# 实验#3 蒙特卡洛模拟和置信区间

对于Linux下第3个实验的问题，即使用userand()进行第一次测试比较简单（或者更准确的说是用stdlib的(double) rand() / (double) RAND_MAX），你现在知道，对于科学应用来说，默认的系统随机数生成器往往是非常老的，而且统计学上很弱。对于现代科学编程来说，这样的生成器必须被禁止。使用Mersenne Twister这样的发生器要好得多，它是由Matsumoto提出的，并在实验室2中发现。为了快速开始工作，如果可以的话，最好在一个文件中单独编译松本的源代码，在另一个文件中编译你的模拟代码和主程序（当然，只有一个主程序）。尊重原始的MT初始化，并使用建议的函数来绘制0和1之间的伪随机数（包括）。本实验室的实现应采用C语言。

1) 提出一个函数imPi来计算蒙特卡洛方法。这个函数将接受用于估计的点数的输入。用1 000个点、1 000 000个点和最后1 000 000个点测试你的代码。$R^2$ 中的每个点都需要两个随机数：（xr, yr）。对于这个案例研究，让我们看看你可能需要多少张图纸来获得低于$10^{-2}$（至少3.14）的精度，低于$10^{-3}$，然后低于$10^{-4}$（至少3.1415）。请记住，这种方法的收敛速度非常慢：sqrt(所画的总点数)；但就像农民拖拉机一样，这种方法 "到处走"。在这个问题中，你不需要进行复制（独立实验）--这在下一个问题中会出现。

2) 计算独立的实验并获得平均值。启动-多次抽取 "骰子"，意味着多次调用估计PI的函数（而这个函数需要多次抽取）。当模拟掷骰子时，我们只需要一个实验的随机数。当我们对掷骰子进行循环时，我们有许多模拟（独立实验）。当我们估计PI时，我们启动simPifunction（有指定的点数：nbPoints，每个点需要两个随机数）。为了计算这个模拟的'*n*'个独立实验（复制），首先初始化随机数发生器，然后提出一个循环，这个循环将调用'*n*'个具有 "nbPoints "的PI的估计。如果我们不在两次实验（复制）之间重新初始化伪随机数发生器，那么独立性就可以简单地实现。这可以通过保持在Makoto的网站上发现的正确的原始初始化来实现。当我们运行调用PI模拟函数的循环时，我们可以将所有'*n*'实验（复制）的结果存储在一个数组中（双精度的数字）。然后我们可以提出所有 "估计PI "的平均值（算术平均值）。运行10到40个实验，其中有。1 000、1000 000和1 000 000 000点，计算你的meanPI和M_PI之间的差异作为绝对误差。如果你除以M_PI，你也会得到相对误差。M_PI常数应直接取自
<math.h> 包含文件。

3) 计算模拟平均值周围的置信区间。用户在计算95%的置信区间之前，输入他想进行的复制（实验）的数量（使用本实验室附录中的技术和表格）。看看复制的数量是否能改善你的结果，减少置信半径（与M_PI比较）。每个单独的重复（每个实验）的随机抽样（抽样）的数量是一个敏感参数。当你做这个比较时要小心。我们在浮动变量中的有效数字很少（浮动变量只有小数点后7位有效数字），用double代替。它是科学计算的首选。当你有一个标准差的估计时，你也可以看看如何计算样本平均值的 "标准误差"。

蒙特卡洛方法需要大量的随机抽样来提高其精度（记住缓慢的收敛率--点的数量的平方根）。然而，蒙特卡洛方法是计算超空间中的超体积或实现大维度中均匀分布的空间填充的唯一方法，在这种情况下，精确的数学方法往往是难以解决的或不存在的。对于Mersenne Twister来说，均匀性可以保证到623维，这在探索敏感性分析的参数超空间时特别有用（100个参数=100维探索）。

## 附录。计算结果样本的置信区间（我们没有全部人口）。

简介：如果X是一个模拟结果，（$X_1$ ,...,$X_n$）是这个随机模拟的独立复制（实验）得到的集合。这意味着每个独立的随机模拟实验（在相同的条件下）都是用不同的（和独立的）随机流运行的。通常情况下，置信区间的计算是在观察到的算术平均值上实现的。

$$\overline{X}(n) \quad \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

当我们考虑到$X_i$变量（模拟结果）具有相同的独立高斯分布时，置信区间的计算很简单。

原理：置信区间是以算术平均数为中心的，所以我们只需计算所谓的置信半径（误差范围）。下面是用于获得这个半径的理论统计假设。如果$X_i$具有相同的独立高斯分布，理论上的平均值和方差为 $^2$，则以下随机变量。

$$T(n) \quad \frac{\overline{X}(n)}{\sqrt{S^2(n)/n}}$$ 是按照学生法分布的，有n-1度的自由度。

$$S^2(n) \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i \overline{X}(n)\right)^2}{n\ 1}$$

$S^2(n)$是对$^2$方差的无偏差估计。由于我们不知道理论上的标准差

，我们用我们拥有的结果来估计方差，从而使用这个近似值。我们计算$S^2(n)$

并在下面的公式中使用它，以获得1-水平的置信半径（误差率）。

$$R = t_{n1, 1 /2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

威廉-西利-戈塞特介绍说，学生们纠正了一个事实，即我们只使用了一个估计值，而不是使用了一个估计值。

它的真实值。下表给出了$t_{n, 1 /2}$的值 为一个学生法与.

如果，则表示置信区间为95%。对R的计算得出以下区间

$\overline{X}R\ \overline{X}$ R，具有1-的置信度（95%）。

表1：$t_{n, 1 /2}$的值 的学生法开始取决于实验。

| 1n10 | $t_{n,1 1 2}$ | 11n20 | $t_{n,1 1 2}$ | 21n30 | $t_{n,1 1 2}$ | n>30 | $t_{n,1 1 2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12.706 | 11 | 2.201 | 21 | 2.080 | 40 | 2.021 |
| 2 | 4.303 | 12 | 2.179 | 22 | 2.074 | 80 | 2.000 |
| 3 | 3.182 | 13 | 2.160 | 23 | 2.069 | 120 | 1.980 |
| 4 | 2.776 | 14 | 2.145 | 24 | 2.064 | φ | 1.960 |
| 5 | 2.571 | 15 | 2.131 | 25 | 2.060 | | |
| 6 | 2.447 | 16 | 2.120 | 26 | 2.056 | | |
| 7 | 2.365 | 17 | 2.110 | 27 | 2.052 | | |
| 8 | 2.308 | 18 | 2.101 | 28 | 2.048 | | |
| 9 | 2.262 | 19 | 2.093 | 29 | 2.045 | | |
| 10 | 2.228 | 20 | 2.086 | 30 | 2.042 | | |

中心极限定理（CLT）说，对于非正态数据，无论原始数据的分布情况如何，只要样本量足够大（通

常至少有30个），且所有样本的大小相同，样本平均数的分布就具有近似正态分布。这不仅对样本平均数是如此，对其他样本统计也是如此。高级学生还将学习= 0.01。