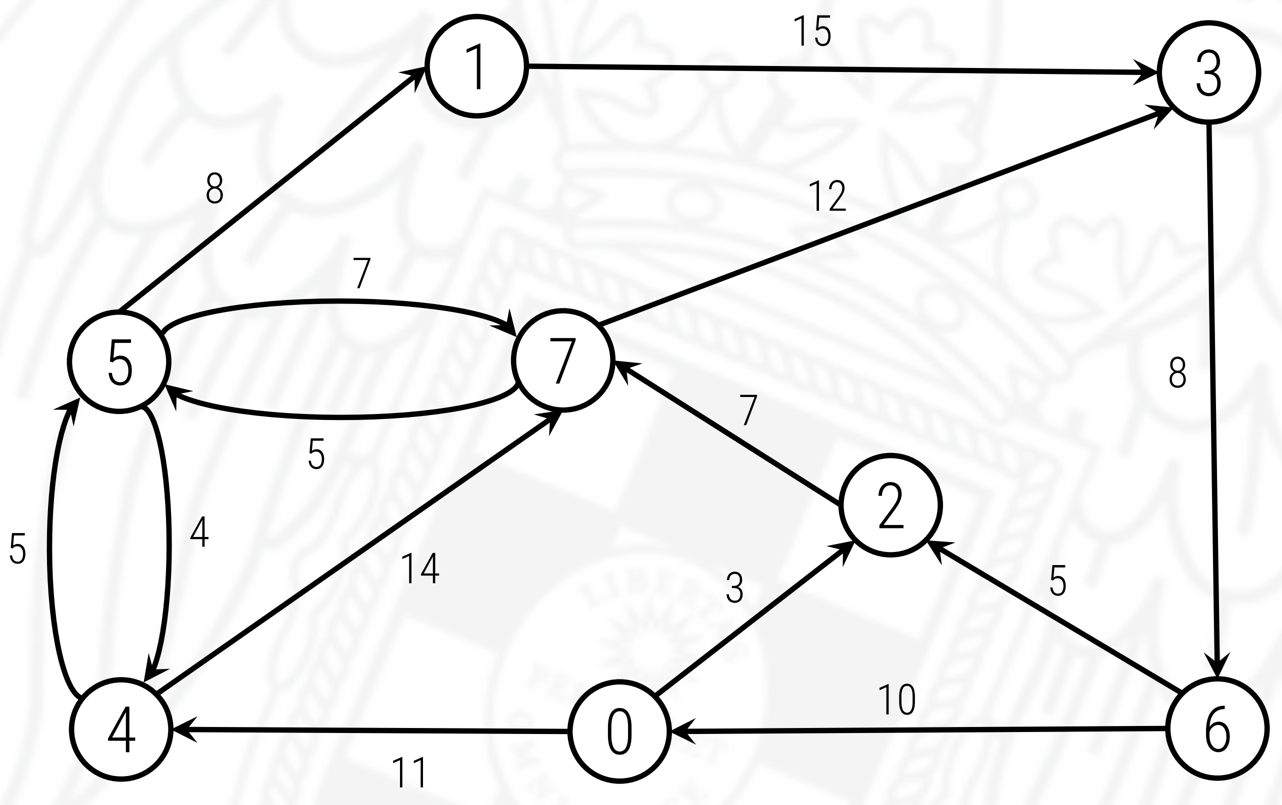
CAMINOS MÍNIMOS

ALBERTO VERDEJO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

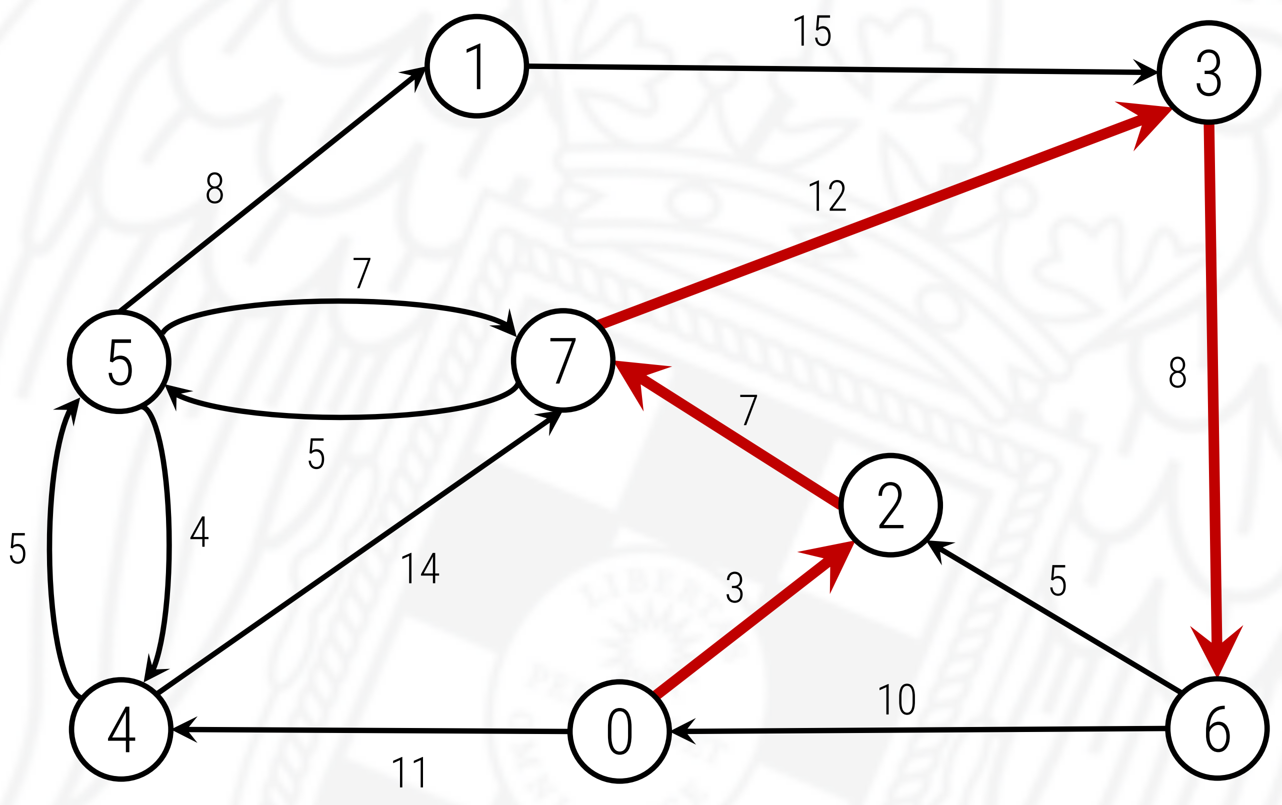
Caminos mínimos en un digrafo

- Dado un digrafo valorado, encontrar el camino mínimo de *s* a *t*.

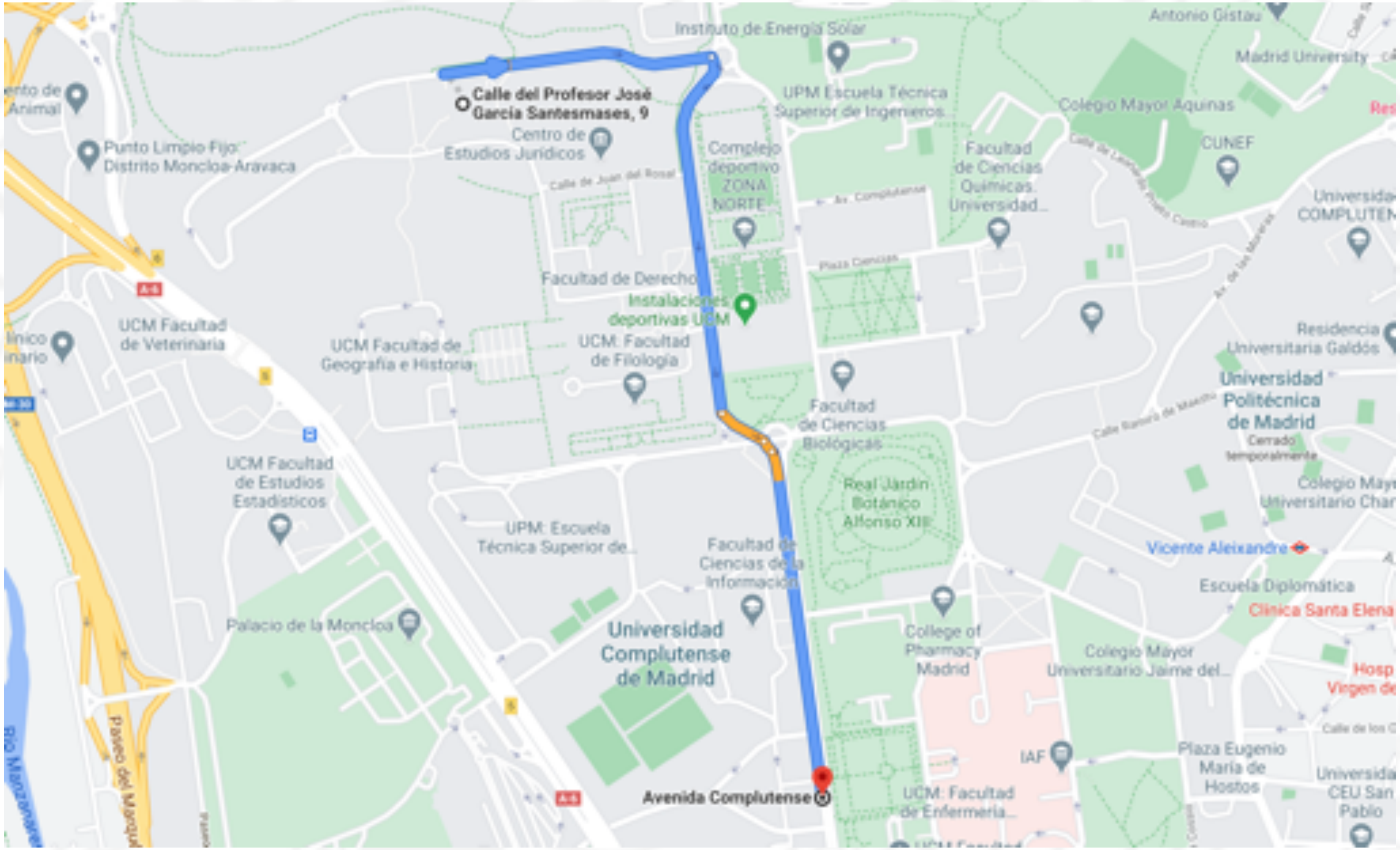


Caminos mínimos en un digrafo

- Dado un digrafo valorado, encontrar el camino mínimo de *s* a *t*.



Google Maps


Instituto de Energía Solar
Antonio Gistau
Madrid University
Calle del Profesor José García Santesmases, 9
Centro de Estudios Jurídicos
UPM Escuela Técnica Superior de Ingenieros
Colegio Mayor Aquinas
CUNEF
Punto Limpio Fijo: Distrito Moncloa-Aravaca
Complejo deportivo ZONA NORTE
Facultad de Ciencias Químicas. Universidad...
Facultad de Derecho
Instalaciones deportivas UCM
UCM Facultad de Veterinaria
UCM Facultad de Geografía e Historia
UCM: Facultad de Filología
Residencia Universitaria Galdós
Universidad Politécnica de Madrid
Cerrado temporalmente
Facultad de Ciencias Biológicas
Real Jardín Botánico Alfonso XIII
UCM Facultad de Estudios Estadísticos
UPM: Escuela Técnica Superior de...
Facultad de Ciencias de la Información
Vicente Aleixandre
Escuela Diplomática
Clínica Santa Elena
Palacio de la Moncloa
Universidad Complutense de Madrid
College of Pharmacy Madrid
Colegio Mayor Universitario Jaime del...
IAF
Plaza Eugenio María de Hostos
Avenida Complutense
UCM: Facultad de Enfermería
Río Manzanares

Variantes del problema

¿Entre qué vértices?

- Origen único: desde un vértice s a todos los demás
- Destino único: de cualquier vértice a un vértice t
- De punto a punto: de un vértice s a otro t
- Entre cualquier par de vértices

Restricciones sobre los pesos

- Pesos no negativos
- Pesos euclídeos
- Pesos arbitrarios

Presencia de ciclos

- Con ciclos dirigidos
- Sin ciclos dirigidos
- Sin ciclos de coste negativo

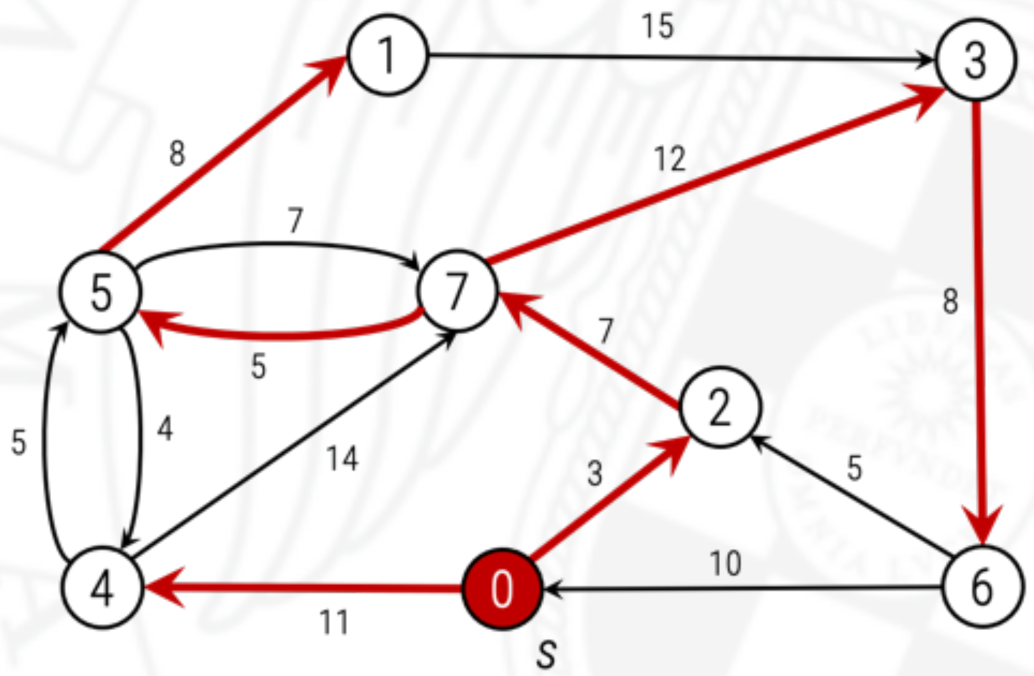
Caminos mínimos desde un origen único

- Caminos mínimos desde un vértice `origen` a todos los demás.

```
template <typename Valor>
class CaminosMinimos {
public:
   CaminosMinimos(DigrafoValorado<Valor> const& g, int origen);
   Valor distancia(int v) const;
   Camino<Valor> camino(int v) const;
};
```

Caminos mínimos desde un origen único

- Los caminos mínimos forman un árbol de caminos mínimos.
- Se pueden representar todos los caminos con dos vectores:
  - `dist[v]` es la longitud del camino más corto desde el origen a *v*
  - `ult[v]` es la última arista del camino más corto desde el origen a *v*

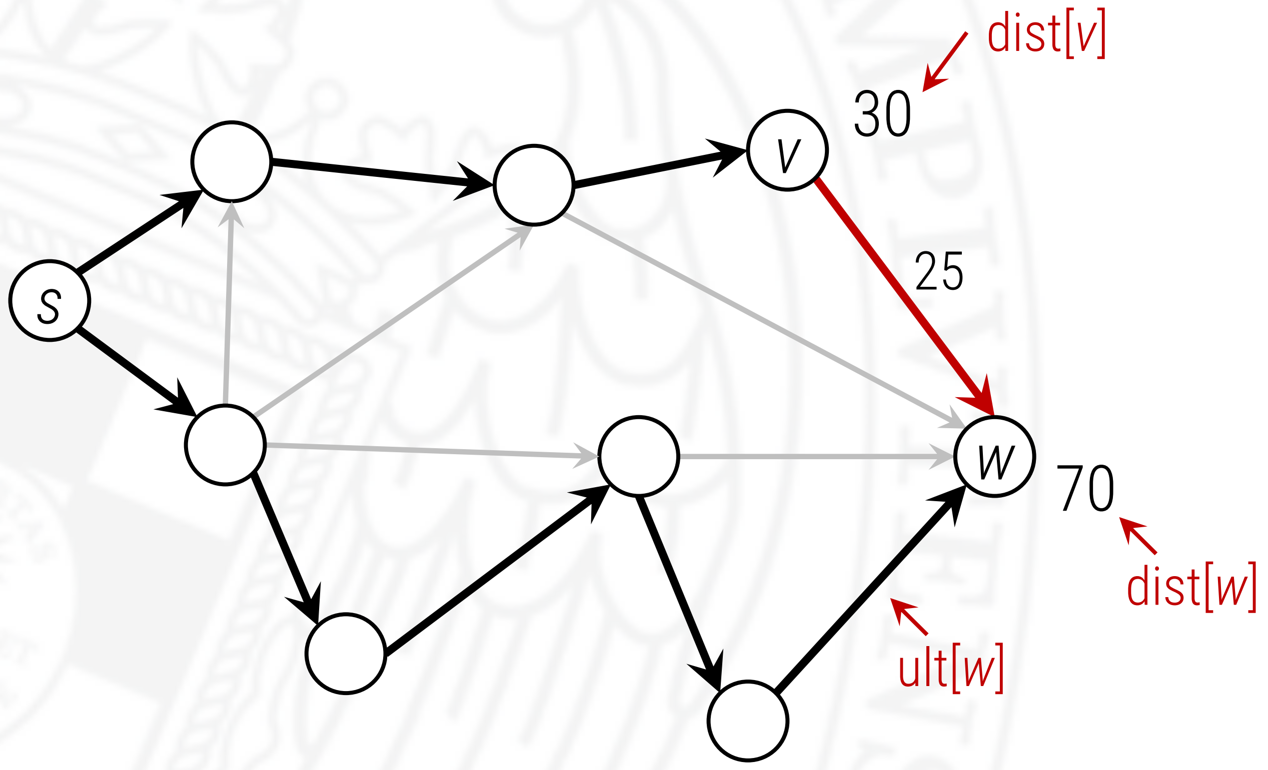


v	`dist[]`	`ult[]`
0	0	–
1	23	5 → 1
2	3	0 → 2
3	22	7 → 3
4	11	0 → 4
5	15	7 → 5
6	30	3 → 6
7	10	2 → 7

Relajación de aristas

- `dist[v]` es la longitud del camino más corto *conocido* de *s* a *v*
- `dist[w]` es la longitud del camino más corto *conocido* de *s* a *w*
- `ult[w]` es la última arista del camino más corto *conocido* de *s* a *w*

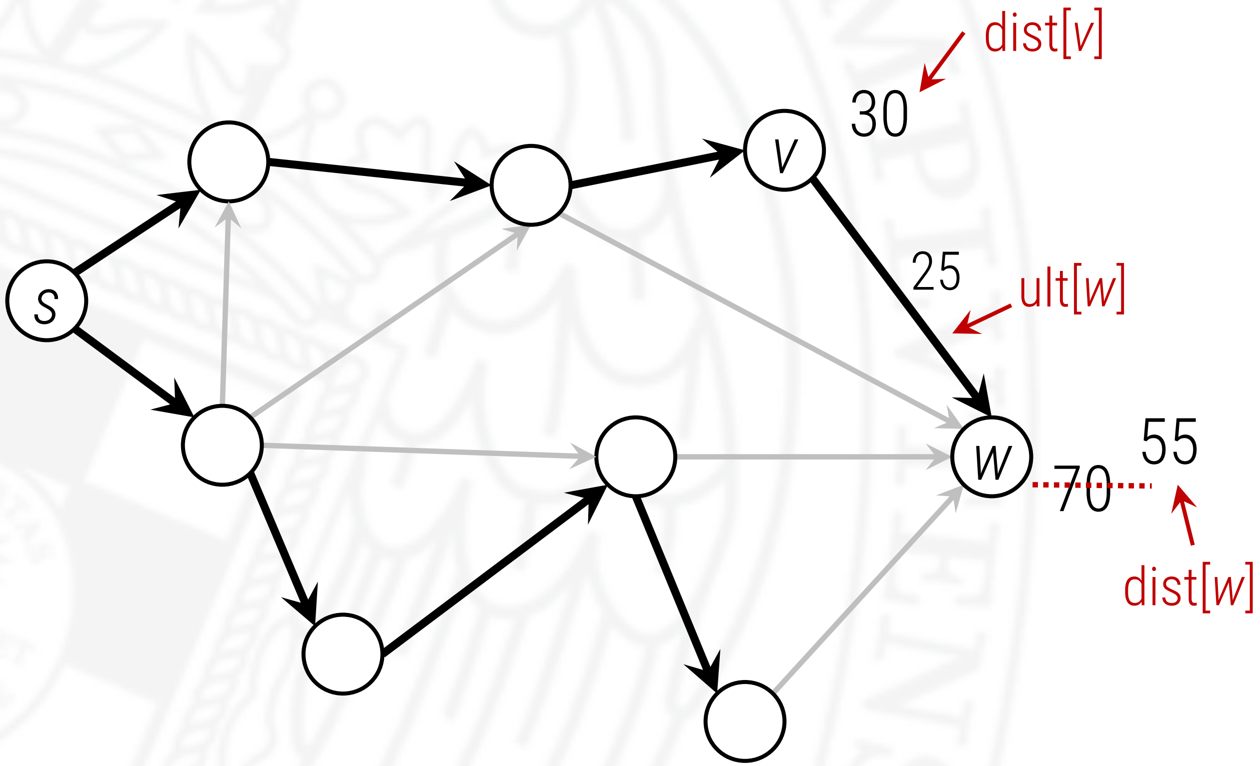
- Si la arista $v \rightarrow w$ proporciona un camino más corto hasta *w* a través de *v*, se actualizan tanto `dist[w]` como `ult[w]`



Relajación de aristas

- `dist[v]` es la longitud del camino más corto *conocido* de *s* a *v*
- `dist[w]` es la longitud del camino más corto *conocido* de *s* a *w*
- `ult[w]` es la última arista del camino más corto *conocido* de *s* a *w*

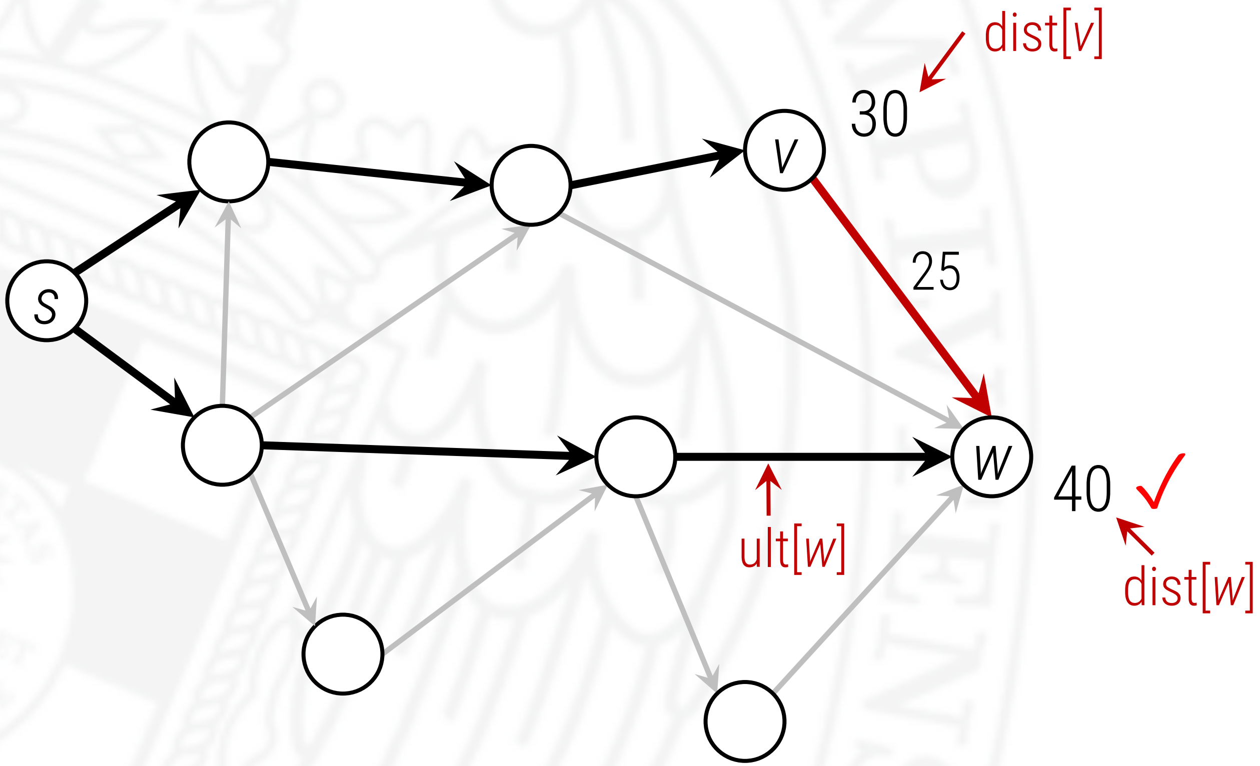
- Si la arista $v \to w$ proporciona un camino más corto hasta *w* a través de *v*, se actualizan tanto `dist[w]` como `ult[w]`



Relajación de aristas

- `dist[v]` es la longitud del camino más corto *conocido* de s a v
- `dist[w]` es la longitud del camino más corto *conocido* de s a w
- `ult[w]` es la última arista del camino más corto *conocido* de s a w

- Si la arista $v \to w$ proporciona un camino más corto hasta w a través de v, se actualizan tanto `dist[w]` como `ult[w]`



Relajación de aristas

- `dist[v]` es la longitud del camino más corto *conocido* de *s* a *v*
- `dist[w]` es la longitud del camino más corto *conocido* de *s* a *w*
- `ult[w]` es la última arista del camino más corto *conocido* de *s* a *w*
- Si la arista $v \longrightarrow w$ proporciona un camino más corto hasta *w* a través de *v*, se actualizan tanto `dist[w]` como `ult[w]`

```
void relajar(AristaDirigida<Valor> a) {
    int v = a.desde(), w = a.hasta();
    if (dist[w] > dist[v] + a.valor()) {
        dist[w] = dist[v] + a.valor();
        ult[w] = a;
    }
}
```

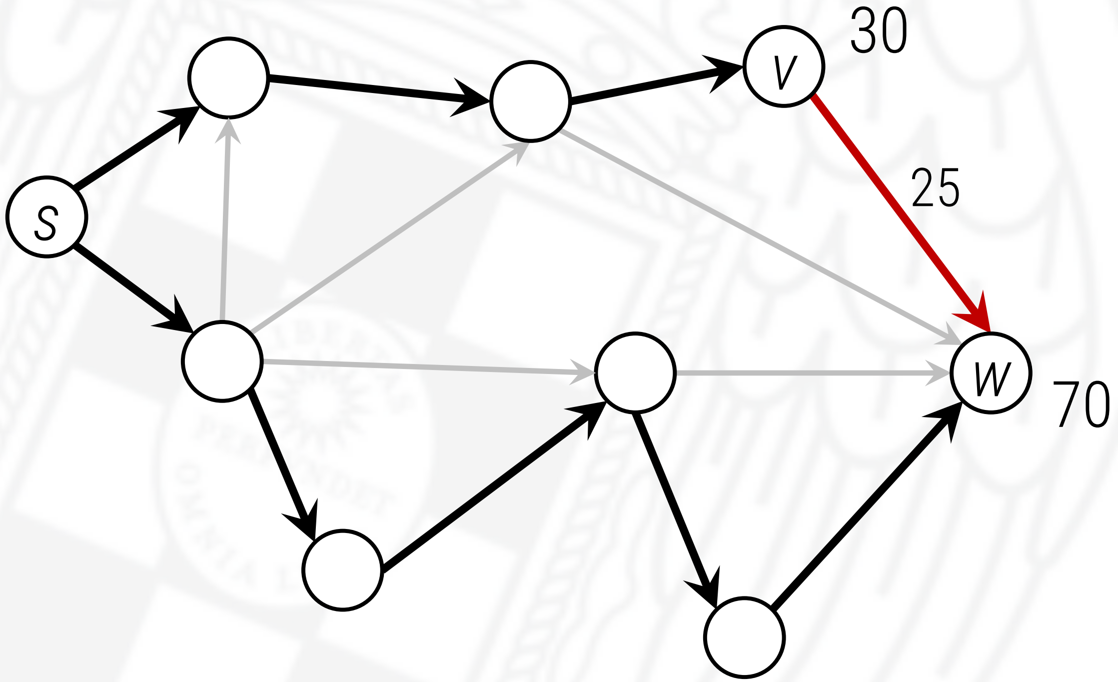
Condiciones de optimalidad

- Sea G un digrafo valorado. `dist[]` contiene las distancias de los caminos más cortos desde s al resto de vértices si y solo si
  - `dist[s]` = 0
  - Para todo v, `dist[v]` es la longitud de algún camino de s a v
  - Para toda arista $v \xrightarrow{a} w$, `dist[w] ≤ dist[v] + a.valor()`

Condiciones de optimalidad. Demostración

$\Longrightarrow$ (necesarias)

- Supongamos `dist[w] > dist[v] + a.valor()` para alguna arista $v \xrightarrow{a} w$
- Entonces a nos daría un camino de s a w (a través de v) de longitud menor que `dist[w]`



Condiciones de optimalidad. Demostración

$\Longleftarrow$ (suficientes)

- Supongamos que $s \xrightarrow{a_1} v_1 \xrightarrow{a_2} v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_{k-1} \xrightarrow{a_k} w$ es un camino más corto de s a w
- Entonces, $\texttt{dist}[v_1] \leq \texttt{dist}[s] + a_1\texttt{.valor()}$

$$\texttt{dist}[v_2] \leq \texttt{dist}[v_1] + a_2\texttt{.valor()}$$

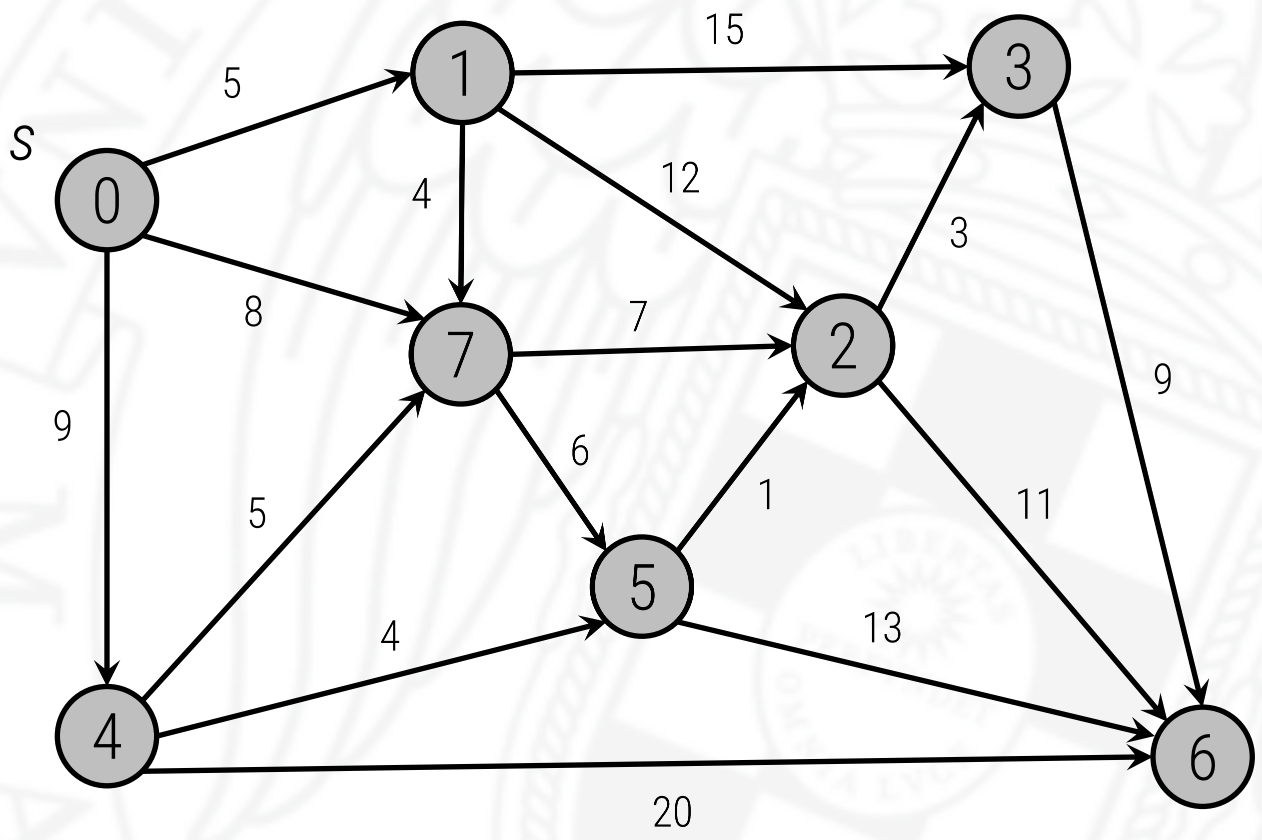
$$\ldots$$

$$\texttt{dist}[w] \leq \texttt{dist}[v_{k-1}] + a_k\texttt{.valor()}$$

$$\texttt{dist}[w] \leq \underbrace{a_1\texttt{.valor()} + a_2\texttt{.valor()} + \ldots + a_k\texttt{.valor()}}_{\text{longitud del camino más corto de } s \text{ a } w}$$

Algoritmo de Dijkstra

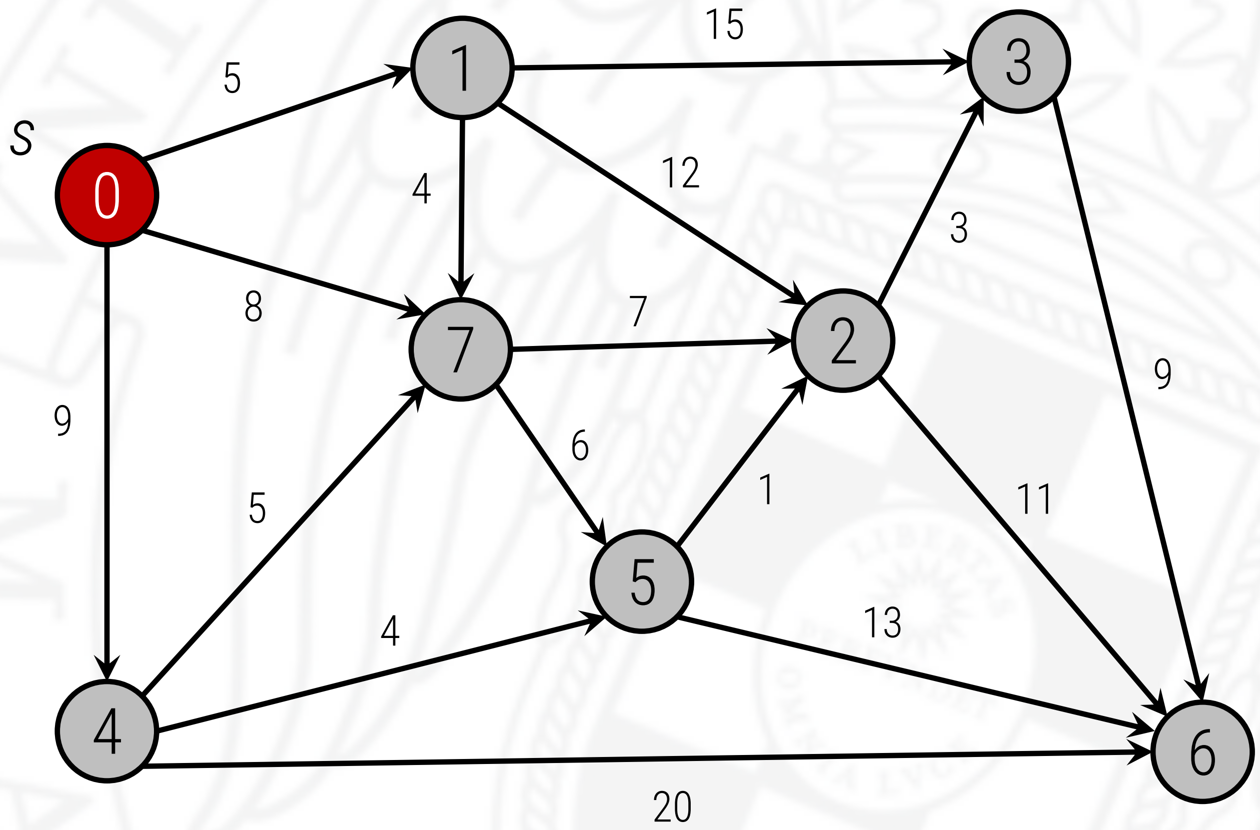
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Algoritmo de Dijkstra

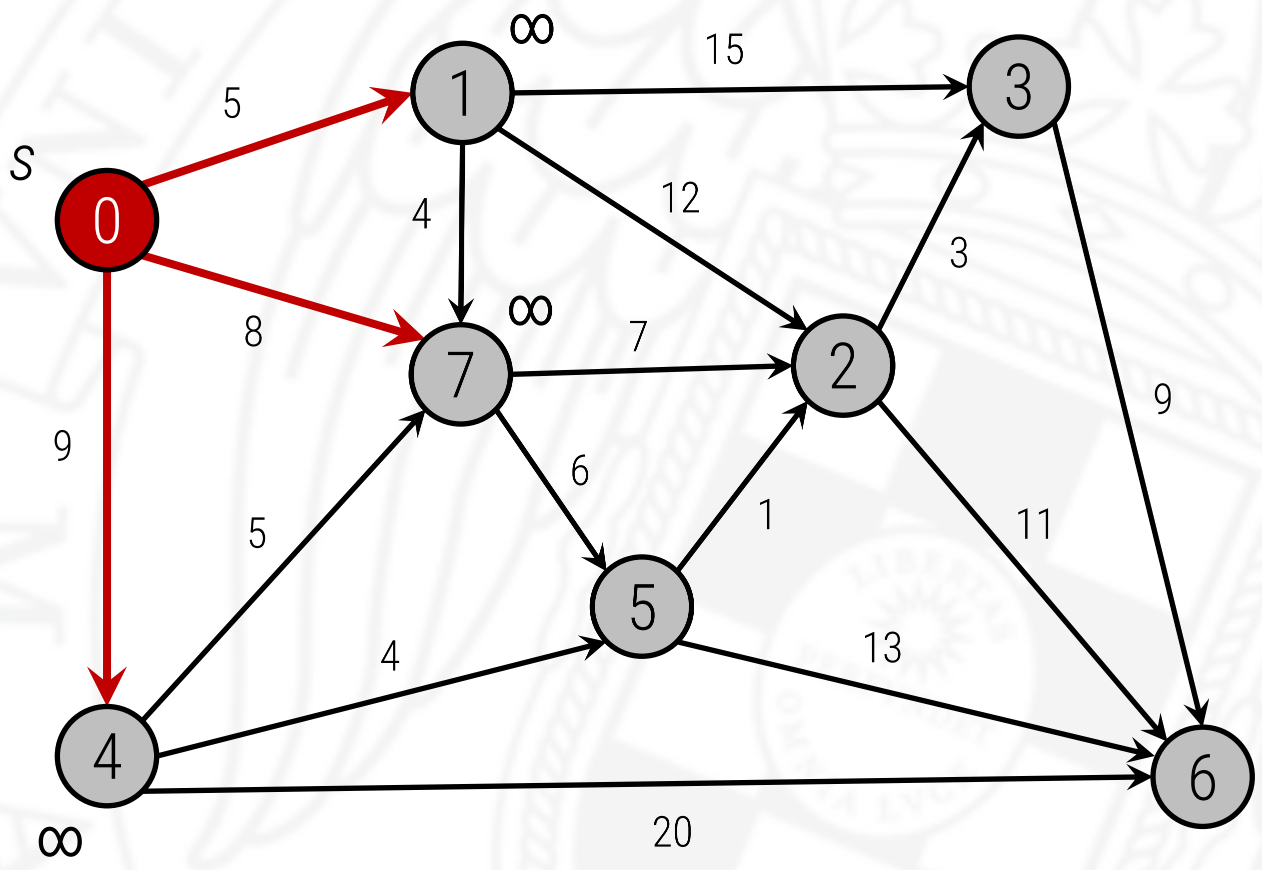
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
→ 0	0	
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Algoritmo de Dijkstra

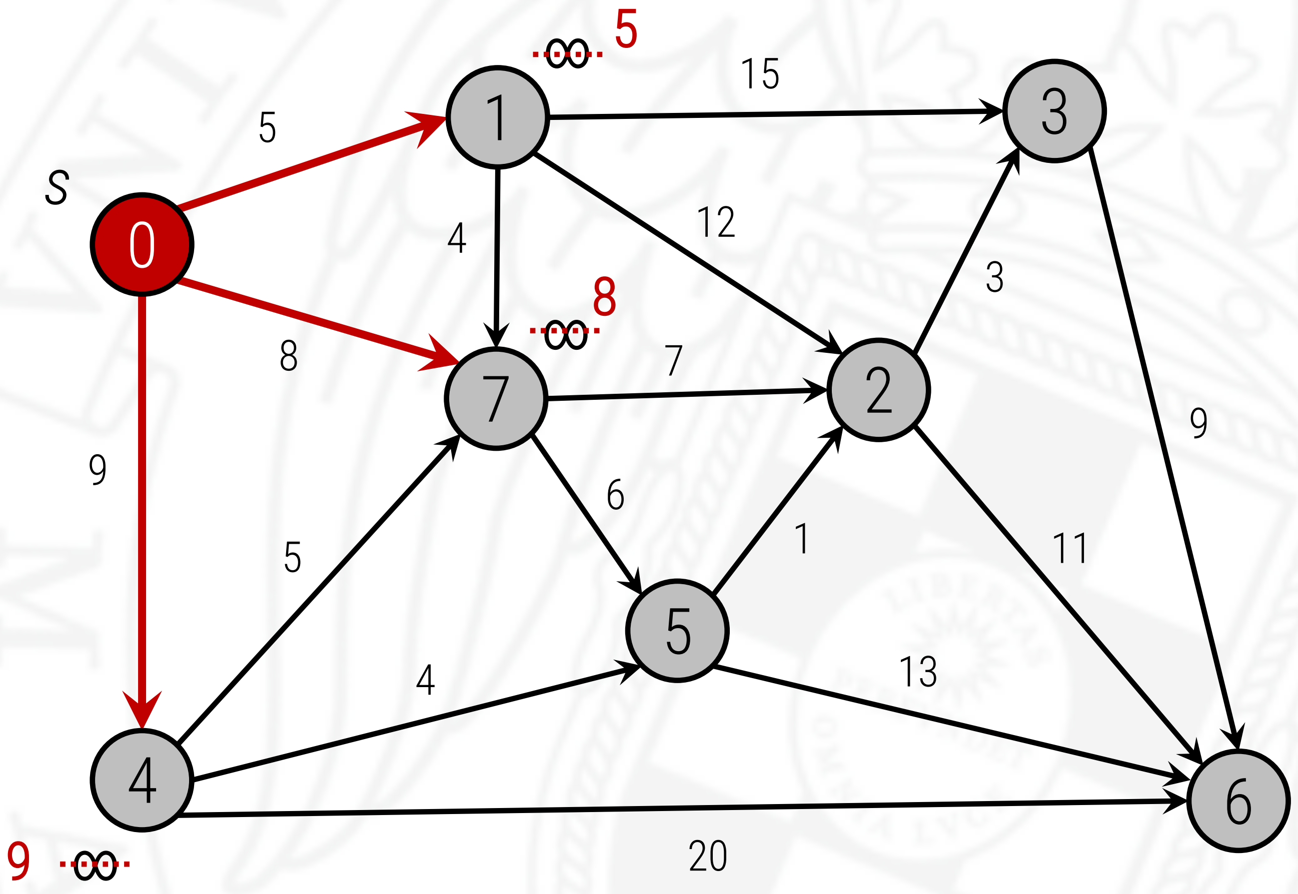
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



	v	dist[]	ult[]
→	0	0	
	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		

Algoritmo de Dijkstra

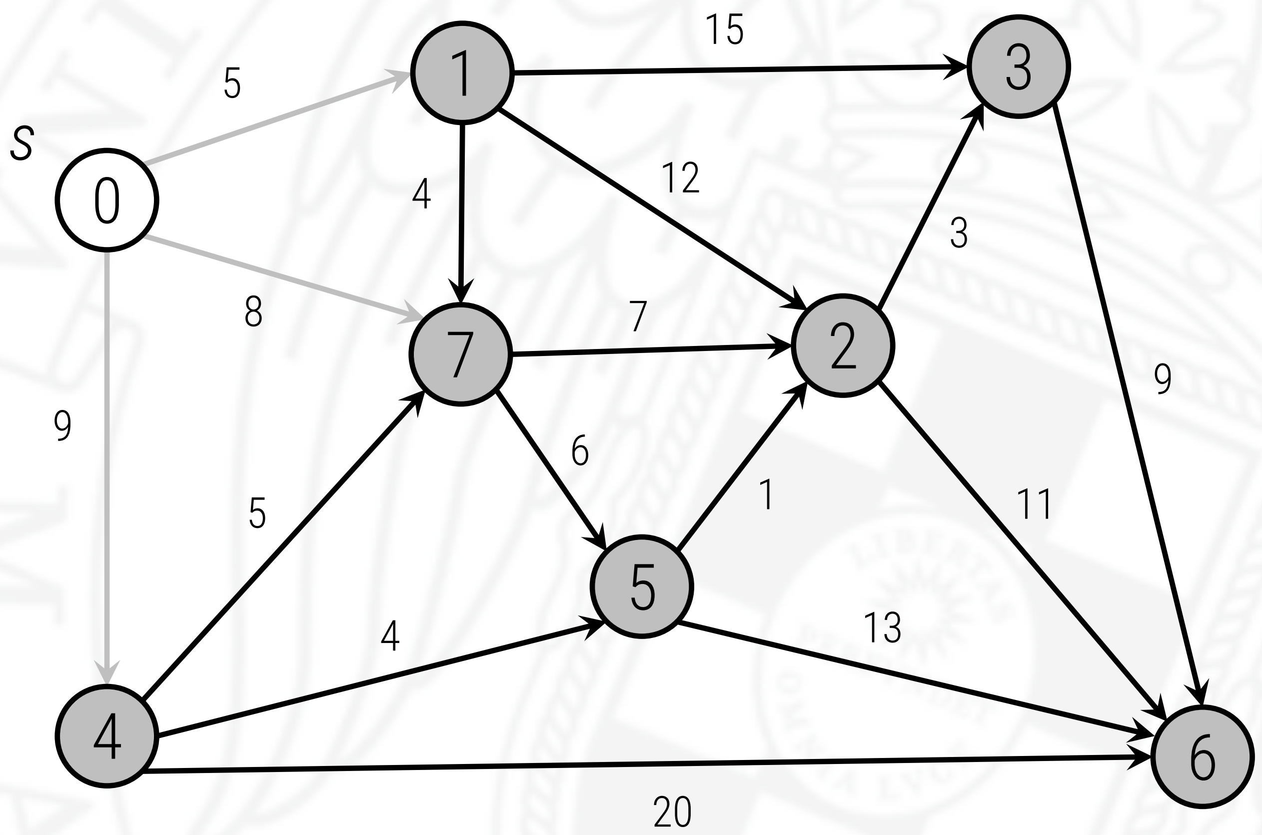
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
→ 0	0	
1	5	$0 \rightarrow 1$
2		
3		
4	9	$0 \rightarrow 4$
5		
6		
7	8	$0 \rightarrow 7$

Algoritmo de Dijkstra

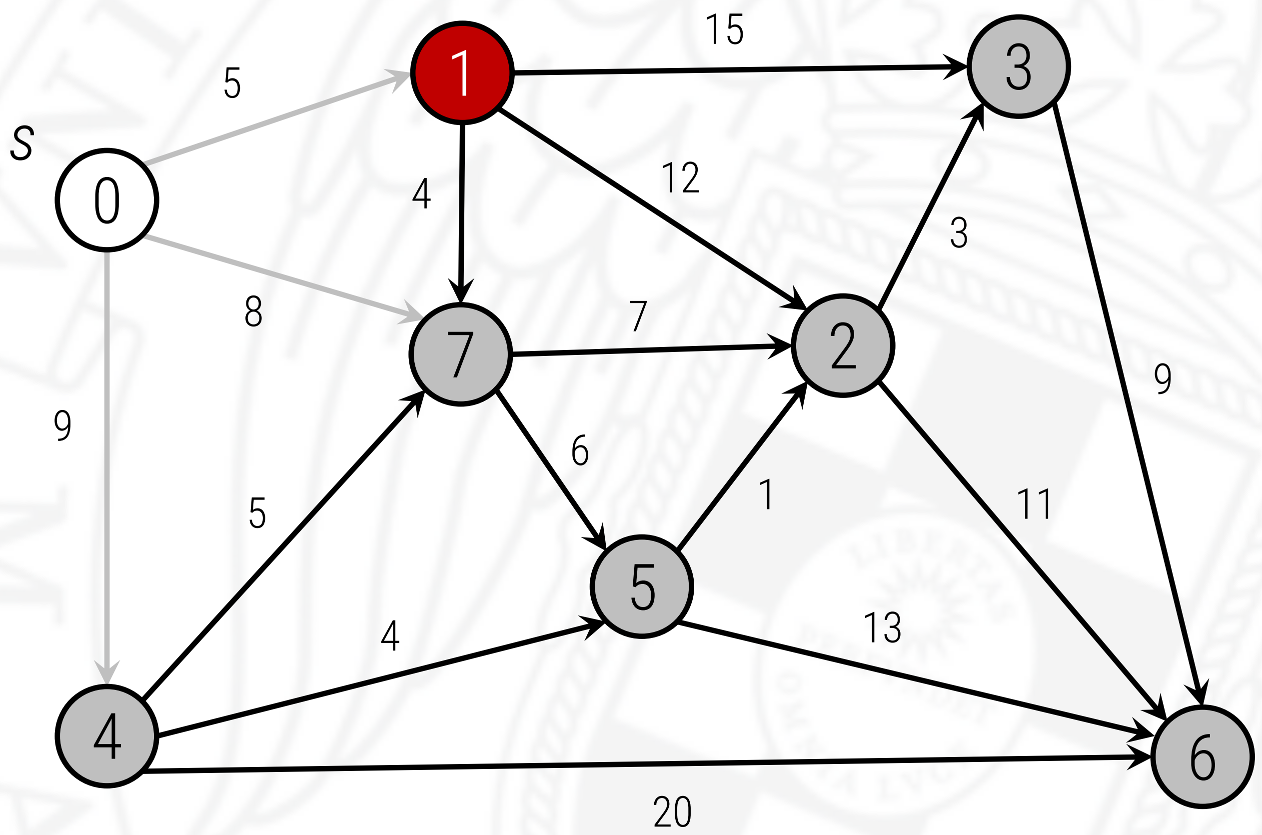
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2		
3		
4	9	$0 \to 4$
5		
6		
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

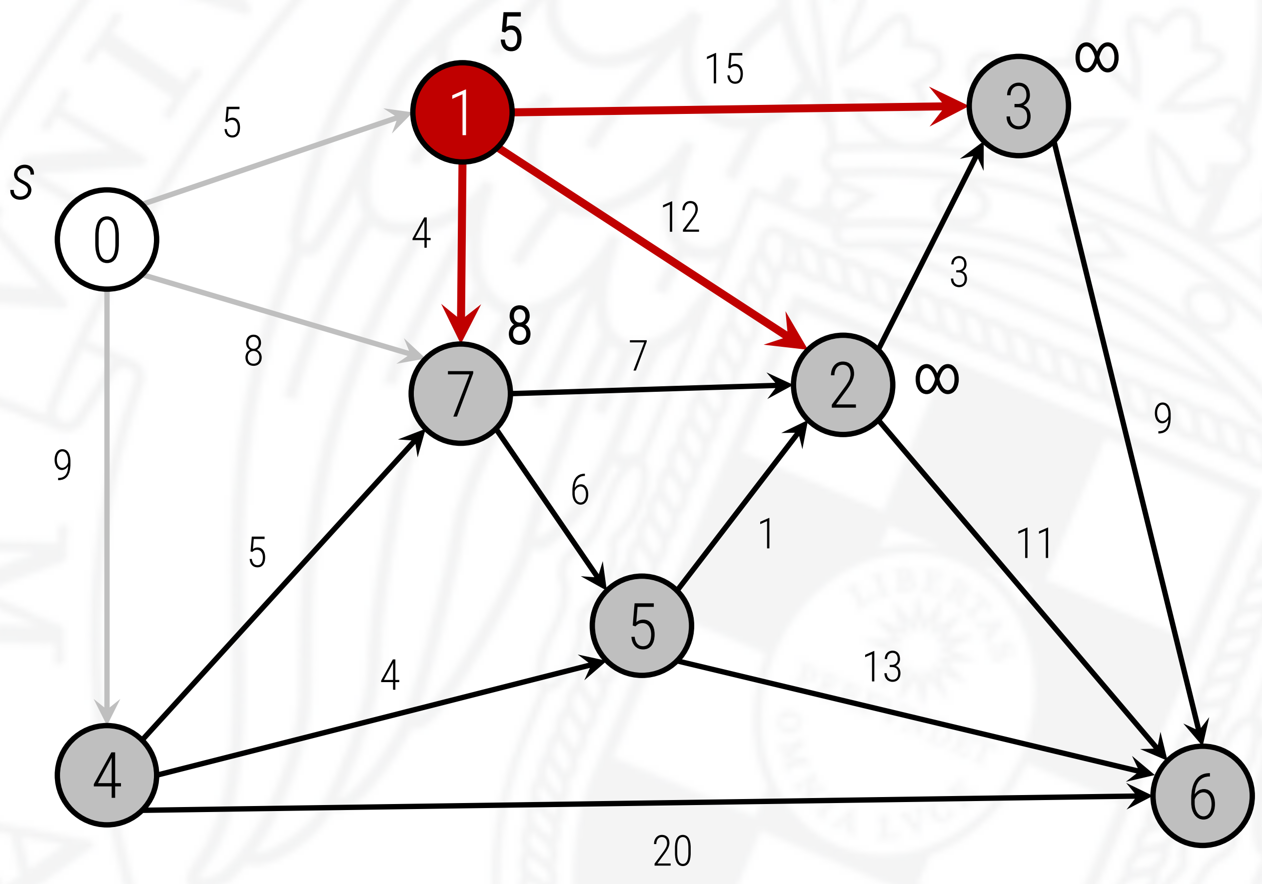
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
→ 1	5	$0 \to 1$
2		
3		
4	9	$0 \to 4$
5		
6		
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

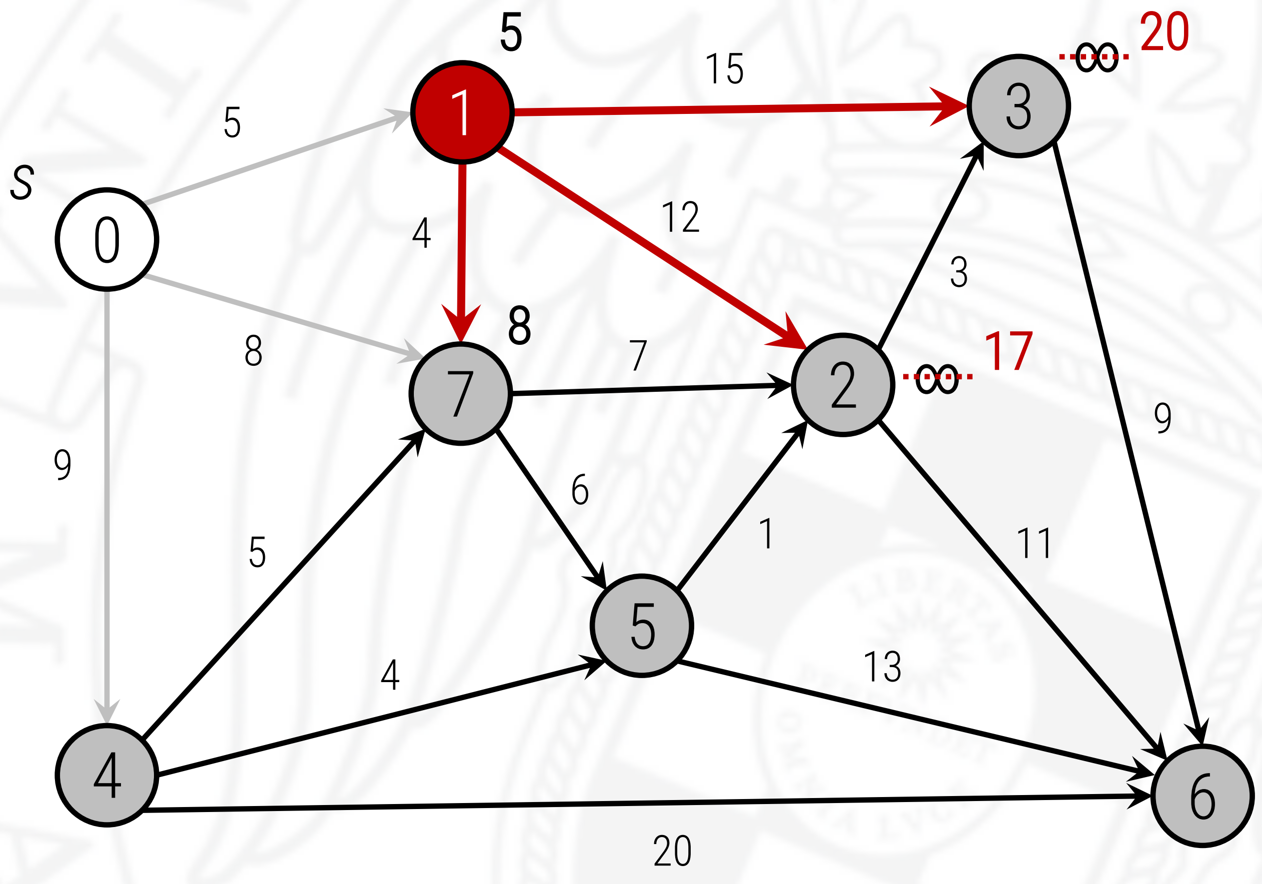
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
→ 1	5	0 → 1
2	17	1 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
5		
6		
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

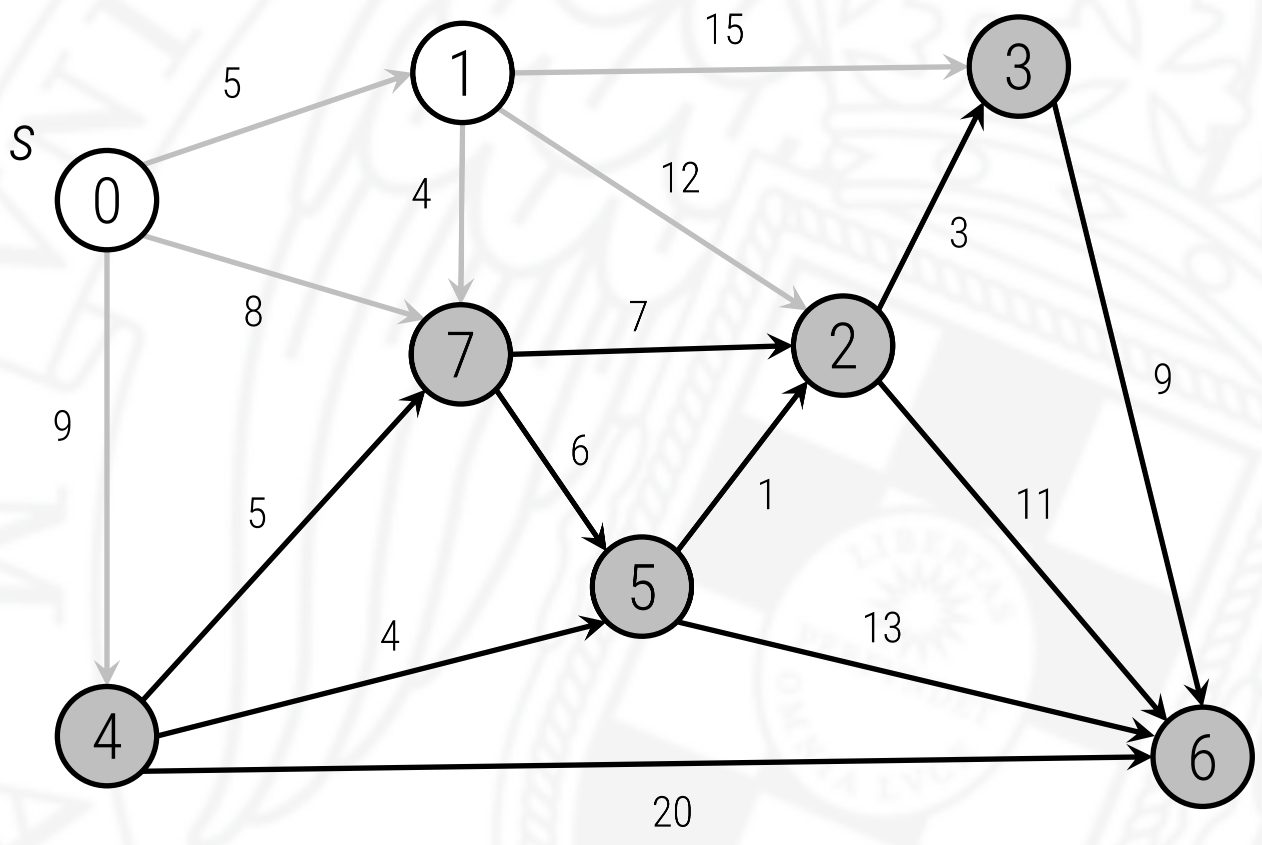
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
→ 1	5	0 → 1
2	17	1 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
5		
6		
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

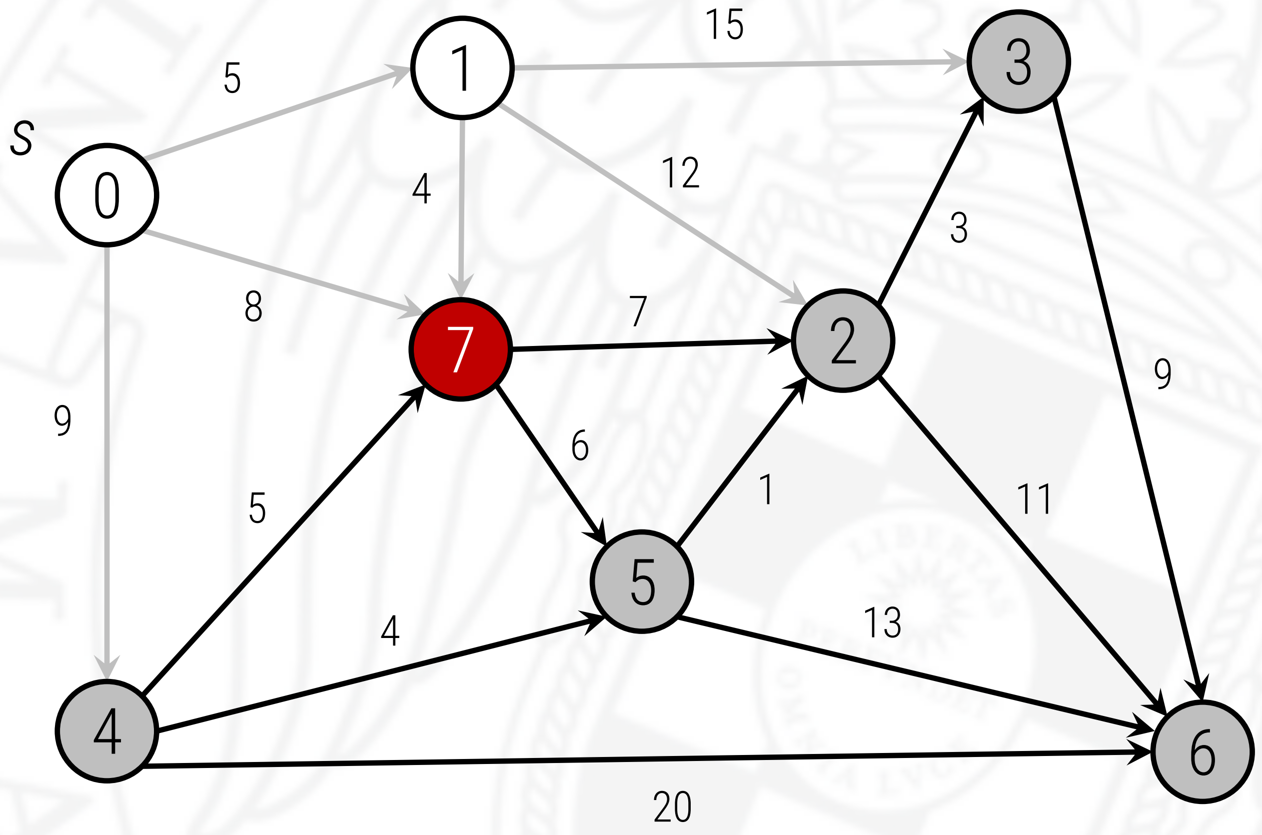
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \rightarrow 1$
2	17	$1 \rightarrow 2$
3	20	$1 \rightarrow 3$
4	9	$0 \rightarrow 4$
5		
6		
7	8	$0 \rightarrow 7$

Algoritmo de Dijkstra

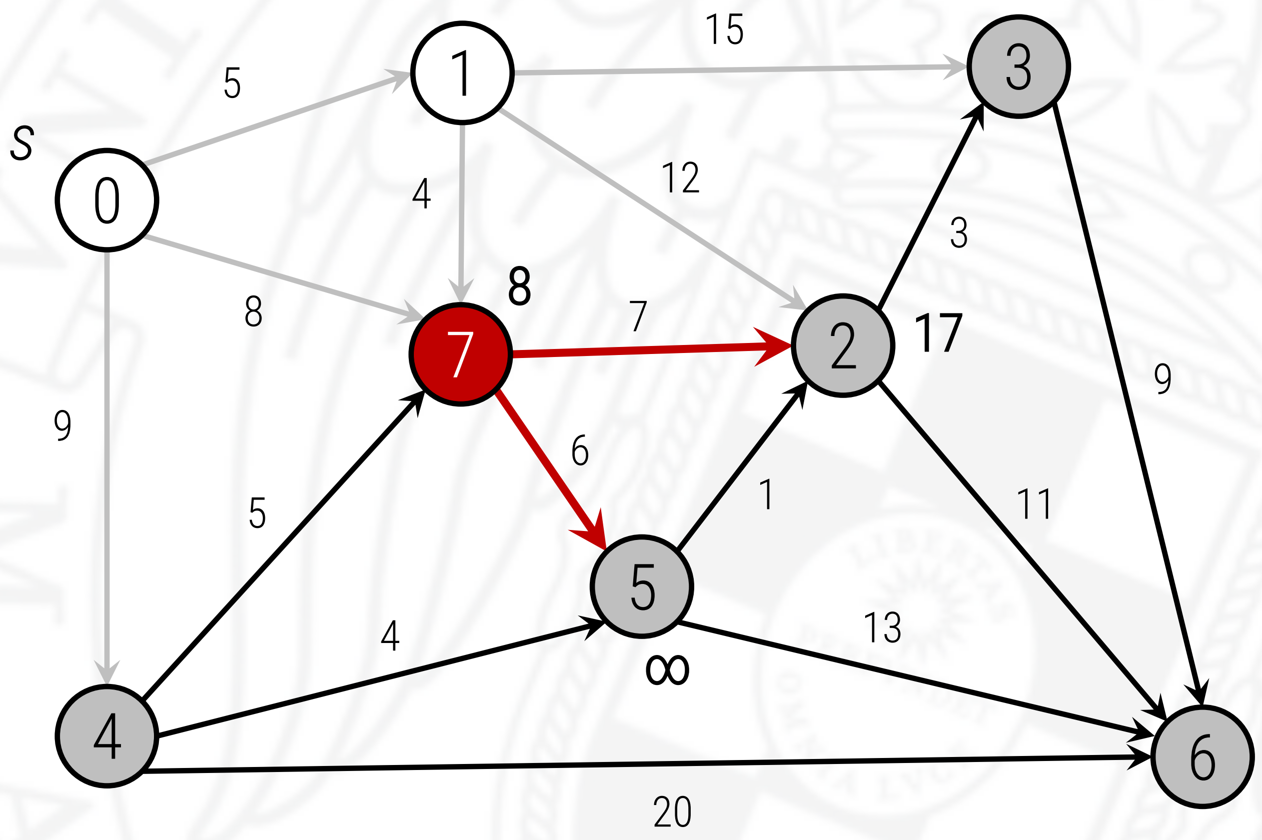
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \rightarrow 1$
2	17	$1 \rightarrow 2$
3	20	$1 \rightarrow 3$
4	9	$0 \rightarrow 4$
5		
6		
$\rightarrow$ 7	8	$0 \rightarrow 7$

Algoritmo de Dijkstra

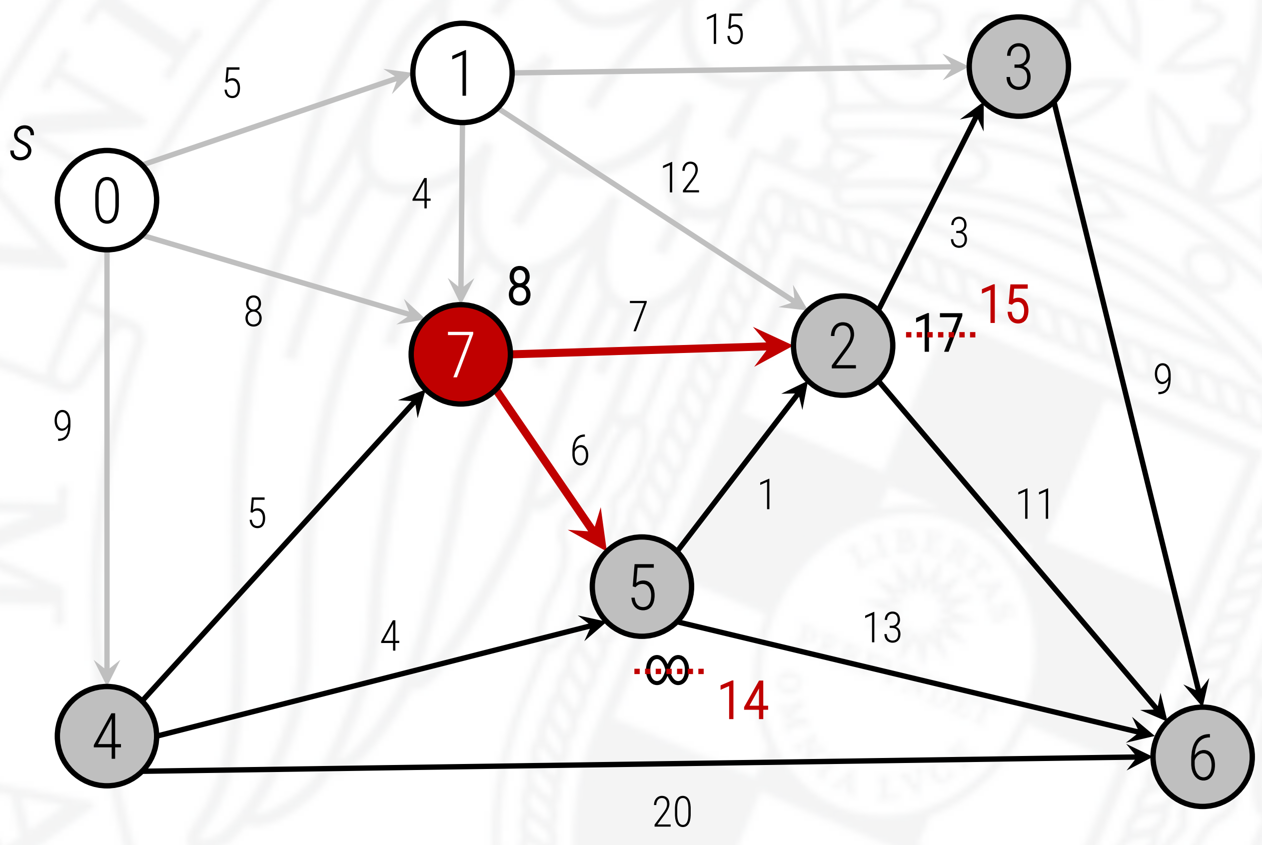
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	17	1 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
5		
6		
→ 7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

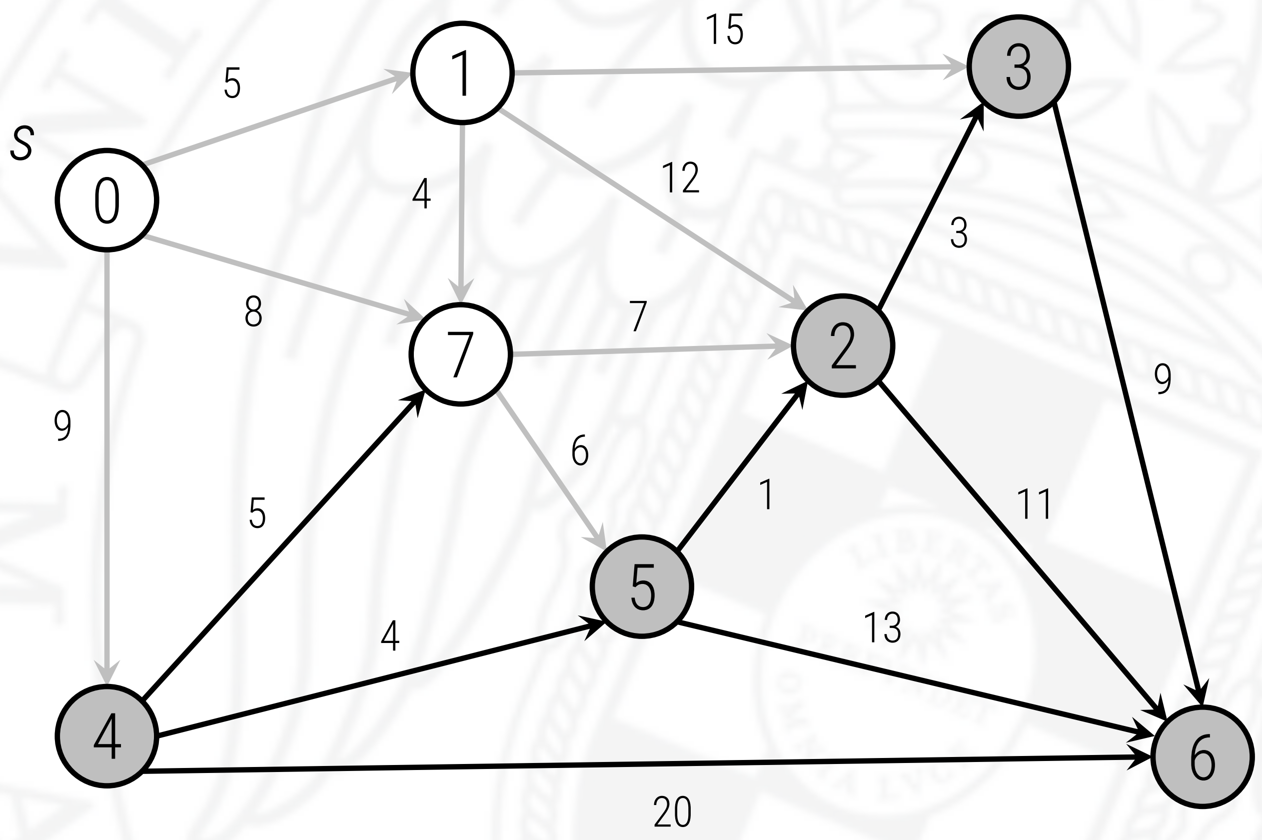
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	15	7 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
5	14	7 → 5
6		
→ 7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

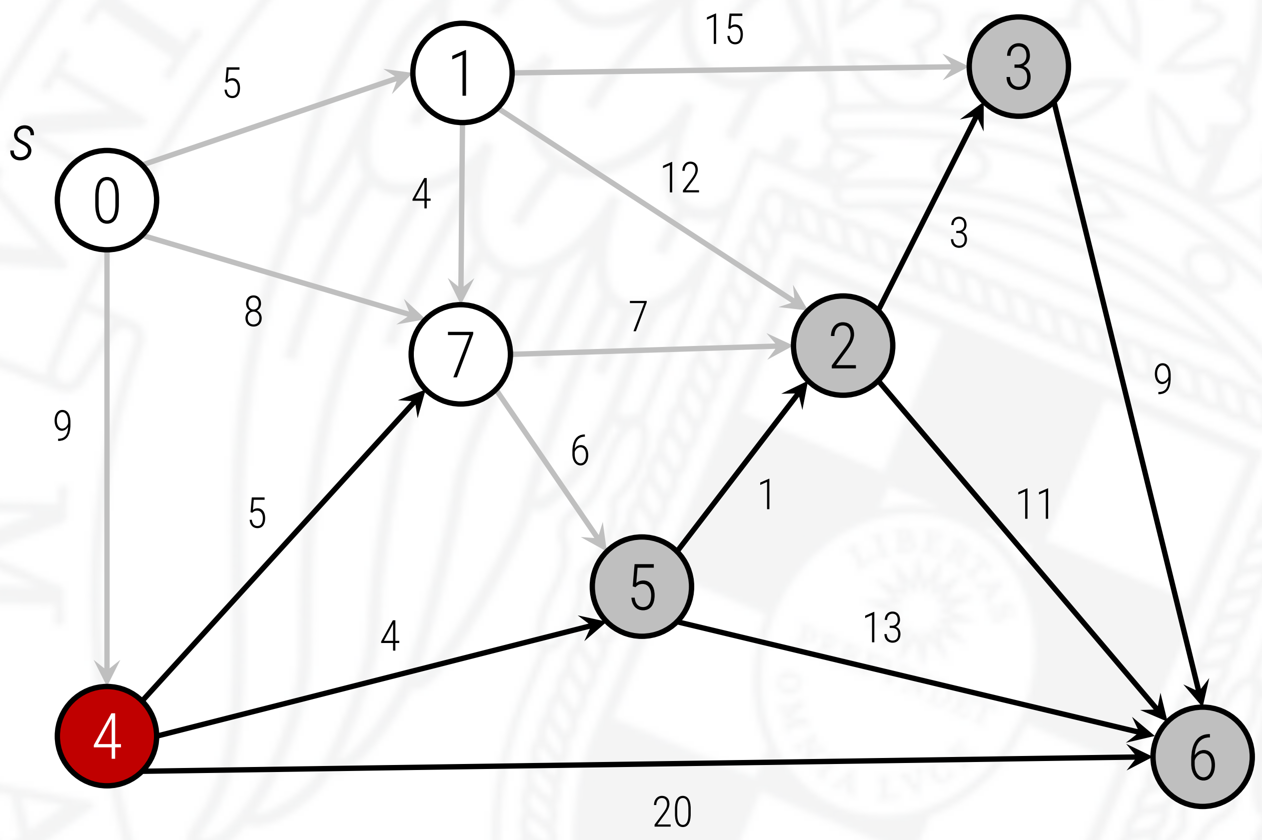
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \rightarrow 1$
2	15	$7 \rightarrow 2$
3	20	$1 \rightarrow 3$
4	9	$0 \rightarrow 4$
5	14	$7 \rightarrow 5$
6		
7	8	$0 \rightarrow 7$

Algoritmo de Dijkstra

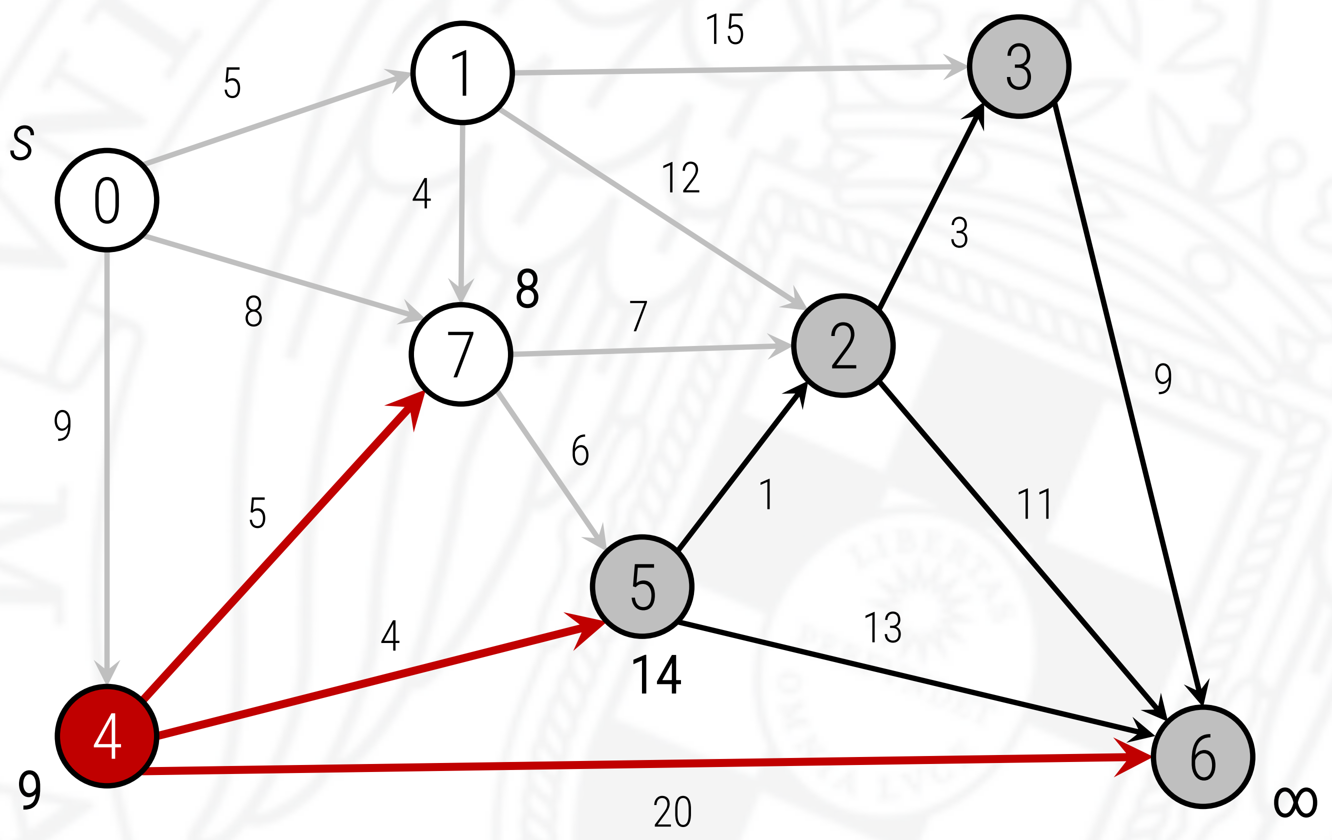
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	15	$7 \to 2$
3	20	$1 \to 3$
→ 4	9	$0 \to 4$
5	14	$7 \to 5$
6		
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

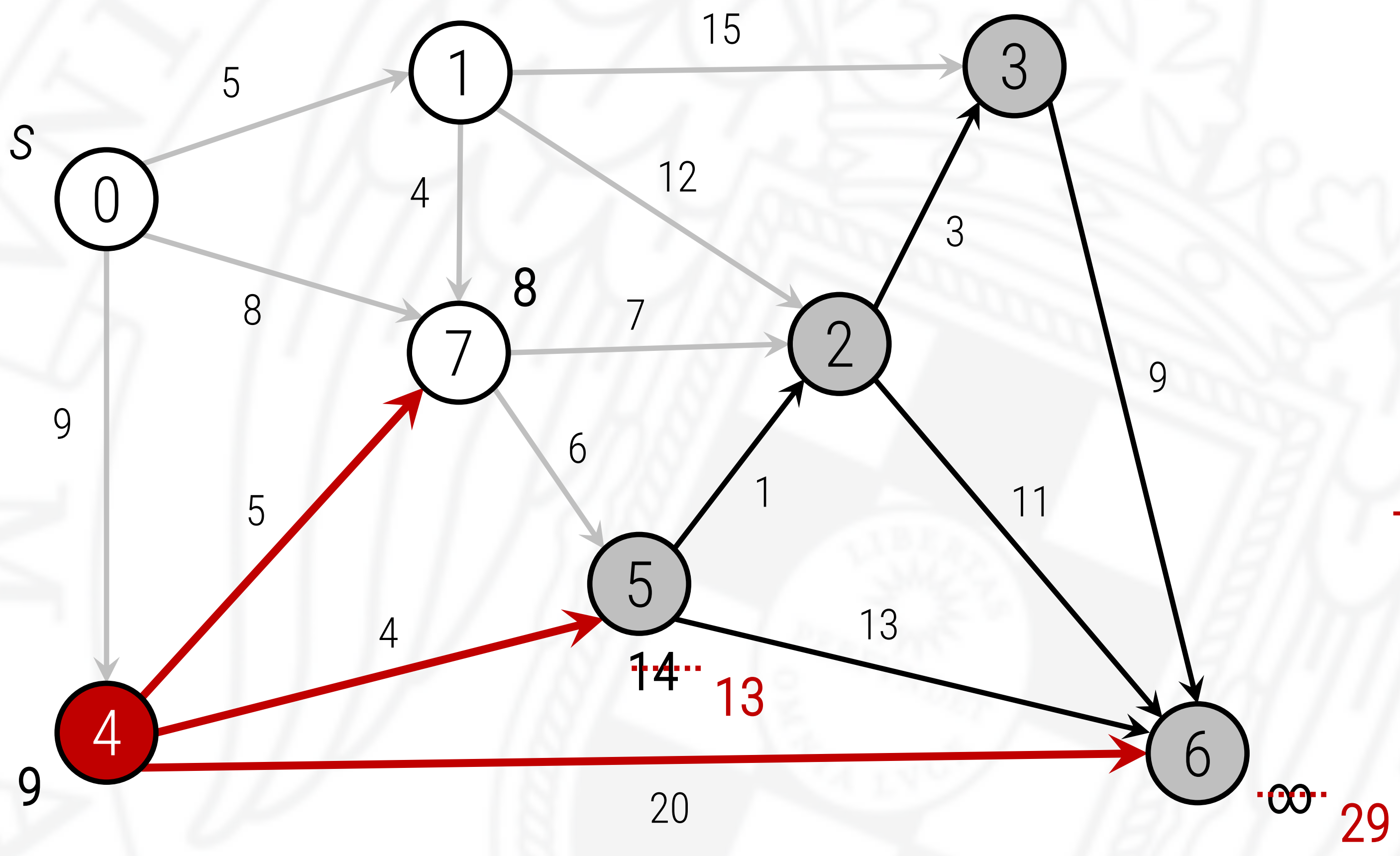
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	15	7 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
5	14	7 → 5
6		
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

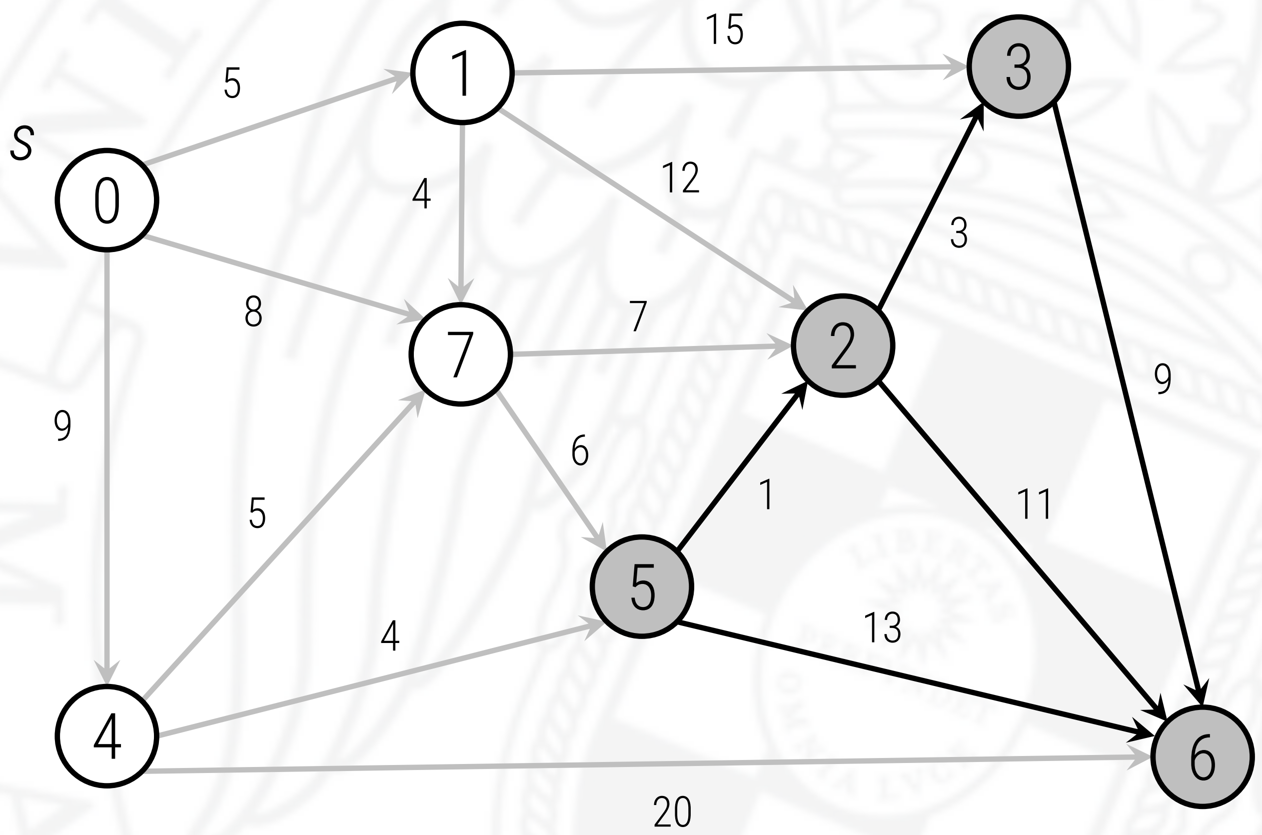
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	15	7 → 2
3	20	1 → 3
→ 4	9	0 → 4
5	13	4 → 5
6	29	4 → 6
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

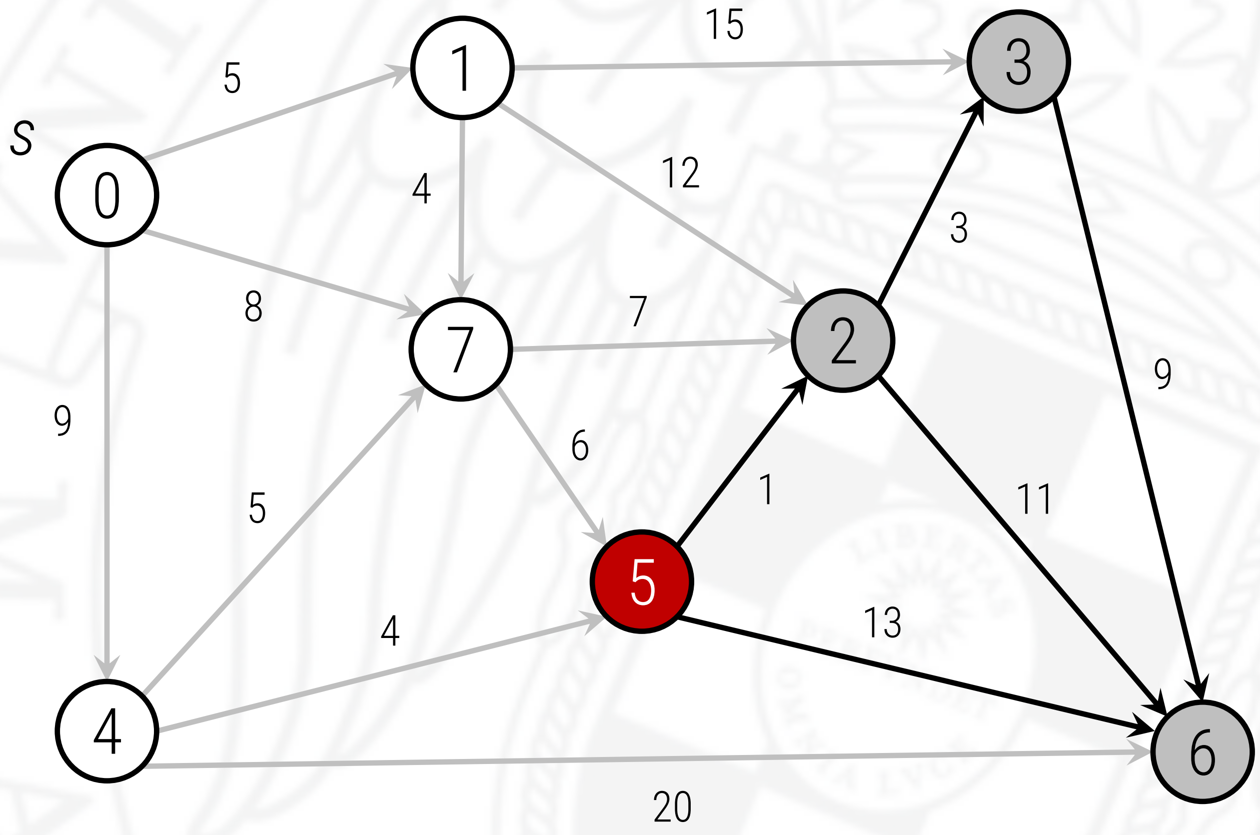
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	15	$7 \to 2$
3	20	$1 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	29	$4 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

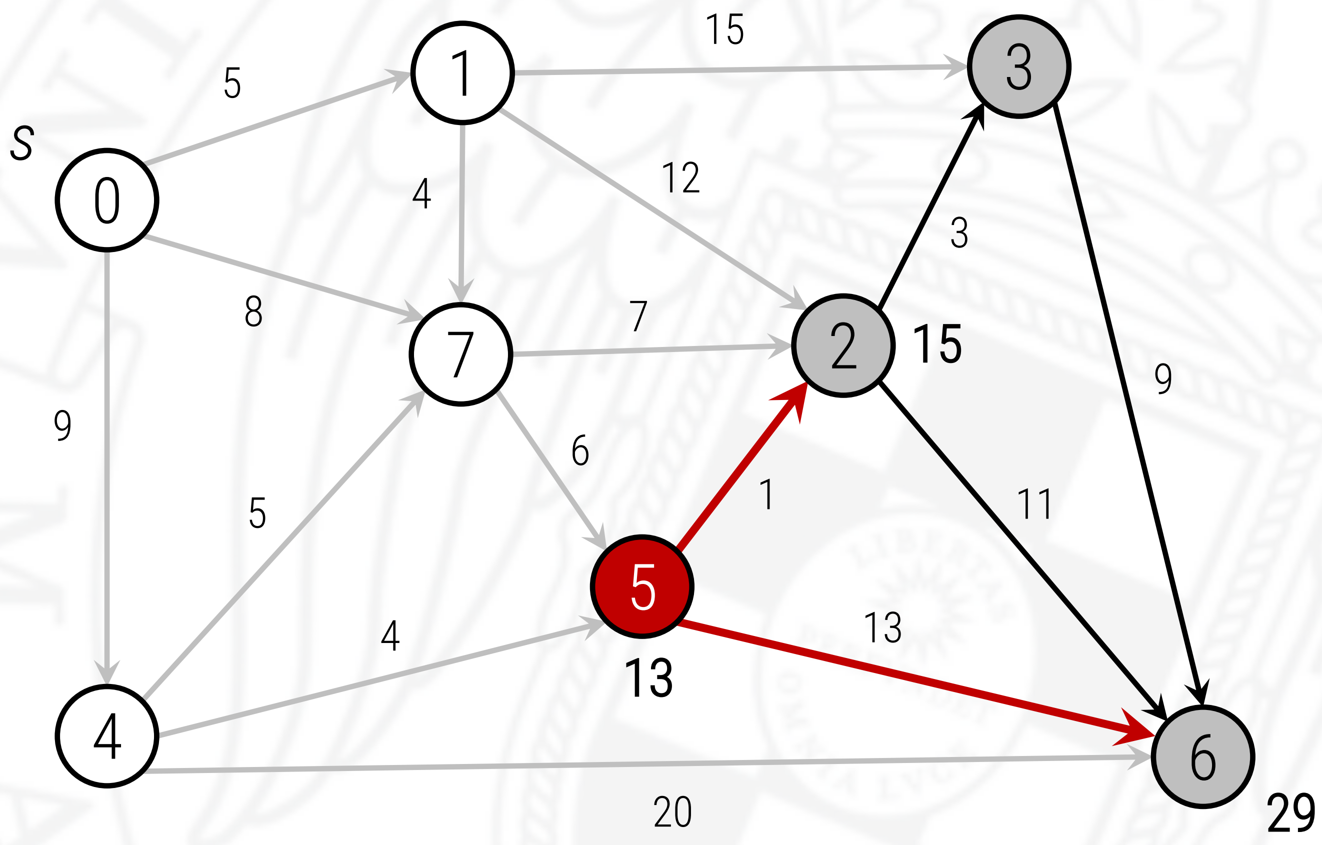
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \rightarrow 1$
2	15	$7 \rightarrow 2$
3	20	$1 \rightarrow 3$
4	9	$0 \rightarrow 4$
→ 5	13	$4 \rightarrow 5$
6	29	$4 \rightarrow 6$
7	8	$0 \rightarrow 7$

Algoritmo de Dijkstra

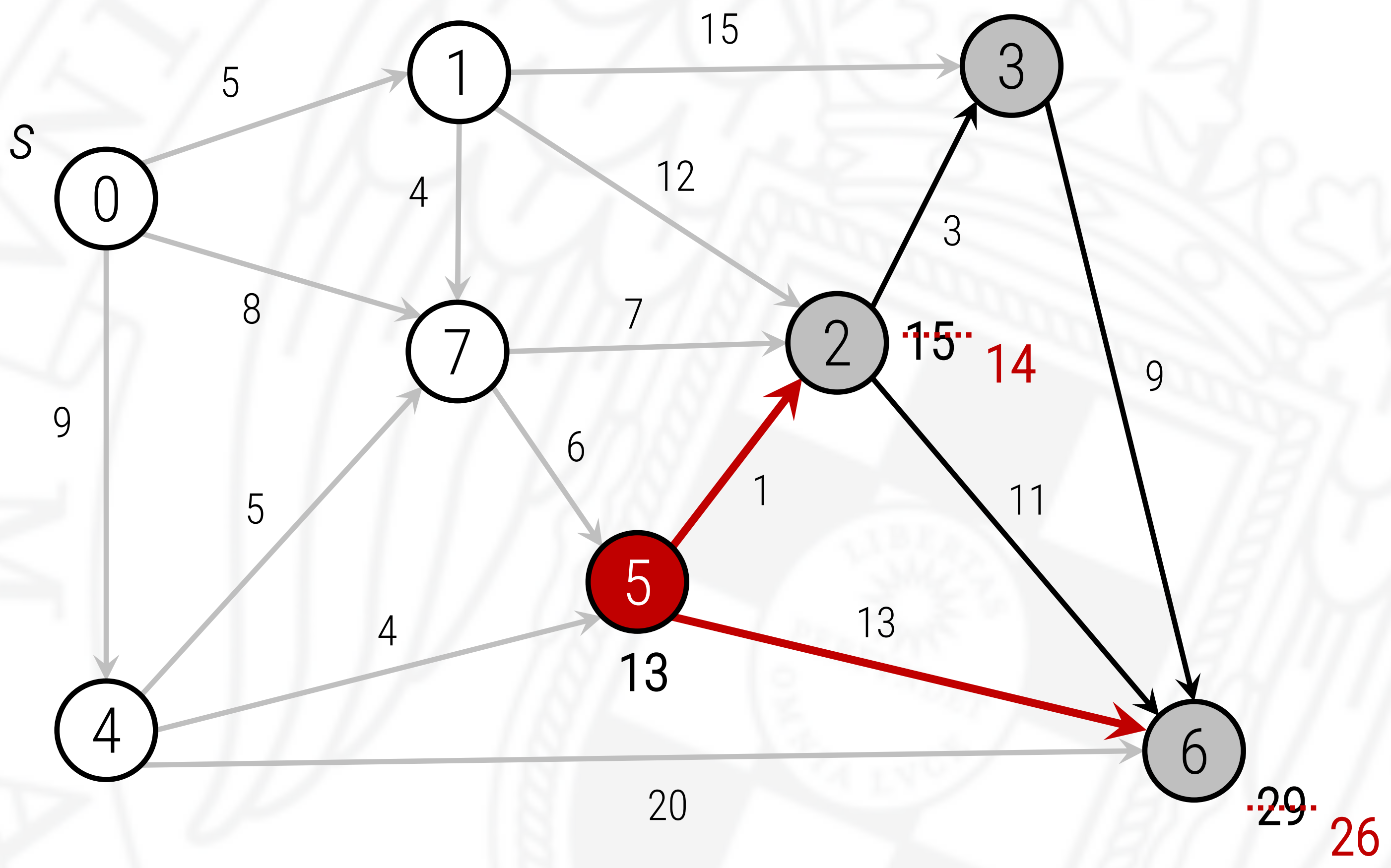
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	14	5 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
→ 5	13	4 → 5
6	26	5 → 6
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

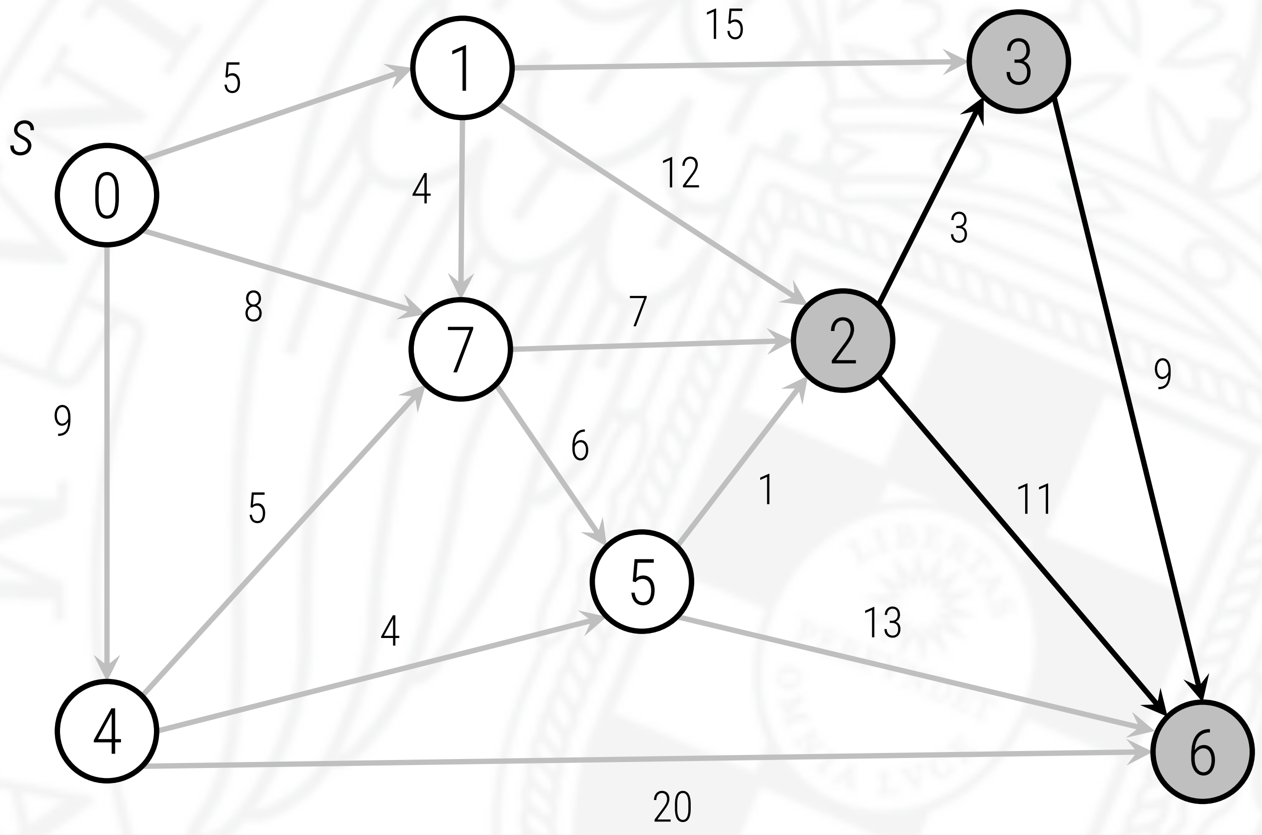
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



	v	dist[]	ult[]
	0	0	
	1	5	0 → 1
	2	14	5 → 2
	3	20	1 → 3
	4	9	0 → 4
→	5	13	4 → 5
	6	26	5 → 6
	7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

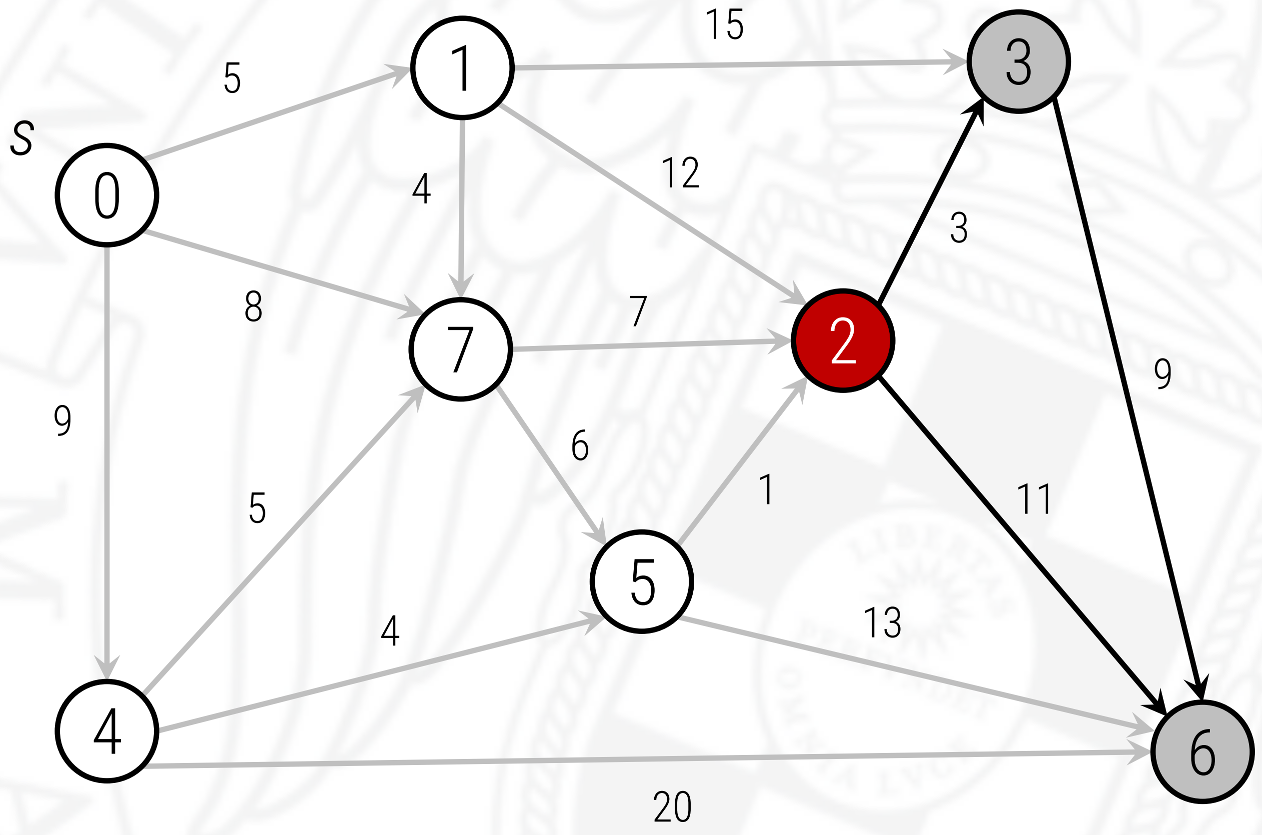
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	20	$1 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	26	$5 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

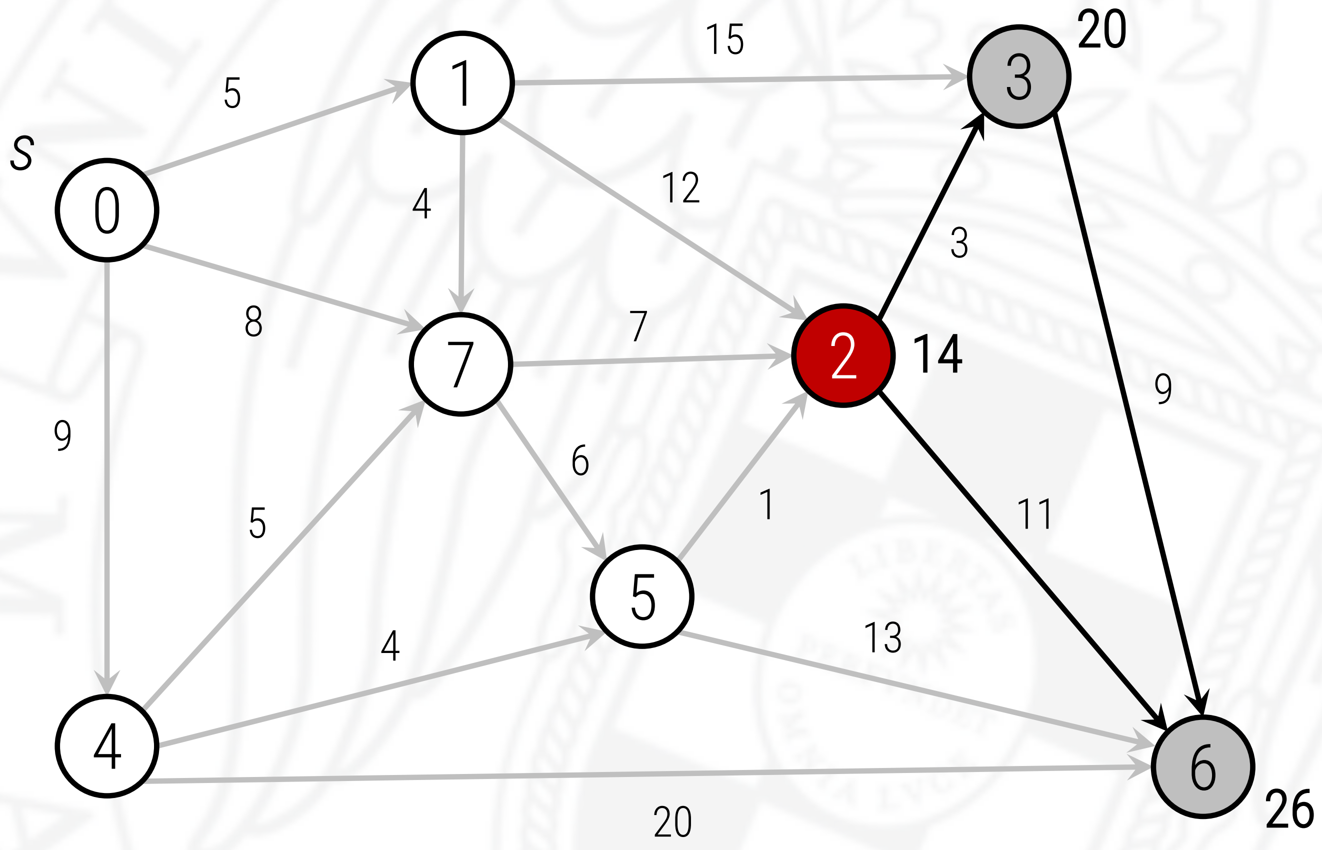
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	20	$1 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	26	$5 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

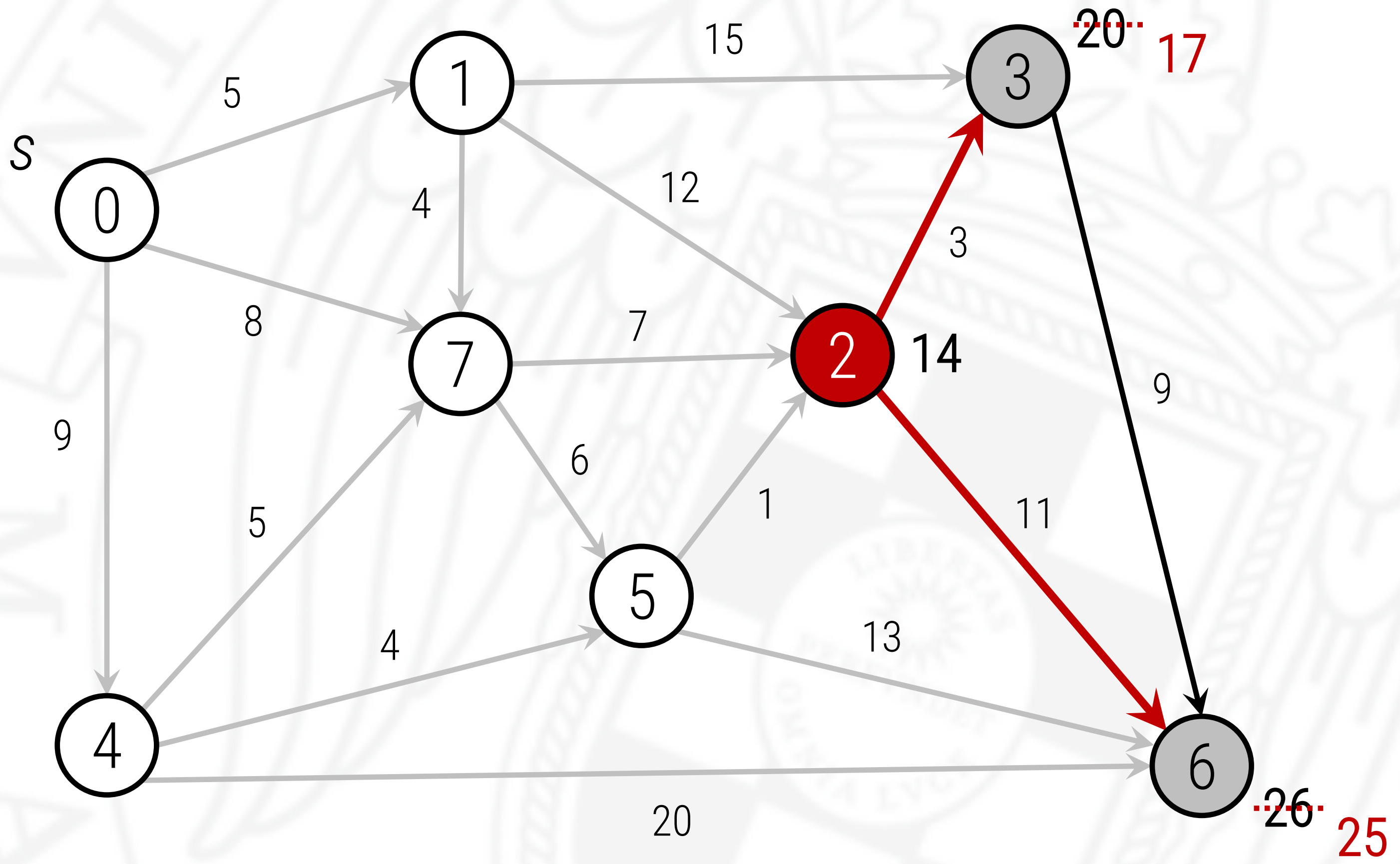
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	14	5 → 2
3	20	1 → 3
4	9	0 → 4
5	13	4 → 5
6	26	5 → 6
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

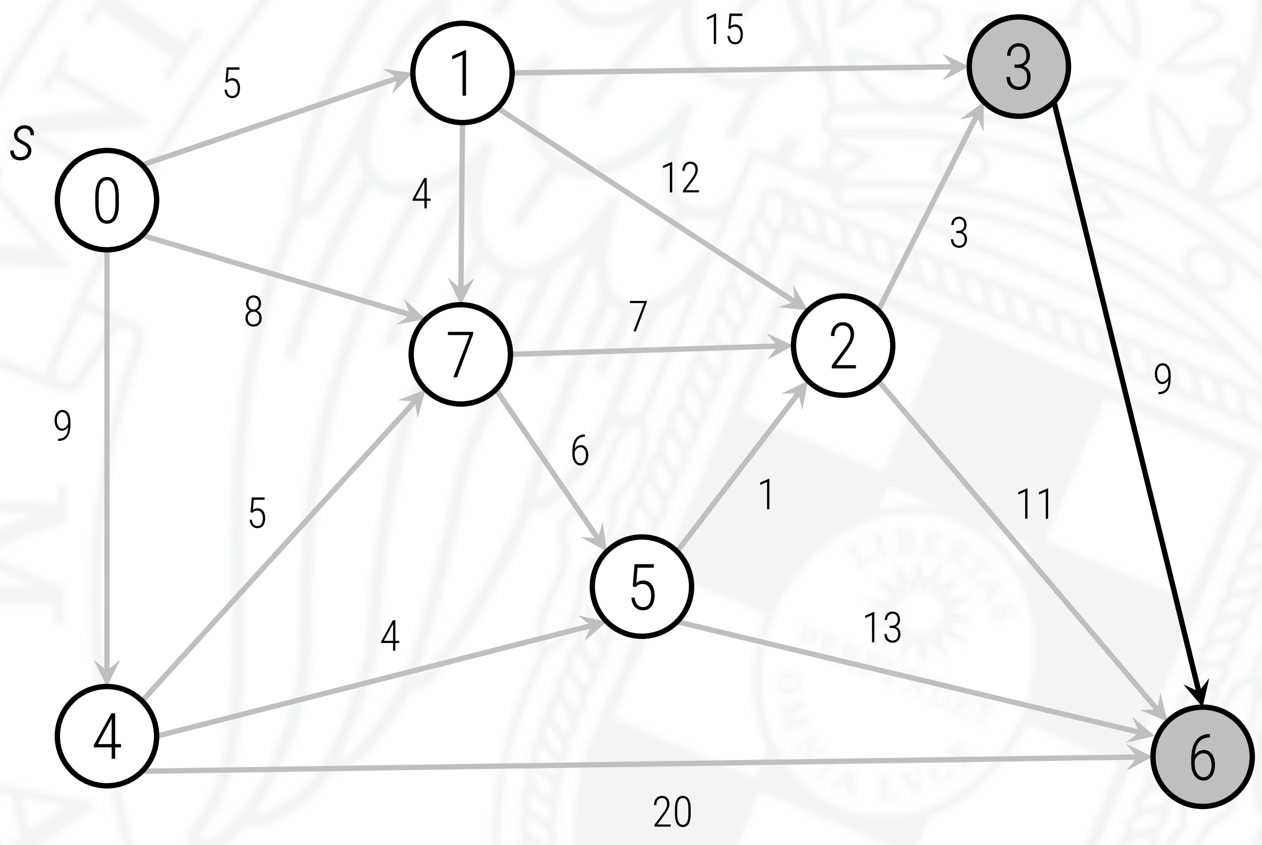
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \rightarrow 1$
→ 2	14	$5 \rightarrow 2$
3	17	$2 \rightarrow 3$
4	9	$0 \rightarrow 4$
5	13	$4 \rightarrow 5$
6	25	$2 \rightarrow 6$
7	8	$0 \rightarrow 7$

Algoritmo de Dijkstra

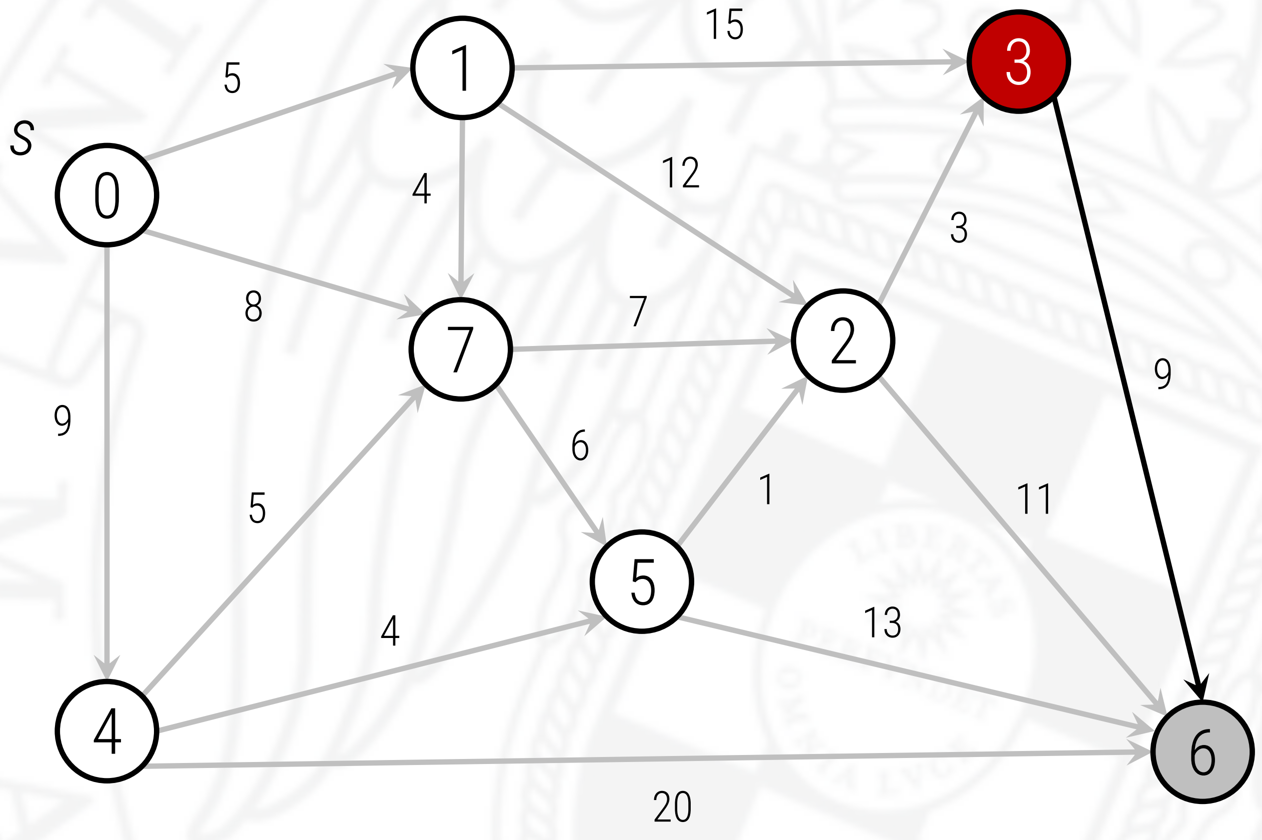
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	17	$2 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	25	$2 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

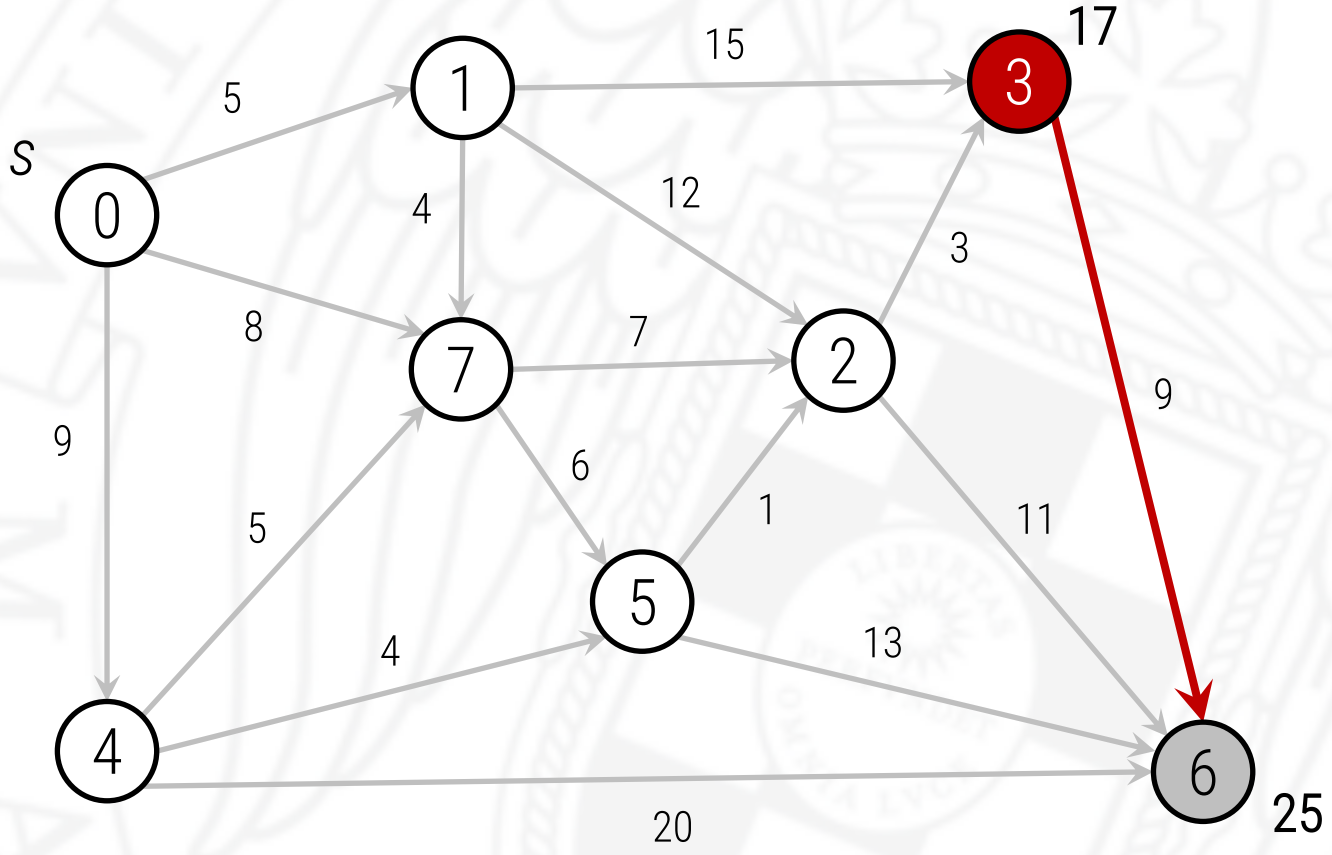
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	0 → 1
2	14	5 → 2
→ 3	17	2 → 3
4	9	0 → 4
5	13	4 → 5
6	25	2 → 6
7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

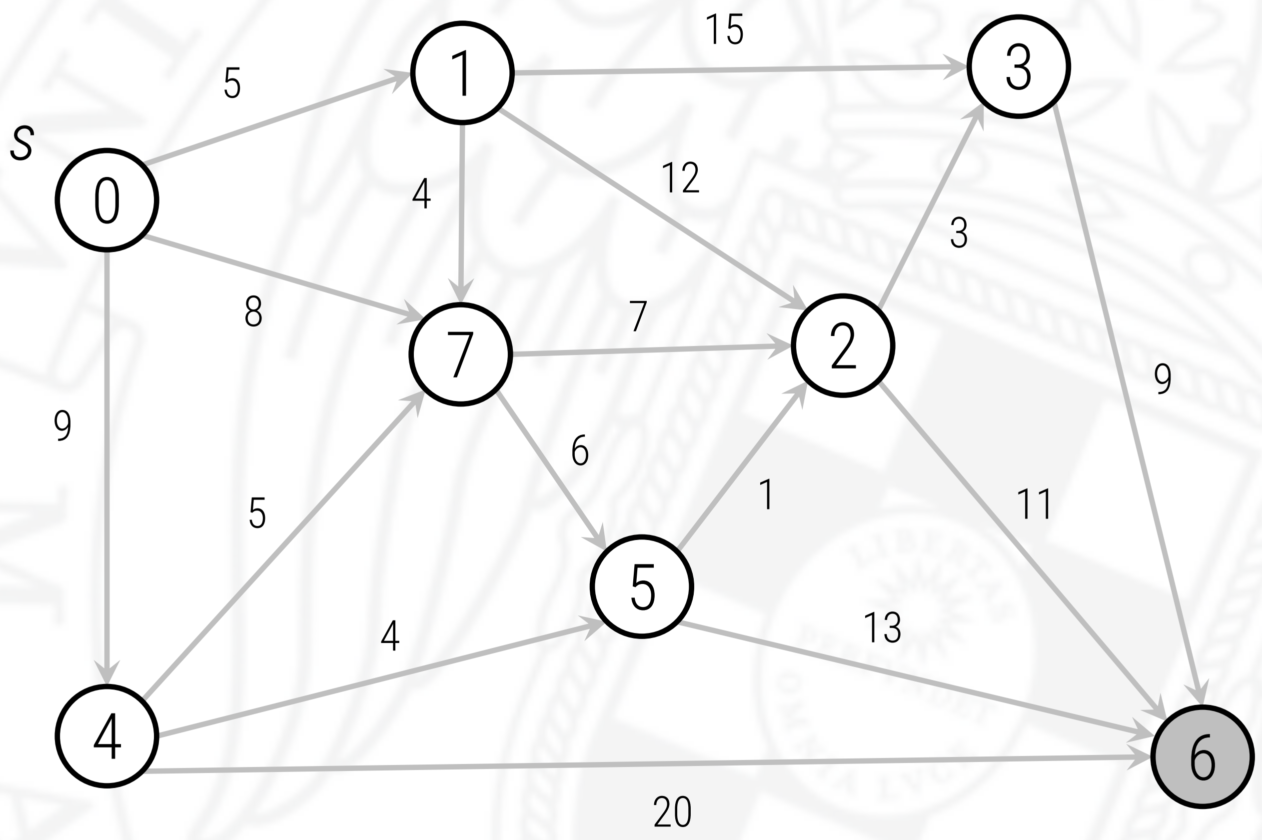
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



	v	dist[]	ult[]
	0	0	
	1	5	0 → 1
	2	14	5 → 2
→	3	17	2 → 3
	4	9	0 → 4
	5	13	4 → 5
	6	25	2 → 6
	7	8	0 → 7

Algoritmo de Dijkstra

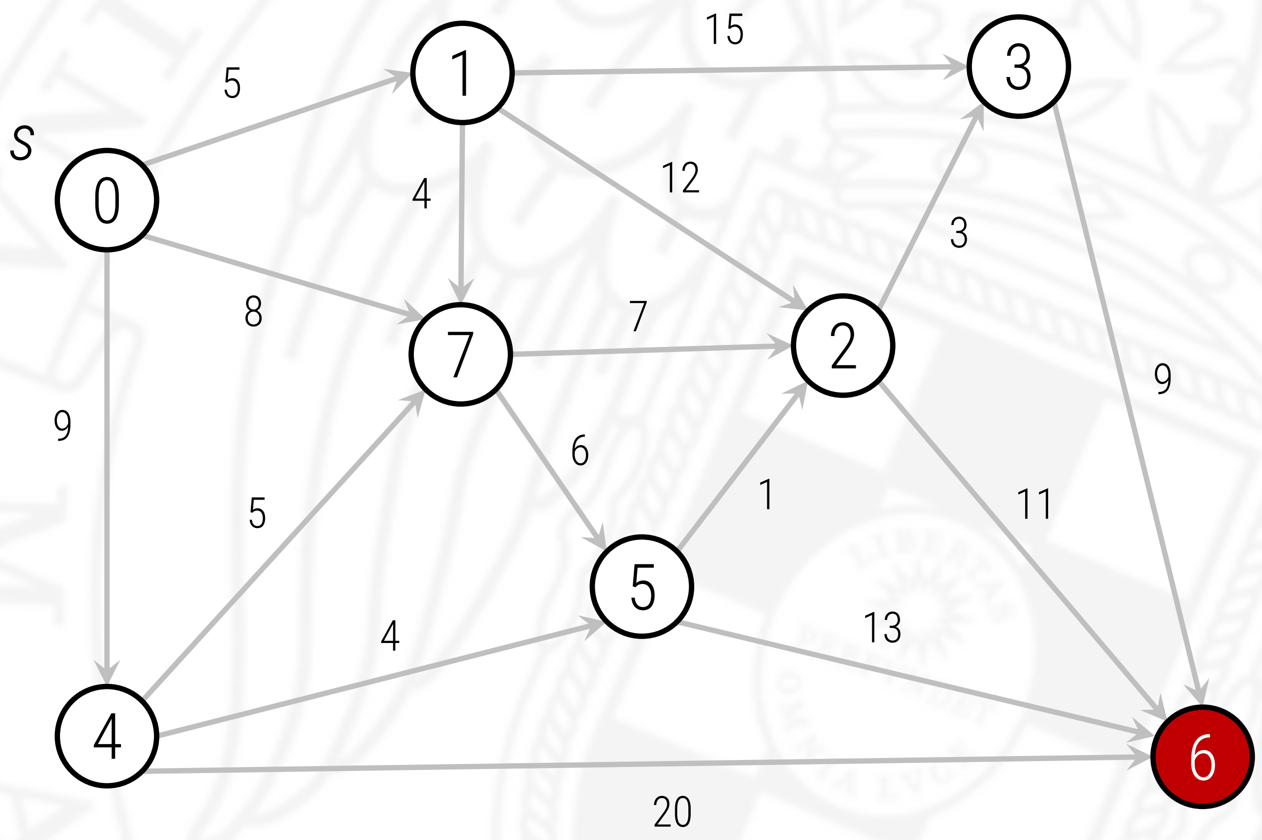
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	17	$2 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	25	$2 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

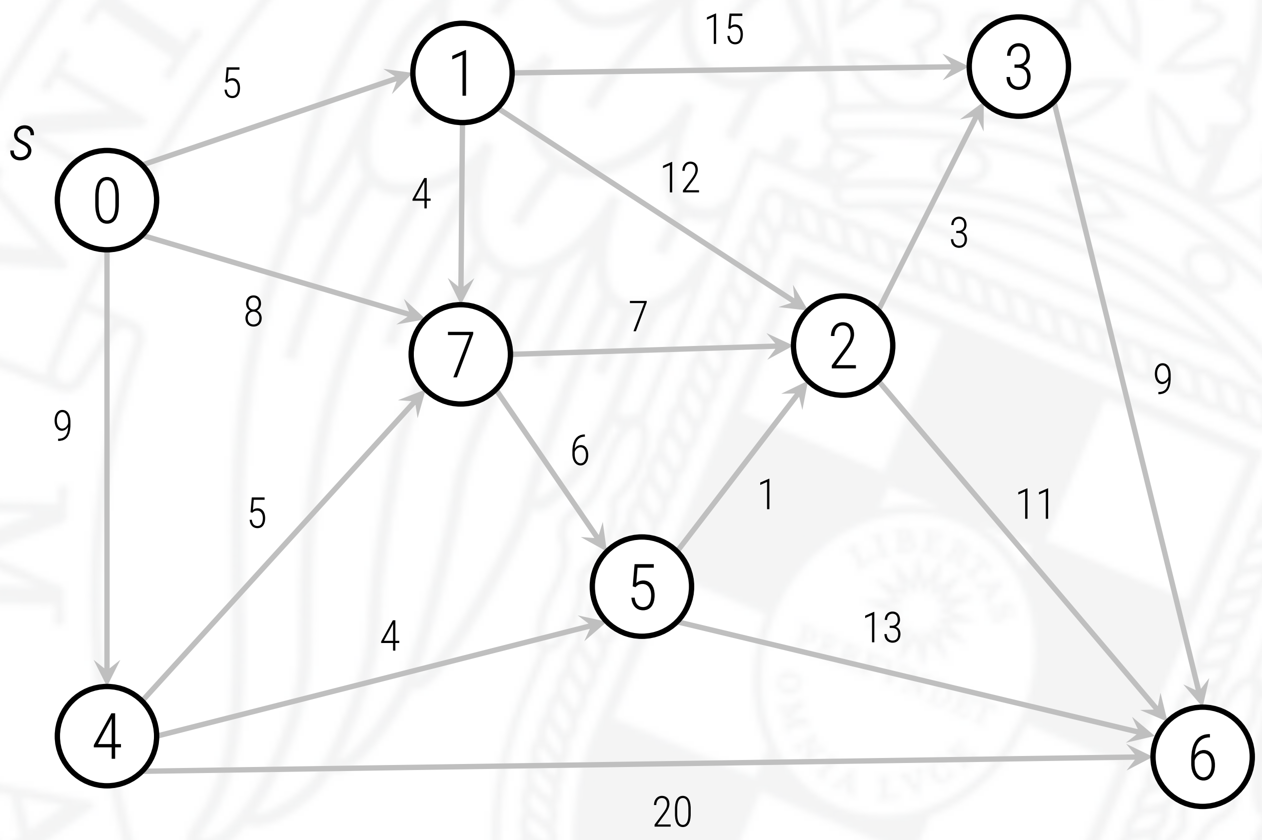
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	17	$2 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
$\to$ 6	25	$2 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

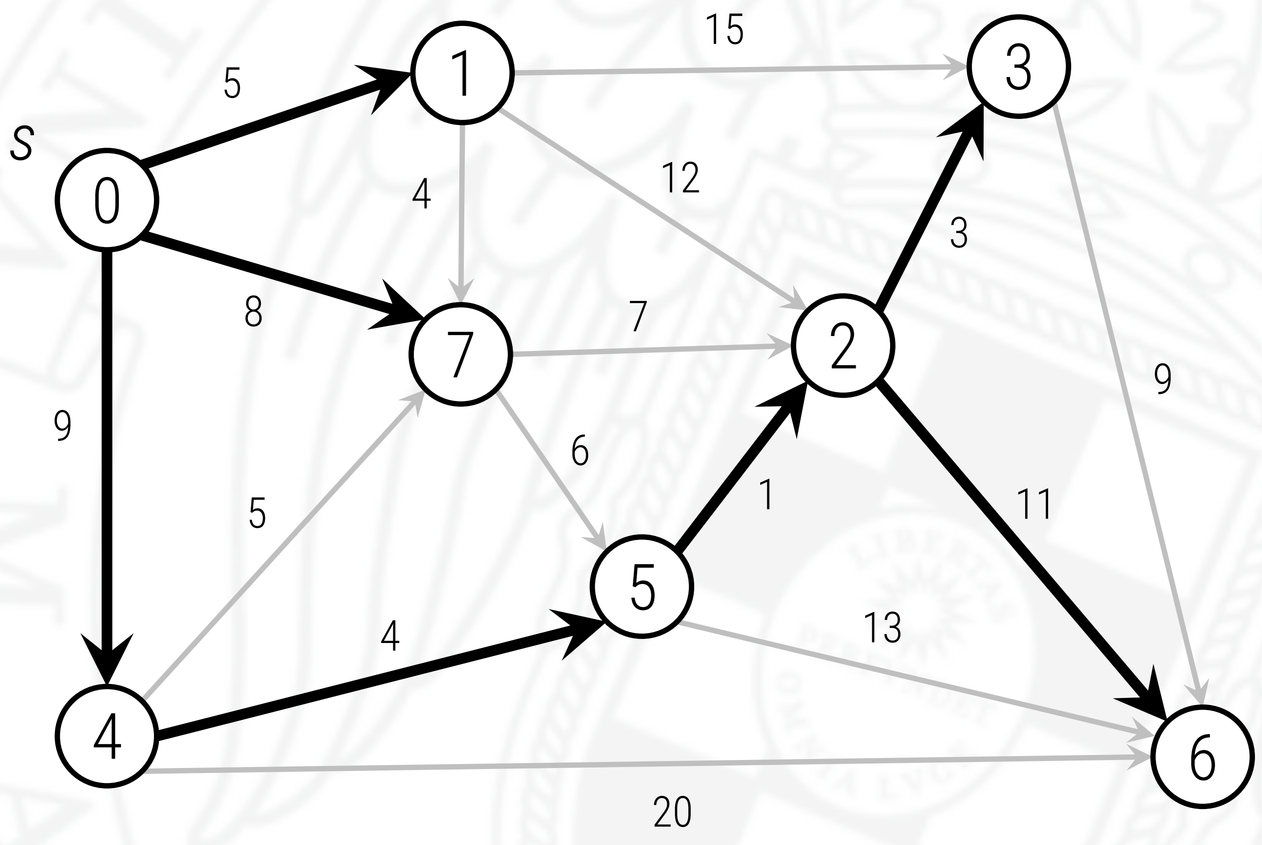
- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	17	$2 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	25	$2 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra

- Considera los vértices en orden creciente de distancia desde el origen.
- Añade el vértice al árbol y relaja todas las aristas que salen de él.



v	dist[]	ult[]
0	0	
1	5	$0 \to 1$
2	14	$5 \to 2$
3	17	$2 \to 3$
4	9	$0 \to 4$
5	13	$4 \to 5$
6	25	$2 \to 6$
7	8	$0 \to 7$

Algoritmo de Dijkstra, implementación

```
template <typename Valor>
class Dijkstra {
public:
   Dijkstra(DigrafoValorado<Valor> const& g, int orig) : origen(orig),
            dist(g.V(), INF), ult(g.V()), pq(g.V()) {
      dist[origen] = 0;
      pq.push(origen, 0);
      while (!pq.empty()) {
         int v = pq.top().elem; pq.pop();
         for (auto a : g.ady(v))
            relajar(a);
      }
   }
```

Algoritmo de Dijkstra, implementación

```
bool hayCamino(int v) const { return dist[v] != INF; }

Valor distancia(int v) const { return dist[v]; }

Camino<Valor> camino(int v) const {
    Camino<Valor> cam;
    // recuperamos el camino retrocediendo
    AristaDirigida<Valor> a;
    for (a = ult[v]; a.desde() != origen; a = ult[a.desde()])
        cam.push_front(a);
    cam.push_front(a);
    return cam;
}
```

Algoritmo de Dijkstra, implementación

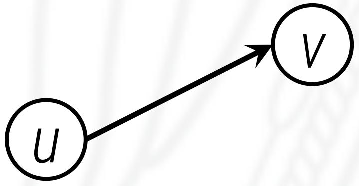
```
private:
    const Valor INF = std::numeric_limits<Valor>::max();
    int origen;
    std::vector<Valor> dist;
    std::vector<AristaDirigida<Valor>> ult;
    IndexPQ<Valor> pq;

    void relajar(AristaDirigida<Valor> a) {
        int v = a.desde(), w = a.hasta();
        if (dist[w] > dist[v] + a.valor()) {
            dist[w] = dist[v] + a.valor();  ult[w] = a;
            pq.update(w, dist[w]);
        }
    }
};
```

Algoritmo de Dijkstra, corrección

- Dado un digrafo valorado con aristas de costes no negativos, el algoritmo de Dijkstra calcula un árbol de caminos mínimos desde un origen.
  - Cada arista $v \xrightarrow{a} w$ se relaja exactamente una vez (cuando se relaja v), haciendo que se cumpla `dist[w] ≤ dist[v] + a.valor()`
  - La desigualdad se mantiene hasta que termina el algoritmo, porque
    - `dist[w]` no puede aumentar
    - `dist[v]` no cambiará

Por el hecho de relajar otros vértices, no puede aumentar la dist[w], por lo que si antes se cumplía que dist[w] <= dist[v] + a.valor



Algoritmo de Dijkstra, análisis del coste

- El algoritmo de Dijkstra, aplicado a un grafo con V vértices y A aristas, calcula caminos mínimos desde el origen al resto de vértices en un tiempo en $O(A \log V)$ y con un espacio adicional en $O(V)$.

Operación	Frecuencia	Coste por operación
inicializar los vectores	1	V
construir cola prioridad	1	V
`pop`	V	$\log V$
`update`	A	$\log V$