Geometría Analítica

La geometría Analítica es el estilo de la geometría descrita a través de ciertas expresiones matemáticas.

Conceptos básicos de la geometría analítica

La recta numérica

La recta numérica es un elemento matemático en el cual a una recta se le asocia un elemento geométrico (el punto) con el elemento algebraico (un número).

Espacio de dimensión n

Un espacio de n dimensiones se define como un conjunto de puntos asociados con un conjunto de números reales ordenados, es decir

$$E^n = P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

El campo de estudio de la geometría analítica es el espacio, existen espacios de n dimensiones. Nuestro estudio se centra en el espacio de dos dimensiones, generalmente conocido como plano.

Sistema coordenado

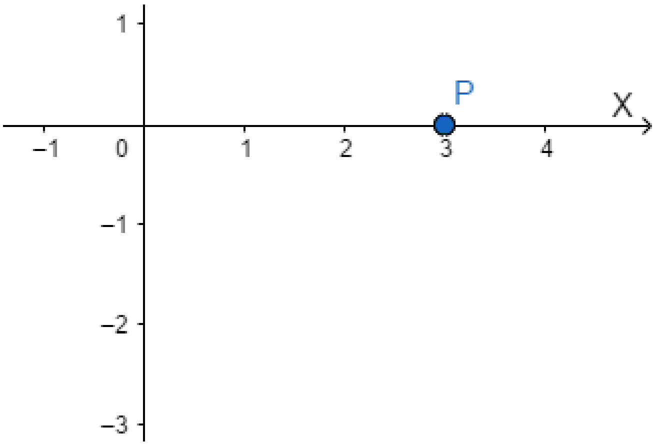
Un sistema de coordenadas o coordenado es una referencia para situar puntos a través de dar una eneada de números, por ejemplo, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en donde n es la dimensión del espacio en donde estemos trabajando.

El sistema en el que vamos a estar trabajando se conoce como plano y es un espacio de dos dimensiones.

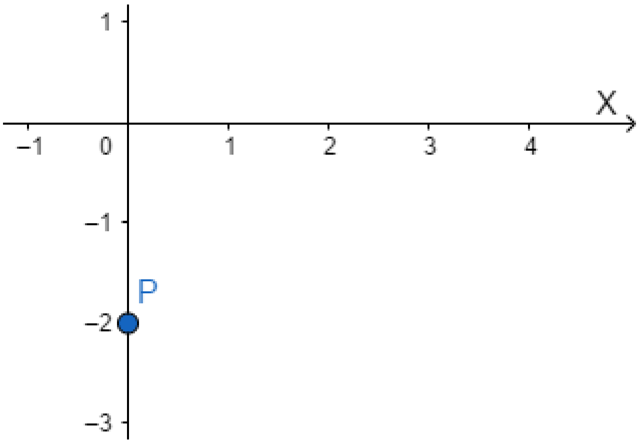
Pasos para ubicar un punto en el plano cartesiano

Como ejemplo ubiquemos el punto $P(3, -2)$, recuerda que este punto tiene la forma $p(x, y)$ y la x y la y corresponden a los ejes del plano cartesiano.

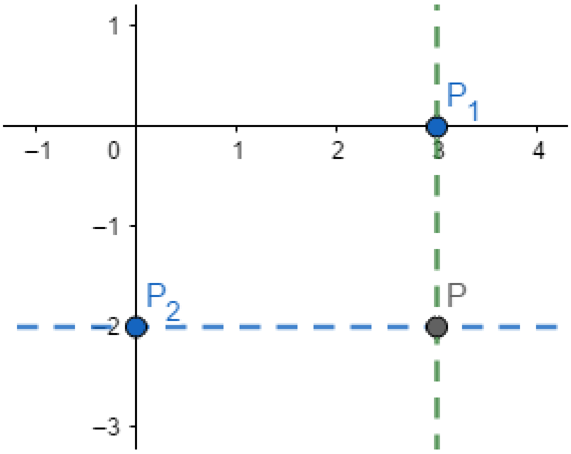
- La primera coordenada (en nuestro caso el 3) corresponde al eje de las x, por lo cual, si
  - Es positiva nos movemos x unidades (para nuestro caso, 3 unidades) a la derecha del cero.
  - Es negativa nos movemos x unidades a la izquierda del cero.



- La segunda coordenada (en nuestro caso el -2) corresponde al eje de las y , por lo cual, si
  - Es positiva nos movemos y unidades hacia arriba del cero.
  - Es negativa nos movemos y unidades (para nuestro caso, -2 unidades) hacia abajo del cero.



- Traza líneas punteadas que pasen por el 3 y por el -2



- El punto donde se intersecten las líneas punteadas es el punto P

Ejemplo 1

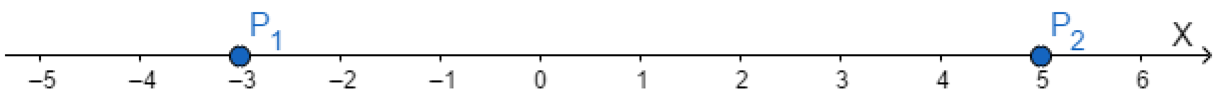
Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano
$A(1,3),\ B(-2,4),\ C(-1,-2),\ D(5,-3), E(1,0),\ F(0,1),\ G(0,-1),\ H(-1,0)$

Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos en el espacio de una dimensión (R)

¿Cuál es el número de unidades que hay entre el punto p_1 y el punto p_2?

Para representar la distancia entre el punto uno y el punto dos utilizamos la siguiente notación $d(p_1, p_2)$



Además, en la recta numérica, se observa que $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$

La expresión que nos permite calcular la distancia entre dos puntos, es decir, $d(p_1, p_2)$,esta dada por

$$d(p_1, p_2) = |x_2 - x_1|$$

Ejemplo 1

Halla la distancia entre los puntos $A(5)$ y $B(-3)$

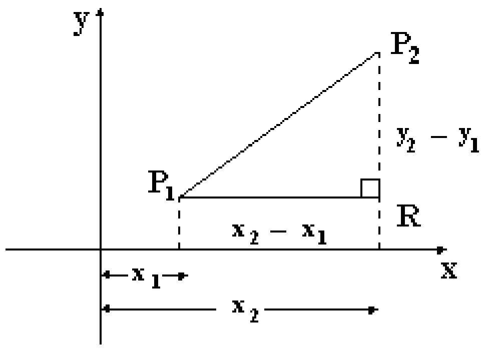
Solución

$$\begin{aligned} d(A, B) &= |x_2 - x_1| \\ &= |5 - (-3)| \\ &= |8| \\ d(A, B) &= 8 \end{aligned}$$

Distancia entre dos puntos en el espacio de dos dimensiones (R^2)

Sean 2 puntos del plano cartesiano, es decir

$$p_1(x_1, y_1) \; y \; p_2(x_2, y_2) \in R^2$$



Es posible calcular la su distancia a través de la siguiente expresión.

$$\boxed{d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad \cdots (1)$$

Dicha expresión se puede **demostrar** simplemente utilizando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1

Encontrar la longitud del segmento que une a los puntos $p(-3,-4)\ y\ q(2,9)$.

Solución

Podemos empezar diciendo que p_1 es p y p_2 es q , entonces:

$$p_1(x_1,y_1)=p(-3,-4)\Rightarrow x_1=-3,\ y_1=-4$$
$$p_2(x_2,y_2)=q(2,9)\Rightarrow x_2=2,\ y_2=9$$

Usando *(1)*

$$d(p,q)=\sqrt{(2-(-3))^2+(9-(-4))^2}=\sqrt{194}$$

Observación

Si queremos calcular la longitud del un segmento de recta que es **paralelo** al eje de las x podemos simplemente utilizar

$$d(p_1,p_2)=|x_2-x_1|$$

Ya que las coordenadas para y al ser la mismas se cancelan en la expresión *(1)*

Lo mismo sucesde si se desea calcula la longitud de un segmento que es **paralelo** al eje de las y

$$d(p_1,p_2)=|y_2-y_1|$$

Coordenadas de un punto que divide a un segmento de acuerdo con una razón dada

División de un segmento en una razón dada en R

Sean los puntos $A(x_1),\ B(x_2),\ P(x)$ a partir de los cuales se generan los siguientes segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$

Podemos comparar el segmento $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ con lo que obtenemos una razón, como se sigue

$$r=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}\qquad\qquad\cdots(1)$$

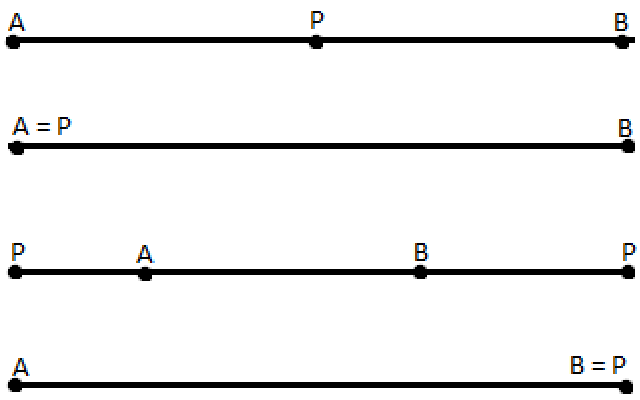
De lo anterior se puede concluir que la razón se calcula como

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}\qquad\qquad\cdots(2)$$

Si de *(2)* se despeja x que representa la coordenada que divide al segmento

$$x=\frac{x_1+rx_2}{r+1}\qquad\qquad\cdots(3)$$

Al dividir el segmento existen 4 posibles casos de la posición de p con respecto del segmento



1. El punto P se encuentra entre A y B
2. $P = A$
3. El punto P esta antes que A o después de B
4. $P = B$ (No está definido)

Ejemplo 1

Hallar $R(x)$ que divide al segmento $\overline{PQ}$ con extremos $P(-4)$ y $Q(8)$ en la razón $r = \dfrac{3}{5}$

Solución

Utilizando *(3)*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -4 \\
x_2 &= 8 \\
r &= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow x &= \frac{-4 + \left(\frac{3}{5}\right)8}{\frac{3}{5} + 1} \\
&= \frac{-4 + \frac{24}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{5}{5}} \\
&= \frac{-4\left(\frac{5}{5}\right) + \frac{24}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{5}{5}} \\
&= \frac{\frac{-20}{5} + \frac{24}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{5}{5}} \\
&= \frac{\frac{-20+24}{5}}{\frac{3+5}{5}} \\
&= \frac{4}{8}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

División de un segmento en una razón dada en R^2

Similar a los que paso en R, se tienen tres puntos $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ P(x, y)$ a partir de los cuales se generan los siguientes segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$

En donde la expresión para calcular la razón es

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \qquad \cdots (1)$$

Y para encontrar las coordenadas de P se tiene

Para x

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r + 1} \qquad \cdots (2)$$

Para y

$$y=\frac{y_1+ry_2}{r+1} \qquad \cdots(3)$$

Ejemplo 1

Encontrar las coordenadas del punto R, en el segmento que une a $P(3,-2)$ y $Q(-5,1)$ de tal manera que $\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{3}{4}$

Solución

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}=\ ?$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PR+RQ}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\overline{PR}+\overline{RQ}}{\overline{PR}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PR}}+\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}=\frac{4}{3}$$

$$1+\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}=\frac{1}{3}$$

Ahora, podemos calcular las coordenadas x y y cuyo cálculo se le deja al lector.

Área de un polígono

Existen varios métodos para encontrar el área de un polígono, a continuación se expone el método por triángulación.

El área de un polígono de n vértices colocados en el plano se puede calcular por medio del siguiente determinante.

$$A_p=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \cdots(1)$$

Observa que la primera coordenada se repite al final.

Observe que el orden de las coordenadas tiene que ser en sentido *retrogrado* para que no obtengamos áreas negativas.

Ejemplo 1

Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2),\ B(1,4),\ C(2,2)$

Solución

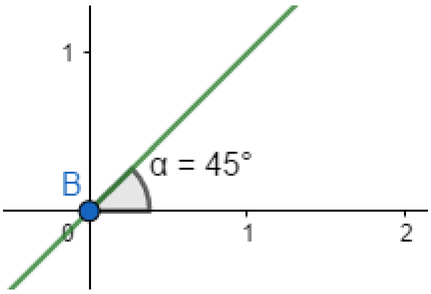
$$A_t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A_t = \frac{1}{2}[(-2+8-2)-(-4+2-4)] = 5$$

Conceptos de básicos de la línea recta

Antes de iniciar formalmente con el estudio de la recta es importante aprender algunos conceptos que nos permitirán dar una definición de lo que es un recta.

Ángulo de inclinación de una recta (ℓ)



El ángulo de inclinación de ℓ es un ángulo α en posición normal cuyo lado terminal coincide con la recta ℓ

El ángulo tiene la siguiente restricción

$$0 \leq \alpha \leq 180^{\circ}$$

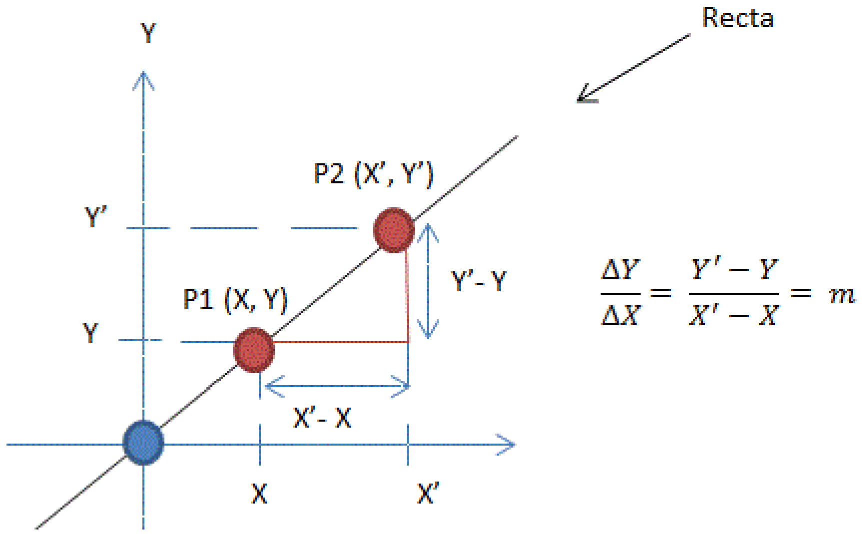
Pendiente de una recta

La pendiente (m) de una recta ℓ es la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación.

En palabras más sencillas, la pendiente de una recta mide la inclinación de una recta.

$$tan\,\alpha = m \qquad\qquad \cdots(1)$$

Es posible obtener el valor de la pendiente de una recta ℓ si se conocen dos puntos fijos por donde ésta pasa.Es decir



Sean $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$ puntos de ℓ

Por el teorema de Pitágoras se puede demostrar que

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \cdots (2)$$

Casos posibles de la pendiente (m)

//Falta

Ángulo entre dos rectas

Es posible calcular el ángulo que existe entre dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 de la siguiente manera

$$tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad \cdots (1)$$

en donde m_1 es la pendiente de la recta ℓ_1 y m_2 es la pendiente de la recta ℓ_2

Ejemplo 1

Calcular los ángulos internos del triángulo $\frac{\triangle}{ABC}$ cuyos vértices son los puntos $A(4,0),\ B(1,4),\ C(-1,-1)$

Condicionales de paralelismo

Dos rectas son paralelas si entre ellas no se puede formar un ángulo es decir $\theta = 0^\circ$

De la expresión de ángulo entre dos rectas, tenemos

$$tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\begin{gathered}\text{Si hacemos que } \theta = 0^\circ \\ \Rightarrow tan\,0^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = 0 \\ \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = 0 \\ m_2 - m_1 = 0 \\ \therefore m_1 = m_2\end{gathered}$$

En conclusión, dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paraelas si sus pendientes son iguales

i.e.

$$\boxed{\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2} \qquad\qquad \cdots (1)$$

Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si entre ellas se forma un ángulo de 90°

De la expresión de ángulo entre dos rectas, tenemos

$$tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\begin{gathered}\text{Si hacemos que } \theta = 90^\circ \\ \Rightarrow tan\,90^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \nexists\end{gathered}$$

Sabemos que $tan\,90^\circ$ no esta definida, la única forma de lograr una indeterminación en un cociente es que el divisor sea cero, entonces al provocar la indeterminación se tiene que

$$\begin{gathered}1 + m_1 m_2 = 0 \\ m_1 m_2 = -1\end{gathered}$$

En conclusión, dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes da -1

i.e.

$$\boxed{\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1} \qquad\qquad \cdots (1)$$

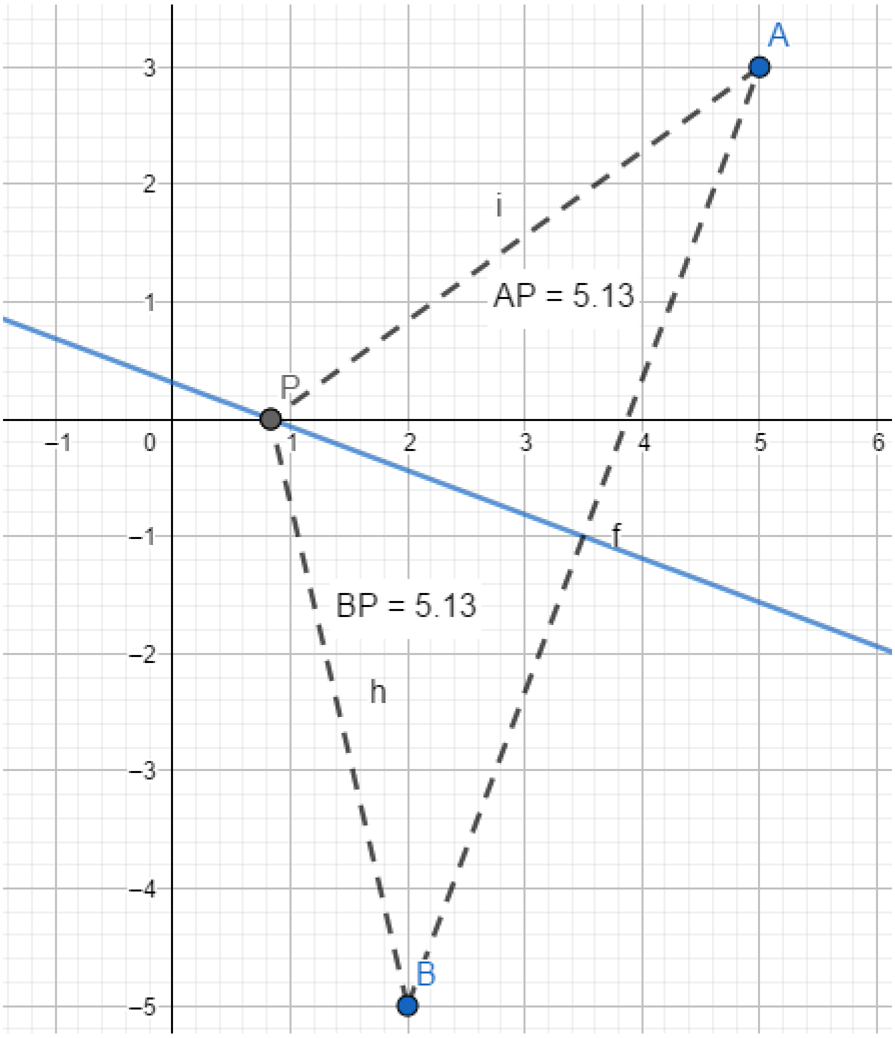
Lugar geométrico

Se le llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que cumplen cierta definición, llamada regla de correspondencia.

Ejemplo 1

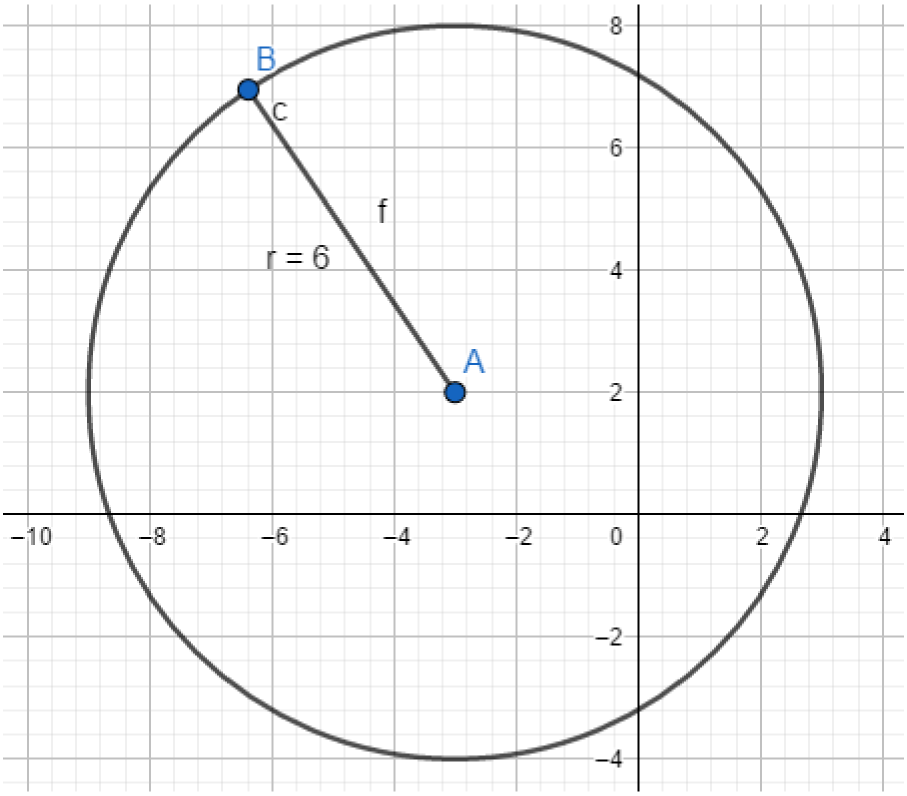
Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos fijos $A(5, 3)\ y\ B(2, -5)$

Solución



Ejemplo 2

Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a 6 unidades del punto $A(-3,2)$



Recta

La recta como lugar geométrico

La recta se define como el lugar geométrico de un punto $p(x, y)$ que se mueve de tal manera que la pendiente entre dos o más posiciones permanece constante.

`Insertar imagen`

En otras palabras, si se definen dos puntos fijos A y B que pertenecen a un recta ℓ y se calculan las pendiente de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ se llega a la siguiente conclusión

$$m_{\overline{AP}} = m_{\overline{PB}} = k$$

Formas de la ecuación de la recta

Desde ahora es importante aclarar que las formas de la recta mostradas a continuación pueden fácilmente ser transformadas a otras, por ejemplo, **se puede cambiar de la forma punto- pendiente a la forma general y viceversa.**

Forma punto-punto

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos que pertenecen a la recta ℓ, y $p(x, y)$ un punto que se mueve a lo largo de la recta.

Por definición de línea recta

$$m_{\overline{AP}} = m_{\overline{PB}}$$
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si pasamos multiplicando el denominador de $m_{\overline{AP}}$ obtenemos la **ecuación de la recta punto-punto**

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)} \qquad \cdots (1)$$

Forma punto-pendiente

A partir de la ecuación de la forma punto a punto (1), se observa lo siguiente

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \underbrace{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}_{m}(x - x_1) \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

En otras palabras, si conocemos la pendiente de la recta ℓ y un punto fijo $p_1(x_1, y_1)$ de la misma basta con utilizar la **forma punto-pendiente**.

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad \cdots (2)$$

Forma pendiente ordenada

Sea m la pendiente de una recta ℓ y sea $B(0, b)$ un punto que es ordenada al origen de la recta (es decir, la intersección con el eje y).

A partir de *(2)* tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - b &= m(x - 0) \\ y - b &= mx \\ \therefore \ \boxed{y = mx + b} & \qquad \cdots (3) \end{aligned}$$

Forma general

La forma general de la recta se refiere a una ecuación de primer grado que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0 \qquad \cdots (4)$$

Siempre tenemos que hace que este igualada con cero

Fórmulas para obtener la pendiente m y la ordenada al origen b a partir de la ecuación general

//falta

Distancia de un punto $p(x_1, y_1)$ a una recta $Ax + By + C = 0$

Es posible calcula la distancia de un punto p a una recta $\ell : Ax + By + C = 0$ a través de la siguiente expresión

$$\boxed{d(p, \ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad \cdots (1)$$

Recuerde que con *(1)* obtendremos la longitud de un segmento de recta trazado a partir del punto p y cuyo extremo es un punto que se encuentra en ℓ . Dicho segmento es siempre perpendicular a la recta por tratarse de un distancia.

Ecuación de las bicectrices de un ángulo entre dos rectas

Ecuaciones de las medianas, mediatrices y alturas y un triángulo.

Puntos de intersección (ortocentro, circuncentro y baricentro)

Secciones cónicas

Ecuación general de segundo grado

Criterio del discriminante

Parábola

La parábola es el lugar geométrico P que se mueve en el plano de tal manera que equidista siempre de un punto fijo llamado *foco* F y de una recta fija ℓ llamada *directriz*.

i.e.

$$d(F,P) = d(P,\ell)$$

`Imagen de la parabola`

Elementos de la parábola

$$\begin{aligned} F &: \ foco \text{ (un punto)} \\ DD' &: \ \text{Directriz} \\ v &: \ \text{Vértice de la parábola} \\ EE\acute{} &: \ \text{Eje de simetría} \\ \overline{LR} &: \ \text{Lado recto} \\ p &: \ \text{Parámetro} \\ A &: \ \text{Punto de referencia} \end{aligned}$$

Además se cumple que,

$$\begin{aligned} EE' \perp DD' \\ p = |\overline{AV}| = |\overline{VF}| \\ \overline{LR} = 4p \end{aligned}$$

El lado recto es una cuerda focal perpendicaul al eje de simetría y mide que tan ancha es la parábola desde el foco.

Casos de la parábola

`imagen de parábolas horizontales y verticales`

Ecuaciones de la parábola

Ecuación canónica (standar, ordinaria o cartesiana) de la parábola

Parábola Horizontal Positiva o negativa con Vértice en el Origen (PHP/N-VO)

Parábola Vertical Positiva o negativa con Vértice en el Origen (PVP/N-VO)

Parábola Horizontal Positiva o negativa con Vértice en (h, k) (PHP/N-VHK)

Parábola Vertical Positiva o negativa con Vértice en (h, k) (PHP/N-VHK)

Ecuación general de la parábola

Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo, llamado *centro* C, permanece contante y corresponde al rado ρ

i.e.

$$r = d(C, P)$$

Elipse

Hipérbola

Translación de ejes