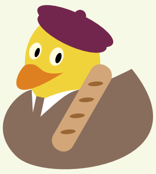
Proposition de solutions
du concours ENS
Filière MP (ex M)

Céline Wang



Défi personnel *Année 2021*

Table des matières

Sujet 1 Cachan 1987, Première épreuve

Dans tout le problème, le mot *fonction* est mis pour *fonction continue* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par q une fonction fixée vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \exists x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0$$

Pour toute fonction f, on désigne par (E_f) l'équation différentielle

$$y'' - qy = f$$

et par $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des fonctions qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_f). On désigne de même par (E) l'équation

$$y'' - qy = 0$$

et par $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$. On note φ (resp. ψ) l'élément de $\mathcal{E}$ vérifiant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$ (resp. $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = 1$). Enfin, pour l dans $\mathbb{R}$, on note y_l l'élément de $\mathcal{E}$ vérifiant $y_l(0) = 1$ et $y_l'(0) = l$.

Partie I

1. a) Montrer que, si y appartient à $\mathcal{E}$, y^2 est une fonction convexe. Que peut-on dire de la restriction d'une fonction y de $\mathcal{E}$ à un intervalle de $\mathbb{R}$ si y garde un signe constant sur cet intervalle ?
   b) Démontrer que le seul élément de $\mathcal{E}$ qui soit une fonction bornée est la fonction identiquement nulle.
2. a) Démontrer $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 1$.
   b) Démontrer
   $$\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant 0$$
   puis
   $$\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant x \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant x$$
   c) Montrer que $\frac{\varphi}{\psi}$ est strictement décroissant sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
3. On pose $\lambda = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.
   a) Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda(x) > 0$.
   b) Montrer
   $$\forall x_0 > 0,\ \forall x \in [0, x_0],\ \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi'(x)$$
   (on pourra introduire la fonction $\varphi - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi$).
   c) En déduire $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda'(x) \leqslant 0$.

4. Montrer de façon analogue qu'il existe un réel μ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_\mu(x) > 0 \quad \text{et} \quad y'_\mu(x) \geqslant 0.$$

Démontrer que μ est strictement plus grand que λ.

5. Exprimer y_μ en fonction de y_λ, λ et μ (on pourra poser $y_\mu = Cy_\lambda$ et déterminer la fonction C). En déduire

$$\forall x \geqslant 0,\ y_\mu(x)y_\lambda(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)x$$

6. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_\mu(x)y_\lambda(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)|x|$$

Partie II

On considère une fonction f.

1. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, la fonction

$$h(x) = \frac{1}{\lambda - \mu}\big[y_\lambda(x)\int_{-\infty}^{x} y_\mu(t)f(t)\,\mathrm{d}t + y_\mu(x)\int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t\big]$$

est bien définie et appartient à $\mathcal{E}_f$.

2. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, la fonction h précédente est une fonction bornée.
3. En déduire que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente, (E_f) admet une et une seule solution bornée.

Partie III

On suppose, dans cette partie, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|q(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t = 0$ puis démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left[\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x$ est convergente.
2. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, bornée sur $[0, +\infty[$ et vérifiant

$$\forall x \geqslant 0,\ y''(x) - q(x)y(x) \geqslant 0$$

a) Montrer

$$\forall x \geqslant 0,\ y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x$ est convergente.

3. Soit f une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. Montrer que l'équation (E_f) n'admet pas de solution bornée.

Partie IV

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = 1$. Donner l'exemple de deux fonctions f_1 et f_2 vérifiant les mêmes conditions que la fonction f de III.3. telles que (E_{f_1}) admette une solution bornée et (E_{f_2}) n'admette pas de solution bornée.

(Voir solution page 16)

Sujet 2 Ulm et Cachan, épreuve commune 1994

Préambule

Ce préambule comprend divers notations et résultats que les candidats pourront utiliser sans démonstration.

On désigne par E l'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ formé par les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont **périodiques de période** 2π.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in E$ est l'élément $e_n(x) = e^{inx},\ x \in \mathbb{R}$. À f et g dans E, on associe le nombre complexe :

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

et on note $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$. On admettra que $(\cdot)$ est un produit scalaire qui fait de E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

On désigne par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$$

On admettra que E muni de cette norme est complet.

Pour $N \in \mathbb{N}$, E_N désigne l'espace vectoriel engendré par e_n pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [-N, N]$. On désigne par D_N l'élément de E_N : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et on pourra utiliser que, pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathbb{F}_m$ l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ des classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ modulo m.

Étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dira que la «série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente» (en abrégé $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série S.A.C.) si la série de terme général $(|u_{-n}| + |u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ ou $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n\geqslant 1}(u_{-n} + u_n).$$

On admettra sans démonstration que tous les résultats sur les S.A.C. indexés par $\mathbb{N}$ s'étendent aux S.A.C. indexées par $\mathbb{Z}$ et par exemple si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont telles que $(|a_n|^2 + |b_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C, alors $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et

$$\big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nb_n\big| \leqslant \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2\big)^{\frac{1}{2}} \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désignera un entier supérieur ou égal à 1 qui pourra varier.

Partie I

À $f \in E$, on associe la suite de ses coefficients de Fourier $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$f_n = (e_n, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $f \in E$, montrer que $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que sa somme est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., on désigne par S_N l'élément de E : $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e_n$.
Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers un élément u de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Quels sont les coefficients de Fourier de u ?
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $u_n = 0$ pour $n \leqslant 0$, $u_1 = -1$ et $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.
Montrer que l'élément u de E obtenu par le procédé de la question I.2. n'est pas dérivable en $x = 0$ (on pourra écrire pour $N \geqslant 2$ arbitraire et $x \neq 0$,

$$\mathrm{Im}\frac{u(x)-u(0)}{x} = \mathrm{Im}\frac{S_N(x)-S_N(0)}{x} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n-1)x}$$

Imz désignant la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ et conclure en prenant $x = \frac{1}{N}$).
4. On désigne par Σ_N l'élément de E : $\Sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{e_n}{n}$.
Montrer que la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$.
5. Montrer que si la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers $\sigma \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = (e^{ix}-1)\sigma(x)$$

où u a été défini en I.3.
6. Déduire des questions I.3. et I.5. que E muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet.

Partie II

1. Étant donné $f \in E$, montrer qu'il existe un et un seul élément g de E_N tel que $\|g-f\|_2$ réalise le minimum de $\|h-f\|_2$ lorsque h parcours E_N.
On notera $P_N f$ au lieu de g.
2. Montrer que P_N est un projecteur de E sur E_N et que pour tout $f \in E$,

$$\|P_N f\|_2 \leqslant \|f\|_2.$$

3. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) \, \mathrm{d}y.$$

4. On désigne par α_N la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\|P_N f\|_\infty$ lorsque f décrit la boule unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N+1}$
5. On désigne par L_N le nombre $L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| \, \mathrm{d}x$, et pour $\varepsilon > 0$, ψ_N^ε l'élément de E défini par

$$\psi_N^\varepsilon(x) = \frac{D_N(x)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(x)}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer, en utilisant les ψ_N^ε que $\alpha_N \leqslant L_N$ (on pourra monter que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} = \frac{\varepsilon |y|}{\sqrt{\varepsilon + y^2}(\sqrt{\varepsilon + y^2} + |y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}).$$

6. Montrer que lorsque N tend vers l'infini, L_N est équivalent à $\frac{4}{\pi^2} \log N$
7. Que pouvez-vous conclure (en vous inspirant de la question II.2.) ?

Partie III

On désigne par H_1 le sous-espace de E formé par les éléments f tels que

$$((1+n^2)|f_n|^2)$$

est une S.A.C.

On note alors pour $f \in H_1$, $\|f\|_1 = (\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que si $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $f \in H_1$ et $\|f\|_1^2 = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2$. Réciproquement si $f \in H_1$, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap E$ est dans dans E pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Soit $f \in H_1$, montrer que :

$$\|P_N f - f\|_2 \leqslant \frac{1}{N+1} \|f\|_1.$$

4. En écrivant, pour $g \in E_1$, x et y dans $\mathbb{R}$,

$$g^2(x) - g^2(y) = 2 \int_y^x g(t) g'(t) \, \mathrm{d}t,$$

   montrer qu'il existe une constante $K_1 \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$, $\|f\|_\infty \leqslant K_1 \|f\|_2^{\frac{1}{2}} \|f\|_1^{\frac{1}{2}}$.
5. En déduire que pour tout $f \in H_1$ et $N \geqslant 1$,

$$\|P_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{K_1}{N+1} \|f\|_1$$

   et expliquer brièvement l'intérêt de cette inégalité en terme d'approximation de fonctions et justifier l'introduction de l'espace H_1.

Partie IV

1. Montrer que si $f \in H_1$, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur H_1 et que H_1 muni de cette norme est complet.
3. Montrer qu'il existe une constante K_2 telle que pour tout $f \in H_1$,
$$\|f\|_\infty \leqslant K_2 \|f\|_1.$$
4. Soit $(g^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_1 telle que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \|g^p\|_1 \leqslant 1.$$
   a) Montrer qu'il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite des produits scalaires $((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On note alors ℓ_n la limite de cette suite.
   b) Montrer que la suite de fonctions S_N, où $S_N = \sum_{n=-N}^{N} \ell_n e_n$ converge vers une fonction $\ell \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   c) Montrer que $\ell \in H_1$.
   d) Montrer par exemple, qu'en général $\|g^{\psi(p)} - \ell\|_1$ ne tend pas vers zéro lorsque p tend vers $+\infty$.

Partie V

On désigne par x_j le point $\frac{2\pi}{2N+1}j$ pour $j \in \mathbb{Z}$. On observe alors que pour $f \in E$, $f(x_j)$ ne dépend que de la classe de j modulo $2N+1$, ce qui permet de parler de $f(x_j)$ pour $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

1. Montrer que la matrice carrée d'ordre $2N+1$: $(e^{i\ell x_j})_{0\leqslant j\leqslant 2N,\ 0\leqslant \ell\leqslant 2N}$ a pour inverse la matrice :
$$\left(\frac{1}{2N+1}e^{-i\ell x_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant 2N,\ 0\leqslant \ell\leqslant 2N}$$
2. a) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de E_N (noté $C_N f$) tel que :
$$\forall j \in \mathbb{F}_{2N+1},\ (C_N f)(x_j) = f(x_j).$$
   b) Montrer que C_N est une application linéaire de E dans E_N.
   c) Montrer que $C_N \neq P_N$ (on pourra remarquer que $C_N e_{2N+1} = e_0$).
3. On désigne par $\mathcal{E}_{2N+1}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_{2N+1}$ dans $\mathbb{C}$, on note $(z_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ ces applications.
   a) À $z \in \mathcal{E}_{2N+1}$, on associe $\hat{z} : k \longmapsto \hat{z}_k$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ défini par :
$$\hat{z}_\ell = \frac{1}{2N+1}\sum_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i\ell x_k} z_k.$$
   Montrer que $\hat{z}_\ell$ ne dépend que de la classe de ℓ modulo $2N+1$. Ceci nous permet de considérer $\hat{z}$ comme un élément de $\mathcal{E}_{2N+1}$.

b) On dit que $\hat{z}$ est la transformée de Fourier discrète (T.F.D.) de z. On note $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ la T.F.D. de l'application $j \longmapsto f(x_j)$. Montrer que :

$$C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\check{k}} e_k$$

où $\check{k}$ est la classe de k modulo $2N+1$.

4. Soit $h \in E_{2N}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j).$$

5. a) Pour f et g dans E, on note :

$$[f,g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} \overline{f(x_j)}g(x_j).$$

Montrer que si f et g sont dans E_N, $[f,g] = (f,g)$.

b) Montrer que pour tout f, g dans E,

$$[f - C_N f, g] = 0.$$

c) Calculer $[e_n, e_m]$.

6. Soit $f \in H_1$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(f_{\ell+(2N+1)k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que :

$$C_N(f) = \sum_{\ell\in\mathbb{F}_{2N+1}} C_{N,\ell}(f) e_\ell$$

$$C_{N,\ell} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\ell+(2N+1)k}.$$

7. a) Montrer que pour tout $f \in E$, on a :

$$f - C_N f = g_N - C_N g_N \quad \text{avec} \quad g_N = f - P_N f.$$

b) Montrer qu'il existe une constante $K_3 \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$,

$$\|f - C_N f\|_2 \leqslant \frac{K_3}{N+1}\|f\|_1.$$

8. Pour quelle raison pratique préfère-t-on C_N à P_N ?

Partie VI

On se donne un entier $M \geqslant 1$ et on désigne par ω un nombre complexe tel que $\omega^M = 1$. À tout élément z de $\mathcal{E}_M$ ($\mathcal{E}_M$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_M$ dans $\mathbb{C}$), on associe l'élément $\hat{z}$ de $\mathcal{E}_M$ défini par :

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k\in\mathbb{F}_M} \omega^{k\ell} z_k$$

et on note $\hat{z} = \text{T.F.D.}(\omega, M)(z)$.

1. En considérant que les $\omega^{k\ell}$ ont été calculés une fois pour toutes, quel est le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour obtenir $\hat{z}$ en fonction de z ? On notera S_M ce nombre.
2. On suppose que M est pair : $M = 2M_1$. En remarquant que :

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{2k_1\ell} z_{2k_1} + \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{(2k_2-1)\ell} z_{2k_2-1}$$

montrer que T.F.D.(ω, M) peut s'effectuer à l'aide de deux opérations T.F.D.(ω^2, M_1).
3. On suppose que $M = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. On désigne par Σ_n le nombre d'opérations pour effectuer T.F.D.$(\chi, 2^n)$ où $\chi \in \mathbb{C}$ vérifie $\chi^{(2^n)} = 1$. Montrer que $\Sigma_n \leqslant 2\Sigma_{n-1} + 2^{n+1}$ et en déduire que :

$$\Sigma_n \leqslant 2M \log_2 M$$

(où $\log_2 M = n$ par définition).
4. En supposant que les calculs sont effectués sur un ordinateur faisant 10^8 opérations par seconde, comparer les temps de calculs correspondant à S_M avec $M = 2^n$ et σ_n pour $n = 20, 25$ et 30. On représentera les résultats sous forme d'un tableau.
5. On suppose plus généralement que $M = PQ$ où P et Q sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que T.F.D.(ω, M) peut se faire en $2M(P + Q)$ opérations.
6. Appliquer ce qui précède au calcul de $C_N f$ pour $f \in H_1$

Sujet 3 Cachan, deuxième épreuve, 1990

Soit k un corps commutatif. On note $k[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans k.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(k)$ l'algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans k, $\mathcal{GL}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(k)$ formé par les matrices inversibles, I_n la matrice identité. Si $M \in \mathcal{M}_n(k)$, on note ${}^tM$ sa transposée.

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ dans k^n et soit $C = (c_{i,j})$ la matrice (n,n) définie par :

$$\begin{cases} c_{i,j} \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ et } i = j+1 \\ c_{i,j} = a_j \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } j = n \\ c_{i,j} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice est étudiée dans les trois parties du problème.

Partie I

1. Calculer le polynôme caractéristique de C.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de k^n. Déterminer l'expression de $C^i(e_1)$ sur cette base, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
   En déduire que $\{I_n, C, \ldots, C^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{M}_n(k)$.
   Montrer que tout polynôme P de $k[X]$, tel que $P(C) = 0$, est divisible par le polynôme caractéristique de C.
3. Soit $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ dans k^n ; on considère la matrice $S_\sigma = s_{i,j}$ définie par :

   $$\begin{cases} s_{i,j} = s_{i+j-n} \text{ si } i+j > n \\ s_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

   Montrer que S_σ est une matrice symétrique.
   Calculer son déterminant.
4. Montrer qu'il existe un unique $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dans k^n tel que $s_1 = 1$ et tel que la matrice $S_\sigma C$ est symétrique.
5. En déduire qu'il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$.
6. Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible T telle que $C = T{}^tCT^{-1}$.
7. Calculer la matrice S_σ dans le cas où

   $$a_n = 2, a_{n-1} = -1 \text{ et } a_i = 0,\ \forall i \leqslant n-2$$

Partie II

Dans cette partie, on suppose que k est un corps de caractéristique différente de 2 et tel que :

$$\forall a \in k, \exists b \in k \mid a = b^2$$

1. Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de k^n.
   Montrer qu'il existe x dans k^n tel que $B(x,x) = 1$.
2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(k)$. Montrer l'équivalence des assertions :
   a) La matrice M est symétrique ;
   b) $\exists P \in \mathcal{GL}_n(k) \mid M = {}^tPP$.
3. Montrer que C est semblable à une matrice symétrique.
4. Montrer que dans $M_n(k)$ les matrices symétriques ne sont pas en général diagonalisables. Donner un exemple de matrice symétrique non diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(k)$ lorsque k est le corps des nombres complexes.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $k = \mathbb{R}$ le corps des réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, de la topologie produit.

1. Soit Ω le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices M qui vérifient la propriété suivante : Si P est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(M) = 0$, alors P est divisible par le polynôme caractéristique de M. Montrer que Ω est un ouvert.
2. Soit λ une valeur propre de C. Montrer que :

$$|\lambda| \leqslant \max\{1 + |a_i|; i \in \{1, \dots, n\}\}$$

3. Soit $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
   — M_i est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout i dans $\mathbb{N}$;
   — la suite $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers C.

   Montrer que :
   a) $\exists l \in \mathbb{N} | \forall m \geqslant l$, $\mathcal{M}_m$ a n valeurs propres distinctes deux à deux.
   b) $\exists K \in \mathbb{R}^+ | \forall m \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda$ valeur propre de $\mathcal{M}_m$, on a : $|\lambda| \leqslant K$.
   c) Soit $m \geqslant l$. On note $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ les n valeurs propres de $\mathcal{M}_m$ rangées dans l'ordre croissant.
   Montrer que la suite $\{\lambda_i^m\}_{m\geqslant l}$ converge, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ et que le polynômes caractéristique de C admet ses n racines dans $\mathbb{R}$.
4. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas la limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sujet 4 Lyon, deuxième épreuve, 1988

Partie I

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls, telle que la série entière $\sum_{x=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme et on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = s.$$

   a) Montrer que la série de terme général a_n est convergente de somme s.
   b) Montrer par un exemple que ce résultat est en général faux pour une suite (a_n) dont les termes ne sont pas tous positifs ou nuls.

2. Soit $F(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0, 1[,\ \forall n \geqslant 0,$$

$F^{(n)}$ désignant la dérivée d'ordre n de F. Pour $n \geqslant 0$ on pose :

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t$$

   a) Montrer que pour $0 \leqslant x < y < 1$ on a :

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant r_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$$

   b) En déduire que pour $0 \leqslant x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.
   c) On remplace l'intervalle $[0, 1[$ par $]-1, 1[$ dans les hypothèses. Montrer que pour $-1 < x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

Partie II

Notation

a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On note $E(0, a)$ l'ensemble des fonctions continues f de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, a[$, et telles que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, a[$ et $f(a) = 0$.

b) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{R}_+$. On considère le problème (1) associé aux conditions :

$$\begin{cases} G(y)G''(y) + y^{m+1} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant y < d \\ G(0) = 1 \\ G'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Supposons qu'il existe $d > 0$ et une fonction $G(0, d)$, solution du problème (1). Montrer qu'il existe une fonction $g \in E(0, 1)$ et un nombre $k \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\begin{cases} g(x)g''(x) + x^{m+1} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g'(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

et de plus $g(0) = k$.

2. Montrer que l'équation différentielle

$$G(y)G''(y) + y^{m+1} = 0$$

possède une et une seule solution maximale telle que $G(0) = 1$ et $G'(0) = 0$. On énoncera avec précision le théorème utilisé pour cela.
On note maintenant $I =]c, d[$ l'intervalle sur lequel est définie cette solution maximale.

3. On suppose d'abord que $d = +\infty$.
Montrer qu'on ne peut avoir :

$$G(y) > 0, \text{ pour tout } y > 0.$$

En déduire que ce cas est impossible.
4. On a donc $0 < d < +\infty$.
   a) Montrer que G peut être prolongée par continuité en $y = d$.
   b) En déduire que le problème (1) possède une solution $G \in E(0, d)$.

Partie III

On se donne une fonction h de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+$, continue.
On considère le problème (3) associé aux conditions :

$$\begin{cases} g(x)g''(x) + 2xh(x) = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g(1) = 0 \\ g'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On se propose de montrer que ce problème admet au plus une solution g dans $E(0, 1)$.
Soient g_1 et g_2 deux éléments de $E(0, 1)$, solutions de (2).
1. On suppose $g_1(0) < g_2(0)$.
   a) Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1]$ tel que

$$g_1(x) < g_2(x), \ \forall x \in [0, x_0[, \text{ et } g_1(x_0) = g_2(x_0).$$

   b) Montrer que $g_2''(x) \geqslant g_1''(x)$ sur $]0, x_0[$.
   En déduire que $g_2(x) - g_1(x) \geqslant g_2(0) - g_1(0)$, $\forall x \in]0, x_0[$.
   Conclure.
2. On a donc $g_1(0) = g_2(0)$. On suppose maintenant que $g_1(x) - g_2(x)$ n'est pas identiquement nul sur $[0, 1]$.
   a) Montrer qu'il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$g_1(x_1) \neq g_2(x_1) \text{ et } g_1'(x_1) = g_2'(x_1).$$

   b) En exhibant une contradiction, en déduire que $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Partie IV

On considère le problème (3) associé aux conditions :

$$\left\{\begin{array}{l} g(x)g'(x)+2x=0 \text{ pour } 0\leqslant x<1 \\ g(1)=0 \\ g'(0)=0 \end{array}\right. \tag{4}$$

1. Montrer que la seule solution g de (4) appartient à $E(0,1)$ est indéfiniment dérivable sur $[0,1[$.
2. Pour $n\geqslant 0$, donner une expression de $g^{(n+3)}$ en fonction des $g^{(i)}$ pour $0\leqslant i\leqslant n+2$.
3. En déduire que la fonction $F(x)=-[g(x)-g(0)]$ vérifie :

$$F^{(n)}(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[0,1[.$$

4. Montrer que

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n \text{ pour } x\in[0,1].$$

5. On pose $a_0=g(0)$. Montrer que $g^{3n}(0)=-(3n)!\frac{b_n}{a_0^{2n-1}},\ n=1,2,\dots$

$$b_1=\frac{1}{3} \text{ et } b_n=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}b_pb_{n-p}\left(1-\frac{6p(n-p)}{n(3n-1)}\right),\ n\geqslant 2.$$

Partie V

1. On pose $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{x^{2n-1}}$, pour $x>0$ et $N=1,2,\dots$
   Montrer que chaque équation $S_N(x)=x$ admet une et une seule racine positive x_N, que la suite $(x_N)_{N\geqslant 1}$ est croissante et qu'elle converge vers a_0.
2. On considère $x\geqslant a_0$ les fonctions :

$$P(x)=x-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{x^{2n-1}},\quad Q(x)=x^2-\frac{2}{3}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\Phi(n)}{x^{2n-1}},$$

   où

$$\Phi(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6k(n-k)}{n(3n-1)}b_kb_{n-k}.$$

   Quelle relation y a-t-il entre $P(x)$ et $Q(x)$?
3. On pose, pour $x>0$ et $N=2,3,\dots$, $T_N(x)=\sum_{n=2}^{N}\frac{\Phi(n)}{x^{2(n-1)}}$.
   Montrer que chaque équation $2/3-x^2=T_N(x)$ admet deux racines positives y_N et z_N telles que la suite $(y_N)_{N\geqslant 2}$ soit croissante, $(z_N)_{N\geqslant 2}$ soit décroissante, $y_N<a_0<z_N$ et $\lim y_N=\lim z_N=a_0$ quand N tend vers $+\infty$.
4. En utilisant les suites (x_N) et (z_N) déterminées aux questions 1 et 3 donner une valeur de a_0 avec une erreur inférieure à 10^{-1}

(Voir solution page 46)

Solution du sujet 1

Partie I

1. a) Soit $y \in \mathcal{E}$. Alors $y'' = qy$ et

$$(y^2)' = 2yy' \quad \text{donc} \quad (y^2)'' = 2(y'^2 + yy'') = 2(y'^2 + qy^2) \geqslant 0$$

puisque $q \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Donc } y^2 \text{ est convexe.}}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que y garde un signe constant sur I. Alors $y'' = qy$ est de signe constant sur I.

$\boxed{\text{Ainsi, si } y \geqslant 0 \text{ sur } I\text{, alors } y \text{ y est convexe. Sinon, elle y est concave.}}$

b) Soit $y \in \mathcal{E}$ une fonction bornée. D'après la question précédente, y^2 est convexe. Donc y^2 est constante. En effet, si par l'absurde, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $y^2(a) \neq y^2(b)$ (par exemple $y^2(a) < y^2(b)$), alors par inégalité des pentes,

$$\forall x > a, \ \frac{y^2(b) - y^2(a)}{b - a} \leqslant \frac{y^2(x) - y^2(b)}{x - b}$$

i.e.

$$\forall x > a, \ (x - b)\frac{y^2(b) - y^2(a)}{b - a} + y^2(b) \leqslant y^2(x).$$

Par passage à la limite, $\lim_{x \to +\infty} y^2(x) = +\infty$, ce qui est absurde puisque y^2 est bornée. Donc y^2 est constante, et par continuité de y, y est constante. Comme y est constante, $qy = y'' = 0$, et comme q n'est pas identiquement nulle, nécessairement, $y = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, le seul élément de } \mathcal{E} \text{ qui soit borné est la fonction identiquement nulle.}}$

2. a) Comme $\varphi \in \mathcal{E}$, d'après I.1.a), φ^2 est convexe. Donc $(\varphi^2)'$ est croissante. Or $(\varphi^2)'(0) = 2\varphi(0)\varphi'(0) = 0$, on en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\varphi^2)'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de φ^2		$\searrow$	$\varphi^2(0) = 1$	$\nearrow$	

Donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^2(x)| \geqslant 1$$
Par continuité de φ,
$$\varphi \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad \varphi \leqslant -1$$
Or, $\varphi(0) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 1.}$$

b) De façon analogue, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\psi^2)'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ψ^2	$\searrow$		$\psi^2(0) = 0$		$\nearrow$

ψ^2 est monotone sur $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.
Montrons que ψ est croissante sur $]0, +\infty[$. Supposons par l'absurde qu'il existe $0 < a < b$ tels que $\psi(a) > \psi(b)$. Comme ψ^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\psi^2(a) \leqslant \psi^2(b)$. Donc $\psi(b) < 0 < \psi(a)$. Par continuité de ψ, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\psi(c) = 0$. Or pour tout $x \in [a, b]$, $(\psi^2)'(x) = 2\psi(x)\psi'(x) \geqslant 0$. Donc ψ et ψ' sont de même signe sur $[a, b]$. Donc ψ' est positive sur $[a, c]$, et donc ψ est croissante sur $[a, c]$ ce qui est contradictoire puisque $\psi(a) > 0$. Par croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant \psi(0) = 0$.
On montre de façon analogue que ψ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Par décroissance de ψ sur $\mathbb{R}_-$, $\forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant \psi(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0 \text{ et } \forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant 0.}$$

D'après I.1.a) et ce qui précède, ψ est convexe sur $[0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0]$. Donc ψ' est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$, et par théorème des accroissements finis, on a :

$$\forall x \geqslant 0,\ \exists c \geqslant 0,\ \psi(x) - \psi(0) = \psi(x) = x\psi'(0) \geqslant x\psi'(0)$$

et

$$\forall x \leqslant 0,\ \exists c \leqslant 0,\ \psi(x) - \psi(0) = \psi(x) \leqslant x\psi'(0)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant x \text{ et } \forall x \leqslant 0,\ \psi(x) \leqslant x.}$$

c) $\frac{\varphi}{\psi}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, domaine sur lequel elle est dérivable, par quotient de telles fonctions, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \big(\frac{\varphi}{\psi}\big)'(x) = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$$

Notons $h = \varphi'\psi - \varphi\psi'$ qui est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \varphi''(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi''(x) = q(x)(\varphi(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x)) = 0$$

Donc h est constante égale à $h(0) = -1$. Donc $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'$ est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, $\frac{\varphi}{\psi}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3. a) (φ, ψ) est clairement libre.
Donc $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi)$. Or $y_\lambda(0) = 1$ et $y'_\lambda(0) = 0$. Donc $y_\lambda = \varphi + \lambda\psi$.
D'après I.2.c), $-\frac{\varphi}{\psi}$ est une fonction strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Donc pour tout $x \geqslant 0,\ \lambda > -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *i.e.* $\forall x \geqslant 0,\ y_\lambda(x) > 0$ puisque

$$\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0,$$

et $\forall x < 0,\ \psi(x) < 0$ et $\varphi(x) > 0$. Donc $\forall x < 0,\ \lambda < -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, et

$$\forall x < 0,\ y_\lambda(x) > 0.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda(x) > 0$.

b) Soit $x_0 > 0$. Notons $f_{x_0} = \varphi - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi \in \mathcal{E}$. Comme $-\frac{\varphi}{\psi}$ est croissante sur $]0, x_0]$, f_{x_0} y est positive, donc par I.1.a), f_{x_0} y est convexe, et f'_{x_0} y est croissante, donc

$$\forall x \in [0, x_0],\ f'_{x_0}(0) \leqslant f'_{x_0}(x),$$

i.e.

$$\forall x \in [0, x_0],\ \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi'(x)$$

Ainsi, $\forall x_0 > 0,\ \forall x \in [0, x_0],\ \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi'(x)$.

c) Comme $y_\lambda > 0$, y'_λ est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, par question précédente, en faisant tendre x_0 vers l'infini, on a

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \varphi'(x) + \lambda\psi'(x) \leqslant 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ y'_\lambda(x) \leqslant 0$.

4. Posons $\mu = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Une démonstration analogue à I.3.a)-b) permet de montrer que $y_\mu > 0$ et $y'_\mu \geqslant 0$.
On a alors $\lambda \leqslant 0 \leqslant \mu$. Si $\lambda = \mu = 0$, alors $y_\lambda = \varphi = y_\mu$, mais y_λ est décroissante et y_μ est croissante, donc φ est constante égale à 1 ce qui est contradictoire puisque q n'est pas identiquement nulle.
Donc $\lambda < 0 < \mu$.
Soit C une fonction telle que $y_\mu = Cy_\lambda$. Alors

$$y''_\mu = C''y_\lambda + 2C'y'_\lambda + Cy''_\lambda = qCy_\lambda$$

i.e.

$$C'' + 2\frac{y'_\lambda}{y_\lambda}C' = 0$$

car $y_\lambda > 0$. Donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $C' = \frac{A}{y_\lambda^2}$.
Or $\left\{\begin{array}{l} y_\mu(0) = C(0) = 1 \\ y'_\mu(0) = C'(0) + C(0)\lambda = \mu \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} C(0) = 1 \\ C'(0) = \mu - \lambda \end{array}\right.$.
Donc $C'(0) = A = \mu - \lambda$, et $C' = \frac{\mu-\lambda}{y_\lambda^2}$. Donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = (\mu - \lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + B.$$

Or $C(0) = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = (\mu - \lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1$.
Considérons $g(x) = C(x)y_\lambda(x)$. g est clairement $\mathcal{C}^2$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g''(x) &= C''(x)y_\lambda(x) + 2C'(x)y'_\lambda(x) + C(x)y''_\lambda(x) \\ &= -2(\mu-\lambda)\frac{y'_\lambda(x)}{y_\lambda^2(x)} + 2(\mu-\lambda)\frac{y'_\lambda(x)}{y_\lambda^2(x)} + \big[(\mu-\lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big]y''_\lambda(x) \\ &= \big[(\mu-\lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big]q(x)y_\lambda(x) \\ &= q(x)g(x) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{E}$ De plus, $g(0) = C(0)y_\lambda(0) = 1$ et $g'(0) = (\mu - \lambda) + \lambda = \mu$.
Par unicité du problème de Cauchy, $y_\mu = g$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ y_\mu(x) = \big[(\mu-\lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big]y_\lambda(x).}$$

5. D'après la question précédente,

$$\forall x \geqslant 0,\ y_\lambda(x)y_\mu(x) \leqslant \big[(\mu-\lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1\big]y_\lambda^2(x)$$

Or, $y'_\lambda \leqslant 0$. Donc y_λ^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{y_\lambda^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc

$$\begin{aligned} \forall x \geqslant 0,\ [(\mu-\lambda)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{y_\lambda^2(t)} + 1]y_\lambda^2(x) &\leqslant [(\mu-\lambda)\frac{x}{y_\lambda^2(x)} + 1]y_\lambda^2(x) \\ &\leqslant (\mu-\lambda)x + y_\lambda^2(x) \\ &\leqslant (\mu-\lambda)x + y_\lambda^2(0) \\ &= (\mu-\lambda)x + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \geqslant 0,\ y_\lambda(x) y_\mu(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)x.}$$

6. Soit $x \leqslant 0$. Comme $y'_\mu \geqslant 0$, y_μ est croissante,

$$y_\lambda(x) y_\mu(x) \leqslant y_\lambda(x) y_\mu(0) = y_\lambda(x) = y_\mu(x) + (\lambda - \mu)\psi(x) \leqslant 1 + (\lambda - \mu)x$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ y_\lambda(x) y_\mu(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)|x|.}$$

Partie II

1. On suppose que f est intégrable. Soit $x \in \mathbb{R}$. $y_\lambda > 0$ et y_λ est décroissante, et $y_\mu > 0$ et y_μ est croissante. Alors d'une part,

$$\forall t \in]-\infty, x],\ y_\mu(t)|g(t)| \leqslant y_\mu(x) \underbrace{|f(t)|}_{\text{intégrable}}$$

Donc $\int_{-\infty}^{x} y_\mu(t) f(t)\, \mathrm{d}t$ existe.
D'autre part,

$$\forall t \in [x, +\infty[,\ y_\lambda(t)|g(t)| \leqslant y_\lambda(x) \underbrace{|f(t)|}_{\text{intégrable}}$$

Donc $\int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t) f(t)\, \mathrm{d}t$ existe. Donc h est bien définie.
On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = & \frac{1}{\lambda - \mu}\Big[y''_\lambda(x) \int_{-\infty}^{x} y_\mu(t) f(t)\, \mathrm{d}t + 2y'_\lambda(x) y_\mu(x) f(x) \\
& + y_\lambda(x)(y'_\mu(x) f(x) + y_\mu(x) f'(x)) + y''_\mu(x) \int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t) f(t)\, \mathrm{d}t \\
& - 2y'_\mu(x) y_\lambda(x) f(x) - y_\mu(x)(y'_\lambda(x) f(x) + y_\lambda(x) f'(x))\Big] \\
= & \frac{1}{\lambda - \mu}\big[q(x)h(x) + y'_\lambda(x) y_\mu(x) f(x) - y_\lambda(x) y'_\mu(x) f(x)\big]
\end{aligned}$$

Or, $y_\lambda = y_\mu + (\lambda - \mu)\psi$.
Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'_\lambda(x) y_\mu(x) - y_\lambda(x) y'_\mu(x) = (\lambda - \mu)(\psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)) = \lambda - \mu$$

(d'après I.2.c))

$$\boxed{\text{Donc } h \in \mathcal{E}_f.}$$

2. Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente. Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'une part, puisque y_λ est décroissante,

$$\forall t \in]-\infty, x],\ y_\lambda(x)y_\mu(t)|f(t)| \leqslant y_\lambda(t)y_\mu(t)|f(t)| \leqslant \big[1 + (\mu - \lambda)|t|\big]|f(t)|$$

(d'après I.6.)
D'autre part, puisque y_μ est croissante,

$$\forall t \in [x, +\infty[,\ y_\lambda(t)y_\mu(x)|f(t)| \leqslant y_\lambda(t)y_\mu(t)|f(t)| \leqslant [1 + (\mu - \lambda)|t|]|f(t)|$$

Donc

$$\begin{aligned}|h(x)| &\leqslant \frac{1}{\mu - \lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} y_\mu(t)y_\lambda(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{\mu - \lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty\end{aligned}$$

Donc h est bornée.

3. Soit $g \in \mathcal{E}_f$ bornée. Comme $h \in \mathcal{E}_f$ et est bornée, $g - h \in \mathcal{E}$ est bornée. D'où l'existence. L'unicité de la solution bornée de $\mathcal{E}$ est assurée par la question I.1.b).

Ainsi, si $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, alors $(\mathcal{E}_f)$ admet une unique solution bornée.

Partie III

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall t \geqslant x,\ |xq(t)| \leqslant |tq(t)|$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|q(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} |tq(t)|\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |tq(t)|\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} |tq(t)|\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} |q(t)| = 0$.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^r \Big[\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}x &= \Big[x\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t\Big]_0^r + \int_0^r xq(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{r\int_r^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t}_{\underset{r\to+\infty}{\to} 0} + \underbrace{\int_0^r xq(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{converge}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \int_0^{+\infty}\left[\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

2. a) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ qui existe bien puisque y est bornée et q est intégrable donc qy est intégrable. Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \geqslant 0$. Donc f est croissante, et admet une limite $l \in \mathbb{R}$.
Comme $\int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = l$. Si par l'absurde, $l < 0$, il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant A,\ y'(x) \leqslant l/2$, et donc pour tout $x \geqslant A,\ y'(x) \leqslant \frac{l}{2}x + y(0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ce qui est absurde car y est bornée. On montre de même que l ne peut être strictement positif.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \geqslant 0,\ y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.}$$

b) Soit $M > 0$ tel que $\forall x \geqslant 0,\ |y(x)| \leqslant M$.
Comme $y'' - qy \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} |x[y''(x) - q(x)y(x)]|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^r x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x =& \left[x(y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t)\right]_0^r \\ &- \int_0^r (y'(x) + \int_x^{+\infty} q(t)y(t))\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x \\ =& r\underbrace{\left(y'(r) + \int_r^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\leqslant 0} - y(r) + y(0) \\ &- \int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ \leqslant& y(0) - y(r) - \int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^r \left|x[y''(x) - q(x)y(x)]\right|\mathrm{d}x &= \int_0^r x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant |y(r)| + |y(0)| + \left|\int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

Or, $|y(r)| \leqslant M$, et
$\left|\int_0^r \int_x^{+\infty} q(t)y(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_0^r \left[\int_x^{+\infty} q(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x < +\infty$.
Donc $\int_0^{+\infty} |x[y''(x) - q(x)y(x)]|\,\mathrm{d}x < +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_0^{+\infty} x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

3. On suppose que $f \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
On montre de façon analogue que si y est une fonction $\mathcal{C}^2$ bornée sur $]-\infty, 0]$, et vérifie $\forall x \leqslant 0,\ y''(x) - q(x)y(x) \geqslant 0$, alors $\int_{-\infty}^{0} x[y''(x) - q(x)y(x)]\,\mathrm{d}x$ est convergente.
Supposons par l'absurde qu'il existe $h \in \mathcal{E}_f$ bornée.
Comme $\forall x \geqslant 0,\ h''(x) - q(x)h(x) = f(x) \geqslant 0$, $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et $\int_{-\infty}^{0} -x f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
Donc $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} -x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Absurde.

$$\boxed{\text{Donc } (E_f) \text{ n'admet pas de solution bornée.}}$$

Partie IV

En posant $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = 1$, l'équation (E_f) devient $y'' - y = f$.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x^2 \end{cases}$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_1(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_2(x)\,\mathrm{d}x$ divergent.

$y = -1$ est une solution bornée de E_{f_1}. Les solutions de E_{f_2} sont de la forme $x \longmapsto Ae^x + Be^{-x} - (x^2 + 2)$ qui ne peuvent être bornées.

Solution du sujet 2

Partie I

1. D'après le théorème de Parseval, la suite $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge vers

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

2. Soit (u_n) une suite S.A.C.
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\|_\infty &= \sup \left| \sum_{k=n-p}^{-n-1} u_k e_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e_k \right| \\
&\leqslant \sup \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e_k + u_{-k} e_{-k} \right| \\
&\leqslant \sup \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| + |u_{-k}| \right) \\
&\leqslant \sup \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| + |u_{-k}| \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ reste d'une série convergente}
\end{aligned}$$

Donc (S_N) est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ complet, donc converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers un élément u.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x \longmapsto u_k e_k(x) e_n(x)$ est continue. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$|u_k e_k(x) e_{-n}(x)| = |u_k| \text{ S.A.C.}$$

Donc la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e_k e_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$. Par intégration terme à terme d'une série de fonctions,

$$\begin{aligned}
(e_n, u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k e_k(x) \right) e_{-n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k \int_{-\pi}^{\pi} e_k(x) e_{-n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= u_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les coefficients de Fourier de } u \text{ sont les termes de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

3. D'après la question précédente, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge, et

$$\mathrm{Im}\left(\frac{u(x)-u(0)}{x}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{S_N(x)-S_N(0)}{x}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n-1)x}$$

En posant $x=\frac{1}{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{u(\frac{1}{N})-u(0)}{\frac{1}{N}}\right)&=\mathrm{Im}\left(\frac{S_N(\frac{1}{N})-S_N(0)}{\frac{1}{N}}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n}{N})N}{n(n-1)}\\&=N\left(\mathrm{Im}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{e^{i\frac{n}{N}}-1}{n(n-1)}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n}{N})}{n(n-1)}\right)\end{aligned}$$

Or,

— $\left|N\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n}{N})}{n(n-1)}\right|\leqslant N\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=N\sum_{n=N+1}^{+\infty}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{N}{N}=1$

— $\forall N\geqslant 2$, $\forall n\leqslant N$, $0<\frac{n}{N}\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$. Par concavité de sin sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi(n-1)N}\leqslant\frac{\sin(\frac{n}{N})}{n(n-1)}$.
Or $\lim_{N\to\infty}N\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{\pi(n-1)N}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{\pi(n-1)}=+\infty$.
Donc $\lim_{N\to\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{u(\frac{1}{N})-u(0)}{\frac{1}{N}}\right)=+\infty$

u n'est pas dérivable en 0.

4. Pour tout $p,q\in\mathbb{N}$,

$$\|\Sigma_{p+q}-\Sigma_p\|_2^2=\|\sum_{n=p+1}^{p+q}\frac{e_n}{n}\|_2^2=\sum_{n=p+1}^{p+q}\frac{1}{n^2}\leqslant\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Donc Σ_N est de Cauchy dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$.

5. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$|(e_n,\Sigma_n)-(e_n,\sigma)|^2\leqslant\|\Sigma_N-\sigma\|_2^2\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Donc

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ (e_k,\sigma)=\begin{cases}0\text{ si }k\leqslant 0\\\frac{1}{k}\text{ si }k\geqslant 1\end{cases}$$

D'où,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ (e_n,(e^{ix}-1)\sigma)=(e_n,u)$$

Donc par injectivité des coefficients de Fourier, $u(x)=(e^{ix}-1)\sigma(x)$.

6. On a
$$\frac{u(x)-u(0)}{x} = \frac{e^{ix}-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} i\sigma(0)$$
car $\sigma \in E$, ce qui est contradictoire puisque u n'est pas dérivable en 0.

$\boxed{E \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_2 \text{ n'est donc pas complet.}}$

Partie II

1. Posons $g = \sum_{n=-N}^{N}(e_n, f)e_n \in E_N$. Et
$$\forall n \in [\![-N, N]\!],\ (g-f, e_n) = (e_n, f) - (e_n, f) = 0.$$
Donc $g - f \in E^{\perp}$
Pour tout $h \in E_N$,
$$\|h_f\|_2^2 = \|\underbrace{h-g}_{\in E_N} + \underbrace{g-f}_{\in E^{\perp}}\|_2^2 = \|h-g\|_2^2 + \|g-f\|_2^2$$
par théorème de Pythagore.

$\boxed{\text{Donc } \|h-f\|_2^2 \text{ est minimal lorsque } h = g.}$

2. On a
$$\begin{aligned} P_N^2 f = P_N(P_N f) &= \sum_{n=-N}^{N}(e_n, \sum_{k=-N}^{N}(e_k, f)e_k) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N}(e_k, f)(e_n, e_k) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}(e_k, f) \\ &= P_N f \end{aligned}$$
Donc $P_N f$ est un projecteur de E sur E_N. Par théorème de Pythagore, pour tout $f \in E$,
$$\|f\|_2^2 = \|f - P_N f\|_2^2 + \|P_N f\|_2^2$$

$\boxed{\text{Donc } P_N \text{ est un projecteur de } E \text{ sur } E_N, \text{ et pour tout } f \in E,\ \|P_N f\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2.}$

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
P_N f(x) &= \sum_{n=-N}^{N} (e_n, f) e_n(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \,\mathrm{d}y e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_N(u) \,\mathrm{d}u \ (u = x-y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_N(u) \,\mathrm{d}u \text{ car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}
\end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|P_N f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) \,\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)| \, |D_N(y)| \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|^2 \,\mathrm{d}y} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|^2 \,\mathrm{d}y}
\end{aligned}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^1([-\pi, \pi])$)
Or,

— $\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^2} \,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ car f est 2π-périodique

— $\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|^2 \,\mathrm{d}y} = \sqrt{2\pi} \|D_N\|_2 = \sqrt{2\pi}\sqrt{2N+1}$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P_N f(x)| \leqslant \sqrt{2N+1} \|f\|_2$
Donc $\|P_N f\|_\infty \leqslant \sqrt{2N+1} \|f\|_2$.

$$\boxed{\text{Donc } \alpha_N \leqslant \sqrt{2N+1}.}$$

5. Admettons que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} \frac{\varepsilon |y|}{\sqrt{\varepsilon + y^2}(\sqrt{\varepsilon + y^2} + |y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

car les calculs sont soit immédiats, soit extrêmement pénibles Je le ferai plus tard

Alors

$$0 \leqslant |D_N(x)| - \frac{D_N(x)^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + D_N(x)^2}} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

Donc, en intégrant entre $-\pi$ et π et en multipliant par $\frac{1}{2\pi}$ l'inégalité,

$$L_N \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) \psi_N^{\varepsilon^2}(x) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\varepsilon} + P_N \psi_N^{\varepsilon^2}(0)$$

Or,

$$|P_N \psi_N^{\varepsilon^2}(0)| \leqslant \|P_N \psi_N^{\varepsilon^2}\|_\infty \leqslant \alpha_N$$

car $\|\psi_N^{\varepsilon^2}\|_\infty < 1$
Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \; L_N \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \alpha_N$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha_N \geqslant L_N.}$

6. Soit $x \in [-\pi, \pi] \backslash \{0\}$. Pour tout $N \in N$,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin(Nx)\cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})\cos(Nx)}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \sin(Nx)\cot(\frac{x}{2}) + \cos(Nx) \\ &= 2\frac{\sin(Nx)}{x} + \sin(Nx)(\cot(\frac{x}{2}) - \frac{2}{x}) + \cos(Nx) \end{aligned}$$

Or, $\cot(\frac{2}{x}) \sim \frac{2}{x}$, donc $f : x \to \sin(Nx)(\cot(\frac{x}{2}) - \frac{2}{x}) + \cos(Nx)$ est prolongeable par continuité en 0. f étant continue sur $[-\pi, \pi]$ elle y est bornée indépendamment de N par $M \geqslant 0$.
Alors, par inégalité triangulaire,

$$\left| 2\frac{2\sin(Nx)}{x} \right| - M \leqslant |D_N(x)| \leqslant \left| \frac{2\sin(Nx)}{x} \right| + M$$

Par changement de variable,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{2\sin(Nx)}{x} \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u} \, \mathrm{d}u$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} \,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| \,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi} \frac{|sinu|}{u} \,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} |\sin(u)| \,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} \,\mathrm{d}u \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi} \ln(N)
\end{aligned}$$

Et,

$$\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin(u)| \,\mathrm{d}u \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi} \ln(N)$$

Donc $\frac{2}{\pi} \int_0 \frac{|\sin u|}{u} \,\mathrm{d}u \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2} \ln(N)$

Ainsi, par encadrement, $L_N \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2} \ln(N)$.

7. On a

$$L_N \leqslant \|D_N\|_2$$

Donc

$$\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_2 = +\infty$$

Donc la norme de la suite d'opérateurs $(P_N)_N$ tend vers l'infini.

Partie III

1. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a
   — $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2$
   — $\|f'\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f'_n|^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
f'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} (\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x) \text{ intégration par parties} \\
&= \frac{in}{2\pi} f_n
\end{aligned}$$

   Donc $\|f'\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 f_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 = \|f\|_1^2.}$$

Réciproquement, en considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie dans la question I.3, $\frac{(1+n^2)}{n^2(n-1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

2. Soit $f \in E$. $P_N f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap E$. Donc par question précédente,

$$\|P_N\|_2^2 + \|(P_N f)'\|_2^2 = \|P_N f\|_1^2$$

.
Or,
$\|P_N f(x)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |f_n|^2$ et $\|(P_N f)'(x)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} n^2 |f_n|^2$.
Donc $\|P_N f(x)\|_2^2 + \|(P_N f)'(x)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} (1+n^2)|f_n|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_1^2$.
Ainsi, $P_N f \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_1} f$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_1 \text{ est dense dans } E \text{ pour la norme } \|\cdot\|_1.}$$

3. Soit $f \in H_1$.

$$\begin{aligned}
\|P_N f - f\|_2^2 &= \sum_{|n|\geqslant N} |f_n|^2 \\
&= \sum_{|n|>N} \frac{(1+n^2)|f_n|}{1+n^2} \\
&\leqslant \frac{1}{1+N^2} \sum_{|n|\geqslant N} (1+n^2)|f_n|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{N+1} \sum_{|n|>N} (1+n^2)|f_n|^2 \\
&= \frac{1}{N+1} \|f\|_1^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } N \in \mathbb{N},\ \|P_N f - f\|_2 \leqslant \tfrac{1}{N+1}\|f\|_1.}$$

4. Soient $f \in E_1$ et $x, y \in [-\pi, \pi]$. On a

$$f^2(x) = f^2(x) + 2\int_y^x f(t) f'(t)\, \mathrm{d}t$$

Alors, par inégalité triangulaire,

$$|f(x)|^2 \leqslant |f(y)|^2 + 2\int_y^x |f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant |f(y)|^2 + 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par rapport à y, et en multipliant par $\frac{1}{2\pi}$

$$|f(x)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 + 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\|f\|_2\|f'\|_2$$

Donc

$$|f(x)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 + 4\pi\|f\|_2\|f'\|_2 \leqslant 4\pi\|f\|_2(\|f\|_2 + \|f'\|_2)$$

Par convexité de $t \longmapsto t^2$,

$$\|f\|_2 + \|f'\|_2 \leqslant \sqrt{2}(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)^{1/2} = \sqrt{2}\|f\|_1$$

Donc

$$|f(x)|^2 \leqslant 4\pi\sqrt{2}\|f\|_1\|f\|_2$$

D'où par passage au sup, comme f est 2π-périodique,

$$\|f\|_\infty \leqslant 4\pi\sqrt{2}\|f\|_1^{1/2}\|f\|_2^{1/2}$$

Par densité, de E_1 dans H_1 et continuité des normes, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_\infty \leqslant 4\pi\sqrt{2}\|f\|_1^{1/2}\|f\|_2^{1/2}$$

.

5. Par question précédente,

$$\|P_N f - f\|_\infty \leqslant K_1\|P_N - f\|_2^{1/2}\|P_N f - f\|_1^{1/2}$$

Or, par théorème de Pythagore, $\|P_N f - f\|_2 \leqslant \|f\|_2$ et par question III.2,

$$\|P_N f - f\|_2 \leqslant \frac{1}{N+1}\|f\|_1.$$

Donc $\|P_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{N+1}}\|f\|_1$.

E_1 est dense dans H_1 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On peut approcher par la norme infinie les fonctions de H_1 par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Partie IV

1. Soit $f \in H_1$ En remplaçant N par 0 dans l'inégalité de III.2,

$$\|P_0 f - f\|_2 = \sqrt{\sum_{|n|\geqslant 0} |f_n|^2} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2} = \|f\|_2 \leqslant \|f\|_1.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } f \in H_1,\ \|f\|_2 \leqslant \|f\|_1.}$$

2. Soient $f, g \in H_1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
   - $\|f\|_1 \leqslant 0$ par somme de termes positifs
   - $\|\lambda f\|_1 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|(e_n, \lambda f)|^2\right)^{1/2} = \left(|\lambda|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda|\|f\|_1$
   - $\|f\|_1 = 0$ si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| = 0$ *i.e.* $f = 0$
   - Si $f + g = 0$, l'inégalité est clairement vraie. Supposons que $f + g \neq 0$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n+g_n|^2 \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n||f_n+g_n| + \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|g_n||f_n+g_n| \\
&\leqslant \left(\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n|^2} + \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g_n|^2}\right)\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n+g_n|^2} \\
&= (\|f\|_2 + \|g\|_2)\|f+g\|_1 \\
&\leqslant (\|f\|_1 + \|g\|_1)\|f+g\|_1 \text{ inégalité de la question précédente}
\end{aligned}$$

Alors $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.

$$\boxed{\text{Donc } \|\cdot\|_1 \text{ est une norme sur } H_1.}$$

Soit $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q \geqslant n_0$, $\|f^p - f^q\|_1 \leqslant \varepsilon$
Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ ainsi fixé, on a en particulier

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall p \geqslant q \geqslant n_0,\ |f_j^p - f_j^q| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

Donc à j fixé, $(f_j^p)_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet. Donc la suite $(f_j^p)_p$ est convergente dans $\mathbb{C}$ vers un certain $f_j = (e_j, f)$ où $f \in E$ par continuité du produit scalaire.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=-k}^{k}(1+j^2)|f_j^p - f_j^q|^2 \leqslant \varepsilon$$

Donc en faisant tendre q vers $+\infty$,

$$\sum_{j=-k}^{k} (1+j^2)|f_j^p - f_j|^2 \leqslant \varepsilon$$

Par passage à la limite, quand $k \to +\infty$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+j^2)|f_j^p - f_j|^2 \leqslant \varepsilon$$

Donc $\lim_{p\to\infty} \|f^p - f\|_1 = 0$ donc en particulier, $f - f^p \in H_1$.
D'où $f = (f - f^p) + f^p \in H_1$.

$\boxed{\text{Ainsi, toute suite de Cauchy dans } H_1 \text{ converge dans } H_1 \text{ donc } H_1\text{, donc } H_1 \text{ est complet.}}$

3. D'après III.4, pour tout $f \in H_1$, $\|f\|_\infty \leqslant K_1 \|f\|_2^{1/2} \|f\|_1^{1/2}$.
D'après IV.1, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1$. Donc $\|f\|_\infty \leqslant K_1\|f\|_1$ avec $K_1 \in]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } K_2 \text{ telle que pour tout } f \in H_1,\ \|f\|_\infty \leqslant K_2\|f\|_1.}$

4. a) Soit $(g^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_1 telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|g^p\|_1 \leqslant 1.$$

Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable, notons ses éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $\|g^p\|_1 \leqslant 1$, en particulier, $|(g^p, e_{a_0})| \leqslant \frac{1}{1+a_0^2}$. Donc la suite $((g^p, e_{a_0}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((g^{\varphi_0(p)}, e_{a_0}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
Comme la suite $((g^p, e_{a_1}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, en particulier, $((g^{\varphi_0(p)}, e_{a_1}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((g^{\varphi_0(\varphi_1(p))}, e_{a_1}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
Par récurrence, comme $((g^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n(p)}, e_{a_{n+1}}))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, par thorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_{n+1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((g^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_{n+1}(p)}, e_{a_{n+1}}))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \varphi_n(n)$
$\psi(n+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))$. Or $\varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1 > n$. Donc $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) = \psi(n)$. Donc ψ est strictement croissante, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe une application strictement croissante } \psi \text{ de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{Z}, \text{ la suite } ((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}} \text{ soit convergente.}}$

b) Par passage à la limite, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\ell_n| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$. Donc $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.

$\boxed{\text{D'après I.2, } S_N \text{ converge vers un élément } \ell \in E \text{ pour la norme } \|\cdot\|_\infty.}$

c) Par unicité de la limite, $\ell = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ell_n e_n$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e_n, \ell) = \ell_n$, et $(1+n^2)|\ell_n|^2 \leqslant \frac{1}{1+n^2}$, terme général d'une série convergente. Donc $((1+n^2)|\ell_n|^2)$ est une S.A.C.

$\boxed{\text{Ainsi, } \ell \in H_1.}$

d) Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$g_n^p = \begin{cases} \frac{1}{4(1+n^2p^2)} & \text{si } p \neq n \\ \frac{1}{4(1+n^2p^2)} + \frac{1}{4\sqrt{1+p^2}} & \text{si } p = n \end{cases}$$

La série de terme général $(g_n^p e_n)$ est normalement convergente, donc $g^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n^p$ est bien défini.

De plus, $(1+n^2)|g_n^p|^2$ est le terme général d'une série convergente, et

$$\|g^p\|_1^2 = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+n^2}{(1+n^2p^2)^2} + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{4} \leqslant 1$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell_n = \lim_{p\to+\infty} g_n^p = 0.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|g^p - \ell\|_1^2 = \frac{1}{4}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+n^2}{(1+n^2p^2)^2} + 1).$$

Or, par le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+n^2}{(1+n^2p^2)^2} = 0$$

Donc

$$\lim_{p\to\infty} \|g^p - \ell\|_1 = \frac{1}{4}$$

Partie V

1. Notons $A = (e^{ilx_j})_{0\leqslant l,j\leqslant 2N}$ et $B = (\frac{1}{2N+1}e^{-ilx_j})_{0\leqslant l,j\leqslant 2N}$.
Soit $a, b \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

$$\begin{aligned}
[AB]_{a,b} &= \sum_{k=0}^{2N} A_{a,k}B_{k,b} \\
&= \sum_{k=0}^{2N} e^{iax_k}e^{-kx_b} \\
&= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} e^{i\frac{2\pi}{2N+1}k(a-b)} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } a=b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On montre de même que $[BA]_{a,b} = \delta_{a,b}$

> Ainsi, la matrice carrée d'ordre $2N+1$ $(e^{ilx_j})_{0\leqslant l,j\leqslant 2N}$ a pour inverse $(\frac{1}{2N+1}e^{-ilx_j})_{0\leqslant j\leqslant 2N, 0\leqslant \ell\leqslant 2N}$.

2. a) Soit $f \in E$.

Notons $F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

Pour tout $\ell \in [\![0, 2N]\!]$,

$$[BF]_\ell = \sum_{j=0}^{2N} B_{\ell,j}F_j = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} e^{-i\ell x_j}f(x_j) = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j}f(x_j)$$

car f est 2π-périodique.
Donc

$$\begin{aligned}[ABF]_k &= \sum_{\ell=0}^{2N} A_{k,l}[BF]_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{2N} e^{ikx_\ell}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j}f(x_j) \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} e^{i\ell x_k}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j}f(x_j)\end{aligned}$$

Or $AB = I_{2N+1}$. Donc

$$\forall k \in F_{2N+1},\ [ABF]_k = F_k$$

i.e.

$$\forall k \in F_{2N+1},\ f(x_k) = \sum_{\ell=-N}^{N} e^{i\ell x_k}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{-i\ell x_j}f(x_j)$$

Posons $C_N f = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} f(x_j)e^{-i\ell x_j}e_\ell \in E_N$.
Pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$C_N f(x_j) = \frac{1}{2N+1}\sum_{a=-N}^{N} f(x_a)\sum_{b=-N}^{N} e^{ib(x_a-x_j)} = f(x_j)$$

Soient C_N et C'_N vérifiant pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $C_N f(x_j) = C'_N(x_j)$. Alors pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $C_N - C'_N(x_j) = 0$. Or, $C_N - C'_N$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à $2N$ ayant $2N+1$ racine. Donc $C_N = C'_N$.

> Ainsi, il existe un unique élément de E_N noté $C_N(f)$ tel que $\forall j \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $(C_N f)(x_j) = f(x_j)$.

b) Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$

$$(C_N(f+\lambda g))(x_j) = (f+\lambda g)(x_j) = f(x_j) + \lambda g(x_j) = C_N f(x_j) + \lambda C_N(g)(x_j)$$

Donc

$$C_N(f+\lambda g) = C_N f + \lambda C_N g$$

c) Par définition, $C_N(e_{2N+1}) \in E_N$. Donc

$$C_N(e_{2N+1}) = \sum_{j=-N}^{N} (e_j, C_N(e_{2N+1}))$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$(e_k, C_N(e_{2N+1})) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} e^{-ikx_j} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc $C_N(e_{2N+1}) = e_0$. Mais $P_N(e_{2N+1}) = 0$.

$\boxed{\text{Donc } C_N \neq P_N.}$

3. a) Soit $\ell \in \mathbb{Z}$. Par définition de $\hat{z}$, $\hat{z}$ ne dépend que de ℓ.
Or,

$$\hat{z}_{\ell+2N+1} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in \mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i(\ell+2N+1)x_k} z_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in \mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i\ell x_k} z_k = \hat{z}_\ell$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \hat{z}_\ell \text{ ne dépend que de la classe de } \ell \text{ modulo } 2N+1.}$

b) On a, d'après V.2 :

$$\begin{aligned} C_N f &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{\ell=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} e_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} \underbrace{f(x_j)}_{\varphi_j} e^{-i\ell x_j} \right) e_\ell \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\hat{k}} e_k \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\hat{k}} e_k.}$

4. Soit $h \in E_{2N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}(e_\ell, h)e_\ell(x_j) \\
&= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-i2\pi\ell x_j}\,\mathrm{d}x\right]e^{2i\pi\ell x_j} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N} h(x)\underbrace{e^{2i\pi\ell(x_j-x)}}_{=0 \text{ si } \ell\neq 0}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $h \in E_{2N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j)$.

5. a) Soient f et g dans E. Alors $f\overline{g} \in E_{2N}$. Donc d'après la question précédente,

$$[f,g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = (f,g)$$

Ainsi, pour tous $f, g \in E_N$, $[f,g] = (f,g)$.

b) Soient $f, g \in E$.

$$[f - C_N f, g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N}\underbrace{(f(x_j) - C_N f(x_j))}_{=0} g(x_j) = 0$$

Ainsi, pour tous $f, g \in E$, $[f - C_N f, g] = 0$.

c) Soit $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$[e_n, e_m] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} e^{\frac{2i\pi}{2N+1}(m-n)j} = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n[2N+1] \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

6. Soit $f \in H_1$. Soit $\ell \in Z$.

$$\sum_{n\in Z}|f_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{1+n^2}}|f_n| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

par inégalité de Cauchy Schwarz et hypothèse sur f.
Donc en particulier, la suite extraite $(f_{\ell+(2N+1)k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.
On a

$$C_N(f) = \sum_{\ell=-N}^{N} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} \right] e_\ell$$

Or, pour tout $\ell \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} = [e_\ell, f] = [e_\ell, C_N f]$$

Avec $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_n, f) e_n = \sum_{\ell=-N}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) e_{\ell+(2N+1)k}$, par linéarité de C_N,

$$C_N f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) C_N(e_{\ell+(2N+1)k})$$

Or, pour tous $\ell \in \mathbb{F}_{2N+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, $C_N(e_{\ell+(2N+1)k}) = e_\ell$.
Donc $C_N f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) e_\ell$.
Par linéarité à droite de $[\cdot,\cdot]$, pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$[e_j, C_N f] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f)[e_j, e_\ell] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{j+(2N+1)k}, f)$$

Donc pour tout $\ell \in \mathbb{F}_{2N+1}$,

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) e^{-i\ell x_j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e_{\ell+(2N+1)k}, f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\ell+(2N+1)k} = C_{N,\ell}(f)$$

$\boxed{\text{Ainsi, } C_N(f) = \sum_{\ell\in\mathbb{F}_{2N+1}} C_{N,\ell}(f) e_\ell.}$

7. a) Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} C_N(P_N f) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{\ell=-N}^{N} P_N f(x_j) e^{-i\ell x_j} e_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} P_N f(x_j) e^{-i\ell x_j} \right] e_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^{N} [e_\ell, P_N f] e_\ell \end{aligned}$$

Or $P_N f$ et e_ℓ sont des éléments de E_N. D'après V.5)a,

$$[e_\ell, P_N f] = (e_\ell, P_N f) = (e_\ell, f).$$

Donc $C_N(P_N f) = \sum_{\ell=-N}^{N} (e_\ell, P_N f) e_\ell = P_N f.$,

$$f - C_N f = f - P_N f + P_N f - C_N f = g_N + C_N P_N f - C_N f = g_N - C_N g_N.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } f - C_N f = g_N - C_N g_N.}$

b) D'après la question précédente,

$$\|f - C_N f\|_2^2 = \|g_N - C_N g_N\|_2^2.$$

Or, $g_N \in E_N^\perp$ et $C_N g_N \in E_N$.
Donc

$$\|g_N - C_N g_N\|_2^2 = \|g_N\|_2^2 + \|C_N g_N\|_2^2$$

et

$$\begin{aligned}
\|C_N g_N\|_2^2 &= (C_N g_N, C_N g_N) \\
&= [C_N g_N, C_N g_N] \\
&= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} C_N g_N(x_j) \overline{C_N g_N(x_j)} \\
&= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} g_N(x_j) \overline{g_N(x_j} \\
\|g_N\|_2^2.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 3,

$$\|g_N\|_2^2 \leqslant \frac{K_1}{N+1} \|f\|_1$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \|f - C_N f\|_2 \leqslant \frac{2K_1}{N+1} \|f\|_1.}$

8. Le calcul de C_N requiert des évaluations en un certain nombre de points tandis que celui de P_N nécessite de connaître la valeur des intégrales, ce qui est plus pénible.

Partie VI

1. Soit $\ell \in \mathbb{F}_M$. Pour calculer $\hat{z}_\ell$, il faut $2M+1$ multiplications. La somme ayant $(2M+1)$ termes, il faut $2M$ additions, soit $4M+1$ opérations.

   $\boxed{\text{$\hat{z}$ étant entièrement définie par le calcul de tous les $\hat{z}_\ell$, le calcul de $\hat{z}$ nécessite $(4M+1)(2M+1)$ opérations.}}$

2. Supposons que $M = 2M_1$. Il est clair que

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M1}} \omega^{2k_1 \ell} z_{2k_1} + \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{(2k_2-1)\ell} z_{2k_2-1}$$

Posons $x : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_{M_1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & z_{2k} \end{array}$ et $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_{M_1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & \omega^{-\ell} z_{2k-1} \end{array}$

Alors

$$\hat{z} = \text{T.F.D.}(\omega^2, M_1)(x) + \text{T.F.D.}(\omega^2, M_1)(y).$$

Ainsi, T.F.D.(ω^2, M_1) peut s'effectuer à l'aide de deux opérations T.F.D.(ω^2, M_1).

3. On suppose que $M = 2^n$
Notons $\hat{z} = \text{T.F.D.}(\chi, 2^n)(z)$. D'après ce qui précède,

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M1}} \chi^{2k_1\ell} z_{2k_1} + \frac{1}{\chi^\ell} \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \chi^{(2k_2)\ell} z_{2k_2-1}$$

Le calcul de $\hat{z}_\ell$ peut s'effectuer à l'aide de deux T.F.D.$(\chi^2, 2^{n-1})$ et une multiplication. Comme pour $\hat{z}_0$, la multiplication n'est pas nécessaire, on pourra effectuer $2^n - (-2^n) = 2^{n+1}$ multiplications supplémentaires pour calculer $\hat{z}$.

Ainsi, $\Sigma_n \leqslant 2\Sigma_{n-1} + 2^{n+1}$.

Par récurrence immédiate, $\Sigma_n \leqslant 2^n\Sigma_0 + n2^{n+1}$.
Pour $M = 1$, il n'y a pas de calcul à faire, donc $\Sigma_0 = 0$.

Ainsi, $\Sigma_n \leqslant 2M\log_2(M)$

4.

n	temps S_M	temps de Σ_n
20	$8,80.10^4$	$4,19.10^7$
25	$9,01.10^7$	$1,68.10^9$
30	$9,22.10^{18}$	$6,44.10^{10}$

5. Soient $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^{p-1} \leqslant PQ \leqslant 2^p$. On peut majorer le nombre d'opérations par $2.2^p p$.
6. On considère M défini comme dans la question précédente. Le calcul de $C_M f$ nécessite d'effectuer la transformée de Fourier discrète de f que l'on peut faire en $2M(P+Q)$ opérations. À cela s'ajoutent les opérations élémentaires, soit $2M+1$ multiplications et $2M$ additions. Donc le calcul de $C_M f$ nécessite $2M(P+Q+2)+1$ opérations.

Solution du sujet 3

Partie I

1. *Méthode 1*
   Posons $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k$.
   Par définition,
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$
   Donc
$$\chi_C(X) = \det(XI_n - C) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & & & \vdots \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -a_{n-1} \\ & & & -1 & X - a_n \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_{k+1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & & \vdots \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -a_{n-1} \\ & & & -1 & X - a_n \end{vmatrix}$$
   En développant par rapport à la première ligne,
$$\chi_C = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} P(X) = P(X)$$
$$\boxed{\chi_C = -a_1 - a_2 X - \cdots - a_n X^{n-1} + X^n}$$
   .

   Méthode 2
   On développe par rapport à la dernière colonne.
2. Remarquons que
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ C(e_k) = e_{k+1}, \text{et } C(e_n) = a_n e_n.$$
   Donc par récurrence immédiate, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $C^i(e_1) = e_{i+1}$.
   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 I_n + \lambda_2 C + \cdots + \lambda_n C^{n-1} = 0$. Alors, en particulier,
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 C^2(e_1) + \cdots + \lambda_n C^{n-1}(e_1) = 0,$$
   i.e.
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$
   Or, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } (I_n, C, \dots, C^{n-1}) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_n(k).}$$

Soit $P \in k[X]$ tel que $P(C) = 0$. Notons m son degré. Si $m \leqslant n-1$, $P(C)$ est une combinaison linéaire nulle d'une sous famille de $(I_n, C, \dots, C^{n-1})$ est une partie libre de $\mathcal{M}_n(k)$., Donc P est nul. Si $\deg(P) \geqslant n$, effectuons la division euclidienne de P par χ_C. Donc il existe $Q, R \in k[X]$ tels que $P = \chi_C Q + R$, où $\deg(R) \leqslant n-1$ Or, par théorème de Kayley Hamilton, $\chi_C(C) = 0$. Donc $R(C) = 0$. Donc, d'après le premier cas $R = 0$, et $P = \chi_C Q$.

$$\boxed{\text{Ainsi, tout polynôme } P \text{ tel que } P(C) = 0 \text{ est divisible par } \chi_C.0}$$

3. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$s_{j,i} = \left\{ \begin{array}{l} s_{j+i-n} \text{ si } j+i > n \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right. = s_{i,j}$$

$$\boxed{\text{Donc } S_\sigma \text{ est une matrice symétrique.}}$$

Par définition,

$$\det(S_\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} [S_\sigma]_{i,\tau(i)}$$

Or, pour tout $\tau \in \mathcal{S}_n$, s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $i + \tau(i) \leqslant n$, alors $\prod_{i=1}^{n} [S_\sigma]_{i,\tau(i)} = 0$. Soit $\tau \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $i + \tau(i) > n$. Alors $\tau(1) > n-1$, donc $\tau(1) = n$. Par suite, comme $\tau(2) \neq \tau(n)$, et $\tau(2) > n-2$, nécessairement, $\tau(2) = n-1$. Par récurrence finie immédiate, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\tau_i = n - i + 1$.

$$\boxed{\text{Donc } \det(S_\sigma) = \prod_{i=1}^{n} s_1 = s_1^n.}$$

4. Soit $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ dans k^n tel que $s_1 = 1$ et tel que la matrice $S_\sigma C$ est symétrique. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
[S_\sigma C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [S_\sigma]_{i,k} [C]_{k,i} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} [S_\sigma]_{i,j+1} \text{ si } j \neq n \\ \sum_{k=n-i+1}^{n} [S_\sigma]_{i,k} a_k \text{ si } i+j \geqslant n \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} s_{i+j+1-n} \text{ si } i+j \geqslant n \text{ et} j \neq n \\ \sum_{k=n-i+1}^{n} s_{i+k-n} a_k \text{ si } j = n \\ 0 \text{ si } i+j < n \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $[S_\sigma C]_{i,j} = [S_\sigma C]_{j,i}$.

Pour $j = n$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$[S_\sigma C]_{i,n} = \sum_{k=n-i+1}^{n} s_{i+k-n} a_k$$

Et

$$[S_\sigma C]_{n,i} = s_{1+i}$$

Donc

$$s_{1+i} = \sum_{k=n-i+1}^{n} s_{i+k-n} a_k.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, s_i s'exprime en fonction de $(s_1, \ldots, s_{i-1})$, donc par récurrence immédiate, tous les s_i s'expriment en fonction de s_1.
Réciproquement, on vérifie que σ défini précédemment convient.

5. D'après la question précédente, $S_\sigma C$ est symétrique. Comme $s_1 = 1 \neq 0$, S_σ est inversible. Or $C = S_\sigma^{-1}(S_\sigma C)$. En posant $T = S_\sigma^{-1}$, et $R = S_\sigma C$, T est une matrice symétrique inversible, et R une matrice symétrique.

   Ainsi, il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$.

6. On a $T{}^tCT^{-1} = T({}^tR{}^tT)T^{-1} = TRTT^{-1} = TR = C$.

   Ainsi, il existe une matrice symétrique inversible T telle que $T{}^tCT^{-1}$.

7. $s_1 = 1$, $s_2 = s_1 a_n = 2$, $s_3 = s_2 a_n + s_1 a_{n-1} = 4 - 1 = 3$,...
   Montrons par récurrence sur $i \in [\![1, n]\!]$ que :

$$s_i = i \tag{H}$$

   — $i = 1$: $s_1 = 1$ par définition de σ

   — Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que (H) soit vraie. On a

$$s_{i+1} = s_i a_n + s_{i-1} a_{n-1} = 2i - (i-1) = i + 1$$

Partie II

1. Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Elle admet une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$. Comme B est non dégénérée, $\det B \neq 0$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B(e_i, e_i) = \lambda_i \neq 0$. Par définition de k, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\mu_i \in k$ tel que $\lambda_i = \mu_i^2$. Donc $\frac{1}{\mu_i^2} B(e_i, e_i) = 1$. Par bilinéarité de B, $B(\frac{e_i}{\mu_i}, \frac{e_i}{\mu_i}) = 1$.

   Ainsi, il existe $x \in k^n$ tel que $B(x, x) = 1$, et dans la base $(\frac{e_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{e_n}{\mu_n})$, B a pour matrice I_n.

2. Soit $M \in \mathcal{GL}(k)$. L'implication réciproque est immédiate. Supposons que M est symétrique. Comme, M est inversible, il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B qui a pour matrice M dans la base canonique. D'après la question précédente, il existe une base orthogonale dans laquelle B a pour matrice I_n. Autrement dit, il existe $P \in \mathcal{GL}(k)$ tel que $M = {}^tPP$.
3. D'après la question 5, il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$. D'après la question précédente, $T = {}^tPP$. Donc

$$C = {}^tPPR = {}^tP(PR{}^tP)({}^tP)^{-1}$$

Donc C est semblable à $PR{}^tP$ qui est symétrique puisque R l'est.

Ainsi, C est semblable à une matrice symétrique.

4. Considérons la matrice C avec $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors C a pour polynôme caractéristique X_n, dont la seule racine est 0. Or, C est non nulle, donc C n'est pas diagonalisable. De plus C est semblable à une matrice symétrique. Donc cette matrice symétrique n'est pas diagonalisable.

Partie III

1. Il s'agit de montrer que l'ensemble des matrices telles que leur polynôme minimal est égal à leur polynôme caractéristique est un ouvert.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   - si P annule M, alors χ_M divise P
   - il existe $x \in k^n$ tel que $(x, Mx, ..., M^{n-1}x)$ est libre

   Considérons les morphismes d'algèbres suivants :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & P(M) \end{array}$$

et pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & P(M)(x) \end{array}$$

Notons μ le générateur unitaire du noyau de φ, et μ_x celui du noyau de φ_x.
Soient $\mu = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition de μ en facteurs irréductibles et $E_i = \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(M))$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $x_i \in E_i$ tel que $P_i^{\alpha_i - 1}(M)(x_i) \neq 0$. Comme $P_i^{\alpha_i}$ est irréductible, $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$.
Posons $x = x_1 + \cdots + x_r$.

$$\mu_x(M)(x) = \mu_x(M)(x_1) + \cdots + \mu_x(M)(x_r)$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_x(M)(x_i) \in E_i$. Comme les E_i sont en somme directe, $\mu_x(M)(x_i) = 0$, pour tout i.
Ainsi, $\mu_{x_i} | \mu_x$. Et comme $\mu_x | \mu_x$, $\mu_x = \mu$ (car les deux polynômes sont unitaires).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu_x = \mu$ En considérant le morphisme $\psi_{M,x} = \varphi_x \circ \varphi$, on a, par le théorème d'isomorphisme, $\mathbb{R}[X]/(\mu_x) \simeq E_x$, où $E_x = \mathrm{Vect}(x, Mx, \dots M^{n-1}x)$.
Or $\deg(\mu_x) = \deg(\mu)$.
Donc $\chi_M = \mu$ si, et seulement si $\mu_x = \chi$, *i.e.* $\deg(\mu_x) = n$, soit $\dim(E_x) = n$, *i.e.* $(x, Mx, \dots, M^{n-1}x)$ est base de son propre Vect.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Mx, \dots, M^{n-1}x)$ est une famille libre.
Considérons l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(x, Ax, \dots, A^{n-1}x) \end{array}$. Par définition de x, $u(M) \neq 0$. Comme u est continue, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de M tel que u soit non nulle sur $\mathcal{W}$. Donc d'après la propriété énoncée au début, $\chi_A = \mu_A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{W}$.

Ainsi, Ω est un ouvert.

2. Soit λ une valeur propre de C. Alors, il existe un vecteur propre $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $Cx = \lambda x$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Donc

$$\lambda x_i = (\lambda - \alpha_{i,i}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{i,j} x_j$$

Donc

$$|\lambda||x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |c_{i,j}||x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |c_{i,j}| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| = 1 + |a_i| \leqslant \|x\|_\infty \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + a_k)$$

Donc

$$|\lambda|\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 + |a_i|)$$

Comme $x \neq 0$, $|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(1 + |a_i|)$.

Ainsi, si λ est une valeur propre de C, alors $|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(1 + |a_i|)$.

3. a) Comme on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Nous utiliserons dans la suite la norme infinie.
Comme Ω est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(C, \varepsilon) \subset \Omega$. Comme $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers C, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant l$, $\|C - M_m\| < \varepsilon$.
Soit $m \geqslant l$. Comme M_m est diagonalisable et son polynôme caractéristique est égal à son polynôme minimal, nécessairement, ses valeurs propres sont distinctes deux à deux.

Ainsi, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant l$, M_m a n valeurs propres distinctes deux à deux.

b) Soient $\varepsilon > 0$ et l définis comme dans la question précédente. Posons $K_1 = \max_{\substack{1\leqslant n\\ m\leqslant l}} |\lambda_i^m|$ et $K_2 = \varepsilon + \|C\|$.
Pour tout $m \leqslant l$, pour tout λ valeur propre de M_m, il est clair que $|\lambda| \leqslant K_1$.
Pour tout $m \geqslant l$,

$$|\lambda| \leqslant \|M_m\| \leqslant \|M_m - C\| + \|C\| \leqslant \varepsilon + \|C\|.$$

Donc, en posant $K = \max(K_1, K_2)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute valeur propre λ de M_m, $|\lambda| \leqslant K$.

c) Le polynôme caractéristique étant à coefficients qui sont fonction continue des coefficients de la matrice, et comme (M_m) converge vers C, la suite de polynômes caractéristiques (χ_{M_m}) converge vers χ_C. Donc les suites $(\lambda_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers les racines de χ_C qui sont nécessairement dans $\mathbb{R}$.

4. Considérons la matrice C avec $a_1 = 1$ et $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. C n'est pas limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car toutes ses racines ne sont pas dans $\mathbb{R}$.

Solution du sujet 4

Partie I

1. a) Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs ou nuls, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n \leqslant f(x) \leqslant s$$

À n fixé, par passage à la limite, lorsque x tend vers 1,

$$\sum_{k=0}^{n} a_n \leqslant s$$

La série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée, elle est donc convergente puisque les termes sont positifs ou nuls. Donc la série est normalement convergente sur $[-1, 1]$, et donc f est continue sur cet intervalle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $|x| \leqslant 1$, $a_n|x|^n \leqslant a_n$.
Donc par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to 1, x<1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

Ainsi, la série de terme général a_n est convergente de somme s.

b) Considérons $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ sur $]-1,1[$. La série de terme général $(-1)^n$ n'est pas convergente.

2. a) Soient $0 \leqslant x < y < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $F^{n+2} \geqslant 0$ sur $[0,1[$, donc F^{n+1} est croissante. Donc,

$$\forall t \in [0,1[,\ (1-t)^n F^{(n+1)}(tx) \leqslant (1-t)^n F^{(n+1)}(ty)$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(ty)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} r_n(y)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } 0 \leqslant x < y < 1,\ 0 \leqslant r_n(x) \leqslant r_n(y)\left(\tfrac{x}{y}\right)^{n+1}.}$$

b) Soit $0 \leqslant x < 1$. Soit $y \in]x,1[$. Comme F est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un développement de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre n et $n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$F(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} y^k + r_n(y) \text{ et } \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} y^k + r_{n+1}(y)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1}(y) = r_n(y) - \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} y^{n+1}$$

Or, $x \geqslant 0$, et $F^{n+1} \geqslant 0$. Donc la suite $(r_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge dans $\mathbb{R}_+$.
D'après la question précédente,

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(ty)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} r_n(y)$$

Donc par passage à la limite à droite, comme $(r_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

Donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } 0 \leqslant x < 1,\ F(x) \text{ est somme de sa série de Taylor à l'origine.}}$$

c) Soit $x \in]-1,0[$. L'égalité de I.2.a reste valable pour $y \in]0,1[$.
De même pour $y \in]0,1[$, $(r_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc les arguments précédents restent valables, et le reste intégral $(r_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } -1 < x < 1,\ F(x) \text{ est somme de sa série de Taylor à l'origine.}}$$

Partie II

1. Posons, pour tout $0 \leqslant x < 1$, $g(x) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} G(dx)$, de sorte que, pour tout $x \in [0, 1[$

$$g(x)g''(x) + x^{m+1} = \frac{1}{d^{m+1}} G(dx)G''(dx) + x^{m+1}$$

Or, si $x \in [0, 1[$, $dx \in [0, d[$, donc $G(dx)G''(dx) + d^{m+1}x^{m+1} = 0$.
Donc $g(x)g''(x) + x^{m+1} = 0$.
De plus, $g'(0) = \frac{1}{d^{(m+1)/2}} G'(0) = 0$, et $g(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} G(d) = 0$ par hypothèse sur G.
Enfin, $g(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} G(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} > 0$.

> Ainsi, il existe $g \in E(0, 1)$ et un nombre $k \in \mathbb{R}_+$ tels que :
>
> $$\begin{cases} g(x)g''(x) + x^{m+1} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ g'(0) = 0 \\ g(1) = 0 \\ g(0) = k \end{cases}$$

2. Considérons la fonction f : $\begin{array}{ccc} [0, 1[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} g' \\ -\frac{x^{m+1}}{g} \end{pmatrix} \end{array}$. Elle définit l'équation différentielle donnée :

$$\begin{pmatrix} g' \\ g'' \end{pmatrix} = f(x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix})$$

La fonction f est clairement continue.
Soient g_1 et g_2 deux solutions de l'équation différentielle. Comme g_1 et g_2 sont continues sur $[0, 1]$, elles y sont bornées. De plus, elle sont nécessairement non nulles. Donc il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $m \geqslant |g_1|$ et $m \geqslant |g_2|$

$$\|f(x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}) - f(x, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}) \|_2 = \sqrt{(g_1' - g_2')^2 + (\frac{x^{m+1}}{g_1} - \frac{x^{m+1}}{g_2})^2}$$
$$\leqslant \sqrt{(g_1' - g_2')^2 + \frac{1}{m^2}(g_1 - g_2)^2} \leqslant \max(1, \frac{1}{m^2}) \| \begin{pmatrix} g_1 \\ g_1' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_2 \\ g_2' \end{pmatrix} \|_2$$

Donc f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale g telle que $\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g(0) = \frac{1}{d^{(m+3)/2}} \end{cases}$.

> Via le changement de variable inverse, l'équation différentielle possède une et une seule solution maximale telle que $\begin{cases} G(0) = 1 \\ G'(0) = 0 \end{cases}$.

3. On suppose que $d = +\infty$. Supposons par l'absurde $G(y) > 0$ pour tout $y > 0$. Alors, pour tout $y > 0$, $G''(y) < 0$. Donc G' est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $G'(0) = 0$, donc $G'(y)\langle 0$, pour tout $y > 0$. On peut trouver $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $y \geqslant \delta$, $G'(x) \leqslant -\varepsilon < 0$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout $y \geqslant \delta$,

$$G(y) = G(\delta) + \int_\delta^y G'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant G(\delta) - \varepsilon(y - \delta)$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, ce qui est possible puisque $d = +\infty$,

$$\lim_{y\to\infty} G(y) = -\infty$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $G(y) > 0$ pour tout $y > 0$.
Si G est solution de l'équation différentielle, nécessairement, $G(y) > 0$, pour tout $y > 0$. En effet, si G change de signe, comme G est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe y_0 tel que $G(y_0)$, alors $0 = G(y_0)G''(y_0) = -y_0^{m+1}$. Donc $y_0 = 0$. Or $G(0) = 1$, ce qui est contradictoire. Donc G est de signe constant, et $G > 0$.

4. a) D'après la question précédente, G est décroissante, donc admet une limite finie ou infinie en d. Or, $G(y) > 0$ pour tout $y \in I$, donc la limite est finie. On peut donc prolonger G en d par continuité.
   b) Il suffit de montrer que $G(d) = 0$, puisque G est continue sur $[0, d]$ et $\mathcal{C}^2$ sur $[0, d[$. Si $G(d) > 0$, $G''(y) = -\frac{y^{m+1}}{G(y)}$ est prolongeable par continuité en d et G' l'est également, donc G vérifie l'équation différentielle sur $[0, d]$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, G est prolongeable dans un voisinage de d, ce qui est absurde car elle est supposée maximale.

Partie III

1. a) Soit $E = \{x \in [0, 1],\ g_1(x) = g_2(x)\}$. Posons E est un ensemble non vide car contient 1 et est minoré par 0 donc admet une borne inférieur $x_0 \leqslant 1$. Il existe une suite $(x_n)_n$ de E qui converge vers x_0.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(g_2 - g_1)(x_n) = 0$. Par passage à la limite et continuité de $g_2 - g_1$,

$$(g_2 - g_1)(x_0) = 0$$

   Comme $x_0 = \inf(E)$ et $g_2 - g_1$ est continue, pour tout $x \leqslant x_0$, $g_2(x) > g_1(x)$.

Ainsi, il existe $x_0 \in]0, 1]$ tel que $$\forall x \in]0, 1],\ g_1(x) < g_2(x) \text{ et } g_1(x_0) = g_2(x_0).$$

   b) Par hypothèse sur g_1, g_2 et h, pour tout $x \in [0, x_0[$,

$$g_1(x) < g_2(x)$$

   donc

$$-\frac{2xh(x)}{g_1(x)} \leqslant -\frac{2xh(x)}{g_2(x)}$$

i.e.

$$g_1''(x) \leqslant g_2''(x)$$

Donc $(g_2 - g_1)''$ est positive sur $[0, x_0[$, donc $(g_2 - g_1)'$ est croissante sur $[0, x_0[$. Or, $(g_2 - g_1)'(0) = 0$ donc $(g_2 - g_1)'$ est positive sur cet intervalle. Donc $g_2 - g_1$ est croissante sur $[0, x_0[$.

> Ainsi, pour tout $x \in [0, x_0[$, $g_2(x) - g_1(x) \geqslant g_2(0) - g_1(0) > 0$. Par passage à la limite en x_0^-, $g_2(x_0) - g_1(x_0) > 0$, ce qui est contradictoire avec la question précédente.

2. a) $g_1 - g_2$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $(g_1 - g_2)(0) = (g_1 - g_2)(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que $(g_1 - g_2)'(x_1) = 0$.
Supposons par l'absurde que $g_1(x_1) = g_2(x_1)$. On a alors $\begin{cases} g_1(x_1) = g_2(x_1) \\ g_1'(x_1) = g_2'(x_1) \end{cases}$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $g_1 = g_2$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

> Ainsi, il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que
> $$g_1(x_1) \neq g_2(x_1) \text{ et } g_1'(x_1) = g_2'(x_1)$$

b) Comme $(g_1 - g_2)'$ est continue sur $[0, x_1]$, dérivable sur $]0, x_1[$, et $(g_1 - g_2)'(0) = (g_1 - g_2)'(x_1) = 0$, d'après il le théorème de Rolles, il existe $x_2 \in]0, 1[$ tel que $(g_1 - g_2)''(x_2) = 0$, ce qui est contradictoire avec le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Partie IV

1. L'existence d'une unique solution dans $E(0, 1)$ est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Par récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ est dérivable sur $[0, 1[$.
2. Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 = (gg'')^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) g^{(n+3-k)}(x)$$

Donc pour tout $x \in [0, 1[$,

$$g^{(n+3)}(x) = -\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) g^{(n+3-k)}(x)}{g(x)}$$

Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$g^{(3)}(x) = -\frac{2 + g'(x)g''(x)}{g(x)}.$$

3. Comme $g \in E(0,1)$, g'' est négative sur $[0,1]$.
Montrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ que :

$$\forall k \leqslant n, \forall x \in [0,1],\ F^{(n)}(x) \geqslant 0 \tag{$\mathcal{H}_1$}$$

— $n = 2$: vrai d'après ce qui précède
— Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{H}_1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= -\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k} g^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)}{g(x)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k} F^{(k)}(x) F^{(n+1-k)}(x)}{g(x)} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence et $g(0) > 0$.

Comme g'' est négative, g' est décroissante. Or, $g'(0) = 0$, donc $F' = -g'$ est positive, et $F(x) = -(g(x) - g(0))$ est positive (car g est décroissante).

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^{(n)}(x) \geqslant 0.}$$

4. Comme F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, $F^{(n)}(x) \geqslant 0$, d'après la question c, F est somme de sa série de Taylor en 0. Soit $x \in [0,1[$.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

De plus, par hypothèse sur g,

$$\lim_{x \to 1, x<1} F(x) = g(0) \geqslant 0.$$

et d'après la question précédente,

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0,1[.$$

Donc d'après la question a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$g(0) - g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

i.e.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

5. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\forall k \leqslant n,\ g^{(k)}(0) \neq 0 \text{ si } 3|k,\ \text{ et } g^{k}(0) = 0 \text{ sinon} \tag{$\mathcal{H}_2$}$$

— $n = 1$: comme $g \in E(0,1)$, nécessairement, $g(0) > 0$. Par hypothèse, $g'(0) = 0$.

— Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{H}_2$

— Si $n + 1 = 0 \mod 3$,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(n+1-k)}(0) g^{(k)}(0) \\ &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{\substack{k=1, \\ k=0 \mod 3}}^{n-1} g^{(n+1-k)}(0) g^{(k)}(0) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, comme $n + 1 - k = 0 \mod 3$ pour tout $k = 0 \mod 3$, $g^{(n+1)}(0) \neq 0$.

— Si $n+1 \neq 0 \mod 3$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on ne peut avoir simultanément $n + 1 - k = 0 \mod 3$ et $k = 0 \mod 3$. Donc par hypothèse de récurrence, $g^{(n+1)}(0) = 0$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.

6. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ g^{(3k)}(0) = -(3k)! \frac{b_k}{a_0^{2k-1}} \tag{$\mathcal{H}_3$}$$

— $n = 1$: on a

$$g^{(3)}(0) = -\frac{2}{a_0} = \frac{-3! b_1}{a_0}$$

— Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{H}_3$.

$$
\begin{aligned}
g^{(3n+3)}(0) &= -\frac{1}{g(0)} \sum_{k=1}^{3n+1} \binom{3n+1}{k} g^{(k)}(0) g^{(3n+3-k)}(0) \\
&= -\frac{1}{g(0)} \sum_{p=1}^{n} \binom{3n+1}{3p} g^{(3p)}(0) g^{(3n+3-3p)}(0) \\
&= -\frac{1}{g(0)} \sum_{p=1}^{n} \binom{3n+1}{3p} (3p)! \frac{b_p}{a_0^{2p-1}} (3n+3-3p)! \frac{b_{n+1-p}}{a_0^{2n+2-2p-1}} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \frac{(3n+2-3p)(3n+3-3p)}{(3n+2)(3n+3)} b_p b_{n+1-p} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \frac{(3n+2-3p)(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} b_p b_{n+1-p} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{(3n+2)(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} - \frac{3p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} \right) b_p b_{n+1-p} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{n+1-p}{n+1} - \frac{3p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} \right) b_p b_{n+1-p} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{2a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{2(n+1-p)}{n+1} - \frac{6p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} \right) b_p b_{n+1-p} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{2a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{n+1-p}{n+1} + \frac{p}{n+1} - \frac{6p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} \right) b_p b_{n+1-p} \\
&\text{en intervertissant des termes} \\
&= -\frac{(3n+3)!}{2a_0^{2n+1}} \sum_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{6p(n+1-p)}{(3n+2)(n+1)} \right) b_p b_{n+1-p}
\end{aligned}
$$

Partie V

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons, pour tout $x > 0$, $f_N(x) = S_N(x) - x$. f_N est clairement $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

   $$\forall x > 0,\ S_N'(x) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{(2n-1)b_n}{x^{2n}} - 1 < 0$$

   car b_n est strictement positif par définition.
   Donc f_N est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Or,

   $$\lim_{x \to 0^+} f_N(x) = +\infty,\ \text{et}\ \lim_{x \to +\infty} f_N(x) = -1 < 0$$

   D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_N > 0$, tel que $f_N(x_N) = x$.

$$\boxed{\text{Ainsi, chaque équation } S_N(x) = x \text{ admet une et une seule racine positive } x_N.}$$

Comme $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $(f_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions décroissantes, $(x_N)_{N\geqslant 1}$ est croissante donc admet une limite finie ou infinie. De plus,

$$f_N(a_0) = -\sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} < -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} = -g(1) = 0.$$

Donc $\forall N \geqslant 1$, $x_N \leqslant a_0$. Notons x la limite de (x_N)
$(S_N)_{N\geqslant 1}$ est une suite croissante de fonctions décroissantes, donc admet une limite S. Pour $N \geqslant 1$, on a, pour tout $p \geqslant 0$,

$$S_N(x_{N+p}) \leqslant S_N(x_N) \leqslant S_{N+p}(x_N)$$

i.e.

$$S_N(x_{N+p}) \leqslant x_N \leqslant S_{N+p}(x_N)$$

Par passage à la limite, par continuité de S_N sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$S_N(a_0) \leqslant S_N(x) \leqslant x \leqslant S(x_N) \leqslant S(a_0)$$

puisque $x_N \leqslant a_0$.
Or,

$$S(a_0) = \lim_{N\to\infty} S_N(a_0) = \lim_{N\to\infty} -\sum_{n=1}^{N} \frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(3n)}(0)}{(3n)!} + g(0) = g(1) + g(0) = a_0$$

Donc par passage à la limite quand $N \to \infty$.

$$a_0 \leqslant x \leqslant a_0.$$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (x_N) \text{ converge vers } a_0.}$$

2. Soit $x \geqslant a_0$.

!!!!! Justifier la séparation de la somme

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}} \\
&= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_p b_{n-k}\left(1 - \frac{6k(n-k)}{n(3n-1)}\right) \\
&= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^{2(n-1)}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6k(n-k)}{n(3n-1)} b_k b_{n-k} \\
&= x - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{1}{2x}(Q(x) - x^2 + \frac{2}{3}) \\
&= \frac{1}{2x}\left(Q(x) - \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n}}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \geqslant a_0,\ P(x) = \frac{1}{2x}\left(Q(x) - \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n}}\right)^2\right)}$

3. Posons, pour tout $x > 0$, $g_N(x) = T_N(x) - \frac{2}{3} + x^2$. On a, g_N est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$g_N''(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{(2n-2)(2n-1)\Phi(n)}{x^{2n}} + 2 > 0$$

$\lim_{x\to 0} g_N(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g_N(x) = +\infty$. On a donc le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$g_N''(x)$	$+$		$+$
$g_N'(x)$	$-$		$+$
g_N	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

!!!! On a de plus,

$$g_N(a_0) \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Phi(n)}{a_0^{2(n-1)}} - \frac{2}{3} + a_0^2 = Q(a_0)$$

Or, a_0 est racine de P. Donc

$$a_0 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_0^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{Q(a_0)}{a_0} = 0$$

i.e.

$$Q(a_0) = a_0(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_0^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} - a_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_0^{2n}} \sum_{k=1}^{n} b_k b_{n+1-k} - a_0^2 = 1 - a_0^2$$

pas sûre du résultat
ça serait bien que ça soit négatif ce truc...
Donc g_N admet deux racines positives $y_N < z_N$. $(g_N)_{\mathbb{N}\geqslant 2}$ étant une suite croissante, donc nécessairement $(y_N)_{N\geqslant 2}$ est croissante et $(z_N)_{N\geqslant 2}$ est décroissante.

4. Il suffit par exemple de calculer x_2 et z_2. On a $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{1}{45}$, $\Phi(2) = \frac{1}{15}$, $\Phi(3) = \frac{1}{90}$. x_2^2 est racine du polynôme $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{45}$ qui a une racine positive $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Donc $x_2 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}})^{1/2} \simeq 0,89$. De même, z_2^2 est la plus grande racine du polynôme $X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{15}$. Donc $z_2 \simeq 1,09$.