

# Metoda Simplex

**Metody optymalizacji**

Opracowała: *dr Marta Kapturczak*

- Warunki przekształcenia (nierówności w równanie):
  - $\leq$  – dodajemy nową zmienną  $x_i$
  - $\geq$  – odejmujemy nową zmienną  $x_i$  oraz dodajemy zmienną  $s_i$ , w funkcji  $ms_i$ , gdzie:
    - MIN – m wartość duża dodatnia
    - MAX – m wartość duża ujemna
- Kryterium wejścia:
  - MIN – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość  $c_j - z_j$  jest najmniejsza
  - MAX – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość  $c_j - z_j$  jest największa
- Kryterium wyjścia – z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość  $b_i / a_i$  jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)
- Przekształcenie macierzy:
  - wiersz z kryterium wyjścia dzielimy przez wartość leżącą na skrzyżowaniu kryterium wejścia oraz wyjścia.
  - pozostałe wiersze: od  $i$ -tego wiersza odejmujemy wiersz z kryterium wyjścia (z nowej macierzy) pomnożony przez wartość z  $i$ -tego wiersza leżącą w kolumnie z kryterium wejścia.
- Kryterium stopu:
  - MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza  $c_j - z_j$  są nieujemne
  - MAX – gdy wszystkie wartości z wiersza  $c_j - z_j$  są niedodatnie

# PRZYKŁAD

Dziennie należy spożyć co najmniej 100g białka. Spożycie chleba nie powinno przekraczać 1,5kg dziennie, zaś spożycie ponad 300g tłuszczu jest szkodliwe dla zdrowia. Wiedząc, że w jednym kilogramie chleba zawiera się 80g białka i 20g tłuszczu oraz, że w kilogramie mięsa zawiera się 100g białka i 200g tłuszczu, obniżyć do minimum koszty wyżywienia. Cena chleba za kilogram wynosi 2zł, zaś mięsa 18zł.

# PRZYKŁAD

Dziennie należy spożyć co najmniej 100g białka. Spożycie chleba nie powinno przekraczać 1,5kg dziennie, zaś spożycie ponad 300g tłuszczu jest szkodliwe dla zdrowia. Wiedząc, że w jednym kilogramie chleba zawiera się 80g białka i 20g tłuszczu oraz, że w kilogramie mięsa zawiera się 100g białka i 200g tłuszczu, obniżyć do minimum koszty wyżywienia. Cena chleba za kilogram wynosi 2zł, zaś mięsa 18zł.

Funkcja celu:

$$f(x) = 2x_1 + 18x_2 \quad - \text{minimum}$$

Warunki ograniczające:

$$80x_1 + 100x_2 \geq 100$$

$$20x_1 + 200x_2 \leq 300$$

$$x_1 \leq 1,5$$

Warunki nieujemności:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Warunki przekształcenia (nierówności w równanie):

W przypadku nierówności  $\leq$  zgodnie z zasadą dodajemy kolejną zmienną do ograniczenia i zamieniamy znak na  $=$ .

Natomiast w przypadku nierówności  $\geq$  odejmujemy kolejną zmienną do ograniczenia i zamieniamy znak na  $=$ . Jednakże, to nie wszystko, jak później pokażemy w pewnym momencie tworzy nam się macierz jednostkowa, którą wspomniany znak minusa nieco zaburza. Dlatego też należy w ograniczeniu dodać zmienną  $s_i$ , a w funkcji  $ms_i$ , gdzie aby nie zaburzać wyniku ekstremum w przypadku poszukiwania:

- MIN – m wartość duża dodatnia
- MAX – m wartość duża ujemna

- Warunki przekształcenia (nierówności w równanie):
  - $\leq$  – dodajemy nową zmienną  $x_i$
  - $\geq$  – odejmujemy nową zmienną  $x_i$  oraz dodajemy zmienną  $s_i$ , w funkcji  $ms_i$ , gdzie:
    - MIN – m wartość duża dodatnia
    - MAX – m wartość duża ujemna

$$80x_1 + 100x_2 \geq 100 \quad \Rightarrow \quad 80x_1 + 100x_2 - x_3 + s_1 = 100$$

$$20x_1 + 200x_2 \leq 300 \quad \Rightarrow \quad 20x_1 + 200x_2 + x_4 = 300$$

$$x_1 \leq 1,5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_5 = 1,5$$

$$f(x) = 2x_1 + 18x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x_1 + 18x_2 + ms_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

# PRZYKŁAD

$$80x_1 + 100x_2 - x_3 + s_1 = 100$$

$$20x_1 + 200x_2 + x_4 = 300$$

$$x_1 + x_5 = 1,5$$

$$f(x) = 2x_1 + 18x_2 + ms_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$c_i \backslash c_j$									
	$x_i \backslash x_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i / a_i$
	$s_1$								
	$x_4$								
	$x_5$								
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$									
$c_j - z_j$									







# PRZYKŁAD

**Kryterium wejścia:** MIN – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość  $c_j - z_j$  jest najmniejsza

$c_i \backslash c_j$		2	18	0	0	0	$m$		
	$x_i \backslash x_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i / a_i$
$m$	$s_1$	80	100	-1	0	0	1	100	
0	$x_4$	20	200	0	1	0	0	300	
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		$80m$	$100m$	$-m$	0	0	$m$		
$c_j - z_j$		$2 - 80m$	$18 - 100m$	$m$	0	0	0		

Kryterium stopu: MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza  $c_j - z_j$  są nieujemne

# PRZYKŁAD

**Kryterium wyjścia:** z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość  $b_i/a_i$  jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)

$c_i \backslash c_j$		2	18	0	0	0	$m$		
	$x_i \backslash x_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i/a_i$
$m$	$s_1$	80	100	-1	0	0	1	100	
0	$x_4$	20	200	0	1	0	0	300	
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		$80m$	$100m$	$-m$	0	0	$m$		
$c_j - z_j$		$2 - 80m$	$18 - 100m$	$m$	0	0	0		

**Kryterium wejścia (  $a_i$  )**

# PRZYKŁAD

**Kryterium wyjścia:** z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość  $b_i/a_i$  jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)

$c_i \backslash c_j$		2	18	0	0	0	$m$		
	$x_i \backslash x_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i/a_i$
$m$	$s_1$	80	100	-1	0	0	1	100	1
0	$x_4$	20	200	0	1	0	0	300	1,5
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	—
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		$80m$	$100m$	$-m$	0	0	$m$		
$c_j - z_j$		$2 - 80m$	$18 - 100m$	$m$	0	0	0		

**Kryterium  
wyjścia**

**Kryterium wejścia ( $a_i$ )**

- **Przekształcenie macierzy:**
  - wiersz z kryterium wyjścia dzielimy przez wartość leżącą na skrzyżowaniu kryterium wejścia oraz wyjścia.
  - pozostałe wiersze: od  $i$ -tego wiersza odejmujemy wiersz z kryterium wyjścia (z nowej macierzy) pomnożony przez wartość z  $i$ -tego wiersza leżącą w kolumnie z kryterium wejścia.

$c_i \backslash c_j$		2	18	0	0	0	$m$		
	$x_i \backslash x_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i / a_i$
$m$	$s_1$	80	100	-1	0	0	1	100	1
0	$x_4$	20	200	0	1	0	0	300	1,5
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	–
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		$80m$	$100m$	$-m$	0	0	$m$		
$c_j - z_j$		$2 - 80m$	$18 - 100m$	$m$	0	0	0		

Kryterium  
wyjścia

Kryterium wejścia (  $a_i$  )





# PRZYKŁAD

**Kryterium wejścia:** MIN – do bazy wejdzie zmienna dla której wartość  $c_j - z_j$  jest najmniejsza

		2	18	0	0	0	$m$		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i / a_i$
18	$x_2$	0,8	1	-0,01	0	0	0,01	1	
0	$x_4$	-140	0	2	1	0	-2	100	
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		14,4	18	-0,18	0	0	0,18		
$c_j - z_j$		-12,4	0	0,18	0	0	-0,18+m		

**Kryterium stopu:** MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza  $c_j - z_j$  są nieujemne



# PRZYKŁAD

**Kryterium wyjścia:** z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość  $b_i/a_i$  jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)

		2	18	0	0	0	$m$		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i/a_i$
18	$x_2$	0,8	1	-0,01	0	0	0,01	1	1,25
0	$x_4$	-140	0	2	1	0	-2	100	-
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	1,5
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		14,4	18	-0,18	0	0	0,18		
$c_j - z_j$		-12,4	0	0,18	0	0	-0,18+m		

**Kryterium wejścia (  $a_i$  )**

# PRZYKŁAD

**Kryterium wyjścia:** z bazy wyjdzie zmienna dla której wartość  $b_i / a_i$  jest najmniejsza (nie bierzemy pod uwagę wartości ujemnych)

		2	18	0	0	0	$m$		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i / a_i$
18	$x_2$	0,8	1	-0,01	0	0	0,01	1	1,25
0	$x_4$	-140	0	2	1	0	-2	100	-
0	$x_5$	1	0	0	0	1	0	1,5	1,5
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		14,4	18	-0,18	0	0	0,18		
$c_j - z_j$		-12,4	0	0,18	0	0	-0,18+m		

**Kryterium  
wyjścia**

**Kryterium wejścia (  $a_i$  )**

# PRZYKŁAD

		2	18	0	0	0	$m$		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$s_1$	$b_i$	$b_i / a_i$
2	$x_1$	1	1,25	-0,01	0	0	0,01	1,25	
0	$x_4$	0	175	0,25	1	0	-0,25	275	
0	$x_5$	0	-1,25	0,01	0	1	-0,01	0,25	
$z_j = \sum_{i=0}^K c_i x_i$		2	2,5	-0,02	0	0	0,02	2,5	
$c_j - z_j$		0	15,5	0,02	0	0	$m - 0,02$		

Kryterium stopu: MIN – gdy wszystkie wartości z wiersza  $c_j - z_j$  są nieujemne

Rozwiązanie:  $x_1 = 1,25$ ;  $x_2 = 0$ .

Odpowiedź: Aby zminimalizować koszty żywienia należy spożywać 1,25kg chleba dziennie