Olimpiada de Matemáticas en Hidalgo
Problemas resueltos

Comité olímpico de Matemáticas en Hidalgo

24 de abril de 2012

Índice general

Introducción

En este libro se incluyen los exámentes aplicados en las olimpiadas estatales de matemáticas del estado de Hidalgo, desde 2007 a la fecha.

Capítulo 1

2007

Problema 1

Calcular el valor de

$$\sqrt{1+3+5+7+\cdots+2003+2005+2007}, \tag{1.1}$$

donde la suma dentro de la raíz cuadrada es la suma de todos los números impares del 1 al 2007.

Solución: La suma $1+3+\cdots+(2n-1)$ de los primeros n números impares es igual a n^2. Si $2n-1=2007$ entonces $n=1004$, por lo que la suma 1.1 vale 1004^2.

Problema 2

Encuentre el volumen de un cono truncado de altura 2, que tiene base inferior de radio 4 y base superior de radio 3 (ver la figura).

Solución: La fórmula de volumen del cono es

Problema 3

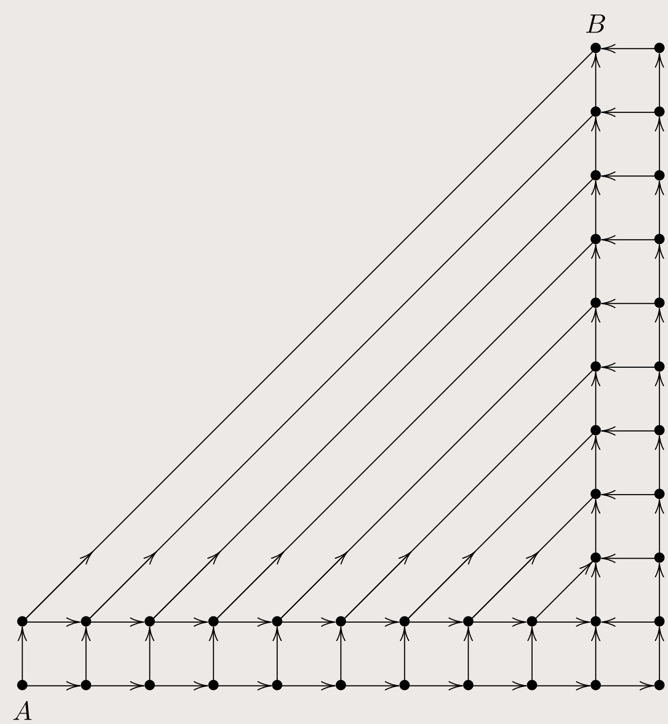
Considere un triángulo de lados a, b y c. Tome un punto P cualquiera en el interior del triángulo y desde este punto trace segmentos perpendiculares a cada uno de sus lados. Suponga que x, y y z son las longitudes de estos segmentos perpendiculares a los lados a, b y c, respectivamente. Demuestre que el área A del triángulo es igual a

$$A = \frac{1}{2}(ax + by + cz). \tag{1.2}$$

Solución:

Problema 4

Del siguiente diagrama calcule de cuantas maneras distintas se puede llegar del punto A al punto B, respetando las direcciones de las flechas.



Solución:

Problema 5

Considere la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 15ax + a^2 = 0. \tag{1.3}$$

Encuentre todos los valores de a de modo que las soluciones x_1 y x_2 de esta ecuación satisfacen

$$x_1^2 + x_2^2 = 2007. \tag{1.4}$$

Solución:

Problema 6

¿De cuántas maneras se pueden sacar 10 canicas de una bolsa que contiene 7 canicas rojas, 8 azules y 7 verdes, si una vez que se sacaron no importa en que orden quedaron?

Solución:

Capítulo 2

2008

Problema 1

Jorge Luis cortó un cuadrado de papel que tenía 20cm de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos es 16cm ¿cuál es el perímetro del otro?

Solución:

Problema 2

Un granjero descubre que si cuenta sus ovejas de dos en dos, o de tres en tres, o de cuatro en cuatro o de cinco en cinco, siempre le sobra una. Si el granjero tiene menos de cien ovejas y más de una, ¿cuántas ovejas tiene el granjero?

Solución:

Problema 3

Denotemos por $f(n)$ la suma de los divisores positivos de un numero natural n. Por ejemplo, si $n = 6$ tenemos que los divisores de 6 son 1,2,3 y 6, que sumados dan $f(6) = 1+2+3+6 = 12$. Encuentra el valor de $f(n)$ más pequeño entre todas las n mayores o iguales a 2008.

Solución:

Problema 4

De una lista de 8 números naturales consecutivos, se borra uno de los números. La suma de los números que quedaron después de borrar es igual a 2008 ¿Cuál es el número borrado?

Solución:

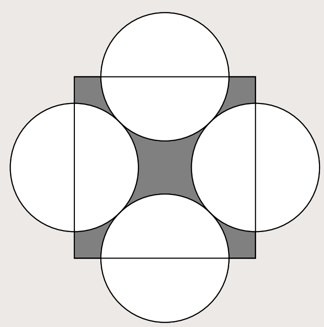
Problema 5

Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. De cada subconjunto de 7 elementos de A se toma el número mayor ¿Cuál es la suma de todos estos números mayores?

Solución:

Problema 6

Considera un cuadrado cuyo lado tiene longitud 2 y cuatro círculos del mismo radio con centros respectivos en los puntos medios del cuadrado, de tal modo que los círculos correspondientes a lados adyacentes son tangentes. Encontrar el área de la región dentro del cuadrado y fuera de los círculos. Es decir, en la figura siguiente, se pide hallar el área de la región sombreada.



Capítulo 3

2009

Capítulo 4

2010

Capítulo 5

2011

Capítulo 6

2012