Parametric curves 1

Computational Visual Design (CVD-Lab), DIA, “Roma Tre”
University, Rome, Italy

Computational Graphics 2012

Sommario

Rappresentazione parametrica

le curve come luoghi di punti di forma specifica sono talvolta identificate da un nome proprio, come cerchio, parabola, iperbole, spirale, elica, ...

alcune classi di curve a forma libera sono più interessanti, perché consentono di soddisfare i vincoli geometrici ed estetici posti da un problema di progettazione

le spline sono curve composite, continue a tratti, usate per interpolare o approssimare insiemi di punti

Rappresentazione parametrica

le curve come luoghi di punti di forma specifica sono talvolta identificate da un nome proprio, come cerchio, parabola, iperbole, spirale, elica, ...

alcune classi di curve a forma libera sono più interessanti, perché consentono di soddisfare i vincoli geometrici ed estetici posti da un problema di progettazione

le spline sono curve composite, continue a tratti, usate per interpolare o approssimare insiemi di punti

Rappresentazione parametrica

le curve come luoghi di punti di forma specifica sono talvolta identificate da un nome proprio, come cerchio, parabola, iperbole, spirale, elica, ...

alcune classi di curve a forma libera sono più interessanti, perché consentono di soddisfare i vincoli geometrici ed estetici posti da un problema di progettazione

le spline sono curve composite, continue a tratti, usate per interpolare o approssimare insiemi di punti

Rappresentazione parametrica
tipi di rappresentazione

1. esplicita o cartesiana: curva $=$ grafico di una funzione;
2. implicita: curva $=$ insieme zero di equazioni algebriche;
3. parametrica: curva $=$ funzione vettoriale di un parametro;
4. intrinseca: curva $=$ soluzione equazioni differenziali.

Rappresentazione parametrica

tipi di rappresentazione

1. esplicita o cartesiana: curva $=$ grafico di una funzione;
2. implicita: curva $=$ insieme zero di equazioni algebriche;
3. parametrica: curva $=$ funzione vettoriale di un parametro;
4. intrinseca: curva $=$ soluzione equazioni differenziali.

Rappresentazione parametrica
tipi di rappresentazione

1. esplicita o cartesiana: curva $=$ grafico di una funzione;
2. implicita: curva $=$ insieme zero di equazioni algebriche;
3. parametrica: curva $=$ funzione vettoriale di un parametro;
4. intrinseca: curva $=$ soluzione equazioni differenziali.

Rappresentazione parametrica

tipi di rappresentazione

1. esplicita o cartesiana: curva $=$ grafico di una funzione;

2. implicita: curva $=$ insieme zero di equazioni algebriche;

3. $\boxed{\text{parametrica: curva} = \text{funzione vettoriale di un parametro;}}$

4. intrinseca: curva $=$ soluzione equazioni differenziali.

Rappresentazione parametrica

tipi di rappresentazione

1. esplicita o cartesiana: curva $=$ grafico di una funzione;
2. implicita: curva $=$ insieme zero di equazioni algebriche;
3. $\boxed{\text{parametrica: curva} = \text{funzione vettoriale di un parametro;}}$
4. intrinseca: curva $=$ soluzione equazioni differenziali.

Rappresentazione parametrica

curva $\mathbf{c}$ = funzione "point-valued di un singolo parametro reale:

$$\mathbf{c} : D \to \mathbb{E}^n \quad \text{tale che} \quad \mathbf{c}(u) = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1(u) & \ldots & x_n(u) \end{bmatrix}^T$$

con dominio $D \subset \mathbb{R}$ spesso coincidente con $[0, 1]$.

- $n = 2$ curva piana
- $n = 3$ curva spaziale

le funzioni componenti $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sono dette funzioni coordinate della curva

Rappresentazione parametrica

curva $\mathbf{c}$ = funzione “point-valued di un singolo parametro reale:

$$\mathbf{c} : D \to \mathbb{E}^n \quad \text{tale che} \quad \mathbf{c}(u) = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1(u) & \dots & x_n(u) \end{bmatrix}^T$$

con dominio $D \subset \mathbb{R}$ spesso coincidente con $[0, 1]$.

- $n = 2$ curva piana
- $n = 3$ curva spaziale

le funzioni componenti $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sono dette funzioni coordinate della curva

Rappresentazione parametrica

curva $\mathbf{c}$ = funzione “point-valued di un singolo parametro reale:

$$\mathbf{c} : D \to \mathbb{E}^n \quad \text{tale che} \quad \mathbf{c}(u) = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1(u) & \dots & x_n(u) \end{bmatrix}^T$$

con dominio $D \subset \mathbb{R}$ spesso coincidente con $[0, 1]$.

- $n = 2$ curva piana
- $n = 3$ curva spaziale

le funzioni componenti $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sono dette funzioni coordinate della curva

Rappresentazione parametrica

curva $\mathbf{c}$ = funzione “point-valued di un singolo parametro reale:

$$\mathbf{c} : D \rightarrow \mathbb{E}^n \quad \text{tale che} \quad \mathbf{c}(u) = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1(u) & \ldots & x_n(u) \end{bmatrix}^T$$

con dominio $D \subset \mathbb{R}$ spesso coincidente con $[0, 1]$.

- $n = 2$ curva piana
- $n = 3$ curva spaziale

le funzioni componenti $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sono dette funzioni coordinate della curva

Rappresentazione parametrica

curva $\mathbf{c}$ = funzione "point-valued di un singolo parametro reale:

$$\mathbf{c} : D \to \mathbb{E}^n \quad \text{tale che} \quad \mathbf{c}(u) = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1(u) & \dots & x_n(u) \end{bmatrix}^T$$

con dominio $D \subset \mathbb{R}$ spesso coincidente con $[0, 1]$.

- $n = 2$ curva piana
- $n = 3$ curva spaziale

le funzioni componenti $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sono dette funzioni coordinate della curva

Sommario

Curve polinomiali
utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali
utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali

utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali

utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali

utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali

utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali

curva

$$\mathbf{c} = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} : D \to E^n$$

dove ogni funzione coordinata x_i è un polinomio ...

polinomio di grado k

$$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto \sum_{k=0}^{k} a_k u^k$$

Curve polinomiali

curva

$$\mathbf{c} = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} : D \to E^n$$

dove ogni funzione coordinata x_i è un polinomio ...

polinomio di grado k

$$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto \sum_{k=0}^{k} a_k u^k$$

Sommario

Sommario

Curva lineare

il segmento di retta tra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ è:

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)u + \mathbf{p}_1, \qquad u \in [0, 1],$$

polinomio di primo grado nella indeterminata u e con coefficienti vettoriali

Curva lineare

il segmento di retta tra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ è:

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)u + \mathbf{p}_1, \qquad u \in [0, 1],$$

polinomio di primo grado nella indeterminata u e con coefficienti vettoriali

Curva lineare

il segmento di retta tra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ è:

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)u + \mathbf{p}_1, \qquad u \in [0, 1],$$

polinomio di primo grado nella indeterminata u e con coefficienti vettoriali

Curva lineare

forma algebrica

curva polinomiale di primo grado, detta in forma algebrica:

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{a}u + \mathbf{b}$$

che scriviamo come prodotto di matrici:

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \ \mathbf{M}_1}$$

Curva lineare

forma algebrica

curva polinomiale di primo grado, detta in forma algebrica:

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{a}u + \mathbf{b}$$

che scriviamo come prodotto di matrici:

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \left[\begin{array}{cc} u & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{array}\right] = \mathbf{U}_1\ \mathbf{M}_1}$$

Curva lineare
forma geometrica

imponiamo che la curva interpoli $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, per i valori estremi del parametro:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Sostituendo 0 e 1 per u in $\mathbf{C}(u) = \mathbf{U}_1\ \mathbf{M}_1$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1$$

Curva lineare
forma geometrica

imponiamo che la curva interpoli $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, per i valori estremi del parametro:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Sostituendo 0 e 1 per u in $\mathbf{C}(u) = \mathbf{U}_1\ \mathbf{M}_1$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1$$

Curva lineare

forma geometrica

e raccogliendo in una sola eq. matriciale:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1,$$

da cui si ricava

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix},$$

e quindi otteniamo la forma geometrica della curva per $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \ \mathbf{B}_1 \ \mathbf{G}_1}$$

Curva quadratica
forma algebrica

curva polinomiale di secondo grado in forma algebrica:

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{a}u^2 + \mathbf{b}u + \mathbf{c}$$

che scriviamo come prodotto di matrici:

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2\mathbf{M}_2}$$

Curva quadratica

forma algebrica

curva polinomiale di secondo grado in forma algebrica:

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{a}u^2 + \mathbf{b}u + \mathbf{c}$$

che scriviamo come prodotto di matrici:

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2\mathbf{M}_2}$$

Curva quadratica

forma geometrica di passaggio per tre punti

imponiamo che la curva interpoli $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$, per valori del parametro 0, $\frac{1}{2}$ e 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{C}(\frac{1}{2}) &= \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Sostituendo 0, $\frac{1}{2}$ e 1 per u in $\mathbf{C}(u) = \mathbf{U}_2\ \mathbf{M}_2$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2$$

Curva quadratica

forma geometrica di passaggio per tre punti

imponiamo che la curva interpoli $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$, per valori del parametro 0, $\frac{1}{2}$ e 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{C}(\frac{1}{2}) &= \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Sostituendo 0, $\frac{1}{2}$ e 1 per u in $\mathbf{C}(u) = \mathbf{U}_2\ \mathbf{M}_2$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2$$

Curva quadratica

forma geometrica di passaggio per tre punti

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2,$$

da cui si ricava

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

e quindi otteniamo la forma geometrica della curva per $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2 \, \mathbf{B}_2 \, \mathbf{G}_2}$$