

CESAR School - Teoria da Computação

Exercício 4 - Conceitos de Computabilidade e Linguagem Algorítmica

Prof. Ioram Sette - iss@cesar.school

27 de Setembro de 2019

1. Determine o valor de $\langle \varsigma \circ \zeta \circ \pi, (\varsigma \times \iota) \circ (\zeta \times \iota) \rangle (2)$ em Σ_2 .

$$(\varsigma(\zeta(\pi(2))), (\varsigma \times \iota)(\zeta \times \iota)(2))$$

$$(\varsigma(\zeta()), (\varsigma \times \iota)(0, 2))$$

$$(\varsigma(0), (\varsigma(0), \iota(2)))$$

$$(1, (1, 2)) = (1, 1, 2)$$

$$\text{R: } (1, 1, 2)$$

2. Seja $f(x, y) = (x \times y, y)$. Qual o valor de $f^\#(1, 3, 4)$?

$$(1) f(1, 3) = (1 \times 3, 3) = (3, 3)$$

$$(2) f(3, 3) = (3 \times 3, 3) = (9, 3)$$

$$(3) f(9, 3) = (9 \times 3, 3) = (27, 3)$$

$$(4) f(3, 3) = (27 \times 3, 3) = (81, 3)$$

$$\text{R: } (81, 3)$$

3. Sejam $f(x, y, z) = (x \div y, y, (((x + 1) \div y) \div y) + 1)$ e $g(x, y) = f^\nabla(x + y, y, 0)$.

- (a) Qual é o valor de $g(x, y)$ para $y > 0$?

$$g(9, 3) = f^\nabla(9 + 3, 3, 0) = f^\nabla(12, 3, 0)$$

$$f(12, 3, 0) = (12 \div 3, 3, (((12 + 1) \div 3) \div 3) + 1) = (9, 3, 8)$$

$$f(9, 3, 8) = (9 \div 3, 3, (((9 + 1) \div 3) \div 3) + 1) = (6, 3, 5)$$

$$f(6, 3, 5) = (6 \div 3, 3, (((6 + 1) \div 3) \div 3) + 1) = (3, 3, 2)$$

$$f(3, 3, 2) = (3 \div 3, 3, (((3 + 1) \div 3) \div 3) + 1) = (0, 3, 1)$$

$$g(9, 3) = (0, 3)$$

$$g(9, 4) = f^\nabla(9 + 4, 4, 0) = f^\nabla(13, 4, 0)$$

$$f(13, 4, 0) = (13 \div 4, 4, (((13 + 1) \div 4) \div 4) + 1) = (9, 4, 7)$$

$$f(9, 4, 7) = (9 \div 4, 4, (((9 + 1) \div 4) \div 4) + 1) = (5, 4, 5)$$

$$f(5, 4, 5) = (5 \div 4, 4, (((5 + 1) \div 4) \div 4) + 1) = (1, 4, 1)$$

$$g(9, 4) = (1, 4)$$

$$\text{R: } g(x, y) = (x \% y, y)$$

- (b) Qual é o valor de $g(x, 0)$?

$$g(9, 0) = f^\nabla(9 + 0, 0, 0) = f^\nabla(9, 0, 0)$$

$$f(9, 0, 0) = (9 \div 0, 0, (((9 + 1) \div 0) \div 0) + 1) = (9, 0, 11)$$

$$f(9, 0, 11) = (9 \div 0, 0, (((9 + 1) \div 0) \div 0) + 1) = (9, 0, 11)$$

...

$$\text{R: } g(x, 0) = \uparrow$$

4. Mostre que as seguintes computações podem ser realizadas em PL-{GOTO}:

- (a) $Z \leftarrow X/Y$; (divisão inteira, com $X/0 = 0$)
 $U1 \leftarrow X$;
 $U2 \leftarrow Y$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 $LOOP\ U1$;
 $LOOP\ (U1 \geq U2)$;
 $U1 \leftarrow U1 \div U2$;
 $V1 \leftarrow V1 + 1$;
 END ;
 END ;
 $Z \leftarrow V1$;
 $LOOP\ \neg U2$;
 $Z \leftarrow 0$;
 END ;
- (b) $Z \leftarrow X\%Y$; (resto da divisão inteira, com $X\%0 = 0$)
 $U1 \leftarrow X$;
 $U2 \leftarrow Y$;
 $LOOP\ U1$;
 $LOOP\ (U1 \geq U2)$;
 $U1 \leftarrow U1 \div U2$;
 END ;
 END ;
 $Z \leftarrow U1$;
 $LOOP\ \neg U2$;
 $Z \leftarrow 0$;
 END ;
- (c) $Z \leftarrow X = Y$; onde $X = Y$ é $\begin{cases} 1 & \text{se } X = Y \\ 0 & \text{se } X \neq Y \end{cases}$
 $U1 \leftarrow X \div Y$;
 $U2 \leftarrow Y \div X$;
 $V1 \leftarrow 1$;
 $LOOP\ U1$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 END ;
 $LOOP\ U2$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 END ;
 $Z \leftarrow V1$;
- (d) $Z \leftarrow X \neq Y$; onde $X \neq Y$ é $\begin{cases} 1 & \text{se } X \neq Y \\ 0 & \text{se } X = Y \end{cases}$
 $U1 \leftarrow X = Y$;
 $Z \leftarrow \neg U1$;
- (e) $Z \leftarrow X < Y$; onde $X < Y$ é $\begin{cases} 1 & \text{se } X < Y \\ 0 & \text{se } X \geq Y \end{cases}$
 $U1 \leftarrow Y \div X$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 $LOOP\ U1$;
 $V1 \leftarrow 1$;
 END ;
 $Z \leftarrow V1$;

- (f) $Z \leftarrow X \geq Y$; onde $X \geq Y$ é $\begin{cases} 1 & \text{se } X \geq Y \\ 0 & \text{se } X < Y \end{cases}$
 $U1 \leftarrow X < Y$;
 $Z \leftarrow \neg U1$;
- (g) $Z \leftarrow X > Y$; onde $X > Y$ é $\begin{cases} 1 & \text{se } X > Y \\ 0 & \text{se } X \leq Y \end{cases}$
 $U1 \leftarrow X \leq Y$;
 $Z \leftarrow \neg U1$;
- (h) $Z \leftarrow X \wedge Y$; onde $X \wedge Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X > 0 \text{ e } Y > 0 \\ 0 & \text{se } X = 0 \text{ ou } Y = 0 \end{cases}$
 $U1 \leftarrow X \times Y$;
 $U2 \leftarrow \neg U1$;
 $Z \leftarrow \neg U2$;

5. Escreva programas PL que computem as seguintes funções. Se usar macro(s), expanda-o(s).

- (a) $f(x) = 2^x$
 $U1 \leftarrow X1$;
 $T1 \leftarrow 0$;
 $T1 \leftarrow T1 + 1$;
 $T1 \leftarrow T1 + 1$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 $V1 \leftarrow V1 + 1$;
 $LOOP\ U1$;
 $T2 \leftarrow 0$;
 $LOOP\ V1$;
 $LOOP\ T1$;
 $T2 \leftarrow T2 + 1$;
 END ;
 END ;
 $V1 \leftarrow T2$;
 END ;
 $Y1 \leftarrow V1$;
- (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um número primo } \geq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
 $U1 \leftarrow X1 \div 2$;
 $DIVISOR \leftarrow 2$;
 $V1 \leftarrow 1$;
 $T1 \leftarrow 0$;
 $LOOP\ U1$;
 $T1 \leftarrow X1 \% DIVISOR$;
 $LOOP\ \neg T1$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 END ;
 $DIVISOR \leftarrow DIVISOR + 1$;
 END ;
 $LOOP\ (X1 < 2)$;
 $V1 \leftarrow 0$;
 END ;
 $Y1 \leftarrow V1$;

Expansão dos Macros 1:

```
ZERO  $\leftarrow$  0;  
UM  $\leftarrow$  ZERO + 1;  
DOIS  $\leftarrow$  UM + 1;  
U11  $\leftarrow$  X1;  
U12  $\leftarrow$  DOIS;  
T11  $\leftarrow$  U11;  
LOOP U12;  
  T11  $\leftarrow$  T11  $\div$  1;  
END;  
V11  $\leftarrow$  T11;  
U1  $\leftarrow$  V11;  
DIVISOR  $\leftarrow$  DOIS;  
V1  $\leftarrow$  UM;  
T1  $\leftarrow$  0;  
LOOP U1;  
  U21  $\leftarrow$  X1;  
  U22  $\leftarrow$  DIVISOR;  
  LOOP U21;  
    LOOP (U21  $\geq$  U22);  
      U21  $\leftarrow$  U21  $\div$  U22;  
    END;  
  END;  
  V21  $\leftarrow$  U21;  
  T1  $\leftarrow$  V21;  
  V31  $\leftarrow$   $\neg$ T1;  
  LOOP V31;  
    V11  $\leftarrow$  0;  
  END;  
  DIVISOR  $\leftarrow$  DIVISOR + 1;  
END;  
V31  $\leftarrow$  X1 < 2;  
LOOP V31;  
  V11  $\leftarrow$  0;  
END;  
Y1  $\leftarrow$  V11;
```

Expansão dos Macros 2:

```
ZERO  $\leftarrow$  0;
UM  $\leftarrow$  ZERO + 1;
DOIS  $\leftarrow$  UM + 1;
U11  $\leftarrow$  X1;
U12  $\leftarrow$  DOIS;
T11  $\leftarrow$  U11;
LOOP U12;
  U41  $\leftarrow$  T11;
  T41  $\leftarrow$  0;
  LOOP U41;
    V41  $\leftarrow$  T41;
    T41  $\leftarrow$  T41 + 1;
  END;
  T11  $\leftarrow$  V41;
END;
V11  $\leftarrow$  T11;
U1  $\leftarrow$  V11;
DIVISOR  $\leftarrow$  DOIS;
V1  $\leftarrow$  UM;
T1  $\leftarrow$  0;
LOOP U1;
  U21  $\leftarrow$  X1;
  U22  $\leftarrow$  DIVISOR;
  LOOP U21;
    V31  $\leftarrow$  U21  $\geq$  U22;
    LOOP V31;
      U11  $\leftarrow$  U21;
      U12  $\leftarrow$  U22;
      T11  $\leftarrow$  U11;
      LOOP U12;
        U41  $\leftarrow$  T11;
        T41  $\leftarrow$  0;
        LOOP U41;
          V41  $\leftarrow$  T41;
          T41  $\leftarrow$  T41 + 1;
        END;
        T11  $\leftarrow$  V41;
      END;
      V11  $\leftarrow$  T11;
      U21  $\leftarrow$  V11;
    END;
  END;
  V21  $\leftarrow$  U21;
  T1  $\leftarrow$  V21;
  U51  $\leftarrow$  T1;
  V51  $\leftarrow$  UM;
  LOOP U51;
    V51  $\leftarrow$  0;
  END;
  V31  $\leftarrow$  V51;
  LOOP V31;
    V11  $\leftarrow$  0;
```

```

    END;
    DIVISOR  $\leftarrow$  DIVISOR + 1;
END;
U61  $\leftarrow$  X1;
U62  $\leftarrow$  DOIS;
T61  $\leftarrow$  U62  $\div$  U61;
V61  $\leftarrow$  0;
LOOP T61;
    V61  $\leftarrow$  0;
END;
V31  $\leftarrow$  V61;
LOOP V31;
    V11  $\leftarrow$  0;
END;
Y1  $\leftarrow$  V11;

```

Expansão dos Macros 3:

```
ZERO  $\leftarrow$  0;
UM  $\leftarrow$  ZERO + 1;
DOIS  $\leftarrow$  UM + 1;
U11  $\leftarrow$  X1;
U12  $\leftarrow$  DOIS;
T11  $\leftarrow$  U11;
LOOP U12;
  U41  $\leftarrow$  T11;
  T41  $\leftarrow$  0;
  LOOP U41;
    V41  $\leftarrow$  T41;
    T41  $\leftarrow$  T41 + 1;
  END;
  T11  $\leftarrow$  V41;
END;
V11  $\leftarrow$  T11;
U1  $\leftarrow$  V11;
DIVISOR  $\leftarrow$  DOIS;
V1  $\leftarrow$  UM;
T1  $\leftarrow$  0;
LOOP U1;
  U21  $\leftarrow$  X1;
  U22  $\leftarrow$  DIVISOR;
  LOOP U21;
    U71  $\leftarrow$  U21;
    U72  $\leftarrow$  U22;
    V71  $\leftarrow$  U72  $\div$  U71;
    V71  $\leftarrow$   $\neg$ V71;
    V31  $\leftarrow$  V71;
    LOOP V31;
      U11  $\leftarrow$  U21;
      U12  $\leftarrow$  U22;
      T11  $\leftarrow$  U11;
      LOOP U12;
        U41  $\leftarrow$  T11;
        T41  $\leftarrow$  0;
        LOOP U41;
          V41  $\leftarrow$  T41;
          T41  $\leftarrow$  T41 + 1;
        END;
        T11  $\leftarrow$  V41;
      END;
      V11  $\leftarrow$  T11;
      U21  $\leftarrow$  V11;
    END;
  END;
  V21  $\leftarrow$  U21;
  T1  $\leftarrow$  V21;
  U51  $\leftarrow$  T1;
  V51  $\leftarrow$  UM;
  LOOP U51;
    V51  $\leftarrow$  0;
```

```

END;
V31 ← V51;
LOOP V31;
  V11 ← 0;
END;
DIVISOR ← DIVISOR + 1;
END;
U61 ← X1;
U62 ← DOIS;
U11 ← U62;
U12 ← U61;
T11 ← U11;
LOOP U12;
  U41 ← T11;
  T41 ← 0;
  LOOP U41;
    V41 ← T41;
    T41 ← T41 + 1;
  END;
  T11 ← V41;
END;
V11 ← T11;
T61 ← V11;
V61 ← 0;
LOOP T61;
  V61 ← 0;
END;
V31 ← V61;
LOOP V31;
  V11 ← 0;
END;
Y1 ← V11;

```


Expansão dos Macros 4:

```
ZERO  $\leftarrow$  0;
UM  $\leftarrow$  ZERO + 1;
DOIS  $\leftarrow$  UM + 1;
U11  $\leftarrow$  X1;
U12  $\leftarrow$  DOIS;
T11  $\leftarrow$  U11;
LOOP U12;
  U41  $\leftarrow$  T11;
  T41  $\leftarrow$  0;
  LOOP U41;
    V41  $\leftarrow$  T41;
    T41  $\leftarrow$  T41 + 1;
  END;
  T11  $\leftarrow$  V41;
END;
V11  $\leftarrow$  T11;
U1  $\leftarrow$  V11;
DIVISOR  $\leftarrow$  DOIS;
V1  $\leftarrow$  UM;
T1  $\leftarrow$  0;
LOOP U1;
  U21  $\leftarrow$  X1;
  U22  $\leftarrow$  DIVISOR;
  LOOP U21;
    U71  $\leftarrow$  U21;
    U72  $\leftarrow$  U22;
    U11  $\leftarrow$  U72;
    U12  $\leftarrow$  U71;
    T11  $\leftarrow$  U11;
    LOOP U12;
      U41  $\leftarrow$  T11;
      T41  $\leftarrow$  0;
      LOOP U41;
        V41  $\leftarrow$  T41;
        T41  $\leftarrow$  T41 + 1;
      END;
      T11  $\leftarrow$  V41;
    END;
    V11  $\leftarrow$  T11;
    V71  $\leftarrow$  V11;
    U51  $\leftarrow$  V71;
    V51  $\leftarrow$  UM;
    LOOP U51;
      V51  $\leftarrow$  0;
    END;
    V71  $\leftarrow$  V51;
    LOOP V31;
      U11  $\leftarrow$  U21;
      U12  $\leftarrow$  U22;
      T11  $\leftarrow$  U11;
      LOOP U12;
        U41  $\leftarrow$  T11;
```

```

     $T_{41} \leftarrow 0;$ 
    LOOP  $U_{41};$ 
         $V_{41} \leftarrow T_{41};$ 
         $T_{41} \leftarrow T_{41} + 1;$ 
    END;
     $T_{11} \leftarrow V_{41};$ 
    END;
     $V_{11} \leftarrow T_{11};$ 
     $U_{21} \leftarrow V_{11};$ 
    END;
    END;
     $V_{21} \leftarrow U_{21};$ 
     $T_1 \leftarrow V_{21};$ 
     $U_{51} \leftarrow T_1;$ 
     $V_{51} \leftarrow UM;$ 
    LOOP  $U_{51};$ 
         $V_{51} \leftarrow 0;$ 
    END;
     $V_{31} \leftarrow V_{51};$ 
    LOOP  $V_{31};$ 
         $V_{11} \leftarrow 0;$ 
    END;
     $DIVISOR \leftarrow DIVISOR + 1;$ 
    END;
     $U_{61} \leftarrow X_1;$ 
     $U_{62} \leftarrow DOIS;$ 
     $U_{11} \leftarrow U_{62};$ 
     $U_{12} \leftarrow U_{61};$ 
     $T_{11} \leftarrow U_{11};$ 
    LOOP  $U_{12};$ 
         $U_{41} \leftarrow T_{11};$ 
         $T_{41} \leftarrow 0;$ 
        LOOP  $U_{41};$ 
             $V_{41} \leftarrow T_{41};$ 
             $T_{41} \leftarrow T_{41} + 1;$ 
        END;
         $T_{11} \leftarrow V_{41};$ 
    END;
     $V_{11} \leftarrow T_{11};$ 
     $T_{61} \leftarrow V_{11};$ 
     $V_{61} \leftarrow 0;$ 
    LOOP  $T_{61};$ 
         $V_{61} \leftarrow 0;$ 
    END;
     $V_{31} \leftarrow V_{61};$ 
    LOOP  $V_{31};$ 
         $V_{11} \leftarrow 0;$ 
    END;
     $Y_1 \leftarrow V_{11};$ 

```