Formulario Fenomeni Ondulatori

Cesare Sabattini

June 2024

1 Introduction

2 Oscillazioni

2.1 Oscillazioni forzate

Equazioni lineare non omogenea:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} \tag{1}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x = x_{omo} + x_{part} &= A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t + \phi) \\ &+ \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \cdot \cos\left(\Omega t - \arctan\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \\ &\simeq x_{part} \end{aligned} \tag{2}$$

La soluzione particolare è detta stazionaria.

2.2 Impedenza

Misura la tendenza di un mezzo di opporsi ad una variazione di tipo ondulatorio. Intercorre dunque in relazioni di tipo causa-effetto.

$$Z \equiv \frac{f(t)}{\dot{z}} \rightarrow Z \in \mathcal{C} \tag{3}$$

2.3 Funzione di risposta R

$$R(\Omega) = \frac{\gamma^2\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \tag{4}$$

2.4 Fattore di qualità Q

Costante caratteristica di un oscillatore armonico, che misura la rapidità di smorzamento dell'oscillazione. Si definisce come il rapporto tra l'energia dissipata e quella immagazzinata:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma} \tag{5}$$

2.5 Ampiezza elastica e ampiezza assorbitiva

$$\begin{cases} A_{el} = |A|\cos(\sigma) = \dfrac{F_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}{m((\omega_0 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2)} \\ A_{ass} = |A|\sin(\sigma) = \dfrac{F_0(\gamma\Omega)}{m((\omega_0 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2)} \end{cases} \tag{6}$$

3 Fourier

3.1 Serie di Fourier

Data f(t) periodica,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega t} \tag{7}$$

con coefficienti:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \\ c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-i\omega t}dt \end{cases} \tag{8}$$

4 Onde su corda

Si trova l'equazione di d'Alembert per l'ordinata y=ξ:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{9}$$

con velocità di fase

$$v_f = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{10}$$

Per onde armoniche:

$$\xi = A\cos(kx - \omega t) \tag{11}$$

con numero d'onda

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{12}$$

Potenza trasportata (onde progressive):

$$\begin{cases} P = -T\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial t} = Z\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \\ Z = \dfrac{T}{v} \end{cases} \tag{13}$$

Densità di energia:

$$u = u_k + u_p = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}T(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2 = 2u_k = 2u_p \tag{14}$$

Vale:

$$P = vu \tag{15}$$

Si definisce intensità di un'onda su corda la potenza mediata sul periodo:

$$I \equiv < P > \tag{16}$$

4.1 Relazione di dispersione

Si definiscono velocità di fase e velocità di gruppo:

$$\begin{cases} v_f = \dfrac{\omega}{k} \\ v_g = \dfrac{d\omega}{dk} \end{cases} \tag{17}$$

Se le due velocità differiscono, il mezzo è detto dispersivo. La relazione di dispersione è:

$$\omega(k) = kv_f \tag{18}$$

4.2 Riflessione e trasmissione

$$\begin{cases} A_t = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}A_i \\ A_r = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}A_i \end{cases} \tag{19}$$

da cui sono direttamente ricavabili le intensità e i coefficienti di trasmissione e riflessione, definiti come:

$$\begin{cases} T = \dfrac{I_t}{I_i} \quad R = \dfrac{I_r}{I_i} \end{cases} \tag{20}$$

5 Onde Sonore

Onde longitudinali di pressione, densità e elongazione. Si ricava:

$$v_f = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \tag{21}$$

Si definisce l'intensità come

$$\begin{cases} I =< \dfrac{P}{\Sigma} >=< -\gamma p_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} >=< Z \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} > \\ Z = \dfrac{\gamma p_0}{v} \end{cases} \tag{22}$$

5.1 Interferenza

Si verifica quando 2 onde hanno la medesima pulsazione, con fase ϕ:

$$A_{tot} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi} \tag{23}$$

5.2 Battimenti

Si verificano quando $\omega_1 \simeq \omega_2$. Se $A_1 = A_2$ si trova

$$\begin{cases} \xi(x,t) = 2A\sin(\Delta kx - \Delta\omega t)sin(k_0x - \omega_0 t) \\ \Delta k = \dfrac{k_2 - k_1}{2} \\ \Delta\omega = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ k_0 = \dfrac{k_1 + k_2}{2} \\ \omega_0 = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{cases} \tag{24}$$

5.3 Effetto Doppler

- S e R fermi:

$$\nu_R = \nu_S \tag{25}$$

- S in moto, R fermo:

$$\nu_R = \frac{\nu_s}{1 - \frac{v_S}{v_M}} \tag{26}$$

- S ferma, R in moto:

$$\nu_R = \nu_s(1 + \frac{v_R}{v_M}) \tag{27}$$

- S ed R in moto:

$$\nu_R = \frac{\nu_s(1 + \frac{v_R}{v_M})}{1 + \frac{v_S}{v_M}} \tag{28}$$

6 Onde nello spazio

6.1 Onde scalari nello spazio

Vale l'equazione di d'Alembert in $\mathcal{R}^3$:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{29}$$

Onde progressive e regressive sono rispettivamente esprimibili come:

$$\xi(x, t) = f(x \mp vt) \tag{30}$$

Per le onde armoniche vale:

$$\xi(x, t) = A \cos(k\hat{u} \cdot \vec{x} - vt) \tag{31}$$

In coordinate sferiche vale:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin \theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \tag{32}$$

Una generica onda progressiva in coordinate sferiche è del tipo:

$$\begin{cases} \xi(\vec{x}, t) = \dfrac{f(\vec{k} \cdot \vec{x} - vt)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \\ \nabla^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l-1) Y_l^m \end{cases} \tag{33}$$

6.2 Onde vettoriali

Perturbazioni tali per cui:

$$\nabla^2 \vec{\xi} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \tag{34}$$

6.2.1 Polarizzazione

Dato $\hat{u} = \hat{k}$, si parla di polarizzazione:

- longitudinale se

$$\xi_x = \xi_y = 0 \tag{35}$$

- lineare se

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{A_x}{A_y} \tag{36}$$

- ellittica se

$$(\frac{\xi_x}{A_x})^2 + (\frac{\xi_y}{A_y})^2 - 2cos\phi \frac{\xi_x}{A_x} \frac{\xi_y}{A_y} = sin\phi^2 \tag{37}$$

7 Onde elettromagnetiche

7.1 Equazioni di Maxwell

Nei mezzi:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu\epsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases} \tag{38}$$

Nel vuoto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu\epsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases} \tag{39}$$

Nel vuoto si trova che i campi soddisfano l'equazione di d'Alembert:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{40}$$

Supponendo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ onde armoniche,

$$\begin{cases} i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B} \\ i\vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu\epsilon i\omega\vec{E} \end{cases} \tag{41}$$

Da cui si evince che:

- $$\vec{E} \perp \vec{B}, \vec{E} \perp \hat{u}, \vec{B} \perp \hat{u} \tag{42}$$
- Le relazioni tra i moduli dei campi. Da
  $$\vec{E} = \mu v \vec{H} \tag{43}$$
  si ha
  $$Z = \mu v \tag{44}$$

7.2 Energia, vettore di Poynting e pressione di radiazione

Conservazione dell'energia delle onde elettromagnetiche:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}\right) = 0 \tag{45}$$

Si definisce l'intensità come l'energia media che attraversa una sezione S ortogonale alla direzione di propagazione, nell'unità di tempo, nell'area:

$$I =< \vec{S} > \tag{46}$$

Si trova che l'onda esercita una pressione pari a:

$$p = \frac{|\vec{S}|}{c} \tag{47}$$

7.3 Propagazione in un dielettrico

Si trova che l'indice di rifrazione di un mezzo è pari a:

$$\begin{cases} n = n_r - in_i \\ n_r = 1 + \dfrac{n_a e^2}{2m\epsilon_0}\dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \\ n_i = 1 + \dfrac{n_a e^2}{2m\epsilon_0}\dfrac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \end{cases} \tag{48}$$

Segue che il numero d'onda k sarà:

$$k = k_r - ik_i \tag{49}$$

da cui si ottiene la Legge di Lambert

$$I(z) = I_0 e^{-2k_i z} \tag{50}$$

7.4 Propagazione nei metalli

$$k = \frac{\omega}{v}\sqrt{1 + i\frac{\mu\sigma v^2}{\omega}} = k_r + ik_i \tag{51}$$

Anche qui vale pertanto la Legge di Lambert.

7.5 Polarizzatori

Dato ϕ angolo tra la direzione di polarizzazione dell'onda e l'asse del polarizzatore, vale la legge di Malus:

$$I(\theta) = I_0 \cos\theta^2 \tag{52}$$

Dato un materiale anisotropo, si può ottenere una condizione di polarizzazione circolare se:

$$\frac{\omega d n_x}{c} - \frac{\omega d n_y}{c} = \frac{\pi}{2} \tag{53}$$

7.6 Trasmissione e riflessione

7.6.1 E parallelo al piano di incidenza

$$\begin{cases} E_t = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_i \\ E_r = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} E_i \end{cases} \tag{54}$$

da cuoi sono ricavabili i coefficienti di trasmissione e riflessione I_t e I_r.

7.6.2 $\vec{E} \perp \vec{\Sigma}$

$$\begin{cases} E_t = \dfrac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_r + n_2 \cos\theta_i} E_i \\ E_r = \dfrac{n_1 \cos\theta_r - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_r + n_2 \cos\theta_i} E_i \end{cases} \tag{55}$$

7.6.3 E ortogonale al piano di incidenza

$$\begin{cases} E_t = \dfrac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} E_i \\ E_r = \dfrac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} E_i \end{cases} \tag{56}$$

Si definisce l'angolo di Brewster come l'angolo in corrispondenza del quale la luce risulta completamente polarizzata:

$$\theta_b = \arctan(\frac{n_2}{n_1}) \tag{57}$$

7.7 Interferenza

7.7.1 Interferenza da dispositivo di Young

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta\right) \tag{58}$$

7.7.2 Interferenza da N fenditure

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\right)\sin\theta}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)\sin\theta} \tag{59}$$

$$I = N^2 I_0 \tag{60}$$

7.7.3 Reticoli

Dispersione D:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{dcos(\theta_{max})} \tag{61}$$

Potere risolutivo R:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{nN}{cos(\theta)} \simeq nN \tag{62}$$

7.8 Diffrazione

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\sin\theta}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \tag{63}$$

Si definisce il ”Potere separatore” come:

$$\gamma_R = 1,22\frac{\lambda}{D} \tag{64}$$

8 Ottica

8.1 Specchi

$$\begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{f} \\ m = \frac{q}{p} \end{cases} \tag{65}$$

8.2 Diottri

$$\begin{cases} \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \\ \frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1 \\ m = \frac{n_1 q}{n_2 p} \end{cases} \tag{66}$$

8.3 Lenti sottili

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (\frac{n_2}{n_1} - n_1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{1}{f} \\ m = \frac{q}{p} \end{cases} \tag{67}$$