Sekcja 1

Relacje

Definicja 1.1: Relacja

Dane są dwa zbiory A i B. **Relacją (dwuargumentową)** R między elementami zbioru A a elementami zbioru B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ ($R \subset A \times B$).

Mówimy, że elementy $a \in A$ oraz $b \in B$ są ze sobą w relacji R (ozn. $a \sim b$ lub aRb), jeśli $\langle a, b \rangle \in R$.

Niech R będzie relacją na niepustym zbiorze A. Mówimy, że:
(1) R jest **zwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ aRa$.
(2) R jest **przeciwzwrotna** $\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ \neg aRa$.
(3) R jest **przechodnia** $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
(4) R jest **symetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
(5) R jest **słabo antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.
(6) R jest **silnie antysymetryczna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)\ \neg(aRb \wedge bRa) \Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow \neg bRa)$.
(7) R jest **spójna** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \vee bRa)$.

Relację silnie antysymetryczną nazywamy również relacją asymetryczną bądź to przeciwsymetryczną.

Definicja 1.2: Relacja równoważności

Niech $R \subset A \times A$. Gdy relacja R jest **zwrotna**, **symetryczna** i **przechodnia**, to mówimy, że jest **relacją równoważności**.

Definicja 1.3: Klasa równoważności

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. **Klasą równoważności (abstrakcji)** elementu $a \in A$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

Definicja 1.4: Zbiór ilorazowy

Zbiór wszystkich klas abstrakcji (względem) relacji równoważności R, czyli zbiór

$$A/_R = \{[a]_R : a \in A\},$$

nazywamy **zbiorem ilorazowym** relacji R.

Twierdzenia o klasach równoważności 1.1

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A. Wówczas mamy:

(i) $(\forall a \in A)\ a \in [a]_R \leftarrow$ ze zwrotności R

(ii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow b \in [a]_R) \leftarrow$ z symetryczności R

(iii) $(\forall a, b \in A)(a \in [b]_R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R)$

Definicja 1.5: Relacje porządku częściowego

Relację $\preceq$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym** **słabym (nieostrym)** na zbiorze A, jeśli jest **zwrotna**, **przechodnia** i **słabo antysymetryczna**.

Relację $\prec$ na zbiorze A nazywamy **porządkiem częściowym** **ostrym** na zbiorze A, jeśli jest **przeciwzwrotna** i **przechodnia**.

Na wykładzie stwierdzono, iż ostry porządek częściowy jest również asymetryczny. Jednak fakt ten wynika już z przeciwzwrotności i przechodniości porządku, co można prosto wykazać.

Dowód. Załóżmy, że relacja $\prec$ na zbiorze A jest przeciwzwrotna i przechodnia. Weźmy $a, b \in A$, wówczas z przechodniości

$$a \prec b \land b \prec a \Rightarrow a \prec a \Leftrightarrow \neg(a \prec b \land b \prec a) \lor a \prec a.$$

Jednak z przeciwzwrotności $\prec$ wiemy, iż zdanie $a \prec a$ jest fałszywe dla dowolnego a ze zbioru A, dlatego też

$$\neg(a \prec b \land b \prec a) \lor a \prec a \Rightarrow \neg(a \prec b \land b \prec a) \Leftrightarrow \neg(a \prec b) \lor \neg(b \prec a) \Leftrightarrow (a \prec b \Rightarrow \neg(b \prec a)).$$

$\square$

Definicja 1.6: Liniowy porządek

Porządek częściowy $\preceq$ (lub $\prec$) na zbiorze A nazywamy **porządkiem liniowym (pełnym)** na zbiorze A, jeżeli jest **spójny**.

Spójność dla porządku ostrego formułujemy następująco: $(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow a \prec b \lor b \prec a)$.

Definicja 1.7: Ograniczenia i kresy

Dany jest zbiór A z porządkiem liniowym $\preceq$. Niech $B \subset A$ i $c \in A$. Mówimy, że:

I. c jest **ograniczeniem górnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ b \preceq c$.

II. c jest **ograniczeniem dolnym** zbioru B, jeśli $(\forall b \in B)\ c \preceq b$.

III. c jest **kresem górnym** zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem górnym.

   (b) dla dowolnie innego ograniczenia górnego c' zbioru B zachodzi $c \preceq c'$.

IV. c jest **kresem dolnym** zbioru B, jeśli:

   (a) jest ograniczeniem dolnym.

   (b) dla dowolnie innego ograniczenia dolnego c' zbioru B zachodzi $c' \preceq c$.

Powyższe pojęcia można by było zdefiniować dla częściowo uporządkowanego zbioru A, aczkolwiek na wykładzie pojawiła się węższa definicja ze zbiorem liniowo uporządkowanym.

Twierdzenie 1.2

Dane są dwie relacje $\preceq$ i $\prec$ w zbiorze A. Jeśli spełniają one następujące warunki:

(a) $(\forall a, b \in A)(a \preceq b \Leftrightarrow a \prec b \lor a = b)$

(b) $(\forall a, b \in A)(a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \land a \neq b)$,

wówczas $\preceq$ jest porządkiem słabym, wtedy i tylko wtedy gdy $\prec$ jest porządkiem ostrym.

Definicja 1.8: Relacja odwrotna

Niech $R \subset A \times B$. **Relacją odwrotną** R^{-1} do relacji R nazywamy zbiór

$$R^{-1} := \{\langle a,\ b\rangle \in A \times B : \langle a,\ b\rangle \in R\}.$$

Innymi słowy $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb)$.

Sekcja 2

Funkcje

Definicja 2.1: Funkcja

Relację f między elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy **funkcją**, jeżeli

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)\ \langle x, y \rangle \in f.$$

Powyższe zdanie można zapisać równoważnie jako

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ \langle x, y \rangle \in f \ \wedge\ ((\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2)).$$

Definicja 2.2: Injekcja

Relację funkcyjną $f \subset A \times B$ nazywamy **injekcją** (różnowartościową), jeżeli

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), \text{ czyli równoważnie}$$
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(\langle x_1, y \rangle \in f \wedge \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Definicja 2.3: Surjekcja

Mówimy, że relacja funkcyjna $f \subset A \times B$ jest ze zbioru A **na** zbiór B, jeśli

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x), \text{ czyli } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ \langle x, y \rangle \in f.$$

Funkcję taką nazywamy też **surjekcją**.

Definicja 2.4: Bijekcja

Relację funkcyjną, która jest zarówno injekcją jak i surjekcją nazywamy **bijekcją**.

Definicja 2.5: Funkcja odwrotna

Jeśli $f : A \to B$ jest bijekcją, to **funkcję odwrotną** do f jest funkcja $f^{-1} : B \to A$, taka że

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle y, x \rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f)$$

Twierdzenie 2.1

Jeżeli funkcja jest bijekcja, to posiada funkcję odwrotną, która również jest bijekcją

Definicja 2.6: Złożenie Funkcji

Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $x \in A$. **Złożeniem funkcji** f z funkcją g nazywamy funkcję $g \circ f : A \to C$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Wyrażenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ można zapisać alternatywnie jako:

$$(\forall x \in A)(\forall z \in C)\ \langle x, z\rangle \in g \circ f \Leftrightarrow (\exists y \in B)(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g).$$

Definicja 2.7: Funkcja identycznościowa

Dla dowolnego niepustego zbioru A możemy określić **funkcję identycznościową** na zbiorze A (identyczność na zbiorze A) następująco:

$$id_A : A \to A, \quad (\forall x \in A)\ id_A(x) = x.$$

Twierdzenie 2.2

Jeśli $f : A \to B$ i $f^{-1} : B \to A$, to $f^{-1} \circ f : A \to A$ jest identycznością na zbiorze A.