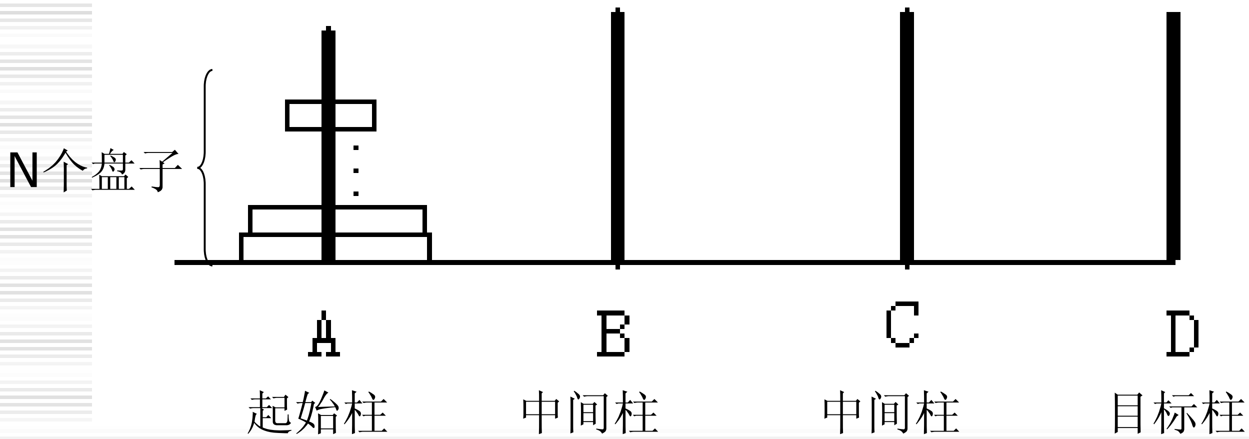
汉诺塔问题的拓展

Barty

我们先来看看四塔问题

- 有四个圆柱A，B，C，D。n个圆盘按照由小至大的顺序摆在A柱上(如图11.3.1)。如何以最少次数将圆盘从A柱移至D柱
- 移动必须满足三个条件：
- 能利用A，B，C，D四个圆柱；
- 一次只能搬动一个圆盘；
- 小的圆盘只能往大的圆盘上摆；

图11.3.1



- 首先我们可以通过知识储备写出HANOI三塔问题的方程
  dp[i]:=dp[i-1]*2+1(1<=i<=n)
- 我们想，四塔问题是不是可以通过三塔问题的结论来解决呢？

答案是:

可以

首先要知道

- 三塔问题是借助1个中间柱完成转移
- 四塔问题是借助2个中间柱完成转移
- 以上两句话看似是废话，其实很重要！

三塔向四塔转化

- 四塔问题可以转化为：
- 对于N个盘子的四塔问题，先将j(0<=j<=N)个盘子通过两个中间柱(一个中间柱，一个目标柱)移动到另一个目标柱，然后将N-j个盘子通过一个中间柱移动到目标柱，最后将j个盘子通过两个中间柱(一个起始柱，一个中间柱)转移到目标柱

DP方程

- H[i]表示三塔问题的结论，即i个盘子通过一个中间柱转移需要多少步。
- F[i]存储问题结果。
  F[i]:=min{2*F[j]+H[i-j]}
  (1<=i<=n;0<=j<=i)

注意！

- 以上方程的复杂度为O(N^2)，是比较低效的方法。

- 那么，有没有更为优化的方法呢？

有

优化方法：

- 我们考虑对于每一个F[i]的j,是否能通过递推求出j而非枚举呢？可以。
- 当F[i]=2*F[j]+H[i-j]时，对于i+1个盘子的情况，必定是第一步转移到中间柱的个数加1，或者第一步转移到目标柱的个数加1（换言之即F或者H的下标加1）

得出新的DP方程

- 对于f[i]=2*f[j]+h[i-j]而言
- f[i+1]=min{2*f[j+1]+h[i-j],
  2*f[j]+h[i-j+1]}
- 运算时可以通过存储f[i]对应的j值实现调用f[i+1]对应的j值的时间为O(1),总体时间复杂度也就变为O(N)

一个新的规律

- 我们通过求出f[i]的值，发现了一个新的规律：从f[0]开始，1加1次，2加2次，3加4次……
- 这个结论是可以证明的，具体证明方法留给读者自己研究。

四塔问题总结

- 这道题并不复杂，不过需要有熟练运用dp的能力，以及对问题的归纳分析能力。本题关键是通过大家都熟知的HANOI三塔问题转化为这道题。

N塔问题

- 那么，我们下面来深入研究汉诺塔问题
- 当有N个塔时，将M个盘子从1号柱移动到N号柱的最小步骤数是多少?

分析

- 设将i个盘子通过j个柱子移动的最少步骤数为dp[I,j]
- 我们考虑：首先将k个盘子从第一个柱子移到中间柱，然后将i-k个盘子移动到目标柱，在将中间柱上的k个盘子移动到目标柱
- 故而得出方程：dp[I,j]=max{dp[k,j]*2+dp[i-k,j-1]}
  (0<k<i)

左移汉诺塔问题

- 这个问题是将Hanoi的移动方式限定：只能向左移动。特别的，当从最左端向左移动的时候可以到达最右端。

- 为了简化，我们只讨论3个柱子的标准汉诺塔内的左移问题。

分析

- 我们通过实验可以发现：将i个柱子移动到左边相邻的柱子和右边相邻的柱子的最少步骤数是不相同的。
- 因此，我们要把向左和向右两种情况分别储存以便运算。

分析

- 设H[I,1]表示将i个柱子向左移动到相邻柱子的最少步骤数,H[I,2]表示将i个柱子向右移动到相邻柱子的最少步骤数
- 易知:H[1,1]=1
  H[1,2]=2
- 转移方程:
  H[I,1]=H[i-1,2]*2+1
  H[I,2]=H[i-1,1]*2+2

总结

- 这类递推题的关键就在于状态的表示和转移。
- 说到底，就是动态规划！
- 关于汉诺塔问题，我就说这么多了……

The End.