Tarea IV | Álgebra
Aguirre Calzadilla
César Miguel

Problema 01:

Considera la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

Comprueba o refuta si:

a) $\lambda_1 = 5$ es un valor propio de A

b) $\lambda_2 = -1$ " " " " "

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es " " " "

Solución |

Para resolver este problema, lo primero que haremos será obtener los eigenvalores de la matriz A. Para ello, no hace falta más que obtener $\det(A - \lambda I)$ e igualarlo a 0 y de esa manera obtendremos los eigenvalores λ_i que cumplan dicha igualdad.

$$\Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -10 & -5 \\ 2 & 14-\lambda & 2 \\ -4 & -8 & 6-\lambda \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 14-\lambda & 2 \\ -8 & 6-\lambda \end{vmatrix} - (-10)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$+ (-5)\begin{vmatrix} 2 & 14-\lambda \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (5-\lambda)\Big((14-\lambda)(6-\lambda) - (-8)(2)\Big) = (5-\lambda)(84 - 14\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 16) = (5-\lambda)(100 - 20\lambda + \lambda^2)$$
$$= \underline{(5-\lambda)(\lambda-10)^2}$$

$$\Rightarrow (-10)\Big((2)(6-\lambda) - (-4)(2)\Big) = (-10)(12 - 2\lambda + 8) = -120 - 80 + 20\lambda = \underline{-(200 - 20\lambda)}$$

$$\Rightarrow (-5)\Big((2)(-8) - (-4)(14-\lambda)\Big) = (-5)(-16 + 56 - 4\lambda) = 80 - 280 + 20\lambda = \underline{-(200 - 20\lambda)}$$

$$\therefore \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(\lambda-10)^2 + (200 - 20\lambda) - (200 - 20\lambda)$$
$$= (5-\lambda)(\lambda-10)^2$$

$$\therefore \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(\lambda-10)^2 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 10 \\ \lambda_3 = 10 \end{cases}$$

Ya de entrada, los valores propios no coinciden con los propuestos. Veamos qué pasa con los eigenvectores:

Para $\lambda_1 = 5$

$$\begin{pmatrix} 5-5 & -10 & -5 \\ 2 & 14-5 & 2 \\ -4 & -8 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 \\ 2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow 2f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftarrow 2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontraremos V_{λ_1} si $A\vec{V}_{\lambda_1} = \vec{0}$

Aquí: $-2x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + 5x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_3 = -2x_2$, $x_1 = -\frac{5}{2}x_2$

$\therefore \vec{V}_{\lambda_1} = x_2 \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 10$

$$\begin{pmatrix} 5-10 & -10 & -5 \\ 2 & 14-10 & 2 \\ -4 & -8 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow \frac{1}{5}f_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \leftarrow -4f_1 + f_3]{f_2 \leftarrow 2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - x_3$

$\therefore \vec{V}_{\lambda_{2,3}} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Si $x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \vec{V}_{\lambda_{2,3}} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\therefore$ los vectores propios tampoco coinciden.

Problema 02:

Calcula los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

a) $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Para (a)

Sea $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ -7 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-5-\lambda)(4-\lambda) - (2)(-7)$

$$\det(B-\lambda I) = (-20+5\lambda-4\lambda+\lambda^2) - (-14) = (\lambda^2+\lambda-20)+14 = \lambda^2+\lambda-6$$
$$= (\lambda+3)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow \det(B-\lambda I) = 0 \iff (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$ con $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$\therefore$ los eigenvalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$

Para $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} -5+3 & 2 \\ -7 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \leftarrow \frac{1}{7}f_2]{f_1 \leftarrow \frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow -f_1+f_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \vec{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -5-2 & 2 \\ -7 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow -f_1+f_2} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore -7x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow 7x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{7}x_2$

$\therefore \vec{V}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 2/7\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

son los eigenvectores de B

Ahora, hay que hacer lo mismo para $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(C - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(C-\lambda I) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(1)\Big) = (2-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$$\Rightarrow 2\begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2\Big((1)(1-\lambda) - (-1)(-1)\Big) = 2\Big((1-\lambda)-1\Big) = -2\lambda$$

$$\Rightarrow (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\Big((1)(1) - (3-\lambda)(-1)\Big) = (-2)\Big(1 + 3 - \lambda\Big) = -2(4-\lambda)$$

$$\therefore \det(C-\lambda I) = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 + 2\lambda - 2(4-\lambda) = 2\lambda^2 - 8\lambda + 8 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda - 8$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(-\lambda + 6\lambda - 8) = \lambda\left[-(\lambda-2)(\lambda-4)\right]$$

$$\Rightarrow \det(C-\lambda I) = 0 \iff \lambda\left[-(\lambda-2)(\lambda-4)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad y \quad \lambda_2 = 2 \quad y \quad \lambda_3 = 4$$

Continuación Problema 02

Sigamos encontrando los eigenvectores de $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ya sabemos que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_3 = 4$

$\Rightarrow$ Pa' $\lambda_1 = 0$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftarrow \frac{-2}{4} f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow \frac{1}{4} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$\therefore\ x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$ y $\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 2$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow \frac{1}{2} f_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \leftarrow -f_1 + f_3]{f_2 \leftarrow -f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x_1 = 0$ y $x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$

$\therefore\ \vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_3 = 4$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow \frac{1}{2} f_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \leftarrow -f_1 + f_3]{f_2 \leftarrow f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0$ con $x_3 = 0$ $\Rightarrow \vec{v}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ son los eigenvectores de C

Problema 03

Diagonalizar los siguientes matrices:

a) $D = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

b) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Antes que nada, hay que recordar que, para diagonalizar una matriz, necesitamos cumplir con algunos requicitos.

1. Debemos trabajar con matrices cuadradas
2. La matriz debe tener un conjunto completo de vectores propios l. i.. Esto sucederá si el # de val. prop. distintos es igual a la dimensión del espacio
3. Para cada λ_i, la multiplicidad algebráica (# veces que en λ es raíz del polinomio característico) debe ser igual a la multiplicidad geométrica (dim. del espacio propio correspondiente).

Con estas condiciones se puede cumplir que $A = PDP^{-1}$ con D una matriz diagonal que contiene los valores propios A, mientras que P es una matriz cuyas columnas son los vect. propios de A.

$\boxed{\text{Entonces, para (a)}}$

$D = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ => Hay que buscar los eigenvalores

$$\Rightarrow \det(D - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(-4-\lambda) - (-1)(0)$$

$$= (-4-\lambda)^2 - 0 \qquad \therefore \det(D - \lambda I) = 0 \iff (-4-\lambda)^2 = 0$$

$$\iff (-4-\lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda = -4$$

Desde aquí podemos previsualizar que no se podrá diagonalizar D. Pero veamos qué pasa con los eigenvectores:

Sea $\lambda = -4$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} -4-(-4) & -1 \\ 0-(-4) & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{-x_2 = 0}$ y $4x_1 - 4x_2 = 0$
$\Rightarrow 4x_1 = 0$
$\underline{x_1 = 0}$

$\therefore$ No tenemos un vector no nulo t.q $D\vec{v}_\lambda = \vec{0}$

$\therefore$ No hay condiciones para diagonalizar la matriz

Inciso (b)

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Comenzaremos encontrando los eigenvalores

$$\det(\varepsilon - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)(1)\Big) - (-1)\Big(3(-1-\lambda) - (-1)(2)\Big) + (4)\Big((3)(1) - (2-\lambda)(2)\Big)$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) - (3\lambda + 1) + 12 - 8(2-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$= -(\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

$\therefore$ $\underline{\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 3}$ $\Big| \rightarrow$ $\underline{\text{eigenvalores}}$

Ahora, toca encontrar los vectores propios

$\underline{|\text{ Para } \lambda_1 = 1 \,|}$

$$\varepsilon - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow -\frac{2}{3} f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftarrow \frac{1}{3} f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix}$$

$\therefore$ $x_2 = 4x_3$
$x_1 = -x_3$

$$\underline{\underline{\vec{v}_{\lambda_1} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Continuación P03 | TIV

Continuación inciso (b) prob. 03:

Para $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & -1 & 4 \\ 3 & 2+2 & -1 \\ 2 & 1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow -f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftarrow f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow 4f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_2 \end{matrix} \quad \therefore \vec{V}_{\lambda_2} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_1 + f_3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow 4f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow -f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{matrix}$$

$$\therefore \vec{V}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, ya podemos construir a la matriz P, utilizando los eigenvectores:

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & 1 & -2 \end{matrix} \end{array} \qquad \text{Para la diagonal } D \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y Ahora Podría obtener la inversa de P

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&4&1\\1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\2&4&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{f_3\leftarrow f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\2&4&1&0&1&0\\2&0&0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\2&4&1&0&1&0\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{f_1\leftarrow -f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&-1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\2&4&1&0&1&0\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccccc}1&-1&-1&1&0&0\\-1&0&0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\hline 0&-1&-1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}$$

$$\xrightarrow{f_2\leftarrow -2f_3+f_2}$$

$$\begin{array}{cccccc}-2&0&0&-1&0&-1\\2&4&1&0&1&0\\\hline 0&4&1&-1&1&-1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&-1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&4&1&-1&1&-1\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{f_2\leftarrow 4f_1+f_2}$$

$$\begin{array}{cccccc}0&-4&-4&-2&0&2\\0&4&1&-1&1&-1\\\hline 0&0&-3&-3&1&-3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&-1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&-3&-3&1&-3\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&-1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&1&-\frac{1}{3}&1\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{3}&\frac{3}{2}\\0&0&1&1&-\frac{1}{3}&1\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{3}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&1&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccccc}0&0&1&1&-\frac{1}{3}&1\\0&-1&-1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\hline 0&-1&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{3}&\frac{3}{2}\end{array}$$

Bueno, según una calculadora: $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}$

$\therefore \quad \mathcal{E}=PDP^{-1}$ con $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&4&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

Continuación problema 03:

c) $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Lo primero que haremos, será obtener los valores propios de F

$$\Rightarrow \det(F-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} 2 & 0-\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)\Big((0-\lambda)(3-\lambda)-(2)(2)\Big) = (3-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda-4\right) = (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow (2)\Big((2)(3-\lambda)-(2)(4)\Big) = (2)\left(6-2\lambda-8\right) = (2)\left(-2-2\lambda\right) = -4(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow (4)\Big((2)(2)-(0-\lambda)(4)\Big) = (4)\left((4)+4\lambda\right) = 16(\lambda+1)$$

$$\therefore \det(F-\lambda I) = (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + 4(\lambda+1) + 16(\lambda+1)$$
$$= (\lambda+1)\left[(3-\lambda)(\lambda-4)+4+16\right] = (\lambda+1)\left[(3-\lambda)(\lambda-4)+20\right]$$
$$= (\lambda+1)\left[-\lambda^2+7\lambda+8\right] = (\lambda+1)\left[-(\lambda+1)(\lambda-8)\right]$$

$$\Rightarrow \det(F-\lambda I)=0 \iff -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-8)=0$$
$$\iff \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=8$$

Ahora, busquemos los eigenvectores:

$\boxed{\text{Para } \lambda_1=-1=\lambda_2}$

$$F-\lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \leftarrow -2f_2+f_3]{f_1 \leftarrow -2f_2+f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0$ pero x_1 y x_3 son libres

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x_2 = -x_1 - x_3 \Rightarrow x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\lambda_{1,2}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1-2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left\{ x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para $\lambda_3 = 8$

$$F - \lambda I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow -f_3 + f_1} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9} f_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftarrow 2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow 4f_1 + f_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} f_3]{\frac{1}{8} f_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftarrow f_2 + f_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{matrix} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = +\frac{1}{2}x_3 \end{matrix}$$

$$\therefore \vec{V}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ +1/2\, x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ +1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ los vect. propios de F son $\vec{V}_{\lambda_{1,2}} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\vec{V}_{\lambda_3} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ +1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

y los val. prop son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 8$

Entonces:

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ +1/2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & 2/9 & 4/9 \\ 5/9 & -2/9 & -4/9 \\ -4/9 & -2/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore F = PDP^{-1}}$$

Álgebra Matricial
Tarea IV Aguirre César

Problema 04:

Determinar la evolución del sistema dinámico $X_{k+1} = G X_k$ cuando $k \to \infty$

$$G = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ 0 & 16/25 \end{pmatrix}$$

Lo primero que haremos será obtener los valores propios del sistema

Como está diagonalizado $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{5}$ y $\lambda_2 = \frac{16}{25}$

Esto mismo provoca que los eigenvectores sean perpendiculares, si hacemos el producto punto (prod. interno), de los vectores que dan forma a la matriz notaremos que su resultado es cero y esto ya deja entrever que $\vec{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{V}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sin embargo, veamos esto manualmente.

Para $\lambda_1 = \frac{4}{5}$

$$G - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} - \frac{20}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{25} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \text{ es libre} \\ \text{y } x_2 = 0 \end{matrix} \quad \therefore \vec{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{\lambda_1} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = \frac{16}{25}$

$$G - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} - \frac{16}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 \text{ es libre} \\ \text{y } x_1 = 0 \end{matrix} \quad \therefore \vec{V}_{\lambda_2} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para G_k podemos expresar $G_k = C_1 \lambda_1^k \vec{V}_{\lambda_1} + C_2 \lambda_2^k \vec{V}_{\lambda_2}$

tenemos $|\lambda_1|$ y $|\lambda_2| > 0$, en general $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, pero $\lambda_1 = 0.8$ y $\lambda_2 = 0.64$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 1$ y cuando $k \to \infty \Rightarrow$ el sistema tiende a cero en cada caso $\therefore$ se extinguirá

$$\lim_{k \to \infty} G_k = C_1 \cancelto{0}{(0.8)^\infty} U_{\lambda_1} + C_2 \cancelto{0}{(0.64)^\infty} \vec{V}_{\lambda_2} = 0$$