Parametric curves 1

Computational Visual Design (CVD-Lab), DIA, “Roma Tre”
University, Rome, Italy

Computational Graphics 2012

Sommario

Curve parametriche polinomiali
- Proprietà della forma parametrica
- Rappresentazione matriciale
- Forme lineari e quadratiche

Rappresentazione parametrica

le curve come luoghi di punti di forma specifica sono talvolta identificate da un nome proprio, come cerchio, parabola, iperbole, spirale, elica, ...

alcune classi di curve a forma libera sono più interessanti, perché consentono di soddisfare i vincoli geometrici ed estetici posti da un problema di progettazione

le spline sono curve composite, continue a tratti, usate per interpolare o approssimare insiemi di punti

Rappresentazione parametrica

tipi di rappresentazione

1. esplicita o cartesiana: curva $=$ grafico di una funzione;

2. implicita: curva $=$ insieme zero di equazioni algebriche;

3. $\boxed{\text{parametrica: curva} = \text{funzione vettoriale di un parametro;}}$

4. intrinseca: curva $=$ soluzione equazioni differenziali.

Rappresentazione parametrica

curva $\mathbf{c}$ = funzione “point-valued di un singolo parametro reale:

$$\mathbf{c} : D \to \mathbb{E}^n \quad \text{tale che} \quad \mathbf{c}(u) = \mathbf{o} + \left[\begin{array}{ccc} x_1(u) & \dots & x_n(u) \end{array}\right]^T$$

con dominio $D \subset \mathbb{R}$ spesso coincidente con $[0, 1]$.

- $n = 2$ curva piana
- $n = 3$ curva spaziale

le funzioni componenti $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sono dette funzioni coordinate della curva

Sommario

Curve parametriche polinomiali
- Proprietà della forma parametrica
- Rappresentazione matriciale
- Forme lineari e quadratiche

Curve polinomiali

utili proprietà

- manici di controllo
- punti multipli
- invarianza affine e proiettiva
- controllo locale e globale
- diminuzione delle oscillazioni

Curve polinomiali

curva

$$\mathbf{c} = \mathbf{o} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} : D \to E^n$$

dove ogni funzione coordinata x_i è un polinomio ...

polinomio di grado k

$$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \mapsto \sum_{k=0}^{k} a_k u^k$$

Sommario

Curve parametriche polinomiali
Proprietà della forma parametrica
Rappresentazione matriciale
Forme lineari e quadratiche

Sommario

Curve parametriche polinomiali

- Proprietà della forma parametrica
- Rappresentazione matriciale
- Forme lineari e quadratiche

Curva lineare

il segmento di retta tra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ è:

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)u + \mathbf{p}_1, \qquad u \in [0, 1],$$

polinomio di primo grado nella indeterminata u e con coefficienti vettoriali

Curva lineare
forma algebrica

curva polinomiale di primo grado, detta in forma algebrica:

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{a}u + \mathbf{b}$$

che scriviamo come prodotto di matrici:

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \; \mathbf{M}_1}$$

Curva lineare
forma geometrica

imponiamo che la curva interpoli $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, per i valori estremi del parametro:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Sostituendo 0 e 1 per u in $\mathbf{C}(u) = \mathbf{U}_1\ \mathbf{M}_1$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1$$

Curva lineare

forma geometrica

e raccogliendo in una sola eq. matriciale:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_1,$$

da cui si ricava

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix},$$

e quindi otteniamo la forma geometrica della curva per $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1\ \mathbf{B}_1\ \mathbf{G}_1}$$

Curva quadratica

forma algebrica

curva polinomiale di secondo grado in forma algebrica:

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{a}u^2 + \mathbf{b}u + \mathbf{c}$$

che scriviamo come prodotto di matrici:

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2\mathbf{M}_2}$$

Curva quadratica

forma geometrica di passaggio per tre punti

imponiamo che la curva interpoli $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$, per valori del parametro 0, $\frac{1}{2}$ e 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{C}(\frac{1}{2}) &= \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{C}(1) &= \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Sostituendo 0, $\frac{1}{2}$ e 1 per u in $\mathbf{C}(u) = \mathbf{U}_2\ \mathbf{M}_2$

$$\mathbf{p}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{p}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{p}_3 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \mathbf{M}_2$$

Curva quadratica

forma geometrica di passaggio per tre punti

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_2,$$

da cui si ricava

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

e quindi otteniamo la forma geometrica della curva per $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$

$$\boxed{\mathbf{C}(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2\ \mathbf{B}_2\ \mathbf{G}_2}$$