

Formulario Fenomeni Ondulatori

Cesare Sabattini

June 2024

1 Introduction

2 Oscillazioni

2.1 Oscillazioni forzate

Equazioni lineare non omogenea:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} \quad (1)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x = x_{omo} + x_{part} &= A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t + \phi) \\ &+ \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \cdot \cos\left(\Omega t - \arctan \frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad (2) \\ &\simeq x_{part} \end{aligned}$$

La soluzione particolare è detta stazionaria.

2.2 Impedenza

Misura la tendenza di un mezzo di opporsi ad una variazione di tipo ondulatorio. Intercede dunque in relazioni di tipo causa-effetto.

$$Z \equiv \frac{f(t)}{\dot{z}} \rightarrow Z \in \mathcal{C} \quad (3)$$

2.3 Funzione di risposta R

$$R(\Omega) = \frac{\gamma^2 \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \quad (4)$$

2.4 Fattore di qualità Q

Costante caratteristica di un oscillatore armonico, che misura la rapidità di smorzamento dell'oscillazione. Si definisce come il rapporto tra l'energia dissipata e quella immagazzinata:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (5)$$

2.5 Ampiezza elastica e ampiezza assorbitiva

$$\begin{cases} A_{el} = |A| \cos(\sigma) = \frac{F_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}{m((\omega_0 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2)} \\ A_{ass} = |A| \sin(\sigma) = \frac{F_0(\gamma\Omega)}{m((\omega_0 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2)} \end{cases} \quad (6)$$

3 Fourier

3.1 Serie di Fourier

Data $f(t)$ periodica,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega t} \quad (7)$$

con coefficienti:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \\ c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases} \quad (8)$$

4 Onde su corda

Si trova l'equazione di d'Alembert per l'ordinata $y=\xi$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (9)$$

con velocità di fase

$$v_f = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (10)$$

Per onde armoniche:

$$\xi = A \cos(kx - \omega t) \quad (11)$$

con numero d'onda

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (12)$$

Potenza trasportata (onde progressive):

$$\begin{cases} P = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = Z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ Z = \frac{T}{v} \end{cases} \quad (13)$$

Densità di energia:

$$u = u_k + u_p = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 2u_k = 2u_p \quad (14)$$

Vale:

$$P = vu \quad (15)$$

Si definisce intensità di un'onda su corda la potenza mediata sul periodo:

$$I \equiv \langle P \rangle \quad (16)$$

4.1 Relazione di dispersione

Si definiscono velocità di fase e velocità di gruppo:

$$\begin{cases} v_f = \frac{\omega}{k} \\ v_g = \frac{d\omega}{dk} \end{cases} \quad (17)$$

Se le due velocità differiscono, il mezzo è detto dispersivo. La relazione di dispersione è:

$$\omega(k) = kv_f \quad (18)$$

4.2 Riflessione e trasmissione

$$\begin{cases} A_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i \\ A_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i \end{cases} \quad (19)$$

da cui sono direttamente ricavabili le intensità e i coefficienti di trasmissione e riflessione, definiti come:

$$\begin{cases} T = \frac{I_t}{I_i} & R = \frac{I_r}{I_i} \end{cases} \quad (20)$$

5 Onde Sonore

Onde longitudinali di pressione, densità e elongazione. Si ricava:

$$v_f = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (21)$$

Si definisce l'intensità come

$$\begin{cases} I = \langle \frac{P}{\Sigma} \rangle = \langle -\gamma p_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \rangle = \langle Z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \rangle \\ Z = \frac{\gamma p_0}{v} \end{cases} \quad (22)$$

5.1 Interferenza

Si verifica quando 2 onde hanno la medesima pulsazione, con fase ϕ :

$$A_{tot} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \phi} \quad (23)$$

5.2 Battimenti

Si verificano quando $\omega_1 \simeq \omega_2$. Se $A_1 = A_2$ si trova

$$\begin{cases} \xi(x, t) = 2A \sin(\Delta kx - \Delta \omega t) \sin(k_0x - \omega_0 t) \\ \Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2} \\ \Delta \omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \\ \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{cases} \quad (24)$$

5.3 Effetto Doppler

- S e R fermi:

$$\nu_R = \nu_S \quad (25)$$

- S in moto, R fermo:

$$\nu_R = \frac{\nu_s}{1 - \frac{v_S}{v_M}} \quad (26)$$

- S ferma, R in moto:

$$\nu_R = \nu_s \left(1 + \frac{v_R}{v_M}\right) \quad (27)$$

- S ed R in moto:

$$\nu_R = \frac{\nu_s \left(1 + \frac{v_R}{v_M}\right)}{1 + \frac{v_S}{v_M}} \quad (28)$$

6 Onde nello spazio

6.1 Onde scalari nello spazio

Vale l'equazione di d'Alembert in \mathcal{R}^3 :

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (29)$$

Onde progressive e regressive sono rispettivamente esprimibili come:

$$\xi(x, t) = f(x \mp vt) \quad (30)$$

Per le onde armoniche vale:

$$\xi(x, t) = A \cos(k\hat{u} \cdot \vec{x} - vt) \quad (31)$$

In coordinate sferiche vale:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (32)$$

Una generica onda progressiva in coordinate sferiche è del tipo:

$$\begin{cases} \xi(\vec{x}, t) = \frac{f(\vec{k} \cdot \vec{x} - vt)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \\ \nabla^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m \end{cases} \quad (33)$$

6.2 Onde vettoriali

Perturbazioni tali per cui:

$$\nabla^2 \vec{\xi} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \quad (34)$$

6.2.1 Polarizzazione

Dato $\hat{u} = \hat{k}$, si parla di polarizzazione:

- longitudinale se

$$\xi_x = \xi_y = 0 \quad (35)$$

- lineare se

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{A_x}{A_y} \quad (36)$$

- ellittica se

$$\left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 - 2\cos\phi \frac{\xi_x}{A_x} \frac{\xi_y}{A_y} = \sin^2\phi \quad (37)$$

7 Onde elettromagnetiche

7.1 Equazioni di Maxwell

Nei mezzi:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (38)$$

Nel vuoto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (39)$$

Nel vuoto si trova che i campi soddisfano l'equazione di d'Alembert:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (40)$$

Supponendo \vec{E} e \vec{B} onde armoniche,

$$\begin{cases} i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu\epsilon i\omega \vec{E} \end{cases} \quad (41)$$

Da cui si evince che:

•

$$\vec{E} \perp \vec{B}, \vec{E} \perp \hat{u}, \vec{B} \perp \hat{u} \quad (42)$$

• Le relazioni tra i moduli dei campi. Da

$$\vec{E} = \mu v \vec{H} \quad (43)$$

si ha

$$Z = \mu v \quad (44)$$

7.2 Energia, vettore di Poynting e pressione di radiazione

Conservazione dell'energia delle onde elettromagnetiche:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \right) = 0 \quad (45)$$

Si definisce l'intensità come l'energia media che attraversa una sezione S ortogonale alla direzione di propagazione, nell'unità di tempo, nell'area:

$$I = \langle \vec{S} \rangle \quad (46)$$

Si trova che l'onda esercita una pressione pari a:

$$p = \frac{|\vec{S}|}{c} \quad (47)$$

7.3 Propagazione in un dielettrico

Si trova che l'indice di rifrazione di un mezzo è pari a:

$$\begin{cases} n = n_r - in_i \\ n_r = 1 + \frac{n_a e^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \\ n_i = 1 + \frac{n_a e^2}{2m\epsilon_0} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \end{cases} \quad (48)$$

Segue che il numero d'onda k sarà:

$$k = k_r - ik_i \quad (49)$$

da cui si ottiene la Legge di Lambert

$$I(z) = I_0 e^{-2k_i z} \quad (50)$$

7.4 Propagazione nei metalli

$$k = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + i \frac{\mu\sigma v^2}{\omega}} = k_r + ik_i \quad (51)$$

Anche qui vale pertanto la Legge di Lambert.

7.5 Polarizzatori

Dato ϕ angolo tra la direzione di polarizzazione dell'onda e l'asse del polarizzatore, vale la legge di Malus:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta \quad (52)$$

Dato un materiale anisotropo, si può ottenere una condizione di polarizzazione circolare se:

$$\frac{\omega dn_x}{c} - \frac{\omega dn_y}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (53)$$

7.6 Trasmissione e riflessione

7.6.1 E parallelo al piano di incidenza

$$\begin{cases} E_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_i \\ E_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} E_i \end{cases} \quad (54)$$

da cui sono ricavabili i coefficienti di trasmissione e riflessione I_t e I_r .

7.6.2 $\vec{E} \perp \vec{\Sigma}$

$$\begin{cases} E_t = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} E_i \\ E_r = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} E_i \end{cases} \quad (55)$$

7.6.3 E ortogonale al piano di incidenza

$$\begin{cases} E_t = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} E_i \\ E_r = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} E_i \end{cases} \quad (56)$$

Si definisce l'angolo di Brewster come l'angolo in corrispondenza del quale la luce risulta completamente polarizzata:

$$\theta_b = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (57)$$

7.7 Interferenza

7.7.1 Interferenza da dispositivo di Young

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \quad (58)$$

7.7.2 Interferenza da N fenditure

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)} \quad (59)$$

$$I = N^2 I_0 \quad (60)$$

7.7.3 Reticoli

Dispersione D:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{d \cos(\theta_{max})} \quad (61)$$

Potere risolutivo R:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{nN}{\cos(\theta)} \simeq nN \quad (62)$$

7.8 Diffrazione

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \sin \theta}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)^2} \quad (63)$$

Si definisce il "Potere separatore" come:

$$\gamma_R = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (64)$$

8 Ottica

8.1 Specchi

$$\begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{f} \\ m = \frac{q}{p} \end{cases} \quad (65)$$

8.2 Diottri

$$\begin{cases} \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \\ \frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1 \\ m = \frac{n_1 q}{n_2 p} \end{cases} \quad (66)$$

8.3 Lenti sottili

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{n_2}{n_1} - n_1\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f} \\ m = \frac{q}{p} \end{cases} \quad (67)$$