Taller 3 Matematicas Discretas

Cesar Esteban Diaz Medina

14 de Diciembre del 2020

1.A vacuum pump removes one third of the remaining air in a cylinder with each stroke.Form an equation to represent this situation.After how many strokes is just $\frac{1}{1000000}$ of the initial air remaining?

- 1 significara que el cilindro esta completamente lleno. Por tal motivo:

$$u_0 = 1$$

- Debido a que cada cada golpe reduce 1/3 de lo que tiene el cilindro actualmente, entonces lo que queda en el cilindro es 2/3 de lo que tenia actualmente, entonces podemos definir la siguiente ecuacion:

$$u_n = \frac{2}{3}u_{n-1}$$

- Entonces vamos a observar cuanto queda en el cilindro despues de 1,2 y 3 golpes.

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 = \frac{2}{3} * 1 = \frac{2}{3}$$
$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$
$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 = \frac{2}{3} * \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

- Podemos observar que el denominador se va multiplicando por 3 , y el numerador se va multiplicando por 2, entonces para llegar a $\frac{1}{1000000}$ tenemos que hallar el logaritmo base $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{1000000}$, esto es igual a:

$$log_{\frac{2}{3}}(\frac{1}{1000000}) = 34.07$$

- Podemos observar que despues de 35 golpes, va a quedar menos de $\frac{1}{1000000}$ del valor inicial que habia en el cilindro

2.Write down the first four terms of each of these sequences and the associated difference equation.

a) $u_n = \sum_{r=1}^{n}(2r-1)$

- Vamos a calcular los primeros cuatro terminos de la suma

$$u_1 = (2*1-1) = 1$$

$$u_2 = (2*1-1)+(2*2-1) = 5$$
$$u_3 = (2*1-1)+(2*2-1)+(2*3-1) = 10$$
$$u_4 = (2*1-1)+(2*2-1)+(2*3-1)+(2*4-1) = 17$$

- La ecuacion de diferencia nos queda igual a:

$$u_n = (2*n-1)+u_{n-1}$$

b) $u_n = \sum_{r=1}^{n}(10-r)$

- Vamos a calcular los primeros cuatro terminos de la suma

$$u_1 = (10-1) = 9$$

$$u_2 = (10-1)+(10-2) = 17$$
$$u_3 = (10-1)+(10-2)+(10-3) = 24$$
$$u_4 = (10-1)+(10-2)+(10-3)+(10-4) = 30$$

- La ecuacion de diferencia nos queda igual a:

$$u_n = (10-n)+u_{n-1}$$

c) $u_n = \sum_{r=1}^{n} 3*(2r+1)$

- Vamos a calcular los primeros cuatro terminos de la suma

$$u_1 = 3*(2*1+1) = 9$$

$$u_2 = 3*(2*1+1)+3*(2*2+1) = 24$$
$$u_3 = 3*(2*1+1)+3*(2*2+1)+3*(2*3+1) = 45$$
$$u_4 = 3*(2*1+1)+3*(2*2+1)+3*(2*3+1)+3*(2*4+1) = 72$$

- La ecuacion de diferencia nos queda igual a:

$$u_n = 3*(2*n+1)+u_{n-1}$$

3.Write a simple computer program (say in Basic) which calculates successive terms of a sequence from a difference equation you have met. Here is one for the triangle numbers to help you.

- A continuacion se muestra el enlace que dirige al codigo **Codigo Ejercicio 3**

4.A population is increasing at a rate of 25 per thousand per year. Define a difference equation which describes this situation. Solve it and find the population in 20 years' time, assuming the population is now 500 million. How long will it take the population to reach 750 million?

- Lo primero que tenemos que definir es el u_0, segun el enunciado la poblacion inicial es de 500 millones

$$u_0 = 500000000$$

- Despues tenemos que hallar la ecuacion en diferencia, como la poblacion por año aumenta en 25 por mil personas, la ecuacion nos queda igual a:

$$u_n = u_{n-1} + 25 * \frac{u_{n-1}}{1000}$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{u_{n-1}}{40}$$

$$u_n = \frac{41}{40} * u_{n-1}$$

- Ahora tenemos que resolver la ecuacion en diferencias:

$$u_n = \frac{41}{40} * u_{n-1}$$

$$u_n = \frac{41}{40} * \frac{41}{40} * u_{n-2}$$

$$u_n = \frac{41}{40} * \frac{41}{40} * \frac{41}{40} * u_{n-3}$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$u_n = (\frac{41}{40})^n * u_0$$

- Aplicamos la formula, para cuando han pasado 20 años

$$u_{20} = \frac{41}{40}^{20} * 500000000$$

$$u_{20} = 819308220.14$$

- Cuando han pasado 20 años, la poblacion sera igual a 819308220.14

- Para hallar en cuanto tiempo llegara la poblacion a 750 millones, tenemos que reemplazar y despejar de la formula n.

$$750000000 = \frac{41}{40}^{n} * 500000000$$

$$\frac{750000000}{500000000} = (41/40)^{n}$$

$$log_{\frac{41}{40}}(\frac{750000000}{500000000}) = n$$

$$n = 16.4205$$

- Aproximadamente toma 17 años, para que la poblacion supere los 750 millones.

5. Write down the general solutions of $u_n + 4u_{n-1} + 3 = 0, \;\; n \geq 1$

- Lo primero que realizamos es despejar u_n.

$$u_n + 4u_{n-1} + 3 = 0, \;\; n \geq 1$$

$$u_n = -4u_{n-1} - 3, \;\; n \geq 1$$

- Teniendo la ecuacion de diferencias, podemos encontrar la solucion general de la ecuacion

$$u_n = -4u_{n-1} - 3$$

$$u_n = -4(-4u_{n-2} - 3) - 3$$

$$u_n = -4(-4(-4u_{n-3} - 3) - 3) - 3$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$u_n = (-4)^n * u_0 - 3(1 + (-4)^1 + (-4)^2 + ... + (-4)^n$$

- Podemos observar una progresion geometrica, por tal motivo podemos simplificar la ecuacion, que nos queda igual a:

$$u_n = (-4)^n * u_0 - \frac{3 * ((-4)^n - 1)}{-4 - 1}$$

$$u_n = (-4)^n * u_0 + \frac{3 * ((-4)^n - 1)}{5}$$

6. Find the particular solutions of these equation: $u_0 = 3$ **and** $u_{n+1} = u_n + 7, \;\; n \geq 0$

- Hallamos la solucion general para la ecuacion de diferencias

$$u_{n+1} = u_n + 7$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 7 + 7$$

$$u_{n+1} = u_{n-2} + 7 + 7 + 7$$

$$u_{n+1} = u_{n-3} + 7 + 7 + 7 + 7$$

.

.

.

$$u_{n+1} = u_0 + 7 * (n + 1)$$

- Reemplazamos u_0 para hallar la solucion particular:

$$u_{n+1} = 3 + 7 * (n + 1), \quad n \geq 0$$

- Tambien la solucion se podria escribir de la siguiente forma:

$$u_n = 3 + 7 * n, \quad n \geq 1$$

7. Find the monthly repayment on a £400 loan over a period of $1 + \frac{1}{2}$ years at an interest rate of 15% p.a.

- Lo primero que realizamos es pasar el periodo a meses

$$(1 + \frac{1}{2}) * 12 = \frac{3}{2} * 12 = 18$$

- Tambien tenemos que pasar el interes anual a mensual

$$\frac{15\%}{12} = 1.25\%$$

- Podemos observar que la deuda inicial es de 400, por tal motivo u_0 es igual a:

$$u_0 = 400$$

- Teniendo esto datos podemos establecer la ecuacion en diferencias

$$u_n = u_{n-1} + 0.0125 * u_{n-1} - c$$

$$u_n = 1.0125 * u_{n-1} - c$$

- Hallamos la solucion de la ecuacion en diferencias

$$u_n = 1.0125 * u_{n-1} - c$$

$$u_n = 1.0125 * (1.0125 * (u_{n-2}) - c) - c$$

$$u_n = 1.0125 * (1.0125 * (1.0125 * u_{n-3} - c) - c) - c$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$u_n = 1.0125^n * u_0 - c - c*1.0125 - c*1.0125^2 - c*1.0125^3 - ... - c*1.0125^n$$

$$u_n = 1.0125^n * u_0 - c(1 + 1.0125 + 1.0125^2 + 1.0125^3 + ... + 1.0125^n)$$

- Podemos observar que hay una progresion geometrica, por tal motivo:

$$u_n = 1.0125^n * u_0 - c\frac{1.0125^n - 1}{0.0125}$$

- Ahora reemplazamos n en 18 meses

$$u_{18} = 1.0125^{18} * u_0 - c\frac{1.0125^{18} - 1}{0.0125}$$

- Reemplazamos u_0, y despejamos c

$$u_{18} = 1.0125^{18} * 400 - c\frac{1.0125^{18} - 1}{0.0125}$$

$$0 = 1.125^{18} * 400 - c\frac{1.0125^{18} - 1}{0.0125}$$

$$c = \frac{1.0125^{18} * 400 * 0.0125}{1.0125^{18} - 1}$$

$$c = 24.95$$

- Podemos observar que se debe pagar 24.95 mensualmente, para que en 18 meses se termine de pagar el prestamo

8.A loan of £1000 is taken out at an interest rate of 24% p.a. How long would it take to repay the loan at a rate of £50 per month.

- Primero definimos u_0 como el valor inicial del prestamo que es igual a 1000

$$u_0 = 1000$$

- Pasamos el interes anual a mensual

$$\frac{24\%}{12} = 2\%$$

- Definimos c, como lo que se paga mensualmente, en este caso es 50

$$c = 50$$

- Teniendo estos datos, definimos la ecuacion en diferencia:

$$u_n = 1.02 * u_{n-1} - 50$$

- Resolvemos la ecuacion de diferencias

$$u_n = 1.02 * u_{n-1} - 50$$

$$u_n = 1.02 * (1.02 * u_{n-2} - 50) - 50$$
$$u_n = 1.02 * (1.02 * (1.02 * u_{n-3} - 50) - 50) - 50$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$u_n = 1.02^n * u_0 - 50 * (1 + 1.02^1 + 1.02^2 + ... + 1.02^n)$$

- Podemos observar que hay una progresion geometrica, por tal motivo:

$$u_n = 1.02^n * u_0 - 50 * \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1}$$

- Tenemos que despejar para n, sabiendo que necesitamos que u_n sea igual a 0

$$0 = 1.02^n * u_0 - 50 * \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1}$$
$$\frac{50}{0.02} = 2500$$
$$0 = 1.02^n * u_0 - 2500 * 1.02^n + 2500$$
$$2500 = 1.02^n(u_0 - 2500)$$
$$\frac{-2500}{u_0 - 2500} = 1.02^n$$
$$\frac{-2500}{-1500} = 1.02^n$$
$$log_{1.02}(\frac{2500}{1500}) = n$$
$$n = 25.79$$

- Toma aproximadamente 26 meses, pagar todo al banco

9. The productivity of an orchard of 2000 trees increases by 5% each year due to improved farming techniques. The farmer also plants a further 100 trees per year. Estimate the percentage improvement in productivity during the next 10 years.

- Podemos observar que la productividad en el año 0 es cero, por tal motivo $u_0 = 0$.
- Debido a que la productividad aumenta en un 5% por 2000 arboles, y cada año aumenta en 100 los arboles, la ecuacion de diferencias nos queda:

$$u_n = u_{n-1} + \frac{(2000 + (100 * n)) * 0.05}{2000}$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{(2000 * 0.05 + (100 * n) * 0.05)}{2000}$$

- Resolvemos la ecuacion de diferencias

$$u_n = u_{n-1} + \frac{(2000 * 0.05 + (100 * n) * 0.05)}{2000}$$

$$u_n = u_{n-2} + \frac{(2000 * 0.05 + (100 * (n-1)) * 0.05)}{2000} + \frac{(2000 * 0.05 + (100 * n) * 0.05)}{2000}$$

.

.

.

.

.

$$u_n = u_0 + n * \frac{2000 * 0.05}{2000} + \frac{100 * 0.05}{2000} * (1 + 2 + 3 + ... + n)$$

- Podemos simplificar por la formula de los numeros triangulares

$$u_n = u_0 + n * \frac{2000 * 0.05}{2000} + \frac{100 * 0.05}{2000} * \frac{n * (n+1)}{2}$$

- Reemplazamos para $n = 10$

$$u_{10} = 0 + 10 * \frac{2000 * 0.05}{2000} + \frac{100 * 0.05}{2000} * \frac{10 * (10+1)}{2}$$

$$u_{10} = 0.6375$$

- La productividad en los 10 años habra aumentado en un 63.75%

10. Solve $u_n - 6u_{n1} + 8u_{n2} = 0$, $n \geq 3$, given $u_1 = 10$, $u_2 = 28$. Evaluate u_6 .

- La ecuacion auxiliar nos queda igual a:

$$m^2 - 6m + 8 = 0$$

- Resolvemos para m:

$$8 = -4 * -2$$
$$m^2 = m * m$$
$$(m-4) * (m-2) = 0$$
$$m_1 = 4$$
$$m_2 = 2$$

- Por tal motivo la solucion general a la ecuacion de diferencias es igual a:

$$u_n = A * (4)^n + B * (2)^n$$

- Reemplazamos la solucion general para u_1

$$u_1 = 10 = 4A + 2B$$

- Reemplazamos la solucion general para u_2

$$u_2 = 28 = 16A + 4B$$

- Teniendo las dos ecuaciones que obtuvimos de u_1 y u_2, podemos hallar A y B, para esto multiplicamos la primera ecuacion por 2

$$10 = 4A + 2B$$
$$20 = 8A + 4B$$

- La ecuacion que obtuvimos de u_2, la restamos con la ecuacion de u_1 multiplicada por 2

$$28 = 16A + 4B$$
$$20 = 8A + 4B$$
$$8 = 8A$$
$$A = 1$$

- Teniendo A, ya solo nos queda reemplazar este valor en la ecuacion que obtuvimos de u_1, para asi poder obtener B

$$10 = 4A + 2B$$
$$10 = 4 + 2B$$
$$6 = 2B$$
$$B = 3$$

- La ecuacion particular para la ecuacion de diferencias es igual a

$$u_n = 4^n + 3 * (2)^n$$

11. A difference equation of the form

$$u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = k$$

defines a sequence with its first five terms as 0, 2, 5, 5, 14. Find the nth term.

- Segun el enunciado podemos definir:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 2$$

$$u_3 = 5$$

$$u_4 = 5$$

$$u_5 = 14$$

- Reemplazamos la ecuacion para u_3

$$u_3 + au_2 + bu_1 = k$$

$$5 + 2a + 0b = k$$

- Reemplazamos la ecuacion para u_4

$$u_4 + au_3 + bu_2 = k$$

$$5 + 5a + 2b = k$$

- Reemplazamos la ecuacion para u_5

$$u_5 + au_4 + bu_3 = k$$

$$14 + 5a + 5b = k$$

- Tenemos tres ecuaciones y tres incognitas, por tal motivo vamos a solucionar el sistema de ecuaciones
- Lo primero que realizamos es restar la ecuacion 3, con la ecuacion 2

$$14 + 5a + 5b = k$$

$$5 + 5a + 2b = k$$

$$9 + 3b = 0$$

$$b = -3$$

- Despues restamos la ecuacion 2 con la ecuacion 1, y reemplazamos el valor de B que ya hemos encontrado

$$5 + 5a + 2b = k$$

$$5 + 2a + 0b = k$$

$$3a + 2b = 0$$

$$3a + 2 * (-3) = 0$$

$$a = 2$$

- Por ultimo reemplzamos A en la ecuacion 1, y con esto encontramos k

$$5 + 2a + 0b = k$$

$$5 + 2 * 2 = k$$

$$k = 9$$

- Podemos observar que la ecuacion de diferencias nos queda igual a:

$$u_n + 2 * u_{n-1} - 3 * u_{n-2} = 9$$

$$u_n = 3 * u_{n-2} - 2 * u_{n-1} + 9 \;\; n \geq 3$$

12. Find the smallest value of n for which u_n exceeds one million if $u_n = 10 + 3u_{n-1}$, $n \geq 1$, given $u_0 = 0$.

- Resolvemos la eucacion de diferencias

$$u_n = 10 + 3u_{n-1}$$

$$u_n = 10 + 3(3u_{n-2} + 10)$$

$$u_n = 10 + 3(3(3u_{n-3} + 10) + 10)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$u_n = 10(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...3^n) + 3^n * u_0$$

- Podemos observar que hay una progresion geometrica, por tal motivo podemos simplificar la solucion que nos queda igual a:

$$u_n = 3^n * u_0 + 10\frac{3^n - 1}{2}$$

- Debido a que u_0 es igual a 0, la solucion particular nos queda igual a:

$$u_n = 10\frac{3^n - 1}{2}$$

$$u_n = 5 * (3^n - 1)$$

- Sabemos que $u_n = 1000000$, despejamos para n

$$1000000 = 5 * (3^n - 1)$$

$$200000 = 3^n - 1$$

$$199999 = 3^n$$

$$n = log_3(199999)$$

$$n = 11.110$$

- En u_{12}, la operacion va a exceder 1 millon