Affine Transformation 2

Computational Visual Design (CVD-Lab), DIA, “Roma Tre”
University, Rome, Italy

Computational Graphics 2012

Sommario

- Trasformazioni affini 3D
  - Traslazione e scalamento
  - Rotazione
  - Scorrimento

Introduzione

la estensione 3D delle trasformazioni già studiate nel caso 2D è molto facile

una cura maggiore è necessaria solo per le rotazioni e gli scorrimenti

per unificare il trattamento delle trasformazioni lineari e affini e usare il prodotto matriciale come unico operatore geometrico, useremo coordinate omogenee normalizzate e tensori in $\mathrm{lin}\ \mathbb{R}^4$

Sommario

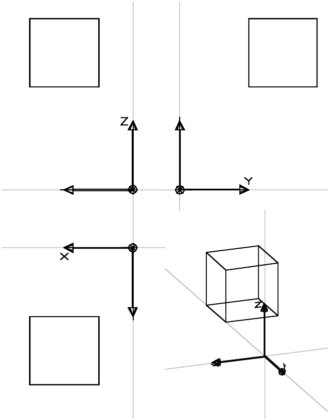
Traslazione

Il tensore di *traslazione* $\mathbf{T}_{xyz}(l, m, n)$ con parametri l, m, n, e la sua matrice

$$\mathbf{T}_{xyz}(l, m, n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

riga e colonna omogenee sono le ultime !!

Traslazione



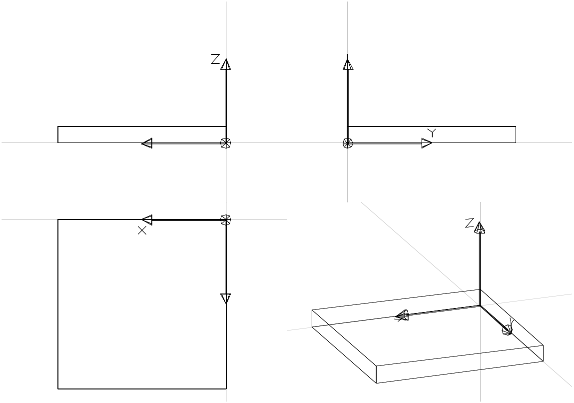

```
T:<1,2,3>:<0.5,1,1.5>:(CUBOID:<1,1,1>);
```

Scalamento

il tensore di *scalamento* $\mathbf{S}_{xyz}(a, b, c)$ con parametri a, b, c è rappresentato dalla matrice

$$\mathbf{S}_{xyz}(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scalamento




```
S:<1,2,3>:<2,2,0.2>:(CUBOID:<1,1,1>);
```

Sommario

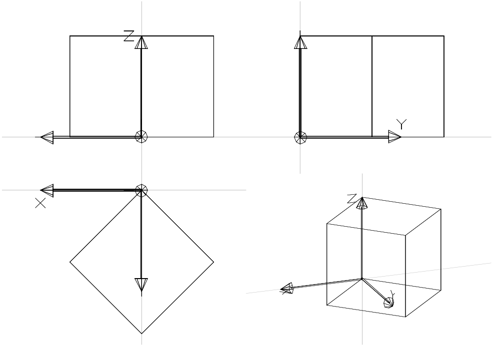
Rotazioni elementari

dato un riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^3$, chiamiamo *rotazioni elementari* $\mathbf{R}_{yz}$,$\mathbf{R}_{xz}$ e $\mathbf{R}_{xy}$, tre funzioni $\mathbb{R} \to \operatorname{lin} \mathbb{R}^3$, che riportano, per ogni angolo, un tensore di rotazione intorno ad un asse coordinato

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

matrici in coordinate cartesiane (no omogenee)

Rotazioni elementari

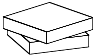


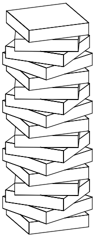

```
R:<1,2>:(PI/4):(CUBOID:<1,1,1>);
```

Rotazioni elementari

esempio

si definisce l'elemento parallelepipedo `element`, traslato in x, y da un tensore `T:<1,2>:<-5,-5>` per allinearne il centro con l'asse z





```
DEF element = (T:<1,2>:<-5,-5> ~ CUBOID):<10,10,2>;
DEF pair = STRUCT:< element, (T:3:2 ~ R:<1,2>:(PI/8)):
    element >;
DEF column = (STRUCT~##:17):<element,T:3:2,R:<1,2>:(PI/
    8)>;
```

Rotazione intorno ad un asse qualunque

una rotazione di $\mathbb{E}^3$ è una trasformazione ortogonale lineare con un insieme di punti fissi (chiamato autospazio in algebra lineare) di dimensione 1, noto come *asse della rotazione*

in tale trasformazione, ogni punto dello spazio fuori dall'asse è mappato nel secondo estremo di un arco di circonferenza avente il primo estremo nel punto considerato, angolo costante, centro sull'asse, e contenuto in un piano ortogonale all'asse.

calcoleremo la matrice di un tensore di rotazione $\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha)$, con

$$\mathbf{R}_{xyz} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \operatorname{lin} \mathbb{R}^4 : (\mathbf{n}, \alpha) \mapsto \mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha),$$

dove l'asse di rotazione è parallelo al vettore $\mathbf{n}$ e α è l'angolo di rotazione

Rotazione intorno ad un asse qualunque

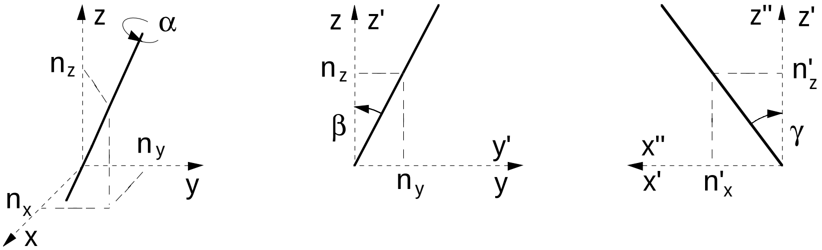
per composizione di rotazioni elementari

una rotazione 3D non elementare $\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha)$, di asse n e angolo α, si può ridurre alla composizione di rotazioni elementari

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha) &= (\mathbf{R}_y(\gamma) \circ \mathbf{R}_x(\beta))^{-1} \circ \mathbf{R}_z(\alpha) \circ (\mathbf{R}_y(\gamma) \circ \mathbf{R}_x(\beta)) \\
&= \mathbf{R}_x(\beta)^{-1} \circ \mathbf{R}_y(\gamma)^{-1} \circ \mathbf{R}_z(\alpha) \circ \mathbf{R}_y(\gamma) \circ \mathbf{R}_x(\beta) \\
&= \mathbf{R}_x(-\beta) \circ \mathbf{R}_y(-\gamma) \circ \mathbf{R}_z(\alpha) \circ \mathbf{R}_y(\gamma) \circ \mathbf{R}_x(\beta).
\end{aligned}
$$

Rotazione intorno ad un asse qualunque

decomposizione di una rotazione arbitraria in rotazioni elementari



(a) l'asse **n** (b) la rotazione intorno a *x* (c) la rotazione intorno ad *y*

$$\beta = \arctan\left(\frac{n_y}{n_z}\right) \qquad \gamma = -\arctan\left(\frac{n'_x}{n'_z}\right)$$

dove $\mathbf{n}' = \mathbf{R}_x(\beta)\,\mathbf{n}$.

Rotazione intorno ad un asse qualunque
per trasformazione di coordinate

il tensore $\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha)$ di una rotazione arbitraria può essere ricavato per composizione di:

$$\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha) = \mathbf{Q}_{\mathbf{n}}^{-1} \circ \mathbf{R}_z(\alpha) \circ \mathbf{Q}_{\mathbf{n}}.$$

1. una trasformazione di coordinate $\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}$ che mappi il versore $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ e due versori ortogonali negli elementi di una nuova base;
2. una rotazione $\mathbf{R}_z(\alpha)$ intorno all'asse z di questa nuova base;
3. la trasformazione inversa di coordinate $\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}^{-1}$.

Rotazione intorno ad un asse qualunque

per trasformazione di coordinate

si può scegliere una tripla $\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z$ di vettori ortonormali, con un elemento diretto come l'asse di rotazione

tali vettori sono trasformati nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ dalla matrice incognita $\mathbf{Q_n}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Q_n} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Q_n} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x^T \\ \mathbf{q}_y^T \\ \mathbf{q}_z^T \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno ad un asse qualunque

per trasformazione di coordinate

per prima cosa poniamo

$$\mathbf{q}_z = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|},$$

supponendo che sia verificata l'ipotesi $\mathbf{n} \neq \mathbf{e}_3$, che implicherebbe il caso banale $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \alpha) = \mathbf{R}_z(\alpha)$. Quindi:

$$\mathbf{q}_x = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}\|}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{q}_y = \mathbf{q}_z \times \mathbf{q}_x.$$

Rotazione intorno ad un asse qualunque

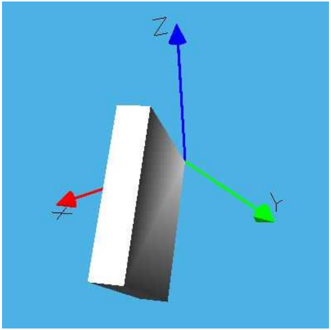
implementazione per trasformazione di coordinate

```
DEF Rotn (alpha::IsReal; n::IsVect) =
  IF:< OR ~ [IsUp,IsZero] ~ s2, R:<1,2> ~ s1, Rot_n >:<
      alpha,n>
WHERE
  Rot_n (alpha::IsReal; n::IsVect) = (MAT ~ TRANS):Q ~ R
      :<1,2>:alpha ~ MAT:Q,
  Q  = MatHom:<qx, qy, qz>,
  qx = UnitVect:(<0,0,1> VectProd n),
  qy = qz VectProd qx,
  qz = UnitVect:n,
  IsUp = AND ~ [C:EQ:0~s1, C:EQ:0 ~ s2, NOT ~ C:EQ:0 ~
      s3]
END;

DEF IsZero = AND ~ AA:(C:EQ:0);
```

Rotazione intorno ad un asse qualunque

esempio




```
(rotn:< pi/2, <1,1,0> > ~ CUBOID):<1,1,0.2>;
```

Sommario

Scorrimenti elementari

uno *scorrimento elementare* 3D è un tensore che non muta una coordinata e cambia le altre come funzioni lineari della coordinata non trasformata

distinguiamo pertanto tre tensori di scorrimento elementare $\mathbf{H}_{yz}(a, b)$, $\mathbf{H}_{xz}(a, b)$ e $\mathbf{H}_{xy}(a, b)$, le cui matrici differiscono dalla matrice identità solo per gli elementi di una colonna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scorrimenti elementari

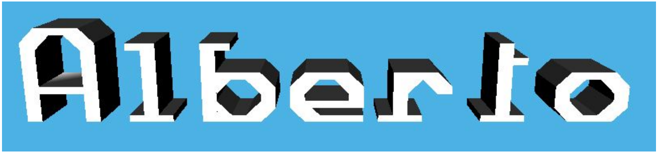
consideriamo lo spazio 3D come un fascio di piani paralleli a un piano coordinato, invariante; gli altri subiranno una traslazione su se stessi, funzione lineare della distanza dal piano invariante

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}^* &= \mathbf{H}_x(a,b)\,\mathbf{p} = (x,\ y+ax,\ z+bx,\ 1)^T \\
\mathbf{p}^* &= \mathbf{H}_y(a,b)\,\mathbf{p} = (x+ay,\ y,\ z+by,\ 1)^T \\
\mathbf{p}^* &= \mathbf{H}_z(a,b)\,\mathbf{p} = (x+az,\ y+bz,\ z,\ 1)^T
\end{aligned}
$$

rispetto al tensore $\mathbf{H}_z = \mathbf{H}_{xy}(a,b)$:

1. il piano $z = 0$ è invariante;
2. il piano $z = 1$ trasla con vettore della traslazione $\mathbf{t} = (a,b,0)^T$;
3. ogni piano $z = c$ trasla di $\mathbf{t}' = c(a,b,0)^T$.

Scorrimenti elementari



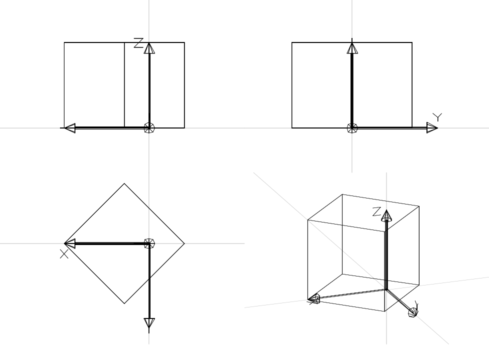

```
solidifier:'Alberto';
DEF tensor = (MAT ~ mathom):<<1,0.5,0>,<0,1,0>,<0,0,1>>;
(optimize ~ tensor  ~ solidifier):'Alberto';
```

DOMANDA: quale scorrimento elementare e‘ stato applicato ?

TRASFORMAZIONI COMPOSTE

per composizione di funzioni, non per prodotto di matrici !!

$\boxed{\text{rotazione di } \pi/4 \text{ intorno ad asse per spigolo } ((1,0,0),(1,0,1))}$




```
(T:1:1  ~  R:<1,2>:(PI/4)  ~  T:1:-1):(CUBOID:<1,1,1>);
```

ROTAZIONI INTORNO AD ASSI AFFINI

un più generale tensore di rotazione di $\mathbb{E}^3$, con asse un sottospazio *affine* di dimensione 1, cioè una linea retta non necessariamente passante per l'origine, è ottenuto per composizione di trasformazioni in $\mathrm{lin}\ \mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{R}^*_{xyz}(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \alpha) = \mathbf{T}_{xyz}(\mathbf{p} - \mathbf{o}) \circ \mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n}, \alpha) \circ \mathbf{T}_{xyz}(\mathbf{o} - \mathbf{p})$$

dove $\mathbf{R}^*_{xyz}(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \alpha)$ denota la *rotazione intorno all'asse* $\mathbf{n}$ *passante per il punto* $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$, e $\mathbf{o}$ è l'origine del riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^3$.

RIFLESSIONE INTORNO A PIANI AFFINI

analogamente la riflessione $\mathbf{Z}_{xyz}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ rispetto ad un piano qualunque (immaginiamo uno specchio) di normale $\mathbf{n}$ e passante per il punto $\mathbf{p}$ richiederà di comporre

1. una traslazione $\mathbf{T}_{xyz}(\mathbf{o} - \mathbf{p})$ che porti $\mathbf{p}$ nell'origine $\mathbf{o}$
2. una rotazione $\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3, \alpha)$ che porti $\mathbf{n}$ sull'asse $\mathbf{e}_3$, con $\alpha =$
3. una riflessione $\mathbf{S}(1, 1, -1)$ rispetto al piano coordinato normale
4. la rotazione inversa $\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3, -\alpha)$
5. la traslazione inversa $\mathbf{T}_{xyz}(\mathbf{p} - \mathbf{o})$

$$\mathbf{Z}_{xyz}(\mathbf{n}, \mathbf{p}) =$$

$$\mathbf{T}_{xyz}(\mathbf{p} - \mathbf{o}) \circ \mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3, -\alpha) \circ \mathbf{S}(1, 1, -1) \mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3, \alpha) \circ \mathbf{T}_{xyz}(\mathbf{o} - \mathbf{p})$$

SCALAMENTO UNIFORME – definizione

UnO scalamento uniforme $\mathbf{S}_{xyz}(a, a, a)$ è rappresentato da una matrice $(s_{ij}) \in \mathbb{R}^4_4$, che differisce dall'identità per il coefficiente s_{44}:

$$\mathbf{S}_{xyz}(a, a, a) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

è facile verificare che:

$$p^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \\ 1 \end{bmatrix}$$

STRUTTURA DI UN TENSORE AFFINE

le trasformazioni affini di $\mathbb{E}^3$, che sono rappresentate in coordinate omogenee da matrici reali 4×4, hanno sempre la struttura:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{m} \\ \mathbf{0}^T & a \end{bmatrix}$$

- dove $\mathbf{Q}$ è una matrice invertibile 3×3
- se $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{Z}$ contiene una componente di traslazione
- se $a \neq 1$, allora diciamo che $\mathbf{Z}$ è *non normalizzata*. In questo caso contiene uno scalamento uniforme con parametro $\frac{1}{a}$.

AZIONE DI UN TENSORE SUI COVETTORI

una equazione lineare del tipo $ax + by + cz + d = 0$ (equazione cartesiana di un piano in E^3) si può scrivere come

$$\mathbf{qp} = 0$$

dove $\mathbf{q} = (a, b, c, d)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)^T$

quale è l'effetto di un tensore affine $\mathbf{M}$ sul piano? Sappiamo che muta rette in rette e piani in piani, ergo

$$\mathbf{q}^*\mathbf{p}^* = \mathbf{qQMp} = 0$$

ovvero

$$\mathbf{qQMp} = \mathbf{qp}$$

da cui $\mathbf{QM} = \mathbf{I}$ e quindi, per il tensore $\mathbf{Q}$ incognito da applicare ai covettori abbiamo: $\boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{-1}}$

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI

composizione o prodotto ??

Quando una successione di tensori $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_n$ viene applicata ad un punto $\mathbf{p}$, potremo scrivere

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{Q}_n \circ \cdots \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1)(\mathbf{p}),$$

oppure

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{Q}_n \ \cdots \ \mathbf{Q}_2 \ \mathbf{Q}_1 \ \mathbf{p},$$

in funzione del significato (tensore o matrice) del simbolo $\mathbf{Q}_i$.

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI – associatività

sia la composizione di tensori che il prodotto di matrici sono operazioni associative (a sinistra e a destra)

$$(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_2) \circ \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_3 \circ (\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1) = \mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1$$

$$(\mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2)\,\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_3\,(\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1) = \mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$$

non è quindi necessario usare le parentesi per specificare l'ordine delle operazioni

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI

in generale, la composizione di tensori e il prodotto di matrici non sono commutative:

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 \neq \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \neq \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\,,$$

ma ci sono importanti eccezioni a questa regola
per esempio, sono *commutative*, ma la lista non è esaustiva:

1. la composizione (prodotto) di rotazioni intorno allo stesso asse;
2. la composizione (prodotto) di traslazioni;
3. la composizione (prodotto) di scalamenti;
4. la composizione (prodotto) di scalamenti uniformi e rotazioni.

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI – composizione

tensori di rotazione e traslazione hanno *componibilità additiva*:

$$\mathbf{T}_{xy}(m_1, n_1) \circ \mathbf{T}_{xy}(m_2, n_2) = \mathbf{T}_{xy}(m_1 + m_2, n_1 + n_2),$$

$$\mathbf{R}_{xy}(\alpha_1) \circ \mathbf{R}_{xy}(\alpha_2) = \mathbf{R}_{xy}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

al contrario, tensori di scalamento hanno *componibilità moltiplicativa*:

$$\mathbf{S}_{xy}(a_1, b_1) \circ \mathbf{S}_{xy}(a_2, b_2) = \mathbf{S}_{xy}(a_1 a_2, b_1 b_2)$$

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI – inversa

segue immediatamente per le trasformazioni inverse che:

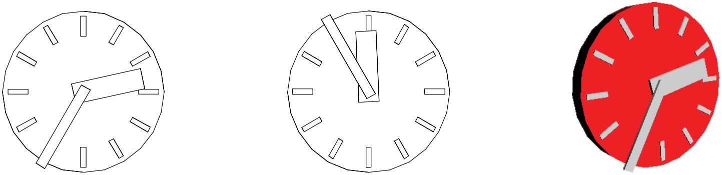
$$(\mathbf{T}_{xy}(m,n))^{-1} = \mathbf{T}_{xy}(-m,-n)$$

$$(\mathbf{R}_{xy}(\alpha))^{-1} = \mathbf{R}_{xy}(-\alpha)$$

$$(\mathbf{S}_{xy}(a,b))^{-1} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

ESEMPIO – orologio

`background` circolare, i 12 `ticks` delle ore, e le lancette delle `hour` e dei `minute`, ciascuna data in un suo sistema di riferimento locale



```
DEF background = Circle:0.8:<24,1>;
DEF minute = (T:<1,2>:<-0.05,-0.05> ~ CUBOID):<0.9,0.1>;
DEF hour = (T:<1,2>:<-0.1,-0.1> ~ CUBOID):<0.7,0.2>;
DEF ticks = (STRUCT ~ ##:12):< tick, R:<1,2>:(PI/6) >;
DEF tick = (T:<1,2>:<-0.025,0.55> ~ CUBOID):<0.05,0.2>;
```

ESEMPIO – orologio 2D / 3D

```
DEF clock2D (h,m::IsInt) = STRUCT:<
    background,
    ticks,
    R:<1,2>:( PI/2 - (h + m/60)*PI/6 ):hour,
    R:<1,2>:( PI/2 - m*PI/30 ):minute
>;
```

```
DEF clock3D (h,m::IsInt) = STRUCT:<
    background * Q:0.2 COLOR RGB:<1,0,0>,
    T:3:0.2:(ticks * Q:0.01), T:3:0.2,
    R:<1,2>:( PI/2 - (h + m/60)*PI/6 ):(hour * Q:0.03),
        T:3:0.03,
    R:<1,2>:( PI/2 - m*PI/30 ):(minute * Q:0.03)
>;
```