Rozkłady prawdopodobieństwa

Michał Piłat

March 2025

1 Rozkłady dyskretne

1.1 Rozkład Bernoulliego/dwumianowy

$$P(X=k)=b(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^k, \qquad n,k\in\mathbb{N},\ 0<p<1,\ 0\leqslant k\leqslant n \tag{1}$$

1.2 Rozkład Poissona

$$P(X=k)=p(\lambda,k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda>0,\ k\in\mathbb{N} \tag{2}$$

1.3 Rozkład geometryczny

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, \qquad 0<p<1,\ k\in\mathbf{N} \tag{3}$$

1.4 Rozklad ujemny dwumianowy/Pascala

$$P(X=k)=\binom{k-1}{m-1}p^m(1-p)^{k-m} \qquad 0<p<1,\ k,m\in\mathbb{N},\ k>m \tag{4}$$

2 Rozkłady ciągłe

2.1 Rozkład normalny

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad \mu\in\mathbb{R},\sigma>0 \tag{5}$$

2.2 Rozkład jednostajny

$$f(x)=\frac{1}{b-a}, \qquad x\in(a,b),\ a,b\in\mathbb{R},\ b>a \tag{6}$$

2.3 Rozkład trójkątny

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), \qquad |x| < a,\ a \in \mathbb{R} \tag{7}$$

2.4 Rozkład wykładniczy

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-x}{\lambda}}, \qquad \lambda > 0\ x > 0 \tag{8}$$

2.5 Rozkład Pareto

$$f(x) = \lambda a^{\lambda} x^{-\lambda-1}, \qquad x > a > 0,\ \lambda > 0 \tag{9}$$

2.6 Rozkład Laplace'a

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{\frac{-|x-\mu|}{\sigma}} \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0 \tag{10}$$

2.7 Rozkład Cauchy'ego

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + (x-\mu)^2)}, \qquad \lambda > 0,\ \mu \in \mathbb{R} \tag{11}$$

2.8 Rozkład Weibulla

$$f(x) = \frac{p}{\lambda} x^{p-1} e^{\frac{-x^p}{\lambda}}, \qquad x > 0,\ \lambda, p > 0 \tag{12}$$

2.9 Rozkład Maxwella

$$f(x) = \frac{4\lambda^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{\frac{-x^2}{\lambda}}, \qquad x, \lambda > 0 \tag{13}$$

3 Miary rozkładów

3.1 Warunek, by funkcja była rozkładem prawdopodobieństwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1, \quad f(x) \geqslant 0 \tag{14}$$

3.2 Wartość oczekiwana

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

$$\mathrm{E}X = \sum_i x_i p(x_i) \tag{16}$$

3.3 Wariancja

$$\mathrm{D}^2 X = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}X)^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{17}$$

3.4 Skośność

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{18}$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

3.5 Kurtoza

$$k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 4 \tag{20}$$

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\mathrm{d}x \tag{21}$$

3.6 Momenty i momenty centralne

Moment rzędu k:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x \tag{22}$$

Moment centralny rzędu k

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k f(x)\mathrm{d}x \tag{23}$$

4 Tabela wartości podanych parametrów dla wybranych rozkładów

Tabela 1: Wartości średniej, wariancji, skośności i kurtozy dla wybranych rozkładów dyskretnych i ciągłych

Rozkład	Średnia	Wariancja	Skośność	Kurtoza
		Rozkłady dyskretne		
Bernoulliego	np	$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$
Poissona	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$
Geometryczny	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$6+\frac{p^2}{1-p}$
Pascala	$\frac{m}{p}$	$\frac{m(1-p)}{p^2}$	$\frac{m(2-p)}{\sqrt{m(1-p)}}$	$\frac{6}{m}+\frac{p^2}{m(1-p)}$
		Rozkłady ciągłe		
normalny	μ	σ^2	0	0
jednostajny	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$-\frac{6}{5}$
trójkątny	0	$\frac{2}{3}a^2$	0	$-\frac{3}{5}$
wykładniczy	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	6
Pareto	$\frac{a\lambda}{\lambda-1}, \lambda>1$	$\frac{a^2\lambda}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}, \lambda>2$	$\frac{2(1+\lambda)}{\lambda-3}\sqrt{\frac{\lambda-2}{\lambda}}, \lambda>3$	$\frac{6(\lambda^3+\lambda^2-6\lambda-2)}{\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)}$
Laplace'a	μ	$2\sigma^2$	0	3
Cauchy'ego	nie istnieje	nie istnieje	nie istnieje	nie istnieje
Weibulla	$\lambda^{1/p}\Gamma(1+\frac{1}{p})$	$\lambda^{2/p}\Gamma(1+\frac{2}{p})-\Gamma^2(1+\frac{1}{p})$	wzory skomplikowane	wzory skomplikowane
Maxwella	$2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$	$\frac{3\pi-8}{2\pi}\lambda$	$\frac{2\sqrt{2}(5\pi-16)}{(3\pi-8)^{3/2}}$	$-4\frac{96-40\pi+3\pi^2}{(3\pi-8)^2}$