

## Sekcja 1

# Relacje

### Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory  $A$  i  $B$ . **Relacją (dwuargumentową)**  $R$  między elementami zbioru  $A$  a elementami zbioru  $B$  nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego  $A \times B$  ( $R \subset A \times B$ ).

Mówimy, że elementy  $a \in A$  oraz  $b \in B$  są ze sobą w relacji  $R$  (ozn.  $a \sim b$  lub  $aRb$ ), jeśli  $\langle a, b \rangle \in R$ .

Niech  $R$  będzie relacją na niepustym zbiorze  $A$ . Mówimy, że:

- (1)  $R$  jest **zwrotna**  $\Leftrightarrow (\forall a \in A) aRa$ .
- (2)  $R$  jest **przeciwzwrotna**  $\Leftrightarrow (\forall a \in A) \neg aRa$ .
- (3)  $R$  jest **przechodnia**  $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$ .
- (4)  $R$  jest **symetryczna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$ .
- (5)  $R$  jest **słabo antysymetryczna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$ .
- (6)  $R$  jest **silnie antysymetryczna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A) \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$ .
- (7)  $R$  jest **spójna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$ .

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

### Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech  $R \subset A \times A$ . Gdy relacja  $R$  jest **zwrotna**, **symetryczna** i **przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

### Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $A$ . **Klasą równoważności (abstrakcji)** elementu  $a \in A$  względem relacji  $R$  nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

### Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności  $R$ , czyli zbiór

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji  $R$ .

### Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $A$ . Wówczas mamy:

- (i)  $(\forall a \in A) a \in [a]_R \leftarrow$  ze zwrotności  $R$
- (ii)  $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$  z symetryczności  $R$
- (iii)  $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

### Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację  $\leq$  na zbiorze  $A$  nazywamy **porządkiem częściowym słabym (nieostrym)** na zbiorze  $A$ , jeśli jest **zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna**.

Relację  $<$  na zbiorze  $A$  nazywamy **porządkiem częściowym ostrym** na zbiorze  $A$ , jeśli jest **przeciwzwrotna i przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

*Dowód.* Załóżmy, że relacja  $<$  na zbiorze  $A$  jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy  $a, b \in A$ , wówczas z przechodniości

$$a < b \wedge b < a \Rightarrow a < a \Leftrightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a.$$

Jednak z przeciwzwrotności  $<$  wiemy, iż zdanie  $a < a$  jest fałszywe dla dowolnego  $a$  ze zbioru  $A$ , dlatego też

$$\neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a \Rightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \Leftrightarrow \neg(a < b) \vee \neg(b < a) \Leftrightarrow (a < b \Rightarrow \neg(b < a)).$$

□

### Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy  $\leq$  (lub  $<$ ) na zbiorze  $A$  nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze  $A$ , jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco:  $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a)$ .

### Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór  $A$  z porządkiem częściowym  $\leq$ . Niech  $B \subset A$  i  $c \in A$ . Mówimy, że:

- I.  $c$  jest **ograniczeniem górnym** zbioru  $B$ , jeśli  $(\forall b \in B) b \leq c$ .
- II.  $c$  jest **ograniczeniem dolnym** zbioru  $B$ , jeśli  $(\forall b \in B) c \leq b$ .
- III.  $c$  jest **kresem górnym** (ozn.  $\sup A$ ) zbioru  $B$ , jeśli:
  - (a) jest ograniczeniem górnym.
  - (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego  $c'$  zbioru  $B$  zachodzi  $c \leq c'$ .
- IV.  $c$  jest **kresem dolnym** (ozn.  $\inf A$ ) zbioru  $B$ , jeśli:
  - (a) jest ograniczeniem dolnym.
  - (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego  $c'$  zbioru  $B$  zachodzi  $c' \leq c$ .
- V.  $c$  jest elementem **maksymalnym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) c < b$ .
- VI.  $c$  jest elementem **największym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge (\forall b \in B) b \leq c$ .
- VII.  $c$  jest elementem **minimalnym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) b < c$ .
- VIII.  $c$  jest elementem **najmniejszym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge (\forall b \in B) c \leq b$ .

Powyższe pojęcia<sup>1</sup> na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru  $A$ , ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto

<sup>1</sup>Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Zapewne dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane [diagramy Hassego](#).

#### Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje  $\leq$  i  $<$  w zbiorze  $A$ . Jeśli spełniają one następujące warunki:

$$(a) (\forall a, b \in A)(a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b)$$

$$(b) (\forall a, b \in A)(a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b),$$

wówczas  $\leq$  jest porządkiem słabym wtedy i tylko wtedy, gdy  $<$  jest porządkiem ostrym.

#### Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech  $R \subset A \times B$ . **Relacją odwrotną**  $R^{-1}$  do relacji  $R$  nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{ \langle a, b \rangle \in A \times B : \langle a, b \rangle \in R \}.$$

Innymi słowy  $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$ .

## Sekcja 2

# Funkcje

### Definicja 2.1: Funkcja

Relację  $f$  między elementami zbioru  $A$  i elementami zbioru  $B$  nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \langle x, y \rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B) \langle x, y \rangle \in f \wedge ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

- **Dziedzina** (ozn.  $\text{dom}(f)$  lub  $D_f$ ) funkcji  $f$  nazywamy zbiór  $A$ .
- **Przeciwdziedzina** (ozn.  $\text{Cl}_f$ ) funkcji  $f$  nazywamy zbiór  $B$ .
- **Zbiorem wartości** (ozn.  $\text{rng}(f)$  lub  $R_f$ ) funkcji  $f$  nazywamy zbiór  $R_f = \{y \in B : (\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f\} \subset B$ .

### Definicja 2.2: Obraz i przeciwobraz

Niech  $f : A \rightarrow B$  oraz  $C \subset A$  i  $D \subset B$ .

- (1) **Obrazem** zbioru  $C$  względem funkcji  $f$  nazywamy zbiór

$$f[C] = \{y \in B : (\exists x \in C) y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}.$$

- (2) **Przeciwobrazem** zbioru  $D$  względem funkcji  $f$  nazywamy zbiór

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Supremum funkcji  $f$  na zbiorze  $C$   $\sup_{x \in C} f(x)$  jest kresem górnym obrazu zbioru  $C$  względem niej. Analogicznie definiujemy  $\inf_{x \in C} f(x)$ ,  $\max_{x \in C} f(x)$  i  $\min_{x \in C} f(x)$ .

### Definicja 2.3: Injekcja

Relację funkcyjną  $f \subset A \times B$  nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie } (\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y \rangle \in f \wedge \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

### Definicja 2.4: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna  $f \subset A \times B$  jest ze zbioru  $A$  **na** zbiór  $B$ , jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

### Definicja 2.5: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

### Definicja 2.6: Funkcja odwrotna

Jeśli  $f : A \rightarrow B$  jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do  $f$  jest funkcja  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x \rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f)$$

### Twierdzenie 2.1

- (1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
- (2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

### Definicja 2.7: Złożenie Funkcji

WERSJA I

Niech  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  (wystarczy nawet założyć, że  $g : B_1 \rightarrow C$ , jeśli  $B \subset B_1$ ) i  $x \in A$ . **Złożeniem funkcji**  $f$  z funkcją  $g$  nazywamy funkcję  $g \circ f : A \rightarrow C$ , określoną wzorem  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

WERSJA II

**Złożeniem funkcji**  $f$  i  $g$  nazywamy funkcję  $g \circ f$  zdefiniowaną wzorem

$$g \circ f = \{ \langle x, z \rangle \in D_f \times R_g : \exists y [ \langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g ] \}.$$

Wyrażenie  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C) \langle x, z \rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g).$$

Zauważmy różnicę między tymi dwiema wersjami <sup>2</sup> definicji złożenia funkcji. Pierwsza, częściej spotykana, zakłada że  $R_f \subset D_g$ , skąd wynika, że  $D_{g \circ f} = D_f$ . Natomiast według drugiej definicji, złożenie  $g \circ f$  funkcji  $f$  i  $g$  ma następujące własności.

- (a)  $D_{g \circ f} = \{ x \in D_f : f(x) \in D_g \}$ ,
- (b)  $(\forall x \in D_{g \circ f}) (g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

### Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji  $f, g, h$  zachodzi równość  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

### Definicja 2.8: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru  $A$  możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze  $A$  (identyczność na zbiorze  $A$ ) następująco:

$$id_A : A \rightarrow A, \quad (\forall x \in A) id_A(x) = x.$$

<sup>2</sup>Tylko wersja pierwsza pojawiła się na wykładzie. Ta druga jest tylko moim dodatkiem. Podaję ją tutaj, bo chociaż nie pojawiła się w czasie wykładu, to posługiwaliśmy się jej wyróżniającą własnością na ćwiczeniach.

### Twierdzenie 2.3

Jeśli  $f : A \rightarrow B$  i  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , to  $f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$  jest identycznością na zbiorze  $A$ .

### Definicja 2.9: Obcięcie i przedłużenie funkcji

Niech  $f : A \rightarrow B$ .

- (1) Niech  $C \subset X$ . **Obcięciem funkcji**  $f$  do zbioru  $C$  nazywamy funkcję  $f|_C : C \rightarrow B$ ,  
 $(f|_C)(x) = f(x)$ .
- (2) Funkcję  $g : C \rightarrow B$  nazywamy **przedłużeniem funkcji**  $f$ , jeśli  $A \subset C$  oraz  $(\forall x \in A) f(x) = g(x)$ .

Zwróćmy uwagę, że daną funkcję  $f$  można przedłużyć na dany właściwy nadzbiór jej dziedziny na różne sposoby. Zauważmy też, że funkcja jest zawsze przedłużeniem swojego obcięcia.

## Sekcja 3

# Równoliczność

### Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory  $A$  i  $B$  są **równoliczne** (ozn.  $|A| = |B|$ ,  $A \sim B$ ), gdy istnieje bijekcja  $f : A \rightarrow B$ .

Równoliczność ma własności relacji równoważności (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru  $\mathcal{P}(U)$ <sup>3</sup>. Jeśli  $A, B \in \mathcal{P}(U)$  i  $R$  będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż  $|A| = |B|$  oznacza, że  $[A]_R = [B]_R$ .

### Definicja 3.2: Zbiór skończony i nieskończony

O zbiorze  $A$  mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci  $\{1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Piszemy wówczas, że  $|A| = n$ . Zbiór, który nie jest skończony nazywamy **nieskończonym**.

### Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór  $A$  jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi  $\mathbb{N}$ . Piszemy wówczas, że  $|A| = \aleph_0$ .

Zbiór nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

### Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór  $A$  jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym.  $|\mathbb{R}|$  oznaczamy jako  $c$  lub  $2^{\aleph_0}$  i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy  $\mathbb{N}$ .

<sup>3</sup> $\mathcal{P}(U)$  to zbiór potęgowy pewnego zbioru  $U$ , czyli zbiór wszystkich podzbiorów  $U$ . Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedzina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.

## Sekcja 4

# Liczby rzeczywiste

Dany jest zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  z określonymi działaniami  $+$  i  $\cdot$  oraz porządkiem liniowym  $\leq$ . Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych podzielimy na trzy kategorie: aksjomaty ciała przemennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości<sup>4</sup>.

### Aksjomaty ciała przemennego

- (1) **Przemienność dodawania** ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ )  $a + b = b + a$ .
- (2) **Łączność dodawania** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ )  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
- (3) **Charakteryzacja zera** ( $\exists 0 \in \mathbb{R}$ ) ( $\forall a \in \mathbb{R}$ )  $a + 0 = a$ .
- (4) **Istnienie elementów przeciwnych** ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) ( $\exists -a \in \mathbb{R}$ )  $a + (-a) = 0$ .
- (5) **Przemienność mnożenia** ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- (6) **Łączność mnożenia** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- (7) **Charakteryzacja jedynki** ( $\exists 1 \in \mathbb{R}$ ) ( $\forall a \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot 1 = a$ .
- (8) **Istnienie elementów odwrotnych** ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) ( $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot a^{-1} = 1$ .
- (9) **Rozdzielność mnożenia względem dodawania** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

### Aksjomaty porządku

- (1) **Prawo trichotomii**<sup>5</sup> ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ) zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

- (2) **Przechodność** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ( $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ).

- (3) **Związki nierówności z działaniami**

- (a) ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ( $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ );
- (b) ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ( $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$ ).

**Aksjomat ciągłości (Dedekinda).** Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór  $A \subset \mathbb{R}$  ma kres górny  $M = \sup A \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>4</sup>Aksjomaty przepisałem ze skryptu Strzeleckiego, ponieważ były tam zapisane w trochę bardziej eleganckiej postaci.

<sup>5</sup>Aksjomat ten uwzględniamy, gdy przyjmujemy  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ , na wykładzie natomiast przyjęliśmy  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ .



#### Twierdzenie 4.1: Aksjomat Archimedesesa

Dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  istnieje liczba naturalna  $n$ , taka że  $a < nb$ .

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) a < nb$$

Twierdzenie to, choć bywa tak zwyczajowo nazywane, na prawdę aksjomatem w arytmetyce nie jest, bo wynika z innych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych.

#### Definicja 4.1: Przekrój Dedekinda

Podział zbioru liczb wymiernych na parę zbiorów  $\langle A, B \rangle$ , spełniające warunki<sup>a</sup>:

- (1)  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ ,
- (2)  $A \cup B = \mathbb{Q}$ ,
- (3)  $A \cap B = \emptyset$
- (4)  $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$ .

nazywamy **przekrojem Dedekinda** zbioru  $\mathbb{Q}$ . Zbiór  $A$  nazywany jest **klasą dolną** przekroju, a zbiór  $B$  **klasą górną**.

<sup>a</sup>Podane warunki różnią się swoją postacią, tym co były przedstawione na wykładzie, niemniej jednak są im równoważne.

Przekrój Dedekinda  $\langle A, B \rangle$  zdefiniowany w taki sposób może mieć jedną z trzech następujących postaci, w której:

1. w zbiorze  $A$  istnieje element największy,
2. w zbiorze  $B$  istnieje element najmniejszy,
3. w zbiorze  $A$  nie istnieje element największy i w zbiorze  $B$  nie istnieje element najmniejszy.

W trzecim przypadku przekrój wyznacza tzw. *lukę*. Aksjomat ciągłości w ujęciu przekrojowym, mówi o tym, że żaden z przekrojów Dedekinda zbioru  $\mathbb{R}$  nie wyznacza luki.

Przekroje typu 1 i 2 nazywamy *liczbami rzeczywistymi wymiernymi*. Dwa przekroje typu 1 i 2 mogą wyznaczać tę samą liczbę wymierną. Relację równoważności przekrojów zdefiniujemy poniżej. Natomiast przekrój  $\langle A, B \rangle$  wyznaczający lukę nazywamy *liczbą rzeczywistą niewymierną*.

Zdefiniujmy relację równoważności  $R$  przekrojów Dedekinda:

$$\langle A_1, B_1 \rangle R \langle A_2, B_2 \rangle \Leftrightarrow A_1 = A_2 \vee \exists \max A_1, \min B_2 (\max A_1 = \min B_2) \vee \exists \max A_2, \min B_1 (\max A_2 = \min B_1).$$

Nasze rozważania doprowadzają nas do **konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda**<sup>6</sup>.

$$\mathbb{R} := \{ \langle A, B \rangle : \text{przekroje Dedekinda} \} /_R$$

<sup>6</sup>W tym miejscu notatki z liczb rzeczywistych na razie zakańczam. Dalsze wyprowadzenia operacji na liczbach rzeczywistych odkładam na czas bliższy terminowi egzaminu ustnego. Na kolosie zagadnienia te raczej nie będą potrzebne.

## Sekcja 5

# Ciągi

### Definicja 5.1: Ciąg nieskończony

**Ciągiem** (nieskończonym) o elementach w zbiorze  $A$  nazywamy dowolną funkcję  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$  (ozn.  $a_n$ ,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

### Definicja 5.2: Podciąg

Jeżeli  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem o elementach w zbiorze  $A$  oraz  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem ściśle rosnącym o elementach w  $\mathbb{N}$ , to ciąg  $a \circ k = \{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy **podciągiem** ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Definicja 5.3: Granica ciągu

Mówimy, że  $g \in \mathbb{R}$  jest granicą ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon, n \in \mathbb{N} \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

Gdy  $g$  jest granicą ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , to piszemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  lub  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ .

### Twierdzenie 5.1

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

### Definicja 5.4: Ciąg Cauchy'ego

**Ciągiem Cauchy'ego** nazywamy ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n, m \geq M \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

### Twierdzenie 5.2

Każdy ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego (tzn. jest ciągiem Cauchy'ego).

### Twierdzenie 5.3

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony, zarówno z dołu, jak i z góry.

### Twierdzenie 5.4

Jeżeli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny do  $+\infty$  ( $-\infty$ ), to jest ograniczony z dołu (góry).

### Twierdzenie 5.5

Jeśli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $g$  to każdy podciąg ciągu  $\{a_n\}$  też jest zbieżny do  $g$ .

### Twierdzenia o „arytmetyce” granic 5.6

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami liczbowymi oraz  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|.$
- (2)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{a}.$
- (3)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b.$
- (4)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b.$
- (5)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (6)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (7)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab.$
- (8)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge [b_n] \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (9)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge (\exists q > 0) \text{ dddn } b_n > q \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (10)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge (\exists q < 0) \text{ dddn } b_n < q \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (11)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) b_n \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}.$
- (12)  $[a_n] \wedge |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (13)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge (\exists c > 0) \text{ dddn } |b_n| > c \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (14)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (15)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (16)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (17)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (18)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^b.$
- (19)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 1 \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (20)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in (0, 1) \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (21)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 1 \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (22)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in (0, 1) \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (23)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b > 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (24)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b < 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

W celu uproszczenia zapisu, wprowadziłem do powyższych twierdzeń parę (autorskich!) oznaczeń.

$$\begin{array}{ll} [a_n] \text{ ozn.} & (\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq m \\ a_n] \text{ ozn.} & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq M \\ [a_n] \text{ ozn.} & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq M \end{array}$$

Powyższe twierdzenia, jak i jakiegokolwiek inne twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic nie mają zastosowania w przypadku tzw. *wyrażeń nieoznaczonych*. Do opisanego takich wyrażeń wykorzystuje się następujące symbole:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0, 0^0.$$

#### Twierdzenie 5.7

Jeżeli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny, a  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nie, to ciąg  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  postaci  $c_n = a_n + b_n$  również nie jest zbieżny.

Przydatną własnością wynikającą z tw. 5.7 i tw. 5.6 jest to, że jeśli ciąg  $b_n = a_n - g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , to  $(a_n)$  jest zbieżny i to dokładnie do granicy  $g$ .

#### Twierdzenie o szacowaniu granic 5.8

Założmy, że  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych oraz  $x \in \mathbb{R}$ . Zachodzą wówczas następujące implikacje:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > x \implies \text{dddn } a_n > x,$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < x \implies \text{dddn } a_n < x,$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies \text{dddn } a_n > b_n,$
- (iv)  $\text{dddn } a_n \leq b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$

Na wykładzie przedstawiono tylko (iv). (iii) jest równoważne (iv) z prawa kontrapozycji. (i) da się łatwo wywieść z (iii), wystarczy bowiem przyjąć, że  $b_n$  jest ciągiem stałym stale równym  $x$ . (ii) dowodzimy analogicznie.

#### Twierdzenie o dwóch ciągach 5.9

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

- I.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \wedge \text{dddn } b_n \geq a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$
- II.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \wedge \text{dddn } b_n \leq a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$

#### Twierdzenie o trzech ciągach 5.10

Jeżeli  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \wedge \text{dddn } a_n \leq b_n \leq c_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

### Kryterium d’Alamberta dla ciągów 5.11

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

$$\text{I. } \text{dddn } a_n > 0 \wedge (\exists q > 1) \text{ dddn } \frac{a_{n+1}}{a_n} > q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

$$\text{II. } \text{dddn } a_n > 0 \wedge (\exists q < 1) \text{ dddn } \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym 5.12

I. Każdy niemalejący i ograniczony z góry ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

II. Każdy nierosnący i ograniczony z dołu ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

### Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa 5.13

Jeżeli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony (zarówno z góry jak i z dołu), to posiada podciąg zbieżny.

### Definicja 5.5: Liczba Eulera

**Liczba Eulera** nazywamy niewymierną liczbę, zdefiniowaną jako granicę

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

### Twierdzenie 5.14

Ciąg  $e_n = (1 + 1/n)^n$  jest niemalejący, a  $\tilde{e}_n = (1 + 1/n)^{n+1}$  nierosnący. Ponadto

$$(\forall n \in \mathbb{N}_+) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Parę przykładów granic ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{dla } q > 1 \vee (q = 1 \wedge k < 0) \\ 1, & \text{dla } q = 1 \wedge k = 0 \\ 0, & \text{dla } q < 1 \vee (q = 1 \wedge k > 0) \end{cases}, \text{ gdzie } q \geq 0. \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \quad (4)$$

**Twierdzenie 5.15**

Jeżeli  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^g.$$

**Uogólniona nierówność Bernoulliego 5.16**

Klasyczną nierówność Bernoulliego można uogólnić do poniższej postaci.

$$\begin{aligned} (1+x)^r &\geq 1+rx, & \text{dla } x > -1 \wedge r \geq 1 \\ (1+x)^r &\leq 1+rx, & \text{dla } x > -1 \wedge r \in (0,1] \end{aligned}$$

**Twierdzenie 5.17**

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem liczb rzeczywistych i  $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$  oraz  $g \in \mathbb{R}$ , wówczas

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \log_c \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\ln c},$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_c(1+a_n)}{a_n} = \frac{1}{\ln c},$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \log_c a_n = \log_c g,$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_c a_n - \log_c g}{a_n - g} = \frac{1}{g \ln c}.$$

**Szacowanie funkcji eksponencjalnej i logarytmicznej 5.18**

$$\text{I. } (\forall x \in \mathbb{R}) \ 1+x \leq e^x \wedge (\forall x < 1) \ e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\text{II. } (\forall x > -1) \ \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Uwaga! Pierwsza z nierówności I. została udowodniona tylko dla  $x \geq -1$ , jednak można dokonać rozszerzenia jej stosowalności. Szacowania II. wcale nie pojawiły się na wykładzie, aczkolwiek uznałem je za przydatne. Dowody powyższych własności można znaleźć [tutaj](#) na siódmej i dziesiątej stronie.

**Twierdzenie 5.19**

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem liczb rzeczywistych i  $c > 0$ , wówczas

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{a_n} - 1}{a_n} = \ln c,$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \neq 0 \wedge p \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = p,$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \wedge p > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{a_n^p} = 0.$$

Na wykładzie własności (1) - (3) zostały udowodnione tylko dla ciągów o wyrazach dodatnich, jednakże są one stosowalne również w przypadku ciągów o wyrazach ujemnych.

**Twierdzenie Stolza 5.20**

Założmy, że ciąg  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  jest ściśle monotoniczny oraz  $(\forall n \in \mathbb{N}) b_n \neq 0$ . Jeśli  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  i istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g,$$

a ponadto zachodzi jeden z następujących warunków:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$

to wówczas ciąg  $\frac{a_n}{b_n}$  jest zbieżny, a ponadto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ .

Granica  $g$  nie musi być skończona. Na wykładzie pojawił się tylko warunek (ii), dowód zbieżności w przypadku (i) można odszukać w [skrypcie Strzeleckiego](#) (na str. 33) lub na [angielskiej wiki](#).

**Twierdzenie 5.21**

$$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \wedge d_1, \dots, d_n > 0 \implies \frac{c_1 + \dots + c_n}{d_1 + \dots + d_n} \leq \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \frac{c_k}{d_k} \\ \geq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \frac{c_k}{d_k}$$

## Sekcja 6

# Przestrzenie metryczne

W sekcji tej  $X$  będzie oznaczać dowolny niepusty zbiór, chyba że w danym ustępie zaznaczę, że jest inaczej. Również pisząc o kuli, będę miał na myśli kulę otwartą. Wszelkie niezdefiniowane  $n$  będzie w domyśle liczbą naturalną.

### Definicja 6.1: Metryka i przestrzeń metryczna

**Metryką** na zbiorze  $X$  nazywa się funkcję  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , spełniającą następujące warunki:

- (1)  $\forall_{x,y \in X} d(x,y) \geq 0$ ,
- (2)  $\forall_{x,y \in X} d(x,y) = d(y,x)$ ,
- (3)  $\forall_{x,y \in X} d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (4)  $\forall_{x,y,z \in X} d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ .

Parę  $(X, d)$ , czyli zbiór  $X$  z wyróżnioną metryką  $d$  nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Warunek (1) jest tak na prawdę zbędny, bowiem wynika on z trzech pozostałych:

$$0 \stackrel{(3)}{=} d(x,x) \stackrel{(4)}{\leq} d(x,y) + d(y,x) \stackrel{(2)}{=} 2d(x,y) \implies 0 \leq d(x,y).$$

### Przykłady metryk

(1) *metryka dyskretna*,  $d_d : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$

$$\forall_{x,y \in X} d_d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \neq y \\ 0, & \text{gdy } x = y \end{cases}$$

(2) *metryka miejska (taksówkowa)*,  $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} d_1(x,y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$$

(3) *metryka euklidesowa*,  $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} d_E(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

(4) *metryka  $d_p$  ( $l_p$ )*,  $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \forall_{p \geq 1} d_p(x,y) = \left( \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(5) *metryka maksimum (Czebyszewa, szachowa)*,  $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} d_\infty(x,y) = \max_{k=\{1,\dots,n\}} |x_k - y_k|$$

---

<sup>7</sup> $X$  to dowolny niepusty zbiór.



(6) metryka supremum,  $d_{sup} : \mathcal{B}(X, Y)^8 \times \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{f, g \in \mathcal{B}(X, Y)} \quad d_{sup} = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

(a) *Przypadek szczególny.*<sup>9</sup> Niech  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  będzie zbiorem funkcji ograniczonych ze zbioru  $X$  do zbioru liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , wyposażonego w metrykę euklidesową. Metryka supremum przyjmuje wówczas postać

$$\forall_{f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})} \quad d_{sup} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

(7) metryka rzymska,  $d_r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}^2} \quad d_r(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & \text{gdy punkty } x, y \text{ i } (0, 0) \text{ leżą na jednej prostej} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{gdy punkty } x, y \text{ i } (0, 0) \text{ nie leżą na jednej prostej} \end{cases}$$

Przestrzeń  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  bywa oznaczana jako  $\ell_n^p$ .

#### Definicja 6.2: Kula otwarta

**Kulą otwartą** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  o środku w punkcie  $a \in X$  i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

#### Definicja 6.3: Otoczenie

**Otoczeniem** punktu  $a$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywamy zbiór  $Y \subset X$ , jeżeli

$$\exists_{r>0} \quad B(a, r) \subset Y.$$

#### Definicja 6.4: Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Mówimy, że ciąg  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  jest zbieżny do  $g$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, g) = 0$ ,
- (2)  $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N > 0} \forall_{n > N} \quad d(x_n, g) < \varepsilon$ ,
- (3)  $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N > 0} \forall_{n > N} \quad x_n \in B(g, \varepsilon)$ ,
- (4) dla dowolnego otoczenia  $U$  punktu  $g$  tylko skończona liczba elementów ciągu  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  leży poza  $U$  (prawie wszystkie  $x_n \in U$ ).

Powyższe warunki są sobie równoważne. Jeżeli ciąg spełnia jeden z nich, to spełnia wszystkie na raz.

*Uwaga!* W ogólnym przypadku (dla ogólnej przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ ) nie ma czegoś takiego jak zbieżność do  $\pm\infty$ .

<sup>8</sup> $\mathcal{B}(X, Y)$  to zbiór funkcji ograniczonych ze zbioru  $X$  do przestrzeni metrycznej  $(Y, d_Y)$ .

<sup>9</sup>Na wykładzie pojawił się tylko przypadek szczególny. Ogólna definicja jest moim dodatkiem.

**Definicja 6.5: Ciąg ograniczony i nieograniczony**

Ciąg  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  nazywamy **ograniczonym** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , jeżeli

$$\exists a \in X \exists r > 0 \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in B(a, r).$$

W przeciwnym razie ciąg  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy **nieograniczonym**.

**Definicja 6.6: Ciąg Cauchy'ego**

Ciąg  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  nazywamy **ciągami Cauchy'ego** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n \geq M \ d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Należy zwrócić uwagę, że istnieją przestrzenie metryczne, w których nie wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne. Natomiast wszystkie ciągi zbieżne są ciągami Cauchy'ego.

**Definicja 6.7: Przestrzeń zupełna**

Przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest **zupełna**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

**Definicja 6.8: Wnętrze**

**Wnętrzem** zbioru  $A \subset X$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywamy zbiór punktów, dla których  $A$  jest otoczeniem,

$$\text{int } A = \{x \in A : \exists r > 0 \ B(x, r) \subset A\}.$$

**Definicja 6.9: Zbiór otwarty**

Zbiór  $A \subset X$  nazywamy **otwartym** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , jeżeli jest otoczeniem każdego swojego punktu, czyli

$$\forall x \in A \exists r > 0 \ B(x, r) \subset A.$$

Zbiór  $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = \text{int } A$ .

**Definicja 6.10: Domknięcie i zbiór domknięty**

**Domknięciem** zbioru  $A \subset X$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywamy zbiór

$$\bar{A} = \{x \in X : \forall r > 0 \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

$A$  jest **zbiorem domkniętym**, gdy  $A = \bar{A}$ .

Domknięcie i wnętrze zbioru  $A$  alternatywnie oznaczamy jako  $cl\ A$  oraz  $\mathring{A}$ .

**Definicja 6.11: Brzeg**

**Brzegiem** zbioru  $A \subset X$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywamy zbiór

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{int } A.$$

### Twierdzenie 6.1

Zbiór  $A \subset X$  jest domknięty w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbieżny ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  posiada granicę  $g \in A$ .

$$A = \overline{A} \iff \forall a \in A^{\mathbb{N}} \exists g \in X \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, g) = 0 \implies g \in A$$

### Twierdzenie 6.2

Zbiór  $A \subset X$  jest otwarty w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $X \setminus A$  jest domknięty.

$$A = \text{int } A \iff X \setminus A = \text{cl}(X \setminus A)$$

### Twierdzenie 6.3

- (1) Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
- (2) Przecięcie skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
- (3) Przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.
- (4) Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

### Definicja 6.12: Pokrycie i pokrycie otwarte

Rodzinę zbiorów  $\{U_i\}_{i \in I}$ , zawartą w przestrzeni  $X$ , nazywamy **pokryciem** zbioru  $A \subset X$ , jeśli

$$A = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Mówimy, że pokrycie  $\{U_i\}_{i \in I}$  jest **pokryciem otwartym**, jeśli  $\forall i \in I \ U_i = \text{int } U_i$ .

### Definicja 6.13: Podpokrycie

Niech  $\{U_i\}_{i \in I}$ , zawarty w przestrzeni  $X$ , będzie pokryciem zbioru  $A$  oraz  $K \subset I$ . Jeśli  $\{U_k\}_{k \in K}$  jest wówczas pokryciem  $A$ , to  $\{U_k\}_{k \in K}$  nazywamy **podpokryciem** pokrycia  $\{U_i\}_{i \in I}$ .

### Definicja 6.14: Zbiór zwarty

Zbiór  $A$ , zawarty w przestrzeni  $X$ , nazywamy **zwartym**, jeśli z każdego pokrycia otwartego zbioru  $A$  można wybrać podpokrycie skończone.

### Twierdzenie 6.4

Zbiór  $A$ , zawarty w przestrzeni  $X$ , jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $A$  jest *ciągowo zwarty*, czyli gdy z każdego ciągu  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  można wybrać podciąg  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  zbieżny w  $A$ .

### Twierdzenie 6.5

Zbiór  $A$ , zawarty w przestrzeni metrycznej  $(\mathbb{R}^n, d_E)$ , jest zwarty *wtedy i tylko wtedy, gdy*  $A$  jest domknięty i ograniczony.

### Definicja 6.15: Zbiór gęsty

Zbiór  $A \subset X$  nazywamy **gęstym** w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , jeśli  $\bar{A} = X$ .

### Definicja 6.16: Zbiór spójny i niespójny

Zbiór  $A$ , zawarty w przestrzeni  $X$ , nazywamy **niespójnym**, jeśli

$$\exists_{B_1, B_2 \neq \emptyset} (B_1 \cup B_2 = A \wedge \bar{B}_1 \cap B_2 = \emptyset \wedge B_1 \cap \bar{B}_2 = \emptyset).$$

W przeciwnym przypadku zbiór  $A$  jest **spójny**, czyli gdy

$$\forall_{B_1, B_2 \neq \emptyset} (B_1 \cup B_2 = A \implies \bar{B}_1 \cap B_2 \neq \emptyset \vee B_1 \cap \bar{B}_2 \neq \emptyset).$$

### Definicja 6.17: Równoważność metryk

Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem, a  $d_1$  i  $d_2$  metrykami na nim. Mówimy, że metryki  $d_1$  i  $d_2$  są **równoważne**, gdy

- I.  $\forall_{x, y \in X} \forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} (d_1(x, y) < \varepsilon_1 \implies d_2(x, y) < \delta) \wedge (d_2(x, y) < \varepsilon_2 \implies d_1(x, y) < \delta),$
- II.  $\forall_{x \in X} \forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} B_1(x, \varepsilon_1) \subset B_2(x, \delta) \wedge B_2(x, \varepsilon_2) \subset B_1(x, \delta).$

Wymienione wyżej warunki I. i II. są równoważne, więc wystarczy wykazanie tylko jednego z nich.

### Twierdzenie 6.6

Metryki  $d_p$  i  $d_\infty$  są sobie równoważne.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Patrz Przykłady metryk.

Jeżeli każda metryka  $d_p$  jest równoważna z każdą metryką  $d_\infty$ , to z przechodniości relacji równoważności, wszystkie metryki  $d_p$  są sobie równoważne. Przykładowo metryka miejska ( $d_1$ ) jest równoważna z euklidesową ( $d_2$ ).

### Twierdzenie 6.7

Dane są przestrzenie metryczne  $(X, d_1)$  i  $(X, d_2)$ . Metryki  $d_1$  i  $d_2$  są **równoważne**, jeśli

$$\forall_{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X} \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, g) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(x_n, g) = 0,$$

tzn. dowolny ciąg  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o wyrazach z  $X$  jest zbieżny do  $g$  w  $(X, d_1)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do  $g$  w  $(X, d_2)$ .

**Twierdzenie 6.8**

Dana jest przestrzeń  $\ell_N^p$ , wówczas

$$\forall_{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(x_n, g) = 0 \iff \forall_{i \in \{1, \dots, N\}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i} = g_i \right).$$

Wyrazy postaci  $a_i$  oznaczają  $i$ -tą współrzędną punktu  $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ .

## Sekcja 7

# Granica i ciągłość funkcji

Definicje i własności w sensie Cauchy'ego będą oznaczane poprzez (C), a Heinego za pomocą (H).

### Definicja 7.1: Punkt skupienia

W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  punkt  $p \in X$  jest **punktem skupienia** zbioru  $A \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \in \overline{A \setminus \{p\}}$ .

Alternatywnie punkt  $p$  jest punktem skupienia zbioru  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego ciągu elementów zbiorów  $A \setminus \{p\}$ .

### Definicja 7.2: Granica funkcji w punkcie

Dane są przestrzenie metryczne  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ . Niech  $A \subset X$ ,  $g \in Y$ ,  $f : A \rightarrow Y$  i  $p \in \overline{A}$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma **granicę  $g$  w punkcie** (skupienia)  $p$ , jeśli

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \setminus \{p\} \quad d_X(p, x) < \delta \implies d_Y(f(x), g) < \varepsilon, \\ x \in B_X(p, \delta) \implies f(x) \in B_Y(g, \varepsilon),$$

$$(H) \quad \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{p\} \quad x_n \xrightarrow{d_X} p \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g.$$

Wyrażenie  $x_n \xrightarrow{d_X} p$  oznacza zbieżność  $x_n$  do  $p$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$ . Wprowadziłem pojęcie punktu skupienia, które się nie pojawiło na wykładzie, by móc uogólnić definicję granicy funkcji w punkcie dla przypadku, gdy  $D_f$  jest podzbiorem  $X$ .

### Definicja 7.3: Granica jednostronna funkcji w punkcie

Dana jest przestrzeń metryczna  $(Y, d_Y)$ , zbiór  $X \subset \mathbb{R}$  oraz funkcja  $f : X \rightarrow Y$ . Mówimy, że  $g \in Y$  jest **granicą lewostronną** (**prawostronną**) funkcji  $f$  w punkcie (skupienia)  $a \in \overline{X}$ , jeżeli

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) \cap X \quad f(x) \in B_Y(g, \varepsilon) \quad \left( \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) \cap X \quad f(x) \in B_Y(g, \varepsilon) \right),$$

$$(H) \quad \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus [a, +\infty) \quad x_n \rightarrow p \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g \quad \left( \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus (-\infty, a] \quad x_n \rightarrow p \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g \right).$$

### Definicja 7.4: Granica funkcji w $+\infty$ i $-\infty$

Dana jest przestrzeń metryczna  $(Y, d_Y)$  oraz funkcja  $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow Y$ . Mówimy, że  $g \in Y$  jest **granicą funkcji  $f$  w  $+\infty$  ( $-\infty$ )**, jeżeli

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{R} \forall x \in X \setminus (-\infty, r] \quad f(x) \in B_Y(g, \varepsilon) \quad \left( \forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{R} \forall x \in X \setminus [r, +\infty) \quad f(x) \in B_Y(g, \varepsilon) \right),$$

$$(H) \quad \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \quad x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g \quad \left( \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \quad x_n \rightarrow -\infty \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g \right).$$

**Definicja 7.5: Zbieżność od dołu/góry**

Dana jest przestrzeń metryczna  $(X, d_X)$  oraz funkcja  $f : X \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że funkcja  $f$  zbiega do granicy  $g \in \mathbb{R}$  w punkcie  $a \in \bar{A}$  **od dołu (od góry)**, jeżeli

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_X(a, \delta) \cap A \setminus \{p\} \quad f(x) \in (g - \varepsilon, g), \\ (f(x) \in (g, g + \varepsilon)),$$

$$(H) \quad \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus \{p\} \quad x_n \xrightarrow{d_X} a \implies f(x_n) \rightarrow g \wedge \text{dla każdego } n \quad f(x_n) < g, \\ (f(x_n) > g).$$

**Definicja 7.6: Granica niewłaściwa w punkcie**

Dana jest przestrzeń metryczna  $(X, d_X)$  oraz funkcja  $f : X \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że funkcja  $f$  **rozbiega do  $+\infty$  ( $-\infty$ ) w punkcie  $a \in \bar{A}$** , jeżeli

$$(C) \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_X(a, \delta) \cap A \setminus \{p\} \quad f(x) > r, \\ (f(x) < r),$$

$$(H) \quad \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{p\} \quad x_n \xrightarrow{d_X} a \implies f(x_n) \rightarrow +\infty \text{ ( $-\infty$ )}.$$

**Przykłady granic funkcji**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x - 1} = p \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (7)$$

**Definicja 7.7: Ciągłość funkcji**

Dane są przestrzenie metryczne  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ , funkcja  $f : X \supset A \rightarrow Y$  oraz  $a \in A$ . Mówimy, że funkcja  $f$  jest **ciągła w punkcie  $a$** , jeśli  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , czyli

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

$$(H) \quad \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \quad x_n \xrightarrow{d_X} a \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(a).$$

Funkcję  $f$  nazywamy **ciągłą**, jeśli jest ciągła w każdym punkcie  $x \in A$ .

### Definicja 7.8: Ciągłość jednostajna

Dane są przestrzenie metryczne  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  oraz funkcja  $f : X \rightarrow Y$ . Mówimy, że funkcja  $f$  jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze  $A \subset X$ , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in A \quad d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

### Twierdzenie 7.1

Każda funkcja jednostajnie ciągła jest również ciągła.

Jednakże implikacja w drugą stronę już nie zachodzi.

### Twierdzenie 7.2

Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła.

### Twierdzenie 7.3

Jeśli  $(X, d_X)$  jest przestrzenią zupełną, a  $f : X \supset A \rightarrow Y$  funkcją ciągłą, to wówczas istnieje funkcja ciągła  $g : \bar{A} \rightarrow Y$ , taka że  $g|_A = f$ .

### Twierdzenie 7.4

Obraz zbioru zwartego pod działaniem funkcji ciągłej jest zbiorem zwartym<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>zatem również i domkniętym

Można również powiedzieć, że ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty.

### Twierdzenie 7.5

Niech  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  będą przestrzeniami metrycznymi, a  $f : X \rightarrow Y$  funkcją ciągłą, wówczas

$$Y \supset A = \text{int } A \implies f^{-1}(A) = \text{int } f^{-1}(A).$$

### Twierdzenie o „arytmetyce” funkcji ciągłych 7.6

- (1) Jeśli funkcje  $f, g : X \rightarrow Y$  są ciągłe w punkcie  $p \in X$ , to  $f \pm g, f \cdot g$  są ciągłe w  $p$ . Ponadto jeżeli  $\forall x \in X \quad g(x) \neq 0$ , to  $f/g$  jest określona na  $X$  i ciągła w  $p$ .
- (2) Jeśli funkcja  $f : A \rightarrow Y$  jest ciągła w  $p \in A$ , a  $g : B \rightarrow Y$ , gdzie  $f(A) \subset B$ , jest ciągła w  $f(p)$ , to złożenie  $g \circ f$  jest ciągłe w punkcie  $p$ .

### Twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów 7.7

Niech  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną, a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją ciągłą. Jeśli  $A \neq \emptyset$  oraz  $A = \bar{A}$ , to  $\inf f(A), \sup f(A) \in f(A)$ , czyli

$$\exists a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = \inf f(A) \wedge f(a_2) = \sup f(A).$$



**Przypadek szczególny:** Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą, to

$$\exists_{c,d \in [a,b]} \quad f(c) = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \} \wedge f(d) = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}.$$

**Twierdzenie 7.8**

Ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny.

**Twierdzenie Darboux o wartości pośredniej 7.9**

Niech  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną, a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją ciągłą. Jeśli  $A \subset X$  jest zbiorem spójnym, to

$$\forall_{y_1, y_2 \in f(A), y_1 \leq y_2} : [y_1, y_2] \subset f(A), \text{ czyli } \forall_{y \in \mathbb{R}, y_1 \leq y \leq y_2} \exists_{x \in A} y = f(x).$$

**Przypadek szczególny:** Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą, to

$$\forall_{y \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]} \exists_{x \in [a, b]} y = f(x).$$

**Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej 7.10**

Jeżeli funkcja ciągła  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ściśle monotoniczna na przedziale  $A \subset \mathbb{R}$ , wówczas  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  jest również ciągła i ściśle monotoniczna.

**Twierdzenie o granicy złożenia 7.11**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \implies \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

## Sekcja 8

# Pochodne

### Definicja 8.1: Pochodna w punkcie

Niech  $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu  $a$  (tzn.  $\exists_{\varepsilon>0} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$ ). Jeśli istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

to nazywamy ją **pochodną** funkcji  $f$  w punkcie  $a$ .

### Definicja 8.2: Funkcja pochodna

Jeżeli funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego zbioru  $A \subset X$ , to funkcję  $f' : A \ni a \mapsto f'(a) \in \mathbb{R}$  nazywamy **funkcją pochodną** lub **pochodną** funkcji  $f$ .

### Definicja 8.3: Jednostronna pochodna w punkcie

Niech  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną w lewostronnym (prawostronnym) otoczeniu punktu  $a$  (tzn.  $\exists_{\varepsilon>0} (a - \varepsilon, a]$  ( $[a, a + \varepsilon)$ )). Jeśli istnieje granica

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right),$$

to nazywamy ją **pochodną lewostronną** (**prawostronną**) funkcji  $f$  w punkcie  $a$  i oznaczamy jako  $f'_-(a)$  ( $f'_+(a)$ ).

### Twierdzenie 8.1

Pochodne jednostronne  $f'_-(a)$  i  $f'_+(a)$  funkcji  $f$  w punkcie  $a$  istnieją oraz są sobie równe  $f'_-(a) = f'_+(a) = g \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $a$  istnieje i jest równa  $g$ .

$$\exists_{f'_-(a), f'_+(a)} f'_-(a) = f'_+(a) = g \iff \exists_{f'(a)} f'(a) = g$$

### Twierdzenie o arytmetycznych własnościach pochodnej 8.2

I. Jeśli  $f, g : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne w  $x \in X$ , to

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (1)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (2)$$

II. Jeśli  $f, g : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w  $x \in X$  oraz  $\forall_{x \in X} g(x) \neq 0$ , to

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Pochodna jest operacją liniową

### Twierdzenie 8.3

Jeśli funkcja ma pochodną w punkcie  $x$ , to jest również w nim ciągła.

### Reguła łańcuchowa 8.4

Niech  $g : \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f : \mathbb{R} \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $B \supset g(A)$ . Załóżmy, że funkcja  $g$  jest określona w otoczeniu  $a \in A$ , a  $f$  w otoczeniu  $g(a)$ . Jeśli  $g$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  i  $f$  jest różniczkowalna w  $g(a)$ , to złożenie  $f \circ g$  jest funkcją różniczkowalną w punkcie  $a$  i ma pochodną

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

### Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej 8.5

Niech  $f : \mathbb{R} \supset A \rightarrow f(A) \subset \mathbb{R}$  będzie funkcją różnowartościową, różniczkowalną w  $a \in A$ . Jeśli  $f'(a) \neq 0$  i  $f^{-1}$  jest ciągła w  $f(a)$ , to  $f^{-1}$  jest różniczkowalna w  $f(a)$  i zachodzi wzór

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Parę pochodnych  $n$ -tego rzędu:

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}, \quad (1)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (2)$$

### Definicja 8.4: Ekstrema lokalne

Mówimy, że funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ma w  $c \in X$  **maksimum (minimum) lokalne**, jeśli istnieje otoczenie  $U \subset X$  punktu  $c$  takie, że

$$\begin{aligned} &\forall_{x \in U} f(x) \leq f(c) \\ &(\forall_{x \in U} f(x) \geq f(c)). \end{aligned}$$

### Definicja 8.5: Ekstrema lokalne właściwe

Mówimy, że funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ma w  $c \in X$  **maksimum (minimum) lokalne właściwe**, jeśli istnieje otoczenie  $U \subset X$  punktu  $c$  takie, że

$$\begin{aligned} &\forall_{x \in U \setminus \{c\}} f(x) < f(c) \\ &(\forall_{x \in U \setminus \{c\}} f(x) > f(c)). \end{aligned}$$

### Definicja 8.6: Ekstrema globalne

Funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ma w  $c \in X$  **maksimum (minimum) globalne**, jeśli

$$\begin{aligned} &\forall_{x \in X} f(c) \geq f(x) \\ &(\forall_{x \in X} f(c) \leq f(x)). \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku ekstremów lokalnych, można definiować ekstrema globalne właściwe.

#### Twierdzenie 8.6

Jeżeli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w  $c \in (a, b)$  i ma w tym punkcie ekstremum, to pochodna  $f'(c) = 0$ .

#### Definicja 8.7: Punkt krytyczny

Niech  $f : X \rightarrow Y$ . Mówimy, że punkt  $a \in X$  jest **punktem krytycznym** funkcji  $f$ , jeśli funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w punkcie  $a^a$  albo jest w tym punkcie różniczkowalna i pochodna  $f'(a) = 0$ .

<sup>a</sup>Ta część definicji nie pojawiła się na wykładzie.

Jeżeli funkcja  $f$  jest różniczkowalna na całej swej dziedzinie, to wszystkie punkty, w których  $f$  ma ekstrema są punktami krytycznymi. Jednakże odwrotna relacja już nie musi zachodzić.

#### Twierdzenie Rolle'a 8.7

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na  $(a, b)$ , wówczas

$$f(a) = f(b) \implies \exists_{c \in (a, b)} f'(c) = 0.$$

#### Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej 8.8

Niech  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na  $(a, b)$ , wówczas

$$\exists_{c \in (a, b)} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

#### Twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej 8.9

Niech  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi na przedziale  $(a, b)$ , wówczas

$$\exists_{c \in (a, b)} (f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c).$$

Jeśli  $g'(c) \neq 0$  oraz  $g(a) \neq g(b)$ , to powyższe zdanie można zapisać w postaci

$$\exists_{c \in (a, b)} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Warto zwrócić tutaj uwagę na wnioski wypływające z tego twierdzenia. Jeżeli  $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) = 0$ , to funkcja  $f$  jest stała na przedziale  $(a, b)$ . Po drugie, jeżeli  $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) = g'(x)$ , to istnieje takie  $r \in \mathbb{R}$ , że  $f(x) = g(x) + r$ .

**Twierdzenie 8.10**

Niech funkcja  $f$  będzie różniczkowalna na  $(a, b)$ , wówczas

$$\forall_{x \in (a, b)} f'(x) > 0 \implies f \text{ jest ściśle rosnąca na } (a, b),$$

$$\forall_{x \in (a, b)} f'(x) < 0 \implies f \text{ jest ściśle malejąca na } (a, b),$$

$$\forall_{x \in (a, b)} f'(x) \geq 0 \implies f \text{ jest niemalejąca na } (a, b),$$

$$\forall_{x \in (a, b)} f'(x) \leq 0 \implies f \text{ jest nierosnąca na } (a, b).$$

**Twierdzenie 8.11**

Jeżeli funkcja  $f$  jest niemalejąca i różniczkowalna na  $(a, b)$ , to  $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) \geq 0$ .

Jeżeli funkcja  $f$  jest nierosnąca i różniczkowalna na  $(a, b)$ , to  $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) \leq 0$ .

**Twierdzenie 8.12**

Niech  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $c \in (a, b)$ . Jeśli

1.  $f'(c) > 0$  ( $f'(c) < 0$ ),
2.  $f'$  istnieje na pewnym otoczeniu  $c$  i jest ciągła w  $c$ ,

to na tym otoczeniu punktu  $c$  funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca (malejąca).

**Twierdzenie 8.13**

Niech  $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $c \in X$ . Jeśli  $f'(c) \neq 0$ ,  $f'$  istnieje na otoczeniu punktu  $c$  i jest na nim ciągła, to istnieje otoczenie punktu  $c$ , takie że  $g : (c - \delta, c + \delta) \rightarrow f[(c - \delta, c + \delta)]$  jest bijekcją.

**Definicja 8.8: Homomorfizm**

Ciągłą bijekcję, której odwrotność również jest ciągła, nazywamy **homomorfizmem**.

**Definicja 8.9: Zbiory homomorficzne**

Zbiory pomiędzy, którymi istnieje homomorfizm nazywamy **homomorficznymi**.

### Reguła de l'Hospitala 8.14

WERSJA I

Niech  $f, g$  będą funkcjami rzeczywistymi, różniczkowalnymi na  $(a, b)$  i  $\forall_{x \in (a, b)} g'(x) \neq 0$ , gdzie  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  oraz

$$\left( \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \right) \vee \left( \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty \right), \text{ wówczas} \\ \left( \exists_{g \in \overline{\mathbb{R}}} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g \right) \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = g.$$

Analogiczne twierdzenie jest też prawdziwe dla granic lewostronnych i obustronnych.

WERSJA II

Niech  $f, g$  będą funkcjami rzeczywistymi, różniczkowalnymi na  $(c, +\infty)$  i  $\forall_{x \in (c, +\infty)} g'(x) \neq 0$ , gdzie  $-\infty \leq c < +\infty$  oraz

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \right) \vee \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty \right), \text{ wówczas} \\ \left( \exists_{g \in \overline{\mathbb{R}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g \right) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g.$$

Analogiczne twierdzenie jest też prawdziwe dla granic gdy  $x \rightarrow -\infty$ .

Zbiór  $\overline{\mathbb{R}}$  definiujemy jako  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Chcąc zastosować regułę de l'Hospitala do funkcji postaci  $f(x)^{g(x)}$ , można je przedstawić jako  $e^{g(x) \ln f(x)}$ .

### Wzór Leibniza 8.15

Niech  $f, g$  będą funkcjami różniczkowalnymi, posiadającymi pochodne do rzędu  $n$  włącznie. Wówczas pochodna  $n$ -tego rzędu iloczynu  $f \cdot g$  wyraża się wzorem:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

### Definicja 8.10: Funkcja wypukła

Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $A$  jest przedziałem liczb rzeczywistych. Funkcję  $f$  nazywamy **wypukłą** na przedziale  $A$ , jeśli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \forall_{\theta \in [0, 1]} f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2).$$

### Definicja 8.10: Funkcja wklęsła

Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $A$  jest przedziałem liczb rzeczywistych. Funkcję  $f$  nazywamy **wklęsłą** na przedziale  $A$ , jeśli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \forall_{\theta \in [0, 1]} f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2).$$

Zazwyczaj w definiowaniu funkcji wypukłej i wklęsłej korzysta się z pojęcia zbioru wypukłego, jednak na wykładzie otrzymaliśmy węższą definicję. Przedziały liczb rzeczywistych są zbiorami wypukłymi.

**Twierdzenie 8.16**

Funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła (wklęsła) na zbiorze liczb rzeczywistych  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall x_1, \dots, x_n \in A \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 1] \quad f\left(\sum_{i=1}^n \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \theta_i f(x_i)$$

$$\left( \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall x_1, \dots, x_n \in A \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 1] \quad f\left(\sum_{i=1}^n \theta_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \theta_i f(x_i) \right).$$

**Twierdzenie 8.17**

Dana jest funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $A$  jest przedziałem liczb rzeczywistych. Niech  $\alpha_{ij} = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$ . Mówimy, że  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\Leftrightarrow) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in A, x_1 < x_2 < x_3 \quad \alpha_{21} \leq \alpha_{32},$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in A, x_1 < x_2 < x_3 \quad \alpha_{31} \leq \alpha_{32},$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in A, x_1 < x_2 < x_3 \quad \alpha_{21} \leq \alpha_{31}.$$

**Wnioski**

1. Jeżeli funkcja  $f$  jest wypukła na  $(a, b)$ , to  $\forall x \in (a, b)$  istnieją pochodne jednostronne, ponadto  $f'_+(x) \geq f'_-(x)$ .
2. Funkcja wypukła na przedziale otwartym jest ciągła.
3. Funkcja  $f$  jest różniczkowalna i wypukła na przedziale  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna  $f'$  jest niemalejąca.
4. Jeżeli funkcja  $f$  jest dwukrotnie różniczkowalna na  $(a, b)$ , to  $f$  jest wypukła na  $(a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0$ .

**Wzór Taylora z resztą w postaci Peano 8.18**

Niech  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  i  $x_0 \in (a, b)$ . Jeśli  $f$  ma  $(n - 1)$  pochodnych na  $(a, b)$  i  $n$ -tą pochodną w punkcie  $x_0$ , to

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x, x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

### Wzór Taylora z resztą w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a 8.19

Niech  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w przedziale  $(a, b)$  pochodne rzędu  $(n + 1)$  włącznie, wówczas

$$\forall_{x, x_0 \in (a, b)} \exists_{\theta \in (0, 1)} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

z resztą w postaci Lagrange'a

$$\forall_{x, x_0 \in (a, b)} \exists_{\theta \in (0, 1)} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

z resztą w postaci Cauchy'ego

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{arcsinh} x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{arccosh} x$	$1/(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x})$
$x^x$	$x^x(\ln x + 1)$
$ h(x) $	$\operatorname{sgn}(h(x)) h'(x)$