



# Proyecto Final

## Integración numérica para campos eléctricos y magnéticos de Pokemones



C. R. Altamirano Nava  
[cesaraltamiranon@ciencias.unam.mx](mailto:cesaraltamiranon@ciencias.unam.mx)

A. Archundia Juarez \*  
[adrianarch@ciencias.unam.mx](mailto:adrianarch@ciencias.unam.mx)

Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México

*Fecha de entrega: 24 de enero de 2025*

### Resumen

Este proyecto estudia los campos eléctricos y magnéticos generados por distribuciones de carga en movimiento, utilizando un algoritmo basado en las ecuaciones *A* y *B*. Se analizaron dos modelos: un electrodo con dos semiesferas de cargas opuestas en movimiento y Pikachu, cuyas cargas se localizan en sus mejillas representadas por elipsoides. Los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas se compararon con soluciones analíticas, mostrando una buena concordancia. Además, se evaluó la precisión de las simulaciones numéricas al analizar el error en función de la densidad de la malla, observándose una rápida convergencia a medida que la malla se refinaba ( $d=10, 15, 50$ , y  $100$ ), con errores que disminuían desde un  $10.44\%$  hasta un  $0.17\%$ .

*Palabras clave:* Campo eléctrico, Campo magnético, Método numérico, Pikachu, Electrode.

### Abstract

This project studies the electric and magnetic fields generated by moving charge distributions, using an algorithm based on equations *A* and *B*. Two models were analyzed: an electrode with two oppositely charged hemispheres in motion and Pikachu, whose charges are located on its cheeks represented by ellipsoids. The results obtained by numerical simulations were compared with analytical solutions, showing good agreement. In addition, the accuracy of the numerical simulations was evaluated by analyzing the error as a function of the mesh density, observing a rapid convergence as the mesh was refined ( $d=10, 15, 50$ , and  $100$ ), with errors decreasing from  $10.44\%$  to  $0.17\%$ .

*Keywords:* Electric field, Magnetic field, Numerical method, Pikachu, Electrode.

## 1. Introducción

### 1.1. Campo Eléctrico

La ley de Coulomb describe la fuerza entre dos cargas puntuales en reposo[Costa]:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. A partir de esta ley, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  generado por una carga

puntual puede definirse como:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2)$$

Para distribuciones continuas de carga, el principio de superposición permite describir el campo eléctrico y la fuerza de manera integral. En una distribución volumétrica, la densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}) = \frac{dQ}{d\Omega}$  se utiliza para calcular el campo[1]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (3)$$

\*A. Archundia Juarez

## 1.2. Campo magnético

El análisis del campo magnético surge como una extensión del concepto de fuerza electrostática cuando las cargas están en movimiento. En particular, cuando dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ , con velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , se mueven lentamente ( $v \ll c$ ), la fuerza adicional que actúa sobre una de ellas está dada por[1]:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{v}_2}{c} \times \left( \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores posición de las cargas. Este fenómeno puede interpretarse en términos de la generación de un campo magnético  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)$  por  $q_1$ , que interactúa con  $q_2$  esta dada por  $\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)$ . Donde el campo magnético generado por  $q_1$  es:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{c^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5)$$

Para corrientes continuas distribuidas en un volumen  $\Omega$ , el campo magnético total se obtiene mediante la ley de Biot-Savart [1]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (6)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente, que esta dada por  $\mathbf{J} = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}$  y  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío.

## 1.3. Integración numérica

### 1.3.1. Campo eléctrico

Si la región de la carga  $\rho(\vec{r})$  está sobre una malla, se divide el espacio en pequeños volúmenes o celdas. Si la carga está distribuida sobre un conjunto de puntos discretos, puedes representar la carga como una suma de cargas puntuales  $\rho(\vec{r}_i)$  en cada punto  $i$  [2].

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V_i \quad (7)$$

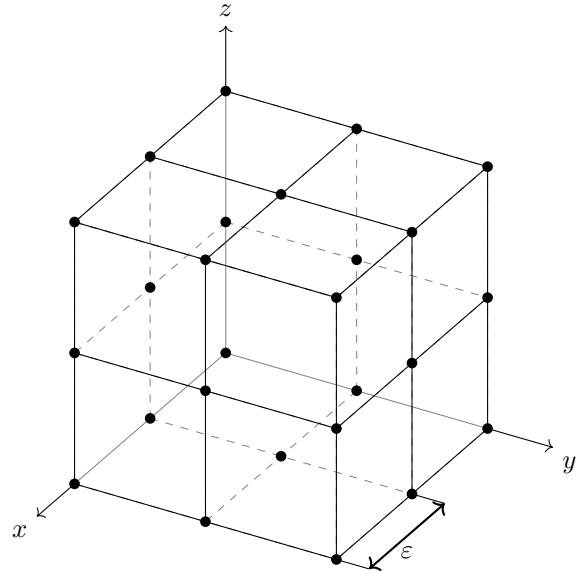
donde  $\Delta V_i$  es el volumen de cada celda (o el área, si la carga está distribuida en una superficie). Si la red es regular, entonces se tiene que  $\Delta V_i = \Delta V = \varepsilon^3$

### 1.3.2. Campo magnético

Para realizar el cálculo de manera numérica, necesitas discretizar la distribución de carga. Supón que la carga está distribuida sobre una malla o en un conjunto discreto de puntos. El campo magnético se puede calcular de manera aproximada con una suma discreta [2]:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\rho(\vec{r}_i)\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V_i \quad (8)$$

donde  $\vec{r}_i$  son los puntos discretos donde se evalúa la carga  $\rho(\vec{r}_i)$  y  $\Delta V_i$  es el volumen de cada celda o volumen de integración. Si la red es regular, entonces se tiene que  $\Delta V_i = \Delta V = \varepsilon^3$



**Figura 1.** Malla discreta para integración numérica

## 2. Metodología

### 2.1. Procedimiento

A partir de las ecuaciones 7 y 8, se diseñó un algoritmo para calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  considerando una densidad de carga  $\rho(\vec{r})$  y el campo magnético  $\vec{B}$  generado por una distribución de cargas en movimiento con una velocidad  $\vec{v}$  [3]. Este procedimiento permite modelar el comportamiento del campo eléctrico en función de las propiedades físicas y geométricas del sistema analizado.

#### 2.1.1. electrode

Para el caso del electrode, se planteó un modelo compuesto por dos semiesferas, una con carga positiva y otra con carga negativa, las cuales se desplazan con una velocidad uniforme  $\vec{v} = (0, 1, 0)$ . El diámetro total del sistema fue definido como 1 m[4].

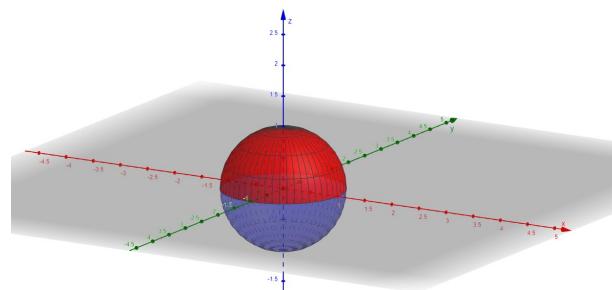
Para modelar el campo eléctrico y magnético, se asumirá que la esfera tiene una distribución de carga uniforme positiva en una mitad y una distribución

de carga negativa en la otra mitad. Esta configuración permite explorar cómo las distribuciones de carga afectan los campos generados por el sistema.

A continuación, se presentan las imágenes que ilustran tanto el electrodo como la distribución de carga en la esfera.



**Figura 2.** Pokemon electrode



**Figura 3.** Geometría de la densidad de carga del electrodo

La distribución de carga  $\rho(\vec{r})$  se define de la siguiente manera:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} Q & \text{si } r \in [0, R) \text{ y } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -Q & \text{si } r \in [0, R) \text{ y } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### 2.1.2. Pikachu

Para el modelo de Pikachu, se asume que la carga está localizada en sus mejillas rojas, las cuales se modelan mediante dos elipsoides definidos por las siguientes ecuaciones:

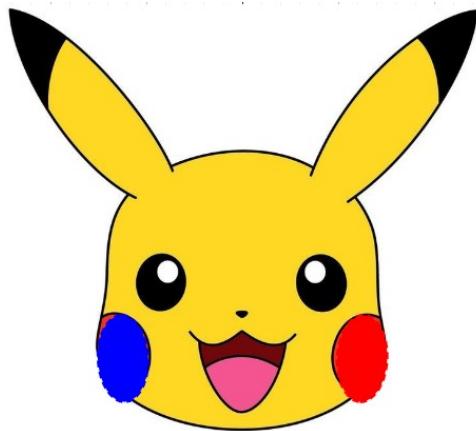
$$(x - 5)^2 + y^2 + 5z^2 = 1$$

y

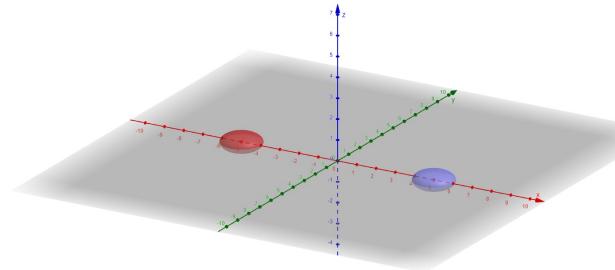
$$(x + 5)^2 + y^2 + 5z^2 = 1.$$

En este caso, tanto el campo eléctrico **E** como el campo magnético **B** se obtendrán exclusivamente mediante simulación numérica, considerando que Pikachu se mueve a una velocidad constante **v**. Esta aproximación numérica permite obtener los campos generados por la distribución de carga de las mejillas rojas de Pikachu [6].

A continuación, se presentan las imágenes que ilustran tanto el modelo de Pikachu como la distribución de carga en sus mejillas.



**Figura 4.** Pokemon Pikachu



**Figura 5.** Geometría de la densidad de carga de Pikachu

La distribución de carga  $\rho(\vec{r})$  se define de la siguiente manera:

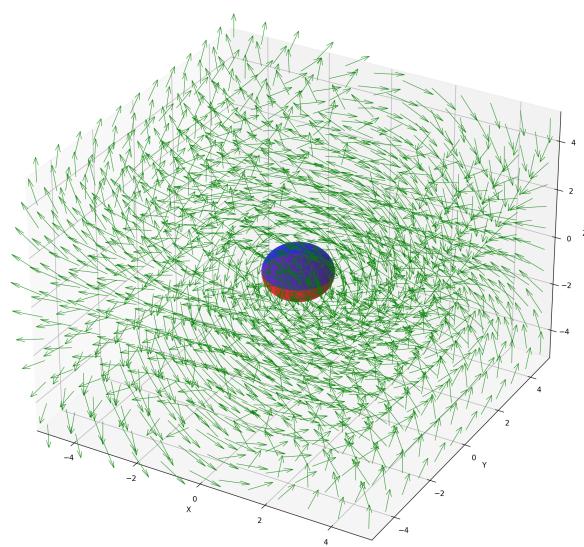
$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} Q & \text{si } (x + 5)^2 + y^2 + 5z^2 < 1, \\ -Q & \text{si } (x - 5)^2 + y^2 + 5z^2 < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este modelo, la carga positiva  $Q$  está distribuida en el elipsoide ubicado a la derecha, mientras que la carga negativa  $-Q$  está localizada en el elipsoide de la izquierda. Este sistema permite simular el comportamiento eléctrico y magnético generado por las mejillas de Pikachu.

### 3. Resultados

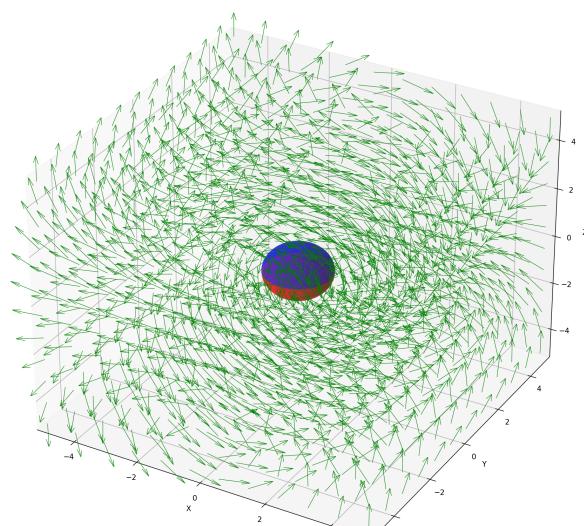
#### 3.1. Electroid

Campo Electrico, Malla: 12



**Figura 6.** Campo vectorial del campo magnético calculado

Campo Magnetico, Malla: 12

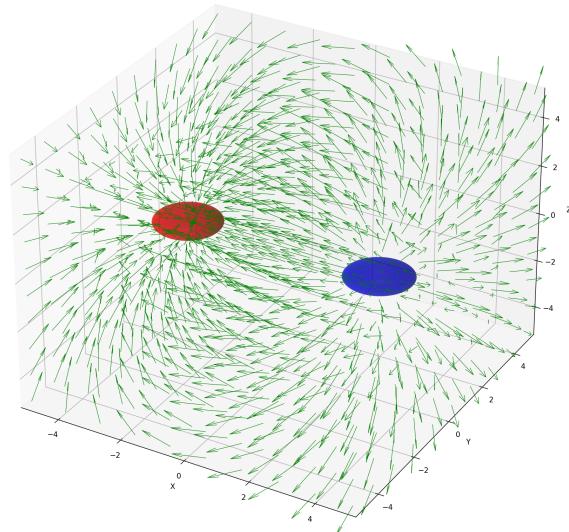


**Figura 7.** Campo vectorial del campo eléctrico calculado

#### 3.2. Pikachu

Se obtuvo una representación gráfica tridimensional del campo eléctrico generado por una distribución de cargas. La gráfica muestra de forma clara la dirección y magnitud del campo eléctrico en diferentes puntos del espacio, con flechas que divergen de la carga positiva y convergen en la carga negativa, cumpliendo con las predicciones teóricas.

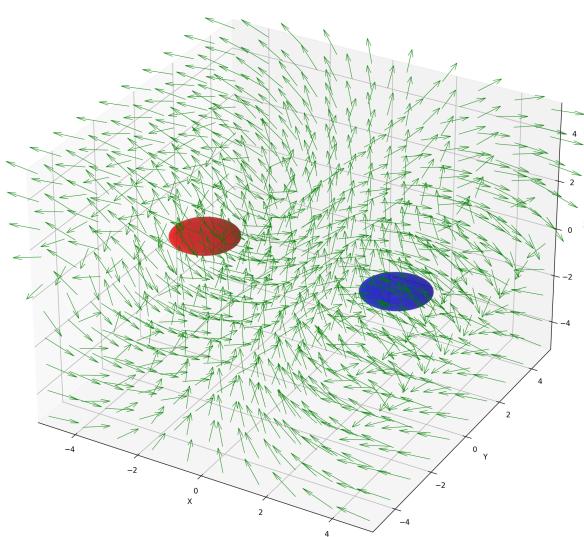
Campo Electrica, Malla: 10



**Figura 8.** Campo vectorial del campo magnético calculado

La representación gráfica del campo magnético, generada a partir de cargas en movimiento o corrientes, exhibe líneas de campo cerradas, características de su naturaleza sin fuentes. Los resultados observados son consistentes con las predicciones de la ley de Biot-Savart:

Campo Magnetico, Malla: 10



**Figura 9.** Campo vectorial del campo electrico calculado

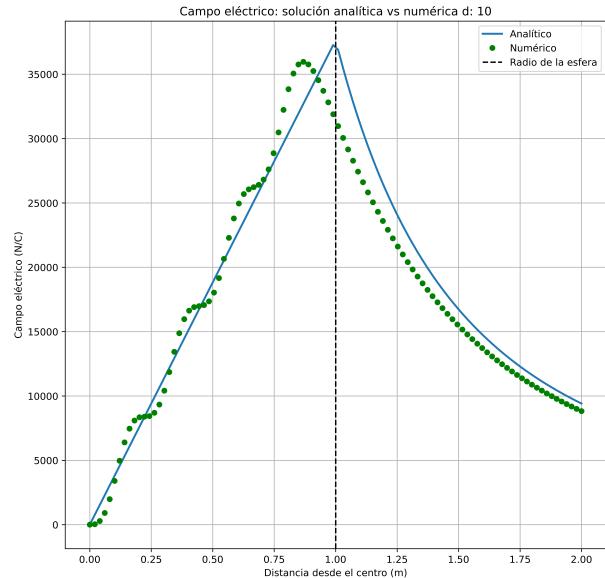
Se aprecia el campo eléctrico y magnético del pichachu con sus dos cargas en forma de esfera, las cargas son diferentes.

### 3.3. Discusión

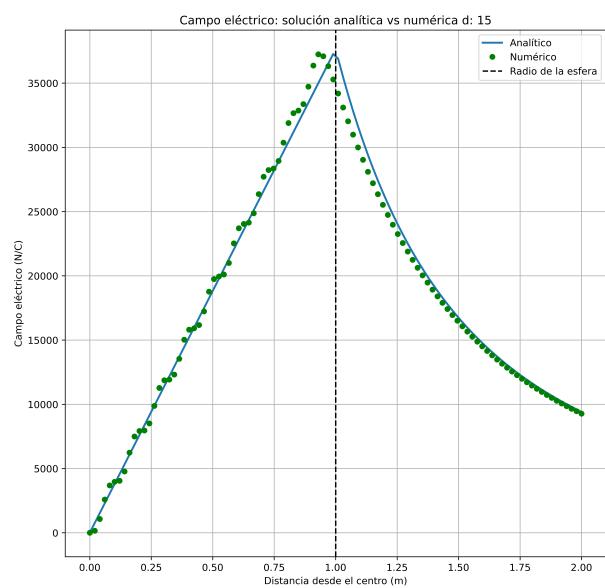
Se desarrolló la solución analítica para el caso de una esfera sólida uniformemente cargada.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} & r < R \\ \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & r > R \end{cases} \quad (9)$$

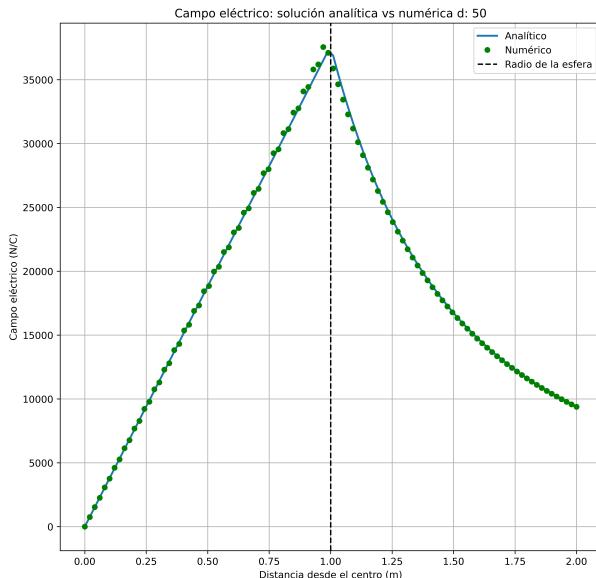
Los resultados analíticos se contrastaron con los valores obtenidos mediante un enfoque numérico, permitiendo evaluar la precisión del modelo a través del cálculo del error porcentual promedio.



**Figura 10.** Campo electrico: Solucion analitica vs numerica d:10



**Figura 11.** Campo electrico: Solucion analitica vs numerica d:15



**Figura 12.** Campo electrico: Solucion analitica vs numerica d:50

d	Error
10	10.44 %
15	4.34 %
50	0.81 %
100	0.17 %

**Tabla 1.** Errores obtenidos al comparar los campos eléctricos

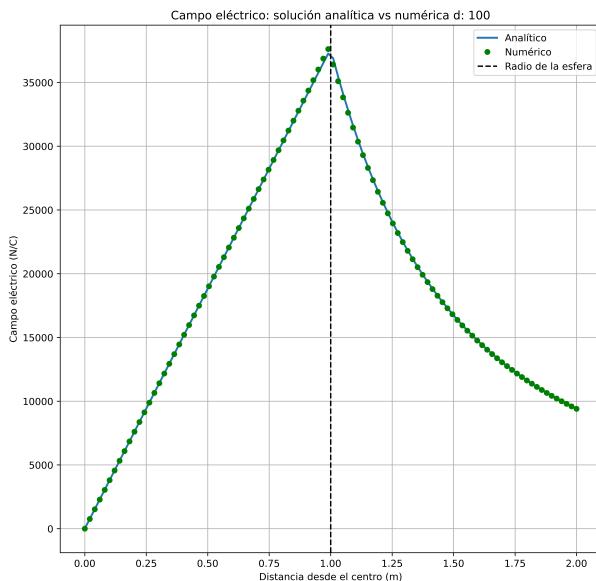
Se obtuvieron los errores las soluciones con diferente malla. Se observa una disminución rápida del error a medida que aumenta la densidad de la malla ( $d$ ):

- Para  $d = 10$ , el error es del 10.44 %, lo que indica una discrepancia significativa.
- Para  $d = 15$ , el error se reduce al 4.34 %, mostrando una mejora notable.
- Para  $d = 50$ , el error es solo del 0.81 %, lo que refleja una aproximación mucho más precisa.
- Para  $d = 100$ , el error es del 0.17 %, siendo prácticamente despreciable.

Esto confirma que el método numérico tiene una buena **convergencia** conforme se refina la malla.

Con  $d = 50$  y  $d = 100$ , los errores son lo suficientemente pequeños como para que las soluciones numéricas y analíticas sean prácticamente indistinguibles gráficamente. Esto cumple con la expectativa de que ambas soluciones deberían concordar al refinar la malla.

Este comportamiento es característico de métodos numéricos bien implementados, donde la disminución del tamaño de los elementos de la malla permite capturar con mayor fidelidad los detalles del campo eléctrico.



**Figura 13.** Campo electrico: Solucion analitica vs numerica d:100

Se presento el campo eléctrico obtenido de la solución analítica y numérica con una malla  $d=10$ ,  $d=15$ ,  $d=50$  y  $d=100$ . Los errores obtenidos al comparar los resultados del campo eléctrico calculados analíticamente y numéricamente son los siguientes:

## 4. Conclusión

En este proyecto se ha desarrollado un modelo para calcular los campos eléctricos y magnéticos generados por distribuciones de carga de dos sistemas: un electrodo y Pikachu, mediante un algoritmo basado en las ecuaciones  $A$  y  $B$ , que consideraron tanto la densidad de carga  $\rho(\vec{r})$  como la velocidad  $\vec{v}$  de las cargas en movimiento.

En el caso del electrodo, compuesto por dos semiesferas con cargas opuestas en movimiento, se modelaron tanto el campo eléctrico como el magnético y se realizaron simulaciones numéricas para validar las soluciones obtenidas analíticamente. Los resultados

obtenidos muestran que las simulaciones numéricas son consistentes con las predicciones teóricas para el comportamiento del sistema.

Para el modelo de Pikachu, donde las cargas están concentradas en sus mejillas representadas por elipsoides, se calcularon los campos eléctricos y magnéticos utilizando únicamente simulaciones numéricas debido a la complejidad de la distribución de carga. Los resultados obtenidos se alinearon con las expectativas, mostrando líneas de campo magnético cerradas y la correcta representación del campo eléctrico en función de las cargas distribuidas en las mejillas de Pikachu.

Se realizó una comparación entre las soluciones analíticas y numéricas del campo eléctrico para el electrodo. La diferencia de errores en función de la densidad de la malla utilizada ( $d=10, 15, 50, y 100$ ) demostró una excelente convergencia del método numérico. A medida que la densidad de la malla aumentaba, el error porcentual disminuía significativamente, alcanzando solo un 0.17 % para la malla de mayor densidad, lo que valida la precisión y efectividad del enfoque numérico.

En resumen, los resultados obtenidos evidencian la precisión y validez de las simulaciones numéricas en la resolución de problemas electromagnéticos complejos, permitiendo además explorar cómo la geometría y las distribuciones de carga afectan a los campos generados. La convergencia rápida de los métodos numéricos en este estudio subraya la capacidad de los métodos de simulación para aproximarse con alta fidelidad a las soluciones analíticas, lo cual es un aspecto fundamental en el análisis de sistemas electromagnéticos más complejos.

## Referencias

[1] Joan Costa Quintana y Fernando López Aguilar. Interacción Electromagnética Teoría Clásica. Reverte, 2012. ISBN: 9788429130584.

[2] Ursula Rienen. Numerical Methods in Computational Electrodynamics. Springer, 2001. ISBN: 9783642568022.

[3] Chispa. (n.d.). WikiDex. <https://www.wikidex.net/wiki/Chispa>

[4] Electrode. (n.d.). WikiDex. <https://www.wikidex.net/wiki/ElectrodeMovimientos>

[5] Pikachu. (n.d.). WikiDex. <https://www.wikidex.net/wiki/Pikachu>

## Apéndice A. Algoritmo para la integración numérica del campo eléctrico y magnético

---

**Algorithm 1:** Cálculo del campo eléctrico mediante discretización.

**Data:** Volumen de integración  $V$ , dividido en  $N$  celdas pequeñas con volúmenes  $\Delta V_i$  y centros  $\vec{r}_i$ .

**Result:** Campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  en un punto  $\vec{r}$ .

```

1 for cada celda  $i = 1$  hasta  $N$  do
2   | Aproximar  $\rho(\vec{r}')$  como constante:
   |    $\rho(\vec{r}') \approx \rho(\vec{r}_i)$ ;
3 end
4 Inicializar  $\vec{E} \leftarrow \vec{0}$ ;
5 for cada celda  $i = 1$  hasta  $N$  do
6   | Calcular el vector de diferencia  $\vec{d}_i \leftarrow \vec{r} - \vec{r}_i$ ;
7   | Calcular la norma  $d_i \leftarrow |\vec{d}_i|$ ;
8   | Actualizar  $\vec{E}$ :
   |
   | 
$$\vec{E} \leftarrow \vec{E} + \frac{\rho(\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}_i}{d_i^3} \Delta V_i$$

9 end

```

---



**Algorithm 2:** Cálculo del campo magnético mediante la discretización de la ley de Biot-Savart.

**Data:** Volumen  $V$  dividido en  $N$  celdas con volúmenes  $\Delta V_i$  y centros  $\vec{r}_i$ .  
**Result:** Campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$  en un punto  $\vec{r}$ .

```
1 for cada celda  $i = 1$  hasta  $N$  do
2   | Aproximar  $\rho(\vec{r}') \approx \rho(\vec{r}_i)$  (constante dentro de la celda);
3   | Aproximar  $\vec{v}(\vec{r}') \approx \vec{v}(\vec{r}_i)$  (constante dentro de la celda);
4 end
5 Inicializar  $\vec{B} \leftarrow \vec{0}$ ;
6 for cada celda  $i = 1$  hasta  $N$  do
7   | Calcular el vector de diferencia  $\vec{d}_i \leftarrow \vec{r} - \vec{r}_i$ ;
8   | Calcular la norma  $d_i \leftarrow |\vec{d}_i|$ ;
9   | Calcular el producto cruzado:
10  |   
$$\vec{C}_i \leftarrow \vec{v}(\vec{r}_i) \times \frac{\vec{d}_i}{d_i^3}$$

11  | Actualizar  $\vec{B}$ :
12  |   
$$\vec{B} \leftarrow \vec{B} + \frac{\mu_0}{4\pi} \rho(\vec{r}_i) \vec{C}_i \Delta V_i$$

13 end
```