Sekcja 1

Relacje

Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory A i B. **Relacją (dwuargumentową)** R między elementami zbioru A a elementami zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ ($R \subset A \times B$).

Mówimy, że elementy $a \in A$ oraz $b \in B$ są ze sobą w relacji R (ozn. $a \sim b$ lub aRb), jeśli $\langle a, b \rangle \in R$.

Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze A. Mówimy, że:
(1) R jest **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ aRa$.
(2) R jest **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ \neg aRa$.
(3) R jest **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
(4) R jest **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
(5) R jest **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.
(6) R jest **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)\ \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$.
(7) R jest **spójna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$.

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech $R \subset A \times A$. Gdy relacja R jest **zwrotna**, **symetryczna** i **przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. **Klasą równoważności (abstrakcji)** elementu $a \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności R, czyli zbiór

$$A/_R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji R.

Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. Wówczas mamy:

(i) $(\forall a \in A)\ a \in [a]_R \leftarrow$ ze zwrotności R

(ii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$ z symetryczności R

(iii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację $\preceq$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym słabym (nieostrym)** na zbiorze A, jeśli jest **zwrotna**, **przechodnia** i **słabo antysymetryczna**.

Relację $\prec$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym ostrym** na zbiorze A, jeśli jest **przeciwzwrotna** i **przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

Dowód. Załóżmy, że relacja $\prec$ na zbiorze A jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy $a, b \in A$, wówczas z przechodniości

$$a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a \prec a \Leftrightarrow \neg(a \prec b \wedge b \prec a) \vee a \prec a.$$

Jednak z przeciwzwrotności $\prec$ wiemy, iż zdanie $a \prec a$ jest fałszywe dla dowolnego a ze zbioru A, dlatego też

$$\neg(a \prec b \wedge b \prec a) \vee a \prec a \Rightarrow \neg(a \prec b \wedge b \prec a) \Leftrightarrow \neg(a \prec b) \vee \neg(b \prec a) \Leftrightarrow (a \prec b \Rightarrow \neg(b \prec a)).$$

$\square$

Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy $\preceq$ (lub $\prec$) na zbiorze A nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze A, jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco: $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a \prec b \vee b \prec a)$.

Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór A z porządkiem częściowym $\preceq$. Niech $B \subset A$ i $c \in A$. Mówimy, że:

I. c jest **ograniczeniem górnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ b \preceq c$.

II. c jest **ograniczeniem dolnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ c \preceq b$.

III. c jest **kresem górnym** (ozn. $\sup A$) zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem górnym.

   (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego c' zbioru B zachodzi $c \preceq c'$.

IV. c jest **kresem dolnym** (ozn. $\inf A$) zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem dolnym.

   (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego c' zbioru B zachodzi $c' \preceq c$.

V. c jest elementem **maksymalnym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B)\ c \prec b$.

VI. c jest elementem **największym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B)\ b \preceq c$.

VII. c jest elementem **minimalnym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B)\ b \prec c$.

VIII. c jest elementem **najmniejszym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B)\ c \preceq b$.

Powyższe pojęcia[1] na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru A, ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto

[1] Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Zapewne dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane diagramy Hassego.

Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje $\preceq$ i $\prec$ w zbiorze A. Jeśli spełniają one następujące warunki:

(a) $(\forall a, b \in A)(a \preceq b \Leftrightarrow a \prec b \vee a = b)$

(b) $(\forall a, b \in A)(a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \wedge a \neq b)$,

wówczas $\preceq$ jest porządkiem słabym wtedy i tylko wtedy, gdy $\prec$ jest porządkiem ostrym.

Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech $R \subset A \times B$. **Relacją odwrotną** R^{-1} do relacji R nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{\langle a,\ b\rangle \in A \times B : \langle a,\ b\rangle \in R\}.$$

Innymi słowy $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$.

Sekcja 2

Funkcje

Definicja 2.1: Funkcja

Relację f między elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)\ \langle x, y\rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ \langle x, y\rangle \in f \ \wedge\ ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

- **Dziedziną** (ozn. $dom(f)$ lub D_f) funkcji f nazywamy zbiór A.
- **Przeciwdziedziną** (ozn. $\mathcal{C}\!\mathcal{l}_f$) funkcji f nazywamy zbiór B.
- **Zbiorem wartości** (ozn. $rng(f)$ lub R_f) funkcji f nazywamy zbiór $R_f = \{y \in B : (\exists x \in A)\ \langle x, y\rangle \in f\} \subset B$.

Definicja 2.2: Obraz i przeciwobraz

Niech $f : A \to B$ oraz $C \subset A$ i $D \subset B$.

(1) **Obrazem** zbioru C względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f[C] = \{y \in B : (\exists x \in C)\ y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}.$$

(2) **Przeciwobrazem** zbioru D względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Supremum funkcji f na zbiorze C $\sup_{x\in C} f(x)$ jest kresem górnym obrazu zbioru C względem niej. Analogicznie definiujemy $\inf_{x\in C} f(x)$, $\max_{x\in C} f(x)$ i $\min_{x\in C} f(x)$.

Definicja 2.3: Injekcja

Relację funkcyjną $f \subset A \times B$ nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie}$$
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y\rangle \in f \wedge \langle x_2, y\rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definicja 2.4: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna $f \subset A \times B$ jest ze zbioru A **na** zbiór B, jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ \langle x, y\rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

Definicja 2.5: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

Definicja 2.6: Funkcja odwrotna

Jeśli $f : A \to B$ jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do f jest funkcja $f^{-1} : B \to A$, taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x\rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f)$$

Twierdzenie 2.1

(1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
(2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

Definicja 2.7: Złożenie Funkcji

`WERSJA I`

Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$ (wystarczy nawet założyć, że $g : B_1 \to C$, jesli $B \subset B_1$) i $x \in A$. **Złożeniem funkcji** f z funkcją g nazywamy funkcję $g \circ f : A \to C$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

`WERSJA II`

Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną wzorem

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle \in D_f \times R_g : \exists y[\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g]\}.$$

Wyrażenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C)\ \langle x, z\rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g).$$

Zauważmy różnicę między tymi dwiema wersjami [2] definicji złożenia funkcji. Pierwsza, częściej spotykana, zakłada że $R_f \subset D_g$, skąd wynika, że $D_{g\circ f} = D_f$. Natomiast według drugiej definicji, złożenie $g \circ f$ funkcji f i g ma następujące własności.

(a) $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$,

(b) $(\forall x \in D_{g\circ f})\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji f, g, h zachodzi równość $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Definicja 2.8: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru A możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze A (identyczność na zbiorze A) następująco:

$$id_A : A \to A, \quad (\forall x \in A)\ id_A(x) = x.$$

[2] Tylko wersja pierwsza pojawiła się na wykładzie. Ta druga jest tylko moim dodatkiem. Podaję ją tutaj, bo chociaż nie pojawiła się w czasie wykładu, to posługiwaliśmy się jej wyróżniającą własnością na ćwiczeniach.

Twierdzenie 2.3

Jeśli $f : A \to B$ i $f^{-1} : B \to A$, to $f^{-1} \circ f : A \to A$ jest identycznością na zbiorze A.

Definicja 2.9: Obcięcie i przedłużenie funkcji

Niech $f : A \to B$.

(1) Niech $C \subset X$. **Obcięciem funkcji** f do zbioru C nazywamy funkcję $f|_C : C \to B$, $(f|_C)(x) = f(x)$.

(2) Funkcję $g : C \to B$ nazywamy **przedłużeniem funkcji** f, jeśli $A \subset C$ oraz $(\forall x \in A)\ f(x) = g(x)$.

Zwróćmy uwagę, że daną funkcję f można przedłużyć na dany właściwy nadzbiór jej dziedziny na różne sposoby. Zauważmy też, że funkcja jest zawsze przedłużeniem swojego obcięcia.

Sekcja 3

Równoliczność

Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory A i B są **równoliczne** (ozn. $|A| = |B|$, $A \sim B$), gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.

Równoliczność *ma własności relacji równoważności* (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru $\mathcal{P}(U)$ [3]. Jeśli $A, B \in \mathcal{P}(U)$ i R będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż $|A| = |B|$ oznacza, że $[A]_R = [B]_R$.

Definicja 3.2: Zbiór skończony i nieskończony

O zbiorze A mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci $\{1, \ldots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Piszemy wówczas, że $|A| = n$. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy **nieskończonym**.

Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi $\mathbb{N}$. Piszemy wówczas, że $|A| = \aleph_0$.

Zbiór nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym. $|\mathbb{R}|$ oznaczamy jako $\mathfrak{c}$ lub $2^{\aleph_0}$ i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy $\mathbb{N}$.

[3] $\mathcal{P}(U)$ to zbiór potęgowy pewnego zbioru U, czyli zbiór wszystkich podzbiorów U. Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedzina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.

Sekcja 4

Liczby rzeczywiste

Dany jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z określonymi działaniami $+$ i $\cdot$ oraz porządkiem liniowym $\leq$. Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych podzielimy na trzy kategorie: aksjomaty ciała przemiennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości[4].

Aksjomaty ciała przemiennego

(1) **Przemienność dodawania** $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ a + b = b + a$.

(2) **Łączność dodawania** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a + (b + c) = (a + b) + c$.

(3) **Charakteryzacja zera** $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R})\ a + 0 = a$.

(4) **Istnienie elementów przeciwnych** $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists -a \in \mathbb{R})\ a + (-a) = 0$.

(5) **Przemienność mnożenia** $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ a \cdot b = b \cdot a$.

(6) **Łączność mnożenia** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(7) **Charakteryzacja jedynki** $(\exists 1 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R})\ a \cdot 1 = a$.

(8) **Istnienie elementów odwrotnych** $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists a^{-1} \in \mathbb{R})\ a \cdot a^{-1} = 1$.

(9) **Rozdzielność mnożenia względem dodawania** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Aksjomaty porządku

(1) **Prawo trichotomii** [5] $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ zachodzi *dokładnie jedna* z trzech możliwości:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

(2) **Przechodniość** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$.

(3) **Związki nierówności z działaniami**

   (a) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$;

   (b) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc)$.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $M = \sup A \in \mathbb{R}$.*

[4] Aksjomaty przepisałem ze skryptu Strzeleckiego, ponieważ były tam zapisane w trochę bardziej eleganckiej postaci.

[5] Aksjomat ten uwzględniamy, gdy przyjmujemy $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, na wykładzie natomiast przyjęliśmy $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Twierdzenie 4.1: Aksjomat Archimedesa

Dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a i b istnieje liczba naturalna n, taka że $a < nb$.

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N})\ a < nb$$

Twierdzenie to, choć bywa tak zwyczajowo nazywane, na prawdę aksjomatem w arytmetyce nie jest, bo wynika z innych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych.

Definicja 4.1: Przekrój Dedekinda

Podział zbioru liczb wymiernych na parę zbiorów $\langle A, B\rangle$, spełniające warunki[a]:

(1) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$,

(2) $A \cup B = \mathbb{Q}$,

(3) $A \cap B = \emptyset$

(4) $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a < b$.

nazywamy **przekrojem Dedekinda** zbioru $\mathbb{Q}$. Zbiór A nazywany jest **klasą dolną** przekroju, a zbiór B **klasą górną**.

[a] Podane warunki różnią się swoją postacią, tym co były przedstawione na wykładzie, niemniej jednak są im równoważne.

Przekrój Dedekinda $\langle A, B\rangle$ zdefiniowany w taki sposób może mieć jedną z trzech następujących postaci, w której:

1. w zbiorze A istnieje element największy,
2. w zbiorze B istnieje element najmniejszy,
3. w zbiorze A nie istnieje element największy i w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy.

W trzecim przypadku przekrój wyznacza tzw. *lukę*. Aksjomat ciągłości w ujęciu przekrojowym, mówi o tym, że żaden z przekrojów Dedekinda zbioru $\mathbb{R}$ nie wyznacza luki.

Przekroje typu 1 i 2 nazywamy *liczbami rzeczywistymi wymiernymi*. Dwa przekroje typu 1 i 2 mogą wyznaczać tę samą liczbę wymierną. Relację równoważności przekrojów zdefiniujemy poniżej. Natomiast przekrój $\langle A, B\rangle$ wyznaczający lukę nazywamy *liczbą rzeczywistą niewymierną*.

Zdefiniujmy relację równoważności R przekrojów Dedekinda:

$$\langle A_1, B_2\rangle\ R\ \langle A_2, B_2\rangle \Leftrightarrow A_1 = A_2 \vee \exists \max A_1, \min B_2 (\max A_1 = \min B_2) \vee \exists \max A_2, \min B_1 (\max A_2 = \min B_1).$$

Nasze rozważania doprowadzają nas do ***konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda***[6].

$$\mathbb{R} := \{\langle A, B\rangle : \text{przekroje Dedekinda}\}/_R$$

[6] W tym miejscu notatki z liczb rzeczywistych na razie zakańczam. Dalsze wyprowadzenia operacji na liczbach rzeczywistych odkładam na czas bliższy terminowi egzaminu ustnego. Na kolosie zagadnienia te raczej nie będą potrzebne.

Sekcja 5

Ciągi

Definicja 5.1: Ciąg nieskończony

Ciągiem (nieskończonym) o elementach w zbiorze A nazywamy dowolną funkcję $a : \mathbb{N} \to A$ (ozn. a_n, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Definicja 5.2: Podciąg

Jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem o elementach w zbiorze A oraz $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ściśle rosnącym o elementach w $\mathbb{N}$, to ciąg $a \circ k = \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **podciągiem** ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja 5.3: Granica ciągu

Mówimy, że $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_\varepsilon, n\in\mathbb{N}}\ \ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Gdy g jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, to piszemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n\to\infty} g$.

Twierdzenie 5.1

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Definicja 5.4: Ciąg Cauchy'ego

Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{M\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geq M}\ \forall_{m,n\in\mathbb{N}}\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.2

Każdy ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego (tzn. jest ciągiem Cauchy'ego).

Twierdzenie 5.3

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony, zarówno z dołu, jak i z góry.

Twierdzenie 5.4

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$, to jest ograniczony z dołu (góry).

Twierdzenie 5.5

Jeśli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do g to każdy podciąg ciągu $\{a_n\}$ też jest zbieżny do g.

Twierdzenia o „arytmetyce” granic 5.6

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczbowymi oraz $a,b\in\mathbb{R}$.

(1) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies |a_n| \xrightarrow{n\to\infty} |a|$.

(2) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$.

(3) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n+b_n \xrightarrow{n\to\infty} a+b$.

(4) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n-b_n \xrightarrow{n\to\infty} a-b$.

(5) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge [b_n \implies a_n+b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(6) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \wedge b_n] \implies a_n+b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(7) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_nb_n \xrightarrow{n\to\infty} ab$.

(8) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \wedge [b_n] \implies a_nb_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(9) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge (\exists q>0)\ dddn\ b_n>q \implies a_nb_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(10) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge (\exists q<0)\ dddn\ b_n<q \implies a_nb_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(11) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b\neq 0 \wedge (\forall n\in\mathbb{N})\ b_n\neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$.

(12) $[a_n] \wedge |b_n| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(13) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \wedge (\exists c>0)\ dddn\ |b_n|>c \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(14) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge dddn\ b_n>0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(15) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge dddn\ b_n>0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(16) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge dddn\ b_n<0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(17) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge dddn\ b_n<0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(18) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^b$.

(19) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a>1 \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(20) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a\in(0,1) \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(21) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a>1 \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(22) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a\in(0,1) \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(23) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b>0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(24) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \wedge b_n \xrightarrow{n\to\infty} b<0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

W celu uproszeczenia zapisu, wprowadziłem do powyższych twierdzeń parę (autorskich!) oznaczeń.

$$\begin{array}{lll} [a_n & ozn. & (\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq m \\ a_n] & ozn. & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq M \\ [a_n] & ozn. & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq M \end{array}$$

Powyższe twierdzenia, jak i jakiekolwiek inne twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic nie mają zastosowania w przypadku tzw. *wyrażeń nieoznaczonych*. Do opisania takich wyrażeń wykorzystuje się następujące symbole:

$$\infty - \infty,\ \ 0 \cdot \infty,\ \ \frac{0}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ 1^{\infty},\ \ \infty^0,\ \ 0^0.$$

Twierdzenie 5.7

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nie, to ciąg $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ postaci $c_n = a_n + b_n$ również <u>nie</u> jest zbieżny.

Przydatną własnością wynikającą z tw. 5.7 i tw. 5.6 jest to, że jeśli ciąg $b_n = a_n - g \xrightarrow{n \to \infty} 0$, to (a_n) jest zbieżny i to dokładnie do granicy g.

Twierdzenie o szacowaniu granic 5.8

Załóżmy, że $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych oraz $x \in \mathbb{R}$. Zachodzą wówczas następujące implikacje:

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n > x \implies dddn\ \ a_n > x,$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n < x \implies dddn\ \ a_n < x,$

(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n > \lim\limits_{n \to \infty} b_n \implies dddn\ \ a_n > b_n,$

(iv) $dddn\ \ a_n \leq b_n \implies \lim\limits_{n \to \infty} a_n \leq \lim\limits_{n \to \infty} b_n.$

Na wykładzie przedstawiono tylko (iv). (iii) jest równoważne (iv) z prawa kontrapozycji. (i) da się łatwo wywieść z (iii), wystarczy bowiem przyjąć, że b_n jest ciągiem stałym stale równym x. (ii) dowodzimy analogicznie.

Twierdzenie o dwóch ciągach 5.9

Niech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

I. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty \wedge dddn\ \ b_n \geq a_n \implies \lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty,$

II. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty \wedge dddn\ \ b_n \leq a_n \implies \lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty.$

Twierdzenie o trzech ciągach 5.10

Jeżeli $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = g \wedge dddn\ \ a_n \leq b_n \leq c_n \implies \lim_{n \to \infty} b_n = g.$$

Kryterium d'Alamberta dla ciągów 5.11

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

I. $dddn\ \ a_n > 0 \ \wedge\ (\exists q > 1)\ \ dddn\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > q \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

II. $dddn\ \ a_n > 0 \ \wedge\ (\exists q < 1)\ \ dddn\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym 5.12

I. Każdy niemalejący i ograniczony z góry ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

II. Każdy nierosnący i ograniczony z dołu ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa 5.13

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony (zarówno z góry jak i z dołu), to posiada podciąg zbieżny.

Definicja 5.5: Liczba Eulera

Liczbą Eulera nazywamy niewymierną liczbę, zdefiniowaną jako granicę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Twierdzenie 5.14

Ciąg $e_n = (1+1/n)^n$ jest niemalejący, a $\tilde{e}_n = (1+1/n)^{n+1}$ nierosnący. Ponadto

$$(\forall n\in\mathbb{N}_+)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Parę przykładów granic ciągów:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{dla } \ q>1 \vee (q=1 \wedge k<0) \\ 1, & \text{dla } \ q=1 \wedge k=0 \\ 0, & \text{dla } \ q<1 \vee (q=1 \wedge k>0) \end{cases}, \text{ gdzie } q \ge 0. \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e \tag{4}$$

Twierdzenie 5.15

Jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = g \implies \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g.$$

Uogólniona nierówność Bernoulliego 5.16

Klasyczną nierówność Bernoulliego można uogólnić do poniższej postaci.

$$(1+x)^r \geq 1+rx, \quad \text{dla } \ x > -1 \ \wedge \ r \geq 1$$
$$(1+x)^r \leq 1+rx, \quad \text{dla } \ x > -1 \ \wedge \ r \in (0,1]$$

Twierdzenie 5.17

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciagiem liczb rzeczywistych i $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ oraz $g \in \mathbb{R}$, wówczas

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n \log_c\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\ln c}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_c(1+a_n)}{a_n} = \frac{1}{\ln c}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \implies \lim\limits_{n\to\infty} log_c a_n = \log_c g$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_c a_n - \log_c g}{a_n - g} = \frac{1}{g \ln c}$.

Szacowanie funkcji eksponencjalnej i logarytmicznej 5.18

I. $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1+x \leq e^x \ \wedge \ (\forall x < 1)\ e^x \leq \frac{1}{1-x}$

II. $(\forall x > -1)\ \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

Uwaga! Pierwsza z nierówności I. została udowodniona tylko dla $x \geq -1$, jednak można dokonać rozszerzenia jej stosowalności. Szacowania II. wcale nie pojawiły się na wykładzie, aczkolwiek uznałem je za przydatne. Dowody powyższych własności można znaleźć tutaj na siódmej i dziesiątej stronie.

Twierdzenie 5.19

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych i $c > 0$, wówczas

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \neq 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \neq 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^{a_n}-1}{a_n} = \ln c$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \neq 0 \ \wedge \ p \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \wedge \ p > 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln a_n}{a_n^p} = 0$.

Na wykładzie własności (1) - (3) zostały udowodnione tylko dla ciągów o wyrazach dodatnich, jednakże są one stosowalne również w przypadku ciągów o wyrazach ujemnych.

Twierdzenie Stolza 5.20

Załóżmy, że ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczny oraz $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \neq 0$. Jeśli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ i istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g,$$

a ponadto zachodzi jeden z następujących warunków:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty,$

to wówczas ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ jest zbieżny, a ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

Granica g nie musi być skończona. Na wykładzie pojawił się tylko warunek (ii), dowód zbieżności w przypadku (i) można odszukać w skrypcie Strzeleckiego (na str. 33) lub na angielskiej wiki.

Twierdzenie 5.21

$$\begin{aligned} c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \ \wedge\ d_1, \ldots, d_n > 0 \implies \frac{c_1 + \cdots + c_n}{d_1 + \cdots + d_n} &\leq \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \frac{c_k}{d_k} \\ &\geq \min_{k\in\{1,\ldots,n\}} \frac{c_k}{d_k} \end{aligned}$$

Sekcja 6

Przestrzenie metryczne

W sekcji tej X będzie oznaczać dowolny niepusty zbiór, chyba że w danym ustępie zaznaczę, że jest inaczej. Również pisząc o kuli, będę miał na myśli kulę otwartą. Wszelkie niezdefiniowane n będzie w domyśle liczbą naturalną.

Definicja 6.1: Metryka i przestrzeń metryczna

Metryką na zbiorze X nazywa się funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$, spełniającą następujące warunki:

(1) $\forall_{x,y \in X} \;\; d(x,y) \geq 0$,

(2) $\forall_{x,y \in X} \;\; d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $\forall_{x,y \in X} \;\; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(4) $\forall_{x,y,z \in X} \;\; d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

Parę (X,d), czyli zbiór X z wyróżnioną metryką d nazywamy **przestrzenią metryczną**.

Warunek (1) jest tak na prawdę zbędny, bowiem wynika on z trzech pozostałych:

$$0 \overset{(3)}{=} d(x,x) \overset{(4)}{\leq} d(x,y) + d(y,x) \overset{(2)}{=} 2d(x,y) \implies 0 \leq d(x,y).$$

Przykłady metryk

(1) *metryka dyskretna,* $\quad d_d : X^7 \times X \to \{0,1\}$

$$\forall_{x,y \in X} \;\; d_d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \neq y \\ 0, & \text{gdy } x = y \end{cases}$$

(2) *metryka miejska (taksówkowa),* $\quad d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \;\; d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

(3) *metryka euklidesowa,* $\quad d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \;\; d_E(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

(4) *metryka d_p (l_p),* $\quad d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \forall_{p \geq 1} \;\; d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(5) *metryka maksimum (Czebyszewa, szachowa),* $\quad d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \;\; d_\infty(x,y) = \max_{k=\{1,\ldots,n\}} |x_k - y_k|$$

[7] X to dowolny niepusty zbiór.

(6) *metryka supremum*, $d_{sup} : \mathcal{B}(X,Y)^8 \times \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}$

$$\forall_{f,g\in\mathcal{B}(X,Y)}\ \ d_{sup} = \sup_{x\in X} d_y\left(f(x), g(x)\right)$$

(a) *Przypadek szczególny.*[9] Niech $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ będzie zbiorem funkcji ograniczonych ze zbioru X do zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, wyposażonego w metrykę euklidesową. Metryka supremum przyjmuje wówczas postać

$$\forall_{f,g\in\mathcal{B}(X,\mathbb{R})}\ \ d_{sup} = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

(7) *metryka rzymska*, $d_r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^2}\ \ d_r(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, & \text{gdy punkty } x,\, y \text{ i } (0,0) \text{ leżą na jednej prostej} \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}, & \text{gdy punkty } x,\, y \text{ i } (0,0) \text{ nie leżą na jednej prostej} \end{cases}$$

Przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_p)$ bywa oznaczana jako ℓ_n^p.

Definicja 6.2: Kula otwarta

Kulą otwartą w przestrzeni metrycznej (X,d) o środku w punkcie $a \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}.$$

Definicja 6.3: Otoczenie

Otoczeniem punktu a w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy zbiór $Y \subset X$, jeżeli

$$\exists_{r>0}\ \ B(a,r) \subset Y.$$

Definicja 6.4: Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ jest zbieżny do g w przestrzeni metrycznej (X,d) wtedy i tylko wtedy, gdy

(1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, g) = 0$,

(2) $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N>0}\ \forall_{n>N}\ \ d(x_n,g) < \varepsilon$,

(3) $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N>0}\ \forall_{n>N}\ \ x_n \in B(g,\varepsilon)$,

(4) dla dowolnego otoczenia U punktu g tylko skończona liczba elementów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ leży poza U (prawie wszystkie $x_n \in U$).

Powyższe warunki są sobie równoważne. Jeżeli ciąg spełnia jeden z nich, to spełnia wszystkie na raz.
Uwaga! W ogólnym przypadku (dla ogólnej przesterzeni metrycznej (X,d)) nie ma czegoś takiego jak rozbieżność do $\pm\infty$.

[8] $\mathcal{B}(X,Y)$ to zbiór funkcji ograniczonych ze zbioru X do przestrzeni metrycznej (Y, d_y).
[9] Na wykładzie pojawił się tylko przypadek szczególny. Ogólna definicja jest moim dodatkiem.

Definicja 6.5: Ciąg ograniczony i nieograniczony

Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ nazywamy **ograniczonym** w przestrzeni metrycznej (X,d), jeżeli

$$\exists_{a\in X}\,\exists_{r>0}\,\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ x_n \in B(a,r).$$

W przeciwnym razie ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **nieograniczonym**.

Definicja 6.6: Ciąg Cauchy'ego

Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ nazywamy **ciągiem Cauchy'ego** w przestrzeni metrycznej (X,d), jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{M\in\mathbb{N}}\,\forall_{n\geq M}\ \ d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Należy zwrócić uwagę, że istnieją przestrzenie metryczne, w których nie wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne. Natomiast wszystkie ciągi zbieżne są ciągami Cauchy'ego.

Definicja 6.7: Przestrzeń zupełna

Przestrzeń metryczna (X,d) jest **zupełna**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Definicja 6.8: Wnętrze

Wnętrzem zbioru $A \subset X$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy zbiór punktów, dla których A jest otoczeniem,

$$\operatorname{int} A = \{x \in A : \exists_{r>0}\ \ B(x,r) \subset A\}.$$

Definicja 6.9: Zbiór otwarty

Zbiór $A \subset X$ nazywamy **otwartym** w przestrzeni metrycznej (X,d), jeżeli jest otoczeniem każdego swojego punktu, czyli

$$\forall_{x\in A}\,\exists_{r>0}\ \ B(x,r) \subset A.$$

Zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \operatorname{int} A$.

Definicja 6.10: Domknięcie i zbiór domknięty

Domknięciem zbioru $A \subset X$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy zbiór

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall_{r>0}\ \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

A jest **zbiorem domkniętym**, gdy $A = \overline{A}$.

Domknięcie i wnętrze zbioru A alternatywnie oznaczamy jako $cl\ A$ oraz $\mathring{A}$.

Definicja 6.11: Brzeg

Brzegiem zbioru $A \subset X$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy zbiór

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

Twierdzenie 6.1

Zbiór $A \subset X$ jest domknięty w przestrzeni metrycznej (X, d) *wtedy i tylko wtedy, gdy* każdy zbieżny ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ posiada granicę $g \in A$.

$$A = \overline{A} \iff \forall_{a\in A^{\mathbb{N}}} \exists_{g\in X} \lim_{n\to\infty} d(a_n, g) = 0 \implies g \in A$$

Twierdzenie 6.2

Zbiór $A \subset X$ jest otwarty w przestrzeni metrycznej (X, d) *wtedy i tylko wtedy, gdy* zbiór $X \setminus A$ jest domknięty.

$$A = \operatorname{int} A \iff X \setminus A = \operatorname{cl}(X \setminus A)$$

Twierdzenie 6.3

(1) Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

(2) Przecięcie skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

(3) Przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

(4) Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Definicja 6.12: Pokrycie i pokrycie otwarte

Rodzinę zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$, zawartą w przestrzeni X, nazywamy **pokryciem** zbioru $A \subset X$, jeśli

$$A = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Mówimy, że pokrycie $\{U_i\}_{i\in I}$ jest **pokryciem otwartym**, jeśli $\forall_{i\in I}\ U_i = \operatorname{int} U_i$.

Definicja 6.13: Podpokrycie

Niech $\{U_i\}_{i\in I}$, zawarty w przestrzeni X, będzie pokryciem zbioru A oraz $K \subset I$. Jeśli $\{U_k\}_{k\in K}$ jest wówczas pokryciem A, to $\{U_k\}_{k\in K}$ nazywamy **podpokryciem** pokrycia $\{U_i\}_{i\in I}$.

Definicja 6.14: Zbiór zwarty

Zbiór A, zawarty w przestrzeni X, nazywamy **zwartym**, jeśli z każdego pokrycia otwartego zbioru A można wybrać podpokrycie skończone.

Twierdzenie 6.4

Zbiór A, zawarty w przestrzeni X, jest zwarty *wtedy i tylko wtedy, gdy* zbiór A jest *ciągowo zwarty*, czyli gdy z każdego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in K\subset\mathbb{N}}$ zbieżny w A.

Twierdzenie 6.5

Zbiór A, zawarty w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, d_E)$, jest zwarty *wtedy i tylko wtedy, gdy* A jest domknięty i ograniczony.

Definicja 6.15: Zbiór gęsty

Zbiór $A \subset X$ nazywamy **gęstym** w przestrzeni metrycznej (X, d), jesli $\overline{A} = X$.

Definicja 6.16: Zbiór spójny i niespójny

Zbiór A, zawarty w przestrzeni X, nazywamy **niespójnym**, jeśli

$$\exists_{B_1, B_2 \neq \emptyset} \left(B_1 \cup B_2 = A \ \wedge \ \overline{B_1} \cap B_2 = \emptyset \ \wedge \ B_1 \cap \overline{B_2} = \emptyset \right).$$

W przeciwnym przypadku zbiór A jest **spójny**, czyli gdy

$$\forall_{B_1, B_2 \neq \emptyset} \left(B_1 \cup B_2 = A \implies \overline{B_1} \cap B_2 \neq \emptyset \ \vee \ B_1 \cap \overline{B_2} \neq \emptyset \right).$$

Definicja 6.17: Równoważność metryk

Niech X będzie niepustym zbiorem, a d_1 i d_2 metrykami na nim. Mówimy, że metryki d_1 i d_2 są **równoważne**, gdy

I. $\forall_{x,y \in X} \forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} \ (d_1(x,y) < \varepsilon_1 \implies d_2(x,y) < \delta) \ \wedge \ (d_2(x,y) < \varepsilon_2 \implies d_1(x,y) < \delta)$,

II. $\forall_{x \in X} \forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} \ B_1(x, \varepsilon_1) \subset B_2(x, \delta) \ \wedge \ B_2(x, \varepsilon_2) \subset B_1(x, \delta)$.

Wymienione wyżej warunki I. i II. są równoważne, więc wystarczy wykazanie tylko jednego z nich.

Twierdzenie 6.6

Metryki d_p i d_∞ są sobie równoważne.[a]

[a]Patrz *Przykłady metryk*.

Jeżeli każda metryka d_p jest równoważna z każdą metryką d_∞, to z przechodniości relacji równoważności, wszystkie metryki d_p są sobie równoważne. Przykładowo metryka miejska (d_1) jest równoważna z euklidesową (d_2).

Twierdzenie 6.7

Dane są przestrzenie metryczne (X, d_1) i (X, d_2). Metryki d_1 i d_2 są *równoważne*, jeśli

$$\forall_{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X} \ \lim_{n \to \infty} d_1(x_n, g) = 0 \iff \lim_{n \to \infty} d_2(x_n, g) = 0,$$

tzn. dowolny ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach z X jest zbieżny do g w (X, d_1) wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiezny do g w (X, d_2).

Twierdzenie 6.8

Dana jest przestrzeń ℓ^p_N, wówczas

$$\forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset R^N} \quad \left(\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, g) = 0 \iff \forall_{i\in\{1,\dots,N\}} \quad \lim_{n\to\infty} x_{n,i} = g_i\right).$$

Wyrazy postaci a_i oznaczają i-tą współrzędną punktu $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$.

Sekcja 7

Granica i ciągłośc funkcji

Definicje i własności w sensie Cauchy'ego będą oznaczane poprzez (C), a Heinego za pomocą (H).

Definicja 7.1: Punkt skupienia

W przestrzeni metrycznej (X, d) punkt $p \in X$ jest **punktem skupienia** zbioru $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \overline{A \setminus \{p\}}$.

Alternatywnie punkt p jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego ciągu elementów zbiorów $A \setminus \{p\}$.

Definicja 7.2: Granica funkcji w punkcie

Dane są przestrzenie metryczne (X, d_X), (Y, d_Y). Niech $A \subset X$, $g \in Y$, $f : A \to Y$ i $p \in \overline{A}$. Mówimy, że funkcja f ma **granicę** g **w punkcie** (skupienia) p, jeśli

$$(C)\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in A\setminus\{p\}}\ \begin{aligned} d_X(p,x) < \delta &\implies d_Y(f(x), g) < \varepsilon, \\ x \in B_X(p,\delta) &\implies f(x) \in B_Y(g,\varepsilon), \end{aligned}$$

$$(H)\ \forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A\setminus\{p\}}\ x_n \xrightarrow{d_X} p \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g.$$

Wyrażenie $x_n \xrightarrow{d_X} p$ oznacza zbieżność x_n do p w przestrzeni metrycznej (X, d_X). Wprowadziłem pojęcie punktu skupienia, które się nie pojawiło na wykładzie, by móc uogólnić definicję granicy funkcji w punkcie dla przypadku, gdy D_f jest podzbiorem X.

Definicja 7.3: Granica jednostronna funkcji w punkcie

Dana jest przestrzeń metryczna (Y, d_Y), zbiór $X \subset \mathbb{R}$ oraz funkcja $f : X \to Y$. Mówimy, że $g \in Y$ jest **granicą lewostronną (prawostronną)** funkcji f w punkcie (skupienia) $a \in \overline{X}$, jeżeli

$$(\text{C})\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in(a-\delta,\ a)\cap X}\ f(x) \in B_Y(g,\varepsilon)\quad \left(\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in(a,\ a+\delta)}\ f(x) \in B_Y(g,\varepsilon)\right),$$

$$(\text{H})\ \forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\setminus[a,+\infty)}\ x_n \to p \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g \quad \left(\forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\setminus(-\infty,a]}\ x_n \to p \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g\right).$$

Definicja 7.4: Granica funkcji w $+\infty$ i $-\infty$

Dana jest przestrzeń metryczna (Y, d_Y) oraz funkcja $f : \mathbb{R} \supset X \to Y$. Mówimy, że $g \in Y$ jest **granicą funkcji** f **w** $+\infty$ $(-\infty)$, jeżeli

$$(\text{C})\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{r\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in X\setminus(-\infty,r]}\ f(x) \in B_Y(g,\varepsilon)\quad \left(\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{r\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in X\setminus[r,+\infty)}\ f(x) \in B_Y(g,\varepsilon)\right),$$

$$(\text{H})\ \forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X}\ x_n \to +\infty \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g \quad \left(\forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X}\ x_n \to -\infty \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} g\right).$$

Definicja 7.5: Zbieżność od dołu/góry

Dana jest przestrzeń metryczna (X, d_X) oraz funkcja $f : X \supset A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f zbiega do granicy $g \in \mathbb{R}$ w punkcie $a \in \overline{A}$ **od dołu (od góry)**, jeżeli

(C) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in B_X(a,\delta) \cap A \setminus \{p\}} \; f(x) \in (g-\varepsilon, g),$
$(f(x) \in (g, g+\varepsilon)),$

(H) $\forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{p\}} \; x_n \xrightarrow{d_X} a \implies f(x_n) \to g \wedge dddn \; f(x_n) < g,$
$(f(x_n) > g).$

Definicja 7.6: Granica niewłaściwa w punkcie

Dana jest przestrzeń metryczna (X, d_X) oraz funkcja $f : X \supset A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f **rozbiega do $+\infty$ $(-\infty)$ w punkcie** $a \in \overline{A}$, jeśli

(C) $\forall_{r\in\mathbb{R}} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in B_X(a,\delta) \cap A \setminus \{p\}} \; f(x) > r,$
$(f(x) < r),$

(H) $\forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{p\}} \; x_n \xrightarrow{d_X} a \implies f(x_n) \to +\infty \; (-\infty).$

Przykłady granic funkcji

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \tag{1}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \tag{4}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{5}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x - 1} = p \tag{6}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{7}$$

Definicja 7.7: Ciągłość funkcji

Dane są przestrzenie metryczne (X, d_X), (Y, d_Y), funkcja $f : X \supset A \to Y$ oraz $a \in A$. Mówimy, że funkcja f jest **ciągła w punkcie** a, jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, czyli

(C) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in A} \; d_X(x,a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon,$

(H) $\forall_{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A} \; x_n \xrightarrow{d_X} a \implies f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(a).$

Funkcję f nazywamy **ciągłą**, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x \in A$.

Definicja 7.8: Ciągłość jednostajna

Dane są przestrzenie metryczne (X, d_X), (Y, d_Y) oraz funkcja $f : X \to Y$. Mówimy, że funkcja f jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x_1,x_2\in A}\quad d_X(x_1,x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Twierdzenie 7.1

Każda funkcja jednostajnie ciągła jest również ciągła.

Jednakże implikacja w drugą stronę już nie zachodzi.

Twierdzenie 7.2

Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 7.3

Jeśli (X, d_X) jest przestrzenią zupełną, a $f : X \supset A \to Y$ funkcją ciągłą, to wówczas istnieje funkcja ciągła $g : \overline{A} \to Y$, taka że $g|_A = f$.

Twierdzenie 7.4

Obraz zbioru zwartego pod działaniem funkcji ciągłej jest zbiorem zwartym[a].

[a] zatem również i domkniętym

Można również powiedzieć, że ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty.

Twierdzenie 7.5

Niech (X, d_X), (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ funkcją ciągłą, wówczas

$$Y \supset A = \operatorname{int} A \implies f^{-1}(A) = \operatorname{int} f^{-1}(A).$$

Twierdzenie o „arytmetyce" funkcji ciągłych 7.6

(1) Jeśli funkcje f, $g : X \to Y$ są ciągłe w punkcie $p \in X$, to $f \pm g$, $f \cdot g$ są ciągłe w p. Ponadto jeżeli $\forall_{x\in X}\ g(x) \neq 0$, to f/g jest określona na X i ciągła w p.

(2) Jeśli funkcja $f : A \to Y$ jest ciągła w $p \in A$, a $g : B \to Y$, gdzie $f(A) \subset B$, jest ciągła w $f(p)$, to złożenie $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie p.

Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów 7.7

Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną, a $f : X \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Jeśli $A \neq \emptyset$ oraz $A = \overline{A}$, to $\inf f(A), \sup f(A) \in f(A)$, czyli

$$\exists_{a_1,a_2\in A}\quad f(a_1) = \inf f(A)\ \wedge\ f(a_2) = \sup f(A).$$

Przypadek szczególny: Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\exists_{c,d\in[a,b]} \quad f(c) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \ \wedge \ f(d) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Twierdzenie 7.8

Ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny.

Twierdzenie Darboux o wartości pośredniej 7.9

Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną, a $f : X \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Jeśli $A \subset X$ jest zbiorem spójnym, to

$$\forall_{y_1,y_2\in f(A),\ y_1\le y_2} : \ [y_1, y_2] \subset f(A), \text{ czyli } \forall_{y\in R,\ y_1\le y\le y_2} \exists_{x\in A} \ y = f(x).$$

Przypadek szczególny: Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\forall_{y\in[min\{f(a),f(b)\},max\{f(a),f(b)\}]} \exists_{x\in[a,b]} \ y = f(x).$$

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej 7.10

Jeżeli funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna na przedziale $A \subset \mathbb{R}$, wówczas $f^{-1} : f(A) \to A$ jest również ciągła i ściśle monotoniczna.

Twierdzenie o granicy złożenia 7.11

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \ \wedge \ \lim_{y\to b} g(y) = c \implies \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

Sekcja 8

Pochodne

Definicja 8.1: Pochodna w punkcie

Niech $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu a (tzn. $\exists_{\varepsilon>0}\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$). Jeśli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

to nazywamy ją **pochodną** funkcji f **w punkcie** a.

Definicja 8.2: Funkcja pochodna

Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego zbioru $A \subset X$, to funkcję $f' : A \ni a \mapsto f'(a) \in R$ nazywamy **funkcją pochodną** lub **pochodną** funkcji f.

Definicja 8.3: Jednostronna pochodna w punkcie

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w lewostronnym (prawostronnym) otoczeniu punktu a (tzn. $\exists_{\varepsilon>0}\ (a-\varepsilon, a]\ \ ([a, a+\varepsilon))$. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right),$$

to nazywamy ją **pochodną lewostronną (prawostronną)** funkcji f w punkcie a i oznaczamy jako $f'_-(a)$ ($f'_+(a)$).

Twierdzenie 8.1

Pochodne jednostronne $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$ funkcji f w punkcie a istnieją oraz są sobie równe $f'_-(a) = f'_+(a) = g \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* pochodna funkcji f w punkcie a istnieje i jest równa g.

$$\exists_{f'_-(a),\ f'_+(a)}\ \ f'_-(a) = f'_+(a) = g \iff \exists_{f'(a)}\ \ f'(a) = g$$

Twierdzenie o arytmetycznych własnościach pochodnej 8.2

I. Jeśli $f, g : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $x \in X$, to

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,, \tag{1}$$
$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,. \tag{2}$$

II. Jeśli $f, g : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x \in X$ oraz $\forall_{x\in X}\ g(x) \neq 0$, to

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Pochodna jest operacją liniową

Twierdzenie 8.3

Jeśli funkcja ma pochodną w punkcie x, to jest również w nim ciągła.

Reguła łańcuchowa 8.4

Niech $g : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ i $f : \mathbb{R} \supset B \to \mathbb{R}$, gdzie $B \supset g(A)$. Załóżmy, że funkcja g jest określona w otoczeniu $a \in A$, a f w otoczeniu $g(a)$. Jeśli g jest różniczkowalna w punkcie a i f jest różniczkowalna w $g(a)$, to złożenie $f \circ g$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie a i ma pochodną

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g(a) \,.$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej 8.5

Niech $f : \mathbb{R} \supset A \to f(A) \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją różnowartościową, różniczkowalną w $a \in A$. Jeśli $f'(a) \neq 0$ i f^{-1} jest ciągła w $f(a)$, to f^{-1} jest różniczkowalna w $f(a)$ i zachodzi wzór

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Parę pochodnych n-tego rzędu:

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}, \tag{1}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Definicja 8.4: Ekstrema lokalne

Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ ma w $c \in X$ **maksimum (minimum) lokalne**, jeśli istnieje otoczenie $U \subset X$ punktu c takie, że

$$\forall_{x \in U} \quad f(x) \leq f(c)$$
$$(\quad \forall_{x \in U} \quad f(x) \geq f(c) \quad).$$

Definicja 8.5: Ekstrema lokalne właściwe

Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ ma w $c \in X$ **maksimum (minimum) lokalne właściwe**, jeśli istnieje otoczenie $U \subset X$ punktu c takie, że

$$\forall_{x \in U \setminus \{c\}} \quad f(x) < f(c)$$
$$\Big(\quad \forall_{x \in U \setminus \{c\}} \quad f(x) > f(c) \quad \Big).$$

Definicja 8.6: Ekstrema globalne

Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ ma w $c \in X$ **maksimum (minimum) globalne**, jeśli

$$\forall_{x \in X} \quad f(c) \geq f(x)$$
$$(\quad \forall_{x \in X} \quad f(c) \leq f(x) \quad).$$

Podobnie jak w przypadku ekstremów lokalnych, można definiować ekstrema globalne właściwe.

Twierdzenie 8.6

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $c \in (a, b)$ i ma w tym punkcie ekstremum, to pochodna $f'(c) = 0$.

Definicja 8.7: Punkt krytyczny

Niech $f : x \to Y$. Mówimy, że punkt $a \in X$ jest **punktem krytycznym** funkcji f, jeśli funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie a[a] albo jest w tym punkcie różniczkowalna i pochodna $f'(a) = 0$.

[a] Ta część definicji nie pojawiła się na wykładzie.

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na całej swej dziedzinie, to wszystkie punkty, w których f ma ekstrema są punktami krytycznymi. Jednakże odwrotna relacja już nie musi zachodzić.

Twierdzenie Rolle'a 8.7

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na (a, b), wówczas

$$f(a) = f(b) \implies \exists_{c\in(a,b)}\ f'(c) = 0.$$

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej 8.8

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na (a, b), wówczas

$$\exists_{c\in(a,b)}\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej 8.9

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi na przedziale (a, b), wówczas

$$\exists_{c\in(a,b)}\ (f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Jeśli $g'(c) \neq 0$ oraz $g(a) \neq g(b)$, to powyższe zdanie można zapisać w postaci

$$\exists_{c\in(a,b)}\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Warto zwrócić tutaj uwagę na wnioski wypływające z tego twierdzenia. Jeżeli $\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) = 0$, to funkcja f jest stała na przedziale (a, b). Po drugie, jeżeli $\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x) = g'(x)$, to istnieje takie $r \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x) + r$.

Twierdzenie 8.10

Niech funkcja f będzie różniczkowalna na (a,b), wówczas

$$\begin{aligned}
\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)>0 &\implies f \text{ jest ściśle rosnąca na } (a,b),\\
\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)<0 &\implies f \text{ jest ściśle malejąca na } (a,b),\\
\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\geq 0 &\implies f \text{ jest niemalejąca na } (a,b),\\
\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\leq 0 &\implies f \text{ jest nierosnąca na } (a,b).
\end{aligned}$$

Twierdzenie 8.11

Jeżeli funkcja f jest niemalejąca i różniczkowalna na (a,b), to $\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\geq 0$.
Jeżeli funkcja f jest nierosnąca i różniczkowalna na (a,b), to $\forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\leq 0$.

Twierdzenie 8.12

Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ oraz $c\in(a,b)$. Jeśli

1. $f'(c)>0\ \ (f'(c)<0)$,
2. f' istnieje na pewnym otoczeniu c i jest ciągła w c,

to na tym otoczeniu punktu c funkcja f jest ściśle rosnąca (malejąca).

Twierdzenie 8.13

Niech $f:\mathbb{R}\supset X\to\mathbb{R}$ oraz $c\in X$. Jeśli $f'(c)\neq 0$, f' istnieje na otoczeniu punktu c i jest na nim ciągła, to istnieje otoczenie punktu c, takie że $g:(c-\delta,c+\delta)\to f[(c-\delta,c+\delta)]$ jest bijekcją.

Definicja 8.8: Homomorfizm

Ciągłą bijekcję, której odwrotność również jest ciągła, nazywamy **homomorfizmem**.

Definicja 8.9: Zbiory homomorficzne

Zbiory pomiędzy, którymi istnieje homomorfizm nazywamy **homomorficznymi**.

Reguła de l'Hospitala 8.14

WERSJA I

Niech f, g będą funkcjami rzeczywistymi, różniczkowalnymi na (a, b) i $\forall_{x\in(a,b)}\ g'(x) \neq 0$, gdzie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ oraz

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a^+} g(x) = 0\right) \vee \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty\right), \text{ wówczas}$$
$$\left(\exists_{g\in\overline{\mathbb{R}}}\ \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g\right) \implies \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = g.$$

Analogiczne twierdzenie jest też prawdziwe dla granic lewostronnych i obustronnych.

WERSJA II

Niech f, g będą funkcjami rzeczywistymi, różniczkowalnymi na $(c, +\infty)$ i $\forall_{x\in(c,+\infty)}\ g'(x) \neq 0$, gdzie $-\infty \leq c < +\infty$ oraz

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\right) \vee \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty\right), \text{ wówczas}$$
$$\left(\exists_{g\in\overline{\mathbb{R}}}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g\right) \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g.$$

Analogiczne twierdzenie jest też prawdziwe dla granic gdy $x \to -\infty$.

Zbiór $\overline{\mathbb{R}}$ definiujemy jako $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Chcąc zastosować regułę de l'Hospitala do funkcji postaci $f(x)^{g(x)}$, można je przedstawić jako $e^{g(x)\ln f(x)}$.

Wzór Leibniza 8.15

Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi, posiadającymi pochodne do rzędu n włącznie. Wówczas pochodna n-tego rzędu iloczynu $f \cdot g$ wyraża się wzorem:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Definicja 8.10: Funkcja wypukła

Niech $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest przedziałem liczb rzeczywistych. Funkcję f nazywamy **wypukłą** na przedziale A, jeśli

$$\forall_{x_1,x_2\in A}\ \forall_{\theta\in[0,1]}\ f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2).$$

Definicja 8.10: Funkcja wklęsła

Niech $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest przedziałem liczb rzeczywistych. Funkcję f nazywamy **wklęsłą** na przedziale A, jeśli

$$\forall_{x_1,x_2\in A}\ \forall_{\theta\in[0,1]}\ f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2).$$

Zazwyczaj w definiowaniu funkcji wypukłej i wklęsłej korzysta się z pojęcia zbioru wypukłego, jednak na wykładzie otrzymaliśmy węższą definicję. Przedziały liczb rzeczywistych są zbiorami wypukłymi.

Twierdzenie 8.16

Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest wypukła (wklęsła) na zbiorze liczb rzeczywistych A *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2}\ \forall_{x_1,\dots,x_n\in A}\ \forall_{\theta_1,\dots,\theta_2\in[0,1]}\ f\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\theta_i f(x_i)$$
$$\left(\forall_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2}\ \forall_{x_1,\dots,x_n\in A}\ \forall_{\theta_1,\dots,\theta_2\in[0,1]}\ f\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\theta_i f(x_i)\right).$$

Twierdzenie 8.17

Dana jest funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest przedziałem liczb rzeczywistych. Niech $\alpha_{ij} = \frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$. Mówimy, że f jest wypukła *wtedy i tylko wtedy, gdy*

($\Leftrightarrow$) $\forall_{x_1,x_2,x_3\in A,\, x_1<x_2<x_3}\ \alpha_{21} \leq \alpha_{32}$,

($\Leftrightarrow$) $\forall_{x_1,x_2,x_3\in A,\, x_1<x_2<x_3}\ \alpha_{31} \leq \alpha_{32}$,

($\Leftrightarrow$) $\forall_{x_1,x_2,x_3\in A,\, x_1<x_2<x_3}\ \alpha_{21} \leq \alpha_{31}$.

Wnioski

1. Jeżeli funkcja f jest wypukła na (a,b), to $\forall_{x\in(a,b)}$ istnieją pochodne jednostronne, ponadto $f'_+(x) \geq f'_-(x)$.
2. Funkcja wypukła na przedziale otwartym jest ciągła.
3. Funkcja f jest różniczkowalna i wypukła na przedziale (a,b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* jej pochodna f' jest niemalejąca.
4. Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na (a,b), to f jest wypukła na (a,b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall_{x\in(a,b)\ f''(x)\geq 0}$.

Wzór Taylora z resztą w postaci Peano 8.18

Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$. Jeśli f ma $(n-1)$ pochodnych na (a,b) i n-tą pochodną w punkcie x_0, to

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x,x_0), \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^i} = 0.$$

Zamiast podawać warunek po przecinku, pisze się czasem $R_n(x,x_0) = o(x^i)$ dla $x \to 0$. Symbol ten to *o małe*; napis $f(x) = o(g(x))$ dla $x \to a$ oznacza, że $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$. Wzór Taylora z resztą w postaci Peano dla $x_0 = 0$ nazywamy *wzorem Maclaurina*.

Wzór Taylora z resztą w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a 8.19

Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ma w przedziale (a,b) pochodne rzędu $(n+1)$ włącznie, wówczas

$$\forall_{x,x_0\in(a,b)}\ \exists_{\theta\in(0,1)}\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}_{\texttt{z resztą w postaci Lagrange'a}},$$

$$\forall_{x,x_0\in(a,b)}\ \exists_{\theta\in(0,1)}\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}_{\texttt{z resztą w postaci Cauchy'ego}}.$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$
$\operatorname{arcsinh} x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{arccosh} x$	$1/(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x})$
x^x	$x^x(\ln x + 1)$
$\lvert h(x)\rvert$	$\operatorname{sgn}(h(x))\, h'(x)$