Álgebra Matricial
Tarea V | César Aguirre

Problema 01: Determinar la descomposición ortogonal de "y" con respecto a "u"

a) $y = (2, -2)$ $\quad u = (1, 3)$

Para resolver este problema, recordemos la definición vista en clase:

Def. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces toda "y" en $\mathbb{R}^n$ puede escribirse únicamente de la forma:

$$y = \hat{y} + z \quad \} \text{ Descomposición ortogonal}$$

donde "$\hat{y}$" está en W y "z" en $W^\perp$. De hecho, si $\{u_1, \dots, u_p\}$ es cualquier base ortogonal de $W \Rightarrow$

y: $\quad \hat{y} = \dfrac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1 + \dots + \dfrac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} \cdot u_p \quad \Big\}$ $\hat{y}$ proyección de "y" en el sub. esp. gen. por "u"

$$z = y - \hat{y} \quad \} \text{ componente ortogonal}$$

Entonces, para (a): Sea $y = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

lo primero que haremos será encontrar $\hat{y}$

$$\Rightarrow \text{Proy}_u(y) = \hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} \cdot u = \frac{-2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\langle y, u \rangle = y \cdot u = (2, -2) \cdot (1, 3) = 2 - 6 = -4$
$\langle u, u \rangle = (1, 3)(1, 3) = 1 + 9 = 10$

$$\Rightarrow \frac{\langle y, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{-4}{10} u = \frac{-2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, hay que construir a $z = y - \hat{y}$

$$\Rightarrow z = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{10}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} = \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ la Descomposición ortogonal es:

$$y = \hat{y} + z = \frac{-2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para (b)

Sea $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad Proy_u(y) = \frac{\langle y,u \rangle}{\langle u,u \rangle} \cdot u = \underbrace{\frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{} = \hat{y}$$

$\langle y,u \rangle = (3,2,-1)\cdot(1,1,1) = 3+2-1 = 4$

$\langle u,u \rangle = (1,1,1)\cdot(1,1,1) = 1+1+1 = 3$

Ahora, hay que construir $z = y - \hat{y}$

$$\Rightarrow \quad z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/3 \\ 6/3 \\ -3/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -7/3 \end{bmatrix}$$

$$z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ la descomposición ortogonal será: $\underline{y = z + \hat{y} = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}\right\}}$

Para (c)

Sea $y = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad Proy_u(y) = \hat{y} = \frac{\langle y,u_1 \rangle}{\langle u_1,u_1 \rangle} \cdot u_1 + \frac{\langle y,u_2 \rangle}{\langle u_2,u_2 \rangle} \cdot u_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{9}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 13 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\langle y,u_1 \rangle = (4,-2,3)\cdot(1,2,1) = 4-4+3 = 3$ $\quad$ $\langle y,u_2 \rangle = (4,-2,3)\cdot(1,-1,1) = 4+2+3 = 9$

$\langle u_1,u_1 \rangle = (1,2,1)\cdot(1,2,1) = 1+4+1 = 6$ $\quad$ $\langle u_2,u_2 \rangle = 1+1+1 = 3$

$$\Rightarrow \quad z = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 13 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/3 \\ -2/3 \\ 3/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13/3 \\ -11/3 \\ 11/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 9/3 \\ 14/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Álgebra Matricial
Tarea V | César Aguirre

Problema #2 Construir una base ortogonal y una base ortonormal pa' las siguientes bases bajo el producto interno indicado:

(a) $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (4,7,1)$, $v_3 = (1,0,1)$; con $\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ donde $X = (x_1, x_2, x_3)$ y $Y = (y_1, y_2, y_3)$

Para este problema, lo primero que haremos será demostrar que el prod. interno propuesto es, en efecto, producto interno. Para ello, recordemos que hay una def. para verificarlo:

> **Def.** Sea X un espacio vectorial sobre K. El prod. interno sobre X es una función $\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow K$ tq:
>
> i) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$
>
> ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
>
> iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
>
> iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
>
> Para cada $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$

Para (a) Sea $\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$

$\Rightarrow \langle Y, X \rangle = 2y_1x_1 + 3y_2x_2 + y_3x_3$ por conmutatividad del producto en los reales

$\therefore$ Se cumple que $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$

Ahora, hay que ver qué pasa con la linealidad en la primera entrada:

$\Rightarrow \langle \alpha X + \beta Z, Y \rangle \stackrel{?}{=} \alpha \langle X, Y \rangle + \beta \langle Z, Y \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $X, Y, Z \in K$

Supongamos $X = (x_1, x_2, x_3)$ $Y = (y_1, y_2, y_3)$ y $Z = (z_1, z_2, z_3)$

$\Rightarrow \alpha X + \beta Z = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(z_1, z_2, z_3) = (\alpha x_1 + \beta z_1, \alpha x_2 + \beta z_2, \alpha x_3 + \beta z_3)$

$\Rightarrow \langle \alpha X + \beta Z ; Y \rangle = 2[(\alpha x_1 + \beta z_1)y_1] + 3[(\alpha x_2 + \beta z_2)y_2] + (\alpha x_3 + \beta z_3)y_3$

$= 2\alpha x_1 y_1 + \overline{2\beta z_1 y_1} + \underline{3\alpha x_2 y_2} + \overline{3\beta z_2 y_2} + \underline{\alpha x_3 y_3} + \overline{\beta z_3 y_3}$

$= \alpha(2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3) + \beta(2z_1y_1 + 3z_2y_2 + z_3y_3)$

$= \alpha \langle X, Y \rangle + \beta \langle Z, Y \rangle$ $\quad \therefore \langle \alpha X + \beta Z, Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle + \beta \langle Z, Y \rangle$ ∎

Ahora, hay que revisar que $\langle X,X\rangle \geq \theta$ y que $\langle X,X\rangle = \theta \iff X = \theta$

$\Rightarrow \langle X,X\rangle = 2X_1X_1 + 3X_2X_2 + X_3X_3 = 2X_1^2 + 3X_2^2 + X_3^2 > \theta \quad \forall\, X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}$

por ser exp. cuadrado

y $\langle X,X\rangle = \theta \iff X = \theta$ pues $2X_1^2 + 3X_2^2 + X_3^2 > \theta$

$\therefore X = \theta$ para que $\langle X,X\rangle = \theta$ ■

Bien, ya que comprobamos que $\langle X,Y\rangle = 2X_1Y_1 + 3X_2Y_2 + X_2Y_3$ es prod. interno pasaremos a encontrar las bases ortogonales y ortonormales ss

Sea $V_1 = (1,2,-1)$ $V_2 = (4,7,1)$ y $V_3 = (1,0,1)$

A. M. Tarea V

Continuación Problema #2

Base ortogonal de (a):

Procedemos por Gram-Schmidt:

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Sea} \left\{ \begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \end{aligned} \right.$$

$$\underline{\underline{u_1 = (1, 2, -1)}}$$

$\Rightarrow \langle v_2, u_1 \rangle = 2(4)(1) + 3(7)(2) + (-1)(1) = 8 + 42 + 1 = 51$

$\langle u_1, u_1 \rangle = 2(1)(1) + 3(2)(2) + (-1)(-1) = 2 + 12 + 1 = 15$

$\Rightarrow u_2 = v_2 - \frac{51}{15} u_1 = (4, 7, 1) - \frac{51}{15}(1, 2, -1) = \frac{15}{15}(4, 7, 1) - \frac{51}{15}(1, 2, -1)$

$$\underline{\underline{u_2 = \left(\frac{9}{15}, \frac{3}{15}, \frac{66}{15} \right) = \frac{1}{5}(3, 1, 22)}}$$

Ahora: u_3

$\Rightarrow \langle v_3, u_1 \rangle = 2(1)(1) + 3(0)(2) + (1)(-1) = 2 + 0 - 1 = 1$

$\langle u_1, u_1 \rangle = 15$

$\langle v_3, u_2 \rangle = 2(1)(\frac{3}{5}) + 3(0)(\frac{1}{5}) + (1)(\frac{22}{5}) = (\frac{10}{5})(\frac{3}{5}) + 0 + \frac{22}{5} = \frac{13}{5} + \frac{22}{5} = \frac{35}{5} = 7$

$\langle u_2, u_2 \rangle = 2(\frac{3}{5})(\frac{3}{5}) + 3(\frac{1}{5})(\frac{1}{5}) + (\frac{22}{5})(\frac{22}{5}) = \frac{18}{25} + \frac{3}{25} + \frac{484}{25} = \frac{505}{25} = \frac{101}{5}$

$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{35}{101} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 22/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1099/1515 \\ -307/1515 \\ -694/1515 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $u_1 = (1, 2, -1)$

$u_2 = (3/5, 1/5, 22/5)$

$u_3 = (1099/1515, -307/1515, -694/1515)$

Ahora, obtengamos la normalización de los vectores u_1, u_2, u_3

tq $\quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \qquad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$

$\Rightarrow$ Para e_1: $\quad \|u_1\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para e_2:

$$\|u_2\| = \sqrt{(3/5)^2 + (1/5)^2 + (22/5)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25} + \frac{484}{25}} = \sqrt{19.76}$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{19.76}} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 22/5 \end{pmatrix}$$

Para e_3:

$$\|u_3\| = \left(\left(\frac{1099}{1515}\right)^2 + \left(\frac{-307}{1515}\right)^2 + \left(\frac{-694}{1515}\right)^2 \right)^{1/2} = 0.881 = \sqrt{0.7771}$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{0.771}} \begin{pmatrix} 1099/1515 \\ -307/1515 \\ -694/1515 \end{pmatrix}$$

$\therefore \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base ortonormal

Continuación problema #2

b) $v_1 = (4,1)$ $v_2 = (1,0)$ $\langle u,v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$

donde $U = (u_1, u_2)$ y $V = (v_1, v_2)$

Lo primero que haremos será demostrar que $\langle u,v \rangle$ es producto interno

$\Rightarrow$ probaremos:

·) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

$\Rightarrow$ Sabemos que $\langle u,v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ y sean $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_1v_1 = v_1u_1$ y $u_2v_2 = v_2u_2$ (conmutatividad del prod. en reales)

$\therefore \langle u,v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = \langle v,u \rangle$ ■

··) linealidad en primera entrada, i.e. $\langle \alpha u + \beta w, v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle + \beta \langle w,v \rangle$

$\Rightarrow$ Sea $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$

$$\alpha u + \beta w = \alpha(u_1,u_2) + \beta(w_1,w_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + \beta(w_1,w_2) = (\alpha u_1 + \beta w_1, \alpha u_2 + \beta w_2)$$

así:

$$\langle \alpha u + \beta w, v \rangle = 3(\alpha u_1 + \beta w_1)v_1 + 2(\alpha u_2 + \beta w_2)v_2 = \underline{3\alpha u_1 v_1} + 3\beta w_1 v_1 + \underline{2\alpha u_2 v_2} + 2\beta w_2 v_2$$

$$= \alpha(3u_1v_1 + 2u_2v_2) + \beta(3w_1v_1 + 2w_2v_2)$$

$$= \alpha\langle u,v \rangle + \beta \langle w,v \rangle \; ■$$

∴) finalmente, corroboremos que $\langle u,u \rangle \geq 0$ y que $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

$\Rightarrow \langle u,u \rangle = 3u_1u_1 + 2u_2u_2 = 3u_1^2 + 2u_2^2$ y como $u_1^2, u_2^2 > 0$

$\Rightarrow \langle u,u \rangle > 0$

Ahora, solo hay una forma de que $\langle u,u \rangle = 0$ y eso es si $\vec{u} = (0,0) = \vec{0}$

pues $3u_1^2 + 2u_2^2 > 0$

$\therefore \langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

■

En este punto, ya podemos construir nuestra Base ortogonal, procediendo por Gram-Schmidt:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 \\ u_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \dfrac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \end{cases}$$

Sea $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, recordemos que por G-S =

$$\Rightarrow \underline{u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = 3(1)(4) + 2(0)(1) = 12 + 0 = 12$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 3u_1^2 + 2u_2^2 = 3(16) + 2(1) = 48 + 2 = 50$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{12}{50}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{50} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{48}{50} \\ \frac{12}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/50 \\ -12/50 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u_2 = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix}}$$

$$\therefore B^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$$

Finalmente, podemos obtener nuestra base ortonormal si normalizamos $B^{\perp}$

i.e. obtenemos el unitario de u_1 y u_2

$$\Rightarrow \hat{u}_1 = e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\hat{u}_2 = e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{50}{12}\begin{pmatrix} 2/50 \\ -12/50 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(2/50)^2 + (12/50)^2} = \sqrt{4/2500 + 144/2500} = \sqrt{148/2500} = \frac{\sqrt{148}}{\sqrt{2500}} \approx \frac{12}{50}$$

$$\therefore B^{e} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{50}{12}\begin{pmatrix} 2/50 \\ -12/50 \end{pmatrix} \right\}$$

Álgebra Matricial
Tarea V | César Aguirre

Continuación Problema #2

$V_1 = (2,-1,4) \quad V_2 = (1,0,2) \quad V_3 = (3,-1,5) \qquad V = \mathbb{R}^3$

Aquí, utilizaremos $\langle u, v \rangle$ usual i.e. $= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ por $V = \mathbb{R}^3$

Procedemos por Gram-Schmidt

$$\Rightarrow \quad u_1 = V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\langle V_2, u_1 \rangle = (1)(2) + (0)(-1) + (2)(4) = 2 + 0 + 8 = 10$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 2^2 + (-1)^2 + 4^2 = 4 + 1 + 16 = 21$$

$$u_2 = V_2 - \frac{\langle V_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_2 = V_2 - \frac{10}{21} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{10}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/21 \\ 0 \\ 42/21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20/21 \\ -10/21 \\ 40/21 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

u_2

$$u_3 = V_3 - \frac{\langle V_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle V_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$\langle V_3, u_1 \rangle = (3)(2) + (-1)(-1) + (5)(4) = 6 + 1 + 20 = 27$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 21$$

$$\langle V_3, u_2 \rangle = (3)(1/21) + (-1)(10/21) + (5)(2/21) = 3/21 - 10/21 + 10/21 = 3/21 = 1/7$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = (1/21)^2 + (10/21)^2 + (2/21)^2 = 1/441 + 100/441 + 4/441 = 105/441$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{27}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{6}{10}\begin{pmatrix} 1/21 \\ 10/21 \\ 2/21 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 63/21 \\ -21/21 \\ 105/21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 54/21 \\ -27/21 \\ 108/21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6/210 \\ 60/210 \\ 12/210 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 90/210 \\ 60/210 \\ -30/210 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6/210 \\ 60/210 \\ 12/210 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 84/210 \\ 0 \\ -42/210 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

u_3

$$\therefore \; B^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para la base ortonormal, encontramos el unitario de u_1, u_2 y u_3

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

$$\boxed{\hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{21}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}1/21\\10/21\\2/21\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}1\\10\\2\end{pmatrix}}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(1/21)^2+(10/21)^2+(2/21)^2} = \sqrt{1/441 + 100/441 + 4/441}$$

$$= \sqrt{105/441} = \frac{\sqrt{105}}{\sqrt{441}} = \frac{\sqrt{105}}{21} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\|u_2\|} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{105}}{21}} = \frac{21}{\sqrt{105}}$$

$$\boxed{\hat{u}_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \sqrt{5}\begin{pmatrix}2/5\\0\\-1/5\end{pmatrix}}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{(2/5)^2+(0)^2+(-1/5)^2} = \sqrt{4/25 + 1/25} = \sqrt{5/25} = \sqrt{1/5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|u_3\|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

$$\therefore B^e = \left\{ \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}1\\10\\2\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

Álgebra Matricial
Tarea V | César Aguirre

Problema #3

Encontrar una solución de mínimos cuadrados de $Ax=b$ mediante factorización QR para:

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

En clase vimos que podemos construir a la matriz Q por medio del proceso de Gram-Schmidt

$\Rightarrow$ tomamos a las columnas de A como los vectores en $X = \{x_1, x_2\}$

Así: $\quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x_2, u_1\rangle = (-1)(2) + (2)(-3) + (-1)(3) = -2-6-3 = -11$$

$$\langle u_1, u_1\rangle = (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 1+4+1 = 6$$

$$u_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$$

$$u_2 = x_2 - \frac{-11}{6}u_1 = x_2 + \frac{11}{6}u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{11}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/6 \\ -18/6 \\ 18/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11/6 \\ 22/6 \\ -11/6 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/6 \\ 7/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora, necesitamos la base ortonormal para que forma a Q

$$\Rightarrow \hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{6}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/6 \\ 7/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(1/6)^2 + (4/6)^2 + (7/6)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{24}{36} + \frac{49}{36}} = \sqrt{74/36} = \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{74}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|u_2\|} = \frac{6}{\sqrt{74}}$$

Por lo tanto, podemos construir R tq Q es la matriz con columnas compuestas por la Base Ortonormal

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{74} \\ 2/\sqrt{6} & 4/\sqrt{74} \\ -1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{74} \end{pmatrix} \quad y \quad Q^t = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{74} & 4/\sqrt{74} & 7/\sqrt{74} \end{pmatrix}$$

$$\therefore R = Q^t A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{74} & 4/\sqrt{74} & 7/\sqrt{74} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} + 4/\sqrt{6} + 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} - 6/\sqrt{6} - 3/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{74} + 8/\sqrt{74} - 7/\sqrt{74} & 2/\sqrt{74} - 12/\sqrt{74} + 21/\sqrt{74} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{6} & -11/\sqrt{6} \\ 0 & 11/\sqrt{74} \end{pmatrix}$$

Finalmente, podemos buscar la sol. por mínimos cuadrados $\hat{x} = R^{-1} Q^t b$

$$R^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 6/\sqrt{6} & -11/\sqrt{6} & 1 & 0 \\ 0 & 11/\sqrt{74} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftarrow f_1 + \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{6}} f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 6/\sqrt{6} & 0 & 1 & \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{6}} \\ 0 & 11/\sqrt{74} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \leftarrow \frac{\sqrt{74}}{11}]{f_1 \leftarrow \frac{\sqrt{6}}{6} f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{74}}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{74}}{11} \end{array}\right)$$

Ahora buscamos:

$$\hat{x} = R^{-1} Q^t b$$

$$\therefore R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{74}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{74}}{11} \end{pmatrix} \quad \therefore \hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{74}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{74}}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{74} & 4/\sqrt{74} & 7/\sqrt{74} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Continuación Problema #3

Álgebra Matricial
Tarea V | C. A.

Inciso (a): final

Ya tenemos $\hat{x} = R^{-1} Q^t b$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{74}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{74}}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{74}} & \frac{4}{\sqrt{74}} & \frac{7}{\sqrt{74}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{\sqrt{74}}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{74}}\right) & \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + \frac{\sqrt{74}}{6}\left(\frac{4}{\sqrt{74}}\right) & -\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{\sqrt{74}}{6}\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right) \\ 0 + \frac{\sqrt{74}}{11}\left(\frac{1}{\sqrt{74}}\right) & 0 + \frac{\sqrt{74}}{11}\left(\frac{4}{\sqrt{74}}\right) & 0 + \frac{\sqrt{74}}{11}\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} & \frac{2}{6} + \frac{4}{6} & \frac{-1}{6} + \frac{7}{6} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 + 2 \\ \frac{4}{11} + \frac{4}{11} + \frac{14}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y después de mucha álgebra :S

$$\therefore \hat{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

∴ Podemos decir que cuando no es posible encontrar una sol. exacta para $Ax = b$, en casos como cuando el sistema está sobredeterminado $\Rightarrow \hat{x}$ es el vector que mejor se ajusta a los datos, en el sentido de mínimos cuadrados.

Álgebra Matricial
Tarea V | César Aguirre

Problema #3 | inciso (b)

Encontrar una solución de mínimos cuadrados de $Ax=b$ mediante fact. QR

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad b=\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Procederemos por Gram-Schmidt: $\left\{ \begin{array}{l} x_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1=x_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$u_2 = x_2 - \frac{\langle x_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1$$

$$\langle x_2,u_1\rangle = (1)(2)+(0)(-2)+(3)(2) = 2+0+6=8$$

$$\langle u_1,u_1\rangle = (2)^2+(-2)^2+(2)^2 = 4+4+4=12$$

$$\frac{8}{12}=\frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot2\cdot2} \to = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = x_2-\frac{2}{3}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 \\ 0 \\ 9/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 \\ 0 \\ 9/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ +4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{u_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$\therefore B^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Encontremos la base ortonormal:

$$\boxed{\Rightarrow \hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(-1/3)^2+(4/3)^2+(5/3)^2} = \sqrt{1/9+16/9+25/9} = \sqrt{42/9} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

$$\boxed{\Rightarrow \hat{u}_2 = \frac{3}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}} \qquad \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \\ 5/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, ya podemos encontrar Q

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{3} & 5/\sqrt{42} \end{pmatrix} \quad y \quad Q^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{42} & 4/\sqrt{42} & 5/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = Q^t A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{42} & 4/\sqrt{42} & 5/\sqrt{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} - 2/\sqrt{3} + 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} + 0 + 3/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{42} - 8/\sqrt{42} + 10/\sqrt{42} & -1/\sqrt{42} + 0 + 15/\sqrt{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} \\ 0 & 14/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Finalmente, hay que construir R^{-1}

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 14/\sqrt{42} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftarrow f_1 - \frac{4\sqrt{42}}{14\sqrt{3}} f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & \frac{-4\sqrt{14}}{14} \\ 0 & \frac{14}{\sqrt{42}} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \leftarrow \frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{14} f_2]{f_1 \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{2} f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4\sqrt{14}\sqrt{3}}{28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{14} \end{array}\right) \quad \therefore R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4\sqrt{14}\sqrt{3}}{14 \cdot 2} \\ 0 & \frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{14} \end{pmatrix}$$

$$R \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4\sqrt{14}\sqrt{3}}{14 \cdot 2} \\ 0 & \frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4\sqrt{14}}{14} + \frac{4\sqrt{14}}{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

$$\therefore \hat{x} = R^{-1} Q^t b$$

Continuación problema #3 (b)

Álgebra Matricial

Tarea V | César Aguirre

Inciso (b) | final

Ya tenemos que $\hat{x} = R^{-1}Q^t b$, con $\hat{x}$ como el vector que mejor se aproxima a la solución de $A\hat{x} = b$.

$$\Rightarrow \hat{x} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4\sqrt{14}\sqrt{3}}{14 \cdot 2} \\ 0 & \frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \left\{ \begin{matrix} \frac{9}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-1}{14} & \frac{4}{14} & \frac{5}{14} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-56}{14} \\ \frac{42}{14} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \hat{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$