinar independencia lineal. Entonces, para:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ Sean $\alpha, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \overset{u}{\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}} + \mu \overset{v}{\begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

una combinación lineal de u, v

$$\Rightarrow \begin{cases} 9\alpha - 11\mu = 0 \\ -8\alpha - \mu 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -11 & 0 \\ -8 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{8}f_2]{} \begin{pmatrix} 9 & -11 & 0 \\ 1 & 3/8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 - 9f_2]{} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3/8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[8f_2]{-\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3f_1+f_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{8}f_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \mu = 0 \end{matrix}$ $\therefore$ u y v son l.i. pues la única forma de que la suma de su combinación lineal sea cero es que $\alpha = \mu = 0$ ■

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

Aquí, es fácil ver que si $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v = 6u \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ ✓

$\therefore$ u y v son l.d. pues v puede describirse como multiplo de u ■

para que $\alpha u + \mu v = 0$ $\alpha = 6$ y $\mu = -1 \Rightarrow 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Aunque es fácil notar que si $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son múltiplo escalar unos de otros, podemos (y debemos) proceder buscando una combinación lineal tq: sean α, β y $\mu \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[f_1 + f_3]{f_1(-1)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \quad \therefore \alpha = \beta = \mu = 0$$

Como $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\mu = 0$ es la única solución del sistema, para que la combinación lineal sea cero

$\Rightarrow u, v$ y w son l.i. ■

Problema 5: determine una base y la dimensión para los siguientes espacios vectoriales

a) $H_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x + 3y = 0 \right\}$ b) $H_b = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 2y + z = 0 \right\}$

Para a):

Sea la recta $2x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -2x \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\therefore$ Un vector generador de Ha sería el vector $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$, de dimensión igual 1

De manera similar, podemos encontrar otro

$2x + 3y = 0 \Rightarrow 2x = -3y \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$ $\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de dim = 1

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Para b) podemos proceder como el inciso anterior

$\Rightarrow$ Sea el plano $x - 2y + z = 0 \Rightarrow x = 2y - z$

$\therefore \vec{x} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Aquí hay que hacer para cada componente $y=1$ y $z=0$, o $y=0$ y $z=1$ respectivamente

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base l.i. y dim = 2

También, para $\mathbb{R}^3$ podríamos solo pensar en que, en general, $ax + by + cz = 0$ es un subespacio de dim = 2 (un plano) por lo que basta con encontrar un par de vectores que funcionen para ese plano. Podríamos simplemente "eliminar" un eje y ver qué pasa. Aquí: $x - 2y + z = 0$

$\Rightarrow$ si $z = 0$ queda $x - 2y = 0$ y $x = 2, y = 1$ soluciona la ecuación

si $y = 0 \Rightarrow$ $x + z = 0$ y $x = -1, z = 1$ soluciona $\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es sol.