

# MODÈLES DE DYNAMIQUE D'ESPÈCES INVASIVES



Projet d'intégration

Sous la direction de Pr. Olivier Goubet

CÉLINE WANG

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Prélude . . . . .	3
1.2	Problème . . . . .	3
1.3	Modélisation, simplifications et hypothèses . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Matrices aléatoires</b>	<b>6</b>
2.1	Définitions, notations et premiers résultats . . . . .	6
2.1.1	Quelques propriétés élémentaires et résultats d'algèbre linéaire . . . . .	6
2.1.2	Construction . . . . .	7
2.1.3	Ergodicité . . . . .	8
2.2	Exposant de Lyapounov . . . . .	10
2.3	Formule explicite de l'exposant de Lyapounov . . . . .	18
2.3.1	Quelques éléments sur l'espace projectif . . . . .	18
2.3.2	Mesure invariante et exposant de Lyapounov . . . . .	22
2.3.3	Lien avec $N(k)$ . . . . .	26
2.3.4	Point de bifurcation . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Simulations</b>	<b>28</b>
3.1	Allure de $\gamma$ au voisinage de 0 . . . . .	28
3.2	Allure de $\gamma$ ? . . . . .	29
3.3	Évolution de la dynamique de population . . . . .	30

## Table des figures

1.1	Passage d'une année à l'autre lorsqu'il n'y a pas de tempête . . . . .	4
1.2	Passage d'une année à l'autre lorsqu'il y a une tempête . . . . .	4
2.1	Domaine $\bar{B}$ . . . . .	19
3.1	Première expression de $\gamma$ . . . . .	28
3.2	Deuxième expression de $\gamma$ . . . . .	28
3.3	Troisième expression de $\gamma$ (résultat partiel) . . . . .	29
3.4	Évolution de la population avec différentes valeurs de $p$ sur 1000 ans . . . . .	30
3.5	Évolution de la population avec $p = 0,1$ sur 3000 ans . . . . .	32
3.6	Évolution de la population avec $p = 0,002$ sur 3000 ans . . . . .	33

## 1.1 Prélude

J'ai effectué mon Immersion Recherche au laboratoire de recherche en mathématiques Paul Painlevé sur la période du 19 septembre 2022 au 13 mars 2023. Durant ce stage, j'ai travaillé sur un projet de recherche portant sur la dynamique locale d'une espèce invasive. L'objet du stage était de construire un modèle mathématique permettant de comprendre la dynamique d'une population d'arbres intégrant la stochasticité de l'environnement. On se propose de construire un modèle simplifié de cette dynamique, faisant intervenir des produits de matrices aléatoires.

## 1.2 Problème

Le cerisier noir *Prunus serotina* est une espèce d'arbres originaire d'Amérique du Nord qui a été introduite dans les forêts européennes au XVII<sup>e</sup> siècle pour la production de bois, l'ornementation et l'amélioration des sols. Depuis environ trois décennies, elle se répand dans les forêts de l'Europe de l'Ouest et de l'Europe centrale et fait concurrence aux espèces locales [Seb+05] dans l'accès aux ressources. On s'intéresse à la dynamique de la population d'arbres *Prunus serotina* sur une parcelle de forêt de 1000m<sup>2</sup> sur laquelle le relief, le type de sol, l'humidité du sol, la végétation sont supposés homogènes sur la parcelle. On suppose que l'on plante au départ un cerisier noir fertile de cette espèce et on étudie la dynamique de la population locale. Pour se développer, les arbres ont besoin d'avoir accès aux rayons de soleil. Lorsque la parcelle est remplie d'arbres adultes, la lumière du soleil est essentiellement captée par les arbres adultes qui font de l'ombre aux arbustes. Les arbustes captent les rayons du soleil lorsqu'il y a une tempête qui couche des arbres adultes. Ce type d'événement arrive deux fois par siècle.

## 1.3 Modélisation, simplifications et hypothèses

On considère l'année comme échelle de temps. Afin de simplifier l'étude, on suppose que les cerisiers ont deux stades de vie<sup>1</sup> : le stade de graine et le stade d'arbre adulte. La simplification du nombre de stades permet d'observer plus aisément quelques propriétés de matrices de dimension égale au nombre de stades, soit 2 dans notre étude. D'une année  $k$  à l'année  $k + 1$ , certains arbres peuvent mourir, les arbres adultes vivants de l'année  $k$  donnent de nouvelles graines, certaines graines deviennent des arbres adultes et d'autres meurent, et ce, en fonction des rayons de lumières reçus par les arbres.

L'état de la population de cerisiers noirs est donné par un vecteur  $n(k) = \begin{pmatrix} g_k \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  où les composantes

---

1. Dans [Seb+05], onze stades de vie sont considérées.

représentent respectivement le nombre d'individus au stade de graine et le nombre d'individus au stade d'arbre adulte à l'année  $k$ . Par hypothèse,  $n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . D'une année à l'autre, une graine peut soit rester graine, soit devenir un arbre adulte, soit mourir, et un arbre adulte peut soit rester un arbre adulte, soit mourir. On suppose que la transition d'une année à une autre est donnée par la relation

$$n(k+1) = M_{k+1}n(k)$$

où  $M_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vaut soit  $S$  soit  $T$  que l'on va définir par la suite. On a alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$n(k) = M_k \cdots M_1 n(0).$$

On définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N(k) = \|n(k)\|_1$  (où  $\|\cdot\|_1$  désigne la norme 1 de  $\mathbb{R}^2$ ) la taille de la population à l'année  $k$ . Il s'agit du nombre total d'arbres (graines et d'arbres adultes) à l'année  $k$ .

Si sur une année, la parcelle est remplie d'arbres adultes, les graines ne peuvent capter la lumière du soleil : une faible proportion de graines et d'arbres meurent, une forte proportion des graines restent graines, chaque arbre adulte donne de nouvelles graines, mais aucune graine née avant ne donne un arbre. A contrario, si une tempête survient, des arbres adultes sur la parcelle meurent laissant les graines capter la lumière, certaines graines vont pouvoir devenir des arbres, aucune graine née avant ne reste graine : soit elle devient un arbre adulte, soit elle meurt.

On définit  $S$  comme étant la matrice de transition correspondant à une année de tempête de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & k \\ d\lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , et  $T$  celle correspondant à une année sans tempête de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & k \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_1 \in [0, 1[$  est alors le taux de survie des graines,  $k \in \mathbb{N}$  le nombre moyen de graines produites par un arbre adulte,  $\lambda_2 \in ]\lambda_1, 1[$  le taux de survie des arbres et  $d\lambda_1$  la proportion des graines devenant des arbres.

Typiquement :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 465 \\ 0,0023 & 0,99 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0,9 & 465 \\ 0 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

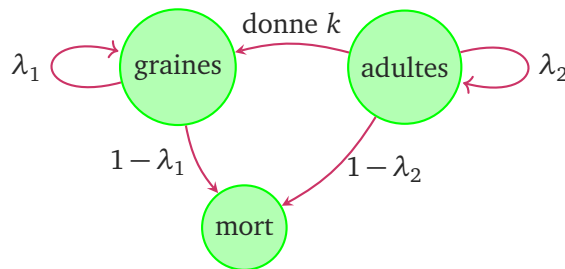


FIGURE 1.1. Passage d'une année à l'autre lorsqu'il n'y a pas de tempête

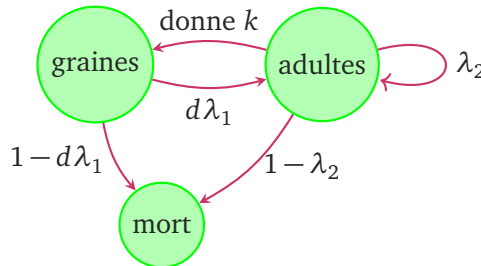


FIGURE 1.2. Passage d'une année à l'autre lorsqu'il y a une tempête

Soit  $\mathcal{E}_n$  l'événement « Une tempête survient à l'année  $n$  ». On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_k) = p$ , où  $p \in ]0, 1[$  et que la suite  $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est indépendante.

L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique de  $(N(k))_{k \in \mathbb{N}}$ .

## Matrices aléatoires

### 2.1 Définitions, notations et premiers résultats

#### 2.1.1 Quelques propriétés élémentaires et résultats d'algèbre linéaire

Dans cette sous-section, on donne quelques propriétés remarquables des matrices  $S$  et  $T$ .

**Définition 2.1.1 (Spectre (ponctuel)) :** Soit  $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ .  $\lambda \in \mathbb{C}$  est *valeur propre* de  $a$  lorsque  $a - \lambda \text{Id}$  n'est pas inversible. On note  $\sigma(a)$  l'ensemble des valeurs propres de  $a$ .  $\sigma(a)$  est appelé *spectre* de  $a$ .

**Définition 2.1.2 (Rayon spectral) :** Soit  $A$  une algèbre de Banach de dimension finie. Soit  $a \in A$ . On définit le rayon spectral de  $a$  par  $\rho(a) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\}$ .

**Proposition 2.1.1 :** Soit  $a \in A$ .  $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ .

Énonçons quelques propriétés immédiates sur les matrices  $S$  et  $T$  :

**Propriété 2.1.1 :**

1. On a  $\det(S) = -d\lambda_1 k < 0$  et  $\det(T) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ . Donc  $S$  et  $T$  sont dans  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ .
2. Les matrices  $S$  et  $T$  sont à coefficients positifs, et  $S^2$  est à coefficients strictement positifs.
3.  $T$  est diagonalisable et  $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ .
4.  $S$  est diagonalisable et  $\sigma(S) = \left\{ \frac{\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 + 4kd\lambda_1}}{2} \right\}$ .
5. Le rayon spectral de  $T$  est strictement inférieur à 1 et celui de  $S$  strictement supérieur à 1.
6. Lorsque  $p = 0$ , la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est constante égale à  $T$ .  
Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n M_{n-1} \cdots M_1\|^{1/n} = \rho(T) < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|M_n \cdots M_{n-1}\|) < 0$ .

7. Lorsque  $p = 1$ , la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est constante égale à  $S$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n M_{n-1} \cdots M_1\|^{1/n} = \rho(S) > 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|M_n \cdots M_{n-1}\|) > 0$ .

8.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & k \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$

## 2.1.2 Construction

### Définition 2.1.3 :

1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. On appelle *matrice aléatoire* toute application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans un espace de matrices.
2. Une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices aléatoires est dite *stationnaire* lorsque pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k$ -uplet  $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$  d'entiers, la loi de  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$  est celle de  $(X_0, X_{i_2-i_1}, \dots, X_{i_k-i_1})$ .

**Remarque.** Une suite de matrices aléatoires i.i.d. est stationnaire. Les matrices que nous étudions sont donc stationnaires.

Soit  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$  un espace de probabilité initial que l'on suppose existant sur lequel

$$M_1 : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (\{S, T\}, \mathcal{P}(\{S, T\}))$$

est mesurable, et

$$\mu(M_1 = S) = p \text{ et } \mu(M_1 = T) = 1 - p.$$

On fait un choix canonique de l'espace de probabilité pour définir la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ .

On prendra  $\Omega = \{S, T\}^{\mathbb{N}^*}$ . Sur cet ensemble, on définit les  $M_k$  comme les applications coordonnées, i.e.

$$\forall \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Omega, M_k(\omega) = \omega_k.$$

On munit  $\Omega$  de la plus petite tribu  $\mathcal{F}$  rendant ces applications mesurables.

**Proposition 2.1.2 :**  $\mathcal{F}$  ainsi définie est la tribu engendrée par les cylindres, i.e. les ensembles de la forme

$$C = \{\omega \in \Omega, \omega_1 = x_1, \omega_2 = x_2, \dots, \omega_n = x_n\},$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

$$C = \bigcap_{i=1}^n \{\omega \in \Omega, \omega_i = x_i\} = \bigcap_{i=1}^n M_i^{-1}(\{x_i\}).$$

$C \in \mathcal{F}$  car les  $\{x_i\}$  sont dans  $\mathcal{P}(\{S, T\})$ , les  $M_i$  sont mesurables et  $\mathcal{F}$  est stable par intersection. Ainsi,  $C \in \mathcal{F}$ , donc la tribu  $\mathcal{C}$  engendrée par les cylindres est incluse dans  $\mathcal{F}$ .

$\mathcal{C}$  rend les  $M_i$  mesurables car pour tout  $y \in \{S, T\}$ ,  $M_i^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{F}$  est la plus petite tribu rendant les  $M_i$  mesurables,  $\mathcal{C} = \mathcal{F}$ .  $\square$

On munit  $(\Omega, \mathcal{F})$  de la mesure de probabilité  $\mathbb{P} = \mu^{\mathbb{N}^*}$  de sorte que  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  soit une suite i.i.d.

On dispose à présent d'un espace de probabilité.



### 2.1.3 Ergodicité

**Définition 2.1.4 (Système dynamique mesurable) :** Soit  $(X, \mathcal{A}, \rho)$  un espace de probabilité. Soit  $T : \Omega \longrightarrow \Omega$  une application  $\mathcal{A}$ -mesurable. On dit que  $T$  laisse  $\rho$  invariante lorsque

$$\forall A \in \mathcal{A}, \rho(T^{-1}(A)) = \rho(A).$$

On appelle système dynamique mesurable (s.d.m) tout quadruplet  $(X, \mathcal{A}, \rho, T)$ .

On souhaiterait munir notre espace de probabilité construit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  d'une application  $\theta$  de sorte à obtenir un système dynamique mesurable.

**Définition 2.1.5 (Opérateur de translation) :** On définit l'opérateur de translation (aussi appelé opérateur shift) par

$$\forall \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, \theta(\omega) = (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

**Remarque.** Il est clair que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\forall \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, \theta^k(\omega) = (\omega_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Lemme 2.1.1 :** Soit  $(G, \mathcal{G})$  un espace mesurable. Soit  $\psi : G \longrightarrow \Omega$  une application. Alors  $\psi$  est mesurable si, et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n \circ \psi$  est mesurable.

*Démonstration.* Si  $\psi$  est mesurable, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n \circ \psi$  est mesurable comme composée d'applications mesurables.

Réciproquement, supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n \circ \psi$  soit mesurable.  $\{A \in \mathcal{F}, \psi^{-1}(A)\}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Pour tout  $y \in \{S, T\}$ ,  $M_n^{-1}(\{y\})$  est contenu dans cet ensemble. Donc cette tribu rend les applications  $M_n$  mesurables, donc nécessairement, cette tribu est  $\mathcal{F}$ . Donc  $\psi$  est mesurable.  $\square$

**Proposition 2.1.3 :**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$  est un système dynamique mesurable.

*Démonstration.* Il reste à montrer que  $\theta$  est une application  $\mathcal{F}$ -mesurable qui laisse  $\mathbb{P}$  invariante.

- $\theta$  est mesurable d'après le lemme précédent.
- Il suffit de vérifier que pour tout cylindre  $C = \{\omega \in \Omega, \omega_0 = x_0, \dots, \omega_n = x_n\}$ ,

$$\mathbb{P}(\theta^{-1}(C)) = \mathbb{P}(C).$$

On a

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(C) &= \{\omega \in \Omega, \theta(\omega) \in C\} = \{\omega \in \Omega, \omega_1 = x_0, \omega_2 = x_1, \dots, \omega_{n+1} = x_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega, M_1(\omega) = x_0, \dots, M_{n+1}(\omega) = x_n\}. \end{aligned}$$

Puisque  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est i.i.d,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta^{-1}(C)) &= \mathbb{P}(M_1 = x_0, \dots, M_{n+1} = x_n) \\ &= \mathbb{P}(M_1 = x_0) \cdots \mathbb{P}(M_{n+1} = x_n) \\ &= \mathbb{P}(M_0 = x_0) \cdots \mathbb{P}(M_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(M_0 = x_0, \dots, M_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

Par le lemme des classes monotones, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{P}(\theta^{-1}(C)) = \mathbb{P}(C)$ .

Donc  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$  est un système dynamique mesurable.  $\square$

Les résultats sur les systèmes ergodiques se trouvent dans [Gay06]. On ne démontrera pas les propriétés ci-dessous.

**Définition 2.1.6 (Ergodicité) :** Un système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \rho, T)$  est dit ergodique lorsque pour toute fonction mesurable  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ , si  $f \circ T = f$  presque sûrement, alors  $f$  est constante presque sûrement.

**Notation 1.** Soit  $E$  un ensemble quelconque, et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On note  $A \Delta B$  l'ensemble  $A \cup B \setminus (A \cap B)$  appelé différence symétrique de  $A$  et de  $B$ .

**Théorème 2.1.1 (Caractérisation de l'ergodicité) :** Soit  $(X, \mathcal{A}, \rho, T)$  un système dynamique mesurable. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Le système est ergodique.
2. Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , si  $T^{-1}(A) = A$ , alors  $\rho(A) \in \{0, 1\}$ .
3. Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , si  $\rho(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$ , alors  $\rho(A) \in \{0, 1\}$ .

**Définition 2.1.7 (Système fortement mélangeant) :** Un système dynamique mesurable  $(X, \mathcal{A}, \rho, T)$  est dit fortement mélangeant lorsque pour tout  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ ,

$$\rho(T^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow \rho(A)\rho(B).$$

**Proposition 2.1.4 :** Si  $(X, \mathcal{A}, \rho, T)$  est fortement mélangeant, alors il est ergodique.

Vérifions maintenant que le système dynamique mesurable que nous avons construit est ergodique à l'aide de cette dernière proposition.

Soient  $A$  et  $B$  deux cylindres :

$$A = \{\omega \in \Omega, \omega_1 = x_1, \dots, \omega_k = x_k\} = \{\omega \in \Omega, M_1(\omega) = x_1, \dots, M_k(\omega) = x_k\}$$

et

$$B = \{\omega \in \Omega, \omega_1 = y_1, \dots, \omega_\ell = y_\ell\} = \{\omega \in \Omega, M_1(\omega) = y_1, \dots, M_\ell(\omega) = y_\ell\}.$$

Pour  $n$  assez grand,  $\theta^{-n}(A)$  et  $B$  sont disjoints. Par indépendance de la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$$\mathbb{P}(\theta^{-n}(A) \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \longrightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

On conclut, par le lemme des classes monotones que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{F}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\theta^{-n}(A) \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Notre système dynamique mesurable est donc ergodique.

Dans ce qui suit, les variables aléatoires sont définies sur le s.d.m  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ .

## 2.2 Exposant de Lyapounov

Rappelons nos motivations : la taille de la population à l'année  $n$  est donnée par  $\|M_n M_{n-1} \cdots M_1 n(0)\|_1$ , où  $M_i$  vaut soit  $S$  soit  $T$ . On souhaite voir ce qui se passe lorsque l'on fait tendre  $n$  vers l'infini.

Pour ce faire, nous allons étudier la limite de  $\left( \ln \left( \frac{\|M_n M_{n-1} \cdots M_1 n(0)\|_1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $\|\cdot\|$  la norme subordonnée à la norme  $\|\cdot\|_1$  :  $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq 2} |a_{1,j}| + |a_{2,j}|$  et

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

**Notation 2.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires. On notera pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^{(n)} = X_n X_{n-1} \cdots X_1$ .

L'objectif de cette sous-section est de parvenir à la définition de l'exposant de Lyapounov qui est la limite presque sûre de  $\left( \ln \left( \frac{\|M_n M_{n-1} \cdots M_1\|}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sous certaines hypothèses, et d'établir son lien avec celle de  $\left( \frac{\ln(N(k))}{k} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ .

Énonçons le résultat principal de cette section dû à Furstenberg et Kester [FK59].

**Théorème 2.2.1 (Furstenberg-Kesten) :** Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires dans  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  i.i.d. de loi  $\mu$  telle que  $\mathbb{E}[\ln^+(\|X_1\|)] < \infty$ . Alors, il existe une constante  $\gamma(\mu)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) = \gamma(\mu)$$

presque sûrement.

**Remarque.** Cette limite dépend uniquement de la loi  $\mu$ . Elle ne dépend pas de la norme choisie car toutes les normes sont équivalentes.

Présentons en premier lieu un résultat plus faible.

**Théorème 2.2.2 :** Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires dans  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  i.i.d de loi  $\mu$  à support  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_p\}$  fini. Alors  $\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers une constante  $\gamma(\mu)$ .

**Remarque.** 1. La constante est bien évidemment la même dans les deux conclusions.

2. Dans notre étude puisque  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est à support fini, les deux théorèmes lui sont applicables.

Pour montrer le théorème, nous allons introduire quelques définitions et lemmes.

**Définition 2.2.1 (Sous-additivité) :** Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est dite *sous-additive* lorsque

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

**Remarque.** Si l'un des  $a_n$  vaut  $-\infty$ , alors la suite est égale à  $-\infty$  à partir d'un certain rang.

**Lemme 2.2.1 (Fekete) :** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite sous-additive de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Alors la suite  $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\inf_{p \geq 1} \frac{a_p}{p} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

*Démonstration.* Si l'un des  $a_n$  vaut  $-\infty$ , la suite vaut  $-\infty$  à partir d'un certain et le résultat est immédiat.

Supposons que toutes les valeurs de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soient finies.

Remarquons que (récurrence immédiate) pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $a_{mn} \leq ma_n$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\inf_{p \geq 1} \frac{a_p}{p} = -\infty$ . Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Il existe  $n_A \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{a_{n_A}}{n_A} < A - a_1$ . Soit  $n \geq n_A$ . Alors, par la sous-additivité,

$$a_n \leq a_{n-n_A} + a_{n_A} \leq (n - n_A)a_1 + a_{n_A}.$$

Donc

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{n - n_A}{n}a_1 + \frac{a_{n_A}}{n} \leq a_1 + \frac{a_{n_A}}{n_A} \leq A.$$

Ainsi,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_A, \frac{a_n}{n} \leq A,$$

autrement dit,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\inf_{p \geq 1} \frac{a_p}{p} > -\infty$ . Posons  $\ell = \inf_{p \geq 1} \frac{a_p}{p}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\ell + \varepsilon > \inf_{p \geq 1} \frac{a_p}{p}$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{a_p}{p} \leq \ell + \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Effectuons la division euclidienne de  $n$  par  $p$  : il existe  $(k_n, r_n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq r_n < p$  et  $n = k_np + r_n$ . Alors, par la sous-additivité de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{k_np + r_n}}{k_np + r_n} \leq \frac{a_{k_np}}{k_np + r_n} + \frac{a_{r_n}}{k_np + r_n} = \frac{a_{k_np}}{k_np} \frac{k_np}{k_np + r_n} + \frac{a_{r_n}}{k_np + r_n} \leq \frac{a_p}{p} \frac{k_np}{k_np + r_n} + \frac{a_{r_n}}{k_np + r_n}.$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$  et  $a_{r_n} \leq r_n a_1$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_p}{p} \frac{k_np}{k_np + r_n} + \frac{a_{r_n}}{k_np + r_n} = \frac{a_p}{p}.$$

Ainsi, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{a_n}{n} \leq \ell + \varepsilon.$$

Donc

$$\sup_{n \geq n_0} \frac{a_n}{n} \leq \ell + \varepsilon,$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \sup_{n \geq n_0} \frac{a_n}{n} \leq \ell + \varepsilon.$$

Puisque pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \ell + \varepsilon$ , on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Donc  $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

□

**Remarque.** Le lemme de Fekete permet d'établir que le rayon spectral d'une application linéaire  $a$  est égale à  $\inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n}$ .

**Lemme 2.2.2 :** Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires dans  $GL_2(\mathbb{R})$  i.i.d de loi  $\mu$  à support fini  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_p\}$ . Alors,

$$\gamma(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\ln(\|X^{(n)}\|)]$$

existe, et  $\gamma(\mu) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\mu$  est à support fini, la suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est intégrable puisque  $\mathbb{E}[|X_k|]$  est une somme finie.

Introduisons, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m \leq n$ ,

$${}^n Y^m = X_n X_{n-1} \cdots X_m.$$

Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m \leq n$ .

$$\ln(\|X_{n+m} \cdots X_1\|) \leq \ln(\|X_{n+m} \cdots X_{m+1}\| \|X_m \cdots X_1\|) = \ln(\|X_{n+m} \cdots X_{m+1}\|) + \ln(\|X_m \cdots X_1\|),$$

i.e.

$${}^{n+m} Y^1 \leq {}^{n+m} Y^{m+1} + {}^m Y^1.$$

Par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}[{}^{n+m} Y^1] \leq \mathbb{E}[{}^{n+m} Y^{m+1}] + \mathbb{E}[{}^m Y^1]$$

et comme la suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est i.i.d.,

$$\mathbb{E}[{}^{n+m} Y^1] \leq \mathbb{E}[{}^n Y^1] + \mathbb{E}[{}^m Y^1].$$

En notant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \mathbb{E}[{}^n Y^1]$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite sous-additive dans  $\mathbb{R}$ . Par le lemme de Fekete,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\inf_{p \geq 1} \frac{a_p}{p}$ .

Donc  $\gamma(\mu) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\ln(X^{(n)})]$  existe et  $\gamma(\mu) = \inf_{p \geq 1} \frac{\mathbb{E}[\ln(X^{(p)})]}{p} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . □

**Lemme 2.2.3 :** Soient  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \ell \\ \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq \ell + \varepsilon) = 1. \end{cases}$$

Alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $\ell$ .

*Démonstration.* Supposons sans perte de généralité que  $\ell = 0$ .

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ . Posons  $\alpha = \frac{\delta\varepsilon}{3}$ . On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n] &= \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_n < -\varepsilon\}}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{-\varepsilon \leq X_n \leq \alpha\}}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_n > \alpha\}}] \\ &\leq -\varepsilon \mathbb{P}(X_n < -\varepsilon) + \alpha \mathbb{P}(-\varepsilon \leq X_n \leq \alpha) + b \mathbb{P}(X_n > \alpha).\end{aligned}$$

En majorant  $\mathbb{P}(-\varepsilon \leq X_n \leq \alpha)$  par 1,

$$\mathbb{P}(X_n < \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}(-\mathbb{E}[X_n] + \alpha + b \mathbb{P}(X_n > \alpha)).$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > \alpha),$$

il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$-\mathbb{E}[X_n] \leq \alpha \text{ et } b \mathbb{P}(X_n > \alpha) \leq \alpha.$$

Donc pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\mathbb{P}(X_n < -\varepsilon) \leq 3\alpha/\varepsilon = \delta.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < -\varepsilon) = 0$ .

Or, par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < \varepsilon) = 0$ .

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$ . □

Procédons maintenant à la version simplifiée du théorème de Furstenberg-Kesten.

*Démonstration du Théorème 2.2.2.* Pour tout  $(A, B) \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ ,

$$\|B\| \leq \|A^{-1}AB\| \leq \|A^{-1}\| \|AB\|,$$

donc

$$\|AB\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|B^{-1}\|^{-1}.$$

D'une part, en posant  $\alpha = \max_{1 \leq k \leq p} \|s_k^{-1}\|^{-1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|X^{(n)}\| \geq \alpha^n.$$

D'autre part,

$$\|X_n X_{n-1} \cdots X_1\| \leq \|X_n\| \cdots \|X_1\|,$$

en posant  $\beta = \max_{1 \leq k \leq p} \|s_k\|$ ,

$$\|X_n X_{n-1} \cdots X_1\| \leq \beta^n.$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\alpha^n \leq \|X_n X_{n-1} \cdots X_1\| \leq \beta^n.$$

Donc  $\left(\frac{1}{n} \ln(\|X_n\|)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est à support dans  $[\ln(\alpha), \ln(\beta)]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Fixons  $\varepsilon' = \varepsilon/3$ . D'après le Lemme 2.2.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) \right] = \gamma(\mu),$$

donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$E_N := \frac{1}{N} \mathbb{E}[\ln(\|X_N\|)] \leq \gamma(\mu) + \varepsilon'$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Effectuons la division euclidienne de  $n$  par  $N$  :  $n = q_n N + r_n$ ,  $0 \leq r_n < N$ .

$$\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) \leq \frac{1}{q_n} \left( \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|) \right) + \frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|).$$

Or,  $(\frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|))_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite i.i.d de même loi que  $\frac{\ln(\|X^{(N)}\|)}{N}$  qui admet un moment d'ordre 2 (car ayant un support fini). D'après la loi faible des grands nombres,  $\frac{1}{q_n} (\sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|))$  converge en probabilité vers  $\frac{1}{N} \mathbb{E}[\ln(\|X^{(N)}\|)]$ .  
De plus,

$$0 \leq \frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|) \leq \frac{1}{n} \sup_{1 \leq k \leq N-1} \ln(\|X^{(k)}\|),$$

donc  $(\frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|))$  converge en probabilité vers 0.

Par somme,  $(\frac{1}{q_n} (\sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|)) + \frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|))$  converge en probabilité vers  $E_N$ .

Si  $\frac{1}{q_n} (\sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|)) \leq E_N + \varepsilon'$  et  $\frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|) \leq \varepsilon'$ , alors

$$\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) \leq \gamma(\mu) + 3\varepsilon' = \gamma(\mu) + \varepsilon.$$

Donc par événement complémentaire,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) > \gamma(\mu) + \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{q_n} \left(\sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|)\right) > E_N + \varepsilon'\right\} \cup \left\{\frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|) > \varepsilon'\right\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{q_n} \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{N} \ln(\|{}^{kN}Y^{(k-1)N+1}\|) > E_N + \varepsilon'\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \ln(\|X^{(r_n)}\|) > \varepsilon'\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) \leq \gamma(\mu) + \varepsilon\right) = 1.$$

Donc d'après le Lemme 2.2.3,

$$\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \gamma(\mu).$$

□

On peut montrer le théorème de Furstenberg-Kesten en utilisant le théorème de Kingman :

**Théorème 2.2.3 (Kingman) :** Soit  $(W_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une suite de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telle que

1. pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m < n$ ,  $W_{m,n}$  a la même loi que  $W_{0, n-m}$  ;
2. pour tout  $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m < n \leq p < q$ ,  $W_{m,n}$  et  $W_{p,q}$  sont indépendantes ;
3. pour tout  $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $m < n < p$ ,  $W_{m,p} \leq W_{m,n} + W_{n,p}$  ;
4.  $\mathbb{E}[W_{0,1}^+] < \infty$ .

Alors, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m < n$ ,  $\mathbb{E}[W_{m,n}]$  existe et est à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n = \mathbb{E}[W_{0,n}]$  et  $\xi = \limsup_{n \geq 1} \frac{W_{0,n}}{n}$ . Alors

1. la suite  $\left(\frac{g_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\gamma := \inf_{n \geq 1} \frac{g_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ;
2.  $\xi$  est finie presque-sûrement et  $\mathbb{E}[\xi] = \gamma$ ;
3.  $\left(\frac{W_{0,n}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^1$  vers  $\xi$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par hypothèse,

$$W_{0,n} \leq \sum_{i=1}^{n-1} W_{i-1,i}.$$

Donc

$$W_{0,n}^+ \leq \sum_{i=1}^{n-1} W_{i-1,i}^+.$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $W_{i-1,i}$  a même loi que  $W_{0,1}$ . Comme  $\mathbb{E}[W_{0,1}^+] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[W_{0,n}^+] < \infty$ .

Comme  $W_{0,n} = W_{0,n}^+ - W_{0,n}^-$ ,  $\mathbb{E}[W_{0,n}]$  existe et est à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , de même pour  $\mathbb{E}[W_{m,n}]$ , pour tous  $m < n$ . La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

1. Pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$W_{0,m+n} \leq W_{0,m} + W_{m,m+n}.$$

Par la croissance de l'espérance et la stationnarité de la suite,

$$\mathbb{E}[W_{0,m+n}] \leq \mathbb{E}[W_{0,m}] + \mathbb{E}[W_{m,m+n}] = \mathbb{E}[W_{0,m}] + \mathbb{E}[W_{0,n}],$$

i.e.

$$g_{m+n} \leq g_m + g_n.$$

Par le lemme de Fekete,  $\left(\frac{g_n}{n}\right)$  converge vers  $\inf_{n \geq 1} \frac{g_n}{n}$ .

2. Par définition,  $\xi > -\infty$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , notons  $N_m = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ . Alors, par la sous-additivité,

$$\forall m \in \mathbb{N}, W_{0,m} \leq \sum_{\ell=1}^{N_m} W_{(\ell-1)n, \ell n} + W_{N_m n, m} \leq \sum_{\ell=1}^{N_m} W_{(\ell-1)n, \ell n} + X_{N_m}$$

où  $X_N = \sum_{k=0}^{n-1} |W_{Nn, Nn+k}|$ .

La suite  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est i.i.d.

Or, les  $W_{(\ell-1)n, \ell n}$  sont indépendantes, de même loi que  $W_{0,n}$ . Par la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N W_{(\ell-1)n, \ell n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} g_n.$$

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{N=1}^{\infty} N \varepsilon \mathbb{1}_{\{N \varepsilon \leq X_0 \leq (N+1) \varepsilon\}} \leq X_0,$$



par passage à l'espérance,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon \mathbb{P}\left(\frac{X_N}{N} \geq \varepsilon\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon \mathbb{P}(X_0 \geq N\varepsilon) \leq \mathbb{E}[X_0] < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X_N}{N} = 0 \text{ p.s.}$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{W_{0,m}}{m} \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{N_m} \left( \sum_{\ell=1}^{N_m} W_{(\ell-1)n, \ell n} + W_{N_m, m} + X_{N_m} \right) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \frac{g_n}{n}$$

Donc par passage à la limite supérieure,

$$\xi \leq \inf_{n \geq 1} \frac{g_n}{n}.$$

Donc  $\xi$  est finie presque-sûrement, et  $\mathbb{E}[\xi] \leq \gamma$ .

Définissons pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$U_{m,n} = \sum_{\ell=m+1}^n W_{(\ell-1), \ell}.$$

$(U_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est une suite sous-additive, et

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, W_{m,n} \leq U_{m,n}.$$

Posons, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $Z_{m,n} = U_{m,n} - W_{m,n}$ .  $(Z_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est une suite positive et sur-additive. Définissons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y_n = \inf_{k \geq n} \frac{Z_{0,k}}{k}$ .  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une suite croissante donc converge, et par la loi forte des grands nombres sur  $(U_{0,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{0,n}}{n} = g_1 - \xi.$$

Par la convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\right] = \mathbb{E}[g_1 - \xi] = g_1 - \mathbb{E}[\xi].$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{Z_{0,n}}{n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^n W_{\ell-1, \ell} - W_{0,n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (ng_1 - g_n) = g_1 - \gamma.$$

Donc

$$g_1 - \mathbb{E}[\xi] \leq g_1 - \gamma,$$

i.e.

$$\gamma \leq \mathbb{E}[\xi].$$

Finalement,

$$\mathbb{E}[\xi] = \gamma.$$

3. On a

$$\mathbb{E} \left[ \left| \frac{Z_{0,n}}{n} - Y_n \right| \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{Z_{0,n}}{n} - Y_n \right] = g_1 - \frac{g_n}{n} - \mathbb{E}[Y_n] \longrightarrow g_1 - \gamma - (g_1 - \mathbb{E}[\xi]) = g_1 - \gamma - (g_1 - \gamma) = 0.$$

Or,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante convergeant vers  $g_1 - \xi$  presque sûrement, qui est intégrable, donc par le théorème de convergence dominée,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge dans  $L^1$  vers  $g_1 - \xi$ .  
Or, par la loi forte des grands nombres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left| \frac{U_{0,n}}{n} - g_1 \right| \right] = 0.$$

Donc

$$\frac{W_{0,n}}{n} = \frac{1}{n} (U_{0,n} - Z_{0,n})$$

converge dans  $L^1$  vers  $\xi$ .

□

Montrons à présent le théorème de Furstenberg-Kesten :

*Démonstration du Théorème 2.2.1.* Montrons que la suite définie par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m < n, W_{m,n} = \ln(\|X_n X_{n-1} \cdots X_{m+1}\|)$$

vérifie les hypothèses du théorème de Kingman.

1. Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m < n$ . Comme  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est i.i.d,  $X_n X_{n-1} \cdots X_{m+1}$  a même loi que  $X_{n-m} X_{n-m-1} \cdots X_1$ ,  $W_{m,n}$  a même loi que  $W_{0,n-m}$ .
2. Soit  $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^4$  tel que  $m < n \leq p < q$ . Les variables  $\ln(\|X_n \cdots X_{m+1}\|)$  et  $\ln(\|X_q \cdots X_{p+1}\|)$  sont indépendantes car les  $X_i$  le sont.
3. Soit  $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $m < n < p$ .  $\|\cdot\|$  étant une norme d'algèbres, par la croissance du logarithme,

$$\begin{aligned} \ln(\|A_p A_{p-1} \cdots A_{m+1}\|) &\leq \ln(\|A_p A_{p-1} \cdots A_{n+1}\| \|A_n \cdots A_{m+1}\|) \\ &\leq \ln(\|A_p A_{p-1} \cdots A_{n+1}\|) + \ln(\|A_n \cdots A_{m+1}\|), \end{aligned}$$

autrement dit,

$$W_{m,p} \leq W_{m,n} + W_{n,p}.$$

$(W_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sous-additive.

4. Par hypothèse,  $\mathbb{E}[W_{0,1}^+] = \mathbb{E}[\ln^+(\|X_1\|)] < +\infty$ .

D'après le théorème de Kingman,  $\frac{\ln(\|X_k X_{k-1} \cdots X_1\|)}{k}$  converge dans  $L^1$  vers  $\xi = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\|X_n \cdots X_1\|)}{n}$ .  
Il reste à montrer que  $\xi$  est constante presque sûrement. Rappelons que notre système dynamique mesurable est ergodique.

$$\xi \circ \theta(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\|X_{n+1} \cdots X_2\|)}{n} = \xi.$$

Par l'ergodicité,  $\xi$  est constante égale à  $\gamma$  presque sûrement.

□

**Définition 2.2.2 :** La constante  $\gamma(\mu)$  dans le théorème de Furstenberg-Kesten est appelée exposant de Lyapounov.

La suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie les hypothèses du théorème de Furstenberg-Kesten. En effet, elle est i.i.d et à support fini, donc  $\ln(\|M^{(n)}\|)$  est à support fini et donc intégrable.

Notons  $\gamma(p)$  l'exposant de Lyapounov associé à la suite, qui dépend de la probabilité  $p$  d'apparition de  $S$ .

## 2.3 Formule explicite de l'exposant de Lyapounov

Nous allons donner une formule explicite de l'exposant de Lyapounov et montrer que  $\gamma(p)$  est également la limite presque sûre de  $\frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}n(0)\|)$ . Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire l'espace projectif de  $\mathbb{R}_+^2$ .

### 2.3.1 Quelques éléments sur l'espace projectif

Les résultats présentés dans cette sous-section sont généralisables à une dimension finie quelconque  $d \in \mathbb{N}^*$  et sont en grande partie dûs à Hennion [Hen97].

**Définition 2.3.1 :** Soit  $E$  un espace vectoriel. On définit l'espace projectif de  $E$  par le quotient  $E \setminus \{0\} / \sim$  où pour tous  $x, x' \in E$ ,  $x \sim x'$  si, et seulement si  $x$  et  $x'$  sont colinéaires. On note  $P(E)$  cet ensemble.

On désigne par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à coefficients positifs telles que chacune de ses lignes contient au moins un coefficient strictement positif.

On note  $\mathcal{S}^\circ$  le sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  constitué de matrices à coefficients strictement positifs.

On note  $C$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  à coefficients strictement positifs et  $\bar{C}$  l'ensemble des vecteurs à coefficients positifs.

**Proposition 2.3.1 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  $A \in \mathcal{S}$  si, et seulement si  $A\bar{C} = \bar{C}$ .

On définit également

$$B = C \cap \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_1 = 1\} \text{ et } \bar{B} = \bar{C} \cap \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_1 = 1\}.$$

$\bar{B}$  est un ensemble de représentants de  $P(\mathbb{R}_+^2)$ .

Il est en outre clair que  $B$  et  $\bar{B}$  sont convexes : tous les éléments  $x$  de  $B$  (resp.  $\bar{B}$ ) s'écrivent  $x = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$ , où  $t \in ]0, 1[$  (resp.  $t \in [0, 1]$ ).

**Proposition 2.3.2 :**  $A \cdot x = \frac{Ax}{\|Ax\|}$  définit une action de  $\mathcal{S}$  sur  $\bar{B}$ .

L'objectif de cette partie est de construire une distance sur  $\bar{B}$  pour laquelle les matrices  $S$  et  $T$  vues comme des applications sur  $\bar{B}$  sont contractantes.

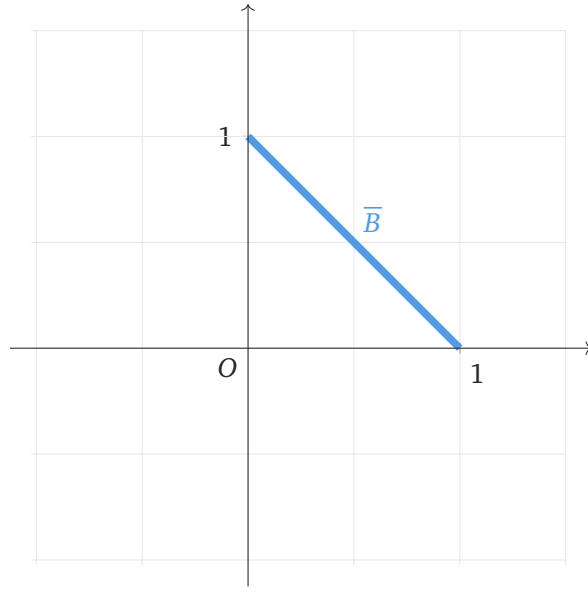


FIGURE 2.1. Domaine  $\overline{B}$

**Théorème-Définition 2.3.1 (Distance sur  $\overline{B}$ ) :** On définit pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,

$$m(x, y) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall i \in \{1, 2\}, \lambda y_i \leq x_i\}.$$

On a

$$m(x, y) = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i}, i \in \{1, 2\}, y_i > 0 \right\}.$$

L'application  $\delta$  définie par

$$\delta(x, y) = \varphi(m(x, y)m(y, x))$$

où  $\varphi : \begin{matrix} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ s & \longmapsto & \frac{1-s}{1+s} \end{matrix}$ , est une distance sur  $\overline{B}$ , bornée par 1.

Pour montrer que  $\delta$  est une distance, introduisons le lemme suivant :

**Lemme 2.3.1 :** Soient  $x, y, z \in \overline{B}$ . Alors

1.  $m(x, y) \in [0, 1]$ ;
2.  $m(x, z)m(z, y) \leq m(x, y)$ ;
3.  $m(x, y)m(y, x) = 1$  si, et seulement si  $x = y$ ;
4.  $m(x, y) = 0$  si, et seulement s'il existe  $i_0 \in \{1, 2\}$  tel que  $x_{i_0} = 0$  et  $y_{i_0} \neq 0$ .

*Démonstration.* Notons  $A_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall i \in \{1, 2\}, \lambda y_i \leq x_i\}$ .

Alors, par définition,  $m(x, y) = \sup A_{x,y}$ .

1. Comme  $x \in \overline{B}$ ,  $0 \in A_{x,y}$ , donc  $m(x, y) \geq 0$ . Soit  $\lambda \in A_{x,y}$ . Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\lambda y_i \leq x_i$ . Puisque  $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ , par somme,  $\lambda = \lambda(y_1 + \dots + y_d) \leq x_1 + \dots + x_d = 1$ . Donc pour

tout  $\lambda \in A_{x,y}$ ,  $\lambda \leq 1$ , et donc  $m(x,y) \leq 1$ .

2. Soient  $\lambda_1 = m(x,z)$  et  $\lambda_2 = m(z,y)$ . Pour tout  $i \in \{1,2\}$ ,  $\begin{cases} \lambda_1 z_i \leq x_i \\ \lambda_2 y_i \leq z_i \end{cases}$  donc par somme,  $\lambda_1 \lambda_2 z_i y_i \leq x_i z_i$ , et si  $z_i > 0$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \leq \frac{x_i}{y_i}$ , d'où  $\lambda_1 \lambda_2 \leq m(x,y)$ , i.e.  $m(x,z)m(z,y) \leq m(x,y)$ .
3.  $m(x,y)m(y,x) = 1$  si, et seulement si  $m(x,y) = m(y,x) = 1$ , i.e. pour tout  $i \in \{1,2\}$ ,  $y_i \leq x_i$  et  $x_i \leq y_i$ , soit  $x = y$ .
4. Immédiat avec  $m(x,y) = \min\{\frac{x_i}{y_i}, i \in \{1,2\}, y_i > 0\}$ .

□

Montrons à présent que  $\delta$  est une distance sur  $\overline{B}$ .

*Démonstration du Théorème-définition 2.3.1.*  $\varphi$  est dérivable sur  $[0,1]$ , et

$$\forall s \in [0,1], \varphi'(s) = -\frac{2}{(1+s)^2} < 0.$$

Donc  $\varphi$  est strictement décroissante et  $\varphi(1) = 0$ .  $\varphi$  est en particulier injective.

Soit  $(x,y,z) \in [0,1]^3$ .

- $\delta(x,x) = \varphi(m(x,x)m(x,x)) = \varphi(1) = 0$ . Si  $\delta(x,y) = 0$ , par injectivité de  $\varphi$ ,  $m(x,y)m(y,x) = 1$ , donc  $x = y$  d'après le lemme.
- $\delta$  est clairement symétrique.
- Soit  $t \in [0,1]$ . On considère la fonction  $\psi : \begin{matrix} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ s & \longmapsto & \varphi(s) + \varphi(t) - \varphi(st) \end{matrix}$ .  $\psi(1) = 0$  et

$$\forall s \in [0,1], \psi'(s) = -\frac{2(1-t)(1-s^2t)}{(1+s)^2(1+st)^2} \geq 0$$

donc  $\psi$  est croissante et pour tout  $s \in [0,1]$ ,  $\psi(s) \geq \psi(0) = \varphi(t) \geq 0$ .

Donc pour tout  $(s,t) \in [0,1]^2$ ,  $\varphi(st) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ . Avec  $s = m(x,z)m(z,x)$  et  $t = m(y,z)m(z,y)$ ,  $\varphi(st) \leq d(x,z) + d(z,y)$ .

De plus,  $m(x,z)m(z,x)m(y,z)m(z,y) = m(x,z)m(z,y)m(y,z)m(z,x) \geq m(x,y)m(y,x)$  par le lemme précédent, donc par la décroissance de  $\varphi$ ,  $\delta(x,y) \leq \varphi(st)$ . Finalement,  $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ .

□

**Proposition 2.3.3 :** Pour tout  $(x,y) \in \overline{B}^2$ ,  $\delta(x,y) = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{x_1 y_2 + x_2 y_1}$ .  
Si  $x = (t_1 \ 1 - t_1)^T$  et  $y = (t_2 \ 1 - t_2)^T$ ,  $\delta(x,y) = \frac{|t_1 - t_2|}{t_1 + t_2}$ .

**Remarque.** On peut généraliser un résultat similaire pour  $d \in \mathbb{N}^*$  quelconque :

Soit  $(x,y) \in \overline{B}^2$ . On pose  $a = (1-\lambda_1)x + \lambda_1 y$  avec  $\lambda_1 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}, (1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{B}\}$  et  $b = (1-\lambda_2)x + \lambda_2 y$  avec  $\lambda_2 = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}, (1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{B}\}$ .

En réécrivant  $x = u_1 a + u_2 b$  et  $y = v_1 a + v_2 b$ ,

$$\delta(x,y) = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{u_1 v_2 + u_2 v_1}.$$

$a$  et  $b$  correspondent aux extrémités du segment correspondant à l'intersection de  $\overline{B}$  par la droite passant par  $x$  et  $y$ .

**Proposition 2.3.4 :**  $(\bar{B}, \delta)$  n'est pas connexe.  $\bar{B}$  a 3 composantes connexes :  $B$ ,  $e_1$  et  $e_2$ .

*Démonstration.* Montrons que  $B$  et  $\bar{B} \setminus B$  sont des ouverts.

Soit  $z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in B$ . D'après le Lemme 2.3.1,  $B = B_\delta(z, 1)$ .

Soit  $y \in \bar{B} \setminus B$ . Alors, pour tout  $x \in B$ ,  $\delta(x, y) = 1$ . Donc  $B_\delta(y, 1) \subset \bar{B} \setminus B$ . Donc  $\bar{B} \setminus B$  est un ouvert. Puisque  $\bar{B} = B \cup (\bar{B} \setminus B)$ ,  $\bar{B}$  n'est pas connexe.

Soit  $y \in \bar{B} \setminus B$ .  $\bar{B}$  étant un espace séparé,  $\{y\}$  est un fermé. Or,  $\{y\} = B_\delta(y, 1)$ , donc  $\{y\}$  est ouvert. Étant à la fois ouvert et fermé,  $\{y\}$  est une composante connexe. On a vu que  $B$  est un ouvert.  $\bar{B} \setminus B$  est ouvert comme union d'ouverts. Donc  $B$  est également fermé.  $B$  est donc une composante connexe. Ainsi,  $\bar{B}$  a pour composantes connexes,  $B$  et  $\{y\}$  pour tout  $y \in \bar{B} \setminus B$ , ce qui fait 3 composantes connexes. □

**Lemme 2.3.2 :** Pour tout  $(x, y) \in \bar{B}$ ,  $\delta(x, y) \geq \frac{1}{2} \|x - y\|_1$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in \bar{B}^2$ . Écrivons  $x = (t_1 \ 1 - t_1)^T$  et  $y = (t_2 \ 1 - t_2)^T$  de sorte que  $\delta(x, y) = \frac{|t_1 - t_2|}{t_1 + t_2}$ .

On a

$$\|x - y\|_1 = 2|t_1 - t_2| = \delta(x, y)(t_1 + t_2) \leq 2\delta(x, y).$$

□

**Proposition 2.3.5 :** Notons  $d_1$  la distance associée à la norme  $\|\cdot\|_1$ .  $(B, \delta)$  est homéomorphe à  $(B, d_1)$ .

*Démonstration.* Soient  $x \in B$  et  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x^{(n)}, x) = 0$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$m(x, x^{(n)}) = \min \left\{ \frac{x_i}{x_i^{(n)}}, i \in \{1, 2\} \right\}.$$

Or, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_i}{x_i^{(n)}} = 1,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(x, x^{(n)}) = 1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x, x^{(n)}) = 0.$$

Donc l'identité est une application continue de  $(B, d_1)$  vers  $(B, \delta)$ . Inversement d'après l'inégalité établie dans Lemme 2.3.2, l'identité est continue de  $(B, \delta)$  vers  $(B, d_1)$ . Donc  $(B, \delta)$  et  $(B, d_1)$  sont homéomorphes. □

**Remarque.** 1.  $(\bar{B}, \delta)$  est en particulier un espace métrique complet.

2.  $(\bar{B}, d_1)$  et  $(\bar{B}, \delta)$  ne sont pas homéomorphes puisque  $(\bar{B}, \delta)$  a plusieurs composantes connexes.

**Proposition 2.3.6 :** Soit  $A, A' \in \mathcal{S}$ . On définit  $c(A) = \sup\{\delta(Ax, Ay), x, y \in \bar{B}\}$ .

1. Pour tout  $(x, y) \in \bar{B}$ ,  $\delta(Ax, Ay) \leq c(A)\delta(x, y)$ .
2.  $c(AA') \leq c(A)c(A')$ .
3.  $c(A) \leq 1$  et  $c(A) < 1$  si, et seulement si  $A \in \mathcal{S}^\circ$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in \bar{B}^2$  tel que  $x \neq y$ .

1. Si  $Ax = Ay$ , le résultat est immédiat. Supposons que  $Ax \neq Ay$ . On a

$$\begin{aligned} \delta(Ax, Ay) &= \frac{|(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2)(a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2) - (a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2)(a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2)|}{(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2)(a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2) + (a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2)(a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2)} \\ &= \frac{|a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}||x_1y_2 - x_2y_1|}{2(a_{1,1}a_{2,1}x_1y_1 + a_{1,2}a_{2,2}x_2y_2) + (a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1})(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &\leq \frac{|a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}||x_1y_2 - x_2y_1|}{(a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1})(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= \delta(Ae_1, Ae_2)\delta(x, y) \\ &\leq c(A)\delta(x, y). \end{aligned}$$

- 2.

$$\delta(AA'x, AA'y) \leq c(A)\delta(A'x, A'y) \leq c(A)c(A')$$

donc par passage au supremum à gauche,

$$c(AA') \leq c(A)c(A').$$

3.  $c(A) \leq 1$  car  $\delta$  est bornée par 1.

Supposons que  $A \in \mathcal{S}^\circ$ .  $\bar{AB}$  est un fermé et  $\bar{AB} \subset B$ . Donc  $\bar{AB}$  est compact de  $(B, d_1)$ , donc de  $(B, \delta)$ . Il existe  $(x, y) \in \bar{B}$  tel que  $c(A) = \delta(Ax, Ay)$  et comme  $Ax, Ay \in B$ ,  $c(A) < 1$ .

Supposons que  $A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^\circ$ . Alors  $Ae_1$  ou  $Ae_2$  est dans  $\bar{B} \setminus B$ . Supposons par exemple que  $Ae_1 \in \bar{B} \setminus B$ . Donc pour  $x \in B$ ,

$$1 = \delta(Ae_1, Ax) \leq c(A)$$

et  $c(A) = 1$ .

□

## 2.3.2 Mesure invariante et exposant de Lyapounov

**Notation 3.**  $\mathcal{M}$  désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur  $P(\mathbb{R}_+^2)$ , et  $\mathcal{M}(E, F)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $E \rightarrow F$ .

**Définition 2.3.2 :** On définit, pour tout  $\nu \in \mathcal{M}$ , la mesure  $\mu \star \nu$  sur  $P(\mathbb{R}_+^2)$  par

$$\forall \varphi \in \mathcal{M}(P(\mathbb{R}_+^2), \mathbb{R}), \int_{P(\mathbb{R}_+^2)} \varphi(x) d\mu \star \nu(x) = \int_{GL_2(\mathbb{R})} \int_{P(\mathbb{R}_+^2)} \varphi(gx) d\mu(g) d\nu(x).$$

On dit que  $\nu$  est  $\mu$ -invariant lorsque  $\mu \star \nu = \nu$ .

**Remarque.** Si  $Y$  est une variable aléatoire sur  $P(\mathbb{R}_+^2)$  de loi  $\nu$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $GL_2(\mathbb{R})$  de loi  $\mu$  indépendante de  $Y$ , alors  $XY$  est de loi  $\mu \star \nu$ .

Dans notre cas, pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}$ ,

$$\mu \star \nu = (1-p)\nu \circ T^{-1} + p\nu \circ S^{-1}.$$

Le résultat suivant provient de [FK83].

**Théorème 2.3.1 :** Soient  $\mu$  une mesure de probabilité à support compact dans  $GL_2(\mathbb{R})$ , et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite i.i.d. de loi  $\mu$ . Alors

$$\gamma(\mu) = \sup \left\{ \iint \ln \frac{\|g\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} d\mu(g) d\nu(x), \mu \star \nu = \nu \right\}$$

où  $\hat{x}$  désigne un représentant quelconque dans  $\mathbb{R}_+^2$  de  $x \in P(\mathbb{R}_+^2)$ .

**Remarque.**  $\bar{B}$  est un ensemble de représentants de  $P(\mathbb{R}_+^2)$ . Donc

$$\gamma(\mu) = \sup \left\{ \iint \ln \|g\hat{x}\| d\mu(g) d\nu(x), \mu \star \nu = \nu \right\}$$

avec  $\hat{x}$  dans  $\bar{B}$ .

**Notation 4.** Par la suite,  $\hat{x}$  désignera le représentant de  $x \in P(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $\bar{B}$ .

Nous allons montrer que dans notre situation, si  $\mu = (1-p)\delta_T + p\delta_S$ , il existe une unique mesure  $\mu$ -invariante  $\nu_p$ .

Ainsi, à paramètre  $p$  fixé, l'exposant de Lyapounov s'écrira

$$\gamma(p) = (1-p) \int_{P(\mathbb{R}_+^2)} \ln \|T\hat{x}\| d\nu_p(x) + p \int_{P(\mathbb{R}_+^2)} \ln \|Sx\| d\nu_p(x).$$

### Intermezzo : fonctions lipschitziennes et points fixes

**Définition 2.3.3 (Application lipschitzienne) :** Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.  $f$  est dite *lipschitzienne* si, et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$



Si  $f$  est lipschitzienne, on définit sa constante de Lipschitz par

$$\text{Lip}(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+, f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}.$$

**Définition 2.3.4 (Application contractante) :** Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.  $f$  est dite *contractante* (resp. strictement contractante) s'il existe  $K \in [0, 1]$  (resp.  $K \in [0, 1[$ ) tel que  $f$  soit  $K$ -lipschitzienne.

D'après la Proposition 2.3.6,  $S$  et  $T$ , vues comme des applications de  $(\bar{B}, \delta)$  vers  $(\bar{B}, \delta)$  sont 1-lipschitzienne. Comme  $S^2$  est à coefficients strictement positifs,  $S^2$  est contractante.

**Théorème 2.3.2 (Point fixe de Banach) :** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application strictement contractante. Alors  $f$  admet un unique point fixe.

**Corollaire 2.3.1 :** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application tel qu'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^q$  soit strictement contractante. Alors  $f$  admet un unique point fixe.

**Théorème 2.3.3 (Point fixe à paramètre) :** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $\Lambda$  une partie de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $f$  une fonction continue de  $\Omega \times \Lambda$  dans  $\Omega$ . On suppose que  $f$  est uniformément strictement contractante : il existe  $K \in [0, 1[$  tel que pour tous  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$d(f(x, \lambda), f(y, \lambda)) \leq Kd(x, y).$$

Alors pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe un unique  $x_\lambda \in \Omega$  tel que  $f(x_\lambda, \lambda) = x_\lambda$ . De plus,  $\lambda \mapsto x_\lambda$  est continue.

## Recherche de mesure invariante

On définit pour tout  $p \in [0, 1]$ , l'opérateur  $\mathcal{T}_p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  :

$$\nu \mapsto (1-p)\nu \circ T^{-1} + p\nu \circ S^{-1}.$$

L'objectif est de déterminer une mesure invariante continue à l'aide du théorème de point fixe à paramètre. Pour ce faire, introduisons une distance rendant  $\mathcal{T}_p$  uniformément strictement contractant.

**Notation 5.** Pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}$  et  $f : P(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathbb{R}$ , on note

$$\langle f, \nu \rangle = \int_{P(\mathbb{R}_+^2)} f \, d\nu.$$

**Théorème-Définition 2.3.2 (Distance de Hutchinson) :** Notons  $\text{Lip}_1 = \text{Lip}_1(P(\mathbb{R}_+^2), \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de l'espace projectif  $P(\mathbb{R}_+^2)$  muni de  $\delta$  vers  $\mathbb{R}$ .

L'application  $d_H : \mathcal{M}^2 \longrightarrow \mathcal{M}$   
 $(\nu_1, \nu_2) \longmapsto \sup_{f \in \text{Lip}_1} \{ \langle f, \nu_1 - \nu_2 \rangle \}$  définit une distance sur  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 2.3.4 :**  $(\mathcal{M}, d_H)$  est complet.

**Proposition 2.3.7 :** Soit  $g : P(\mathbb{R}_+^2) \longrightarrow P(\mathbb{R}_+^2)$  une application lipschitzienne. Alors  $\mathcal{T} : \nu \longrightarrow \nu \circ g^{-1}$  est lipschitzienne de constante  $\text{Lip}(\mathcal{T}) \leq \text{Lip}(g)$ .

*Démonstration.* Soit  $(\nu_1, \nu_2) \in \mathcal{M}^2$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}_1(P(\mathbb{R}_+^2), \mathbb{R})$ .

$$\langle f, (\nu_1 - \nu_2) \circ g^{-1} \rangle = \langle f \circ g, \nu_1 - \nu_2 \rangle.$$

L'application  $\frac{f \circ g}{\text{Lip}(f \circ g)}$  étant 1-lipschitzienne,

$$\left\langle \frac{f \circ g}{\text{Lip}(f \circ g)}, \nu_1 - \nu_2 \right\rangle \leq d_H(\nu_1, \nu_2).$$

i.e.

$$\langle f \circ g, \nu_1 - \nu_2 \rangle \leq \text{Lip}(f \circ g) d_H(\nu_1, \nu_2) \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) d_H(\nu_1, \nu_2) \leq \text{Lip}(g) d_H(\nu_1, \nu_2).$$

Donc

$$\langle f, (\nu_1 - \nu_2) \circ g^{-1} \rangle \leq \text{Lip}(g) d_H(\nu_1, \nu_2).$$

et par passage au supremum,

$$d_H(\mathcal{T} \nu_1, \mathcal{T} \nu_2) \leq \text{Lip}(g) d_H(\nu_1, \nu_2).$$

Ainsi,  $\mathcal{T}$  est lipschitzienne et  $\text{Lip}(\mathcal{T}) \leq \text{Lip}(g)$ . □

À  $p \in [0, 1]$  fixé,  $\mathcal{T}_p$  est  $(p \text{Lip}(S) + (1-p) \text{Lip}(T))$ -lipschitzienne. Or, on a vu que  $S$  et  $T$  sont 1-lipschitziennes. Donc  $\mathcal{T}_p$  est 1-lipschitzienne.

Pour tout  $p \in ]0, 1]$ ,

$$\forall \nu \in \mathcal{M}, \mathcal{T}_p^2(\nu) = (1-p)^2 \nu \circ T^{-2} + (1-p)p \nu \circ S^{-1} T^{-1} + p(1-p) \nu \circ T^{-1} S^{-1} + p^2 \nu \circ S^{-2}.$$

Donc

$$\text{Lip}(\mathcal{T}_p^2) \leq (1-p)^2 + 2(1-p)p + p^2 \text{Lip}(S^2) = (1-p^2) + p^2 \text{Lip}(S^2) \leq \text{Lip}(S^2) < 1$$

et  $\mathcal{T}^2$  est uniformément strictement contractante sur  $\mathcal{M} \times [\varepsilon, 1]$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ .

D'après le théorème du point fixe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $p \in [\varepsilon, 1]$ , il existe une unique mesure  $\nu_p$  telle que  $\mathcal{T}_p(\nu_p) = \nu_p$ , et l'application  $p \longmapsto \nu_p$  est continue sur tout  $[\varepsilon, 1]$  vers  $(\mathcal{M}, d_H)$ , donc continue sur  $]0, 1]$ .

**Remarque.** L'unicité de la mesure invariante n'est pas garantie pour  $p = 0$ .

### 2.3.3 Lien avec $N(k)$

Furstenberg et Kifer ont établi dans [FK83, p. 19] le résultat suivant :

**Théorème 2.3.5 :** Soient  $\mu$  une mesure sur  $GL_2(\mathbb{R})$  à support compact et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires i.i.d. de loi  $\mu$ . S'il existe  $\beta$  tel que pour toute mesure  $\nu$   $\mu$ -invariante,

$$\iint \ln \frac{\|g\widehat{x}\|}{\|\widehat{x}\|} d\mu(g) d\nu(x) = \beta,$$

alors, pour tout  $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|X^{(n)}\widehat{u}\|) = \beta \text{ p.s.}$$

Rappelons que  $\gamma(p) = \sup \left\{ \iint \ln \frac{\|g\widehat{x}\|}{\|\widehat{x}\|} d\mu(g) d\nu(x), \mu \star \nu = \nu \right\}$ . Compte tenu de l'unicité de la mesure, dans notre cas, cette limite est égale à  $\gamma(p)$  lorsque  $p \neq 0$ . Donc pour tout  $p \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(k))}{k} = \gamma(p)$ . Si  $\gamma(p) > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} N(k) = +\infty$ , donc la population « explose » exponentiellement. On cherche à déterminer  $p^* \in ]0, 1[$  tel que  $\gamma(p^*) = 0$  appelé probabilité de bifurcation.

### 2.3.4 Point de bifurcation

Rappelons que si  $p = 0$ , la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $T$ , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|M^{(n)}\|) < 0$$

et si  $p = 1$ , la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $S$ , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|M^{(n)}\|) > 0.$$

Établissons la continuité de  $\gamma$  pour montrer l'existence du point de bifurcation.

On a établi dans la partie précédente que pour tout  $p \in ]0, 1]$ ,

$$\gamma(p) = (1-p) \int_{\overline{B}} \ln(\|Tx\|) d\nu_p(x) + p \int_{\overline{B}} \ln(\|Sx\|) d\nu_p(x) = (1-p) \langle \ln(\|S \cdot\|), \nu_p \rangle + p \langle \ln(\|T \cdot\|), \nu_p \rangle.$$

Montrons que  $p \mapsto \langle \ln(\|T \cdot\|), \nu_p \rangle$  et  $p \mapsto \langle \ln(\|S \cdot\|), \nu_p \rangle$  sont continues.

Soit  $g \in \{S, T\}$ .

Premièrement,  $x \mapsto \ln(\|g\widehat{x}\|)$  est lipschitzienne de  $(P(\mathbb{R}_+^2), \delta)$  vers  $\mathbb{R}$  : soit  $\alpha := \inf_{\widehat{x} \in \overline{B}} \|S\widehat{x}\|$ .  $(\overline{B}, \|\cdot\|)$  étant compact et  $S$  étant continue, il existe  $x \in \overline{B}$  tel que  $\|Sx\| = \alpha$ . Donc nécessairement,  $\alpha > 0$ . Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \in \overline{B}^2, |\ln(\|S\widehat{x}_1\|) - \ln(\|S\widehat{x}_2\|)| \leq \frac{1}{\alpha} \|\|S(\widehat{x}_1) - \| \widehat{x}_2\|\| \leq \|S(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2)\| \leq \|S\| \|\widehat{x}_1 - \widehat{x}_2\|.$$

Donc  $\psi_g : x \mapsto \ln(\|g\widehat{x}\|)$  est lipschitzienne.

D'après la Proposition 2.3.7, pour tout  $(p, p') \in ]0, 1]^2$ ,

$$\langle \psi_g, \nu_p \rangle - \langle \psi_g, \nu_{p'} \rangle = \langle \psi_g, (\nu_p - \nu_{p'}) \rangle \leq \text{Lip}(\psi_g) d_H(\nu_p, \nu_{p'}).$$

De même,

$$\langle \psi_g, \nu_{p'} \rangle - \langle \psi_g, \nu_p \rangle \leq \text{Lip}(\psi_g) d_H(\nu_p, \nu_{p'}).$$

Donc

$$|\langle \psi_g, \nu_p \rangle - \langle \psi_g, \nu_{p'} \rangle| \leq \text{Lip}(\psi_g) d_H(\nu_p, \nu_{p'})$$

Par la continuité de  $p \longrightarrow \nu_p$ , pour tout  $p \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{p' \rightarrow p} d_H(\nu_p, \nu_{p'}) = 0$ . Donc  $p \longmapsto \langle \psi_g, \nu_p \rangle$  est continue sur  $]0, 1]$ , et donc  $\gamma$  est continue sur  $]0, 1]$ .

Montrons que  $\gamma$  est négatif au voisinage de 0.

Rappelons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & k \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ .

$$T^n = \lambda_2^n \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I_2) - \lambda_1^n \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_2 I_2)$$

i.e.

$$T^n + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} I_2 = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} T.$$

Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|S^k T^n\| \leq \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \|S^k T\|$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\omega \in \Omega$ . Par simplification, on notera  $Y$  la trajectoire  $Y(\omega)$ .

Décomposons  $M^{(n)}(\omega)$  :

$$M^{(n)} = T^{n_{q_n}} S T^{n_{q_n-1}} S T^{n_{q_n-2}} \dots S T^{n_1}$$

avec  $n_{q_n} + n_{q_n-1} + \dots + n_1 + q_n = n$ ,  $n_{q_n} \in \mathbb{N}$ ,  $n_{q_k} \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $k \in \llbracket 1, q_n - 1 \rrbracket$ .  $q_n$  est la fréquence d'apparition de la matrice  $S$ .

Posons  $\delta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$ .

Donc

$$\|M^{(n)}\| \leq \|T^{n_{q_n}}\| \|S T^{n_{q_n-1}}\| \|S T^{n_{q_n-2}}\| \dots \|S T^{n_1}\| \leq \prod_{\ell=1}^{q_n} \left( \frac{\lambda_2^{n_\ell} - \lambda_1^{n_\ell}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \|T\|^{n_{q_n}} \|S T\|^q = \lambda_2^{n-2q_n} \prod_{\ell=1}^{q_n} \left( \frac{1 - \delta^{n_\ell}}{1 - \delta} \right).$$

donc

$$\frac{\ln(\|M^{(n)}\|)}{n} \leq \frac{n-2q_n}{n} \ln(\lambda_2) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{q_n} \ln\left(\frac{1 - \delta^{n_\ell}}{1 - \delta}\right) = \left(1 - 2\frac{q_n}{n}\right) \ln(\lambda_2) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{q_n} \ln(1 - \delta^{n_\ell}) - \frac{q_n}{n} \ln(1 - \delta).$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} = p$ , et  $\ln(1 - \delta^k) \sim_{k \rightarrow \infty} -\delta^k$ , la série  $\sum \ln(1 - \delta^k)$  converge.

Donc par passage à la limite dans l'inégalité, pour tout  $p \in [0, 1]$ ,

$$\gamma(p) \leq (1 - 2p) \ln(\lambda_2) - p \ln(1 - \delta).$$

Comme  $\ln(\lambda_2) < 0$ , il existe un voisinage de 0 sur lequel  $(1 - 2p) \ln(\lambda_2) - p \ln(1 - \delta) < 0$ . Donc  $\gamma$  est strictement négative sur un voisinage de 0.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $p^* \in ]0, 1]$  tel que  $\gamma(p^*) = 0$ .

**Remarque.** Il est conjecturé que la fonction  $\gamma$  est une fonction concave, mais cette observation n'a pour le moment pas de démonstration.

Rappelons les trois expressions dont nous disposons de l'exposant de Lyapounov, à  $p \in ]0, 1]$  fixé :

1.  $\gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\|X_n \cdots X_1\|)}{n}$  p.s. ;
2.  $\gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\|X_n \cdots X_1 n(0)\|)}{n}$  p.s. ;
3.  $\gamma(p) = \int \int \ln \frac{\|g\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} d\mu(g) d\nu_p(x)$  où  $\nu_p$  est l'unique mesure  $\nu$  vérifiant  $\mu \star \nu = \nu$ .

Effectuons une simulation avec ces valeurs :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 465 \\ 0,0023 & 0,99 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0,9 & 465 \\ 0 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

### 3.1 Allure de $\gamma$ au voisinage de 0

Vérifions dans un premier temps que les deux premières formules donnent les mêmes résultats.

Pour les deux premières expressions on approche la limite par une valeur de la suite pour un rang suffisamment grand et on calcule une moyenne empirique afin de réduire l'erreur d'approximation.

Pour des raisons numériques (les coefficients de  $M^{(n)}$  explosent rapidement), il ne nous est pas possible d'effectuer les simulations au-delà de  $p = 0,0175$  en exploitant les deux premières formules. On observe sur les figures 3.1 et 3.2 que le point de bifurcation est atteint avant.

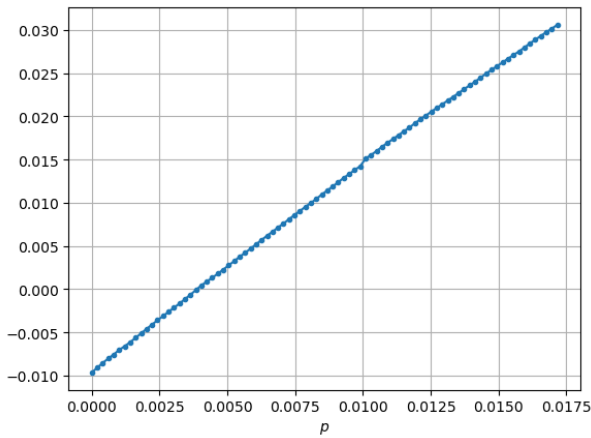


FIGURE 3.1. Première expression de  $\gamma$

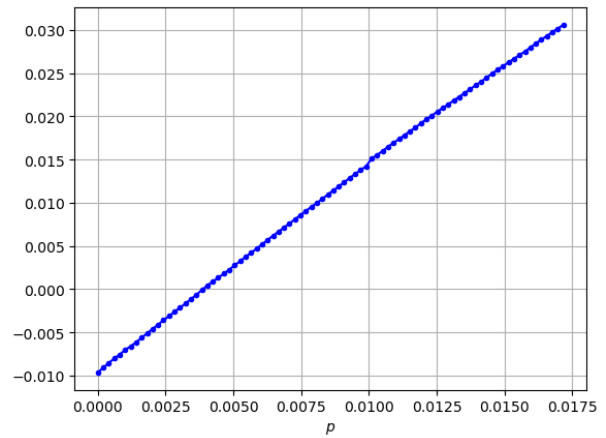


FIGURE 3.2. Deuxième expression de  $\gamma$

On observe que les simulations pour les deux premières expressions donnent des résultats similaires. Le point de bifurcation semble être situé entre  $3,5 \times 10^{-3}$  et  $4 \times 10^{-3}$ .

### 3.2 Allure de $\gamma$ ?

Pour avoir une idée de l'allure de  $\gamma$  sur  $]0, 1]$ , on peut utiliser l'expression sous forme intégrale :

$$\gamma(p) = (1-p) \int \ln \frac{\|T\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} d\nu_p(x) + p \int \ln \frac{\|S\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} d\nu_p(x)$$

Soit  $\mathcal{P} = \left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right), k \in \llbracket 1, m \rrbracket \right\}$  pour un entier  $m$  suffisamment grand. On dispose d'une mesure initiale  $\nu = \frac{1}{m} \sum_{x \in \mathcal{P}} \delta_x$ .  $\nu$  est une mesure de probabilité sur  $\bar{B}$ .  $\mathcal{T}_p^n(\nu)$  converge alors vers  $\nu_p$  pour la distance de Hutchinson. On approche alors  $\gamma(p)$  par  $\langle f, \mathcal{T}_p^n \rangle$  avec  $f(x) = (1-p) \ln \frac{\|T\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} + p \ln \frac{\|S\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}$  pour  $n$  assez grand. Remarquons que l'on a une expression explicite de  $\mathcal{T}_p^n(\nu)$  :

$$\mathcal{T}_p^n(\nu) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \sum_{X \in \Pi_k} \sum_{x \in \mathcal{P}} \delta_{Xx}$$

où  $\Pi_k$  est l'ensemble des matrices qui sont produit de  $n$  facteurs dans  $\{S, T\}$  comportant  $k$  facteurs égaux à  $S$ .

Donc

$$\gamma(p) \simeq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \sum_{X \in \Pi_k} \sum_{x \in \mathcal{P}} f(Xx).$$

En pratique, cette expression « brute » est difficilement exploitable, car il s'agit d'une somme de  $2^n$  termes dont chacun d'entre eux nécessite de faire un produit de  $n$  matrices. Pour le moment, on est parvenu à itérer 14 fois l'opération et on obtient le graphe donné dans la figure 3.3.

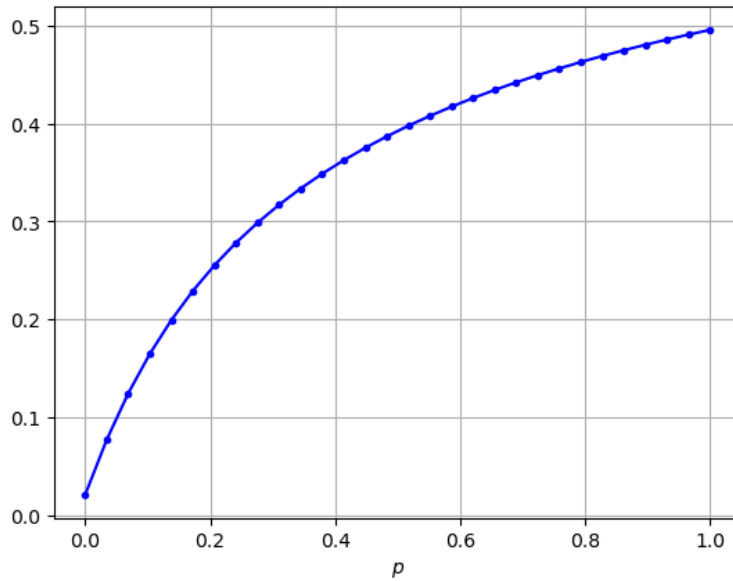


FIGURE 3.3. Troisième expression de  $\gamma$  (résultat partiel)

La courbe obtenue est encore assez éloignée de la courbe théorique, puisque l'on s'attendrait à avoir une limite à droite en 0 égale à  $\ln(0,99) < 0$  et en  $\gamma(1) > 1$ . Néanmoins, l'allure semble être la bonne, la fonction est concave.

### 3.3 Évolution de la dynamique de population

Observons l'évolution de la population avec différentes valeurs de  $p$  non loin du point de bifurcation donnée dans 3.4.

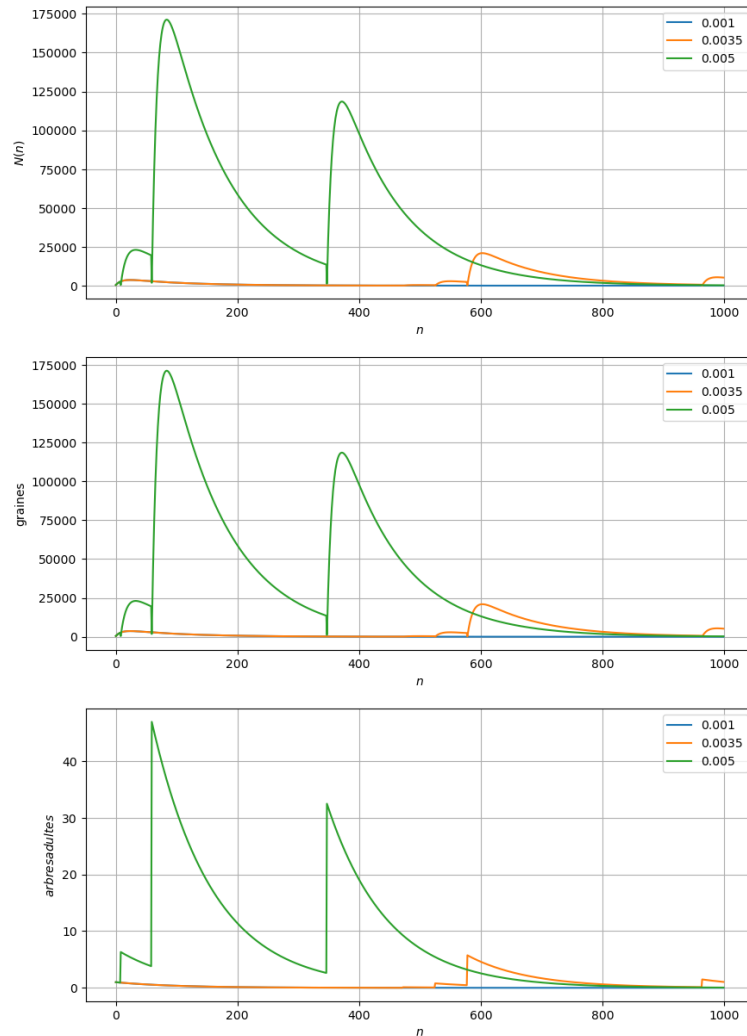


FIGURE 3.4. Évolution de la population avec différentes valeurs de  $p$  sur 1000 ans

Pour la valeur au dessus du point de bifurcation déterminé numériquement précédemment, la taille moyenne de la population peut être très importante, essentiellement due au nombre de graines, puisque le nombre d'arbres adultes n'excède pas 50. Cela explique par ailleurs que les courbes de  $N(k)$  et du nombre moyen de graines semblent identiques.

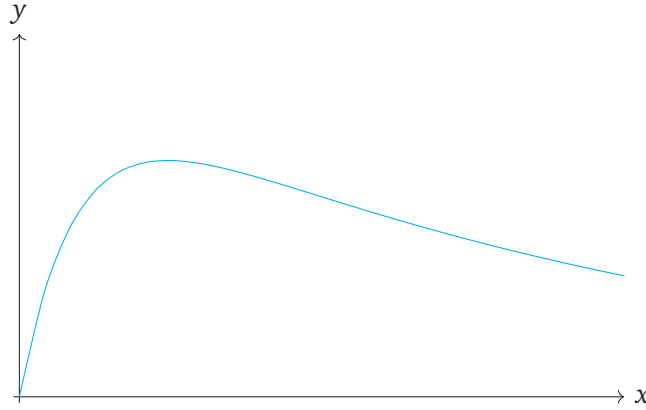
Expliquons l'allure de ces courbes.

Au départ,  $N(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Jusqu'à la première tempête qui a lieu à une année  $n$ , pour  $\ell \leq n$ ,

$$N(\ell) = \begin{pmatrix} g_\ell \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \frac{\lambda_2^\ell - \lambda_1^\ell}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \lambda_2^\ell \end{pmatrix},$$

et  $\|N(\ell)\| \simeq k \frac{\lambda_2^\ell - \lambda_1^\ell}{\lambda_2 - \lambda_1}$ .

Or, la fonction  $t \mapsto \frac{\lambda_2^t - \lambda_1^t}{\lambda_2 - \lambda_1}$  a pour allure :



ce qui explique l'allure de la courbe au départ.

Ensuite, à l'année  $n$ ,  $N(n) = \begin{pmatrix} k\lambda_2^n \\ kd\lambda_1 \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}$ . Puisque  $d\lambda_1$  est relativement faible et que  $t \mapsto \lambda_2^t$  décroît vite, chaque composante décroît, donc la norme également.

Décomposons :  $N(n) = k\lambda_2^n e_1 + kd\lambda_1 \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$ .  $T^\ell k\lambda_2^\ell e_1 = \lambda_1^\ell k\lambda_2^\ell$ , donc la contribution de la première composante devient rapidement négligeable, et l'allure de  $\|N(\ell)\|$  est donnée à partir d'un certain rang, principalement par sa deuxième composante. Ainsi de suite.

Enfin, observons sur la figure 3.5 l'allure des courbes pour une valeur  $p$  légèrement plus éloignée du point de bifurcation.

On observe une explosion de la taille moyenne de la population.

A contrario, si  $p$  est très faible et relativement loin du point de bifurcation, on observe une extinction. Pour  $p = 0.002$  par exemple, il n'y a pas d'arbre adulte autre que celui planté au départ.



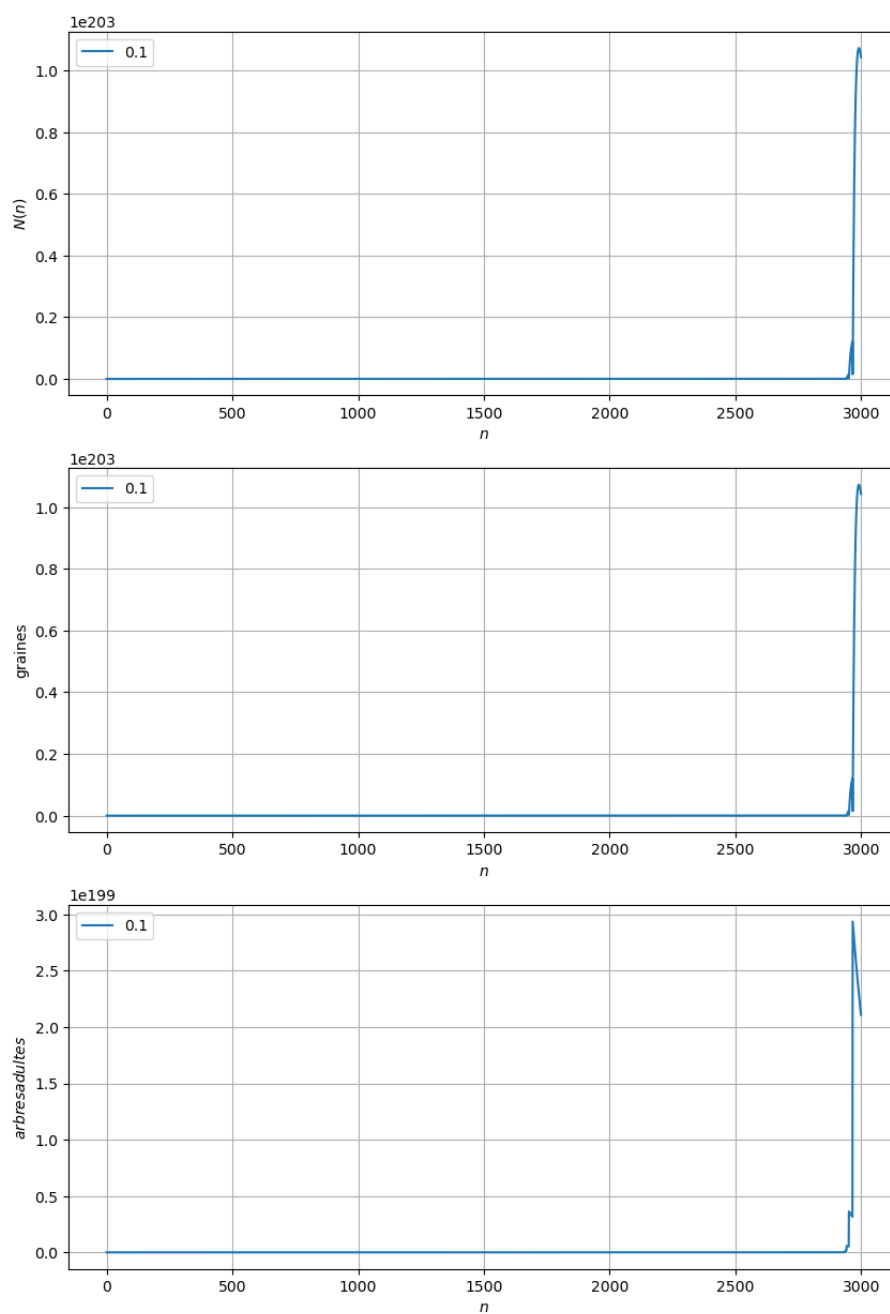


FIGURE 3.5. Évolution de la population avec  $p = 0,1$  sur 3000 ans

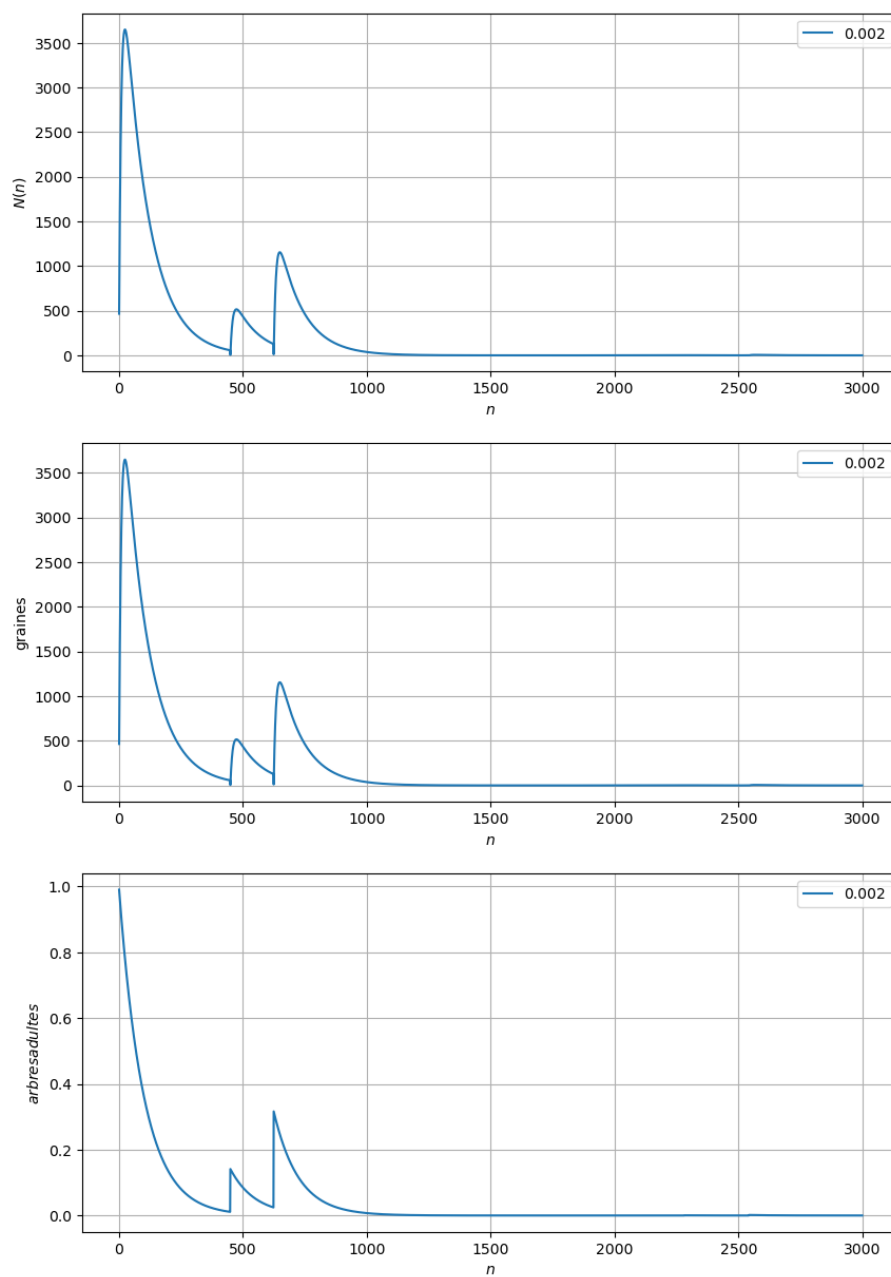


FIGURE 3.6. Évolution de la population avec  $p = 0,002$  sur 3000 ans

# Conclusion

## Synthèse

Nous avons élaboré un modèle simplifié de la dynamique de population de *Prunus serotina* sur une parcelle finie. Il consiste à considérer deux stades de vie, et de voir l'état la population à travers un produit de matrices aléatoires et d'un vecteur initial  $N(n) = M_n M_{n-1} \cdots M_1 n(0)$ . Pour étudier son comportement asymptotique, on s'est intéressé à la limite presque sûre de  $\frac{1}{n} \ln(\|M_n M_{n-1} \cdots M_1\|)$  dont l'existence est garantie par le théorème de Furstenberg-Kesten. Cette limite,  $\gamma(p)$ , dépendant de  $p$ , peut être exprimée sous forme d'une intégrale par rapport à une certaine mesure sur l'espace projectif  $P(\mathbb{R}_+)$ , lorsque  $p \neq 0$  :

$$\gamma(p) = \iint \ln \frac{\|g\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} d\mu(g) d\nu(x).$$

La mesure  $\nu_p$  est l'unique mesure  $\nu$  vérifiant  $(1-p)\nu \circ S^{-1} + p\nu \circ T^{-1}$ . Pour montrer l'existence et l'unicité de cette mesure, on a dû munir  $P(\mathbb{R}_+^2)$  d'une distance, puis en définissant une distance sur l'espace des mesures sur l'espace des mesures de probabilité sur  $P(\mathbb{R}_+^2)$ , on a eu recours au théorème du point fixe. L'expression intégrale a permis de montrer la continuité de  $\gamma$  sur  $]0, 1]$ , et de montrer qu'elle s'annule sur cet intervalle. À travers les simulations, on a pu observer que lorsque l'on se place bien avant le point de bifurcation, la population s'éteint, et lorsque l'on se place bien après, la population explose.

Le modèle que l'on a étudié est un modèle simplifié. Notre modèle suppose que l'arbre met un an pour passer du stade de graine au stade d'arbre adulte, ce qui n'est pas vrai. Cette simplification a été faite pour faciliter l'étude des propriétés. Le modèle n'est donc pas adéquat, et il faudrait l'enrichir, en considérant, entre autre, un nombre plus important de stades de vies.

## Perspectives

Pour la suite de ce projet, on prévoit de trouver un moyen de simuler  $\gamma(p)$  avec l'expression intégrale avec une complexité optimisée.

Il est conjecturé que  $\gamma$  est une fonction concave, et on l'observe à travers la simulation. Ce résultat n'est pas encore démontré. La preuve de cette conjecture peut faire l'objet de la suite de l'étude.

L'étude portait sur une parcelle. On peut étendre par la suite le modèle de l'échelle locale à l'échelle paysagère. On peut également complexifier le modèle en rajoutant des stades de vie.

## Retour d'expérience

Ce travail fut une initiation à la recherche et m'a permis de confirmer ma volonté de poursuivre le travail dans le domaine des mathématiques appliquées à l'écologie.

Ce fut l'occasion de me confronter à la difficulté de la lecture et de la compréhension d'un certain nombre

d'articles, afin d'en tirer les informations qui m'étaient nécessaires. Cette expérience m'a permis de développer ma capacité de travail en autonomie.

J'ai pu constater l'importance de la pédagogie lors de la rédaction du travail. Plus précisément, loin des cahiers et photocopiés de cours où le travail pédagogique a déjà été effectué, le contact avec le réel mathématique a souligné l'importance de la pédagogie. Savoir expliquer, c'est aussi savoir se l'expliquer. L'enseignement et la recherche se sont révélés être complémentaires.

On ne peut conclure ce travail sans évoquer l'investissement ainsi que la disponibilité de Monsieur Goubet qui m'a guidée avec beaucoup de bienveillance lors d'échanges animés qui ont fait vivre les mathématiques durant ces cinq mois.

## Code pour simuler l'exposant de Lyapounov selon la première expression

### Fonction

```
1 def lyapounov1(p):
2     N_rank = 50000
3     n_sample = 10
4     matrices = [S, T]
5     gamma_p = 0
6
7     for id_sample in range(n_sample):
8         list_matrices = rng.choice(matrices, N_rank, p=[p, 1-p])
9         M_product = np.eye(2)
10        for k in range(N_rank):
11            M_product = np.dot(list_matrices[k], M_product)
12            gamma_p += np.log(LA.norm(M_product, 1)) / (N_rank)
13
14    return gamma_p / n_sample
```

### Simulation

```
1 list_p = np.linspace(0, 0.02, 100)
2 if __name__ == '__main__':
3     with Pool(50) as p:
4         gamma1 = p.map(lyapounov1, list_p)
```

```
1 fig = plt.figure()
2 ax = fig.subplots()
3 ax.plot(list_p, gamma1, '.', linestyle='--')
4 ax.grid()
```

```
5 plt.xlabel('$p$')
```

## Code pour simuler l'exposant de Lyapounov selon la deuxième expression

```
1 def lyapounov2(p):
2     N_rank = 20000
3     n_sample = 100
4     matrices = [S, T]
5     v = np.array([0,1])
6     gamma_p = 0
7     for id_sample in range(n_sample):
8         list_matrices = rng.choice(matrices, N_rank, p=[p, 1-p])
9         M_product = np.eye(2)
10        for k in range(N_rank):
11            M_product = np.dot(list_matrices[k], M_product)
12            gamma_p += np.log(LA.norm(np.dot(M_product, v), 1)) / (N_rank)
13
14    return gamma_p / n_sample
```

## Code pour simuler l'exposant de Lyapounov selon la troisième

```
1 def lyapounov3(p):
2     n_points = 100
3     n_iter = 20
4     gamma_p = 0
5     array_points = np.array([np.array([1/k, 1-1/k]) for k in range(1, n_points+1)])
6
7     f = lambda x: (1-p)*np.log(LA.norm(np.dot(T, x), 1)/LA.norm(x, 1))
8         + p*np.log(LA.norm(np.dot(S, x), 1)/LA.norm(x, 1))
9
10    for n in range(0, n_iter+1):
11        factor = (p**n)*((1-p)**(n_iter-n))
12        list_combinations = list(itertools.combinations(range(n_iter), n))
13        for cb in list_combinations:
14            combination = [S if i in cb else T for i in range(n_iter)]
15            M_product = np.eye(2)
16            for matrix in combination:
17                M_product = np.dot(matrix, M_product)
18            for x in array_points:
19                gamma_p += factor*(f(M_product.dot(x)))
20    gamma_p = gamma_p / (n_points)
21    #return (gamma_p - 8.082) * np.log(0.99) / (-0.03573931514663542)
```

```
22     return gamma_p
```

```
23
```

## Code pour simuler les trajectoires

```
1  def sample_paths(list_p):
2      n_list = len(list_p)
3      n_years = 1000
4      v = np.array([0,1])
5      ab = np.arange(n_years)
6      tempest = np.empty(n_list, dtype = list)
7      matrices = [S, T]
8
9      plt.figure(figsize=(10,15))
10
11     for idp,p in enumerate(list_p):
12         list_matrices = rng.choice(matrices, n_years,p=[p,1-p])
13         tempest_p = []
14         for idm,matrix in enumerate(list_matrices):
15             if LA.norm(matrix-S)<1e-2:
16                 tempest_p.append(idm)
17
18         tempest[idp] = tempest_p
19
20         path = np.empty(n_years)
21         path_seed = np.empty(n_years)
22         path_adult = np.empty(n_years)
23         X = v
24         for k in range(n_years):
25             X = np.dot(list_matrices[k],X)
26             path[k] = LA.norm(X,1)
27             path_seed[k] = X[0]
28             path_adult[k] = X[1]
29         plt.subplot(311)
30         plt.plot(ab,path)
31         plt.ylabel('$N(n)$')
32         plt.xlabel('$n$')
33         plt.grid()
34         plt.legend(list_p)
35
36         plt.subplot(312)
37         plt.plot(ab,path_seed)
38         plt.ylabel('graines')
39         plt.xlabel('$n$')
40         plt.grid()
41         plt.legend(list_p)
42
```

```
43     plt.subplot(313)
44     plt.plot(ab,path_adult)
45     plt.ylabel('$arbres adultes$')
46     plt.xlabel('$n$')
47     plt.grid()
48     plt.legend(list_p)
49     print(tempest)
50
51 >>>[list([883]) list([472, 525, 578, 964]) list([8, 59, 347])]
```

---



# Bibliographie

- [FK59] H. FURSTENBERG et H. KESTEN. « Product of random matrices ». Dans : Princeton University (1959).
- [FK83] H. FURSTENBERG et Y. KIFER. « Random matrix products and measures on projective spaces ». Dans : Israel Journal of Mathematics (1983). DOI : <https://doi.org/10.1007/BF02760620>.
- [Hen97] H. HENNION. « Limit theorems for products of positive random matrices ». Dans : The Annals of Probability (1997).
- [Seb+05] E. SEBERT-CUVILLIER et al. « A stochastic matrix model to understand the local population dynamics of an alien tree species with a complex life-history cycle ». Dans : Ecological Modelling (2005).
- [Gay06] L. GAYRAL. Théorie ergodique. 2006. URL : <https://perso.ens-lyon.fr/leo.gayral/misc/m2-orsay/ergodique.pdf>.