Sekcja 1

Relacje

Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory A i B. **Relacją (dwuargumentową)** R między elementami zbioru A a elementami zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ ($R \subset A \times B$).

Mówimy, że elementy $a \in A$ oraz $b \in B$ są ze sobą w relacji R (ozn. $a \sim b$ lub aRb), jeśli $\langle a, b \rangle \in R$.

Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze A. Mówimy, że:

(1) R jest **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ aRa$.
(2) R jest **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ \neg aRa$.
(3) R jest **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
(4) R jest **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
(5) R jest **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.
(6) R jest **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)\ \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$.
(7) R jest **spójna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$.

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech $R \subset A \times A$. Gdy relacja R jest **zwrotna**, **symetryczna** i **przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. **Klasą równoważności (abstrakcji)** elementu $a \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności R, czyli zbiór

$$A/_R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji R.

Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. Wówczas mamy:

(i) $(\forall a \in A)\ a \in [a]_R \leftarrow$ ze zwrotności R

(ii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$ z symetryczności R

(iii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację $\preceq$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym** **słabym (nieostrym)** na zbiorze A, jeśli jest **zwrotna**, **przechodnia** i **słabo antysymetryczna**.

Relację $\prec$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym** **ostrym** na zbiorze A, jeśli jest **przeciwzwrotna** i **przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

Dowód. Załóżmy, że relacja $\prec$ na zbiorze A jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy $a, b \in A$, wówczas z przechodniości

$$a \prec b \land b \prec a \Rightarrow a \prec a \Leftrightarrow \neg(a \prec b \land b \prec a) \lor a \prec a.$$

Jednak z przeciwzwrotności $\prec$ wiemy, iż zdanie $a \prec a$ jest fałszywe dla dowolnego a ze zbioru A, dlatego też

$$\neg(a \prec b \land b \prec a) \lor a \prec a \Rightarrow \neg(a \prec b \land b \prec a) \Leftrightarrow \neg(a \prec b) \lor \neg(b \prec a) \Leftrightarrow (a \prec b \Rightarrow \neg(b \prec a)).$$

□

Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy $\preceq$ (lub $\prec$) na zbiorze A nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze A, jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco: $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a \prec b \lor b \prec a)$.

Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór A z porządkiem częściowym $\preceq$. Niech $B \subset A$ i $c \in A$. Mówimy, że:

I. c jest **ograniczeniem górnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ b \preceq c$.

II. c jest **ograniczeniem dolnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ c \preceq b$.

III. c jest **kresem górnym** (ozn. $\sup A$) zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem górnym.
   (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego c' zbioru B zachodzi $c \preceq c'$.

IV. c jest **kresem dolnym** (ozn. $\inf A$) zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem dolnym.
   (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego c' zbioru B zachodzi $c' \preceq c$.

V. c jest elementem **maksymalnym** zbioru B, jeśli $\neg(\exists b \in B)\ c \prec b$.

VI. c jest elementem **największym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ b \preceq c$.

VII. c jest elementem **minimalnym** zbioru B, jeśli $\neg(\exists b \in B)\ b \prec c$.

VIII. c jest elementem **najmniejszym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ c \preceq b$.

Powyższe pojęcia[1] na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru A, ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane diagramy Hassego.

Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje $\preceq$ i $\prec$ w zbiorze A. Jeśli spełniają one następujące warunki:

(a) $(\forall a, b \in A)(a \preceq b \Leftrightarrow a \prec b \lor a = b)$

(b) $(\forall a, b \in A)(a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \land a \neq b)$,

wówczas $\preceq$ jest porządkiem słabym, wtedy i tylko wtedy gdy $\prec$ jest porządkiem ostrym.

Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech $R \subset A \times B$. **Relacją odwrotną** R^{-1} do relacji R nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{\langle a,\ b\rangle \in A \times B : \langle a,\ b\rangle \in R\}.$$

Innymi słowy $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$.

[1] Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Zapewne dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

Sekcja 2

Funkcje

Definicja 2.1: Funkcja

Relację f między elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)\ \langle x, y\rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ \langle x, y\rangle \in f\ \wedge\ ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

Definicja 2.2: Injekcja

Relację funkcyjną $f \subset A \times B$ nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie}$$
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y\rangle \in f \wedge \langle x_2, y\rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definicja 2.3: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna $f \subset A \times B$ jest ze zbioru A **na** zbiór B, jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ \langle x, y\rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

Definicja 2.4: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

Definicja 2.5: Funkcja odwrotna

Jeśli $f : A \to B$ jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do f jest funkcja $f^{-1} : B \to A$, taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x\rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f)$$

Twierdzenie 2.1

(1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
(2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

Definicja 2.6: Złożenie Funkcji

Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $x \in A$. **Złożeniem funkcji** f z funkcją g nazywamy funkcję $g \circ f : A \to C$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Wyrażenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C)\ \langle x, z\rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g).$$

Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji f, g, h zachodzi równość $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Definicja 2.7: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru A możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze A (identyczność na zbiorze A) następująco:

$$id_A : A \to A, \quad (\forall x \in A)\ id_A(x) = x.$$

Twierdzenie 2.3

Jeśli $f : A \to B$ i $f^{-1} : B \to A$, to $f^{-1} \circ f : A \to A$ jest identycznością na zbiorze A.

Sekcja 3

Równoliczność

Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory A i B są **równoliczne** (ozn. $|A| = |B|$, $A \sim B$), gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.

Równoliczność *ma własności relacji równoważności* (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru $\mathcal{P}(U)$ [2]. Jeśli $A, B \in \mathcal{P}(U)$ i R będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż $|A| = |B|$ oznacza, że $[A]_R = [B]_R$.

Definicja 3.2: Zbiór skończony

O zbiorze A mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci $\{1, \ldots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Piszemy wówczas, że $|A| = n$

Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi $\mathbb{N}$. Piszemy wówcza, że $|A| = \aleph_0$.

Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym. $|\mathbb{R}|$ oznaczamy jako $\mathfrak{c}$ lub $2^{\aleph_0}$ i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy $\mathbb{N}$.

[2] $\mathcal{P}(U)$ to zbiór potęgowy pewnego zbioru U, czyli zbiór wszystkich podzbiorów U. Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedzina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.