Splines

Computational Visual Design (CVD-Lab), DIA, “Roma Tre”
University, Rome, Italy

Computational Graphics 2012

Sommario

- Spline uniformi
  - Spline cardinali
  - B-spline uniformi cubiche
- B-spline non uniformi
  - B-spline nonuniformi cubiche
  - B-spline nonuniformi di grado arbitrario

Spline

Una *spline* è una curva composita, definita congiungendo alcuni segmenti di curva adiacenti con un appropriato ordine di continuità agli estremi

alcune classi di spline polinomiali sono largamente diffuse nei sistemi grafici e CAD.

Spline

tra queste:

1. spline cardinali cubiche,

   costituite da segmenti cubici di Hermite, interpolano tutti i punti della sequenza di controllo;

2. B-spline uniformi cubiche,

   approssimano la sequenza dei punti di controllo, usando segmenti di cubica congiunti con continuità C^2;

3. B-spline nonuniformi

   di grado arbitrario, sono spline polinomiali di grande flessibilità, e godono di numerose proprietà utili

Spline cardinali

nelle spline cardinali cubiche ogni segmento di curva componente è una cubica di Hermite

una spline cardinale cubica è definita da una sequenza $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$ di $m + 1$ punti di controllo ($m \geq 3$), che generano $m - 2$ segmenti cubici adiacenti

Sommario

Spline cardinali

lo i-esimo segmento di curva $\mathbf{C}_i(u)$ è definito dall'interpolazione dei punti $\mathbf{p}_i$ e $\mathbf{p}_{i+1}$, e imponendo che il vettore tangente in un punto $\mathbf{p}_i$ sia parallelo al vettore differenza tra i punti adiacenti $\mathbf{p}_{i+1}$ e $\mathbf{p}_{i-1}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_i(0) &= \mathbf{p}_i \\
\mathbf{C}_i(1) &= \mathbf{p}_{i+1} \\
\mathbf{C}_i'(0) &= h(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}) \\
\mathbf{C}_i'(1) &= h(\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_i)
\end{aligned}
$$

Spline cardinali

In conseguenza di tali vincoli, una cardinale cubica interpola tutti i punti nella sottosequenza $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{m-1}$. Negli intervalli tra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e tra $\mathbf{p}_{m-1}$ e $\mathbf{p}_m$ la spline *non* è definita.

L'equazione del segmento $\mathbf{C}_i(u)$ può essere derivata dalla forma matriciale delle curve di Hermite come segue:

$$\mathbf{C}_i(u) = U_3 \, \mathbf{B}_h \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ h(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ h(\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_i \end{bmatrix}, \qquad u \in [0, 1].$$

Spline cardinali

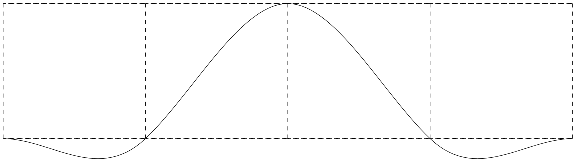
Ovvero:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_i(u) &= \mathbf{U}_3\,\mathbf{M}_h \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h & 0 & h & 0 \\ 0 & -h & 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}_3\,\mathbf{M}_h\,\mathbf{M}_{hc}\,\mathbf{G}_i \;=\; \mathbf{U}_3\,\mathbf{M}_c\,\mathbf{G}_i\end{aligned}$$

dove $\mathbf{M}_{hc}$ è la matrice della trasformazione dalla base di Hermite alla base cardinale, $\mathbf{M}_c$ è la matrice della base cardinale, e $\mathbf{G}_i$ è il tensore di controllo dello i-esimo segmento di spline.

Spline cardinali – base cardinale cubica

$$
\begin{aligned}
c_1(u) &= -hu^3 + 2hu^2 - hu \\
c_2(u) &= (2-h)u^3 + (h-3)u^2 + 1 \\
c_3(u) &= (h-2)u^3 + (3-2h)u^2 + hu \\
c_4(u) &= hu^3 - hu^2
\end{aligned}
$$



Spline cardinali – base cardinale cubica

```
DEF CubicCardinalGraph =
   STRUCT ∼ [MAP:[u,c4], k:(T:1:1), MAP:[u,c3], k:(T:1:1),
      MAP:[u,c2], k:(T:1:1), MAP:[u,c1]]
WHERE
   c1 = ((k:0 - h) * u3) + ((k:2 * h) * u2) - (h * u),
   c2 = ((k:2 - h) * u3) + ((h - k:3) * u2) + (k:1),
   c3 = ((h - k:2) * u3) + ((k:3 - k:2*h) *u2) + (h*u),
   c4 = (h * u3) - (h * u2),
   u = s1, u2 = u*u, u3 = u2*u, h = k:1
END;
```

B-SPLINE – cubiche

Le B-spline uniformi cubiche sono curve composite utilizzate per approssimare una sequenza di $m + 1$ punti di controllo $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$, con $m \geq 3$

i punti di controllo definiscono $m - 2$ segmenti adiacenti della curva polinomiale cubica

Sommario

B-SPLINE – cubiche

l'i-esimo segmento di curva, denotato come $\mathbf{Q}_i(u)$, è generato imponendo la continuità geometrica e delle derivate prime e seconde ai punti estremi del segmento:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_i'(0) &= \mathbf{Q}_{i-1}'(1) \\
\mathbf{Q}_i'(1) &= \mathbf{Q}_{i+1}'(0) \\
\mathbf{Q}_i''(0) &= \mathbf{Q}_{i-1}''(1) \\
\mathbf{Q}_i''(1) &= \mathbf{Q}_{i+1}''(0)
\end{aligned}
$$

NOTA BENE: non è imposto il passaggio per i punti di controllo. Una B-spline approssima, non interpola tali punti

B-SPLINE – cubiche

L'equazione parametrica del segmento cubico $\mathbf{Q}_i(u)$, con $u \in [0, 1]$, può essere scritta in forma geometrica come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i(u) &= \mathbf{U}_3 \, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+2} \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq m-2, \\ &= \mathbf{U}_3 \, \mathbf{B}_s \, \mathbf{G}_i \end{aligned}$$

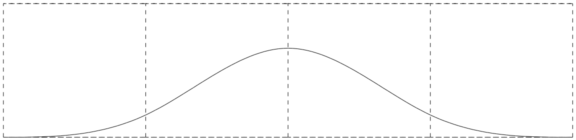
B-SPLINE – cubiche

i polinomi della base B-spline uniforme cubica, dati dal prodotto $\mathbf{U}_3\mathbf{B}_s$
, sono

$$
\begin{aligned}
B_1(u) &= \frac{1}{6}(-u^3 + 3u^2 - 3u + 1) \\
B_2(u) &= \frac{1}{6}(3u^3 + -6u^2 + 4) \\
B_3(u) &= \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1) \\
B_4(u) &= \frac{1}{6}u^3
\end{aligned}
$$

B-SPLINE – cubiche

grafici dei polinomi $B_4(u)$, $B_3(u)$, $B_2(u)$ e $B_1(u)$ della base B-spline uniforme cubica



B-SPLINE – cubiche

```
DEF UniformBsplineGraph =
   STRUCT ∼ [Box, MAP:[u,B4], k:(T:1:1), Box, MAP:[u,B3], k:(T:1:1),
      Box, MAP:[u,B2], k:(T:1:1), Box, MAP:[u,B1]]
WHERE
   B1 = a * ((k:3*u2) - (k:1*u3) - (k:3*u) + (k:1)),
   B2 = a * ((k:3*u3) - (k:6*u2) + (k:4)),
   B3 = a * ((k:3*u2) - (k:3*u3) + (k:3*u) + (k:1)),
   B4 = a * u3,
   u = s1, u2 = u*u, u3 = u2*u, a = k:(1/6)
   Box = (K ∼ @1 ∼ CUBOID):<1,1>
END;

DEF out = UniformBsplineGraph:(Intervals:1:30)

SVG:out:10:'out.svg'
```

B-Spline non uniformi

sono chiamate *nonuniformi* perché differenti segmenti di spline possono corrispondere a differenti intervalli nello spazio del parametro.

I polinomi di base, e di conseguenza la forma della spline e le sue proprietà, sono definiti da una sequenza non decrescente di numeri reali

$$t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n,$$

chiamata *sequenza nodale*.

ogni sottoinsieme di $k + 2$ valori nodali adiacenti è utilizzato per calcolare un polinomio di base di grado k

alcuni nodi adiacenti possono coincidere. In tal caso si parla di *molteplicità* dei nodi.

B-Spline non uniformi

Numero di punti e nodi

il numero $n+1$ dei *nodi* è maggiore del numero $m+1$ dei *punti di controllo* $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m$.

tra numero di nodi e numero di punti di controllo deve valere la relazione

$$n = m + k + 1, \tag{1}$$

dove k è il *grado* dei segmenti di spline.

La quantità $h = k + 1$ è chiamata *ordine* della spline.

B-Spline non uniformi

Flessibilità delle B-spline nonuniformi

le B-spline nonuniformi hanno una flessibilità molto maggiore di quelle uniformi.

I polinomi di base associati con ogni punto di controllo dipendono dal sottoinsieme di nodi generatori.

I segmenti di spline possono pertanto essere parametrizzati su intervalli di differente misura, ed essere persino ridotti ad un singolo punto.

si può ridurre la continuità ai giunti, per esempio da C^2 a C^1 a C^0 e persino alla mancanza di continuità accrescendo la molteplicità di un nodo.

Sommario

B-Spline non uniformi cubiche

segmento di curva cubica

$$(t_0, \dots, t_3, \dots, t_m, \dots, t_{m+4}), \qquad t_i \le t_{i+1}.$$

In particolare, il segmento cubico $\mathbf{Q}_i(t)$ è definito come

$$\mathbf{Q}_i(t) = \sum_{\ell=0}^{3} \mathbf{p}_{i-\ell} B_{i-\ell,4}(t) \qquad \begin{array}{l} 3 \le i \le m, \\ t \in [t_i, t_{i+1}) \end{array} \tag{2}$$

dove $B_{i,4}(u)$ è il polinomio di base di indice i e ordine 4, che è generato dalla sottosequenza nodale $(t_i, \dots, t_{i+4})$.

B-Spline non uniformi cubiche

segmento di curva cubica

Per la spline si può scrivere:

$$\mathbf{Q}(t) = \bigcup_{i=3}^{m} \mathbf{Q}_i(t), \qquad t \in [t_3, t_{m+1}).$$

Fuori dall'intervallo $[t_3, t_{m+1})$ una B-spline nonuniforme cubica non è definita.

in tale intervallo, ogni coppia di nodi adiacenti è associata con un segmento di spline.

se un nodo t_i ha molteplicità maggiore di uno, cioè quando $t_i = t_{i+1}$, allora il segmento $\mathbf{Q}_i(t)$ si riduce ad un punto.

B-Spline non uniformi cubiche

Esempio: cubica di Bézier

una B-spline cubica con un singolo segmento di curva richiede 4 punti di controllo.

Di conseguenza, il numero di nodi deve essere 8, ovvero $4 + 3 + 1$.

Parametrizzando la spline nell'intervallo $[0, 1]$, la sequenza nodale sarà pertanto:

$$(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) \tag{3}$$

I quattro polinomi di base e le associate sottosequenze nodali saranno:
$B_{0,4}$ e $(0, 0, 0, 0, 1)$, $B_{1,4}$ e $(0, 0, 0, 1, 1)$, $B_{2,4}$ e $(0, 0, 1, 1, 1)$ ed infine $B_{3,4}$ e $(0, 1, 1, 1, 1)$.

B-Spline non uniformi

Entità geometriche (1)

- Punti di controllo sono denotati come $\mathbf{p}_i$, con $0 \leq i \leq m$.
- Valori nodali sono denotati come t_i, con $0 \leq i \leq n$. Deve essere $n = m + k + 1$, dove k è il *grado* della spline.
- Grado della spline è definito come il grado delle funzioni base che sono combinate con i punti di controllo. Il *grado* è denotato come k. È connesso all'*ordine* h della spline da $h = k + 1$.

B-Spline non uniformi

Entità geometriche (2)

- Polinomi di base sono denotati come $B_{i,h}(t)$. Sono polinomi univariati nella indeterminata t, calcolati usando le formule ricorsive di Cox e de Boor

L'indice i è associato con il primo dei valori nella sottosequenza nodale $(t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+h})$ usata per calcolare $B_{i,h}(t)$. Il secondo indice è l'*ordine* del polinomio.

B-Spline non uniformi

Entità geometriche (2)

- Segmenti di spline sono definiti come funzioni vettoriali polinomiali di un singolo parametro. Tali funzioni sono denotate come $\mathbf{Q}_i(t)$, con $k \leq i \leq m$.

Un segmento di spline $\mathbf{Q}_i(t)$ è ottenuto per combinazione dell' i-esimo punto di controllo e dei k punti precedenti con la base polinomiale di ordine h associata agli stessi indici.

È facile vedere che il numero di segmenti di spline è $m - k + 1$.

Sommario

Spline uniformi

- Spline cardinali
- B-spline uniformi cubiche

B-spline non uniformi

- B-spline nonuniformi cubiche
- B-spline nonuniformi di grado arbitrario

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

sequenza nodale

In questo caso la sequenza nodale può essere scritta come

$$(t_0, \ldots, t_k, \ldots, t_{m+1}, \ldots, t_{m+h}), \qquad t_i \le t_{i+1},$$

con la spline definita nell'intervallo $[t_k, t_{m+1})$.

La prima funzione base $B_{0,h}(t)$ è definita dalla sottosequenza nodale $(t_0, \ldots, t_k, t_{k+1})$;

l'ultima funzione $B_{m,h}(t)$ è definita da $(t_m, t_{m+1}, \ldots, t_{m+h})$.

Si noti la biiezione tra polinomi di base e punti di controllo.

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

segmento di grado k

L'equazione del segmento di grado k con $m+1$ punti di controllo può pertanto essere scritta come

$$\mathbf{Q}_i(t) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbf{p}_{i-\ell} B_{i-\ell,h}(t) \qquad \begin{array}{l} k \leq i \leq m, \\ t \in [t_i, t_{i+1}) \end{array} \tag{4}$$

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

rappresentazione globale

Si può dare facilmente una rappresentazione globale della B-spline nonuniforme nel suo insieme:

$$\mathbf{Q}(t) = \bigcup_{i=k}^{m} \mathbf{Q}_i(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{p}_i \, B_{i,h}(t), \qquad t \in [t_k, t_{m+1}),$$

poiché ogni funzione base $B_{i,h}(t)$ è nulla fuori dell'intervallo $[t_i, t_{i+h})$.

Se la molteplicità del primo (ultimo) nodo è pari ad h, allora la spline interpola il primo (ultimo) punto di controllo.

L'interpolazione è indotta dal fatto che tale molteplicità induce $B_{0,h}(t_k) = 1$ ($B_{m,h}(t_{m+1}) = 1$, rispettivamente).

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

nodi interi

A differenza che nelle spline studiate precedentemente, nelle B-spline nonuniformi le funzioni base possono variare da segmento a segmento di curva, in quanto dipendono da una sottosequenza dei valori nodali soggetta al solo vincolo di non decrescenza.

Imponendo che l'ampiezza degli intervalli tra valori nodali successivi debba essere 0 oppure 1 allora si possono definire delle matrici di base per tutte le configurazioni significative di valori nodali.

Tali matrici possono essere utilizzate al posto della valutazione ricorsiva delle funzioni base per ogni valore del parametro.

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

Formula di Cox e de Boor

il polinomio di base $B_{i,h}(t)$, detto “con valore iniziale t_i e *ordine h*”, è definito come:

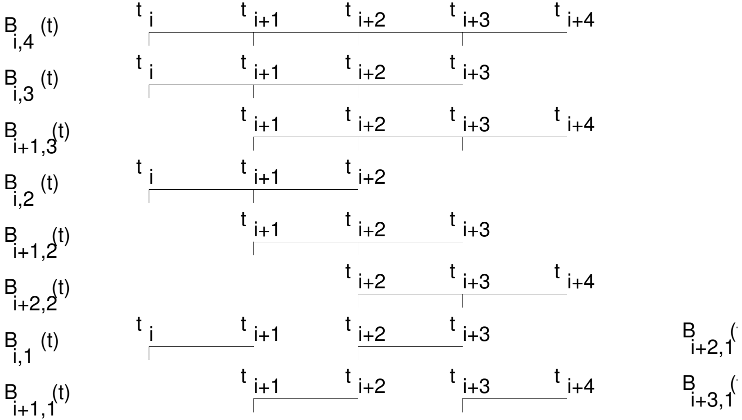
$$\begin{aligned} B_{i,1}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ B_{i,h}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+h-1} - t_i} B_{i,h-1}(t) + \frac{t_{i+h} - t}{t_{i+h} - t_{i+1}} B_{i+1,h-1}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Una funzione base di ordine h e valore iniziale t_i è definita usando due funzioni base di ordine $h-1$ e valori iniziali t_i e t_{i+1}. Nei casi base $B_{i,1}(t)$ della ricorsione, riguardanti funzioni di ordine 1, si usano *funzioni gradino*, il cui valore è 1 nell'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, e 0 altrove.

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

esempio

Rappresentazione della dipendenza di $B_{i,4}(t)$ da funzioni base di ordine minore e dai valori nodali



B-Spline non uniformi di grado arbitrario

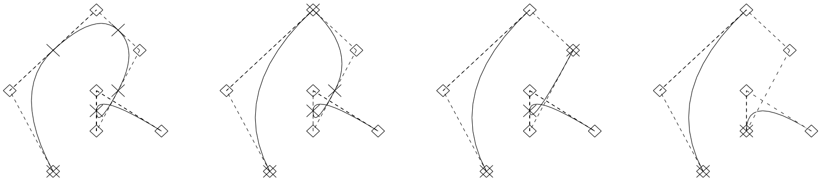
Proprietà

1. La misura dell'intervallo parametrico tra due nodi adiacenti è *nonuniforme*, ovvero può essere variabile.
2. le funzioni base possano variare da segmento a segmento, il che comporta grande flessibilità della forma, ma la valutazione dei polinomi B-spline è costosa. le ottimizzazioni richiedono valori nodali interi.
3. La continuità dei segmenti ad un nodo può essere ridotta innalzandone la molteplicità:

   un segmento di spline si riduce ad un singolo punto, con riduzione del sottoinsieme di punti di controllo condiviso tra due segmenti adiacenti di spline.
4. Un punto di controllo può essere interpolato, senza introdurre segmenti lineari di spline, innalzando la molteplicità di un nodo.
5. Si possono inserire nuovi punti di controllo e nodi, con editing e controllo raffinati della forma locale

B-Spline non uniformi di grado arbitrario

Proprietà



B-spline nonuniforme quadratica. Riduzione della continuità, inizialmente C^1, per aumento della molteplicità di un nodo

```
DEF points =
  <<0,0>,<-1,2>,<1,4>,<2,3>,<1,1>,<1,2>,<2.5,1>>;

DisplayNUBspline:< <2,<0,0,0,1,2,3,4,5,5,5>>, points >;
DisplayNUBspline:< <2,<0,0,0,1,1,2,3,4,4,4>>, points >;
DisplayNUBspline:< <2,<0,0,0,1,1,1,2,3,3,3>>, points >;
DisplayNUBspline:< <2,<0,0,0,1,1,1,1,2,2,2>>, points >;
```