Sekcja 1

Relacje

Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory A i B. **Relacją (dwuargumentową)** R między elementami zbioru A a elementami zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ ($R \subset A \times B$).

Mówimy, że elementy $a \in A$ oraz $b \in B$ są ze sobą w relacji R (ozn. $a \sim b$ lub aRb), jeśli $\langle a, b \rangle \in R$.

Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze A. Mówimy, że:
(1) R jest **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ aRa$.
(2) R jest **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ \neg aRa$.
(3) R jest **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
(4) R jest **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
(5) R jest **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.
(6) R jest **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)\ \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$.
(7) R jest **spójna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$.

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech $R \subset A \times A$. Gdy relacja R jest **zwrotna**, **symetryczna** i **przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. **Klasą równoważności (abstrakcji)** elementu $a \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności R, czyli zbiór

$$A/_R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji R.

Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. Wówczas mamy:

(i) $(\forall a \in A)\ a \in [a]_R \leftarrow$ ze zwrotności R

(ii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$ z symetryczności R

(iii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację $\preceq$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym słabym (nieostrym)** na zbiorze A, jeśli jest **zwrotna**, **przechodnia** i **słabo antysymetryczna**.

Relację $\prec$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym ostrym** na zbiorze A, jeśli jest **przeciwzwrotna** i **przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

Dowód. Załóżmy, że relacja $\prec$ na zbiorze A jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy $a, b \in A$, wówczas z przechodniości

$$a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a \prec a \Leftrightarrow \neg(a \prec b \wedge b \prec a) \vee a \prec a.$$

Jednak z przeciwzwrotności $\prec$ wiemy, iż zdanie $a \prec a$ jest fałszywe dla dowolnego a ze zbioru A, dlatego też

$$\neg(a \prec b \wedge b \prec a) \vee a \prec a \Rightarrow \neg(a \prec b \wedge b \prec a) \Leftrightarrow \neg(a \prec b) \vee \neg(b \prec a) \Leftrightarrow (a \prec b \Rightarrow \neg(b \prec a)).$$

□

Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy $\preceq$ (lub $\prec$) na zbiorze A nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze A, jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco: $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a \prec b \vee b \prec a)$.

Definicja 1.7: Elementy wyróżnione

Dany jest zbiór A z porządkiem częściowym $\preceq$. Niech $B \subset A$ i $c \in A$. Mówimy, że:

I. c jest **ograniczeniem górnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ b \preceq c$.

II. c jest **ograniczeniem dolnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ c \preceq b$.

III. c jest **kresem górnym** (ozn. $\sup A$) zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem górnym.

   (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego c' zbioru B zachodzi $c \preceq c'$.

IV. c jest **kresem dolnym** (ozn. $\inf A$) zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem dolnym.

   (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego c' zbioru B zachodzi $c' \preceq c$.

V. c jest elementem **maksymalnym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B)\ c \prec b$.

VI. c jest elementem **największym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B)\ b \preceq c$.

VII. c jest elementem **minimalnym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge \neg(\exists b \in B)\ b \prec c$.

VIII. c jest elementem **najmniejszym** zbioru B, jeśli $c \in B \wedge (\forall b \in B)\ c \preceq b$.

Powyższe pojęcia[1] na wykładzie zostały zdefiniowane tylko dla liniowo uporządkowanego zbioru A, ale można je bez problemu uogólnić na zbiór z porządkiem częściowym, co też zrobiłem. Warto

[1]Na wykładzie pojawiły się wszystkie wymienione terminy, z wyjątkiem elementu najmniejszego i największego. Zapewne dlatego, że dla porządku liniowego, który został przyjęty, nie ma rozróżnienia między elementem największym a maksymalnym.

dodać, iż dla porządków liniowych element największy i maksymalny znaczą to samo. Analogicznie jest z elementem najmniejszym i minimalnym. Sprawy mają się inaczej w przypadku porządków częściowych. Oczywiście, element największy jest również i maksymalny. Jednak implikacja w drugą stronę już nie zawsze zachodzi. Obrazem tego stanu rzeczy są podane diagramy Hassego.

Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje $\preceq$ i $\prec$ w zbiorze A. Jeśli spełniają one następujące warunki:

(a) $(\forall a, b \in A)(a \preceq b \Leftrightarrow a \prec b \lor a = b)$

(b) $(\forall a, b \in A)(a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \land a \neq b)$,

wówczas $\preceq$ jest porządkiem słabym, wtedy i tylko wtedy gdy $\prec$ jest porządkiem ostrym.

Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech $R \subset A \times B$. **Relacją odwrotną** R^{-1} do relacji R nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{\langle a,\ b\rangle \in A \times B : \langle a,\ b\rangle \in R\}.$$

Innymi słowy $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$.

Sekcja 2

Funkcje

Definicja 2.1: Funkcja

Relację f między elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)\ \langle x, y\rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ \langle x, y\rangle \in f \ \wedge\ ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

- **Dziedziną** (ozn. $dom(f)$ lub D_f) funkcji f nazywamy zbiór A.
- **Przeciwdziedziną** (ozn. $\mathcal{C}\!\mathcal{I}_f$) funkcji f nazywamy zbiór B.
- **Zbiorem wartości** (ozn. $rng(f)$ lub R_f) funkcji f nazywamy zbiór $R_f = \{y \in B : (\exists x \in A)\ \langle x, y\rangle \in f\} \subset B$.

Definicja 2.2: Obraz i przeciwobraz

Niech $f : A \to B$ oraz $C \subset A$ i $D \subset B$.

(1) **Obrazem** zbioru C względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f[C] = \{y \in B : (\exists x \in C)\ y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}.$$

(2) **Przeciwobrazem** zbioru D względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Supremum funkcji f na zbiorze C $\sup_{x\in C} f(x)$ jest kresem górnym obrazu zbioru C względem niej. Analogicznie definiujemy $\inf_{x\in C} f(x)$, $\max_{x\in C} f(x)$ i $\min_{x\in C} f(x)$.

Definicja 2.3: Injekcja

Relację funkcyjną $f \subset A \times B$ nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie}$$
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y\rangle \in f \wedge \langle x_2, y\rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definicja 2.4: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna $f \subset A \times B$ jest ze zbioru A **na** zbiór B, jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ \langle x, y\rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

Definicja 2.5: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

Definicja 2.6: Funkcja odwrotna

Jeśli $f : A \to B$ jest bijekcją, to **funkcją odwrotną** do f jest funkcja $f^{-1} : B \to A$, taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x\rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f)$$

Twierdzenie 2.1

(1) Jeżeli funkcja jest bijekcją, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją
(2) Jeżeli funkcja jest odwracalna, to oznacza, że jest bijekcją.

Definicja 2.7: Złożenie Funkcji

`WERSJA I`

Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$ (wystarczy nawet założyć, że $g : B_1 \to C$, jesli $B \subset B_1$) i $x \in A$. **Złożeniem funkcji** f z funkcją g nazywamy funkcję $g \circ f : A \to C$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

`WERSJA II`

Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną wzorem

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle \in D_f \times R_g : \exists y[\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g]\}.$$

Wyrażenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C)\ \langle x, z\rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g).$$

Zauważmy różnicę między tymi dwiema wersjami [2] definicji złożenia funkcji. Pierwsza, częściej spotykana, zakłada że $R_f \subset D_g$, skąd wynika, że $D_{g \circ f} = D_f$. Natomiast według drugiej definicji, złożenie $g \circ f$ funkcji f i g ma następujące własności.

(a) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$,

(b) $(\forall x \in D_{g \circ f})\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Twierdzenie 2.2

Dla dowolnych funkcji f, g, h zachodzi równość $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Definicja 2.8: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru A możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze A (identyczność na zbiorze A) następująco:

$$id_A : A \to A, \quad (\forall x \in A)\ id_A(x) = x.$$

[2] Tylko wersja pierwsza pojawiła się na wykładzie. Ta druga jest tylko moim dodatkiem. Podaję ją tutaj, bo chociaż nie pojawiła się w czasie wykładu, to posługiwaliśmy się jej wyróżniającą własnością na ćwiczeniach.

Twierdzenie 2.3

Jeśli $f : A \to B$ i $f^{-1} : B \to A$, to $f^{-1} \circ f : A \to A$ jest identycznością na zbiorze A.

Definicja 2.9: Obcięcie i przedłużenie funkcji

Niech $f : A \to B$.

(1) Niech $C \subset X$. **Obcięciem funkcji** f do zbioru C nazywamy funkcję $f|_C : C \to B$, $(f|_C)(x) = f(x)$.

(2) Funkcję $g : C \to B$ nazywamy **przedłużeniem funkcji** f, jeśli $A \subset C$ oraz $(\forall x \in A)\ f(x) = g(x)$.

Zwróćmy uwagę, że daną funkcję f można przedłużyć na dany właściwy nadzbiór jej dziedziny na różne sposoby. Zauważmy też, że funkcja jest zawsze przedłużeniem swojego obcięcia.

Sekcja 3

Równoliczność

Definicja 3.1: Równoliczność

Mówimy, że zbiory A i B są **równoliczne** (ozn. $|A| = |B|$, $A \sim B$), gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.

Równoliczność *ma własności relacji równoważności* (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) i faktycznie nią jest, gdy ograniczymy relację równoliczności do zbioru $\mathcal{P}(U)$ [3]. Jeśli $A, B \in \mathcal{P}(U)$ i R będzie symbolizować relację równoliczności, to możemy przyjąć, iż $|A| = |B|$ oznacza, że $[A]_R = [B]_R$.

Definicja 3.2: Zbiór skończony i nieskończony

O zbiorze A mówimy, że jest **skończony**, jeżeli jest pusty lub równoliczny jakiemuś zbiorowi postaci $\{1, \ldots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Piszemy wówczas, że $|A| = n$. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy **nieskończonym**.

Definicja 3.3: Zbiór przeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **przeliczalny**, jeżeli jest równoliczny zbiorowi $\mathbb{N}$. Piszemy wówczas, że $|A| = \aleph_0$.

Zbiór nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

Definicja 3.4: Zbiór nieprzeliczalny

Mówimy, że zbiór A jest **nieprzeliczalny**, jeżeli nie jest przeliczalny, ani skończony.

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem nieprzeliczalnym. $|\mathbb{R}|$ oznaczamy jako $\mathfrak{c}$ lub $2^{\aleph_0}$ i nazywamy *continuum*. Continuum jest większe od mocy $\mathbb{N}$.

[3] $\mathcal{P}(U)$ to zbiór potęgowy pewnego zbioru U, czyli zbiór wszystkich podzbiorów U. Równoliczność ograniczamy do jakiegoś zbioru potęgowego, bo jej dziedzina i obraz nie są normalnie zbiorami, więc nie byłaby ona relacją równoważności w ścisłym sensie.

Sekcja 4

Liczby rzeczywiste

Dany jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z określonymi działaniami $+$ i $\cdot$ oraz porządkiem liniowym $\leq$. Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych podzielimy na trzy kategorie: aksjomaty ciała przemiennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości[4].

Aksjomaty ciała przemiennego

(1) **Przemienność dodawania** $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ a + b = b + a$.

(2) **Łączność dodawania** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a + (b + c) = (a + b) + c$.

(3) **Charakteryzacja zera** $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R})\ a + 0 = a$.

(4) **Istnienie elementów przeciwnych** $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists -a \in \mathbb{R})\ a + (-a) = 0$.

(5) **Przemienność mnożenia** $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ a \cdot b = b \cdot a$.

(6) **Łączność mnożenia** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(7) **Charakteryzacja jedynki** $(\exists 1 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R})\ a \cdot 1 = a$.

(8) **Istnienie elementów odwrotnych** $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists a^{-1} \in \mathbb{R})\ a \cdot a^{-1} = 1$.

(9) **Rozdzielność mnożenia względem dodawania** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Aksjomaty porządku

(1) **Prawo trichotomii** [5] $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ zachodzi *dokładnie jedna* z trzech możliwości:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

(2) **Przechodniość** $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$.

(3) **Związki nierówności z działaniami**

   (a) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$;

   (b) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc)$.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny* $M = \sup A \in \mathbb{R}$.

[4]Aksjomaty przepisałem ze skryptu Strzeleckiego, ponieważ były tam zapisane w trochę bardziej eleganckiej postaci.
[5]Aksjomat ten uwzględniamy, gdy przyjmujemy $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, na wykładzie natomiast przyjęliśmy $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Twierdzenie 4.1: Aksjomat Archimedesa

Dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a i b istnieje liczba naturalna n, taka że $a < nb$.

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)(\exists n \in \mathbb{N})\ a < nb$$

Twierdzenie to, choć bywa tak zwyczajowo nazywane, na prawdę aksjomatem w arytmetyce nie jest, bo wynika z innych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych.

Definicja 4.1: Przekrój Dedekinda

Podział zbioru liczb wymiernych na parę zbiorów $\langle A, B\rangle$, spełniające warunki[a]:

(1) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$,

(2) $A \cup B = \mathbb{Q}$,

(3) $A \cap B = \emptyset$

(4) $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a < b$.

nazywamy **przekrojem Dedekinda** zbioru $\mathbb{Q}$. Zbiór A nazywany jest **klasą dolną** przekroju, a zbiór B **klasą górną**.

[a] Podane warunki różnią się swoją postacią, tym co były przedstawione na wykładzie, niemniej jednak są im równoważne.

Przekrój Dedekinda $\langle A, B\rangle$ zdefiniowany w taki sposób może mieć jedną z trzech następujących postaci, w której:

1. w zbiorze A istnieje element największy,
2. w zbiorze B istnieje element najmniejszy,
3. w zbiorze A nie istnieje element największy i w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy.

W trzecim przypadku przekrój wyznacza tzw. *lukę*. Aksjomat ciągłości w ujęciu przekrojowym, mówi o tym, że żaden z przekrojów Dedekinda zbioru $\mathbb{R}$ nie wyznacza luki.

Przekroje typu 1 i 2 nazywamy *liczbami rzeczywistymi wymiernymi*. Dwa przekroje typu 1 i 2 mogą wyznaczać tę samą liczbę wymierną. Relację równoważności przekrojów zdefiniujemy poniżej. Natomiast przekrój $\langle A, B\rangle$ wyznaczający lukę nazywamy *liczbą rzeczywistą niewymierną*.

Zdefiniujmy relację równoważności R przekrojów Dedekinda:

$$\langle A_1, B_2\rangle\ R\ \langle A_2, B_2\rangle \Leftrightarrow A_1 = A_2 \vee \exists \max A_1, \min B_2 (\max A_1 = \min B_2) \vee \exists \max A_2, \min B_1 (\max A_2 = \min B_1).$$

Nasze rozważania doprowadzają nas do ***konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda***[6].

$$\mathbb{R} := \{\langle A, B\rangle : \text{przekroje Dedekinda}\}/_R$$

[6] W tym miejscu notatki z liczb rzeczywistych na razie zakańczam. Dalsze wyprowadzenia operacji na liczbach rzeczywistych odkładam na czas bliższy terminowi egzaminu ustnego. Na kolosie zagadnienia te raczej nie będą potrzebne.

Sekcja 5

Ciągi

Definicja 5.1: Ciąg nieskończony

Ciągiem (nieskończonym) o elementach w zbiorze A nazywamy dowolną funkcję $a : \mathbb{N} \to A$ (ozn. a_n, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Definicja 5.2: Podciąg

Jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem o elementach w zbiorze A oraz $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ściśle rosnącym o elementach w $\mathbb{N}$, to ciąg $a \circ k = \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **podciągiem** ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja 5.3: Granica ciągu

Mówimy, że $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_\varepsilon, n\in\mathbb{N}}\ \ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Gdy g jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, to piszemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \xrightarrow{n\to\infty} g$.

Twierdzenie 5.1

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Definicja 5.4: Ciąg Cauchy'ego

Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{M\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geq M}\ \forall_{m,n\in\mathbb{N}}\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.2

Każdy ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchy'ego (tzn. jest ciągiem Cauchy'ego).

Twierdzenie 5.3

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony, zarówno z dołu, jak i z góry.

Twierdzenie 5.4

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$, to jest ograniczony z dołu (góry).

Twierdzenie 5.5

Jeśli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do g to każdy podciąg ciągu $\{a_n\}$ też jest zbieżny do g.

Twierdzenia o „arytmetyce” granic 5.6

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczbowymi oraz $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies |a_n| \xrightarrow{n\to\infty} |a|$.

(2) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies \sqrt{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$.

(3) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} a + b$.

(4) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n - b_n \xrightarrow{n\to\infty} a - b$.

(5) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; [b_n \implies a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(6) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \;\wedge\; b_n] \implies a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(7) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} ab$.

(8) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\wedge\; [b_n] \implies a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(9) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; (\exists q > 0)\; dddn\;\; b_n > q \implies a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(10) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; (\exists q < 0)\; dddn\;\; b_n < q \implies a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(11) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \neq 0 \;\wedge\; (\forall n \in \mathbb{N})\; b_n \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$.

(12) $[a_n] \;\wedge\; |b_n| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(13) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\wedge\; (\exists c > 0)\; dddn\;\; |b_n| > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(14) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; [b_n] \;\wedge\; dddn\;\; b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(15) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \;\wedge\; [b_n] \;\wedge\; dddn\;\; b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(16) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; [b_n] \;\wedge\; dddn\;\; b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

(17) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \;\wedge\; [b_n] \;\wedge\; dddn\;\; b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(18) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^b$.

(19) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a > 1 \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(20) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in (0,1) \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(21) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a > 0 \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(22) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in (0,1) \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(23) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b > 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

(24) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \;\wedge\; b_n \xrightarrow{n\to\infty} b < 0 \implies a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

W celu uproszeczenia zapisu, wprowadziłem do powyższych twierdzeń parę (autorskich!) oznaczeń.

$$
\begin{array}{rll}
[a_n & \textit{ozn.} & (\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq m \\
a_n] & \textit{ozn.} & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq M \\
[a_n] & \textit{ozn.} & (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq M
\end{array}
$$

Powyższe twierdzenia, jak i jakiekolwiek inne twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic nie mają zastosowania w przypadku tzw. *wyrażeń nieoznaczonych*. Do opisania takich wyrażeń wykorzystuje się następujące symbole:

$$\infty - \infty,\ \ 0 \cdot \infty,\ \ \frac{0}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ 1^{\infty},\ \ \infty^{0},\ \ 0^{0}.$$

Twierdzenie 5.7

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie, to ciąg $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postaci $c_n = a_n + b_n$ również <u>nie</u> jest zbieżny.

Przydatną własnością wynikającą z tw. 5.7 i tw. 5.6 jest to, że jeśli ciąg $b_n = a_n - g \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to (a_n) jest zbieżny i to dokładnie do granicy g.

Twierdzenie o szacowaniu granic 5.8

Załózmy, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych oraz $x \in \mathbb{R}$. Zachodzą wówczas następujące implikacje:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > x \implies dddn\ \ a_n > x,$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < x \implies dddn\ \ a_n < x,$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n \implies dddn\ \ a_n > b_n,$

(iv) $dddn\ \ a_n \leq b_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

Na wykładzie przedstawiono tylko (iv). (iii) jest równoważne (iv) z prawa kontrapozycji. (i) da się łatwo wywieść z (iii), wystarczy bowiem przyjąć, że b_n jest ciągiem stałym stale równym x. (ii) dowodzimy analogicznie.

Twierdzenie o dwóch ciągach 5.9

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

I. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \wedge dddn\ \ b_n \geq a_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty,$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \wedge dddn\ \ b_n \leq a_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty.$

Twierdzenie o trzech ciągach 5.10

Jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g \wedge dddn\ \ a_n \leq b_n \leq c_n \implies \lim_{n\to\infty} b_n = g.$$

Kryterium d'Alamberta dla ciągów 5.11

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, wówczas zachodzą następujące implikacje:

I. $dddn\ \ a_n > 0 \ \wedge\ (\exists q > 1)\ \ dddn\ \ \frac{a_{n+q}}{a_n} > q \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,$

II. $dddn\ \ a_n > 0 \ \wedge\ (\exists q < 1)\ \ dddn\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym 5.12

I. Każdy niemalejący i ograniczony z góry ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

II. Każdy nierosnący i ograniczony z dołu ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa 5.13

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony (zarówno z góry jak i z dołu), to posiada podciąg zbieżny.

Definicja 5.5: Liczba Eulera

Liczbą Eulera nazywamy niewymierną liczbę, zdefiniowaną jako granicę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Twierdzenie 5.14

Ciąg $e_n = (1+1/n)^n$ jest niemalejący, a $\tilde{e}_n = (1+1/n)^{n+1}$ nierosnący. Ponadto

$$(\forall n\in\mathbb{N}_+)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Parę przykładów granic ciągów:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{dla } \ q>1 \vee (q=1 \wedge k<0) \\ 1, & \text{dla } \ q=1 \wedge k=0 \\ 0, & \text{dla } \ q<1 \vee (q=1\wedge k>0)\end{cases} \text{, gdzie } q\geq 0. \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e \tag{4}$$

Twierdzenie 5.15

Jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągami liczb rzeczywistych, to wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = g \implies \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g.$$

Uogólniona nierówność Bernoulliego 5.16

Klasyczną nierówność Bernoulliego można uogólnić do poniższej postaci.

$$\begin{aligned} (1+x)^r &\geq 1+rx, \quad \text{dla}\ \ x>-1 \ \wedge\ r\geq 1 \\ (1+x)^r &\leq 1+rx, \quad \text{dla}\ \ x>-1 \ \wedge\ r\in(0,1] \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.17

Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciagiem liczb rzeczywistych, wówczas

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = 1,$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$