

## Sekcja 1

# Relacje

### Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory  $A$  i  $B$ . **Relacją (dwuargumentową)  $R$**  między elementami zbioru  $A$  a elementami zbioru  $B$  nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego  $A \times B$  ( $R \subset A \times B$ ).

Mówimy, że elementy  $a \in A$  oraz  $b \in B$  są ze sobą w relacji  $R$  (ozn.  $a \sim b$  lub  $aRb$ ), jeśli  $\langle a, b \rangle \in R$ .

Niech  $R$  będzie relacją na niepustym zbiorze  $A$ . Mówimy, że:

- (1)  $R$  jest **zwrotna**  $\Leftrightarrow (\forall a \in A) aRa$ .
- (2)  $R$  jest **przeciwzwrotna**  $\Leftrightarrow (\forall a \in A) \neg aRa$ .
- (3)  $R$  jest **przechodnia**  $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$ .
- (4)  $R$  jest **symetryczna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$ .
- (5)  $R$  jest **słabo antysymetryczna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$ .
- (6)  $R$  jest **silnie antysymetryczna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A) \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$ .
- (7)  $R$  jest **spójna**  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$ .

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

### Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech  $R \subset A \times A$ . Gdy relacja  $R$  jest **zwrotna, symetryczna i przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

### Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $A$ . **Klasą równoważności (abstrakcji) elementu  $a \in A$**  względem relacji  $R$  nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

### Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności  $R$ , czyli zbiór

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji  $R$ .

### Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $A$ . Wówczas mamy:

- (i)  $(\forall a \in A) a \in [a]_R \leftarrow$  ze zwrotności  $R$
- (ii)  $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$  z symetryczności  $R$
- (iii)  $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

### Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację  $\leq$  na zbiorze  $A$  nazywamy **porządkiem częściowym słabym (nieostrym)** na zbiorze  $A$ , jeśli jest **zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna**.

Relację  $<$  na zbiorze  $A$  nazywamy **porządkiem częściowym ostrym** na zbiorze  $A$ , jeśli jest **przeciwzwrotna i przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

*Dowód.* Załóżmy, że relacja  $<$  na zbiorze  $A$  jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy  $a, b \in A$ , wówczas z przechodniości

$$a < b \wedge b < a \Rightarrow a < a \Leftrightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a.$$

Jednak z przeciwzwrotności  $<$  wiemy, iż zdanie  $a < a$  jest fałszywe dla dowolnego  $a$  ze zbioru  $A$ , dlatego też

$$\neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a \Rightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \Leftrightarrow \neg(a < b) \vee \neg(b < a) \Leftrightarrow (a < b \Rightarrow \neg(b < a)).$$

□

### Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy  $\leq$  (lub  $<$ ) na zbiorze  $A$  nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze  $A$ , jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco:  $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a)$ .

### Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór  $A$  z porządkiem częściowym  $\leq$ . Niech  $B \subset A$  i  $c \in A$ . Mówimy, że:

- I.  $c$  jest **ograniczeniem górnym** zbioru  $B$ , jeśli  $(\forall b \in B) b \leq c$ .
- II.  $c$  jest **ograniczeniem dolnym** zbioru  $B$ , jeśli  $(\forall b \in B) c \leq b$ .
- III.  $c$  jest **kresem górnym** (ozn.  $\sup A$ ) zbioru  $B$ , jeśli:
  - (a) jest ograniczeniem górnym.
  - (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego  $c'$  zbioru  $B$  zachodzi  $c \leq c'$ .
- IV.  $c$  jest **kresem dolnym** (ozn.  $\inf A$ ) zbioru  $B$ , jeśli:
  - (a) jest ograniczeniem dolnym.
  - (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego  $c'$  zbioru  $B$  zachodzi  $c' \leq c$ .
- V.  $c$  jest elementem **maksymalnym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) c < b$ .
- VI.  $c$  jest elementem **największym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge (\forall b \in B) b \leq c$ .
- VII.  $c$  jest elementem **minimalnym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) b < c$ .
- VIII.  $c$  jest elementem **najmniejszym** zbioru  $B$ , jeśli  $c \in B \wedge (\forall b \in B) c \leq b$ .

Powyższe pojęcia<sup>1</sup> na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru  $A$ , ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto

<sup>1</sup>Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Zapewne dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane [diagramy Hassego](#).

#### Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje  $\leq$  i  $<$  w zbiorze  $A$ . Jeśli spełniają one następujące warunki:

$$(a) (\forall a, b \in A)(a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b)$$

$$(b) (\forall a, b \in A)(a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b),$$

wówczas  $\leq$  jest porządkiem słabym, wtedy i tylko wtedy gdy  $<$  jest porządkiem ostrym.

#### Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech  $R \subset A \times B$ . **Relacją odwrotną**  $R^{-1}$  do relacji  $R$  nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{ \langle a, b \rangle \in A \times B : \langle a, b \rangle \in R \}.$$

Innymi słowy  $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$ .

## Sekcja 2

# Funkcje

### Definicja 2.1: Funkcja

Relację  $f$  między elementami zbioru  $A$  i elementami zbioru  $B$  nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \langle x, y \rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B) \langle x, y \rangle \in f \wedge ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

- **Dziedzina** (ozn.  $\text{dom}(f)$  lub  $D_f$ ) funkcji  $f$  nazywamy zbiór  $A$ .
- **Przeciwdziedzina** (ozn.  $\text{Cl}_f$ ) funkcji  $f$  nazywamy zbiór  $B$ .
- **Zbiorem wartości** (ozn.  $\text{rng}(f)$  lub  $R_f$ ) funkcji  $f$  nazywamy zbiór  $R_f = \{y \in B : (\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f\} \subset B$ .

### Definicja 2.2: Obraz i przeciwobraz

Niech  $f : A \rightarrow B$  oraz  $C \subset A$  i  $D \subset B$ .

- (1) **Obrazem** zbioru  $C$  względem funkcji  $f$  nazywamy zbiór

$$f[C] = \{y \in B : (\exists x \in C) y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}.$$

- (2) **Przeciwobrazem** zbioru  $D$  względem funkcji  $f$  nazywamy zbiór

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Supremum funkcji  $f$  na zbiorze  $C$   $\sup_{x \in C} f(x)$  jest kresem górnym obrazu zbioru  $C$  względem niej. Analogicznie definiujemy  $\inf_{x \in C} f(x)$ ,  $\max_{x \in C} f(x)$  i  $\min_{x \in C} f(x)$ .

### Definicja 2.3: Injekcja

Relację funkcyjną  $f \subset A \times B$  nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie } \\ (\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y \rangle \in f \wedge \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

### Definicja 2.4: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna  $f \subset A \times B$  jest ze zbioru  $A$  **na** zbiór  $B$ , jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

### Definicja 2.5: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

### Definicja 2.6: Funkcja odwrotna

Jeśli  $f : A \rightarrow B$  jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do  $f$  jest funkcja  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x \rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f)$$

### Twierdzenie 2.1

- (1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
- (2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

### Definicja 2.7: Złożenie Funkcji

WERSJA I

Niech  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  (wystarczy nawet założyć, że  $g : B_1 \rightarrow C$ , jeśli  $B \subset B_1$ ) i  $x \in A$ . **Złożeniem funkcji**  $f$  z funkcją  $g$  nazywamy funkcję  $g \circ f : A \rightarrow C$ , określoną wzorem  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

WERSJA II

**Złożeniem funkcji**  $f$  i  $g$  nazywamy funkcję  $g \circ f$  zdefiniowaną wzorem

$$g \circ f = \{ \langle x, z \rangle \in D_f \times R_g : \exists y [ \langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g ] \}.$$

Wyrażenie  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C) \langle x, z \rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g).$$

Zauważmy różnicę między tymi dwiema wersjami <sup>2</sup> definicji złożenia funkcji. Pierwsza, częściej spotykana, zakłada że  $R_f \subset D_g$ , skąd wynika, że  $D_{g \circ f} = D_f$ . Natomiast według drugiej definicji, złożenie  $g \circ f$  funkcji  $f$  i  $g$  ma następujące własności.

- (a)  $D_{g \circ f} = \{ x \in D_f : f(x) \in D_g \}$ ,
- (b)  $(\forall x \in D_{g \circ f}) (g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

### Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji  $f, g, h$  zachodzi równość  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

### Definicja 2.8: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru  $A$  możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze  $A$  (identyczność na zbiorze  $A$ ) następująco:

$$id_A : A \rightarrow A, \quad (\forall x \in A) id_A(x) = x.$$

<sup>2</sup>Tylko wersja pierwsza pojawiła się na wykładzie. Ta druga jest tylko moim dodatkiem. Podaję ją tutaj, bo chociaż nie pojawiła się w czasie wykładu, to posługiwaliśmy się jej wyróżniającą własnością na ćwiczeniach.

### Twierdzenie 2.3

Jeśli  $f : A \rightarrow B$  i  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , to  $f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$  jest identycznością na zbiorze  $A$ .

### Definicja 2.9: Obcięcie i przedłużenie funkcji

Niech  $f : A \rightarrow B$ .

- (1) Niech  $C \subset X$ . **Obcięciem funkcji**  $f$  do zbioru  $C$  nazywamy funkcję  $f|_C : C \rightarrow B$ ,  
 $(f|_C)(x) = f(x)$ .
- (2) Funkcję  $g : C \rightarrow B$  nazywamy **przedłużeniem funkcji**  $f$ , jeśli  $A \subset C$  oraz  $(\forall x \in A) f(x) = g(x)$ .

Zwróćmy uwagę, że daną funkcję  $f$  można przedłużyć na dany właściwy nadzbiór jej dziedziny na różne sposoby. Zauważmy też, że funkcja jest zawsze przedłużeniem swojego obcięcia.

## Sekcja 3

# Równoliczność

### Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory  $A$  i  $B$  są **równoliczne** (ozn.  $|A| = |B|$ ,  $A \sim B$ ), gdy istnieje bijekcja  $f : A \rightarrow B$ .

Równoliczność ma własności relacji równoważności (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru  $\mathcal{P}(U)$ <sup>3</sup>. Jeśli  $A, B \in \mathcal{P}(U)$  i  $R$  będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż  $|A| = |B|$  oznacza, że  $[A]_R = [B]_R$ .

### Definicja 3.2: Zbiór skończony i nieskończony

O zbiorze  $A$  mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci  $\{1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Piszemy wówczas, że  $|A| = n$ . Zbiór, który nie jest skończony nazywamy **nieskończonym**.

### Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór  $A$  jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi  $\mathbb{N}$ . Piszemy wówczas, że  $|A| = \aleph_0$ .

Zbiór nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

### Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór  $A$  jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym.  $|\mathbb{R}|$  oznaczamy jako  $c$  lub  $2^{\aleph_0}$  i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy  $\mathbb{N}$ .

<sup>3</sup> $\mathcal{P}(U)$  to zbiór potęgowy pewnego zbioru  $U$ , czyli zbiór wszystkich podzbiorów  $U$ . Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedzina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.

## Sekcja 4

# Liczby rzeczywiste

Dany jest zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  z określonymi działaniami  $+$  i  $\cdot$  oraz porządkiem liniowym  $\leq$ . Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych podzielimy na trzy kategorie: aksjomaty ciała przemennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości<sup>4</sup>.

### Aksjomaty ciała przemennego

- (1) **Przemienność dodawania** ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ )  $a + b = b + a$ .
- (2) **Łączność dodawania** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ )  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
- (3) **Charakteryzacja zera** ( $\exists 0 \in \mathbb{R}$ ) ( $\forall a \in \mathbb{R}$ )  $a + 0 = a$ .
- (4) **Istnienie elementów przeciwnych** ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) ( $\exists -a \in \mathbb{R}$ )  $a + (-a) = 0$ .
- (5) **Przemienność mnożenia** ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- (6) **Łączność mnożenia** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- (7) **Charakteryzacja jedynki** ( $\exists 1 \in \mathbb{R}$ ) ( $\forall a \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot 1 = a$ .
- (8) **Istnienie elementów odwrotnych** ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) ( $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot a^{-1} = 1$ .
- (9) **Rozdzielność mnożenia względem dodawania** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ )  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

### Aksjomaty porządku

- (1) **Prawo trichotomii**<sup>5</sup> ( $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ) zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

- (2) **Przechodność** ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ( $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ).

- (3) **Związki nierówności z działaniami**

- (a) ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ( $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ );
- (b) ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) ( $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$ ).

**Aksjomat ciągłości (Dedekinda).** Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór  $A \subset \mathbb{R}$  ma kres górny  $M = \sup A \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>4</sup>Aksjomaty przepisałem ze skryptu Strzeleckiego, ponieważ były tam zapisane w trochę bardziej eleganckiej postaci.

<sup>5</sup>Aksjomat ten uwzględniamy, gdy przyjmujemy  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ , na wykładzie natomiast przyjęliśmy  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ .



#### Twierdzenie 4.1: Aksjomat Archimedesesa

Dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  istnieje liczba naturalna  $n$ , taka że  $a < nb$ .

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) a < nb$$

Twierdzenie to, choć bywa tak zwyczajowo nazywane, na prawdę aksjomatem w arytmetyce nie jest, bo wynika z innych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych.

#### Definicja 4.1: Przekrój Dedekinda

Podział zbioru liczb wymiernych na parę zbiorów  $\langle A, B \rangle$ , spełniające warunki<sup>a</sup>:

- (1)  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ ,
- (2)  $A \cup B = \mathbb{Q}$ ,
- (3)  $A \cap B = \emptyset$
- (4)  $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$ .

nazywamy **przekrojem Dedekinda** zbioru  $\mathbb{Q}$ . Zbiór  $A$  nazywany jest **klasą dolną** przekroju, a zbiór  $B$  **klasą górną**.

<sup>a</sup>Podane warunki różnią się swoją postacią, tym co były przedstawione na wykładzie, niemniej jednak są im równoważne.

Przekrój Dedekinda  $\langle A, B \rangle$  zdefiniowany w taki sposób może mieć jedną z trzech następujących postaci, w której:

1. w zbiorze  $A$  istnieje element największy,
2. w zbiorze  $B$  istnieje element najmniejszy,
3. w zbiorze  $A$  nie istnieje element największy i w zbiorze  $B$  nie istnieje element najmniejszy.

W trzecim przypadku przekrój wyznacza tzw. *lukę*. Aksjomat ciągłości w ujęciu przekrojowym, mówi o tym, że żaden z przekrojów Dedekinda zbioru  $\mathbb{R}$  nie wyznacza luki.

Przekroje typu 1 i 2 nazywamy *liczbami rzeczywistymi wymiernymi*. Dwa przekroje typu 1 i 2 mogą wyznaczać tę samą liczbę wymierną. Relację równoważności przekrojów zdefiniujemy poniżej. Natomiast przekrój  $\langle A, B \rangle$  wyznaczający lukę nazywamy *liczbą rzeczywistą niewymierną*.

Zdefiniujmy relację równoważności  $R$  przekrojów Dedekinda:

$$\langle A_1, B_1 \rangle R \langle A_2, B_2 \rangle \Leftrightarrow A_1 = A_2 \vee \exists \max A_1, \min B_2 (\max A_1 = \min B_2) \vee \exists \max A_2, \min B_1 (\max A_2 = \min B_1).$$

Nasze rozważania doprowadzają nas do **konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda**<sup>6</sup>.

$$\mathbb{R} := \{ \langle A, B \rangle : \text{przekroje Dedekinda} \} /_R$$

<sup>6</sup>W tym miejscu notatki z liczb rzeczywistych na razie zakańczam. Dalsze wyprowadzenia operacji na liczbach rzeczywistych odkładam na czas bliższy terminowi egzaminu ustnego. Na kolosie zagadnienia te raczej nie będą potrzebne.

## Sekcja 5

# Ciągi

### Definicja 5.1: Ciąg nieskończony

**Ciągiem** (nieskończonym) o elementach w zbiorze  $A$  nazywamy dowolną funkcję  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$  (ozn.  $a_n$ ,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

### Definicja 5.2: Podciąg

Jeżeli  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem o elementach w zbiorze  $A$  oraz  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem ściśle rosnącym o elementach w  $\mathbb{N}$ , to ciąg  $a \circ k = \{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy **podciągiem** ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Definicja 5.3: Granica ciągu

Mówimy, że  $g \in \mathbb{R}$  jest granicą ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon, n \in \mathbb{N} \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

Gdy  $g$  jest granicą ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , to piszemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  lub  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ .

### Twierdzenie 5.1

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

### Definicja 5.4: Ciąg Cauchy'ego

**Ciągiem Cauchy'ego** nazywamy ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n, m \geq M \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

### Twierdzenie 5.2

Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

### Twierdzenie 5.3

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony, zarówno z dołu, jak i z góry.

### Twierdzenie 5.4

Jeżeli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny do  $+\infty$  ( $-\infty$ ), to jest ograniczony z dołu (góry).

### Twierdzenie 5.5

Jeśli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do  $g$  to każdy podciąg ciągu  $\{a_n\}$  też jest zbieżny do  $g$ .

W celu uproszczenia późniejszego zapisu, wprowadźmy parę (autorskich!) oznaczeń.

$$\begin{array}{ll} [a_n] \text{ ozn.} & (\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq m \\ a_n] \text{ ozn.} & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq M \\ [a_n] \text{ ozn.} & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq M \end{array}$$

#### Twierdzenia o „arytmetyce” granic 5.6

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami liczbowymi oraz  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|.$
- (2)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{a}.$
- (3)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b.$
- (4)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b.$
- (5)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (6)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge b_n] \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (7)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab.$
- (8)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge [b_n] \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (9)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge (\exists q > 0) \text{ dddn } b_n > q \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (10)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge (\exists q < 0) \text{ dddn } b_n < q \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (11)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) b_n \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}.$
- (12)  $[a_n] \wedge |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (13)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge (\exists c > 0) \text{ dddn } |b_n| > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (14)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (15)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (16)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (17)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (18)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$

Powyższe twierdzenia, jak i jakiegokolwiek inne twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic nie mają zastosowania w przypadku tzw. *wyrażeń nieoznaczonych*. Do opisania takich wyrażeń wykorzystuje się następujące symbole:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0, 0^0.$$

### Twierdzenie 5.7

Jeżeli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny, a  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nie, to ciąg  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  postaci  $c_n = a_n + b_n$  również nie jest zbieżny.

### Twierdzenie o szacowaniu granic 5.8

Założmy, że  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych oraz  $x \in \mathbb{R}$ . Zachodzą wówczas następujące implikacje:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > x \implies \text{dddn } a_n > x,$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < x \implies \text{dddn } a_n < x,$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies \text{dddn } a_n > b_n,$
- (iv)  $\text{dddn } a_n \leq b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$

Na wykładzie przedstawiono tylko (iv). (iii) jest równoważne (iv) z prawa kontrapozycji. (i) da się łatwo wywieść z (iii), wystarczy bowiem przyjąć, że  $b_n$  jest ciągiem stałym stale równym  $x$ . (ii) dowodzimy analogicznie.

### Twierdzenie o dwóch ciągach 5.9

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

- I.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \wedge \text{dddn } b_n \geq a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$
- II.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \wedge \text{dddn } b_n \leq a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$

### Twierdzenie o trzech ciągach 5.10

Jeżeli  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \wedge \text{dddn } a_n \leq b_n \leq c_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

### Twierdzenie 5.11

Niech  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

- I.  $\text{dddn } a_n > 0 \wedge (\exists q > 1) \text{ dddn } \frac{a_{n+q}}{a_n} > q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$
- II.  $\text{dddn } a_n > 0 \wedge (\exists q < 1) \text{ dddn } \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

Parę przykładów granic ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{dla } q > 1 \vee (q = 1 \wedge k < 0) \\ 1, & \text{dla } q = 1 \wedge k = 0 \\ 0, & \text{dla } q < 1 \vee (q = 1 \wedge k > 0) \end{cases}, \text{ gdzie } q \geq 0. \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (2)$$

**Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym 5.12**

I. Każdy niemalejący i ograniczony z góry ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

II. Każdy nierosnący i ograniczony z dołu ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$