METODA MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A

Dane: $f(\boldsymbol{x}), h_k(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, K \qquad K < n$

Jest to pierwsza z poznawanych metod optymalizacji warunkowej. Poza n wymiarową funkcją $f(\boldsymbol{x})$, gdzie $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$, zadane jest K ograniczeń: $h_k(\boldsymbol{x}) = 0$. W Państwa przykładach nie ma ograniczeń, w związku z tym metodę należy testować na poniżej podanych przykładach. Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów za metodę, należy zaimplementować działanie na dowolnym przykładzie (bez wpisywania pochodnych ręcznie). Sposobem na to sposobem na to jest zastosowanie biblioteki do obliczeń symbolicznych, czy też automatycznego różniczkowania, np. Pytorch.

Sposób postępowania w metodzie:

W metodzie zadanie optymalizacji warunkowej zamieniane jest na optymalizację bezwarunkową. Wprowadzamy wektor: $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k]$. Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x) + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(x)$$

λ_k – nieokreślone mnożniki Lagrange'a.

Przyrównujemy pochodne $L(x, \lambda)$ do zera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = 0 & j = 1 \dots n \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = h_k(x) = 0 & k = 1 \dots K \end{cases}$$

Rozwiązanie układu $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ jest punktem ekstremum funkcji.

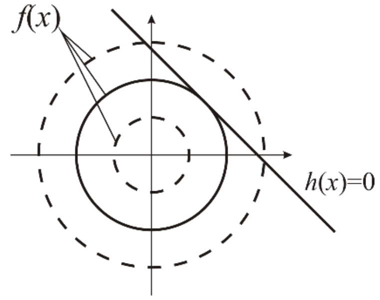
PRZYKŁAD 1.

Zminimalizować: $\qquad f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

Przy ograniczeniach: $\qquad h(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0$

Odpowiednie zadanie optymalizacji bezwarunkowej:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 2)$$

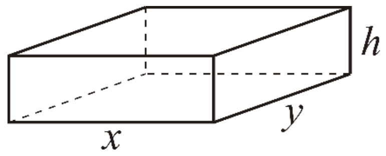


Przyrównujemy pochodne do zera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu: $\qquad x_1 = 0.8, \qquad x_2 = 0.4, \qquad \lambda = -0.8$

PRZYKŁAD 2. (praktyczny)



Treść: Z drutu o długości 24 zrobić szkielet prostopadłościanu o jak największej objętości.

Optymalizować mamy objętość prostopadłościanu („o jak największej objętości") w związku z tym, stosując oznaczenia z rysunku, nasza funkcja będzie wyglądała następująco:

$$f(x) = x \cdot y \cdot h$$

Dodatkowo mamy ograniczenie w postaci długości posiadanego drutu, w związku z tym, liczymy długość jaka będzie potrzebna na utworzenie prostopadłościanu. Mamy cztery długości x, cztery długości y oraz cztery długości h, czyli w sumie:

$$4x + 4y + 4h = 24\,, \qquad czyli \quad x + y + h = 6$$

$$więc \quad h(x) = 6 - x - y - h$$

Wtedy, odpowiednie zadanie optymalizacji bezwarunkowej:

$$L(x, y, h, \lambda) = x \cdot y \cdot h + \lambda(6 - x - y - h)$$

Przyrównujemy pochodne do zera i rozwiązujemy układ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y \cdot h - \lambda = 0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x \cdot h - \lambda = 0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = x \cdot y - \lambda = 0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - x - y - h = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \lambda = y \cdot h\,, \\ \lambda = x \cdot h\,, \\ \lambda = x \cdot y\,, \\ h = 6 - x - y \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x \cdot y = y \cdot (6 - x - y)\,, \\ x \cdot y = x \cdot (6 - x - y)\,, \\ \lambda = x \cdot y\,, \\ h = 6 - x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = 6 - 2y \\ \lambda = y \cdot y \\ h = 6 - 2y \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 2\,, \\ y = 2\,, \\ \lambda = 4\,, \\ h = 2\,. \end{cases}$$

W związku z tym, aby z drutu o długości 24 zrobić szkielet prostopadłościanu o jak największej objętości należy stworzyć sześcian o boku 2.