



## 第1章 算法概述

上海大学计算机工程与科学学院  
岳晓冬

### 学习要点

- 理解算法的概念。
- 理解什么是程序，程序与算法的区别和内在联系。
- 掌握算法的计算复杂性概念。
- 掌握算法渐近复杂性的数学表述。
- 掌握复杂性的阶及表示
- 掌握用C++语言描述算法的方法。

### 1.1 算法与程序

- 算法定义：  
是一个有穷规则的集合。这些规则规定了解决某一问题的一个运算序列。
- 算法应该具有五个特性：  
有限性、确定性、输入、输出、可行性。

### 算法的五个特性

- 输入：算法开始执行之前指定初始值（有零个或多个输入）
- 输出：产生与输入相关的量（至少有一个）。
- 确定性：每一条规则都是明确、无二义的。
- 有限性：求解问题的运算序列，必须在有限的计算步后停止。
- 可行性：每一计算步都是基本的、可实现的。

### 计算序列与算法

#### 1. 计算序列：

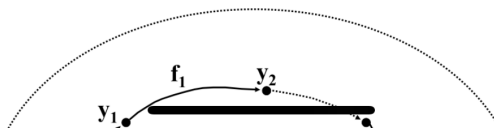
若对于 $I$ 的每一个输入 $x$ ,由状态函数 $f$ 定义一个计算序列： $y_0, y_1, y_2, \dots$

其中： $y_0 = x; y_{k+1} = f(y_k) \quad (k \geq 0)$ 。

若一个计算序列在第 $k$ 步终止，且 $k$ 是使 $y_k$ 处于接受状态的最小整数，则称 $y_k$ 是由 $x$ 产生的输出。

#### 2. 算法的另一种描述：

一个算法是对于 $I$ 中所有输入 $x$ , 都能在有穷步内终止的一个计算序列。

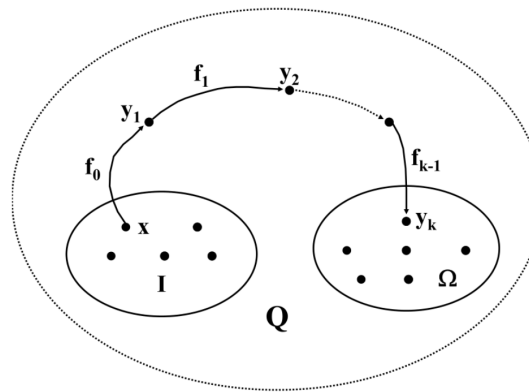




状态的最小整数，则称 $y_k$ 是由 $x$ 产生的输出。

## 2. 算法的另一种描述：

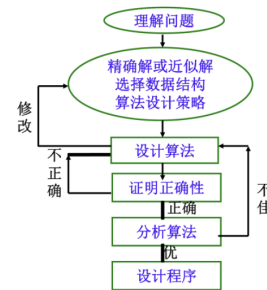
一个算法是对于 $I$ 中所有输入 $x$ ，都能在有限步内终止的一个计算序列。



## 程序

- 程序是算法用某种程序设计语言的具体体现
- 程序=算法 + 数据结构 (Nicklaus Wirth)
- 程序可以不满足算法的性质(4)有限性。
- 例如：操作系统，是一个在无限循环中执行的程序，因而不是一个算法。

## 问题求解过程



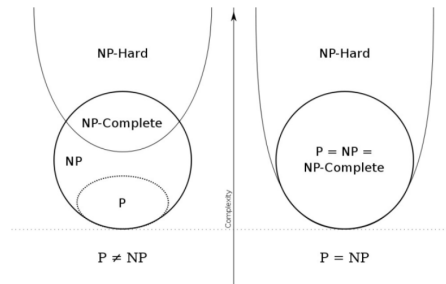
## 1.2 算法复杂性分析 (1)

1. 计算机资源：时间、空间
2. 复杂性：所需资源多少
3. 算法复杂性：算法运行时所需资源的量
4. 算法复杂性分析目的：分析问题复杂性、算法是否可行，选择最好算法
5. 时间复杂性：所需时间资源的量 $T(n)$
6. 空间复杂性：所需空间资源的量 $S(n)$

• 其中 $n$ 是问题的规模（输入大小）

## 算法复杂性分析 (2)

- 时间复杂性细化--3种典型的复杂性：  
最坏、最好、平均复杂性
- 记 $T(I)$ 为输入 $I$ 时的问题的算法复杂性



**P: Polynomial**, 多项式时间可解的判定问题。

**NP: Nondeterministic Polynomial**, 非确定性多项式时间可解的判定问题。可在多项式时间复杂度内对猜测进行验证。

**NPC: NP-Complete**, 多项式时间内可转化为任意NP问题, 可视为代表性NP问题。

**P**问题是确定计算模型下的易解问题, **NP**问题是非确定性计算模型下的易验证问题。

## 算法的时间复杂性

(1) 最坏情况下的时间复杂性

$$T_{\max}(n) = \max\{T(I) \mid \text{size}(I)=n\}$$

(2) 最好情况下的时间复杂性

$$T_{\min}(n) = \min\{T(I) \mid \text{size}(I)=n\}$$

(3) 平均情况下的时间复杂性

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{\text{size}(I)=n} p(I)T(I)$$

其中 $I$ 是问题的规模为 $n$ 的实例,  $p(I)$ 是实例 $I$ 出现的概率。

## 算法渐近复杂性

- 假定当  $n \rightarrow \infty$  时,  $T(n) \rightarrow \infty$ ;
- 取  $t(n)$ , 使  $(T(n) - t(n)) / T(n) \rightarrow 0$ , 当  $n \rightarrow \infty$ ;
- $t(n)$  是  $T(n)$  的渐近性态, 为算法的渐近复杂性。
- 在数学上,  $t(n)$  是  $T(n)$  的渐近表达式, 是  $T(n)$  略去低阶项留下的主项。它比  $T(n)$  简单。



## 几个复杂性参照函数

$C$   
 $\log n$   
 $\log^2 n$   
 $n$   
 $n \log n$   
 $n^2$   
 $n^3$   
 $2^n$   
 $n!$

## 增长的阶

- 不同的计算过程在消耗计算资源的速率上可能存在着巨大差异，描述这种差异的一种方法是用**增长的阶**的记法，以便我们理解在输入变大时，某一计算过程所需资源的粗略度量情况。
- 令  $n$  是一个参数，它能作为问题规模的一种度量，令  $f(n)$  是一个计算过程在处理规模为  $n$  的问题时所需要的资源量。对某函数  $g(n)$ ，称  $f(n)$  具有复杂性阶  $\Delta(g(n))$ ，记为  $f(n) = \Delta(g(n))$ ，其中  $\Delta$  是  $O$ 、 $\Omega$ 、 $o$ 、 $\theta$  等。
- 含义见下面的几页。

## 若干符号及其意义： $O(f)$ ， $\Omega(f)$ ， $\theta(f)$ ， $o(f)$

- 在下面的讨论中，对所有  $n$ ， $f(n) \geq 0$ ， $g(n) \geq 0$ 。

### (1) 渐近上界记号 $O$

$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有:}$

$$0 \leq f(n) \leq cg(n) \}$$

### (2) 渐近下界记号 $\Omega$

$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \text{存在正常数 } c \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有:}$

$$0 \leq cg(n) \leq f(n) \}$$

(3) 高阶记号 $o$ 

$o(g(n)) = \{f(n) \mid \text{对于任何正常数 } c > 0, \text{ 存在正数}$   
 $\text{和 } n_0 > 0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0 \text{ 有: } 0 \leq f(n) < cg(n)\}$

等价于  $f(n) / g(n) \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ 。

- $f(n)$  的阶比  $g(n)$  的阶低

(4) 同阶记号 $\theta$ 

$\theta(g(n)) = \{f(n) \mid \text{存在正常数 } c_1, c_2 \text{ 和 } n_0 \text{ 使得对所有 } n \geq n_0$   
 $\text{有: } c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)\}$

## 复杂性阶符号的理解举例

- 称  $f(n)$  具有  $\theta(g(n))$ , 记为  $f(n) = \theta(g(n))$ , 如果存在与  $n$  无关的整数  $c_1$  和  $c_2$ , 使得:  

$$c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$$
 对于任何足够大的  $n$  都成立。

## 举例

求  $n!$  递归算法  $f(n)$

$f(n) = 1, 1, 2, 6, 24, \dots, nf(n-1), \dots$

```
f(n){
    if(n==0 || n==1) return 1;
    return n*f(n-1);
}
```

求阶乘的递归算法时间和空间需求增长都是  $\theta(n)$ ;  
 但对于迭代的算法, 时间增长为  $\Theta(n)$ , 空间增长为  $\theta(1)$  (常数)。



## 增长的阶

- 对于线性的过程，问题规模扩大一倍，资源增长一倍；
- 对于指数增长的过程，问题规模加1，资源就增大一个常数倍；
- 对于对数增长的过程，问题规模增大一倍，所需资源增长一个常数

## 各记号在等式和不等式中的意义

- $f(n) = \theta(g(n))$  的确切意义是：  $f(n) \in \theta(g(n))$ 。
- 一般情况下，等式和不等式中的渐近记号  $\theta(g(n))$  表示  $\theta(g(n))$  中的某个函数。
- 例如：  $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n)$  表示
- $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$ ，其中  $f(n)$  是  $\theta(n)$  中某个函数。
- 等式和不等式中渐近记号  $O, o$  和  $\Omega$  的意义是类似的。

## 各记号的记忆性比较

- $f(n) = O(g(n)) \approx f(n)$  阶不超过  $g(n)$  阶
- $f(n) = \Omega(g(n)) \approx f(n)$  阶以  $g(n)$  阶为下界
- $f(n) = \theta(g(n)) \approx f(n)$  与  $g(n)$  等同
- $f(n) = o(g(n)) \approx f(n)$  阶小于  $g(n)$  阶





### 渐近分析记号的若干性质--传递性

(1) 传递性:

$$f(n) = \theta(g(n)), \quad g(n) = \theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \theta(h(n));$$

$$f(n) = O(g(n)), \quad g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n));$$

$$f(n) = \Omega(g(n)), \quad g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n));$$

$$f(n) = o(g(n)), \quad g(n) = o(h(n)) \Rightarrow f(n) = o(h(n));$$

### 渐近分析记号的若干性质

#### --反身性、对称性、互对称性

(2) 反身性:

$$f(n) = \theta(f(n));$$

$$f(n) = O(f(n));$$

$$f(n) = \Omega(f(n)).$$

(4) 互对称性:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n));$$

(3) 对称性:

$$f(n) = \theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \theta(f(n)).$$

### 渐近分析记号的若干性质

#### --算术运算

• (5) 算术运算:

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\});$$

$$O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n) \cdot g(n));$$

$$O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n)).$$



## 渐近分析记号的若干性质

### --算术运算

#### • (5) 算术运算:

- $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$ ;
- $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$ ;
- $O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$ ;
- $O(cf(n)) = O(f(n))$ ;  $C$  是正常数
- $g(n) = O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n))$ 。

### 规则 $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$ 的证明

对于任意  $f_1(n) \in O(f(n))$ , 存在正常数  $c_1$  和自然数  $n_1$ , 使得对所有  $n \geq n_1$ , 有  $f_1(n) \leq c_1 f(n)$ 。

类似地, 对于任意  $g_1(n) \in O(g(n))$ , 存在正常数  $c_2$  和自然数  $n_2$ , 使得对所有  $n \geq n_2$ , 有  $g_1(n) \leq c_2 g(n)$ 。

令  $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ ,  $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ ,  $h(n) = \max\{f(n), g(n)\}$ 。

则对所有的  $n \geq n_3$ , 有

$$\begin{aligned} f_1(n) + g_1(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq c_3 f(n) + c_3 g(n) = c_3 (f(n) + g(n)) \\ &\leq c_3 2 \max\{f(n), g(n)\} \\ &= 2c_3 h(n) = O(\max\{f(n), g(n)\}). \end{aligned}$$

### 算法渐近复杂性分析中常用函数

#### (1) 取整函数

$\lfloor x \rfloor$ : 不大于  $x$  的最大整数;

$\lceil x \rceil$ : 不小于  $x$  的最小整数。

#### 取整函数的若干性质

1.  $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$ ;
2.  $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ ;
3. 对于  $n \geq 0$ ,  $a, b > 0$ , 有:
  - 4.  $\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$ ;
  - 5.  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ,  $g(x) = \lceil x \rceil$  为单调递增函数。
6.  $\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$ ;



### 多项式函数

- $p(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_dn^d; \quad a_d > 0;$
- $p(n) = \theta(n^d);$
- $f(n) = O(1) \Leftrightarrow f(n) \leq c;$
- $k \geq d \Rightarrow p(n) = O(n^k);$
- $k \leq d \Rightarrow p(n) = \Omega(n^k);$
- $k > d \Rightarrow p(n) = o(n^k);$

### 指数函数、对数函数

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \Rightarrow n^b = o(a^n)$$

记号:  $\log n = \log_2 n; \lg n = \log_{10} n; \ln n = \log_e n;$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - 6 \dots$$

$$\text{for } x > -1, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$\text{对任何 } a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n^a} = 0 \Rightarrow \log_b n = o(n^a)$$

### 阶乘函数

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \dots n$$

Stirling公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$



## 算法分析的基本法则

## • 非递归算法:

(1) **for / while** 循环

循环体内计算时间\*循环次数;

(2) 嵌套循环

循环体内计算时间\*所有循环次数;

(3) 顺序语句

各语句计算时间相加;

(4) **if-else** 语句**if** 语句计算时间和 **else** 语句计算时间的较大者。

## 求幂-传统方法

$$b^n = b * b^{n-1}$$

$$b^0 = 1$$

```
pow(b,n){  
    if(n==0) return 1;  
    return b*pow(b,n-1);  
}
```

时间和空间增长 $\theta(n)$ 

## 求幂-二分

$$b^n = (b^{n/2})^2 \quad n \text{ 是偶数}$$

$$b^n = b * b^{n-1} \quad n \text{ 是奇数}$$

```
fast_pow(b,n){  
    if(n==0) return 1;  
    if(n%2==0) square(fast_pow(b,n/2));  
    else b*fast_pow(b,n-1);  
}
```

时空增长的阶为  $\theta(\log n)$