

Sekcja 1

Relacje

Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory A i B . **Relacją (dwuargumentową)** R między elementami zbioru A a elementami zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ ($R \subset A \times B$).

Mówimy, że elementy $a \in A$ oraz $b \in B$ są ze sobą w relacji R (ozn. $a \sim b$ lub aRb), jeśli $\langle a, b \rangle \in R$.

Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze A . Mówimy, że:

- (1) R jest **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A) aRa$.
- (2) R jest **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A) \neg aRa$.
- (3) R jest **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
- (4) R jest **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
- (5) R jest **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.
- (6) R jest **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A) \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$.
- (7) R jest **spójna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$.

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech $R \subset A \times A$. Gdy relacja R jest **zwrotna**, **symetryczna** i **przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A . **Klasą równoważności (abstrakcji)** elementu $a \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności R , czyli zbiór

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji R .

Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A . Wówczas mamy:

- (i) $(\forall a \in A) a \in [a]_R \leftarrow$ ze zwrotności R
- (ii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$ z symetryczności R
- (iii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację \leq na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym słabym (nieostrym)** na zbiorze A , jeśli jest **zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna**.

Relację $<$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym ostrym** na zbiorze A , jeśli jest **przeciwzwrotna i przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

Dowód. Załóżmy, że relacja $<$ na zbiorze A jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy $a, b \in A$, wówczas z przechodniości

$$a < b \wedge b < a \Rightarrow a < a \Leftrightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a.$$

Jednak z przeciwzwrotności $<$ wiemy, iż zdanie $a < a$ jest fałszywe dla dowolnego a ze zbioru A , dlatego też

$$\neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a \Rightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \Leftrightarrow \neg(a < b) \vee \neg(b < a) \Leftrightarrow (a < b \Rightarrow \neg(b < a)).$$

□

Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy \leq (lub $<$) na zbiorze A nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze A , jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco: $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a)$.

Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór A z porządkiem częściowym \leq . Niech $B \subset A$ i $c \in A$. Mówimy, że:

- I. c jest **ograniczeniem górnym** zbioru B , jeśli $(\forall b \in B) b \leq c$.
- II. c jest **ograniczeniem dolnym** zbioru B , jeśli $(\forall b \in B) c \leq b$.
- III. c jest **kresem górnym** (ozn. $\sup A$) zbioru B , jeśli:
 - (a) jest ograniczeniem górnym.
 - (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego c' zbioru B zachodzi $c \leq c'$.
- IV. c jest **kresem dolnym** (ozn. $\inf A$) zbioru B , jeśli:
 - (a) jest ograniczeniem dolnym.
 - (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego c' zbioru B zachodzi $c' \leq c$.
- V. c jest elementem **maksymalnym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) c < b$.
- VI. c jest elementem **największym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B) b \leq c$.
- VII. c jest elementem **minimalnym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) b < c$.
- VIII. c jest elementem **najmniejszym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B) c \leq b$.

Powyższe pojęcia¹ na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru A , ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane diagramy Hassego.

Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje \leq i $<$ w zbiorze A . Jeśli spełniają one następujące warunki:

$$(a) (\forall a, b \in A)(a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b)$$

$$(b) (\forall a, b \in A)(a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b),$$

wówczas \leq jest porządkiem słabym, wtedy i tylko wtedy gdy $<$ jest porządkiem ostrym.

Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech $R \subset A \times B$. **Relacją odwrotną** R^{-1} do relacji R nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{\langle a, b \rangle \in A \times B : \langle b, a \rangle \in R\}.$$

Innymi słowy $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$.

¹Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Z pewnością dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

Sekcja 2

Funkcje

Definicja 2.1: Funkcja

Relację f między elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \langle x, y \rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B) \langle x, y \rangle \in f \wedge ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

- **Dziedzina** (ozn. $\text{dom}(f)$ lub D_f) funkcji f nazywamy zbiór A .
- **Przeciwdziedzina** (ozn. C_f) funkcji f nazywamy zbiór B .
- **Zbiorem wartości** (ozn. $\text{rng}(f)$ lub R_f) funkcji f nazywamy zbiór $R_f = \{y \in B : (\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f\} \subset B$.

Definicja 2.2: Obraz i przeciwobraz

Niech $f : A \rightarrow B$ oraz $C \subset A$ i $D \subset B$.

- (1) **Obrazem** zbioru C względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f[C] = \{y \in B : (\exists x \in C) y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}.$$

- (2) **Przeciwobrazem** zbioru D względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Supremum funkcji f na zbiorze C $\sup_{x \in C} f(x)$ jest kresem górnym obrazu zbioru C względem niej. Analogicznie definiujemy $\inf_{x \in C} f(x)$, $\max_{x \in C} f(x)$ i $\min_{x \in C} f(x)$.

Definicja 2.3: Injekcja

Relację funkcyjną $f \subset A \times B$ nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie } \\ (\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y \rangle \in f \wedge \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definicja 2.4: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna $f \subset A \times B$ jest ze zbioru A **na** zbiór B , jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

Definicja 2.5: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

Definicja 2.6: Funkcja odwrotna

Jeśli $f : A \rightarrow B$ jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do f jest funkcja $f^{-1} : B \rightarrow A$, taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x \rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f)$$

Twierdzenie 2.1

- (1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
- (2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

Definicja 2.7: Złożenie Funkcji

WERSJA I

Niech $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ (wystarczy nawet założyć, że $g : B_1 \rightarrow C$, jeśli $B \subset B_1$) i $x \in A$. **Złożeniem funkcji** f z funkcją g nazywamy funkcję $g \circ f : A \rightarrow C$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

WERSJA II

Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną wzorem

$$g \circ f = \{\langle x, z \rangle \in D_f \times R_g : \exists y[\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g]\}.$$

Wyrażenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C) \langle x, z \rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g).$$

Zauważmy różnicę między tymi dwiema wersjami ² definicji złożenia funkcji. Pierwsza, częściej spotykana, zakłada że $R_f \subset D_g$, skąd wynika, że $D_{g \circ f} = D_f$. Natomiast według drugiej definicji, złożenie $g \circ f$ funkcji f i g ma następujące własności.

- (a) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$,
- (b) $(\forall x \in D_{g \circ f}) (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji f, g, h zachodzi równość $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Definicja 2.8: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru A możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze A (identyczność na zbiorze A) następująco:

$$id_A : A \rightarrow A, \quad (\forall x \in A) id_A(x) = x.$$

²Tylko wersja pierwsza pojawiła się na wykładzie. Ta druga jest tylko moim dodatkiem. Podaję ją tutaj, bo chociaż nie pojawiła się w czasie wykładu, to posługiwaliśmy się jej wyróżniającą własnością na ćwiczeniach.

Twierdzenie 2.3

Jeśli $f : A \rightarrow B$ i $f^{-1} : B \rightarrow A$, to $f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$ jest identycznością na zbiorze A .

Definicja 2.9: Obcięcie i przedłużenie funkcji

Niech $f : A \rightarrow B$.

- (1) Niech $C \subset X$. **Obcięciem funkcji** f do zbioru C nazywamy funkcję $f|_C : C \rightarrow B$,
 $(f|_C)(x) = f(x)$.
- (2) Funkcję $g : C \rightarrow B$ nazywamy **przedłużeniem funkcji** f , jeśli $A \subset C$ oraz $(\forall x \in A) f(x) = g(x)$.

Zwróćmy uwagę, że daną funkcję f można przedłużyć na dany właściwy nadzbiór jej dziedziny na różne sposoby. Zauważmy też, że funkcja jest zawsze przedłużeniem swojego obcięcia.

Sekcja 3

Równoliczność

Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory A i B są **równoliczne** (ozn. $|A| = |B|$, $A \sim B$), gdy istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$.

Równoliczność ma własności relacji równoważności (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru $\mathcal{P}(U)$ ³. Jeśli $A, B \in \mathcal{P}(U)$ i R będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż $|A| = |B|$ oznacza, że $[A]_R = [B]_R$.

Definicja 3.2: Zbiór skończony i nieskończony

O zbiorze A mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci $\{1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Piszemy wówczas, że $|A| = n$. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy **nieskończonym**.

Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi \mathbb{N} . Piszemy wówczas, że $|A| = \aleph_0$.

Zbiór nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym. $|\mathbb{R}|$ oznaczamy jako c lub 2^{\aleph_0} i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy \mathbb{N} .

³ $\mathcal{P}(U)$ to zbiór potęgowy pewnego zbioru U , czyli zbiór wszystkich podzbiorów U . Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedziina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.

Sekcja 4

Liczby rzeczywiste

Dany jest zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} z określonymi działaniami $+$ i \cdot oraz porządkiem liniowym \leq . Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych podzielimy na trzy kategorie: aksjomaty ciała przemennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości⁴.

Aksjomaty ciała przemennego

- (1) **Przemienność dodawania** $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a + b = b + a$.
- (2) **Łączność dodawania** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) a + (b + c) = (a + b) + c$.
- (3) **Charakteryzacja zera** $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R}) a + 0 = a$.
- (4) **Istnienie elementów przeciwnych** $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists -a \in \mathbb{R}) a + (-a) = 0$.
- (5) **Przemienność mnożenia** $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a \cdot b = b \cdot a$.
- (6) **Łączność mnożenia** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- (7) **Charakteryzacja jedynki** $(\exists 1 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R}) a \cdot 1 = a$.
- (8) **Istnienie elementów odwrotnych** $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists a^{-1} \in \mathbb{R}) a \cdot a^{-1} = 1$.
- (9) **Rozdzielność mnożenia względem dodawania** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Aksjomaty porządku

- (1) **Prawo trichotomii**⁵ $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

- (2) **Przechodność** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$.

- (3) **Związki nierówności z działaniami**

- (a) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$;
- (b) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc)$.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $M = \sup A \in \mathbb{R}$.*

⁴Aksjomaty przepisałem ze skryptu Strzeleckiego, ponieważ były tam zapisane w trochę bardziej eleganckiej postaci.

⁵Aksjomat ten uwzględniamy, gdy przyjmujemy $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ na wykładzie natomiast przyjęliśmy $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Twierdzenie 4.1: Aksjomat Archimedesesa

Dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a i b istnieje liczba naturalna n , taka że $a < nb$.

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) a < nb$$

Twierdzenie to, choć bywa tak zwyczajowo nazywane, na prawdę aksjomatem w arytmetyce nie jest, bo wynika z innych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych.

Definicja 4.1: Przekrój Dedekinda

Podział zbioru liczb wymiernych na parę zbiorów $\langle A, B \rangle$, spełniające warunki^a:

- (1) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$,
- (2) $A \cup B = \mathbb{Q}$,
- (3) $A \cap B = \emptyset$
- (4) $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$.

nazywamy **przekrojem Dedekinda** zbioru \mathbb{Q} . Zbiór A nazywany jest **klasą dolną** przekroju, a zbiór B **klasą górną**.

^aPodane warunki różnią się swoją postacią, tym co były przedstawione na wykładzie, niemniej jednak są im równoważne.

Przekrój Dedekinda $\langle A, B \rangle$ zdefiniowany w taki sposób może mieć jedną z trzech następujących postaci, w której:

1. w zbiorze A istnieje element największy,
2. w zbiorze B istnieje element najmniejszy,
3. w zbiorze A nie istnieje element największy i w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy.

W trzecim przypadku przekrój wyznacza tzw. *lukę*. Aksjomat ciągłości w ujęciu przekrojowym, mówi o tym, że żaden z przekrojów Dedekinda zbioru \mathbb{R} nie wyznacza luki.

Przekroje typu 1 i 2 nazywamy *liczbami rzeczywistymi wymiernymi*. Dwa przekroje typu 1 i 2 mogą wyznaczać tę samą liczbę wymierną. Relację równoważności przekrojów zdefiniujemy poniżej. Natomiast przekrój $\langle A, B \rangle$ wyznaczający lukę nazywamy *liczbą rzeczywistą niewymierną*.

Zdefiniujmy relację równoważności R przekrojów Dedekinda:

$$\langle A_1, B_1 \rangle R \langle A_2, B_2 \rangle \Leftrightarrow A_1 = A_2 \vee \exists \max A_1, \min B_2 (\max A_1 = \min B_2) \vee \exists \max A_2, \min B_1 (\max A_2 = \min B_1).$$

Nasze rozważania doprowadzają nas do **konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda**⁶.

$$\mathbb{R} := \{\langle A, B \rangle : \text{przekroje Dedekinda}\} / R$$

⁶W tym miejscu notatki z liczb rzeczywistych na razie zakańczam. Dalsze wyprowadzenia operacji na liczbach rzeczywistych odkładam na czas bliższy terminowi egzaminu ustnego. Na kolosie zagadnienia te raczej nie będą potrzebne.