Parametric curves 2

Computational Visual Design (CVD-Lab), DIA, “Roma Tre” University, Rome, Italy

Computational Graphics 2012

Sommario

Curve cubiche

l'equazione delle cubiche si ricava imponendo che l'insieme dei punti soddisfi

quattro vincoli

- il passaggio per due punti estremi $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$
- con tangenti ivi assegnate $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$

Curve polinomiali cubiche

la forma algebrica delle cubiche contiene 4 parametri vettoriali:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \mathbf{a}u^3 + \mathbf{b}u^2 + \mathbf{c}u + \mathbf{d} \\ &= \left[\begin{array}{cccc} u^3 & u^2 & u & 1 \end{array}\right] \mathbf{M}_3 \\ &= \mathbf{U}_3\,\mathbf{M}_3 \qquad (1) \end{aligned}$$

ogni insieme di quattro vincoli che consenta di specificare i gradi di libertà definisce una differente forma geometrica della curva cubica

i vincoli possono imporre il passaggio per 4 punti assegnati, o per 2 punti con tangenti (derivate) assegnate in tali punti, etc

Sommario

Curve polinomiali cubiche

- Forma di Hermite
- Forma di Bézier
- Splines

Forma geometrica di hermite

curve cubiche

la curva cubica è forzata ad avere punti estremi $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ con tangenti estreme assegnate $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$, nell'intervallo $u \in [0, 1]$

i vincoli sono pertanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{C}'(0) &= \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{C}'(1) &= \mathbf{s}_2 \end{aligned}$$

Forma geometrica di hermite

curve cubiche

la forma geometrica di Hermite per le cubiche polinomiali risulta

$$\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}.$$

l'equazione si può scrivere in forma matriciale come

$$\mathbf{C}(u) = U_3 \, \mathbf{B}_h \, \mathbf{G}_h,$$

dove $\mathbf{B}_h$ è la matrice della base di Hermite e $\mathbf{G}_h$ è il tensore di controllo delle curve cubiche di Hermite

Forma geometrica di hermite

curve cubiche

si può riscrivere la curva cubica di Hermite come combinazione polinomiale degli elementi del suo tensore di controllo:

$$\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} h_1(u) & h_2(u) & h_3(u) & h_4(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}$$

vediamo che una curva è una somma di prodotti di punti o vettori per i polinomi di una base (in questo caso la base di Hermite)

i polinomi della base sono anche detti blending functions

Curve di hermite

esempio

```
var manici = [[0,0],[10,0],[0,10],[10,10]];
var dominio = INTERVALS(1)(30);
var curva = CUBIC_HERMITE(S0)(manici);
var out = MAP(curva)(dominio);

DRAW(out)
```

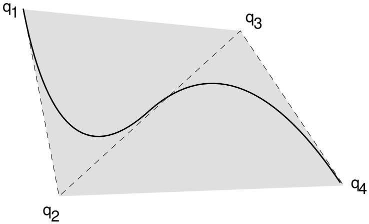
Sommario

- Curve polinomiali cubiche
  - Forma di Hermite
  - Forma di Bézier
  - Splines

Forma geometrica di bézier

curve cubiche

si costruisce la curva cubica mescolando una sequenza ordinata di quattro punti di controllo, detta poligono di controllo



una tale curva interpola i due punti di controllo estremi, e approssima i rimanenti due punti

Forma geometrica di bézier

la curva cubica sia generata dai punti $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_3$, e definita per $u \in [0, 1]$

per ricavare la sua equazione parametrica si risolve l'insieme di vincoli che impone: (a) il passaggio per i punti di controllo estremi, e che (b) i vettori tangenti iniziale e finale siano paralleli alla differenza di due punti di controllo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}(0) &= \mathbf{q}_0 \\
\mathbf{C}(1) &= \mathbf{q}_3 \\
\mathbf{C}'(0) &= \mathbf{s}_0 = 3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \\
\mathbf{C}'(1) &= \mathbf{s}_1 = 3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2),
\end{aligned}
$$

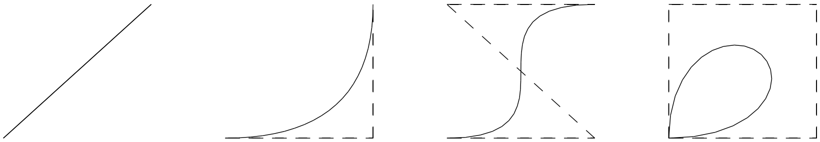
Forma geometrica di bézier

curve di grado arbitrario n

$$\mathbf{c}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u)\mathbf{q}_i$$

dove B_i^n sono i polinomi della base di Bézier di grado n

FORMA GEOMETRICA DI BÉZIER
curve di Bézier di grado arbitrario

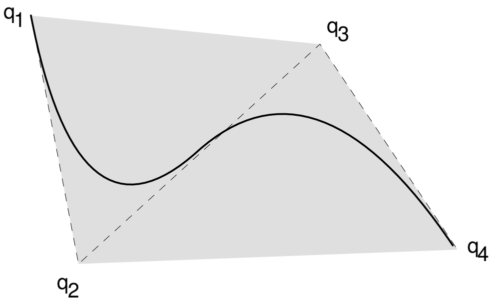


curve di Bézier di gradi 1, 2, 3 e 4 con i loro poligoni di controllo

quale relazione tra grado e numero di punti di controllo?

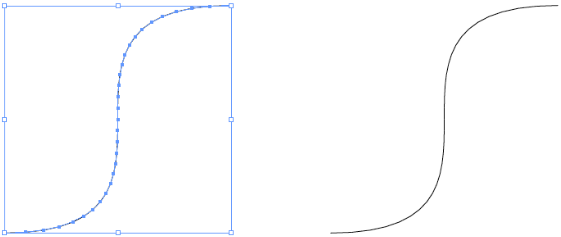
Forma geometrica di bézier

contenimento nel guscio convesso



una curva di Bézier di grado arbitrario n è contenuta nel guscio convesso dei suoi punti di controllo $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Curve di bézier



```
var manici = [[0,0],[10,0],[0,10],[10,10]];
var dominio = INTERVALS(1)(30);
var curva = BEZIER(S0)(manici);
var out = MAP(curva)(dominio);

DRAW(out)
```

Curve di bézier

```
var p1 = [[0,0],[10,10]];
var p2 = [[0,0],[10,0],[10,10]];
var p3 = [[0,0],[10,0],[0,10],[10,10]];
var p4 = [[0,0],[10,0],[10,10],[0,10],[0,0]];

var domain = INTERVALS(1)(30);
var t = T([0])([15]);

var out = STRUCT([
  MAP(BEZIER(S0)(p1))(domain), POLYLINE(p1), t,
  MAP(BEZIER(S0)(p2))(domain), POLYLINE(p2), t,
  MAP(BEZIER(S0)(p3))(domain), POLYLINE(p3), t,
  MAP(BEZIER(S0)(p4))(domain), POLYLINE(p4)
]);

DRAW(out);
```

Sommario

Spline

Una *spline* è una curva composita, definita congiungendo alcuni segmenti di curva adiacenti con un appropriato ordine di continuità agli estremi
alcune classi di spline polinomiali sono largamente diffuse nei sistemi grafici e CAD:

1. spline cardinali cubiche, costituite da segmenti cubici di Hermite, interpolano tutti i punti della sequenza di controllo;
2. B-spline uniformi cubiche, approssimano la sequenza dei punti di controllo, usando segmenti di cubica congiunti con continuità C^2;
3. B-spline nonuniformi di grado arbitrario, sono spline polinomiali di grande flessibilità, e godono di numerose proprietà utili.

Spline cardinali

nelle spline cardinali cubiche ogni segmento di curva componente è una cubica di Hermite

una spline cardinale cubica è definita da una sequenza $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$ di $m+1$ punti di controllo ($m \geq 3$), che generano $m-2$ segmenti cubici adiacenti

lo i-esimo segmento di curva $\mathbf{C}_i(u)$ è definito dall'interpolazione dei punti $\mathbf{p}_i$ e $\mathbf{p}_{i+1}$, e imponendo che il vettore tangente in un punto $\mathbf{p}_i$ sia parallelo al vettore differenza tra i punti adiacenti $\mathbf{p}_{i+1}$ e $\mathbf{p}_{i-1}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_i(0) &= \mathbf{p}_i \\
\mathbf{C}_i(1) &= \mathbf{p}_{i+1} \\
\mathbf{C}_i'(0) &= h(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}) \\
\mathbf{C}_i'(1) &= h(\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_i)
\end{aligned}
$$