Inferencia Estadística | Tarea 01

Aguirre Calzadilla César Miguel

28 de agosto de 2024

Códigos

Todo el código escrito para esta tarea será anexado en un archivo de RStudio. Dentro se encuentran las rutinas escritas para la tarea así como comentarios sobre las mismas.

Problema 1 | Distribución Binomial

Un conjunto de bits se envían sobre un canal de comunicación en paquetes de 12. Si la probabilidad de que un bit sea corrompido sobre este canal es de 0.1, y los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan? Si seis paquetes de bits se envía sobre un canal, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un paquete contenga tres o más bits corruptos? Finalmente, si X denota el número de paquetes contenido en tres o más bits corruptos, ¿cuál es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

Primero que nada, vamos a partir nuestro problema en tres:

1. Si la probabilidad de que un bit sea corrompido sobre este canal es de 0.1, y los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan?

2. Si seis paquetes de bits se envía sobre un canal, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un paquete contenga tres o más bits corruptos?

3. Si X denota el número de paquetes contenido en tres o más bits corruptos, ¿cuál es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

Lo que se nos está pidiendo en la primera parte del problema es encontrar la probabilidad de que no más de dos bits estén corrompidos en un canal de 12 bits, es decir, que haya cero, uno o dos bits corruptos. La probabilidad de que aquello suceda es de 0.1. Además, se nos indica que los errores son independientes. Eso significa que si sabemos que un bit está o no corrompido, esto no nos dirá nada respecto al siguiente bit. En conclusión, significa que cada evento (la corrupción de un bit) es un evento separado e independiente de los demás.

Procederemos con Distribución Binomial (DB). Para poder usar DB, cada ensayo o revisión del evento debe tener solo dos posibles resultados: éxito o fracaso. En este caso, el éxito sería encontrar algún bit corrupto. Además, la probabilidad de que un bit esté corrupto es uniforme, es decir, es la misma para todos los bits (de 0.1). Finalmente, los errores de cada bit son independientes, por lo que el estado de cada bit no influirá en el de los demás.

Por lo tanto, tenemos que:

- Solo hay dos posibles resultados: éxito o fracaso.
- La probabilidad de que ocurra el evento de interés (bits corruptos), es la misma para cada muestra.
- Los eventos son independientes.

Ahora bien, sabemos por definición que:

> Para la variable aleatoria X que cuenta el número de éxitos k, a lo largo de n intentos se dice que tiene "Distribución Binomial", con parámetros n y p, descritos como $bin(k; n, p)$ y con función de masa de probabilidad descrita como en la ecuación (1).

Función de masa de probabilidad (PMF) de una Distribución Binomial:

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \tag{1}$$

para $k \in \{\mathbf{N} \cap 0\}$

Con n el número de eventos, k el número de éxitos y p probabilidad de éxito (en este caso 0.1). Además, es claro que $(1 - p)^{n-k}$ representa la probabilidad de que los siguientes $n - k$ ensayos restantes sean fracasos.

Así, sea X el número de bits corruptos en un paquete, entonces tendremos los siguientes casos:

La probabilidad de no encontrar ningún bit corrupto, o la probabilidad de que no haya éxitos (bits corruptos) en las 12 pruebas, i.e. P(X = 0), es:

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{12}{0} (0.1)^0 (0.9)^{12} = 0.282$$

La probabilidad de encontrar solo un bit corrupto, i.e. P(X = 1), es:

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{12}{1} (0.1)^1 (0.9)^{11} = 0.377$$

La probabilidad de encontrar dos bits corruptos, i.e P(X = 2), es:

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{12}{2} (0.1)^2 (0.9)^{10} = 0.23$$

Ahora, la probabilidad de encontrar a lo más dos bits corruptos es la suma de las probabilidades de encontrar 0, 1 y 2 bits corruptos. Entonces, $P(X \leq 2)$ es:

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{k} P(X = k) = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2) = 0.282+0.377+0.23 = 0.889$$

En conclusión, la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete esté corruptos es de 0.889. Este resultado nos sirve para la pregunta: "Si seis paquetes de bits se envía sobre un canal, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un paquete contenga tres o más bits corruptos?".

Si ya sabemos que la probabilidad de que al menos dos bits estén corruptos es de 0.889, entonces la probabilidad de que un paquete de 12 bits tenga tres o más bits corruptos es de $(1 - 0.899)$, lo cual es igual a 0.111.

Entonces, podemos definir a X como el número de paquetes que contienen tres o más bits corruptos. Así, podemos utilizar nuevamente Distribución Binomial, con los parámetros $n = 6$ (los seis paquetes de bits) y $p = 0.111$ (la probabilidad de tener tres o más bits corruptos). Por lo tanto, la probabilidad de que al menos un paquete contenga tres o más bits corruptos se puede obtener como:

$$1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0}(0.111)^0(0.889)^6 = 0.494$$

Aquí la cuestión que puede surgir es por qué utilizamos $1 - P(X = 0)$. La razón detrás de ello es que, como estamos buscando la probabilidad de que al menos uno de los seis paquetes tenga tres o más bits corruptos, entonces queremos saber $P(X \geq 1)$, y sabemos que a $P(X \geq 1)$ podemos expresarlo como:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Esto es, la probabilidad de que al menos uno de nuestros seis paquetes de bits contenga tres o más bits corruptos es igual a la probabilidad de que ninguno de esos seis paquetes contenga bits corruptos menos 1. En otras palabras, usamos el complemento de la probabilidad de que ninguno de los paquetes tenga tres o más bits corruptos.

Ahora bien, la media de X podemos calcularla como $\nu = np$, con n el número de paquetes estudiados y p la probabilidad de tener tres o más bits corruptos en nuestros seis paquetes estudiados.

Entonces:

$$\mu = np = (6)(0.111) = 0.666$$

Y la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{(6)(0.111)(0.889)} = 0.77$$

Por lo que la probabilidad de que X exceda su media por más de dos desviaciones estándar es de:

$$P(X - \mu > 2\sigma) = P(X - 0.66 > 2(0.77) = P(X > 2.2)$$

En esta parte, hay que considerar que estamos trabajando con una variable discreta y no continua. Entonces podemos decir que $P(X > 2.2) = P(X \geq 3)$. Por lo tanto: hay que encontrar $P(X \geq 3)$:

$$P(X = 0) = 1 - [1 - P(X = 0)] = 1 - [0.494] = 0.506$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1}(0.111)^1(0.889)^5 = 0.37$$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}(0.111)^2(0.889)^4 = 0.115$$

Por lo tanto;

$$P(X \geq 3) = 1 - (0.506 + 0.37 + 0.115) = 0.009$$

Problema 2| Distribución Hipergeométrica

Una caja contiene 12 manzaanas frescas y cuatro podridas. Si eliges tres al azar, y X denota el número de manzanas frescas que tomo, encuentra la función de densidadd de X y su esperanza

Para resolver este problema, utilizaremos la Distribución Hipergeométrica (DH), la cual está definida como:

> Sea una población finita de tamaño N, la cual contiene K éxitos y (N-K) fracasos, y queremos seleccionar sin remplazo una muestra aleatoria finita de dicha población, la variable aleatoria X que representa el número de éxitos de la muestra sigue una Distribución Hipergeométrica.

Hablando matemáticamente, podemos definir la función de masa de probabilidad (PMF) de una DH como en la ecuación (2).

$$P(X = k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{2}$$

Con k el tamaño de la muestra (12 manzanas frescas); x número de éxitos de la muestra; N el tamaño de la población (16 manzanas); n tamaño de la muestra sin remplazo. Al final, la cantidad total de manzanas podridas (4) quedará reflejada en $(N - k)$.

En nuestro caso, nos quedaría algo como:

$$P(X = x) = \frac{\binom{12}{x}\binom{4}{n-x}}{\binom{16}{3}}$$

Los factores que nos llevan a decidir utilizar esta distribución son los siguientes:

- La población es finita: en nuestro ejemplo, son 16 manzanas.
- Extracción sin remplazo: cada que tomamos una manzana, esta no se regresa a la población.
- Existen solo dos categorías: manzana fresca o manzana podrida.
- Tenemos un tamaño fijo de muestras.
- En clase se vio que este tipo de distribución o experimento se utiliza mucho cuando es necesario alterar o destruir el objeto de interés. En este caso, se tiene que buscar una manera de ver el interior de la manzana para definir si está o no podrida.

Pues bien, con ello ya podemos proceder. Lo que queremos es encontrar $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$, para así poder llegar a la suma de esos $P(X)$ y obtener la función de densidad, así como la esperanza.

Entonces:

$P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{12}{0}\binom{4}{3-0}}{\binom{16}{3}} = \frac{4}{560} = \frac{1}{140}$$

$P(X = 1)$:

$$P(X = 1) = \frac{\binom{12}{1}\binom{4}{3-1}}{\binom{16}{3}} = \frac{9}{76}$$

$P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{4}{3-2}}{\binom{16}{3}} = \frac{33}{70}$$

$P(X = 3)$:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{4}{3-2}}{\binom{16}{3}} = \frac{11}{28}$$

Con dicho resultado ya podemos obtener la función de masa de probabilidad $f(x)$, la cual será una función discreta de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{140} & P(X = 0) \\ \frac{9}{76} & P(X = 1) \\ \frac{33}{70} & P(X = 2) \\ \frac{11}{28} & P(X = 3) \end{cases}$$

Ahora bien, la esperanza ($E(X)$) de esta función puede ser descrita como la suma de los $P(X)$, es decir, la suma de las probabilidades encontradas.

En realidad, la esperanza para variables aleatorias discretas está definida como la ecuación (3).

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P[X = x_i] \tag{3}$$

Entonces, tenemos que:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot P(X = k) = (0 \cdot \frac{1}{140}) + (1 \cdot \frac{9}{76}) + (2 \cdot \frac{33}{70}) + (3 \cdot \frac{11}{28})$$

$$E(X) = \frac{9}{4} = 2.25$$

Problema 3 | Gráficas PMF-CDF Uniforme Discreta

Escribe un programa en R que reproduzca las gráficas de las funciones de distribución acumulada (CDF: *Cumulative Distribution Function*) y masa de distribución uniforme (PMF: *Probability Mass Function*) que aparecen en las notas del curso.

Las gráficas que realicé quedaron hechas de la siguiente manera:

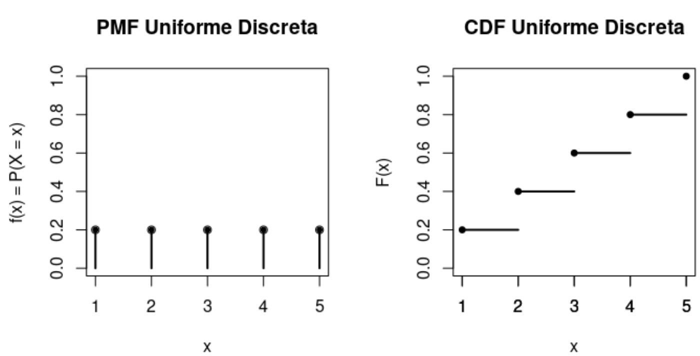


Figura 01: Distribución uniforme para n = 5

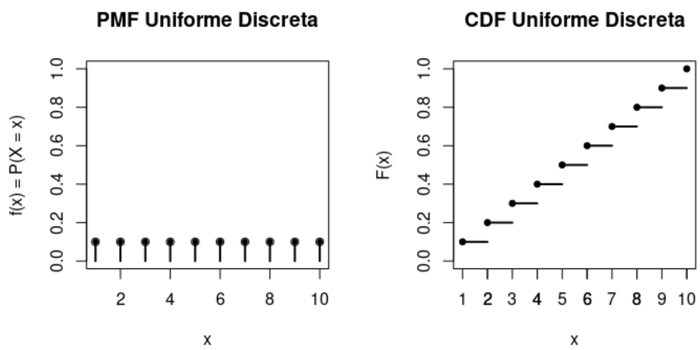


Figura 01: Distribución uniforme para n = 10

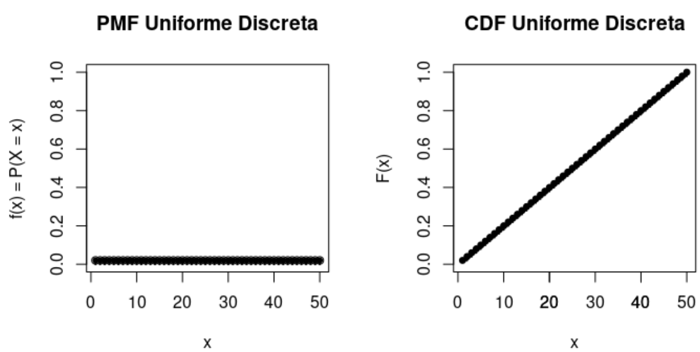


Figura 01: Distribución uniforme para n = 50

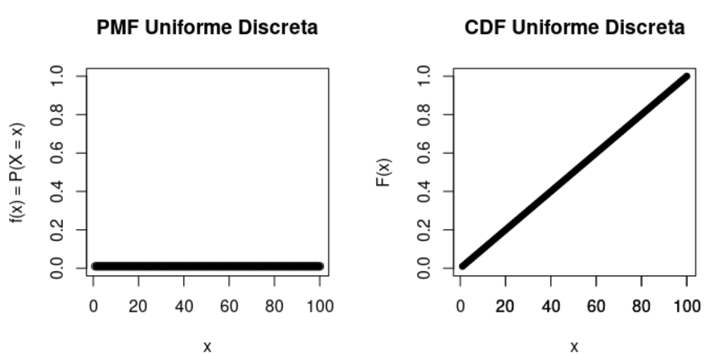


Figura 01: Distribución uniforme para n = 100

Al final podemos ver cómo a medida que añadimos más parámetros, la función F(X), es decir, la función CDF comienza a verse como si fuera una línea recta (siendo más precisos, como la identidad). Esto tiene sentido, ya que a medida que añadimos más y más segmentos, estos irán siendo más y más pequeños, volviéndose casi imperceptibles.

Lea la documentación de R, o en cualquier otra fuente confiable, la explicación de la función "sample(x, size, replace=FALSE, prob=NULL)"

De acuerdo con la página de la documentación de R, la función *sample* hace lo siguiente:

> “*Sample* toma una muestra del tamaño especificado de los elementos de ‘x’, con o sin reemplazo".

La recomendación es utilizarlo de la siguiente manera: *"sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)"*.

Podemos realizar un ejemplo. Supongamos que nos dan un vector con 20 números y queremos tomar una muestra aleatoria de 3 de esos números. Para ello, podemos hacer lo siguiente en R:

```

numeros <- 1:20 # Se crea un vector que va de uno hasta 20, con saltos de una unidad, i.e. (1, 2, 3,..., 20)
muestra <- sample(numeros, 3) # Tomamos la muestra aleatoria de 3 numeros dentro de nuestro vector
print(muestra) # Imprimimos el resultado

```

Usando la función *sample* simule una muestra de tamaño 10,000 de la distribución $U = (1, 2, ..., 10)$. Fijando la semilla en 13, usando *set.seed(13)*, muestre los resultados de la simulación en una tabla de frecuencia y calcule la media y la varianza.

En clases, el profesor Edgar nos mencionó que R caracterizó el uso de '$<-$' como símbolo para definir funciones y asignar valores o significados a cosas en R. Sin embargo, también nos dijo que actualmente se utiliza también el '=', tal como se usa en Python y muchos otros lenguajes. En el código para resolver esta sección utilicé el '=' solo para hacer la prueba. Por lo que he visto, R se quedó con la práctica de utilizar el '$<-$'.

Sea como fuere, la gráfica para lo que se pide puede obtenerse con el siguiente código.

```

set.seed(13) # Esta es nuestra semilla fijada en 13.

muestra = sample(1:10, size=10000, replace=TRUE) # Tomamos la muestra

tabla_frec = table(muestra) # Se hace la tabal
print(tabla_frec)

media = mean(muestra) # Se obtiene la media
print(paste("Media:", media))

varianza = var(muestra) # Calcula la viaranza
print(paste("Varianza:", varianza))

```

El código anterior nos devuelve los resultados:

```
 muestra
1    2    3    4    5    6    7    8    9   10
1004  983  991 1021 1031  994  976 1032 1007  961
[1] "Media: 5.4907"
[1] "Varianza: 8.18193170317032"
```

La gráfica quedaría como en la figura 1.

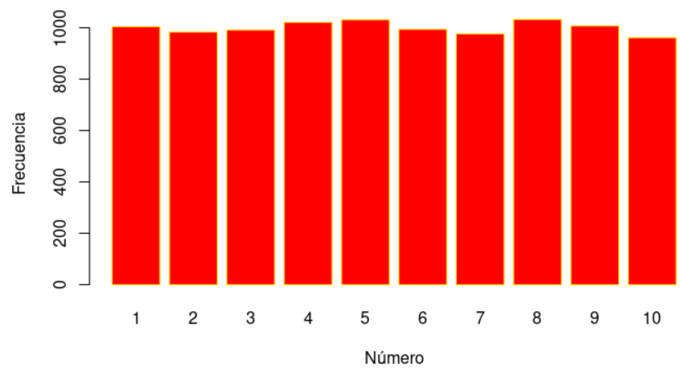


Figura 1: Simulación de $U = (1, 2, ..., 10)$ con muestra tamaño 10,000.

Problema 4

Usando la función *sample*, simule 10 lanzamientos de una moneda equilibrada y cuente el número de águilas que obtiene. Repita este proceso 10^4 veces, y muestre sus primeros tres resultados. Grafique las frecuencias del número de águilas obtenidas en los 10^4 experimentos. También grafique las proporciones del número de águilas obtenidas.

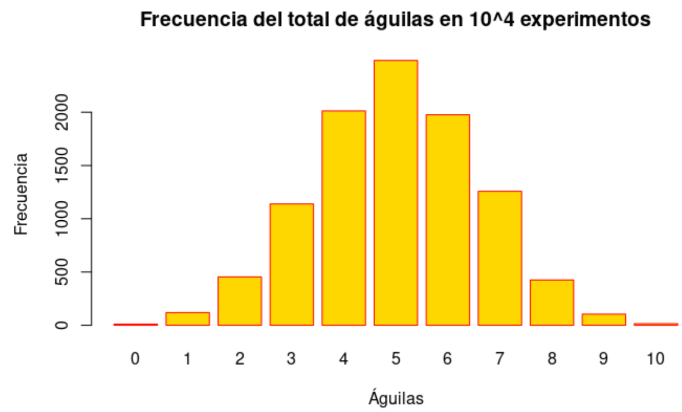
Antes que nada, lo que haremos será intentar comprender el problema. Lo que se nos está pidiendo es simular 10 lanzamientos de una moneda equilibrada. Esto significa que la moneda no está "manipulada", es decir, no tiene ningún arreglo de tal manera que haya una mayor probabilidad de que caiga águila o sol. Después de los 10 intentos, contaremos cuántas veces cayó águila. Posteriormente, se nos pide repetir el proceso durante 10^4 veces y mostrar los primeros tres resultados.

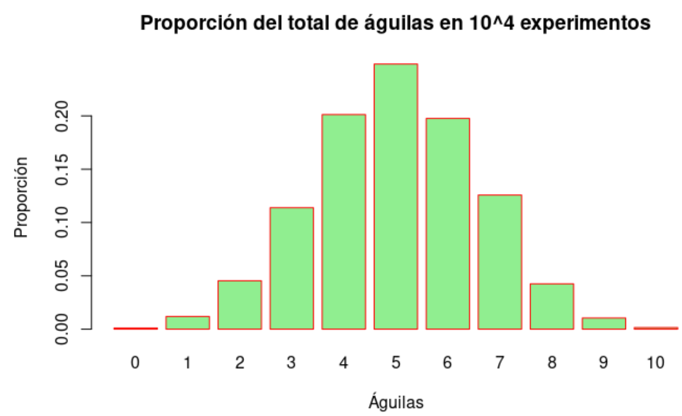
Lo que se obtuvo utilizando R fue lo siguiente:

Para una moneda con $p = 0.3$ de caer águila se obtuvo lo siguiente.

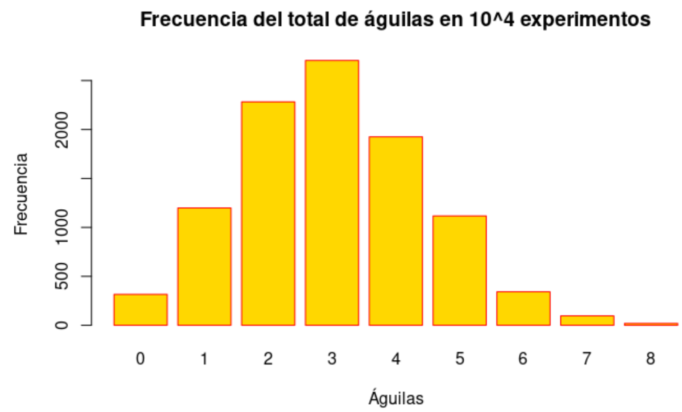
Para estos resultados utilizamos *rbinom(repeticiones, size = pruebas, prob = 0.5)*: esta función genera una muestra aleatoria de experimentos binomiales porque se ajusta al lanzamiento de monedas. Es decir, la distribución binomial es adecuada para representar la cantidad de éxitos en una serie de experimentos que tienen solo dos resultados: fracaso o éxito, cara o cruz, sol o águila.

En este caso, *rbinom* cuenta directamente el número de éxitos (águilas) en cada experimento, facilitando el proceso, pues alternativamente podríamos haber utilizado *replicate* y *sample* para resolver este caso. Además, la repeticiones es el número o cantidad de experimentos, size = pruebas es el número de lanzamientos por experimento,





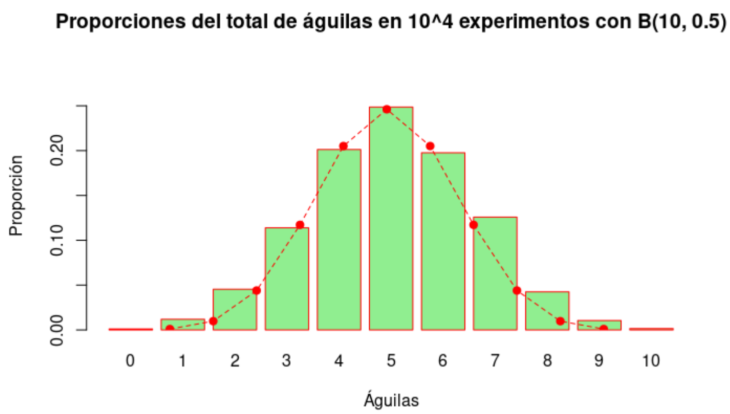
y prob = 0.5 es la probabilidad de obtener "águila"por lanzamiento.


Frecuencia del total de águilas en 10^4 experimentos
Frecuencia
0
500
1000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Águilas

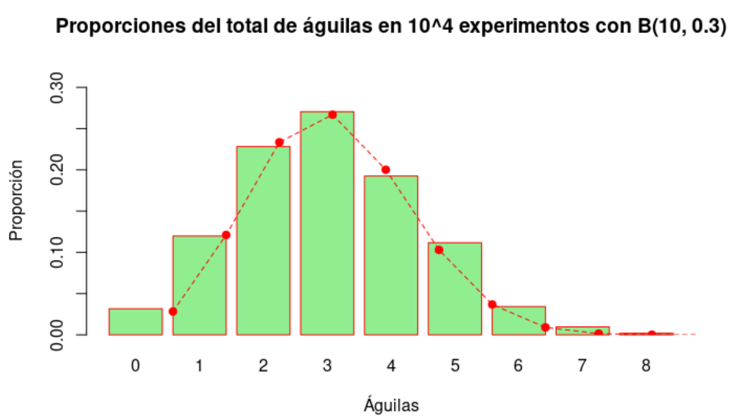

Proporción del total de águilas en 10^4 experimentos
Proporción
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Águilas

Usando la función *dbinom* grafique la función de masa de una distribución $B(10, 0.5)$ sobre la gráfica de las proporciones que hizo en el inciso anterior.

Gráfica para una moneda justa:



Gráfica para una moneda con probabilidad $p = 0.3$ de salir águila:



La interpretación de todo esto sería ver como, dado que tenemos una probabilidad $p = 0.3$ de obtener águilas, entonces la aparición de águilas en los volados serán menos frecuentes. Esto se ve claramente reflejado en La distribución teórica, pues refleja dicha tendencia al mostrar probabilidades más altas para obtener menos águilas y más bajas para obtener más águilas.

Problema 5

Una urna contiene 46 bolas grises y 49 bolas blancas. Usando la función *sample* en R, simule la extracción sin reemplazamiento de 20 bolas y cuente el número de bolas grises que obtuvo. Repita el proceso 10^4 veces y grafique las frecuencias de bolas grises obtenidas en cada experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 20 bolas de la urna, cinco de ellas sean grises? También grafique la proporción de bolas grises obtenidas en los experimentos anteriores y sobre esta figura añada la correspondiente función de masa de la distribución Hipergeométrica asociada al experimente. Brevemente discuta lo obtenido.

Para este ejercicio, lo que se solicita es obtener una simulación de la extracción sin reemplazo de 20 bolas de una urna con 46 bolas grises y 49 blancas. La simulación se realiza 10^4 veces, tal como el problema anterior.

La probabilidad de obtener exactamente cinco bolas grises fue de 0.0126193532822784. Además, las gráficas obtenidas son las siguientes:

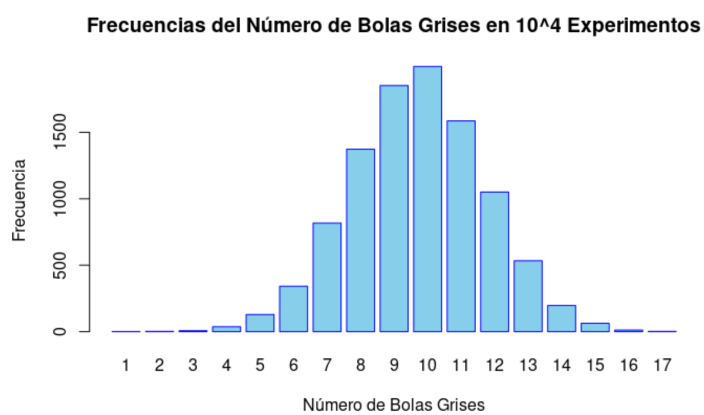


Figura 2: Frecuencia de aparición de bolas grises.

Este primera gráfica (Figura 2), que representa la frecuencia de bolas grises en las 10^4 pruebas muestra una distribución que a primera vista parece simétrica, con un pico entre las 9 y 10 bolas grises. Este resultado corresponde de buena manera con lo que se esperaría para una Distribución Hipergeométrica (DH).

Lo anterior tiene sentido ya que, en promedio, de la cantidad de bolas en la urna, alrededor del 48.42 % son grises y al extraer 20 se esperaría obtener algo así como 9.68 bolas grises. El pico nos muestra cómo la mayoría de las extracciones van a resultar en bolas grises cercanas al valor esperado.

En cuanto a la segunda gráfica (Figura 3), podemos encontrar el resultado (el número de bolas grises) en cada una de las pruebas o experimentos, además de la función de masa de probabilidad de la DH sobrepuesta en rojo.

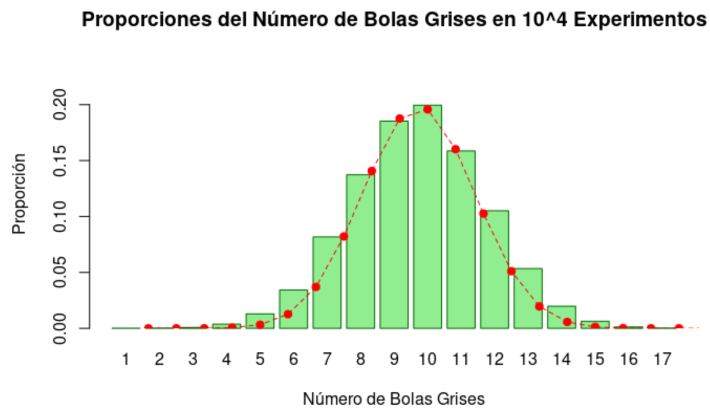


Figura 3: Superposición de DH sobre nuestra proporción.

De hecho, esta sobreposición de la DH en nuestra gráfica nos revela como los resultados de las barras coinciden bastante bien con la distribución teórica. Esto no hace más que validad la simulación, pues es consistente con la teoría.

En cuanto a la probabilidad de extraer cinco bolas grises, esta es pequeña, pero nunca improbable. Quedando en aproximadamente 0.012, es decir, tenemos una probabilidad de alrededor del 1.2 % de obtener exactamente cinco bolas grises.

Problema 6 | Determinar la función de probabilidad de una variable aleatoria dada su función de distribución

Sea X una variable aleatoria con función de distribución F dada por la ecuación (4); determina la función de probabilidad de X

La ecuación (4) es la siguiente:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & para\ X < 0 \\ \frac{1}{2} & para\ 0 \leq X < \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & para\ \frac{1}{4} \leq X < \frac{3}{4} \\ 1 & para\ \frac{3}{4} \leq X \end{cases} \tag{4}$$

Para este problema, haremos uso de la siguiente proposición:

> Para cualesquiera dos números a y b → $P(a \leq X \leq b) = F(a) - F(a^{-})$ con a^{-} representando el mayor valor de X posible estrictamente menor que a. En particular, si los únicos valores posibles son números enteros, con a y b también enteros.

Básicamente, lo que queremos hacer es obtener $P(X = a)$ mediante los puntos de salto que hay en la función y aplicar la proposición. Al final, $F(a^{-})$ se refiere al límite de la función acercándose desde la izquierda.

Entonces, para nuestra $F(X)$, los puntos límite son:

- $X = 0$ con $F(X)$ saltando de 0 a $\frac{1}{2}$
- $X = \frac{1}{4}$ saltando de $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$
- $X = \frac{3}{4}$ saltando de $\frac{3}{4}$ a 1

Por lo tanto:

- $P(X = 0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$
- $P(X = \frac{1}{4}) = F(\frac{1}{4}) - F(\frac{1}{4}^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(X = \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) - F(\frac{3}{4}^-) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Esto nos deja con que la función de probabilidad de X se ve como lo siguiente:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & X = 0 \\ \frac{1}{4} & si\ X = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & si\ X = \frac{3}{4} \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Problema 7 | CDF-PDF

Sea X una variable aleatoria con valores [0, 1] y función de distribución $F(X) = X^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcula las probabilidades indicadas.

Las probabilidades indicadas son:

a) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$

b) $P(X > \frac{1}{2})$

c) $P(X \leq \frac{3}{4} \mid X > \frac{1}{2})$

Okay. Aquí hay algo diferente a todo lo que hemos hecho hasta ahora y eso es que finalmente estamos viendo una variable aletoria no discreta, sino continua. Para este caso, lo que se nos pide es obtener la función de densidad y, además, calcular las probabilidades indicadas arriba.

Entonces, lo primero que haremos será tener en mente que para obtener la función de densidad de probabilidad (PDF), $f(x)$, necesitamos recurrir a la derivada de la función de distribución acumulada de F(X) respecto de x.

Además, recordemos que la función de dnesidad de probabilidad (PDF) es una función que nos describe la probabilidad relativa de que la variable aleatoria X tome cierto valor de x. En nuestro caso, estamos trabajando en el continuo, por lo que la PDF está definida de tal modo que el área debajo de la curva de $f(x)$ será la probabilidad de que X esté dentro de dicho intervalo.

Expresado de matemáticamente, podemos relacionar la PDF con la CDF (función de distribución acumulada) como en la ecuación (5).

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \tag{5}$$

En otras palabras, función de distribución acumulada nos está diciendo la probabildiad total de cierta variable en cierto rango. Cuando derivamos dicha CDF, entonces estamos encontrando la tasa de cambio en tal acumulación, lo que nos indica la densidad de probabilidad en dicho punto derivado.

Por lo tanto, para nuestro caso en específico, tenemos que:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad \forall x \in [0, 1]$$

Ahora, queremos obtener las probabilidades. Como se trata de una función continua, no hace galta mas que obtener la integral de nuestra $f(x)$, en el dominio indicado.

Inciso a):

$$P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (2x)dx = 2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} xdx$$

$$= 2[\frac{x^{1+1}}{1+1}]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = [x^2]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = [(\frac{3}{4})^2] - [(\frac{1}{4})^2] = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$$

Inciso b):

En este caso, tomaremos el intervalo mayor a $\frac{1}{2}$ dentro del donde está definida nuestra función, i.e. el intervalo [0, 1]. Entonces:

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2xdx = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto:

$$P(X > \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

Inciso c):

Este también es un caso interesante, pues no podemos proceder de manera directa. Para el inciso c), tenemos que recordar la ecuación de probabilidad condicional, la cual está descrita como la ecuación (6).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{6}$$

Entonces, por la ecuación (6) tenemos que:

$$P(X \leq \frac{3}{4} \mid X > \frac{1}{2}) = \frac{P(X \leq \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2})}$$

Por lo tanto, tenemos que encontrar $P(X \leq \frac{3}{4})$ y $P(X > \frac{1}{2})$, aunque esta segunda probabilidad ya la calculamos en el inciso b), que nos dejó con $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Calculemos lo que falta:

$$P(X \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} 2xdx = [X^2]_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{16}$$

Finalmente:

$$P(X \leq \frac{3}{4} \mid X > \frac{1}{2}) = \frac{P(X \leq \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{12}{16}} = \frac{5 \cdot 16}{12 \cdot 16} = \frac{5}{12}$$

Acortando aquella cadena:

$$P(X \leq \frac{3}{4} \mid X > \frac{1}{2}) = \frac{5}{12}$$

Problema 8

Un lote muy grande de componentes ha llegado a un distribuidor. Se puede decir que el lote es aceptable solo si la proporción de componentes es cuando mucho de 0.10. El distribuidor decide seleccionar aleatoriamente 10 componentes y aceptar el lote si el número de componentes defectuosos en la muestra es cuando mucho de 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea aceptado cuando la proporción real defectuosa es 0.01, 0.05, 0.10 y 0.20?

Para este problema procederemos con Distribución Binomial. Los supuestos que cumple para decidir usar la DB son:

- El experimento tiene dos resultados posibles: defectuoso (éxito) o no defectuoso (fracaso).
- Cada componente seleccionado es como un experimento de Bernoulli ya que se seleccionan de manera aleatoria, con defectuoso con probabilidad p y no defectuoso con probabilidad $q = (1 - p)$.
- Cada selección es independiente, i.e. el resultado de un componente no afectará al otro.

Entonces, para cada valor p, debemos calcular la probabilidad $P(X \leq 2)$, con X el número de componentes defectuosos en una muestra de tamaño 10. Esto es:

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k)$$

Con $P(X = x)$ la Distribución Binomial como la ecuación (1):

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

En nuestro caso: $n = 10$ es nuestro tamaño muestral; p es la probabilidad de que cierto componente esté defectuoso y k el número de éxitos (componentes defectuosos), de 0 a 2 para este problema.

Entonces, para $p = 0.01 \mid X = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.01)^0(1 - 0.01)^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.99^{10} = 0.9043 \approx \frac{9}{10}$$

Para $p = 0.01 \mid X = 1$:

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.01)^1(1 - 0.01)^{10-1} = 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9 = 0.091 \approx \frac{9}{100}$$

Para $p = 0.01 \mid X = 2$:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.01)^2(1 - 0.01)^{10-2} = 45 \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^8 = 0.00415 \approx \frac{41}{1000}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{2} P(X = k) = 0.9043 + 0.091 + 0.00415 = 0.99945$$

Ahora, seguimos con $p = 0.10$.

Para $p = 0.10 \mid X = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.10)^0(1 - 0.10)^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.9^{10} = 0.3487 \approx \frac{35}{100}$$

Para $p = 0.10 \mid X = 1$:

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.10)^1(1 - 0.10)^{10-1} = 10 \cdot 0.10 \cdot 0.9^9 = 0.3874 \approx \frac{39}{100}$$

Para $p = 0.10 \mid X = 2$:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.10)^2(1 - 0.10)^{10-2} = 45 \cdot 0.01 \cdot 0.9^8 = 0.1937 \approx \frac{19}{100}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{2} P(X = k) = 0.3487 + 0.3874 + 0.1937 = 0.9298$$

Seguimos con $p = 0.20$.
Para $p = 0.20 \ | \ X = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.20)^0(1 - 0.20)^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.8^{10} = 0.1074 \approx \frac{11}{100}$$

Para $p = 0.20 \ | \ X = 1$:

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.20)^1(1 - 0.20)^{10-1} = 10 \cdot 0.20 \cdot 0.8^9 = 0.2684 \approx \frac{27}{100}$$

Para $p = 0.20 \ | \ X = 2$:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.20)^2(1 - 0.20)^{10-2} = 45 \cdot 0.04 \cdot 0.8^8 = 0.3020 \approx \frac{30}{100}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{2} P(X = k) = 0.1074 + 0.2684 + 0.3020 = 0.6778$$

Finalmente, para $p = 0.05 \ | \ X = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.05)^0(1 - 0.05)^{10-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.95^{10} = 0.5987 \approx \frac{6}{10}$$

Para $p = 0.05 \ | \ X = 1$:

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.05)^1(1 - 0.05)^{10-1} = 10 \cdot 0.05 \cdot 0.95^9 = 0.3151 \approx \frac{32}{100}$$

Para $p = 0.05 \ | \ X = 2$:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.05)^2(1 - 0.05)^{10-2} = 45 \cdot 0.0025 \cdot 0.95^8 = 0.0746 \approx \frac{7}{100}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{2} P(X = k) = 0.5987 + 0.3151 + 0.0746 = 0.9884$$

Problema 9

Sean $G = 1, 2, 3$, $H = 4, 5, 6$. Lanzamos dos dados, y sean los eventos A := 'El primer dado cae en H'; B:= 'El segundo dado cae en H'; C := 'Un dado cae en G y otro en H'; D := 'El total es 4'; E := 'El total es 5'; y F := 'El total es 7'. Con esa información, determina si las proposiciones son ciertas.

Define cuál de las siguientes proposiciones son ciertas:

I | A y F son independientes.

II | A y D son independientes.

III | A y E son independientes.

IV | $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

V | A y C son independientes.

VI | C y E son independientes.

VII | $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.

VIII | A, C y E son independientes.

Antes de intentar definir cuáles de las proposiciones son ciertas, necesitamos obtener las probabilidades para cada evento. Entonces, encontrémoslas. Una cosa importante a tener en cuenta es que estamos trabajando con un dado de seis caras, asumimos justo, entonces cada cara tiene una probabilidad de $\frac{1}{6}$ de caer, además de que el espacio muestral total es de $6 \cdot 6 = 36$ (por ser dos dados de seis caras).

Probabilidad del evento A | Primer dado cae en H:

$$H = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad del evento A | Segundo dado cae en H:

$$H = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad del evento C | Un dado cae en G y otro en H:
Hay dos combinaciones posibles: $\frac{3}{6}$ y $\frac{3}{6}$ para cada una de las posibilidades. Entonces:

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad P(C) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad del evento D | El total es 4:
Esto ocurre cuando ambos dados suman 4. i.e. cuando tienes las combinaciones:

- (1,3)
- (2,2)
- (3,1)

Hay tres combinaciones favorables para sumar cuatro en nuestro espacio muestral total, entonces:

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Probabilidad del evento E | El total es 5:
Similar al evento D), este ocurre cuando ambos dados suman cinco, es decir, cuando ocurren las combinaciones siguientes:

- (4,1)
- (3,2)
- (1,4)
- (2,3)

Hay cuatro combinaciones favorables para sumar cinco en nuestro espacio muestral total, entonces:

$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Probabilidad del evento F | El total es 7:
Como los últimos dos eventos, este ocurre cuando ambos dados suman siete, es decir, cuando ocurren las combinaciones siguientes:

- (6,1)
- (5,2)
- (4,3)
- (1,6)
- (2,5)
- (3,4)

Hay seis combinaciones favorables para sumar cinco en nuestro espacio muestral total, entonces:

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Una vez que tenemos todos los eventos y sus probabilidades, podemos seguir con el problema. Sin embargo, primero necesitamos recordar que dos eventos son independientes si y solo si $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$.

Los eventos A y F son independientes. Para verificar su independencia, usamos $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$, entonces, lo que haremos será verificar que:

$$P(A \cap F) = P(A)P(F)$$

Para que la suma de ambos dados sea igual a siete, entonces al menos un dado debe caer en $H = 4, 5, 6$, para que el otro dado sume siete. Por lo tanto, las posibles combinaciones son:

- (4,3)
- (5,2)
- (6,1)

Cada combinación tiene una probabilidad de $\frac{1}{36}$, y hay tres combinaciones posibles. De ahí se sigue que:

$$P(A \cap F) = P(\text{“}Primer\ dado\ en\ H\text{”} \cap \text{“}La\ suma\ es\ 7\text{”}) = 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Ahora:

$$P(A)P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Por lo tanto:

$$P(A \cap F) = P(A)P(F) \quad son\ independientes$$

Los eventos A y D son independientes. Queremos saber si se cumple que $P(A \cap D) = P(A)P(D)$. Ya sabemos que A es cuando el primer dado cae en $H = 4, 5, 6$ y que D pide que la suma de ambos dados sea igual a cuatro. Esto nos indica que no hay una combinación posible pues al caer el primer dado en H, entonces el segundo dado invariablemente sumará más de cuatro en cualquiera de las posibilidades.

Pese a todo, podemos ver qué pasa con la definición de $P(A \cap D) = P(A)P(D)$:

$$P(A \cap D) = 0 \quad \& \quad P(A)P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Por lo tanto: $P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$, no son independientes.

Los eventos A y E son independientes. Nuevamente, debe cumplirse que $P(A \cap E) = P(A)P(E)$ y, en este caso, el primer dado cae en $H = 4, 5, 6$ (por A), y la suma de ambos dados debe ser de cinco. Aquí solo tenemos suma única opción:

- (4,1)

Entonces:

$$P(A \cap E) = \frac{1}{36} \quad \& \quad P(A)P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

De ese modo $P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ son independientes. Aquí nuestra primera condición no se cumple, pues $P(A\ capB \cap C)$ implica que el primer dado caiga en $H = 4, 5, 6$, luego, que el segundo dado caiga en H y finalmente, por la condición C: .ªl menos un dado cae en G y otro en H". Esta condición invalida que suceda $P(A\ capB \cap C)$, pues ambos dados caen en H, y ninguno en G.

Por lo tanto, no se cumplirá que sean independientes.

A y C son independientes. Primero, en A sucede que el primer dado cae en $H = 4, 5, 6$, y por C, un dado cae en $G = 1, 2, 3$, y otro en H. Entonces $P(A \cap C) = P(\text{“}El\ primer\ dadp\ cae\ en\ H\text{”} \cap \text{“}Un\ dado\ cae\ en\ G\ y\ otro\ en\ H\text{”})$. Aquí hay cuatro opciones:

- Se cumple y el primer dado cae en H, y el segundo en G.
- No se cumple y el resultado cae en H y en H.
- No se cumple y el resultado cae en G y en H.
- No se cumple y el resultado cae en G y en G.

Entonces:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} \quad \& \quad P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ y ambos eventos son independientes.

C y E son independientes. C implica que un dado cae en $G = 1, 2, 3$ y otro en $H = 4, 5, 6$, y E implica que “el total es cinco". Entonces, hay cinco combinaciones posibles:

- (1,4)
- (2,3)
- (3,2)
- (4,1)

Por lo que:

$$P(A \cap C) = 4(\frac{1}{36}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \& \quad P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

Esto nos deja con que $P(A \cap C) \neq P(A \cap C)$, no son independientes.

$P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$. Revisemos si se cumple. Para que suceda $P(A \cap C \cap E)$, solo hay una posible combinación dados, la cual sería $(4, 1)$, pues el evento A y C condicionan a que el primer dado caiga en H y el segundo en G. Entonces:

$$P(A \cap C \cap E) = 1 \cdot \frac{1}{36} \quad \& \quad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$$

Entonces, $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(B)P(C)$, se cumple la proposición.

A, C y E son independientes. Hay que tener cuidado con esta proposición, pues puede ocurrir que pensemos que para verificar esta proposición solo necesitamos comprobar algo similar al de la proposición VII. Sin embargo, para que A, C y E sean independientes, todas las combinaciones de la conjunción de eventos deben ser independientes. Aunque lo que pasa en VII es verdadero, debemos verificar todas las mezclas necesarias, las cuales son, comprobar que se cumple:

- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(A \cap E) = P(A)P(E)$
- $P(E \cap C) = P(E)P(C)$
- $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$

Entonces, por los incisos anteriores sabemos que:

- Sabemos que $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ es verdadero, por la proposición V.
- Sabemos que $P(A \cap E) = P(A)P(E)$ es falso, por la proposición III.
- Sabemos que $P(E \cap C) = P(E)P(C)$ es falso, por la proposición VI. La relación de independencia es simétrica.
- Sabemos que $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$ es verdadero, por la propsición VII.

Recordemos que para que la proposición VIII sea verdadera, necesitamos que todas las posibles combinaciones también sean verdaderas, pues la independencia mutua de más de dos elementos así lo requiere. Entonces, nos quedamos con que VIII no es verdadera. Los eventos A, C y E no son independientes.

Problema Extra 1

La compañía CIE ha desarrollado un nuevo producto. La demanda de tal artículo es desconocida, pero se asume que es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\{0, 1, ..., N\}$. Los dispositivos deben ser hechos por adelantado, cada uno vendido produce una ganancia de "g"pesos, y cada uno sin vender produce una pérdida de "p"pesos. ¿Cuántos de estos artículos tienen que producirse para maximizar la ganancia esperada?

Lo primero que vamos a intentar es comprender qué se nos pide en este problema. Se asume que la demanda se va a distribuir de manera uniforme de la forma $\{0, 1, ..., N\}$, es decir, una variable aleatoria uniforme. Esto significa que cualquier valor entre 0 y N es igual de probable.

Es decir, esto nos está diciendo que la demanda del producto puede ser de cualquier cantidad en $\{0, 1, ..., N\}$, son valores equiprobables. Si el límite fuera $N = 10$, entonces la demanda bien podría ser de 0, 3, 5 o 10, con igual de probabilidades.

Ahora bien, sabemos los resultados posibles: ganancias de "g"pesos por venta de dispositivos, y pérdida de "p"pesos por no vender. Además de todo, queremos maximizar la ganancia esperada. Entonces, podemos definir algunas cosas:

- D := como la demanda con distribución uniforme de variable aleatoria $\{0, 1, ..., N\}$.
- q := el número de productos fabricados.
- H := ganancias recuperadas.

Entonces, al estar trabajando con una variable aleatoria y desconocida, la demanda D tiene dos posibles resultados:

- $D \geq q \quad \rightarrow \quad$ cuando la demanda es mayor o igualal número de productos fabricados. Entonces la gancia puede obtenerse como $g \cdot q$.
- $D < q \quad \rightarrow \quad$ cuando la demanda es menor a la producción, es decir, cuando $q - D$. Entonces, la ganancia sería $(g \cdot D) - (p \cdot (q - D))$.

Ahora bien, la probabilidad de que D tome cualquier valor de $k \in \{0, 1, ..., N\}$ es:

$$P(D = k) = \frac{1}{N + 1}$$

Entonces, la ganancia esperada puede ser calculado como:

$$H = \sum_{k=0}^{q-1}[(g \cdot k) - (p \cdot (q - k)) \cdot P(D)] + \sum_{k=q}^{N}(g \cdot q) \cdot P(D)$$

$$H = \sum_{k=0}^{q-1}[(g \cdot k) - (p \cdot (q - k)) \cdot \frac{1}{N + 1}] + \sum_{k=q}^{N}(g \cdot q) \cdot \frac{1}{N + 1}$$

$$H = \frac{1}{N+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{q-1} [(g \cdot k) - (p \cdot (q-k))] + \sum_{k=q}^{N} (g \cdot q) \right)$$

Esta ecuación podría resolverse de manera numérica para distintos casos, pero ya no me dio tiempo de agregar algunos ejemplos.

Problema Extra 2

En un salón de clases, los estudiantes deciden intercambiar regalos de la siguiente manera: todos llevan un presente, los regalos se ponen en una mesa y se entregan de manera aleatoria a las personas de tal manera que cada persona recibe un regalo. Esta es una forma justa de distribuir regalos. considera que el salón tiene n estudiantes, i.e. el número de regalos también es n. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona dada reciba su propio regalo? ¿Cuál es la probabilidad de que en todo intercambio alguien reciba su propio regalo?

Resuelve los siguientes incisos:

a) Escribe una función en R o en Python que simule el proceso anterior. Calcula las probabilidades para $n = 5, 10, 20, 100$. Entrega el código.

b) Resuelve el problema analíticamente. Hint: usa el principio de inclusión-exclusión.

c) ¿Las probabilidades anteriores son iguales o diferentes? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$? Explica.

Solución analítica (inciso b).

La probabilidad de que alguien reciba su propio regalo es de $\frac{1}{n}$, ya que hay n regalos, y cada persona trae un único regalo. Entonces:

$$P(\text{“}una\ persona\ dada\ recibe\ su\ pripio\ regalo\text{”}) = \frac{1}{n}$$

Ahora, la parte complicada y compleja es la que sigue con encontrar la probabilidad de que, en todo intercambio, alguien reciba su propio regalo.

Sabemos que hay n personas en el salón de clases. Definimos el evento A_i como el evento de que la i-ésima persona reciba su regalo. El objetivo es calcular la probabilidad de la unión de los eventos $\{A_1, A_2, A_3, .., A_n\}$, i.e. la probabilidad de que al menos una persona obtenga su propio regalo.

Definimos el evento A_i como el evento de que la i-ésima persona reciba su propio regalo. Queremos calcular la probabilidad de la unión de estos eventos, i.e.,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Con ello, podemos utilizar el principio de inclusión-exclusión, pues nos permite calcular la probabilidad de que $P(A_2 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n)$, expresado como:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i) \; - \sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \; - \; .. \; + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2, .., A_n)$$

Ahora, hay que ir resolviendo por partes:

Para el primer termino tenemos que:

$$\sum_{i}^{n} P(A_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Esta es la probabilidad de que cada persona reciba su propio regalo.
Para el segundo termino:

$$- \sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i \cap A_j) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{2}$$

Esta es la probabilidad de que dos personas (i y j) específicas reciban su regalo, esto es: $\frac{1}{n(n-1)}$.
Para el tercer término tenemos que:

$$\sum_{1 \le i \le j \le k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{6}$$

Generalizando para k personas, tenemos:

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

Aquí podemos podemos ver el patrón. Cuando n es muy grande, es decir, cuando va tendiendo a infinito, podemos notar cómo la aproximación por serie de Taylor de la exponencial e^{-x} se parece mucho a nuestro resultado:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{n} \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)\frac{x^n}{n!}$$

Además, utilizando la relación con los derangement, es decir, permutaciones en las que ningún elemento aparece en su posición original (ejemplo, un derangement de [1,2,3] sería [3,1,2]). En este problema, usar derangements es lo mismo que decir que no hay persona que reciba su propio regalo. Entonces, el número total de derangements de n elementos se denota como D_n.

Entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P(\text{ninguna persona dada recibe su propio regalo})$$

La probabilidad de que ninguna persona reciba su propio obsequio es de $\frac{D_n}{n!}$, pues D_n es el número de derangements y $n!$ es el número total de permutaciones posibles. Esto nos lleva a que la probabilidad de que al menos una persona reciba su pripio regalo es:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (\frac{D_n}{n!})$$

Con:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{k} \frac{(-1)^k}{k!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \approx e^{-x} \quad \text{(expandido en su serie de Taylor)}$$

Por lo que el resultado del principio de exclusión-inclusión para un problema de derangements fijos y valores grandes de n, se aproxima a:

$$\frac{Dn}{n!} \approx \frac{1}{e}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al menos una persona reciba su propio regalo tiende a: $1 - \frac{1}{e}$, que es aproximadamente 0.6321.

Problema Extra 3

Consideremos el experimento de lanzar dos monedas justas (i.e. en cada una de las monedas, la probabilidad de obtener cara o cruz es de 0.5). Sea A el evento “la primera moneda cae en cara", B el evento “la segunda moneda cae en cara", y C el evento “una y solo una de las monedas cae en cara"; justifica si las siguientes proposiciones se cumplen.

a) ¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa con A y C?

Primero que anda, debemos recordar independencia condicional: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Entonces, procedemos:

Aquí tenemos que $P(A) = 0.5$ y que $P(B) = 0.5$ también, pues estamos hablando de una moneda jsuta. Por otra parte, la probabilidad de C, cuando üna y solo una de las monedas cae en cara", también es de 0.5, entonces $P(C) = 0.5$.

Entonces, queremos verificar a), es decir:

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

Vamos a comenzar con $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Para este caso hay cuatro escenarios:

- La primera moneda cae cara y la segunda también cae cara.
- La primera moneda cae cara y la segunda ca cruz.
- La primera moneda cae cruz y la segunda cae cara.
- La primera moneda ce cruz y la segunda también cae cruz.

Así, para $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ debido a que en nuestro espacio muestral tenemos cuatro opciones. Asimismo $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Entonces se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y ambos eventos son independientes.

Por otro lado, debemos revisar el caso de independencia entre A y C. En esta proposición, A no sindica que la primera moneda cae cara, mientras que C condiciona a que una y solo una moneda caiga cara. De ese modo, tenemos la siguiente posibilid:

- (cara, cara)

Entonces, $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$. Ahora bien, para ya sabemos que $P(C) = \frac{1}{2}$, pues hay dos posibilidades de que se cumpla la condición para cuatro opciones del espacio muestral, es decir, las opciones (cara, cara) y (cruz, cara). Por lo tanto: $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Entonces se cumple que $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ y ambos eventos son independientes.

b) ¿Se cumple que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$? Explica. Hint: busca la definición de independencia mutua.

Como vimos en el problema 9, sabemos que más de dos eventos son independientes si cumplen con la definición de independencia mutua, que básicamente es comprobar lo siguiente (para tres eventos):

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Si alguno de esos eventos no se cumple, entonces no hay independencia. Por lo tanto, nos combiene revisar lo que sucede con $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, pues en cuanto a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, ya sabemos que sucede por el inciso a).

Así, tendremos que $P(A \cap B \cap C)$ es la probabilidad de que sucedan los tres eventos, es decir, que la primera moneda caiga cara, que la segunda moneda también caiga cara y que, además, por el evento C, que "una y solo una moenda caiga cara". Estas condiciones ya nos indican que $P(A \cap B \cap C)$ es imposible de que suceda, entonces se rompe con que todas las condiciones se cumplan. Por lo tanto, es imposible que A, B y C sean eventos independientes.