ClassNotes

Diego Berrocal

January 16, 2015

Contents

Ejercicios Sugeridos: Libro Introduction to Quantum Mechanics Griffiths 2nd Edition 4.18, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.34, 4.35

1 Axiomas de la Mecánica cuántica

1.1 Axioma 1

Todo sistema físico es completamente descrito con ua fuente de onda Ψ en un espacio de Hilbert.

1.2 Axioma 2

Para todo observable físico existe un operador hermitiano en H.

$$x- > \vec{x}$$

$$p- > \delta_x$$

$$?- > \vec{s}$$

1.3 Axioma 3

Los únicos resultados posibles de la medida de un observable es un valor del operador correspondiente.

1.4 Axioma 4

Si un sistema está en un estado Ψ entonces la probabilidad de obtener valores entre λ_1 y λ_2 es

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = ||\Psi||^2 = ||(E(\lambda_2) - E(\lambda_1))\Psi||^2$$

E(λ) es la resolución de la indentidad del observable A (**WHAT** libros de análisis funcional, teoría de la medida, Libro de análisis funcional es Bresis)

1.5 Axioma 5

En todo sistema existe un operador hamiltoniano H que determina la evolución temporal.

$$\Psi(t_1)- > \Psi(t_2)$$

$$t_1 < t_2$$

$$H\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

2 Resultados de la clase anterior

Aquí μ es el momento angular o tiene que ver con ello, checka el Gridffiths Se tiene:

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$$

$$[J^2, J_\pm] = 0$$

$$J^2 = J_\pm J_\mp + J_3^2 \mp \hbar J_3$$

De donde:

$$J_3(J_\pm f) = (\mu \pm \hbar)(J_\pm f)$$

$$J_3 f = \mu f$$
$$J^2 f = \lambda f - -- > (\lambda > 0) \tag{1}$$
$$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$-\sqrt{\lambda} \leq \mu \leq \sqrt{\lambda}$$
$$< J^2 > \geq < J_3 > - > \lambda \geq \mu^2$$

Hasta ahora se tiene que el operador J_- o J+ sube de energía a los μ en un $\hbar$. Como se ve en la siguiente figura. **Insert Image Here**

Por el teorema del supremo en este espacio acotado de energías, se tendrá que hay un $\mu_{\text{máx}}$ y este será igual a

$$\mu_m x = l\hbar$$

Y se tendrá que en este $\mu_{\text{máx}}$ si se aplicara de nuevo el operador de creación J+ se tendría

$$J + f_t = 0$$

Lo mismo pasaría del otro extremo

$$J - f_b = 0$$

Al aplicar J^2 (la versión con el +) a $\mathrm{f_t}$

(2)

$$l \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \hbar^2 (l)(l+1)$$

Similarmente aplicamos la versioón con el - a $\mathrm{f_b}$

$l \in \mathbb{R}$

$\lambda = \hbar^2 (l)(l+1)(3)$

Por lo tanto podemos tener que.

$$J_3(J+f) = (\mu + \hbar)(J+f)$$

$$^2(J+f) = \lambda(J+f)$$

$$\hbar^2 l(l+1) = \hbar^2 \vec{l}(\vec{l}-1)$$
$$\vec{l} = l+1 -> \vec{l} > l, ESTOESTAMAL$$
$$\vec{l} = -l, l \in \mathbb{R}$$

$$l = -l + N,\ N = 0, 1, 2, ...$$

$$l = \frac{N}{2}$$

Para cada l existen iguales valores propios de J_3 que representamos con m de la siguiente manera

$$J_3 f_{lm} = m\hbar f_{lm}$$
$$J^2 f_{lm} = \hbar^2 l(l+1) f_{lm}$$

2.1 Ejemplo con Spin 1/2

Cuando consideramos el espín de 1/2 se considera como partícula de estudio al electrón, protón, neutrón, quark, leptons, etc. Lo que se hará ahroa es un ejemplo en el que se suman dos espines 1/2 es decir el acoplamiento de dos partículas con spin 1/2. Todos las partículas que tienen espín 1/2 son fermiones, las que tienen espín entero son bosones como el fotón y el gravitrón.

Cuando se etudia teoría de momento angular siempre se tienen 3 operadores, y en este caso como es un caso específico de Spín, usaremos S_x, Sy, Sz, y también consideraremos a un S^2. La relación de conmutación que consideraremos será la siguiente:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

Se seleccionan 2 operadores del Conjunto de operadores Momento angular $\{S_x, Sy, S_z, S^2\}$

Este submonjunto $\{S_z, S^2\}$ se denomina un cConjunto completo de operadores conmutantes entre sí, podría haberse tomado cualquier componente del conjunto principal pero por convención se utilizará el S_z.

$$S^2|sm>=\hbar^2 s(s+1)|sm> s=\frac{1}{2}$$

$$S_z|sm>=\hbar m|sm>$$

s: número cuántico del espín

m: número cuántico de proyección del espín a lo alrgo del eje Z

2.1.1 Ejercicio

$$S_\pm = S_x \pm iSy$$

Verificar que se cumpla

$$S_\pm|sm>=\hbar\sqrt{s(s+1)-m(m+1)}|s(m\pm 1)>$$

2.1.2 Ejemplos

Sustituir S=$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} S^2|sm> &= \hbar^2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)|sm> \\ &= \hbar^2(\frac{3}{4})|sm> \end{aligned} \tag{4}$$

Los valores posibles de m son -$\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$

2s+1 = 2($\frac{1}{2}$) + 1 = 2

2s+1: Número de valores diferentes posibles

$$|\uparrow>=|,>$$

$$|\downarrow>=|,->$$

Existen 2 vectores linealmente independientes de tal modo que

$$|\uparrow>,|\downarrow>$$

constituyen una base.

UN estado general se expresa mediante una combinación lineal (con coeficientes cojmplejos)

$$|\Psi >= a| \uparrow> +b| \downarrow>$$

Con $a, b \in \mathbb{C}$

Notación:

$$| \uparrow>= (10)|vertical = \chi+$$

$$| \downarrow>= (01)|vertical = \chi-$$

$$\Psi = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >= | \uparrow>= (10)vertical = \chi+$$

$$\Psi_- = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} >= | >= (01)vertical = \chi-$$

Un estado general es χ.

$$\chi = a\chi+ = b\chi-$$

2.1.3 Suma de momento angular

$$S^2, S_z$$

Sabemos que

$\begin{cases} {}^2\chi+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi+ \\ S^2\chi- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi- \end{cases}$

Cuado se usa funciones de onda con columnas de 2 componentes se dice que se está usando la representación espinorial.

$$\chi = a\chi+ = b\chi-$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ + b $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculamos la representación del operador S^2

S^2 = $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$c, d, e, f \in \mathbb{C}$$

Aplicando S^2 en $\chi+$

Similarmente aplicamos S^2 en χ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bransden $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar^2 \; 3\overline{}_{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Check out this book Devanathan, Angular MOmentum in Quantum Mechanics