ITESM

ANÁLISIS MECANISMO 4 BARRAS

M2025.820

Proyecto 2º parcial.

Authors: Maxiliano Macotela Nava, Julio Rodríguez Salcedo,Jim Kevin Holguín Rodríguez,Luz Karen Hernández Hernández, Andrés Serrato, César David Rosales Álvar

November 2, 2021

INTRODUCCIÓN

El mecanismo de cuatro barras es la cadena cinemática cerrada más simple de eslabones unidos con un simple grado de libertad (después de unido un eslabón). Mecanismos más complejos pueden ser reinventados y mejorados por medio del uso de un mecanismo de cuatro barras que maneje alguno o algunos otros. Debido a esta propiedad, y debido a la amplia variedad de movimientos los cuales pueden ser generados directamente por mecanismos de cuatro barras, ellos son a menudo encontrados en el corazón de máquinas y subsistemas tales como prensas, máquinas transportadoras, mecanismos de retornos rápidos, computadoras análogas y generadores de funciones. El estudio del mecanismo de cuatro barras está bien justificado no sólo debido a sus diferentes aplicaciones directas, sino también debido a que la mayoría de los problemas básicos encontrados en diversos mecanismos generales llegan a ser más simples y entendibles en la aplicación del mecanismo de cuatro barras.

ANÁLISIS DEL MECANISMO

El mecanismo es un sistema de elevador que opera mediante manivelas, brazos y engranajes para mover un remolque. Usa como referencia a los trabajos artísticos de Theo Jansen, un artista mecánico neerlandés que crea los "Strandbeest". El movimiento del remolque consiste en ser levantado por una pinza y cuando este llegue casi a su altura máxima la pinza suelta el remolque cayendo al piso para volver a ser levantado por la pinza y así sucesivamente. El mecanismo tiene agregado dos engranes justo enfrente de la manivela, estos engranes accionan un pistón inclinado que al momento de llegar a su posición trasera, mueve una pelota que ingresa al camino del pistón y cuando este llega casi al final, la pelota sale del camino del pistón hacia una rampa para deslizarse hacia la parte inferior del remolque y sea aplastada por este mismo cuando caiga.

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Por mediciones físicas fácilmente se pueden tener las longitudes de las barras 1, 2, 3, 4. Ya que la barra 1 es estacionaria, su ángulo es fijo. Se dice que el ángulo de la barra 2 con respecto a la horizontal es una variable controladora. Por lo tanto, las incógnitas serán los ángulos de las barras 3 y 4.

Ecuación vectorial:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 = \bar{0}$$

$$l_1 \cos\theta_1 i + l_1 \sin\theta_1 j + l_2 \cos\theta_2 i + l_2 \sin\theta_2 j + l_3 \cos\theta_3 i + l_3 \sin\theta_3 j + l_4 \cos\theta_4 i + l_4 \sin\theta_4 j = \bar{0}$$

Separando las ecuaciones en dirección "i" y dirección "j"

Ecuación en "i": $l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_4 = 0$
Ecuación en "j": $l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 + l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_4 = 0$

Como se conocen el ángulo de la barra 2 y el ángulo de la barra 1, es posible simplificar realizando los siguientes cambios de variable:

$$A = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$
$$B = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

Con lo cual queda el sistema de ecuaciones como:

$$A + l_3 \cos\theta_3 = -l_4 \cos\theta_4$$
$$B + l_3 \sin\theta_3 = -l_4 \sin\theta_4$$

Al elevar los términos al cuadrado y sumar ambas ecuaciones, teniendo en cuenta que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, se simplifica de la siguiente manera:

$$A^2 + 2Al_3 \cos\theta_3 + B^2 + 2Bl_3 \sin\theta_3 + l_3^2 = l_4^2$$

$$A\cos\theta_3 + B\sin\theta_3 = \frac{l_4^2 - l_3^2 - A^2 - B^2}{2l_3}$$

Es posible volver a simplificar realizando el siguiente cambio de variable:

$$C = \frac{l_4^2 - l_3^2 - A^2 - B^2}{2l_3}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}, \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}$$

y sustituyendo las identidades en la ecuación:

$$\frac{A\left(1-\tan^2\frac{1}{2}\theta_3\right) + B\left(2\tan\frac{1}{2}\theta_3\right)}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta_3} = C$$

se obtiene una ecuación cuadrática. Al usar la fórmula general para resolver el sistema se obtiene:

$$\tan\frac{1}{2}\theta_3 = \frac{B \pm \sqrt{A^2+B^2-C^2}}{C+A}$$

El valor para el ángulo de la barra 3 es el siguiente:

$$\theta_3 = 2\,tan^{-1}\left(\frac{B \pm \sqrt{A^2+B^2-C^2}}{C+A}\right)$$

Para obtener el valor del ángulo de la barra 4 es el mismo procedimiento, definiendo el siguiente cambio de variable:

$$D = -\frac{l_3^2 - l_4^2 - A^2 - B^2}{2l_4}$$

El valor del ángulo de la barra 4 resulta:

$$\theta_4 = 2\,tan^{-1}\left(\frac{B \pm \sqrt{A^2+B^2-D^2}}{D+A}\right)$$

NOTA: los dos valores que se pueden obtener para cada ángulo representan las diferentes configuraciones del sistema.

Las componentes del vector de posición dependen del tiempo puesto que la partícula está en movimiento. Con el objeto de simplificar la notación con frecuencia omitiremos dicha dependencia en las expresiones de los vectores.

El vector **velocidad** es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,(m/s)$$

Que también puede ser expresado:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\,(m/s)$$

El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria de la partícula en cada punto de la misma.

El vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

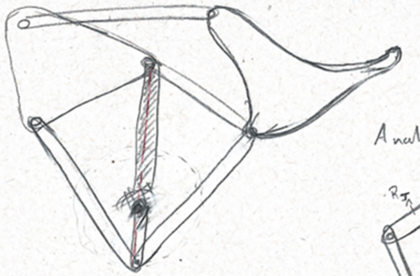
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}\,(m/s^2)$$

Que también puede ser expresado en la forma:

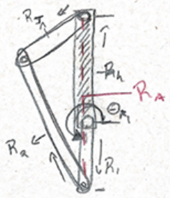
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\,(m/s^2)$$

El vector aceleración es la variación del vector velocidad a lo largo del tiempo. Por tanto debe apuntar siempre hacia dentro de la trayectoria de la partícula, como se observa en la figura.

En estas páginas encontrarás numerosos problemas donde aprenderás a calcular estos tres vectores en diferentes situaciones.



Analisis Seccion Izquierda



Ecuacion de Cierre

$$R_1 + R_A = R_h$$

$$R_1 e^{j\theta_1} + R_A e^{j\theta_A} = R_h e^{j\theta_h}$$

Definimos como conocidos todos los eslabones y el angulo inicial θ_{R_1}

$$R_1(\cos\theta_1 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_1) - R_A(\cos\theta_A + j\,\mathrm{sen}\,\theta_A) = R_h(\cancel{\cos}\,\theta_h^{0} + \cancel{j\,\mathrm{sen}}\,\theta_h^{1})$$

$$\Re: R_1\cos\theta_1 = R_A\cos\theta_A$$

$$j: R_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - R_h = R_A\,\mathrm{sen}\,\theta_A$$

$$R_A = \sqrt{(R_1\cos\theta_1)^2 + (R_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - R_h)^2}$$

$$\theta_A = \cos^{-1}\left(\frac{R_1\cos\theta_1}{R_A}\right)$$

$$R_A = R_1 + R_{12}$$

$$\Re: R_A\cos\theta_A = R_2\cos\theta_2 + R_{J_1}\cos\theta_{J_1}$$

$$j: R_A\,\mathrm{sen}\,\theta_A = R_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + R_{J}\,\mathrm{sen}\,\theta_{J}$$

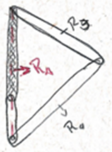
$$\theta_{J_1} = \cos^{-1}\left(\frac{R_A\cos\theta_A - R_2\cos\theta_2}{R_J}\right)$$

$$(R_A\cos\theta_A - R_2\cos\theta_2)^2 = (R_{J_1}\cos\theta_{J_1})^2$$

$$(R_A\,\mathrm{sen}\,\theta_A - R_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2)^2 = (R_{J_1}\,\mathrm{sen}\,\theta_{J_1})^2$$

$$R_A^2 - 2R_AR_2(\cos\theta_A - \theta_2) + R_2^2 = R_{J_1}^2$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{R_{J_1}^2 - R_A^2 - R_2^2}{2R_AR_2}\right) + \theta_A$$



$R_A = R_3 + R_4$

$\mathbb{R}: R_A \cos\theta_A + R_3 \cos\theta_3 = R_4 \cos\theta_4$

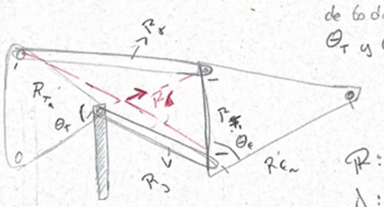
$\mathfrak{J}: R_A \operatorname{sen}\theta_A - R_3 \operatorname{sen}\theta_3 = R_4 \operatorname{sen}\theta_4$

$R_A^2 - 2R_A R_3 (\cos\theta_A - \theta_3) + R_3^2 = R_4$

$$\underline{\theta_3 = \cos^{-1}}\left(\frac{R_4^2 - R_3^2 - R_A^2}{2R_A R_3}\right) + \theta_A$$

$$\underline{\theta_4 = \cos^{-1}}\left(\frac{R_A \cos\theta_A - R_3 \cos\theta_3}{R_4}\right)$$

\# Considerando conocemos las dimensiones de todos los eslabones complejos, se conoce θ_T y θ_F



$$\theta_{T_2} = \theta_{T_1} - \theta_T$$

$R_3 + R_{T_2} = R_6$

$\mathbb{R}: R_3 \cos\theta_3 + R_{T_2} \cos\theta_{T_2} = R_6 \cos\theta_6$

$\mathfrak{J}: R_3 \operatorname{sen}\theta_3 + R_{T_2} \operatorname{sen}\theta_{T_2} = R_6 \operatorname{sen}\theta_6$

$$\underline{R_6} = \sqrt{(R_3 \cos\theta_3 + R_{T_2} \cos\theta_{T_2})^2 + (R_3 \operatorname{sen}\theta_3 + R_{T_2} \operatorname{sen}\theta_{T_2})^2}$$

$$\theta_6 = \cos^{-1}\left(\frac{R_3 \cos\theta_3 + R_{T_2} \cos\theta_{T_2}}{R_6}\right)$$

$R_5 + R_{F_1} = R_6$

$\mathbb{R}: R_5 \cos\theta_5 \pm R_{F_1} \cos\theta_{F_1} = R_6 \cos\theta_6$

$\mathfrak{J}: R_5 \operatorname{sen}\theta_5 \pm R_{F_1} \operatorname{sen}\theta_{F_1} = R_6 \operatorname{sen}\theta_6$

$R_5^2 = R_{F_1}^2 \mp 2 R_{F_1} R_6 \cos\theta_{F_1} - \theta_6 + R_6^2$

$$\underline{\theta_{F_1}} = \cos^{-1}\left(\frac{R_5^2 - R_{F_1}^2 - R_6^2}{2R_{F_1} R_6}\right) + \theta_6$$

$$\underline{\theta_5} = \cos^{-1}\left(\frac{R_{F_1} \cos\theta_{F_1} - R_6 \cos\theta_6}{R_5}\right)$$