

Sekcja 1

Relacje

Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory A i B . **Relacją (dwuargumentową) R** między elementami zbioru A a elementami zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ ($R \subset A \times B$).

Mówimy, że elementy $a \in A$ oraz $b \in B$ są ze sobą w relacji R (ozn. $a \sim b$ lub aRb), jeśli $\langle a, b \rangle \in R$.

Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze A . Mówimy, że:

- (1) R jest **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A) aRa$.
- (2) R jest **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A) \neg aRa$.
- (3) R jest **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
- (4) R jest **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
- (5) R jest **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.
- (6) R jest **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A) \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$.
- (7) R jest **spójna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$.

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech $R \subset A \times A$. Gdy relacja R jest **zwrotna, symetryczna i przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A . **Klasą równoważności (abstrakcji) elementu $a \in A$** względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności R , czyli zbiór

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji R .

Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A . Wówczas mamy:

- (i) $(\forall a \in A) a \in [a]_R \leftarrow$ ze zwrotności R
- (ii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$ z symetryczności R
- (iii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację \leq na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym słabym (nieostrym)** na zbiorze A , jeśli jest **zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna**.

Relację $<$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym ostrym** na zbiorze A , jeśli jest **przeciwzwrotna i przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

Dowód. Załóżmy, że relacja $<$ na zbiorze A jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy $a, b \in A$, wówczas z przechodniości

$$a < b \wedge b < a \Rightarrow a < a \Leftrightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a.$$

Jednak z przeciwzwrotności $<$ wiemy, iż zdanie $a < a$ jest fałszywe dla dowolnego a ze zbioru A , dlatego też

$$\neg(a < b \wedge b < a) \vee a < a \Rightarrow \neg(a < b \wedge b < a) \Leftrightarrow \neg(a < b) \vee \neg(b < a) \Leftrightarrow (a < b \Rightarrow \neg(b < a)).$$

□

Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy \leq (lub $<$) na zbiorze A nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze A , jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco: $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a)$.

Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór A z porządkiem częściowym \leq . Niech $B \subset A$ i $c \in A$. Mówimy, że:

- I. c jest **ograniczeniem górnym** zbioru B , jeśli $(\forall b \in B) b \leq c$.
- II. c jest **ograniczeniem dolnym** zbioru B , jeśli $(\forall b \in B) c \leq b$.
- III. c jest **kresem górnym** (ozn. $\sup A$) zbioru B , jeśli:
 - (a) jest ograniczeniem górnym.
 - (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego c' zbioru B zachodzi $c \leq c'$.
- IV. c jest **kresem dolnym** (ozn. $\inf A$) zbioru B , jeśli:
 - (a) jest ograniczeniem dolnym.
 - (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego c' zbioru B zachodzi $c' \leq c$.
- V. c jest elementem **maksymalnym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) c < b$.
- VI. c jest elementem **największym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B) b \leq c$.
- VII. c jest elementem **minimalnym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B) b < c$.
- VIII. c jest elementem **najmniejszym** zbioru B , jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B) c \leq b$.

Powyższe pojęcia¹ na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru A , ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto

¹Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Zapewne dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane [diagramy Hassego](#).

Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje \leq i $<$ w zbiorze A . Jeśli spełniają one następujące warunki:

$$(a) (\forall a, b \in A)(a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b)$$

$$(b) (\forall a, b \in A)(a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b),$$

wówczas \leq jest porządkiem słabym, wtedy i tylko wtedy gdy $<$ jest porządkiem ostrym.

Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech $R \subset A \times B$. **Relacją odwrotną** R^{-1} do relacji R nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{ \langle a, b \rangle \in A \times B : \langle b, a \rangle \in R \}.$$

Innymi słowy $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$.

Sekcja 2

Funkcje

Definicja 2.1: Funkcja

Relację f między elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \langle x, y \rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B) \langle x, y \rangle \in f \wedge ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

- **Dziedziną** (ozn. $\text{dom}(f)$ lub D_f) funkcji f nazywamy zbiór A .
- **Przeciwdziedziną** (ozn. Cl_f) funkcji f nazywamy zbiór B .
- **Zbiorem wartości** (ozn. $\text{rng}(f)$ lub R_f) funkcji f nazywamy zbiór $R_f = \{y \in B : (\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f\} \subset B$.

Definicja 2.2: Obraz i przeciwobraz

Niech $f : A \rightarrow B$ oraz $C \subset A$ i $D \subset B$.

- (1) **Obrazem** zbioru C względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f[C] = \{y \in B : (\exists x \in C) y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}.$$

- (2) **Przeciwobrazem** zbioru D względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Supremum funkcji f na zbiorze C $\sup_{x \in C} f(x)$ jest kresem górnym obrazu zbioru C względem niej. Analogicznie definiujemy $\inf_{x \in C} f(x)$, $\max_{x \in C} f(x)$ i $\min_{x \in C} f(x)$.

Definicja 2.3: Injekcja

Relację funkcyjną $f \subset A \times B$ nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie } \\ (\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y \rangle \in f \wedge \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definicja 2.4: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna $f \subset A \times B$ jest ze zbioru A **na** zbiór B , jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A) \langle x, y \rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

Definicja 2.5: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

Definicja 2.6: Funkcja odwrotna

Jeśli $f : A \rightarrow B$ jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do f jest funkcja $f^{-1} : B \rightarrow A$, taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x \rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f)$$

Twierdzenie 2.1

- (1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
- (2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

Definicja 2.7: Złożenie Funkcji

WERSJA I

Niech $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ (wystarczy nawet założyć, że $g : B_1 \rightarrow C$, jeśli $B \subset B_1$) i $x \in A$. **Złożeniem funkcji** f z funkcją g nazywamy funkcję $g \circ f : A \rightarrow C$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

WERSJA II

Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną wzorem

$$g \circ f = \{ \langle x, z \rangle \in D_f \times R_g : \exists y [\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g] \}.$$

Wyrażenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C) \langle x, z \rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g).$$

Zauważmy różnicę między tymi dwiema wersjami ² definicji złożenia funkcji. Pierwsza, częściej spotykana, zakłada że $R_f \subset D_g$, skąd wynika, że $D_{g \circ f} = D_f$. Natomiast według drugiej definicji, złożenie $g \circ f$ funkcji f i g ma następujące własności.

- (a) $D_{g \circ f} = \{ x \in D_f : f(x) \in D_g \}$,
- (b) $(\forall x \in D_{g \circ f}) (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji f, g, h zachodzi równość $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Definicja 2.8: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru A możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze A (identyczność na zbiorze A) następująco:

$$id_A : A \rightarrow A, \quad (\forall x \in A) id_A(x) = x.$$

²Tylko wersja pierwsza pojawiła się na wykładzie. Ta druga jest tylko moim dodatkiem. Podaję ją tutaj, bo chociaż nie pojawiła się w czasie wykładu, to posługiwaliśmy się jej wyróżniającą własnością na ćwiczeniach.

Twierdzenie 2.3

Jeśli $f : A \rightarrow B$ i $f^{-1} : B \rightarrow A$, to $f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$ jest identycznością na zbiorze A .

Definicja 2.9: Obcięcie i przedłużenie funkcji

Niech $f : A \rightarrow B$.

- (1) Niech $C \subset X$. **Obcięciem funkcji** f do zbioru C nazywamy funkcję $f|_C : C \rightarrow B$,
 $(f|_C)(x) = f(x)$.
- (2) Funkcję $g : C \rightarrow B$ nazywamy **przedłużeniem funkcji** f , jeśli $A \subset C$ oraz $(\forall x \in A) f(x) = g(x)$.

Zwróćmy uwagę, że daną funkcję f można przedłużyć na dany właściwy nadzbiór jej dziedziny na różne sposoby. Zauważmy też, że funkcja jest zawsze przedłużeniem swojego obcięcia.

Sekcja 3

Równoliczność

Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory A i B są **równoliczne** (ozn. $|A| = |B|$, $A \sim B$), gdy istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$.

Równoliczność ma własności relacji równoważności (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru $\mathcal{P}(U)$ ³. Jeśli $A, B \in \mathcal{P}(U)$ i R będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż $|A| = |B|$ oznacza, że $[A]_R = [B]_R$.

Definicja 3.2: Zbiór skończony i nieskończony

O zbiorze A mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci $\{1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Piszemy wówczas, że $|A| = n$. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy **nieskończonym**.

Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi \mathbb{N} . Piszemy wówczas, że $|A| = \aleph_0$.

Zbiór nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym. $|\mathbb{R}|$ oznaczamy jako c lub 2^{\aleph_0} i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy \mathbb{N} .

³ $\mathcal{P}(U)$ to zbiór potęgowy pewnego zbioru U , czyli zbiór wszystkich podzbiorów U . Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedzina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.

Sekcja 4

Liczby rzeczywiste

Dany jest zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} z określonymi działaniami $+$ i \cdot oraz porządkiem liniowym \leq . Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych podzielimy na trzy kategorie: aksjomaty ciała przemennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości⁴.

Aksjomaty ciała przemennego

- (1) **Przemienność dodawania** ($\forall a, b \in \mathbb{R}$) $a + b = b + a$.
- (2) **Łączność dodawania** ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- (3) **Charakteryzacja zera** ($\exists 0 \in \mathbb{R}$) ($\forall a \in \mathbb{R}$) $a + 0 = a$.
- (4) **Istnienie elementów przeciwnych** ($\forall a \in \mathbb{R}$) ($\exists -a \in \mathbb{R}$) $a + (-a) = 0$.
- (5) **Przemienność mnożenia** ($\forall a, b \in \mathbb{R}$) $a \cdot b = b \cdot a$.
- (6) **Łączność mnożenia** ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- (7) **Charakteryzacja jedynki** ($\exists 1 \in \mathbb{R}$) ($\forall a \in \mathbb{R}$) $a \cdot 1 = a$.
- (8) **Istnienie elementów odwrotnych** ($\forall a \in \mathbb{R}$) ($\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$) $a \cdot a^{-1} = 1$.
- (9) **Rozdzielność mnożenia względem dodawania** ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Aksjomaty porządku

- (1) **Prawo trichotomii**⁵ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$) zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

- (2) **Przechodność** ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$) ($a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$).

- (3) **Związki nierówności z działaniami**

- (a) ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$) ($a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$);
- (b) ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$) ($a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$).

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $M = \sup A \in \mathbb{R}$.

⁴Aksjomaty przepisałem ze skryptu Strzeleckiego, ponieważ były tam zapisane w trochę bardziej eleganckiej postaci.

⁵Aksjomat ten uwzględniamy, gdy przyjmujemy $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, na wykładzie natomiast przyjęliśmy $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Twierdzenie 4.1: Aksjomat Archimedesesa

Dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a i b istnieje liczba naturalna n , taka że $a < nb$.

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N}) a < nb$$

Twierdzenie to, choć bywa tak zwyczajowo nazywane, na prawdę aksjomatem w arytmetyce nie jest, bo wynika z innych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych.

Definicja 4.1: Przekrój Dedekinda

Podział zbioru liczb wymiennych na parę zbiorów $\langle A, B \rangle$, spełniające warunki^a:

- (1) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$,
- (2) $A \cup B = \mathbb{Q}$,
- (3) $A \cap B = \emptyset$
- (4) $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$.

nazywamy **przekrojem Dedekinda** zbioru \mathbb{Q} . Zbiór A nazywany jest **klasą dolną** przekroju, a zbiór B **klasą górną**.

^aPodane warunki różnią się swoją postacią, tym co były przedstawione na wykładzie, niemniej jednak są im równoważne.

Przekrój Dedekinda $\langle A, B \rangle$ zdefiniowany w taki sposób może mieć jedną z trzech następujących postaci, w której:

1. w zbiorze A istnieje element największy,
2. w zbiorze B istnieje element najmniejszy,
3. w zbiorze A nie istnieje element największy i w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy.

W trzecim przypadku przekrój wyznacza tzw. *lukę*. Aksjomat ciągłości w ujęciu przekrojowym, mówi o tym, że żaden z przekrojów Dedekinda zbioru \mathbb{R} nie wyznacza luki.

Przekroje typu 1 i 2 nazywamy *liczbami rzeczywistymi wymiennymi*. Dwa przekroje typu 1 i 2 mogą wyznaczać tę samą liczbę wymienną. Relację równoważności przekrojów zdefiniujemy poniżej. Natomiast przekrój $\langle A, B \rangle$ wyznaczający lukę nazywamy *liczbą rzeczywistą niewymienną*.

Zdefiniujmy relację równoważności R przekrojów Dedekinda:

$$\langle A_1, B_1 \rangle R \langle A_2, B_2 \rangle \Leftrightarrow A_1 = A_2 \vee \exists \max A_1, \min B_2 (\max A_1 = \min B_2) \vee \exists \max A_2, \min B_1 (\max A_2 = \min B_1).$$

Nasze rozważania doprowadzają nas do **konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda**⁶.

$$\mathbb{R} := \{ \langle A, B \rangle : \text{przekroje Dedekinda} \} /_R$$

⁶W tym miejscu notatki z liczb rzeczywistych na razie zakańczam. Dalsze wyprowadzenia operacji na liczbach rzeczywistych odkładam na czas bliższy terminowi egzaminu ustnego. Na kolosie zagadnienia te raczej nie będą potrzebne.

Sekcja 5

Ciągi

Definicja 5.1: Ciąg nieskończony

Ciągiem (nieskończonym) o elementach w zbiorze A nazywamy dowolną funkcję $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ (ozn. a_n , $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Definicja 5.2: Podciąg

Jeżeli $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem o elementach w zbiorze A oraz $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem ściśle rosnącym o elementach w \mathbb{N} , to ciąg $a \circ k = \{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **podciągiem** ciągu $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definicja 5.3: Granica ciągu

Mówimy, że $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon, n \in \mathbb{N} \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

Gdy g jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, to piszemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

Twierdzenie 5.1

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Definicja 5.4: Ciąg Cauchy'ego

Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n, m \geq M \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.2

Każdy ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchy'ego (tzn. jest ciągiem Cauchy'ego).

Twierdzenie 5.3

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony, zarówno z dołu, jak i z góry.

Twierdzenie 5.4

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$), to jest ograniczony z dołu (góry).

Twierdzenie 5.5

Jeśli ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do g to każdy podciąg ciągu $\{a_n\}$ też jest zbieżny do g .

Twierdzenia o „arytmetyce” granic 5.6

Niech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami liczbowymi oraz $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|.$
- (2) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{a}.$
- (3) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b.$
- (4) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b.$
- (5) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (6) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge b_n] \implies a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (7) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab.$
- (8) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge [b_n] \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (9) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge (\exists q > 0) \text{ dddn } b_n > q \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (10) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge (\exists q < 0) \text{ dddn } b_n < q \implies a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (11) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) b_n \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}.$
- (12) $[a_n] \wedge |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (13) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge (\exists c > 0) \text{ dddn } |b_n| > c \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (14) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (15) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (16) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$
- (17) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \wedge [b_n] \wedge \text{ dddn } b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (18) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^b.$
- (19) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 1 \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (20) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in (0, 1) \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (21) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 1 \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- (22) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in (0, 1) \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (23) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b > 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$
- (24) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b < 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

W celu uproszczenia zapisu, wprowadziłem do powyższych twierdzeń parę (autorskich!) oznaczeń.

$[a_n]$ ozn.	$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq m$
$a_n]$ ozn.	$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq M$
$[a_n]$ ozn.	$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq M$

Powyższe twierdzenia, jak i jakiekolwiek inne twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic nie mają zastosowania w przypadku tzw. *wyrażeń nieoznaczonych*. Do opisanego takich wyrażeń wykorzystuje się następujące symbole:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0, 0^0.$$

Twierdzenie 5.7

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nie, to ciąg $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ postaci $c_n = a_n + b_n$ również nie jest zbieżny.

Przydatną własnością wynikającą z tw. 5.7 i tw. 5.6 jest to, że jeśli ciąg $b_n = a_n - g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to (a_n) jest zbieżny i to dokładnie do granicy g .

Twierdzenie o szacowaniu granic 5.8

Załóżmy, że $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych oraz $x \in \mathbb{R}$. Zachodzą wówczas następujące implikacje:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > x \implies \text{dddn } a_n > x,$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < x \implies \text{dddn } a_n < x,$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies \text{dddn } a_n > b_n,$
- (iv) $\text{dddn } a_n \leq b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$

Na wykładzie przedstawiono tylko (iv). (iii) jest równoważne (iv) z prawa kontrapozycji. (i) da się łatwo wywieść z (iii), wystarczy bowiem przyjąć, że b_n jest ciągiem stałym stale równym x . (ii) dowodzimy analogicznie.

Twierdzenie o dwóch ciągach 5.9

Niech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

- I. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \wedge \text{dddn } b_n \geq a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$
- II. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \wedge \text{dddn } b_n \leq a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$

Twierdzenie o trzech ciągach 5.10

Jeżeli $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \wedge \text{dddn } a_n \leq b_n \leq c_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

Kryterium d’Alamberta dla ciągów 5.11

Niech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

$$\text{I. } \text{dddn } a_n > 0 \wedge (\exists q > 1) \text{ dddn } \frac{a_{n+1}}{a_n} > q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

$$\text{II. } \text{dddn } a_n > 0 \wedge (\exists q < 1) \text{ dddn } \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym 5.12

I. Każdy niemalejący i ograniczony z góry ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

II. Każdy nierosnący i ograniczony z dołu ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa 5.13

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony (zarówno z góry jak i z dołu), to posiada podciąg zbieżny.

Definicja 5.5: Liczba Eulera

Liczba Eulera nazywamy niewymierną liczbę, zdefiniowaną jako granicę

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Twierdzenie 5.14

Ciąg $e_n = (1 + 1/n)^n$ jest niemalejący, a $\tilde{e}_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ nierosnący. Ponadto

$$(\forall n \in \mathbb{N}_+) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Parę przykładów granic ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{dla } q > 1 \vee (q = 1 \wedge k < 0) \\ 1, & \text{dla } q = 1 \wedge k = 0 \\ 0, & \text{dla } q < 1 \vee (q = 1 \wedge k > 0) \end{cases}, \text{ gdzie } q \geq 0. \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \quad (4)$$

Twierdzenie 5.15

Jeżeli $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^g.$$

Uogólniona nierówność Bernoulliego 5.16

Klasyczną nierówność Bernoulliego można uogólnić do poniższej postaci.

$$\begin{aligned} (1+x)^r &\geq 1+rx, & \text{dla } x > -1 \wedge r \geq 1 \\ (1+x)^r &\leq 1+rx, & \text{dla } x > -1 \wedge r \in (0,1] \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.17

Niech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, wówczas

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = 1,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$