1] Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Plantee una partición para las matrices A y B, y realice la multiplicación AB por bloques.

Solución:

Vamos a proponer las particiones: $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ con A_1 (las tres primeras columnas) y A_2 (las dos últimas), y $B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ \hline 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$ con B_1 (las tres primeras filas) y B_2 (las dos últimas)

De ese modo, tenemos dos particiones para A y para B con dimensiones adecuadas para multiplicarlas, tq: $AB = A_1B_1 + A_2B_2$

$$\Rightarrow A_1B_1 + A_2B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_1 := \mathbb{M}_{4\times 3}$ $B_1 := \mathbb{M}_{3\times 3}$

$A_2 := \mathbb{M}_{4\times 2}$ $B_2 := \mathbb{M}_{2\times 3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1-15 & -4+2+0 & 2+0+3 \\ 0-1+20 & 0+2+0 & 0+0-4 \\ 3+2+5 & -6-4+0 & 3+0-1 \\ 0-4+0 & 0+8+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 & 5 \\ 19 & 2 & -4 \\ 10 & -10 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = A_1B_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+0 & 15+21 & -20-7 \\ -6+0 & -3+6 & 4-2 \\ 6+0 & 3+15 & -4-5 \\ 6+0 & 3-9 & -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 36 & -27 \\ -6 & 3 & 2 \\ 6 & 18 & -9 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix} = A_2B_2$$

$$\Rightarrow A_1B_1 + A_2B_2 = \begin{pmatrix} -14 & -2 & 5 \\ 19 & 2 & -4 \\ 10 & -10 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 36 & -27 \\ -6 & 3 & 2 \\ 6 & 18 & -9 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 34 & -22 \\ 13 & 5 & -2 \\ 16 & 8 & -7 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = AB$$

2] Exprese con palabras la siguiente operación elemental de fila que debe efectuarse en el sistema para resolverlo:

a) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 5x_3 - x_4 = 7 \\ x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - 7x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \\ 3x_4 = -3 \end{cases}$

Solución:

Comenzamos con el inciso (a). Lo primero que haremos será pensar en el sistema de ecuaciones como una matriz para proceder con operaciones elementales. Para resolver el sistema, no hace falta más que multiplicar por (-5) al renglón/fila 4 y que nos quede algo como: $(-5)(x_3 + 3x_4 = -5) \Rightarrow -5x_3 - 15x_4 = 25$; y luego eso sumarlo como operación elemental a la fila 3, i.e., $5x_3 - x_4 = 7$ (y luego cambiar fila 3 por fila 4)

$\Rightarrow$ el sist. quedaría como: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_3 + 3x_4 = -5 \\ -16x_4 = 32 \end{cases}$ Este sistema ya se puede resolver fácilmente

Ahora, para el inciso (b), nuevamente pensamos en el sistema como una matriz. Lo que haremos será sumar la fila 4 :: $3x_2 = -3$ a las filas 3 y 2, para así llegar a un sistema fácilmente resoluble y nos queda así:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - 7x_3 + 3x_4 = -6 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_4 = -3 \end{cases}$$

3| La matriz aumentada de un sistema lineal se transformó, mediante operaciones de fila, en la forma que se indica a continuación. Determine si el sistema es consistente.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Se nos pide analizar cada sistema para determinar si es o no consistente.

Inciso a) Este sistema es consistente. Aunque la última fila es de solo ceros, una de las variables puede expresarse en función de las otras.

Inciso b) Este sistema también es consistente. Tenemos una fila con $3=0$ pero esta no representa una inconsistencia ya que es una variable.

Inciso c) Aquí tenemos un sistema inconsistente, pues encontramos una fila de ceros igual a 1, i.e. $0=1$. Esto es una contradicción.

Inciso d) Este sistema también es consistente. Tenemos infinitas soluciones como en el inciso (a).

4] Suponga que para llevar a cabo una reducción Gauss se llevan a cabo los siguientes operaciones elementales:

a) • $R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2$

b) • $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_2 + R_3$

c) • $R_3 \leftarrow 3R_3$

¿Cuáles son las matrices elementales que representan dichas operaciones?

Solución: sabemos que una matriz elemental es aquella que se obtiene a partir de la matriz identidad, aplicando solo una operación elemental de fila o columna.

Entonces:

• Inciso a): $R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2$ la matriz identidad (pensemosla I_{3x3})

es $I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2R_1 = 2(100) = 200$

$2R_1 + R_2 = (2\,1\,0)$

• Inciso b): $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_2 + R_3$

$I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\frac{1}{2}R_2 = (\frac{1}{2})(0\ 1\ 0) = (0\ \frac{1}{2}\ 0)$

$R_3 = (0\ 0\ 1)$

$\frac{1}{2}R_2 + R_3 = (0\ \frac{1}{2}\ 1)$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

• Inciso c): $R_3 \leftarrow 3R_3$

$I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3R_3 = 3(0\ 0\ 1) = (0\ 0\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5| Determina si $(3,4,-2)$ es solución para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

Solución: Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y asumiendo que $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ entonces, podemos intentar verificar si soluciona el sistema:

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 5(3) - (4) + 2(-2) = 15 - 4 - 4 = 7$$

$$-2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -2(3) + 6(4) + 9(-2) = -6 + 24 - 18 = 0$$

$$-7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7(3) + 5(4) - 3(-2) = -21 + 20 + 6 = 5 \quad ! \quad 5 \neq -7$$

$\therefore$ No es solución

6| Encuentre una ecuación que incluya a "g", "h" y "k" que permitan que esta matriz aumentada corresponda a un sistema consistente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right)$$

Solución: Para que la matriz aumentada que tenemos corresponda con un sistema consistente, podemos recurrir a eliminación de Gauss para reducir la matriz a su forma escalonada y asegurar que no haya inconsistencias.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[2f_1+f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2g+k \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2+f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2g+h+k \end{pmatrix}$$

Ahora, para no encontrarnos con alguna inconsistencia del tipo $M=0$ con $M \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, debemos asegurarnos de que $2g+h+k=0$ de esa manera, el sistema será consistente.

7| Encuentre una ecuación que incluya "a", "b" y "c", y que permita que esta matriz aumentada corresponda a un sistema inconsistente:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -20 \\ -6 & -11 & -21 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}f_3]{\frac{1}{5}f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \frac{1}{5}a \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 1 & 2 & -4 & \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

Al hacer esta reescalación podemos notar rápidamente que tanto la fila 1 como la fila 3 son idénticas en sus coeficientes

Solución:

Para que no haya contradicción, se debe cumplir que $\frac{1}{5}a = \frac{1}{2}c$, o lo que es igual: $2a=5c$, si sucede que $2a \neq 5c \Rightarrow$ el sistema será inconsistente ya que tanto fila 1 como fila 3 serían equivalentes en incógnitas, pero no en términos independientes. Ello generaría inconsistencia y una contradicción directa. $\therefore$ si $2a \neq 5c$ el sist. no tiene solución.