Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT).
Unidad Monterrey
Inferencia Estadística

Tarea 5

César Miguel Aguirre Calzadilla
Estefany Haideé Moreno Alcalá

16 de enero de 2025

Problema 1

Sea A el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y suponga que X, Y tiene una densidad conjunta uniforme en el triángulo.

1. **Halle las distribuciones marginales de X, Y y $Z = X + Y$.**
2. **¿Son X y Y independientes? ¿Por qué?**

SOLUCIÓN

Antes de abordar la solución, podemos darnos una idea de lo que queremos resolver si visualizamos este problema con un diagrama hecho en TikZ, como el mostrado en la figura 0.1.

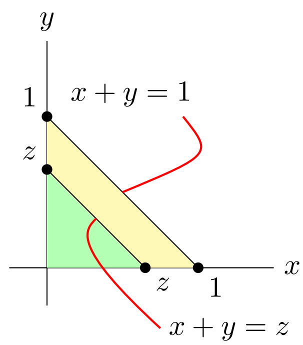

Figura 0.1: Diagrama del problema 1

Dado que X y Y tienen una densidad conjunta uniforme, entonces $f(x,y)$ debe ser constante sobre la región de interés. Recordemos, además, que la integral de $f(x,y)$ sobre el triángulo debe ser igual a 1.

De geometría sabemos que el área de un triángulo está dado por:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \ base \ \cdot \ altura$$

En nuestro caso:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Para que $f(x,y)$ sea una densidad uniforme, debe cumplir con la condición de que la integral de $f(x,y)$ sobre el triángulo definido como $\triangle\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ sea igual a 1. Es decir, tenemos que cumplir con:

$$\int_{\triangle} f(x,y) \, dxdy = 1$$

Ya que $f(x,y)$ es constante sobre el triángulo, podemos proceder de la siguiente manera:

$$f(x,y) \cdot A = 1$$

Por lo tanto: $f(x,y) = 2$ para que $(x,y) \in \triangle\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$.

Esto nos lleva a lo siguiente:

$$f(x,y) = 2 \cdot 1_{\triangle(x,y)}$$

Aquí, $1_{\triangle(x,y)}$ es la indicadora del triángulo y será 1 dentro de la región de interés y 0 en cualquier otro lado. De este modo, ya podemos obtener las densidades marginales:

$$\boxed{f_X(x) = \int_0^{1-x} f(x,y)\ dy = \int_0^{1-x} 2\ dy = 2\int_0^{1-x}\ dy = 2(1-x)}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \int_0^{1-y} f(x,y)\ dx = \int_0^{1-y} 2\ dx = 2\int_0^{1-y}\ dx = 2(1-y)}$$

La selección de los límites de integración se sostiene sobre lo siguiente.

Sabemos que x está en el intervalo [0,1], pues nuestro triángulo está contenido dentro del cuadrado definido por dichos límites. Para cada valor de x, el valor de y debe ser menor o igual a $1-x$, esto es: $y \leq 1-x$. De ese modo, los puntos (x,y) estarán dentro de nuestro triángulo.

Entonces, $f_X(x)$ se obtiene integrando la densidad conjunta $f(x,y)$ sobre el rango de y para cada valor x fijo. De ese modo, como y es variable de 0 a $1-x$, entonces los límites de integración para y son justo esos, de 0 a $1-x$.

De forma completamente análoga, se puede decir que para $f_Y(y)$, los límites de integración para y fija y x variable son de 0 a $1-y$.

Hallar al distribución de Z se logrará si tomamos en cuenta la recta $x+y=z$, que es paralela a la recta $x+y=1$, ambas líneas mostradas en la Figura 0.1. Podemos ver que Z oscila entre 0 y 1, entonces Z se vuelve 0 cuando $X=0$ y $Y=0$. Por otra parte, Z será igual a 1 cuando $X=1$ y $Y=0$, o cuando $X=0$ y $Y=1$.

La función de probabilidad acumulada de Z está denotada por $F_Z(z) = P(Z \leq z)$. Este resultado corresponde al área que está dentro del triángulo delimitado por $Z = X+Y$. La probabilidad de que $Z \leq z$ es en ese caso igual a $\frac{z^2}{2}$.

Aún más, como la densidad es constante, entonces $F_Z(z) = z^2$ en $z \in [0,1]$.

Lo anterior se sostiene sobre el hecho de que:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = f(x,y) \cdot \frac{z^2}{2} = 2 \cdot \frac{z^2}{2}$$

En ese caso, ya podemos obtener la función de densidad de Z, pues sabemos que $f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z)$. Así:

$$\frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dz}z^2 = \boxed{f_Z(z) = 2z}$$

Ahora, ¿Son X y Y independientes?

Para saber si dos variables aleatorias continuas son independientes, debemos asegurarnos de que se cumpla lo siguiente:

$$f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$$

En nuestro caso:

$$\boxed{f_X(x)f_Y(y) = \Big(2(1-x)\Big)\Big(2(1-y)\Big) \neq 2 = f_{X,Y}(x,y)}$$

Por lo tanto, X y Y no son v.a. continuas independientes.

Problema 2

Halle la densidad condicional de $X|Y = y$ si (X, Y) tiene densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y} - y\right)$$

para $x, y > 0$. También calcule $E(X|Y = y)$.

SOLUCIÓN

Sabemos que la **densidad condicional** se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Ya que queremos encontrar $X|Y = y$, es necesario calcular la **densidad marginal** de Y, es decir $f_Y(y)$, integrando $f_{X,Y}(x, y)$ respecto a x:

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{(-\frac{x}{y} - y)}\, dx$$

$$= \frac{1}{y} e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{y}}\, dx$$

Resolvemos la integral haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{y}$, $dx = y\, du$ y obtenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{y}}\, dx = y \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-u}\, du = y \left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = y$$

Por lo tanto:

$$f_Y(y) = e^{-y}$$

Ahora ya podemos calcular $f_{X|Y}(x|y)$. Sustituimos $f_{X,Y}(x, y)$ y $f_Y(y)$ en la fórmula de la densidad condicional:

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{1}{y} e^{(-\frac{x}{y} - y)}}{e^{-y}} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}}$$

A continuación, calculamos el **valor esperado** $\mathbb{E}(X|Y = y)$ usando la densidad condicional:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{y} e^{(-\frac{x}{y})}\, dx$$

Hacemos el cambio de variable $u = \frac{x}{y}$, $dx = y\, du$. Entonces:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^{\infty} (uy) \cdot \frac{1}{y} e^{-u} \cdot y\, du = y \int_0^{\infty} u e^{-u}\, du$$

La integral $\int_0^\infty ue^{-u}\,du = 1$ es el **valor esperado de una exponencial estándar**, por tanto:

$$\boxed{\mathbb{E}(X|Y=y) = y}$$

Problema 3

Sea $Y \sim$ Exp(θ) y, dado $Y = y$, X tiene distribución de Poisson de media y. Encuentre la ley de X.

SOLUCIÓN

Este problema nos está pidiendo encontrar la "ley de X", i.e. la distribución marginal de X, sabiendo que X sigue una Poisson con parámetro y con las condiciones dadas en el enunciado.

Para resolver este problema, debemos recordar que si estamos trabajando con dos v.a. conjuntas continuas, podemos obtener la marginal de alguna de ellas a través de la siguiente ecuación:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{X|Y}(x,y) f_Y y \, dy$$

Por lo tanto, nuestro primer paso será obtener $f_{X|Y}(x,y)$, pues $f_Y(y)$ es fácil construirla, de hecho:

$$f_Y(y) = \theta e^{-\theta y} \quad para \ y > 0$$

Lo anterior ya que $Y \sim Exp(\theta)$.

Ahora, para la densidad condicional de X dado $Y = y$, i.e. $f_{X|Y}(x,y)$, podemos construirla con lo definido en el enunciado: "X Tiene distribución Poisson de media y".

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x,y) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad tq \ la \ media \ \lambda = y$$

$$\boxed{\Rightarrow f_{X|Y}(x,y) = \frac{-y^x e^y}{x!}} \qquad con \ x \in \mathbb{N} \cap \{0\}$$

De ese modo, ya podemos encontrar la ley de X, i.e. la marginal $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{X|Y}(x,y) f_Y y \, dy = \int_0^{\infty} \frac{-y^x e^y}{x!} \cdot \theta e^{-\theta y} \, dy$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \theta \int_0^{\infty} \frac{y^x e^{-y} e^{-\theta y}}{x!} \, dy = \theta \int_0^{\infty} \frac{y^x e^{-y(1+\theta)}}{x!} \, dy$$

Para resolver esta integral, podemos recurrir a un cambio de variable tal que $\omega = y(1+\theta) \Rightarrow y = \frac{\omega}{1+\theta}$ y $dy = \frac{d\omega}{1+\theta}$:

$$\Rightarrow f_X(x) = \theta \int_0^{\infty} \frac{(\frac{\omega}{1+\theta})^x \cdot e^{-\omega}}{x!} = \frac{\theta}{(a+\theta)^{x+1}} \int_0^{\infty} \frac{\omega^x \cdot e^{-\omega}}{x!} \, d\omega = \frac{\theta}{(a+\theta)^{x+1}}$$

Recordemos que $\int_0^{\infty} \frac{\omega^x \cdot e^{-\omega}}{x!} \, d\omega = 1$, pues es la esperanza de una distribución de Poisson, que también puede verse como una integral de una función Gamma igual a 1, normalizada por $x!$

$$\int_0^\infty \frac{\omega^x e^{-\omega}}{x!}\, d\omega = \frac{1}{x!}\int_0^\infty \omega^x e^{-\omega}\, d\omega$$

La integral $\int_0^\infty \omega^x e^{-\omega}\, d\omega$ es la definición de la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \omega^{z-1} e^{-\omega}\, d\omega$$

Así que podemos escribir:

$$\int_0^\infty \omega^x e^{-\omega}\, d\omega = \Gamma(x+1)$$

Y sabemos que:

$$\Gamma(x+1) = x!$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{x!} \cdot x! = 1$$

Esto justifica que la integral es igual a 1. Así que, al integrar la expresión, obtenemos 1. Por lo tanto:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{\theta}{(a+\theta)^{x+1}} \cdot 1 = \frac{\theta}{(a+\theta)^{x+1}} \quad \forall x \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

Problema 4

Sea (X, Y) un vector aleatorio con la siguiente densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Demuestre que X y Y no están correlacionadas, pero que no son independientes.

$\boxed{\textbf{SOLUCIÓN}}$

Vemos que la función de densidad conjunta $f(x, y)$ está definida en el círculo unidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1} & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Para que sea una densidad válida, su integral sobre todo el espacio debe ser 1. Verificamos esto:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{\pi}\,dx\,dy$$

Cambiamos a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\pi} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Comprobamos entonces que la densidad es válida.

Luego, sabemos que la **covarianza** de X y Y se define como:

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Notamos que debido a la simetría de la densidad respecto al origen, $\mathbb{E}[X] = 0$ y $\mathbb{E}[Y] = 0$.

Calculamos $\mathbb{E}[XY]$:

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{x^2+y^2\leq 1} xy\cdot\frac{1}{\pi}\,dx\,dy$$

En coordenadas polares, $xy = r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{r^2}{2}\sin(2\theta)$:

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr$$

La integral de $\sin(2\theta)$ sobre 0 a 2π es cero:

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\theta = 0$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[XY] = 0$.

Sustituyendo los valores encontrados en la ecuación de la covarianza, obtenemos:

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0}$$

Entonces, X y Y no están correlacionadas.

Ahora, para que X y Y sean independientes, la **densidad conjunta** $f(x,y)$ debe ser igual al producto de las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Calculamos las marginales:

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

El producto de las marginales:

$$\boxed{f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\right)\left(\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\right) = \frac{4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{\pi^2} \neq f(x,y)}$$

Por lo tanto, X y Y no son independientes.

Problema 5

Sean X_1 y X_2 v.a.i. que tienen una distribución normal estándar. Obtenga la densidad conjunta de (Y_1, Y_2), donde $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ y $Y_2 = X_1/X_2$. ¿Son Y_1 y Y_2 independientes?

SOLUCIÓN

Como X_1 y X_2 son v.a. independientes con distribución normal estándar, entonces su distribución conjunta es la siguiente:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_2^2}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

Ahora, es conveniente tomar en cuenta las transformaciones del problema, pues mediante ellas podemos obtener las inversas. Recordemos que queremos las inversas ya que, al menos para el caso bivariado, podemos definir $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ como:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} f_{X_1,X_2}\big(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)\big)|J| & (y_1, y_2) \in \mathbf{Y} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Recordemos que g se define como la transformación biyectiva de $X \to Y = \{y_1, y_2\}$, con y_1 y y_2 definidas por la transformación. También, $|J|$ hace referencia al valor absoluto del Jacobiano de g^{-1}. Ahora, las inversas de nuestras transformaciones serán:

$$g_1(x_1, x_2) = y_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)} \qquad \& \qquad g_2(x_1, x_2) = y_2 = \frac{x_1}{x_2}$$

Entonces:

$$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2 \qquad \& \qquad \boxed{x_1 = y_2 y_2}$$

Por lo que:

$$x_2^2 = y_1^2 - x_1^2 \;\Rightarrow\; x_2 = \sqrt{(y_1^2 - x_1^2)} \;\Rightarrow\; x_2 = \sqrt{(y_1^2 - y_2^2 x_2^2)}$$

Así:

$$x_2^2 = y_1^2 - y_2^2 x_2^2 \;\Rightarrow\; x_2^2 + x_2^2 y_2^2 = y_1^2 \;\Rightarrow\; x_2^2(1 + y_2^2) = y_1^2$$

$$\Rightarrow x_2^2 = \frac{y_1^2}{(1 + y_2^2)} \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{x_1}{\sqrt{(1 + y_2^2)}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x_2 = \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(1 + y_2^2)}}}$$

Notemos que, como estamos trabajando con $\pm\sqrt{(1+y_2^2)}$, las funciones no son biyectivas, pues podemos encontrar más de un par (x_1, x_2) que va a (y_1, y_2), pero podemos restringirnos a dos condiciones: $x_2 > 0$ y $x_2 < 0$, es decir, dos regiones para así asegurar un único $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ por condición.

Siguiendo la idea anterior, ya podríamos construir el Jacobiano de nuestras g_1^{-1} y g_2^{-1}, restringiéndose a trabajar bajo la condición de $x_2 > 0$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} g_1^{-1}(y_1, y_2) & \frac{\partial}{\partial y_2} g_1^{-1}(y_1, y_2) \\ \\ \frac{\partial}{\partial y_1} g_2^{-1}(y_1, y_2) & \frac{\partial}{\partial y_2} g_2^{-1}(y_1, y_2) \end{vmatrix}$$

Todo esto con:

$$g_1^{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1 y_2}{\sqrt{(1+y_2^2)}} = x_1 \qquad \& \qquad g_2^{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1}{\sqrt{(1+y_2^2)}} = x_2$$

De ese modo:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{\sqrt{(1+y_2^2)}} & \frac{y_1}{\sqrt{(1+y_2^2)^3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{(1+y_2^2)}} & \frac{-y_1 y_2}{\sqrt{(1+y_2^2)}} \end{vmatrix} = -\frac{y_1 y_2^2}{\sqrt{(1+y_2^2)}} - \frac{y_1}{\sqrt{(1+y_2^2)}}$$

Entonces:

$$J = -\frac{y_1(1+y_2^2)}{(1+y_2^2)^2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{|J| = \frac{y_1}{1+y_2^2}}$$

En este punto, vamos a volver a nuestra ecuación $f_{x_1,x_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$. Sin embargo, hay que considerar que dividimos esta función en las regiones restringidas por $x_2 > 0$ y $x_2 < 0$, lo que nos lleva a la necesidad de agregar un factor de 2 a la función, de forma que:

$$f_{x_1,x_2}(y_1, y_2) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

Ya podemos construir con libertad a $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$, tomando en cuenta que $x_2^2 + x_1^2 = \left(\frac{y_1^2 y_2^2}{1+y_2^2} + \frac{y_1^2}{1+y_2^2}\right) = y_1^2$.

Por lo tanto:

$$\boxed{f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} |J|}$$

Para demostrar si Y_1 y Y_2 son independientes, necesitamos verificar si la densidad conjunta $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ se puede descomponer como el producto de las densidades marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$.

Dado que la densidad conjunta es:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \cdot \frac{y_1}{1 + y_2^2},$$

podemos intentar obtener las marginales de Y_1 y Y_2 para verificar si se cumple $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$.

Entonces, la densidad marginal de Y_1 se obtiene integrando la densidad conjunta sobre y_2:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \cdot \frac{y_1}{1 + y_2^2}\, dy_2.$$

La integral sobre y_2 de $\frac{1}{1+y_2^2}$ es π, por lo que

$$f_{Y_1}(y_1) = e^{-\frac{1}{2}y_1^2} y_1.$$

Por otra parte, la densidad marginal de Y_2 se obtiene integrando la densidad conjunta sobre y_1:

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{0}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)\, dy_1 = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \cdot \frac{y_1}{1 + y_2^2}\, dy_1.$$

Esto resulta en:

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{1 + y_2^2}.$$

Por lo tanto, como $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) \cdot f_{Y_2}(y_2)$, podemos concluir que Y_1 y Y_2 son independientes.

Problema 6

El número de carros que pasa un cruce durante una hora tiene distribución de Poisson de parámetro λ. El número de personas en cada carro tiene distribución de Poisson de parámetro ν. Si Y es el total de personas que pasan por el cruce durante una hora, calcule $E(Y)$ y Var(Y).

SOLUCIÓN

Para resolver este problema, utilizaremos propiedades de la **distribución de Poisson**. Comenzamos definiendo las variables aleatorias

$$X = \{\text{número de carros que pasa por el cruce en una hora}\}$$
$$Z_i = \{\text{número de personas en el } i\text{-ésimo carro}\}$$
$$Y = \{\text{total de personas que pasan por el cruce en una hora}\}$$

donde $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Z_i \sim \text{Poisson}(\nu)$ y $Y = \sum_{i=1}^{X} Z_i$.

Usamos la propiedad de la **esperanza condicional**:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X))$$

Dado $X = x$, Y es la suma de x variables Z_i:

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \sum_{i=1}^{x} \mathbb{E}(Z_i) = x\nu$$

Entonces,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X\nu) = \nu\mathbb{E}(X) = \nu\lambda}$$

Usamos la propiedad de la **varianza condicional**:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y \mid X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X))$$

Primero, calculamos $\text{Var}(Y \mid X = x)$:

$$\text{Var}(Y \mid X = x) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{x} Z_i\right) = x\text{Var}(Z_i) = x\nu$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(\text{Var}(Y \mid X)) = \mathbb{E}(X\nu) = \nu\mathbb{E}(X) = \nu\lambda$$

Ahora calculamos $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X))$:

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = X\nu$$

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X)) = \mathrm{Var}(X\nu) = \nu^2\mathrm{Var}(X) = \nu^2\lambda$$

Finalmente,

$$\boxed{\mathrm{Var}(Y) = \nu\lambda + \nu^2\lambda = \lambda(\nu + \nu^2)}$$

Observamos que el valor esperado del total de personas que pasan por el cruce es $\nu\lambda$, que es el producto del promedio de carros y el promedio de personas por carro. La varianza del total es $\lambda(\nu + \nu^2)$, que refleja la variabilidad en el número de carros y en el número de personas por carro. Esto muestra cómo la varianza adicional proviene de la combinación de las dos distribuciones de Poisson.