Problema #1: Determinar si las siguientes matrices son definidas positivas, definidas negativas, indefinidas, etc. Justifica tu respuesta.

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

Para poder encontrar si cada caso a resolver es una matriz def. positiva, def. negativa, indefinida o cualquier otra variación, debemos recordar la siguiente proposición y sus subsecuentes consecuencias:

Proposición: Si $Q(x) = x^t A x$ es una forma cuadrática, con A matriz simétrica, $\Rightarrow \exists$ una matriz ortogonal P tq $A = PDP^t$. Haciendo el cambio de variable $x = Py$ por $y = P^{-1}x$ en $Q(x)$

$$\Rightarrow Q(x) = x^t A x = (Py)^t A (Py) = y^t P^t A P y = y^t (P^t A P) y$$

La nueva matriz de la forma cuadrática es $P^t A P$. Si P diagonaliza ortogonalmente a $A \Rightarrow P^t = P^{-1}$ $\therefore P^t A P = P^{-1} A P = D$. Así vemos entonces que $y^t D y$ toma los mismos valores que $Q(x)$ sin tener prod. cruzados.

Definición: Una forma cuadrática Q es:

- ·) Def. positiva si $Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- ··) Def. $\neg$ negativa si $Q(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$
- ∴) Def. negativo si $Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$
- ::) Def. $\neg$ positiva si $Q(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$
- ⁙) Indefinida si no es $\neg$ positiva ni $\neg$ negativa

Definición: Una matriz simétrica A es positiva def., negativa def., $\neg$ neg. def., $\neg$ pos. def o indefinida si su correspondiente forma cuadrática lo es

Ahora, bien, los vals. prop. determinan la naturaleza de la matriz:

Si todo λ_i con $i \in \mathbb{N} > 0 \Rightarrow$ Def. positiva
Si " " $< 0 \Rightarrow$ Def. negativa
Si hay λ's > 0 y λ's < 0 $\Rightarrow$ Indefinida
Si hay algunos $\lambda_i = 0$ pero todos los demás $> 0 \Rightarrow \neg$ negativa
" " " " $< 0 \Rightarrow \neg$ positiva

Para $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}}_{\text{Simétrica}} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 12-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = ?$

$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(12-\lambda) - (-3)(-3) = 48 - 4\lambda - 12\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 16\lambda + 39$

$= (\lambda - 13)(\lambda - 3)$

$\therefore \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda_1 = 13$ y $\lambda_2 = 3 \therefore \lambda_1, \lambda_2 > 0 \therefore$ $\boxed{A \text{ es def. positiva}}$

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(7-\lambda) - (4)(4)$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 7 - \lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1)$

$\therefore \det(A - \lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = -1 \therefore \lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$

$\therefore$ $\boxed{A \text{ es indefinida}}$

Encontrar una descomposición por valores singulares de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = U \Sigma V^t$$

Para la descomposición SVD, lo primero que debemos hacer es encontrar $A^t A$, para así poder construir y obtener los eigenvalores y eigenvectores, de tal modo que podemos revelar los valores singulares σ_i para construir Σ

$$\Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} = \bar{A}$$

Ahora, hay que obtener los eigenvals y eigenvecs. de $\bar{A}$

$$\Rightarrow \det(\bar{A} - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 13-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(13-\lambda) - (6)(6) = 52 - 4\lambda - 13\lambda - 36 + \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 - 17\lambda + 16 = (\lambda - 16)(\lambda - 1) \quad \therefore \boxed{\lambda_1 = 16 \quad \lambda_2 = 1}$$

Ahora, hay que buscar los eigenvecs.

$\boxed{\text{Para } \lambda_1 = 16}$

$$\bar{A} - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4-16 & 6 \\ 6 & 13-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-12 \quad 6 \\ 12 \quad -6}]{f_1 \leftarrow f_1 + 2f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftarrow \frac{1}{3} f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \qquad \therefore \vec{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Para } \lambda_2 = 1}$

$$\bar{A} - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 4-1 & 6 \\ 6 & 13-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftarrow f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 \qquad \therefore \vec{V}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ya con ello podemos obtener los vals. singulares tq $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \ \forall\, i \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{16} = 4 \qquad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$$

La matriz Σ se construye a partir de la matriz $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Para la matriz V, hay que utilizar la normalización de nuestros vectores propios

$$\Rightarrow \vec{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{V}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_{\lambda_1} = \frac{1}{\|V_{\lambda_1}\|} V_{\lambda_1} \qquad \hat{U}_{\lambda_2} = \frac{1}{\|V_{\lambda_2}\|} V_{\lambda_2}$$

Sabemos que $\|V_{\lambda_2}\| = \sqrt{(V_{\lambda_2}, V_{\lambda_2})} = \sqrt{(1)^2+(2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = \|V_{\lambda_2}\|$

$$\therefore \hat{\vec{V}}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \hat{V}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Podemos construir V

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \cdot \quad V^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Falta calcular U, sabemos lo siguiente: $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 + \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Queremos $A = U \Sigma V^t$

$$\Rightarrow U\Sigma = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{5} + 0 & 0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} + 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$y \quad U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} + \frac{2}{5} & \frac{16}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5} & \frac{8}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{5} & \frac{15}{5} \\ 0 & \frac{10}{5} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A}$$

Encontrar una descomposición SVD para $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A = U \Sigma V^t$

$\Rightarrow$ Lo primero es encontrar $A^t A$ para poder dar con los eigenvals. y eigenvecs. de $A^t A$ y así construir Σ y V

$$A^t = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+36+36 & -3-12-12 \\ -3-12-12 & 1+4+4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^t A = \begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix} = \bar{A}$$ $\therefore$ Buscamos ahora $\det(\bar{A} - \lambda I)$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 81-\lambda & -27 \\ -27 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (81-\lambda)(9-\lambda) - (-27)(-27) = 729 - 81\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 729$$

$$= \lambda^2 - 90\lambda = \lambda(\lambda - 90) \quad \therefore \boxed{\lambda_1 = 90 \quad y \quad \lambda_2 = 0}$$

Buscamos los eigenvect.:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \\ \sigma_2 = \sqrt{0} = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Para } \lambda_1 = 90}$

$$\begin{pmatrix} 81-90 & -27 \\ -27 & 9-90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} -9 & -27 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow \frac{-1}{9} F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3x_2 \quad \therefore \vec{V_{\lambda_1}} = \begin{pmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Para } \lambda_2 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 3F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -27 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{1}{9} F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore -3x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1 \quad \therefore \vec{V_{\lambda_2}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

De aquí, podemos de una vez normalizar cada vector propio:

$\hat{V}_{\lambda_1} = \frac{1}{\|V_{\lambda_1}\|} V_{\lambda_1}$ y $\hat{V}_{\lambda_2} = \frac{1}{\|V_{\lambda_2}\|} V_{\lambda_2}$ Además $\|V_{\lambda_1}\| = \|V_{\lambda_2}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \hat{V}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\hat{V}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Con σ_1 y σ_2, así como $\hat{V}_{\lambda_1}$ y $\hat{V}_{\lambda_2}$, ya podemos construir V y Σ

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}} \quad \boxed{V^t = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}}$$

Ahora, para construir U, necesitamos recurrir a $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, queremos una matriz $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ pues Σ es 3x2 y haremos $U\Sigma$ tq $U_{3x3}\Sigma_{3x2}V^t_{2x2}$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 9/\sqrt{10} + 1/\sqrt{10} \\ -18/\sqrt{10} - 2/\sqrt{10} \\ -18/\sqrt{10} - 2/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10/\sqrt{10} \\ -20/\sqrt{10} \\ -20/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{10}{3\cdot 10} \\ \frac{-20}{3\cdot 10} \\ \frac{-20}{3\cdot 10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Nos hacen falta 2; u_2 y u_3, para poder proceder

$\Rightarrow$ Sea $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_3 = 0$ y $x_1 = 2x_3$ $\therefore u_2 = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0$ y $x_1 = 2x_2$ $\therefore u_3 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ u_1 y u_2 son ortogonales a u_1 ahora hay que normalizarlos

$$\Rightarrow \|u_2\| = \|u_3\| = \sqrt{\langle u_{2,3}, u_{2,3} \rangle} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}}$$

$\therefore A = U\Sigma V^t$

Problema #3:

Encontrar la inversa de Moore-Penrose de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este problema, debemos recordar la definición de la Inversa-Moore-Penrose:

Lema: Sea $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$, entonces:

$A^* :=$ la transpuesta conjugada ($\in \mathbb{R}$ solo A^t)

(a) $A^* = A^* A A^\dagger = A^\dagger A A^*$. En consecuencia, si rango$(A) = n$ (columnas) $\Rightarrow A^\dagger = (A^* A)^{-1} A^*$ y si rango$(A) = m$ (filas) $\Rightarrow A^\dagger = A^*(A^* A)^{-1}$

(b) $\operatorname{Im}(I - AA^\dagger) = [\operatorname{Im}(A)]^\perp$ y $\operatorname{Nul}(AA^\dagger) = \operatorname{Nul}(A^\dagger)$

(c) $\operatorname{Im}(A^\dagger) = \operatorname{Im}(A^*) \Rightarrow \rho(A^\dagger) = \rho(A)$

(d) $\operatorname{Nul}(A^\dagger) = \operatorname{Nul}(A^*)$

$\Rightarrow$ Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ es $A_{3\times 2} \therefore r(A) = 2$ (pues solo tenemos 2 filas l.i.) columnas

$\Rightarrow r(A) = n = 2 \therefore A^\dagger = (A^* A)^{-1} A^*$

Así, en nuestro caso estamos trabajando $\in \mathbb{R} \Rightarrow A^* = A^t$

$$\Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para proseguir con la búsqueda de la M-P, necesitamos $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow (A^* A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema #4: Encontrar la solución de mínimos cuadrados de $Ax=b$ a través de la inversa de Moore-Penrose.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$\hookrightarrow 2$

Para resolver este problema, hay que recordar que si consideramos $Ax=b$ y sea $\boxed{\hat{x} = A^{\dagger} b} \Rightarrow A\hat{x} = \underbrace{U_r U_r^t}_{U^*} b$

Con U^* una proyección ortogonal de b sobre $C(A)$

$\therefore$ $\hat{x}$:= una sol. de mínimos cuadrados de $Ax=b$

$\therefore$ Lo que debemos hacer es buscar $A^{\dagger}$:= (la pseudoinversa Moore-Penrose) y multiplicar $A^{\dagger} \cdot b$ tq $\hat{x} = A^{\dagger} \cdot b$ (una sol. por mínimo cuadrado para el sist. $Ax=b$)

En otras palabras, queremos una sol. que minimice la norma $\|Ax-b\|^2$

Tenemos una matriz $A_{4\times 2}$ con $r(A)=2$ pues si desarrollamos por operaciones elementales nos queda que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r(A)=2 \\ r(A)=n \end{matrix} \quad \therefore \quad A^{\dagger} = (A^t A)^{-1} A^t \quad (\text{estamos en } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+0+4 & -2-2+0+10 \\ -2-2+10 & 4+4+9+25 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}$$