订阅DeepL Pro以翻译大型文件。
欲了解更多信息，请访问www.DeepL.com/pro。

ResearchGate

请参阅本出版物的讨论、统计资料和作者简介：https://www.researchgate.net/publication/280223479

论斐波那契数列的起源

文章 - 2014年3月

著作
2

阅读文章
497

2位作者。

托尼-C-斯科特
Near.co
101个出版物 882次引用
查看简介

潘美乐
24篇出版物 124次引用
查看简介

本出版物的一些作者也在从事这些相关项目的工作。

Project 物理真空理论 查看项目 符号整合 查看项目

Project

本页以下所有内容由Tony C. Scott于2017年11月04日上传。

用户要求对下载的文件进行改进。

论斐波那契数列的起源

T.C. Scott[a] , P. Marketos[b,c]

[a]*Institut für Physikalische Chemie, RWTH Aachen University, 52056 Aachen, Germany, email: tcscott@gmail.com*
[b]*I.M.Panagiotopoulos School, International Baccalaureate Department, 14, N. Lytra Street, Psychiko 154 52, GREECE, email: marketop@otenet.gr*
[c]*21A, Florinis Street, 152 35 Vrilissia GREECE*

摘要

在此，我们研究斐波那契数字的历史起源。在强调了这些数字的重要性之后，我们研究了有关其起源的标准推测，并证明它没有得到历史年代学的支持。基于最近的发现，我们提出了另一种猜想，即通过仔细研究莱昂纳多-斐波纳契的历史和历史/数学情况，将这些情况与中世纪和古代历史的主题联系起来。我们的猜想的文化含义和历史线索也在此得到了研究。

*关键字。*斐波那契，中世纪，伊斯兰教（中世纪），希腊，埃及，阿马齐格（卡比勒），贝贾亚
01A13, 01A35, 01A20, 01A30

1. 简介

传统观点认为，斐波那契数是由比萨的莱昂纳多（Leonardo of Pisa）在1202年首次提出的，他的书《*Liber abaci*》是当时欧洲最有影响力的数学文本。斐波纳契数列出现在以下问题的解决方案中。

> "有一个人把一对兔子放在一个四面都是墙的地方。如果假定每个月都有一对兔子，那么这对兔子在一年中可以生产多少对？

一对产生了新的一对，从第二个月开始就有了成效？"

得到的序列是

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, - - - \tag{1}$$

(斐波那契在*Liber abaci*中省略了第一个项)。这些数字的递归公式为：。

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \qquad n > 1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

虽然斐波纳契只给出了序列，但他显然知道，n^{th}

他的序列中的数字是前两个数字之和。今天因天体力学的 "开普勒定律 "而闻名的约翰内斯-开普勒注意到，连续的斐波那契数字的比率，例如(1)中最后两个数字的比率，接近φ，这被称为*黄金*比率或神圣比率（例如，见[Cook,1979]）。

$$\frac{55}{34} = 1.618 \approx \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

在详细的分析中[Jung&Pauli,1952/2012]，获得诺贝尔奖的物理学家W.Pauli讨论了开普勒对其 "开普勒定律 "的形成可能产生的影响，开普勒（1571-1630）提出了数学关系，以努力适应哥本哈根的第谷-布拉赫的天文学数据。开普勒定律最终由牛顿通过应用伽利略在动力学方面的发现而得出。这一成功的努力催生了 "经典力学 "科学，而现代物理学及其所有影响深远的技术应用和哲学概念都是基于此。

根据Pauli的说法，对开普勒信仰的两个最重要的影响来自于毕达哥拉斯数学和植物形态学中表现出来的斐波那契数[Jung&Pauli,1952/2012, p.163,189]。特别是，开普勒坚信数字3（斐波那契数）比数字4（不在斐波那契数列中）更重要，这与其他竞争性占星家的观点截然不同。根据丹皮尔[Dampier,1966, p.127]，"开普勒在寻找......造物主头脑中的数学和谐"。

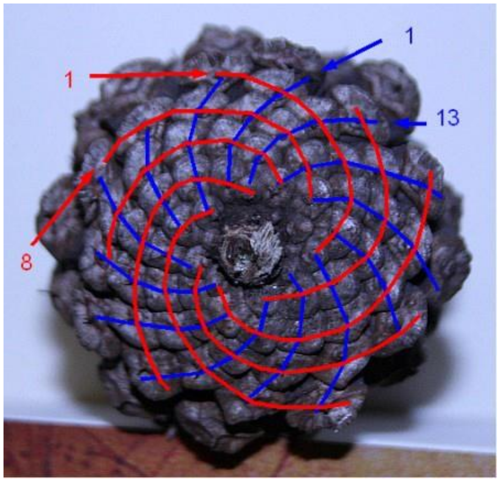


图1.松果中的斐波那契螺旋线。华伦威尔逊学院物理系提供 [Collins,2011]。

人们注意到，某些植物的叶片和某些花朵的花瓣遵循斐波那契数列描述的规律[Cook,1979, V]。斐波那契数在松果中的出现受到了特别的关注[Cook,1979, VII]。如图1所示，从松果的俯视图中，可以区分出两组螺旋线：一组是顺时针方向，另一组是逆时针方向。每组数字的比率几乎都是两个斐波那契数字的比率。

基于小斐波那契数的斐波那契螺旋，出现在许多植物的茎叶排列上。斐波那契螺旋，也与斐波那契数列有关，作为蜗牛壳和一些海壳的形状出现在大自然中。库克[Cook,1979]发现，螺旋或螺旋线可能是生命原则的核心：生长。螺旋是有机生命的基础，从植物、贝壳到动物的角[Cook,1979, XII]；到原子元素的周期性；到微观的DNA（双螺旋）和星系的形成，如仙女座星云[Cook,1979, XX]。不寻常的是，尽管兔子模型问题似乎是设计好的，并且人为的，即兔子*不*会以雌雄同体的方式繁殖。[1]斐波那契数具有普遍的应用性，似乎在自然界中无处不在。
(例如，见[Stewart,1995,157-166]）。

上一段所举的大量例子表明，斐波那契数代表了一种基本的数学结构。这些数字和黄金比例在自然界的存在无疑是一种迷人的普遍趋势，特别是在植物学和动物学领域[Stevens,1979, Stewart,1999]。在梯形和级联电子网络分析中也注意到斐波那契数的存在。

[1]兔子的繁殖是根据其环境的大小而变化的。一般来说，它们的繁殖率非常高，也就是说，"像兔子一样"（如果说得有趣但准确的话）。

景观[Arkin,1965,3,139-142]，现代音乐[Lowman,1971,9-4,423-426&436, Lowman,1971,9-5,527-528&.536-537]，溪流的支流模式和排水模式[Sharp,1972,10-6,643-655]，原子物理[Wlodarski,1963,1-4,61-63]，教育[Curl,1968,6-4,266-274]和经济学[Falconbridge,1964,2,320-322]。并不总是很清楚为什么这些数字会出现在许多情况下，但它们确实反映了某种最小化或最优化原则，即自然界是高效但 "懒惰 "的概念，使最
的可用资源。斐波那契数字无处不在的特性甚至激发了一本杂志的诞生，即《*斐波那契季刊*》。

黄金比例也被用于建筑和艺术中。从雅典的帕特农神庙[Cook,1979]到Stradivari的小提琴[Arnold,1983]，许多设计中都有这个比例。达芬奇[Cook,1979]等艺术家以及音乐家和作曲家都知道它。巴赫[Norden,1964,2,219-222]，巴托克[Lendvai,1971]和德彪西[Howat,1983]。

多年来，令学者们困惑的是，斐波纳契数本身的基础重要性与兔子繁殖模型的人为性之间的对比，显然，他们是通过这个模型首次引入的。斐波纳契本人似乎并不重视这些数字；兔子问题似乎是他工作中的一个小问题。直到19世纪，由于法国数学家爱德华-卢卡斯（Edouard Lucas）的工作，这些数字才具有重要的意义和知名度。

历史学家对此进行了思考，怀疑或怀疑这些数字背后的真正灵感以及斐波纳契对它们的了解。斐波纳契自己也承认，他受到了伊斯兰学术的影响（在斐波纳契的时代处于顶峰时期）。历史学家试图评估这种影响，特别是因为斐波纳契的贡献与穆斯林学者的成果相似，特别是Al-Khw^arizm^ı（公元780-850年）的工作（例如，见[Zahoor,2000, CHS,1971]），这位穆斯林学者曾写过一本关于印度-阿拉伯数字的书，"代数 "和 "算法"（制定和完成特定任务的逐步程序）都是从他的作品中得出。这促使历史学家将斐波那契数列的起源与中世纪的穆斯林学术联系起来。

这篇文章的目的是对斐波那契数的起源提出一个可信的猜想。我们首先提到了一个比较流行的猜想，并说明了数学和历史方面的原因，这就是

从最近的工作（特别是Roshdi Rashed[Rashed,1994,2]）中得到支持，说明我们为什么认为这个猜想是不可能的。然后我们提出我们自己的猜想，该猜想符合我们今天所知的事实。最后，我们研究这个猜想对公元1200年后斐波那契所处环境的历史影响，特别是神圣罗马帝国统治者腓特烈二世（公元1196-1250年）的宫廷。

2. 标准 "猜想

2.1. 帕斯卡尔的三角形

首先我们生成帕斯卡尔三角形（例如见[Decker&Hirshfield,1992]）。这是通过在$(x+1)^m$， m=0, 1, 2, ...的情况下扩大条款来实现的。

$$
\begin{array}{ll}
(x+1)^0 & 1 \\
(x+1)^1 & 1+x \\
(x+1)^2 & 1+2x+x^2 \\
(x+1)^3 & 1+3x+3x^2+x^3 \\
. & .
\end{array}
\quad (4)
$$

并将系数排列成以下三角形。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\quad (5)
$$

这个三角形中的条目是二项式系数。

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!} \quad (6)$$

一旦后者（5）被重新排列成表1所示的 "齐头并进 "的矩阵形式，其中行和列的编号从零开始，这些就可以与帕斯卡三角形联系起来。表1的m^{th} 行和

k^{th} 列的每个条目由（6）中的二项式给出。如图2所示，当帕斯卡尔三角形中的条目按照对角线相加时，得到的是

的和正好产生斐波那契数列。在代数上，我们可以把这个对角线之和写成。

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k-1}{k}, \quad n>0 \tag{7}$$

尽管布莱斯-帕斯卡尔（1623-1662）被认为是发明了这个三角形，但事实上，中国人至少在500年前就知道这个三角形了[Burton,1985]。据认为，伟大的波斯数学家、哲学家和诗人Omar Al-Khayy^am（公元1048-1131年）（例如，见[CHS,1971, Coolidge,1990]）知道双项式系数和这个三角形。标准 "猜想认为，通过与穆斯林的接触，斐波纳契通过Al-Khayy^am的工作意识到中国的三角形，并从那里意识到导致斐波纳契数字的模式。

表1
矩阵形式的帕斯卡尔三角形

		栏目				
		0	1	2	3	4
	0	1				
r	1	1	1			
o	2	1	2	1		
w	3	1	3	3	1	
	4	1	4	6	4	1

2.2. 标准 " 猜想的问题

尽管斐波那契数列和帕斯卡尔（或中国）三角形之间有明确的数学关系，但关于 "标准 "猜想，在历史和数学方面都有重大问题。

2.2.1. 历史问题

根据拉希德[Rashed,1994,2, p.148]，在对*Liber abaci*中的一组约90个代数问题的检查中，发现其中22个问题是从Al-Khw^arizm^ı的代数书（*Al-jabr wa'l muqabala*，约写于公元830年）和Abu Kamil的 al-gebra书（*Kitab fi al-jabr wa'l-muqabala*，或*完成和平衡之书*，约写于公元912年）中借用的。一个人处理*完全相同的*问题，只是偶尔对数字系数稍作改动。不可否认的是，这些问题是*巨大的*，特别是在Abu Kamil的案例中。Fibonacci的*Liber Abaci*中剩下的问题大约有25个（不同于之前的90个子集），其起源尚未确定，遵循Al-Khw^arizm^ı和Abu Kamil设想的模型。

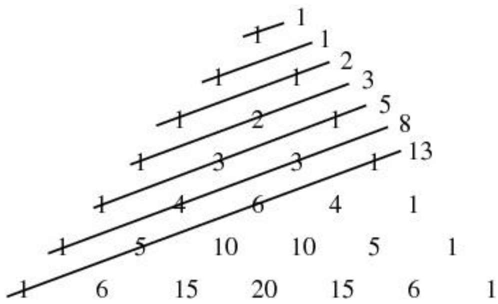


图2.斐波那契数和帕斯卡三角形。由MathWorld [Mathworld]提供。

斐波纳契不仅欠Al-Khw^arizm^ı和Abu K^amil的人情，他还与他们同时代，也就是9世纪和10世纪的穆斯林数学，尽管斐波纳契本人生活在公元1200年左右的后期。例如，在考虑Al-Khayy^am（公元1048-1131年）的方程式时

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \tag{8}$$

斐波纳契接受了这个挑战，并在另一部名为*Flos*（意为 "花"--公元1225年在腓特烈二世面前提出的问题的解决方案集）的作品中提出了解决方案。然而，他只成功地获得了一个数字上的近似值。还有其他的考虑[Rashed,1994,2,p.150]表明，尽管斐波纳契领先于欧洲数学家，但他对他那个时代的穆斯林数学家的工作并不适应。相反，似乎斐波纳契可能依赖于克雷莫纳的杰拉德（Gerard of Cremona，公元1114-1187年）对Al-Khw^arizm^ı作品的翻译，后者是在西班牙托莱多（Toledo）为（基督教）欧洲将阿拉伯语作品翻译成拉丁文的主要努力的先驱。我们顺便注意到，这促使学者们猜测，到了12世纪，Al-Karaji的作品一定会被翻译成拉丁文[L´evy,2000,56,58]。因此，斐波纳契可能不知道中国的三角形，因此也不知道导致斐波纳契数的模式，通过Omar Al-Khayyam的作品。在人们提出抄袭的指控之前 [2]拉希德本人并没有这样做，但可以考虑到

[2]至少从伊斯兰教的角度来看，情况肯定是这样的。然而，现在是十字军东征的时代，基督教方面会从一个非常不同的角度来看待这个问题。例如，早些时候有人声称，巴斯的阿德拉德以类似于理查德-伯顿爵士的方式，将自己伪装成一名穆斯林学生，在将*欧几里德的《元素》*从阿拉伯语翻译成拉丁语之前，偷了一份副本[RouseBall,1908,p50-62]。

要考虑到斐波那契所处的时代。斐波纳契所处的时期属于十字军东征时期，这是一个穆斯林和基督教帝国之间的迷信和宗教冲突的时代。西班牙和圣地都是军事短兵相接的地区。

斐波那契的时期早于牛顿和其他人制定的严格的科学原则：我们所知的科学时代还不存在。相反，科学和 "非科学 "的概念是并存的。例如，我们现在所说的天文学（涉及经典天体力学的一门受人尊敬的科学）和占星术（一种不被大多数西方思想家认真对待的 "占卜 "形式）的活动作为同一活动的一部分混杂在一起，由同一批学者处理[3].当时的 "占星家 "利用天文学对行星轨道进行预测，一旦这些轨道被计算出来，他们就会进行占星学的 "预测"。类似的特征也适用于炼金术，化学的祖先，以及医学。在斐波纳契的时代，人们见证的是科学的 "前史"，而不是科学本身。科学事实与错误信息、迷信和宗教信仰并存。与代数、炼金术和占星术有关的活动对当时大多数人来说都是 "魔法 "的形式，面临着怀疑和抵制。

回过头来看，当考虑到穆斯林学者在斐波那契的时代比欧洲人更先进时，必须认识到斐波那契的成果中有很大一部分是在翻译中不可避免的努力。这些翻译被教会当局 "过滤"，因此 "译者 "必须避免与穆斯林或穆斯林思想有密切联系，这可能对他们自己和他们的作品构成危险。通常情况下，结果不得不被 "伪装 "起来。尽管如此，在这种理解下，斐波那契的工作提供了宝贵的服务，将重要的数学贡献从穆斯林世界带到基督教欧洲。

2.2.2. 数学问题

如前所述，尽管斐波纳契在他的*Liber abaci*中提供了他的序列，但他并没有提供任何递归关系。尽管如此，斐波纳契还是提供了一个 "模型"，用来生成这些数字，这相当于

---

[3]这是一个如今的学者们不愿意提及的历史事实。开普勒是一位真正的占星家，也是一位天文学家。

递归关系本身，尽管斐波纳契没有提供它的表述。

我们在上一节论证了斐波那契不知道中国的三角形。然而，万一他是通过Omar AL-Khayyam的工作而知道的，那么他还是很不可能从中国三角形本身推断出这个 "模型"。三角形条目的对角线之和确实产生了斐波那契数，但*没有*产生 "模型"。从(7)的二项式系数生成(2)的斐波那契递归关系，在今天看来是一项简单的任务，但从前面基于历史的讨论来看，考虑到斐波那契的数学知识，就太先进了。

尽管斐波纳契的兔子繁殖模型是人为的，即：它*不能*代表兔子的实际物理繁殖，但它确实提供了一个生成斐波纳契数列的数学 "模型"，与递归关系（2）完全一致。此外，当我们考虑到今天已知的生成这个序列的各种方法时，生殖模型是最简单的，涉及到斐波纳契可以处理的数学操作。

在下一节中，我们提供一个替代猜想，解决与 "标准 "猜想相关的历史和数学问题。

3. "另类 "猜想

3.1. "展品A"。贝贾亚的商业文化和蜜蜂 "家谱" 确立这一猜想的第一步是确定斐波纳契在北非期间的环境。当时，北非和西班牙正处于一个 "黄金时代"，在柏柏尔人的统治王朝Al- moravids（11^{th} 至12^{th} 世纪）和Almohads（12^{th} 至13^{th} 世纪）的统治下，程度较轻。贝贾亚作为北非的一个主要中心达到了一个高峰，拥有一个非常重要的知识精英，一个艺术阶层和相当于一个富裕的资产阶级[Marcais,1986,1,1204-1206] 。

在其主要的商业出口中，蜂蜡占有重要地位，因为贝-贾亚在中世纪拥有最有效的蜡生产 "技术 "之一[Marcais,1986,1,1204-1206, p.1204]。事实上，某种类型的蜡烛的法语单词 "bougie "就来自于 "Bejaia "一词。

(即使在今天，许多法国人仍然称之为 "Bougie"）。这种蜡在基督教神职人员的宗教集会和仪式中变得非常抢手。[4].这种蜡由山区的柏柏尔部落生产，通 过 在 地 中 海 港 口 Be-jaia 附 近 经 营 的 各 种 商 人 销 往 欧 洲 [Brett&Fentress,1997, p.130]。毫无疑问，作为皮萨在贝贾亚的贸易殖民地的一部分，斐波那契非常了解这种技术及其商业活动[5].

我们注意到，虽然兔子的繁殖问题并不现实，但斐波那契数与蜜蜂的繁殖祖先*完全*吻合。在一个蜂群中，只有蜂王会产卵。如果这些卵子受精，就会产生雌性工蜂。雄蜂，也就是无人机，是由*未受精的*卵产生的。因此，雌性蜜蜂有两个父母，相反，无人机只有一个父母。看一下雄性无人机蜜蜂的家谱（图3a），我们注意到以下情况。

1. 雄性无人机有一个父母，即雌性。
2. 他还有两个祖父母，因为他的母亲有两个父母，一男一女。
3. 他有三个曾祖父母：他的祖母有两个父母，但他的祖父只有一个，以此类推……。

通过追踪每一代的祖先数量，*正好*得到斐波那契序列[Basin,1963,1,53-57]，如图3b所示，由图3a的表格得出。正如我们所看到的，一个工蜂或甚至一个蜂王的祖先[6]是一个移位的斐波那契序列，因为它与无人蜂的祖先有联系。从数学的角度来看，重要的是要注意到（哺乳动物）有性繁殖的每一代n的祖先数量只是2^n。两个连续的

[4]以动物脂肪为基础的蜡烛或火把在欧洲很有名，但这些蜡烛或火把会发出令人不快的臭味，这在宗教仪式上是非常不受欢迎的。

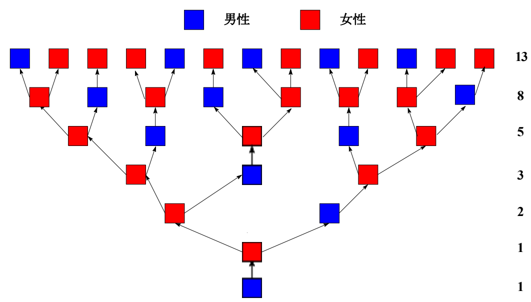
[5]自然，欧洲人，特别是僧侣，最终会改进他们自己的蜂蜡 "技术"。在中世纪，修道院里最重要的工作之一就是 "养蜂人"，因为仪式上的蜡烛需要大量的蜡。贝贾亚在被西班牙人征服并随后被土耳其人统治后，，陷入了失修和废墟。

[6]工蜂和蜂王都是雌性，主要区别是蜂王可以繁殖，因为她是靠 "蜂王浆 "长大的。

A
基
金
会

代	嗡嗡声	工人/女王
1	1	2
2	2	3
3	3	5
4	5	8
5	8	13
6	13	21
7	21	34
8	34	55
9	55	89

(a) 蜜蜂家族树



(b) 斐波那契数.

图3.蜜蜂 "家庭树"。

代渐进地等于2。

$$\frac{2n+1}{2n} \qquad \lim = 2 。 \quad (9)$$

而在蜜蜂的情况下，它暂时等于黄金数

φ:

$$限于\frac{Fn+1}{F_n} = \varphi \approx 1.618 . \qquad (10)$$

换句话说，蜜蜂和兔子的祖先树并不具有相同的数学复杂性。在追溯兔子或蜜蜂的祖先家谱时，读者可能会注意到，我们追溯繁殖方面的时间是向后的，而不是向前的。追踪家谱很容易。为了能够以现实的方式建立向前繁殖的模型，我们必须考虑到兔子的产仔量或蜜蜂的产卵量，所有这些都取决于与食物、死亡人数和环境等因素有关的统计变化和条件。相对而言，这是一个相当复杂的问题。自然，人们通常会遵循最简单的路径去寻找答案。

在这里，我们有一个简单的生殖/繁殖模型，它完全符合斐波纳契数，也属于*Liber abaci*中出现的商业启发问题的模式；兔子问题--正如斐波纳契提出的那样--只是蜜蜂繁殖模型的一个变体（或伪装版本）。我们想强调的是，后者之间的联系

和斐波那契的数字是自然和完美的，而不是斐波那契的兔子问题的人为因素。

除了数学上的契合，必须确定斐波那契时代的穆斯林是否能整理出蜜蜂的祖先树。对一些人来说，这似乎是一个具有挑战性的说法。然而，在下面的章节中，我们在目前的数学数据基础上增加了历史证据（迄今为止被称为 "展品"，本节算作 "展品A"），证明斐波纳契的数字很可能是受到贝贾亚（Bougie）的蜂蜡贸易环境的启发。

3.2. "证据B"。翻译活动

在 "重新征服 "期间攻占托莱多后，一大批用阿拉伯文和希伯来文写成的书籍落入征服者的手中。这些作品随后被基督教学者翻译。如前所述，斐波那契的作品应该放在这些翻译活动的背景下考虑，这些翻译活动首先以托莱多为中心，这个城市当时居住着基督徒、犹太人和穆斯林的混合人口，他们并肩生活在一起。

在犹太和穆斯林学者的帮助下，克雷莫纳的杰拉德的翻译活动被追随者延续到13世纪。这一时期标志着一位被称为迈克尔-司各脱（公元1175-1235年）的主要翻译家的出现[Thorndike,1965, Burnett,1994,2,101-126]（Michael Scot的拉丁化版本）。司各脱作为神圣罗马帝国统治者腓特烈二世的宫廷 "占星师"，成为历史和传说的一部分。司各脱在占星术和天文学、炼金术、医学和代数方面从穆斯林那里学到了很多东西。虽然在1227年左右被教皇的作者看好，但他却获得了巫师的险恶名声，并在但丁-阿利盖里的史诗《*Di- vine Comedy*》中被判处地狱之刑（尽管后来在沃尔特-斯科特爵士的诗《*Lay of the Last Minstrel*》*中被*"拯救"）。

司各脱和斐波那契是腓特烈二世的宫廷成员，他们将在把穆斯林（主要来自摩尔人的西班牙）的大部分科学知识传播到欧洲（主要是意大利和西西里）方面发挥自己的作用，从而为意大利的 "文艺复兴 "播下了许多种子[Haskins,1927。

Burnett,1994,2,101-126].不仅司各脱和斐波那契是同时代的人，斐波那契本人也在公元1227年发布了他的*Liber abaci*的修订版[Burnett,1996]。[7]*献给司各脱的*序言[Thorndike,1965, IV, pp.34-35]。

> *最高哲学家迈克尔-司各脱大人，您曾写信给我，希望我为您抄写我不久前写的关于数字的书。因此，根据你的要求，我仔细阅读了它，为了你和其他许多人的使用，我修改了它。在这次修订中，我增加了一些必要的内容，删去了一些多余的内容。在这本书中，我根据印度人的方法给出了完整的数字学说，我选择这种方法是为了在这门科学中优于其他方法……。*
>
> *为了使教义更加明显，我把这本书分为十五个章节，以便读者可以更容易地找到他要找的东西。此外，如果在这部作品中发现了不足或缺陷，我将其提交给你们进行修改。*

这篇序言异常谄媚，几乎是一个研究生对其博士生导师的认可，有些人对其真实含义或理由表示怀疑[Brown,1897]。斐波那契和司各脱之间还有其他联系。司各脱使用的是皮萨历[Burnett,1994,2,101-126,p.116-117]，献词本身表明司各脱和皮萨之间有联系[Haskins,1927,p.275,290]。

通过一个演绎过程，我们希望辨别斐波那契和司各脱之间可能的关系。从斐波那契的其他奉献和他那个时代的做法来看，这样的奉献是对两类人的奉献。

1. 赞助人，一个富裕的人，通常是贵族的一部分。腓特烈二世本人就是一个赞助人。他对斐波纳契印象深刻，并为他提供支持。Dominicus Hispanus，一个贵族，是另一个赞助人，他在公元1225年左右将斐波纳契介绍给腓特烈二世本人。
2. 一个对数学问题或挑战有灵感的人，如巴勒莫的约翰（他曾提出过一个数学问题）。

[7]拉希德[Rashed,1994,2,p.147]引用了公元1228年作为奉献的年份。

斐波那契在*Liber Quadra- torum*中解决的类似于狄奥芬提的问题）或安提阿的Theodorus（前面提到）。

我们知道，司各脱当然不可能属于第一类。他本人依靠神职人员[Thorndike,1965]和腓特烈二世本人的恩惠，司各脱的所有作品都献给了他[Thorndike,1965]。

首先，我们几乎可以肯定，司各脱对数学的了解足以让斐波那契敬佩不已。正如献词本身所暗示的那样，司各脱自然会对在为腓特烈二世服务时使用印度-阿拉伯数字进行占星术计算感兴趣。然而，我们想提请注意的是一个不同的领域。在司各脱自己的书*Liber Introductorius*中，除其他事项外，讨论了属于亚里士多德*计量学*范围的事项，司各脱提出了亚里士多德的五个空气"区域"（露水、雪、雨、霜冻和冰雹）的扩展，包括另外两个"区域"，即蜂蜜和鸦片酊（在穆斯林医学中作为止痛药使用的鸦片酊）。

根据司各脱的说法，"蜂蜜从空气中滴落到花朵和草药上，由蜜蜂收集"。然而，正如桑代克[Thorndike,1965,VI]所指出的，司各脱将这种"自然"品种与人工品种区分开来，因为他认为人工品种是由蜜蜂的*消化过程*产生的。斯考特是中世纪最早提出这些意见的欧洲人之一，虽然按照今天的标准，这两种说法都不准确（蜜蜂确实在食道的"蜜袋"中收集花蜜而不是蜂蜜本身，而且它们胃唾液中的消化酶在蜂蜜的"化学"生产中起着关键作用），但这在他的时代是一个进步[8]必须提醒的是，许多经典著作在野蛮人的入侵中被毁。亚里士多德的动物学著作（*Historia animalium, De partibus animalium*和*De generatione animalium*）直到司各脱在1220年之前完成了他自己从阿拉伯文到拉丁文的翻译，才重新出现在欧洲[Thorndike,1965]。因此，司各脱的资料主要是穆斯林的，间接是亚里士多德的。

[8]Thorndike的分析[Thorndike,1965,VI]显示，Thomas of Cantimpr'e在他自己关于蜜蜂的著作中大量使用了Michael的作品，但没有给予太多的认可。

3.3. "展品C"。关于蜂巢和蜜蜂繁殖系统的背景知识

我们猜想的一个非常重要的部分，也许是最重要的部分，就是确定贝贾亚的穆斯林文化可能产生了蜜蜂家族树（图3a）。这需要知道

一个*未受精的*卵子就会产生一个无人驾驶的蜜蜂。

即使有一个蹩脚的编号系统（我们知道穆斯林有更好的）：一旦认识到这一概念，就很容易将蜜蜂无人机的家谱列表，并获得斐波那契序列，如表3a中给出的*任何*顺序。

自然，重要的问题是：Bejaia（Bougie）的文化是否承认*孤雌生殖*，即从未受精卵中进行无性繁殖？这似乎是一个具有挑战性的命题，特别是由于蜜蜂繁殖的遗传学在20世纪才被研究出来。

*th*尽管孤雌生殖（来自希腊语，意思是 "处女出生"）据称是由Charles Bonnet（1720-1793）在18_*oo*世纪发现的，但无性繁殖早在亚里士多德本人就已经认识到了，必须指出，他是一个狂热的养蜂人。就这一点而言，养蜂业甚至可以追溯到公元前2400年左右的古埃及[Crane,1983]。虽然遗传学确实是最近才出现的，但养蜂的 "艺术 "自文明时代就已存在，值得调查的是，在斐波那契时代，它是如何发展的。

在这个阶段，我们必须为亚里士多德本人对蜜蜂的了解和在他的《*动物史*》一书中的写法打开一个大括号。他的知识是相当丰富的[Aristotle,1995,1-11]，他的一些观点和结论在他的时代是相当准确的。早在显微镜出现之前，亚里士多德就能正确区分蜜蜂的三个种姓系统：工人、无人机和一个统治者。他正确地描述了蜜蜂在未成熟阶段发展的许多方面。他还写道，蜜蜂有 "敏锐的嗅觉"[Aristotle,1995,1-11, p.705, cit. 444^b 7-12]，蜜蜂使用气味（化学痕迹）作为交流工具这一事实证明了这一点。然而。

1. 亚里士多德误解了统治者的性别。他认为统治者是男性（国王），而不是女性（女王）。[9].
2. 亚里士多德知道蜜蜂从花中获取物质，但他认为蜂蜜实际上是从大气中沉积下来的（如上一节所示，这种信念被纳入司各脱的著作中）。
3. 亚里士多德误解了蜜蜂的繁殖系统。

有经验的养蜂人非常清楚，如果一个蜂王变老或患了病，它就不能再与无人机交配。此外，如果蜂王死亡，一些工人会成为 "假蜂王 "并产卵。然而，由于这些 "假王后 "不能交配（只有真正的王后才能交配），结果卵也是不受精的。在任何一种情况下，都会出现以牺牲工人为代价的无人机的增加，蜂巢面临着自我毁灭的严重危险。为了维持蜂巢的动态平衡，需要一个由大多数工蜂和足够数量的无人机组成的平衡种群。

亚里士多德实际上能够观察到在这些情况下产生的无人驾驶飞机的雏形，重要的是要注意这样的观察是可能的。然而，他未能得出正确的结论。相反，他认为蜜蜂不生育，而是从花中取走它们的幼虫（自发生成）。然而，重要的是要注意，亚里士多德

*还写*道[Aristotle,1995,1-11, p.872, 553^a 32 - 553^b 1]。

> "还有人再次断言，这些昆虫（蜜蜂）会交配，无人机是雄性，蜜蜂是雌性。"

表明在亚里士多德时代就存在女性蜜蜂统治者的另一种概念，这一点可以从希腊神话中得到证明[10].此外，孤雌生殖的概念在希腊神话中的一些例子中被提及，例如，在神的诞生的一个特殊版本中

---

[9]亚里士多德在（1）中所说的工蜂是雄性的错误观念在莎士比亚时代是一种普遍的信念，这可以从他的戏剧《亨利第四》中得到证明，其中一些人物谈到蜜蜂是由一个 国王领导的士兵[Shakespeare,1914, part2,Act IV, Scene 5] 。

[10]Melissa被认为是蜂后，她每年都会杀死她的男性伴侣（就像蜜蜂的无人机在交

配时死亡一样）[Graves,1990, I:7.3]。她的女祭司被称为Melissae。另见[Graves,1990, I:18.3]关于Aphrodite Urania和男性性器官的撕裂，这确实是描述了交配时发生在蜜蜂雄蜂身上的情况。

Hephaistos来自赫拉[Graves,1990，I:12.c]，生物Ladon来自大地母亲[Graves,1990, II:133.b]。

尽管有亚里士多德的误解，人们可以看到，即使在他的时代，对蜜蜂的可靠观察也是可能的。事后，我们可以看到，如果不是因为他认为蜜蜂统治者必须是雄性，亚里士多德的观察和对有性和无性繁殖的知识有可能使他认识到，（雄性）蜜蜂的无人机是由未受精卵产生的。这一认识所需的所有"成分 "都存在于他的著作中。重申一下。

一旦对蜜蜂3人种姓系统的性别进行适当整理，并注意到。

1. 亚里士多德对蜜蜂（无人机）在没有受精的情况下孵化的准确观察
2. 亚里士多德对无性繁殖的认识。

人们不可避免地意识到，雄蜂的无人机只是由未受精卵产生的。

鉴于亚里士多德面临着同时代人对其信仰的反对，考虑到有人可能早在中世纪之前就已经意识到了这一点，就变得很诱人。我们稍后将回到这一点上。

作为一个附带问题，我们还注意到，双胞胎的出现（用于斐波那契的兔子模型）和孤雌生殖（出现在蜜蜂繁殖中）都是 "克隆 "的自然形式。因此，斐波纳契的兔子模型和蜜蜂祖先树之间的数学联系也可以从这个角度来看[11]. 亚里士多德本人在他的 "动物史 "中对双胞胎方面进行了相当多的思考 迈克尔-司各脱似乎也对双胞胎很着迷[12].

---

[11]具有讽刺意味的是，据称在20世纪40年代左右，实验生物学家成功地以人工方式刺激兔子不受精繁殖。兔子的问题可以 ，然后被 "拯救"，但当然，斐波纳契不可能知道这一点!

[12]例如，可以看到他对 "博洛尼亚的玛丽 "的妇科案例研究[Jacquart,1994, p.32]。

从第三世纪到第十一世纪，随着罗马帝国在巴伐利亚人的入侵下瓦解，生物学最终成为一门穆斯林科学。穆斯林发现了亚里士多德和盖伦的作品，并将其翻译成阿拉伯语，对其进行研究并撰写评论。*Al-Jahiz*（公元776-868年）（例如，见[Zahoor,2000]），是一位特别值得一提的阿拉伯生物学家。在他的*Kitab al-hayawan*（"动物之书"）中，作者强调了自然界的统一性，并承认了不同生物群体之间的关系，他在书中透露了一些来自亚里士多德的影响。

值得注意的是，伊斯兰中世纪所有相关的养蜂概念都出现在《古兰经》中[Toufy,1968]。在《古兰经》"Surah an-Nahl"（16：68 - 69）的一个章节中，意思是 "蜜蜂"，其中指出

> 你的主启示蜜蜂，（说）："你在山上、树上和他们（人类）所建造的东西里，为自己的住所。然后吃一切水果。"从它们的肚子里流出各种颜色的饮料，对人有益。这对思想家来说是一个有意义的标志。

在这段摘录中，人们找到了司各脱提到的蜜蜂的消化过程在制造蜂蜜中的作用的起源。显然，斐波那契时代的伊斯兰养蜂人相信这个概念，自然得出结论，蜡和蜂蜜的产量取决于蜜蜂的数量，而不是鲜花或植物资源的实际数量，甚至更多。这将证明了解蜜蜂繁殖的商业动力是有道理的。

最重要的是这段话的阿拉伯语原文中写的蜜蜂的性别。在这两段经文中，描述蜜蜂时都使用了*女性*动词，阿拉伯文是："fa'sluki "和 "kuli"（用于命令语 "吃"）。另外，这段话中的 "取 "是阿拉伯语 "attakhidhi "的翻译，而且是女性的形式（阿拉伯语动词与英语动词不同，是男女有别的）。与法语一样，当它所指的人都是女性时，就使用阿拉伯语的女性形式，而当一个群体中至少有一名男性时，就使用男性形式。因此，在这段话中，*所有*的蜜蜂工人都是*女性*，亚里士多德的两个主要误解得到了解决。

1. 穆斯林意识到，蜜蜂工人是女性，而无人机是男性。
2. 穆斯林通过将蜂蜜与蜜蜂的消化过程联系起来，对蜜蜂的实际生产有了更准确的认识（司各脱也提到了这一事实）。

伊斯兰学者Al-Jahiz以及后来的Al-Qazwˆını（死于公元1283年）、Al-Damˆırˆı（死于公元1405年）和Al-Maqrˆızˆı（死于公元1442年）的养蜂著作证实了上述内容[Toufy,1968]。这已经是对亚里士多德关于蜜蜂的著作的一个改进，但剩下的问题是：女王的性别是什么？

阿布杜阿伊布，胡德海里人[13]诗人，与先知穆罕默德同时代的人哈姆德写道："蜂城中蜂后的力量" [Toufy,1968, p.81]，人们可以认为这个问题最终会得到解决。然而，从亚里士多德的著作和《古兰经》的信条来看，虽然蜜蜂工人肯定是女性，但Al-Jahiz以及其他大多数伊斯兰学者都会说到一个蜜蜂 "国王"，尽管Al-Jahiz之后出现的作者承认存在一个蜜蜂 "女王"（Al-Jahiz承认存在 "母亲"）。这个 "国王 "被称为*ya'sub*或 "蜜蜂的种马和（女性）蜜蜂制造者的王子"[Toufy,1968, p.62]。然而，阿尔-贾希兹对雅子的浪漫描述将发生巨大的变化。到了公元1371年，Al-Damˆırˆı宣布[Toufy,1968, p.68]，当蜂蜜供应不足时，蜜蜂工人会*消灭* "国王 "和雄性。这是相当准确的：在冬季或蜂蜜缺乏时，（雌性）工蜂会将（雄性）蜜蜂无人机从蜂巢中淘汰。此外，历史学家Al-Maqrˆızˆı通过他不愿透露姓名的前辈的工作，收集了他那个时代已知的养蜂业的常识，最后宣布："。

> "有些人声称雄性建造自己的细胞，但雄性什么都不做。工作是由女王完成的；是她们指导（即支配）她们的国王和雄性。"

这也是相当准确的，考虑到当时伊斯兰教的宗法性质，这也是相当的承认。蜜蜂的 "国王 "仍然存在[14]但在贾希兹的9世纪和14世纪末之间的某个地方，权力完全从国王转移到了蜂王身上。此外，在Al-Qazwˆınˆı时代，对蜜蜂形态的描述已经非常详细，包括一系列的颜色、形状和其他特征。

[13]Hudhayli是阿拉伯半岛的一个部落。

[14]伊斯兰世界中许多养蜂的农民代代相传着这样的观念，仍然有关于蜂王的

传说。

读者可能会对这些伊斯兰教著作中明显的矛盾（和双重思考）感到困惑，这是可以理解的。然而，这些可以理解为以下几点。大多数（如果不是所有）文化最初都相信有蜂后而不是蜂王--这只是自然现象：他们清楚地认定最大的蜜蜂，例如 "统治者"，其体型比蜂巢中的任何其他蜜蜂都大得多，在蜂巢中没有明显的同等体型或重要性，只是所有蜜蜂的 "母亲"。由于母性永远是显而易见的，而父性则永远难以建立或完全理解，这只是自然而然的普遍现象。亚里士多德将是第一个写下有性繁殖机制的人（据我们所知）。"蜂后 "的普遍性可以从各种文化的引用中得到证实。仅举几例。

1. 希腊神话（在亚里士多德之前）相信 "蜂后 "的至高无上地位。
2. 印度古代吠陀著作中的一段话叫 Prashnopanishada [Upanisads,1884/1963,2/15]，时间大约在公元前500年，也提到了 "蜂后"。
3. 旧约（或犹太教《塔纳克》）中提到的女战士底波拉是一位统治者，其名字的意思是 "蜂后"。

此外，AbiDhu'ayb的诗歌证实了阿拉伯半岛的人们也相信有蜂后，直到伊斯兰教的兴起（很可能到8世纪）。最初，每个人都相信有一个 "蜂后 "或 "蜂母"，但由于继承了亚里士多德的观念（很可能加上阿拉伯文化的父权制观点），促使穆斯林学者相信有一个蜜蜂 "国王"。然而，现实生活中养蜂业的不断发展迫使人们对这些观念进行了严格的修正。随着穆斯林正统原则的放松，这些修订最终被公开承认，因为他们被允许这样做。

总结一下：从亚里士多德到贾希兹，人们从男性居多的蜂巢变成了女性居多的蜂巢，在更短的时间内，从贾希兹到他的继任者，人们从男性主导的蜂巢变成了女性主导的蜂巢。这种情况是如何发生的，为什么会发生？这个问题的答案不能只停留在阿拉伯半岛的这些著作中。阿拉伯半岛的产蜡量（是蜂蜜产量增加的安全标志）直到15世纪才被提及。

录像

日期为Djer的珠宝，第一王朝， Abydos

有21片花瓣的皇冠菊花

图4.埃及Djer手镯：以花射线为模型。部分由Graham Oaten提供。这种手镯有很多图纸，有些图纸上有22个而不是21个花瓣（射线）。

Al-Maqrˆızˆı的作品，而贝贾亚的蜡像技术在Fi-bonacci的时代（11至13世纪之间）已经非常成熟。这清楚地表明，要回答这个问题，必须在阿拉伯半岛之外寻找答案。

到7世纪末，伊斯兰教在北非马格里布的传播几乎被一位被称为卡赫纳的犹太-柏柏尔女王[Beauguitte,1959]所阻止，她领导了一个由努米德人、摩尔人、犹太人和包括罗马人和埃及科普特人在内的基督徒组成的军事联盟。她被视为第二个 "德博拉"，成为激烈的独立的模式和象征。

阿马兹格妇女[15].虽然卡赫纳女王遭到了失败，但这种文化（及其蔑视）的残余到12世纪仍然存在，而且对伊斯兰教规的抵制将继续下去，例如，对妇女着装的伊斯兰教法规的违反[Libas,1986,742-246]。Almohad或Almoravid柏柏尔统治者都不承认巴格达哈里发的权威。这些 "文化 "缺陷和独特性的一些后果至今仍然存在[16].在许多方面，北非的柏柏尔文化比阿拉伯半岛的文化更先进。此外，从10^{th} 世纪左右开始，阿拉伯人逐渐失去了控制力，伊斯兰教变得四分五裂。到莱昂纳多-德-比萨的时候，伊斯兰教各个领域之间的交流大大减少。

在斐波那契时代，马格里布是西班牙安达卢西亚文化和埃及东部文化之间的 "走廊"。蜜蜂养蜂业始于埃及，向西传播到北非，并通过克里特岛传播到希腊[Graves,1990，I:82.6]，其发展程度远远超过罗马甚至希腊[Crane,1983]。

3.3.1. 古代埃及

由于Amazigh蜜蜂养蜂业起源于古埃及，自然会产生以下问题：埃及人知道斐波那契数吗？为此，我们提到Graham Oaten指出的一条线索：古埃及的艺术家们观察并复制了自然界的图案，制作了一些令人惊讶的艺术品。特别是，我们引用了一个金手镯[Kantor,1945]，在阿比多斯的一个国王墓中发现的，大概属于Zer（或Djer）的一个女王，可以追溯到第一王朝（大约公元前3000年）。该手镯目前在开罗的埃及博物馆中。这条手链是由一个金质的玫瑰花瓣为中心，类似于现代手表的设计。这个花环的花纹（估计是菊花）正好有21条射线！如图4所示（21是斐波那契数）。[17].无论这个花环是否

[15]北非柏柏尔人部落，具有强烈的母系元素。有些人将这些部落的w omen与亚马逊人的神话联系起来。

[16]例如，在被称为图阿雷格的北非柏柏尔人部落中，戴面纱的是，而不是妇女。.

[17]我们必须指出，许多参考文献中对这种花卉图案的手工复制是不正确的，因为它显示的是22条射线而不是21条。然而，对原始手镯图片的详细检查（例如，见[Smith,1981,p45m]）表明，射线的数量确实是21条，这表明，在中国的艺术家们是多么仔细地忠于自然。

埃及人对斐波那契数或黄金数的了解是一个争议不断的话题。有些人如Axel Hausmann声称古埃及人知道斐波那契数和卢卡斯数（相同的递归公式，但起点不同），他认为斐波那契数嵌入了亚琛市政厅（"die Rathaus"）的原始结构中，该市政厅大约建于9世纪[Hausmann,1995]，是查理曼的住所。然而，大多数学者仍然拒绝相信古埃及人知道这些数字，尽管最近C.Rossi对得出任何结论感到犹豫[Rossi,2004]。我们并不是说古埃及人发现了斐波那契数，但考虑到它们在自然界的普遍存在，他们很有可能记录了表现这些数字的自然现象。

由于Helene Hagan[Hagan,2000]在阿马齐格历史、民俗和词源方面的研究，我们可以了解到与贝贾亚的联系。事实上，蜂后女神的概念在阿马齐格柏柏尔人的民间传说中非常突出，可以追溯到埃及前王朝时代的古时期。这并不奇怪，因为埃及最初是他们养蜂文化的来源。在北非的山区，人们仍然在节日中崇拜这位蜜蜂女神。有各种迹象表明，卡比勒-阿马兹格人显然理解了3人蜜蜂的铸造。然而，与这项研究有关的实际细节和影响（其中一些仍在进行中）太大，无法在此详细讨论。这本身至少需要一篇文章。然而，我们可以提到一些识别方法。例如，"tammnt "这个词的意思是蜂蜜，存在于古埃及的词汇中，而且这个词今天在整个柏柏尔地区使用。这个词本身就很能说明问题，因为它跨越千年和数千英里而持续存在。无论是在古埃及语还是在阿马兹格语中，它都是阴性的。

3.3.2. 中世纪的天主教---Exultet卷轴

"处女诞生 "的概念，可能与观察到的雄蜂无人机由未受精卵产生有关，也可以在《古兰经》中找到，其中提到了耶稣的诞生。接受孤雌生殖的做法有助于

古代埃及。

图5.巴贝里尼颂歌卷。 蜜蜂的赞美》。Biblioteca Vaticana (Vatican City), Cod.Barb.Lat.592.

穆斯林将耶稣的诞生合理化为不寻常的事情，但也是可能的[18]在没有基督徒与耶稣本人相关的 "神圣的父亲 "的情况下[19].托莱多的马克（Mar- cus Toledanus）是西班牙托莱多司各脱的同事[Burnett,1994,2,101-126, p.104]，他将《古兰经》从阿拉伯文翻译成拉丁文，并在公元1210年左右完成[Burnett,1994,2,101-126]。

"处女诞生 "的主题是Exsultet或Exultet或复活节宣言，这是一首赞美诗，在被称为复活节守夜的仪式中，在受难日（或复活节蜡烛）前唱起。萨勒诺的赞美诗卷大约制作于12世纪，其中有一节名为 "蜜蜂的赞美"，描述了中世纪养蜂的迷人画面。文中不仅颂扬了蜜蜂从花中生产蜂蜜和蜡的神奇技能，而且还颂扬了它们被誉为引领天主教信仰的基督圣母诞生的贞操。关于Exultet卷的起源问题还没有完全解决[Kelly,1996, p.206]。有些人认为一种可能性是奥古斯丁的后裔，他本人是北非人。其他人则认为是拜占庭的影响，时间不早于10世纪。在本笃会蒙特卡西诺修道院（意大利）制作的巴贝里尼（Barberini Exlutet）卷轴，日期大约在公元1087年，也有对蜜蜂的赞美，如图5所示。

3.4. 证据的集合

在这个阶段，保守的读者，特别是有数学头脑的人，可能会感到被这种奇怪的数学、"魔法 "和宗教信仰的混合物所困扰。然而，正如前面所解释的，这是斐波纳契时代的一个特点[20]我们必须尝试遵循导致其结果的思维模式（无论它可能看起来多么有问题或有缺陷）。重申一下，到目前为止，我们有以下已知的事实。

- 斐波纳契将他的*Liber abaci*献给迈克尔-司各脱，尽管

---

[18]当然是在真主的帮助下。请注意，与基督教信仰相反， 穆斯林认为耶稣是没有父亲的。

[19]毫无疑问，怀疑论者会声称这是合理化或 "在事实之前 "的重新解释，但这不是重点：底线是一个关于 "合理化 "究竟多快完成的问题。

[20]如果有人坚持，现代人的观点会认为，中世纪的许多思维是不严谨的。如

前所述：科学事实与错误信息、迷信和宗教信仰并存。

腓特烈二世皇帝是他的赞助人（这表明他对司各脱的某种承认债务）。

- 贝贾亚的蜂蜡 "技术 "在当时很发达，贝贾亚是通过斐波那契工作的皮桑贸易殖民地的一个主要的蜡的出口地。

- 我们的分析（证据C）表明，贝贾亚的知识和商业文化刚刚达到成熟的水平，能够在中世纪计算和表征蜜蜂的祖先。

- 蜜蜂的祖先模型*完全符合*斐波那契数列，但后者*并不*代表兔子繁殖的真实物理图景，斐波那契最初在*Liber abaci*中提出了他的序列。

- 已经确定Fi-bonacci的*Liber abaci*中的许多代数问题都是穆斯林学者的数学成果翻译成拉丁文的（伪装得很好）。这些翻译是在欧洲进行的。

- 司各脱写了关于蜜蜂养蜂的文章，他的资料是穆斯林和亚里士多德的。

- 斐波那契时代的一个主要翻译 "学校 "是在西班牙卡斯蒂利亚的托莱多，1220年前司各脱在那里办公。特别是，司各脱翻译了亚里士多德的动物学作品。

- 中世纪穆斯林养蜂人的基本观念在《古兰经》中得到了表达，《古兰经》被司各脱的同事马库斯-托利达努斯翻译成拉丁文。

- 蜂蜡是神职人员对蜡烛的大量需求。Michael Scotus和Marcus Toledanus为教会工作，因为他们都与托莱多的大教堂有关[Burnett,1994,2,101-126]。

我们认为，这一切可能不仅仅是一个不寻常的巧合，这些不同的事实可能反而会组合成一个拼图，其图像变得清晰。

这里提出，斐波那契数列是在一个生殖模型的框架内产生的，来自
于

在北非贝贾亚的知识和商业文化。还有人认为，这涉及到他和迈克尔-司各脱（Toledan trans-lation学派内）之间的合作，因为他们把穆斯林的学术成果翻译成了拉丁文，并进行了信息交流。

斐波那契自然专注于数学方面，而司各脱则对生物方面感兴趣。这本身就为斐波那契数列提供了一个合理的起源，也为斐波那契在其*Liber abaci*中对司各脱的奉献提供了一些原因。

3.5. "展品D"--斐波那契数与古希腊

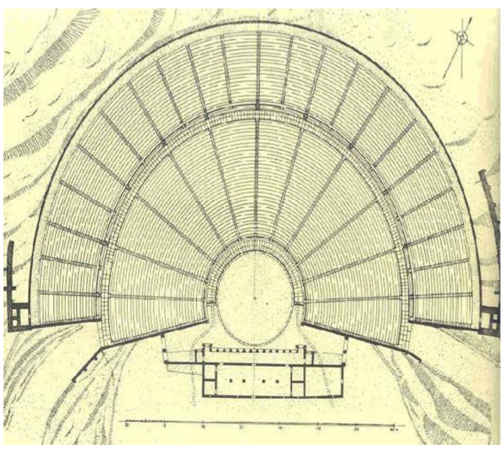


图6.阿尔戈利斯的埃皮达罗斯剧院的平面图。

我们的猜想中的一个重要含义是，如果希腊人克服了亚里士多德的错误解释并承认孤雌现象，那么斐波那契数就有可能早在亚里士多德时代就在蜜蜂繁殖模型的框架内得到。乍一看，这似乎很不寻常，因为到目前为止，我们还没有发现这种发现的直接书面记录。我们知道斐济的

博纳奇数列出现在更早的时候，在印度数学中，与梵语音律有关。[Singh,1985,12-3,229-44, Knuth,2006,4,100, Knuth,1968,1,100]但是在音乐的背景下。然而，在希腊有建筑证据（从希腊化时期开始）表明，古希腊人毕竟知道斐波那契数。这些证据可以通过参观阿尔戈利斯的Epidaurus剧院[Charitonidou,1978, p.38-47]，[Iakovidis,2001, p.130-133]（可追溯到希腊时期）看到，如图6、7a和7所示。图6显示了剧院的平面图。最明显的斐波那契数字的出现是，剧院由34行和另外21行组成（图7a和7b），大约建于公元前2世纪。21和34都是斐波那契数字。希腊作家Ϭημητρης

Τσιμπουράκης（Dimitris Tsimpourakes）强调了这方面的内容

(a) 低层：34排座位。 **(b)** 上层：21排座位。

图7.埃皮达罗斯剧院。图片由T.C. Scott拍摄，2003年12月。

[Tsimpour'akhs,1985, p.231]。他对数学和建筑感兴趣，认为古希腊人试图在希腊建筑中注入 "和谐"，这与帕特农神庙的做法很相似，斐波那契数字34和21之间的比率提供了黄金数字的近似值。

$$\frac{34}{21} \approx 1.619 \approx \varphi \qquad (11)$$

在 Arnim von Gerkan 和 Wolfgang Muller-Wiener[Gerkan&Muller-Wiener,1961]的细致分析中，对连接剧院各排座位的过道的线条进行推断，发现了两个背对背的*黄金三角*，即由黄金数平衡的三角形。这两个三角形的形状为<*J*和*1*>，共同构成了一个位于五边形中心下方的钻石形状，如图8所示。Gerkan的这个构造考虑到了轻微的不规则性和不对称性，可能是由过去2500年的地壳震动和地面运动造成的。每个黄金三角都是一个等腰三角形，其中顶角为。

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{5} = 36^{\circ} \qquad (12)$$

因此，基座的角度是72°。人们完全可以把这看作是这些古代建筑师留下的一

个信息!

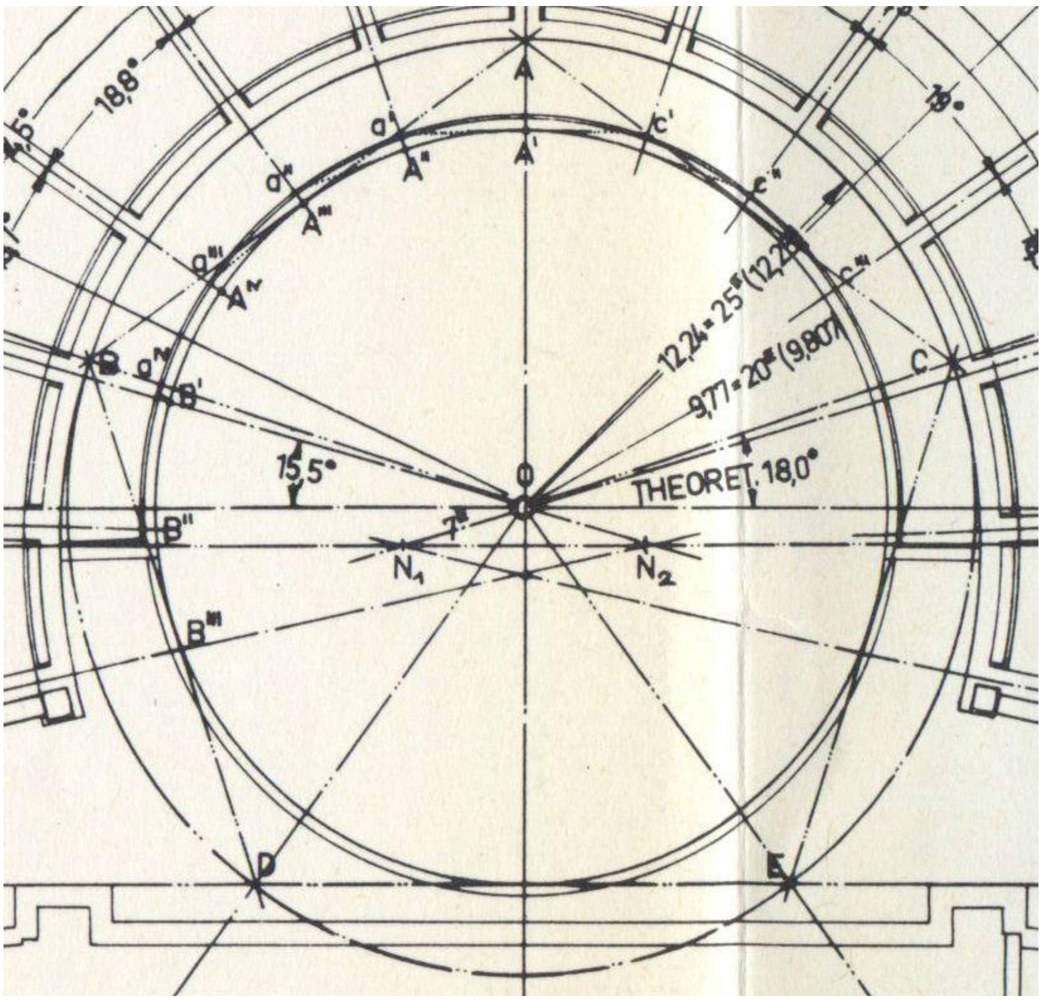
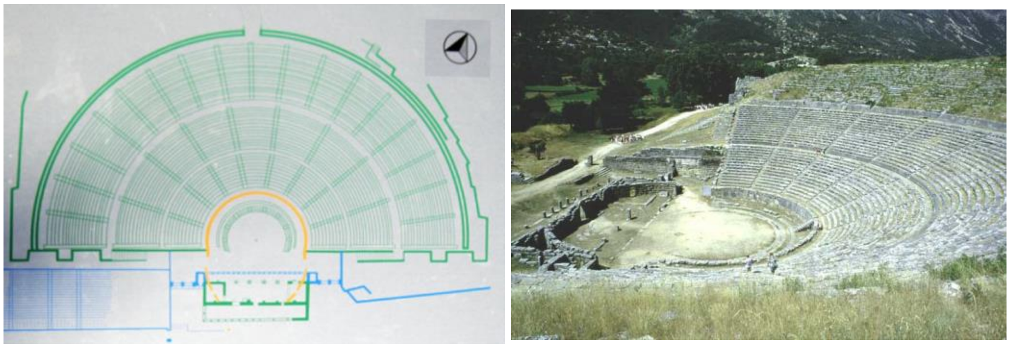


图8.摘自[Gerkan&Muller-Wiener,1961]，埃皮达罗斯剧院中心附近的黄金三角。



(a) 计划。 **(b)** 图片。

图9.多多纳剧院。

Tsimpourakas还引用了嵌在希腊北部伊庇鲁斯的多多纳剧院内的数字19、15和21（9a和9b），虽然说服力不强，但这可能是用来接近黄金数字。

$$\frac{19+34+2119+15}{19+15}\ \frac{}{21} = \frac{34}{21} \approx \varphi . \qquad (13)$$

在这种计算中，斐波那契数字21和间接34=19+15ap- pear。然而，在研究多多纳剧院的平面图时，这个案例可以变得更有说服力一些。我们看到，十个径向楼梯将涉及前两组19排和15排的Koilon分成9个*cunei*（层或楔形座位）。21行的上部有中间的楼梯和18个*cunei*或层。它还通过一条较宽的舷梯与下面的34排座位分开。因此，剧院的设计表明，前两组19排和15排形成了一个近乎连续的组合。虽然这可能只是巧合，但19/15的比例非常接近于黄金数的平方根，即φ 1.27 $- \approx$ ......。这个比例让人联想到埃及的三角形，据称它被嵌入大金字塔的比例中[Tsimpour'ahhs,1985]，考虑到历史学家希罗多德引用的多多纳和埃及之间的神话联系，这并不令人惊讶。多多纳神谕是由埃及底比斯的两位女祭司建立的，她们被腓尼基人绑架，变成了两只黑鸽子。这两位女祭司是*Peleiades*，她在利比亚建立了位于Siwa绿洲的宙斯-阿蒙圣地，并被Amazigh/Kabyle的传说[Hagan,2000]和多多纳的橡树崇拜所引用。

如前所述，正如欧几里德和毕达哥拉斯的作品所证明的那样，希腊人知道黄金比例φ（3），它可以表示为根。

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \tag{14}$$

接下来，如果我们将方程（14）乘以φ本身，我们得到。

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\,\varphi + 1 \tag{15}$$

其中φ^2被替换成（14）的右侧。如果我们再把（14）乘以φ^2，并使用（15）。

$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = (2\,\varphi + 1) + (\varphi + 1) = 3\,\varphi + 2 \tag{16}$$

同样地。

$$\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = （3\,\varphi + 2） + （2\,\varphi + 1） = 5\,\varphi$$
$$+ 3\,\varphi^6 = \varphi^5 + \varphi^4 = （5\,\varphi + 3） + （3\,\varphi + 2） =$$
$$8\,\varphi + 5\,\varphi^7 = \varphi^6 + \varphi^5 = （8\,\varphi + 5） + （5\,\varphi + 3$$
$$） = 13\,\varphi + 8$$
$$\varphi^8 = \varphi^7 + \varphi^6 = （13\,\varphi + 8） + （8\,\varphi + 5） = 21\,\varphi + 13 \tag{17}$$

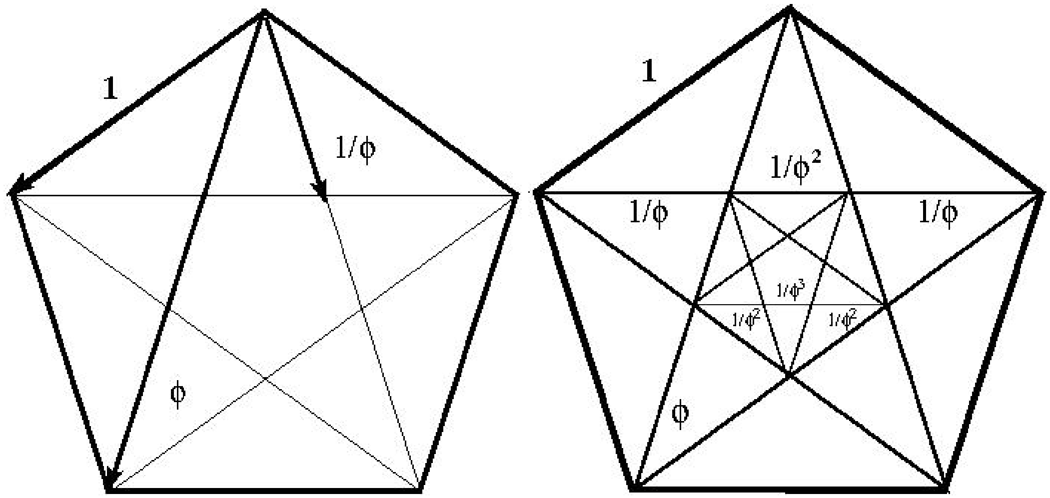
. .

人们可以从这些方程的右侧注意到，φ^n，可以用φ和斐波那契数以及递归过程本身*线性地写*出来。诚然，这个推导是*代数式的*（穆斯林可以算出来的），而不是几何式的（希腊人也会遵循几何式的论证）。问题是：希腊人是如何通过几何手段产生斐波那契数的？在下文中，我们概述了一个几何推导，以回答这个问题。

通过研究黄金分割[Bicknell&Hoggart,1969,7,73-91]，我们可以从几何学上建立一个高达φ^4的关系。[21]自从毕达哥拉斯数学学派的成员希帕索斯（公元前5^{th}世纪）发现了非线性数以来，在不可比性或非理性的范围内

---

[21]传说毕达哥拉斯的弟子们在海上，希帕索斯被扔到了海里，因为他在宇宙中产生了一种元素的 "异端"，这种元素否认了毕达哥拉斯的学说，即宇宙中的所有现象都可以还原为整数或其比率[Kline,1972/1990]。



(a) 五角形和内五角星。　　　　　　(递归创造五角形。

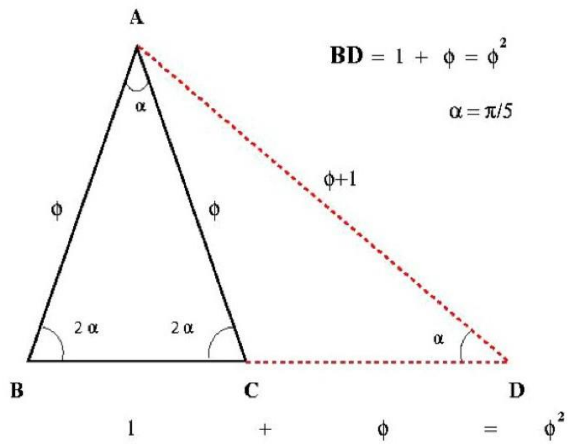
图10.毕达哥拉斯。递归使用五边形自然平衡的黄金数。

在五边形或五角星（毕达哥拉斯学派本身的象征）的对角线中，黄金比例φ起着至关重要的作用。通过观察一个五边形和由其所有对角线组成的五边形，人们可以看到其不可比性（非理性）。如图10a所示，五边形的对角线和它的边之间的比率等于φ。通过在图10a中插入越来越多的对角线，我们可以得到五边形被分成更小的部分，如图10b所示。请注意，每个较大（或较小）的部分都与φ比率有关，因此自动产生了黄金比率的幂级数，并将其提升到连续的高（或低）幂：φ，φ^2，φ^3，φ^4，φ^5，等等。。以这种方式，（17）中的推导可以找到它们的几何等价物。

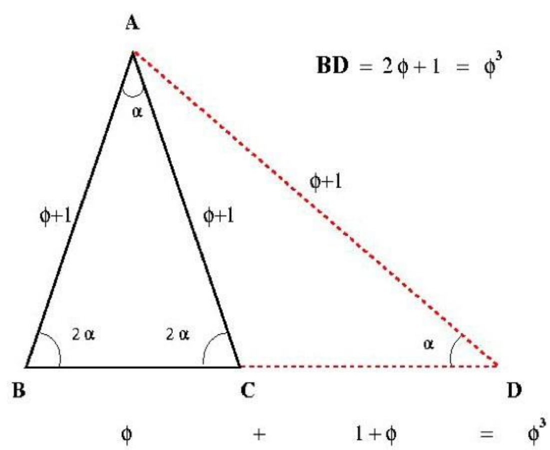
要证明这一点，最简单的方法是首先考虑图11a中的结构。在该图中，三角形ABC是等腰三角形；换句话说，*AB*和*AC*的距离相等，ABC和ACB的两个角也相等。*AB*和*AC的*长度等于黄金数φ，*BC*的长度为一。角ABC和ACB各等于角BAC的两倍。三角形内的三个角之和等于180度或π弧度；因此，角BAC等于36度。

或 $\frac{\pi}{5}$ 弧度。后者用现代术语表示，但仍为

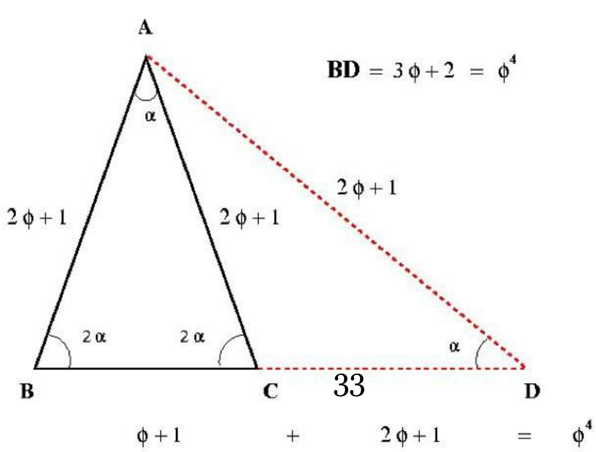
希斯[Heath,1931]提到，毕达哥拉斯人知道



(a) 第一个三角区



(b) 第二个三角区



(c) 第三个三角区

图11.斐波那契数的几何推导，通过连续的金三角。

三角形内的角等于两个直角之和。

由于$AC=CD=\varphi$，根据结构，三角形ACD也是等腰的，因此CDA和DAC的角度是相等的。由于$CD=AB$，我们有。

$$\frac{CD}{BC} \qquad \frac{AB}{BC} \tag{18}$$

角度ACB和DCA是互补的，因此它们的总和等于180度或π弧度。根据结构，角DAC等于36度。因此直线AC与角BAD平分。此外，由于角DAB和ABC是一样的（对现代读者来说等于72度），三角形ABC和DAB是*相似的*，因为它们各自的角是相等的。也就是说，原来的等腰36 72度的三角形ABC嵌入了第二个等腰36 72度的三角形DAB，并与之相似。由于两个相似的三角形的边位于相等的角的对面，所以是成比例的。

$$\frac{AB}{BC} \qquad \frac{BD}{AB} \tag{19}$$

通过结合（18）和（19），并使用$AB=CD$，我们得到

$$\varphi = \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BD \; \bar{\bar{A}}}{AB} = \frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{A}}}{CD} \tag{20}$$

如果我们让$BC=1$，那么$CD=\varphi$，因为$CD/BC=\varphi$，$BD=BC+CD=1+\varphi$。将BD和CD的值代入20中，可以得到。

$$\frac{\varphi}{1} \quad \frac{1+\varphi}{\varphi} \quad \text{即} \quad \varphi^2 = \varphi + 1 \tag{21}$$

这是一个方程，其正根定义了黄金比例。

我们现在重复这个练习，这次是把外面的等腰三角形DAB拿出来，让它扮演第一个等腰三角形ABC的角色（图11b）。在 "新的 "等腰三角形ABC中，$AB=AC=\varphi^2=\varphi+1$，$BC=\varphi$。在这个三角形中，我们现在把与等于$\alpha$*的*角相

对的边BC延长一个长度CD，等于$\varphi^2=\varphi+1$。由于图11b中的角与图11a中的角相等，类似的分析是

导致与方程（16）和（17）中表达的比例相同。特别是，从方程（20）中概括出来。

$$BD = BC + CD = \varphi * CD \tag{22}$$

通过外侧等腰三角形的构造，总长度BD由以下公式给出

$$BD=BC+CD=\varphi+（\varphi+1）=2\varphi+1 \tag{23}$$

然而，从方程（22）来看，长度BD满足于

$$BD = \varphi\ CD = \varphi * (\varphi^2) = \varphi^3 \tag{24}$$

因此

$$BD = \varphi^3 = 2\varphi + 1 \tag{25}$$

这确实是方程（15）。

我们现在再迭代一次（图11c）。在 "新 "等腰三角形ABC中，$AB=AC=\varphi^3=2\varphi+1$，$BC=\varphi^2=\varphi+1$。我们重复我们的练习，从点C到点D画一条线，这次的距离$CD=\varphi^3 = 2\varphi + 1$。在这种情况下，使用方程（22）可以得到

$$BD = \varphi\ CD = \varphi * (\varphi^3) = \varphi^4 \tag{26}$$

此外，从外部等腰三角形的构造来看

$$BD=BC+CD=（\varphi+1）+（2\varphi+1）=3\varphi+2 \tag{27}$$

因此

$$BD = \varphi^4 = 3\varphi + 2 \tag{28}$$

这确实是方程（16）。上述特征是经过两次迭代得到的。再重复一次这个练习，可以得到

$$BD = \varphi^5 = 5\varphi + 3 \tag{29}$$

再重复一下几何结构，就可以得到

$$BD = \varphi^6 = 8\varphi + 5 \tag{30}$$

如(17)。斐波那契数21和34现在又在三次迭代的范围内。因此，从一个等腰

三角形的嵌入开始

黄金分割率，一个等腰三角形的*递归*嵌入到更大的和类似的等腰三角形中，再现了从上一小节的代数推导中得到的结果。这种方法被称为*Gnomon*，据说毕达哥拉斯人知道如何将这种方法用于等腰三角形[Thompson,1992，p.761-763]。可以证明这些等腰三角形的递归嵌入会产生一个对数螺旋，但这不属于目前的研究范围。

请注意，到目前为止所采用的递归方法是基于较大三角形的构造。也可以采用逆向递归的方法，即从图11a的外部三角形出发，将角DAB平分，形成内部等腰三角形CAB。特别是对五边形和图11b的分割所造成的较小部分的研究表明，这些部分的主要 "建筑 "块的确是三角形。因此，我们在这里遵循的分析类型可以适用于这些逐渐变小的部分。请注意，五角星正是毕达哥拉斯学派的*象征,* 该学派除了是一个数学学派之外，还是一个神秘的秘密社团。毫不奇怪，几个世纪以来，这个符号的使用往往与神秘主义和巫术有关。

我们的几何推导利用了欧几里德元素第四册中的知识。根据Heath[Heath,1956,2]的说法（特别是与命题9和10有关的评论），这些知识可以追溯到毕达哥拉斯学派，因此可以说是在埃皮达罗斯的剧院建造之前。古希腊数学家总是对满足审美要求的各部分之间的关系感兴趣，而黄金分割率的作用在这一背景下是非常重要的。因此，我们声称，本节所介绍的几何结构是他们所知道的。为了看到不可通约性，希腊数学总是对各部分之间的关系感兴趣。换句话说，希腊数学家经常试图用有理数来逼近无理数。因此，他们一定知道（17）中的方程。这些可以用递归关系的形式来表达。

$$\varphi^n = \varphi\, a_n + b_n \tag{31}$$

其中a_n 和b_n 是整数。古希腊数学家很可能只研究了斐波那契数列的前几个成员，但剧场

在Epidaurus的研究表明，他们意识到了8^{th} 的力量，即34，从石头上的信息来看，很可能甚至达到了10^{th} 的力量（相当大的成就！）。一般来说，很容易证明a_n 和b_n 是斐波那契数，因为(14)乘以φ^n 得到。

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \tag{32}$$

结合(31)，可以得到a_n 和b_n 的斐波那契递归公式，即$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，类似地，b_n 。这就完成了基于我们对希腊人所能证明的 "现代化 "版本的证明。

因此，我们可以确信，古希腊人已经知道斐波那契数，而且这种知识很可能已经传给了穆斯林。事后看来，这并不奇怪：他们都知道黄金分割线φ，从那里，偶然发现斐波那契数列只是时间问题。然而，我们不能忘记，我们关于希腊思想的最后一次展示，是*几何学的*。斐波那契自己提出的斐波那契数，来自于生物繁殖模型--正如我们所称--也是他通过这样的模型发现的。这更接近于之前提到的古埃及珠宝中的植物图案。无论如何，考虑到斐波那契数字无处不在的性质和穆斯林的代数知识，其中任何方程的 "未知 "x可以脱离几何解释，成为代表任何东西的数字，考虑到蜜蜂养蜂业明显的商业推动力，贝贾亚的知识精确到我们至少知道斐波那契序列中的一些术语是在蜜蜂的祖先和繁殖方面。

4. 结论

到目前为止，我们对斐波那契数的起源提出了一个合理的猜想，符合已知的历史和数学事实。该猜想指出，斐波纳契直接从贝贾亚的知识和商业文化中获得了数列，在公元1202年之前，他曾驻扎在贝贾亚的成长时期。这个猜想进一步表明，斐波纳契与托利丹翻译 "学派 "的一些成员合作，特别是迈克尔-司各脱，他的*Liber abaci*修订版就是献给司各脱的，他的著作和译文中包含了这个序列的重要痕迹。

合作。此外，斐波那契的奉献也可能是为了确保斐波那契的书在基督教欧洲得到批准，因为迈克尔-司各脱当时与教皇当局关系良好[Thorndike,1965, p.1]。直到后来，司各脱才被贴上了巫师的标签。考虑到这里介绍的历史和数学数据，这个猜想是可信的。

从历史和年代的角度来看，有一个问题涉及到司各脱和斐波那契如何以及何时首次会面以实现这一合作。这个讨论不在本调查的范围内。然而，这只是一个小问题，因为对这一猜想最重要的批评之一是对贝贾亚居民在中世纪就能研究出蜜蜂的祖先的可能性持怀疑态度。这种怀疑是可以理解的，因为遗传学只是在19和20世纪才得到发展。为了解决这个问题，我们必须指出，尽管现代遗传学完全解释了蜜蜂的祖先，但实际上没有必要为了了解蜜蜂的祖先而诉诸于此。亚里士多德在2000多年前对蜜蜂养蜂业和蜜蜂有性繁殖的观察，加上对与（母系）3人蜜蜂种姓系统有关的性别的认识，足以使人们认识到，蜜蜂的幼虫是由未受精卵产生的。这反过来又使人们能够将蜜蜂的祖先制成表格，并获得斐波那契序列。从图论的角度来看，这个过程足以建立图3b的蜜蜂 "家庭树 "的树节点之间的关系。

事后看来，这篇文章中的猜想是合理的。鉴于斐波那契数字在自然界中无处不在，尽管有书面文件被丢弃或丢失的问题，但早在莱昂纳多-德-比萨本人之前，就有人观察到它们的存在，这并不奇怪。在Aby- dos的国王墓中发现的金手镯（图4）就证明了这一事实。围绕着埃皮达罗斯剧院的证据，其中嵌入了斐波那契数字，有力地表明古希腊人也意识到了这些数字。正如我们所描述的那样，这些数字也来自于古希腊人可以使用的数学操作。黄金数和斐波那契数列是密不可分的数学实体，对一个的了解最终会导致另一个。我们已经提到了四个不同的地点和时期，其中

至少对一些斐波那契数字的认识是显而易见的。按确定性排序，我们提到了
。

1. 公元前500年左右的古印度的音乐。
2. 西元1200年左右，阿尔及利亚的贝贾亚开始养蜂。
3. 公元前2世纪左右的古希腊建筑。
4. 第一王朝时期的古埃及，大约在公元前3000年，用于珠宝的植物图案
。

我们并不是说这四个地方的斐波那契数的成员的知识一定来自于其他任何地方，只是说斐波那契数列的普遍性使得它们可以在不同的时间和不同的背景下在各种独立的地方被发现。仅仅对贝贾亚的蜜蜂祖先的了解，就足以让莱昂纳多-德-比萨发现它们。

我们现在来看看影响开普勒制定开普勒定律的思想潮流。毕达哥拉斯式的数学及其对黄金数和自然界、艺术和音乐中无处不在的数字的了解，以及嵌入到古希腊建筑中的数字，如Ep- idaurus剧院，由斐波纳契通过他著名的兔子繁殖模型重新发现。这种知识很可能通过货物、服务和思想的走廊在中世纪通过北非传到欧洲。我们在本文中认为，在这种知识产生的肥沃环境中，反映蜜蜂 "家族树 "的繁殖模型很可能直接影响了莱昂纳多-德-比萨，从而促成了斐波那契数列的产生。

鸣谢

我们要感谢Graham Oaten的宝贵帮助和贡献，使本文得以完成；感谢亚琛工业大学的Arne [illegible] Johannes Grotendorst和Bernhard Steffen（J[illegible]超级计算中心先进模拟研究所），以及Therani Sudarshan（自由软件顾问）。我们还要感谢利摩日大学的Abdelkader Necer教授的有益见解。特别感谢Frederick Gould, Sue Peppiat, V´eronique Reynier, Silke Acker- mann,

Charles Burnett, Michel Beggh, Anthony Waterman, Anthony Pym, Marc Rybowicz, Carlos Klimann, Ron Knott, John Delos, Kent Nickerson。

Leonard Bradfield、Andrew Zador、David Harper、Greg Fee、Axel Hausmann、INRIA-Lorraine的Philippe DeGroot和Prue Davison，感谢他们的宝贵帮助和富有成效的讨论。最后，T.C. Scott要感谢*Maison des Sciences de l'Homme的*成员，允许他进入他们在巴黎的图书馆。

参考文献

[Aristotle,1995,1-11] 亚里士多德，1995年。动物的产生，《亚里士多德全集》第1卷第11册，普林斯顿。

[Arkin,1965,3,139-142] Arkin, J., 1965.使用多项式的梯形网络分析, Fibonacci Quarterly, **3**, issue 2, pp.139-142.

[Arnold,1983] Arnold, D., 1983.The New Oxford Companion to Music, Oxford Univ. Press; 2 Volume Set edition.书名：0193113163。

[Basin,1963,1,53-57] Basin, S.L., 1963.Fibonacci Quarterly, **1** pp.53-57.
还有。

Bruce, A., 1998.Micscape杂志，编辑。D. Walker。见：
http://www.microscopy-uk.org.uk/mag/artsep98/fibonac.html

[Beauguitte,1959] Beauguitte, G., 1959。La Kahina, reine des Aur`es, 巴黎。作者编辑。

[Bicknell&Hoggart,1969,7,73-91] Bicknell, M., and Hoggatt,V.E. Jr., 1969.黄金三角、矩形和立方体，**7**，Fibonacci Quarterly，第73-91页。

[Brett&Fentress,1997] Brett, M. and E. Fentress, E., 1997。柏柏尔人》，布莱克韦尔出版社，牛津。

[Brown,1897] Brown, J.W., 1897.对迈克尔-斯考特的生活和传说的调查，爱丁堡。

注意：虽然这本书在当时提出了关于迈克尔-斯考特的前所未有的信息量，但必须谨慎使用。

[Burnett,1994,2,101-126] Burnett, C., 1994.迈克尔-斯考特和科学文化从托莱多到博洛尼亚的传播，通过弗雷德-埃里克二世-霍亨斯陶芬的法庭，Micrologus。中世纪的自然、科学和社会》(Natura, scienze e societ`a medievali)

(自然、科学和中世纪社会)，Le scienze alla corte di Fed- erico II（腓特烈二世宫廷的科学），2，101-126页。

[Burnett,1996] Burnett, C., 1996.中世纪的魔法和占卜。伊斯兰和基督教世界的文本和技术，Variorum，汉普郡奥尔德肖特。

[Burton,1985] Burton, D.M., 1985.The History of Mathematics:An Introduction, Allyn and Bacon, 3rd ed., Boston, ISBN 0-697-16089-0.

[Charitonidou,1978] Charitonidou, A., 1978.埃皮达罗斯：阿斯克勒庇俄斯的圣地和博物馆，CLIO出版社，（英文版），ISBN：960-7465-20-2。

[CHS,1971] 《科学传记词典》，1971年。Charles Scribner's Son, New York.

[Collins,2011] Donald Collins, 2011.蒙娜丽莎和斐波那契松果，沃伦威尔逊学院物理系。见。
http://www.warren-wilson.edu/ physics/PhysPhotOfWeek/2011PPOW/20110225FibonacciPinecone/

[Cook,1979] Cook, T.E., 1979.生命的曲线》，多佛，纽约。ISBN：048623701x。

[Coolidge,1990] Coolidge, J.L., 1990.The mathematics of the Great Amateurs, Oxford Univ. Press, ISBN: 0198539398.

[Crane,1983] Crane, E., 1983.养蜂业的考古学，伦敦鸭子的价值。还有。
http://sphakia.classics.ox.ac.uk/beeconf/crane.html

[Curl,1968,6-4,266-274] Curl, J.C., 1968.斐波那契数和慢速学习者，斐波那契季刊，**6**，4期，第266-274页。

[Dampier,1966] Dampier, W.C., 1966.A History of Science, Cambridge University Press.

[Decker&Hirshfield,1992] Decker, R. and Hirshfield, S., 1992.Pascal's

Tri- angle: 阅读和推理程序， Thomson Learning， ISBN：0534161766。

[Falconbridge,1964,2,320-322] Faulconbridge, A.J., 1964.Fibonacci Summation Economics:Part I and II, Fibonacci Quarterly, **2**, issue 4, pp. 320-322, and 1965.Fibonacci Quarterly, **3** issue 4, pp. 309-314.

[Gerkan&Muller-Wiener,1961] Gerkan A.V. and Muller-Wiener, W., 1961.Das Theater von Epidauros, W. Kohlhammer Verlag, ASIN:B0019N4MBK。

[Graves,1990] Graves, R. 1990.The Greek Myths, I/II, Penguin, London, ISBN: 0-14-001026-2; ISBN: 0-14-001027-0。

[Hagan,2000] Hagan, H.E., 2000.The Shining Ones - An Etymological Essay on the Amazigh Roots of Egyptian Civilization, Xlibris Corporation, 1st ed., ISBN: 0738825670。见。
http://www.tazzla.org

[Haskins,1927] Haskins, C., 1927.中世纪科学史研究》，第二版，剑桥，马萨诸塞州。

[Hausmann,1995] Hausmann, A., 1995.Aachen-Residenz der Karolinger, Meyer & Meyer Verlag Aachen, ISBN 3-89124-313-8.

[Heath,1931] Heath, T.L., 1931.A history of Greek mathematics, **1**, Oxford Univerity Press.

[Heath,1956,2] Heath, T.L., 1956.欧几里德的《元素》十三册，从海博格的文本中译出，附有导论和评注，**2**，（第三至第九册），第二版，未删节，多佛，纽约，ISBN：0-486- 60089-0。

[Howat,1983] Howat, R., 1983.Debussy in Proportion : A Musical Analysis, Cambridge Univ. Press, ISBN: 0 521 23282 1.
http://www.royhowat.com/pb/wp-852b9538.html

[Iakovidis,2001] Iakovidis, S.E., 2001.米塞纳-埃皮塔鲁斯。Argos-Tiryns-Nauplion, Ekdotike Athenon S.A., Athens, ISBN: 960-213-035-0.

[Jacquart,1994] Jacquart, D., 1994.La physiognomie à l'époque de Fr´ed´eric II: Le trait´e de Michel Scot, Micrologus:Natura, scienze e societ`a medievali (Nature, Sciences and Medieval Societies), Le scienze alla corte di Federico II (Sciences at the Court of Frederick II), *2*, pp.19-37。

[荣格和保利，1952/2012] 荣格，C.G.和保利，W.E.，2012。The Interpreta- tion of Nature and the Psyche, Ishi Press (March 27, 2012), ISBN-13: 978-4871877138, (1952年德文初版为《Naturerklrung und Psyche.C. G. 荣格。C. G. Jung: Synchronizitt als ein Prinzip akausaler Zusam- menhnge.W. Pauli: Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler"）。

[Kantor,1945] Kantor H.J., 1945.植物装饰品。它的起源和发展在古代近东，博士论文，东方语言和文学系，第四章：玫瑰花，芝加哥，伊利诺伊州。

见：http://www-oi.uchicago.edu/OI/DEPT/RA/HJK/HJKIntro.html 其他照片、图画。西里尔-奥尔德雷德，*《埃及到旧王国的尽头》*，1965年。泰晤士和哈德逊，插图120，第59页，纸质版重印（1985）。Emery, W.B. 1961, Archaic Egypt, p. 229, Penguin, reprint (1984).

[Kelly,1996] Kelly, T.F., 1996.意大利南部的埃克斯特》，纽约，牛津大学出版社。

[Kline,1972/1990] Kline, M., 1990.从古代到现代的数学思想》，牛津大学出版社，（参考1990年的3卷版）。

[Knuth,1968,1,100] Knuth, D., 1968.The Art of Computer Programming, **1**, Addison Wesley, ISBN 81-7758-754-4, "在斐波纳契写他的作品之前，序列Fn已经被印度学者讨论过了，他们长期以来对节奏模式感兴趣...Gopala（公元1135年前）和Hemachandra（约1150）都明确提到了数字1、2、3、5、8、13、21[见Singh P., 1985. Historia Math 12, 22944]"。
p.100（第三版）。

[Knuth,2006,4,100] Knuth, D., 2006.计算机编程的艺术》。

4.生成所有的树History of Combinatorial Generation, Addison-Wesley,

p. 50, ISBN 978-0-321-33570-8, "考虑[L]和[S]的所有序列的集合，这些序列正好有m个节拍，这很自然。
恰好是其中的Fm+1。例如，当m=7时的21个序列是。[给出列表]。正如我们在第1.2.8节（从第1节）所观察到的那样，印度的Prosodists通过这种方式发现了斐波那契序列"。

[Lendvai,1971] Lendvai, E., Bela Bart´ok: an analysis of his music, Kahn & Averill.

[L´evy,2000,56,58] L´evy, T., 2000.L'alg`ebre en Europe: enqu^ete sur un h´eritage, L'origine des [illegible] Les Cahiers de Science et Vie, Groupe Excelsior Publications, no.56, p. 58.

[Libas,1986,742-246] 《伊斯兰百科全书》，1986。利巴斯，第742-746

页。[Lowman,1971,9-4,423-426&436] Lowman, E.L., 1971.斐济的一个例子用波纳奇数生成现代音乐中的节奏值, 斐济.
Bonacci Quarterly, **9**, issue 4, 423-426 and 436.

[Lowman,1971,9-5,527-528&536-537] Lowman, E.L., 1971.Some Striking Proportions in the Music of Bela Bartok, Fibonacci Quarterly, **9** issue 5, pp.527-528 and pp.536-537.

[Marcais,1986,1,1204-1206] Marcais, G., 1986.Bidj^aya，《伊斯兰百科全书》，**1**，Leiden，Brill，E.J.，荷兰，第1204-1206页。

[数学世界]帕斯卡尔三角形和斐波那契数列。见：
http://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html

[Norden,1964,2,219-222] Norden, H., 1964.音乐中的比例，斐波那契季刊，**2**，第219-222页。

[Rashed,1994,2] Rashed, R., 1994.Fibonacci et les math´ematiques arabes, Micrologus:Natura, scienze e societ`a medievali (Nature, Sciences and Medieval Societies), Le scienze alla corte di Federico II (Sciences at the Court of Frederick II), 2, pp.145-160。

[Rossi,2004] Rossi, C., 2004.古埃及的建筑与数学》，剑桥大学出版社。ISBN-10: 0521829542, ISBN-13: 978-0521829540.

[RouseBall,1908,p50-62] Rouse Ball, W.W., 1960.A Short Account of the History of Mathematics, (4th ed. [Reprint. Original publication: Lon-don: Macmillan & Co., 1908] ed.).纽约。pp. 5062, ISBN 0-486-20630-0.

[Shakespeare,1914] Shakespeare, W., 1914.The Oxford Shakespeare, Oxford Univ. Press, London.

[Sharp,1972,10-6,643-655] Sharp, W.E., 1972.斐波那契排水模式，斐波那契季刊，**10**期6，第643-655页。

[Singh,1985,12-3,229-44] Singh P., 1985.古代和中世纪印度的所谓斐波那契数，Historia Mathematica **12** (3), 22944, doi:10.1016/0315-0860（85）90021-7.

[Smith,1981,p45m] Smith, W.S., 1981.The Art and Architecture of Ancient Egypt, Penguin Books, pl. 26, p. 45m, ISBN: 0140561.145; Vernier, La Bijouterie, 1907.M´emoires de l'Institut francais d'arch´eologie orientale du Caire II, pl. II, Pl.II, 2.

[Stevens,1979] Stevens, P.S., 1979.自然的模式》，Little Brown & Co.（Pap）。ASIN:0316813311.

[Stewart,1995,157-166] Stewart, I., 1995.大自然的数字》，凤凰城，第1页。157-166.

另见。Whitfield, P., 1999.西方科学中的里程碑，从前史到原子时代，Routledge。ISBN：0415925339。

[Stewart,1999] Stewart, I., 1999.生命的另一个秘密》，企鹅出版社。ISBN：0140258760。

[Thompson,1992] Thompson, D. W., 1992.On Growth and Form:The Complete Revised Edition, Dover, New Work.Isbn 0-486-67135-6.

[Thorndike,1965] Thorndike, L., 1965.Michael Scot, Thomas Nelson and Sons, London.

[Toufy,1968] Toufy, F., 1968.L'Abeille en Islam, Remy Chauvin（编辑）。Trait´e de biologie de l'beille, Paris:Masson, **5**, Histoire, ethnographie et folk- lore.

[Tsimpour'ahs,1985] Τσιμπουράκης, 6., 1985。Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα，雅典（希腊语自我出版）。

[Upanisads,1884/1963,2/15] The Upanisads, 1963年。东方圣书》第15卷

，F. Max Mü译，1884年。**2**，多佛重印。ISBN：0486209938。
见：http://www.sacred-texts.com/hin/upan/index.htm

[Wlodarski,1963,1-4,61-63] Wlodarski, J., 1963.原子世界中的黄金比例和斐波那契数，斐波那契季刊，**1**期4，第61-63页。

[Zahoor,2000] Zahoor, A., 2000.穆斯林历史。570-1950 CE, ZMD Corporation, MD., ISBN: 0-9702389-0-8。还有。http://www.ucalgary.ca/applied-history/tutor/islam/bibliography.html

查看出版统计资料