Relatività Ristretta

Cesare Sabattini

July 2024

1 Relatività Galileiana

1.1 Principi della Relatività Galileiana

1. Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. Il tempo è assoluto.
3. Lo spazio è assoluto.

Ne seguono geometricamente le trasformazioni di Galileo.

1.2 Trasformazioni di Galileo

Per coppie di sistemi di riferimento inerziali O e O' valgono le seguenti leggi di trasformazione:

1.2.1 Trasformazioni delle coordinate

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1}$$

1.2.2 Trasformazione della velocità

$$\vec{w'} = \vec{w} - \vec{v} \tag{2}$$

1.2.3 Trasformazione delle accelerazioni

$$\vec{a'} = \vec{a} \tag{3}$$

1.2.4 Trasformazioni delle forze

Dalla rappresentazione della forza come un segmento orientato, dato lo spazio assoluto, si ha:

$$\vec{F'} = \vec{F} \tag{4}$$

1.2.5 Trasformazione della massa inerziale

Dal secondo principio della dinamica, invariante per cambio di sistema di riferimento inerziale, si ha:

$$m' = m \tag{5}$$

1.3 Rapporto con l'elettromagnetismo

Si dimostra di seguito l'incompatibilità tra le trasformazioni di Galileo e le equazioni di Maxwell.

1.3.1 Forza di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{6}$$

da cui emerge una dipendenza della forza dalla velocità, in contrasto con i principi di relatività galileiani.

Equazioni di Maxwell

Date le equazioni di Maxwell in O

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{7}$$

le leggi di trasformazione degli operatori differenziali:

$$\begin{cases} \nabla' = \nabla \\ \dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \vec{v} \cdot \nabla \end{cases} \tag{8}$$

e le leggi di trasformazione dei campi elettrici e magnetici:

$$\begin{cases} \vec{E'} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B'} = \vec{B} \end{cases} \tag{9}$$

si verifica, supponendo la validità delle equazioni in O', che:

- La prima equazione non è né invariante né covariante.
- La seconda equazione è invariante.
- La terza equazione è covariante.
- La quarta equazione non è né invariante né covariante.

1.3.2 Invarianza di c

L'elettromagnetismo sancisce che:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{10}$$

in completo disaccordo con il principio di relatività galileiana.

Si ipotizzò dunque che le leggi dell'elettromagnetismo dovessero valere unicamente nell'etere e che la velocità della luce fosse relativa ad esso.

1.4 Esperimento di Michelson-Morley

- Scopo: misurazione della velocità della luce rispetto all'etere,

  confrontando le figure di interferenza originate da due raggi luminosi, dipendentemente dall'orientamento dell'interferometro rispetto al moto della Terra nel mezzo.

- Aspettazione: variazione della differenza di fase tra i due raggi luminosi, in base all'orientamento dell'interferometro rispetto al moto della Terra, in base a:

  $$\Delta\phi = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} \tag{11}$$

  Il valore atteso di $\Delta\phi$ è di circa 0.4 frange.

- Esito: nessuna variazione della figura di interferenza, in quanto $\Delta\phi$ è circa nullo.

2 Relatività Ristretta

L'apparente conflitto tra meccanica e elettromagnetismo si risolse con la teoria della relatività ristretta.

2.1 Postulati della Relatività Ristretta

1. Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. La velocità della luce è c in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Si ricercano delle leggi di trasformazione delle coordinate tali che:

- x'=0 $\rightarrow$ x=vt, che si verifica se x'=α(x-vt).
- Per il primo postulato, deve valere x=α(x'+vt).
- x'=ct' $\rightarrow$ x=ct.

Si ricavano così le trasformazioni di Lorentz (da O a O') delle coordinate:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{12}$$

e delle velocità:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}v_y}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \\ v'_z = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}v_z}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \end{cases} \tag{13}$$

2.3 Effetti relativistici

2.3.1 Dilatazione dei tempi

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

2.3.2 Relatività della simultaneità

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{15}$$

2.3.3 Contrazione delle lunghezze

$$L = L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{16}$$

2.4 Onde elettromagnetiche

2.4.1 Trasformazioni del vettore d'onda e frequenza

$$\begin{cases} k'_x = \dfrac{k_x - \frac{v}{c^2}\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \\ \omega' = \dfrac{\omega - v k_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{17}$$

2.4.2 Aberrazione relativistica della luce

$$\tan\theta' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} \tag{18}$$

2.4.3 Effetto Doppler relativistico

$$\omega' = \omega\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{19}$$

2.5 Causalità

Due eventi possono risultare in mutua connessione causale se e solo se

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|ct'_1 - ct'_2|} \leq 1 \tag{20}$$

Se ne evince che:

- L'ordine causale degli eventi è invariante.
- L'ordine degli eventi non causali è relativo.
- La causalità è sempre locale.

3 Formalismo covariante

Alla base del formalismo covariante vi è il

Postulato di Covarianza

Le leggi della fisica sono covarianti per trasformazioni di Lorentz.

3.1 Quadrivettori controvarianti e covarianti

In notazione indiciale, si definiscono i quadrivettori come:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \tag{21}$$

ovvero quartetti ordinati che si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz.

Le coordinate di un quadrivettore controvariante sono ottenute per proiezione parallela rispetto agli assi coordinati.

Le componenti di un quadrivettore covariante sono ottenute per proiezione ortogonale rispetto agli assi coordinati.

3.2 Prodotto scalare

Dall'invariante spaziotemporale che emerge dalle trasformazioni di Lorentz, si induce una metrica nello spazio di Minkowski:

$$< x, y >= x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{22}$$

che equivale ad introdurre il tensore metrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

tale che:

$$< x, y >= x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{24}$$

3.3 Trasformazioni di Lorentz per quadrivettori

I quadrivettori controvarianti si trasformano con L, mentre i covarianti si trasformano con L^{-1}.

$$\begin{cases} x'^j = L^j{}_k x^k \\ x'_j = L_j{}^k x_k = L^{-1j}{}_k x_k \end{cases} \tag{25}$$

dove $L^j{}_k$ è la matrice di Lorentz:

$$L^j{}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Dato che i tensori di rango superiore risultano da prodotto dialico tra quadrivettori, è immediato dedurne le regole di trasformazione.

4 Meccanica relativistica

4.1 Relazioni principali

4.1.1 Secondo principio della dinamica relativistica

Incorporando i vettori tridimensionali nei quadrivettori nello spazio di Minkowski, si definiscono la quadriposizione, la quadrivelocità, la quadriaccelerazione e la quadriforza:

$$\begin{cases} x^\mu = (ct, \vec{x}) \\ u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau} \\ a^\mu = \dfrac{du^\mu}{d\tau} \\ F^\mu = m_0 \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d}{d\tau} x^\mu \end{cases} \tag{27}$$

in cui τ è il tempo proprio, ovvero relativo al sistema comovente, istantaneamente solidale con il corpo, dunque non accelerato. Si trova dunque che:

$$F_j = m_0 \frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau} x_j = m_0 \frac{d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{28}$$

4.1.2 Equazioni cardine della dinamica relativistica

Si definiscono quadrimpulso ed energia totale come:

$$\begin{cases} P_j = m_0 V_j \\ E_T = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{29}$$

Dalla 2.8 seguono le equazioni cardine della dinamica relativistica:

$$\begin{cases} \vec{f} \cdot \vec{v} = \dfrac{d}{dt} \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{dE_T}{dt} \\ \vec{f} = \dfrac{d}{dt} \dfrac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(\frac{E_t \vec{v}}{c^2})}{dt} \end{cases} \tag{30}$$

in cui

$$\vec{f} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\vec{F} \tag{31}$$

4.1.3 Relazione Energia-Impulso

$$E_t^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \tag{32}$$

Centro di massa

Nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{cm} &= \frac{\sum E_i \vec{v}_i}{\sum E_i} \\ M &= \sum (m_j + \frac{T_j}{c^2} + \frac{V_j^2}{c^2}) \end{aligned} \tag{33}$$

4.2 Fotoni

Particelle di massa nulla, con una quantità di moto. La relazione energia-impulso per i fotoni è:

$$E_T = cp \tag{34}$$

Vale la relazione di Einstein-De Broglie:

$$P_j = \hbar K_j = \hbar(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}) \tag{35}$$

4.2.1 Effetto Compton

Urto di un fotone con una particella ferma, con variazione di lunghezza d'onda:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \tag{36}$$

4.2.2 Decadimento di una particella

Basta utilizzare la conservazione del quadrimpulso e la relazione energia-impulso.

5 Elettromagnetismo

5.1 Conservazione della carica

Definita la quadricorrente:

$$J_j = (\rho c, -\vec{j}) \tag{37}$$

Si passa alla formulazione covariante della conservazione della carica:

$$\partial_k J^k = 0 \tag{38}$$

Si definisce inoltre la quadricorrente della carica puntiforme come:

$$J^k = qV_j \tag{39}$$

con V_j quadrivelocità.

Quadriforza di Lorentz

L'espressione della forza di Lorentz tridimensionale è

$$\vec{F} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})dV \tag{40}$$

Essa può essere interpretata come la componente spaziale di una densità di forza di Minkowski moltiplicata per l'elemento di volume invariante. Si definisce conseguentemente la densità di quadriforza di Lorentz come:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{d\vec{F_L}}{dV} \tag{41}$$

in cui $\vec{F_L}$ è la quadriforza di Lorentz, modello di forza relativistica.

A questo punto, dato il tensore elettromagnetico:

$$F^j_k = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

si può ricavare la seguente espressione per la densità di quadriforza di Lorentz f^j:

$$f^j = F^j_k J^k \tag{43}$$

5.2 Equazioni di Maxwell

A rigor dell'accordo tra elettromagnetismo e postulato di covarianza, le equazioni di Maxwell sono riformulabili in forma covariante a vista, accoppiando I con IV:

$$\partial_j F^{jk} = \mu_0 J^k \tag{44}$$

e II con III:

$$\begin{cases} \epsilon^{jklm}\partial_k F_{lm} = 0 \leftrightarrow \partial_k \tilde{F}^{jk} = 0 \\ \tilde{F}^{jk} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{jklm}F_{lm} \end{cases} \tag{45}$$

5.3 Trasformazioni dei campi elettromagnetici

Dalle leggi di trasformazione di F sono ricavabili le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici:

$$
\begin{cases}
E_1' = E_1 \\
E_2' = \dfrac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
E_3' = \dfrac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
B_1' = B_1 \\
B_2' = \dfrac{B_2 + vE_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
B_3' = \dfrac{B_3 - vE_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}
\tag{46}
$$

5.3.1 Considerazioni

- Un campo magnetico ha natura variabile con cambio di sistema di riferimento: un campo magnetico può essere rilevato come un campo elettrico in un sistema di riferimento in moto, e viceversa.
- Nel passaggio da O a O', crescono i moduli delle componenti trasversali del campo elettromagnetico, mentre le longitudinali rimangono invariate.
- Data una carica ferma in O', indipendentemente dal sistema di riferimento O, il campo elettrico è radiale uscente dalla carica che lo origina.

5.4 Tensore Energia-Impulso

Per giungere alle equazioni di conservazione per le onde elettromagnetiche, si definisce il tensore energia-impulso T^{lk} come:

$$T^{lk} = -\frac{1}{\mu_0} F^{lm} F^{k}_{\ m} + \frac{1}{4\mu_0} g^{lk} F_{km} F^{km} \tag{47}$$

cosicché:

$$f^k = -\partial_l T^{lk} \tag{48}$$

Definita la densità di energia elettromagnetica come:

$$\epsilon = \frac{1}{2\mu_0}(E^2/c^2 + B^2) \tag{49}$$

il vettore di Poynting come:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \tag{50}$$

e il tensore degli sforzi di Maxwell come:

$$\sigma_{jk} = -\frac{1}{\mu_0}(E_j E_k/c^2 + B_j B_k) + \delta_{jk}\epsilon \tag{51}$$

si ottiene il tensore energia-impulso come:

$$T^{lk} = \begin{pmatrix} \epsilon & S_1/c & S_2/c & S_3/c \\ S_1/c & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ S_2/c & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ S_3/c & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{52}$$

5.5 Equazioni di conservazione

Ricavato il tensore Energia-Impulso, tale che:

$$f^k = -\partial_l T^{lk} \tag{53}$$

dalla componente temporale di quest'ultima equazione tensoriale si ricava la legge d conservazione dell'energia del campo elettromagnetico:

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{f} \cdot \vec{v} \tag{54}$$

Dalla componente spaziale si ricava la legge di conservazione dell'impulso del campo elettromagnetico:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{S} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\sigma}} = -\vec{f} \tag{55}$$