

2023数算第一章作业

1、请计算下面程序中赋值语句的执行次数，并给出计算过程（要求是计算准确的次数而不是算法复杂度的阶，其中n为正整数）。

```
1  for (i = 1; i < n; i++){
2      for (j = n; j >= i; j--){
3          a[i][j] = 1;
4      }
5  }
```

C++ 复制代码

$$n + (n-1) + \cdots + 2 \\ = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

2、已知下列运算时间函数，写出其大O表示的运算时间（第二小题请求出T(n)的表达式，给出计算过程并通过数学归纳法证明）

(1) $T(n) = 3n^3 + 10n^2 + 2n;$

(2) $T(n+1) = 2(T(n)+1) \dots = 2^{n-1}(T(1)+1) = 2^n.$

(2) $T(n) = 2T(n-1) + 1, T(1) = 1.$

下证 $T(n) = 2^n - 1.$

$n=1$ 时成立.

假设 $n-1$ 时成立, $T(n) = 2(2^{n-1}-1) + 1 = 2^n - 1$ 成立.

于是 $T(n) = O(2^n).$

3、证明下列两个问题：

(1) f(n)和g(n)是两个非负渐进函数，请根据 θ 表示法的定义，证明 $\max(f(n), g(n)) = \theta(f(n) + g(n))$ 。

(2) 对于任意实数 $a > b > 1, b^n = O(a^n)$, 但 $a^n \neq O(b^n)$ 。

(1) 注意到 $\frac{1}{2} \leq \frac{\max\{f(n), g(n)\}}{f(n)+g(n)} \leq 1.$

由定义可得结论.

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = +\infty.$

由数学分析的知识, 可知

$$\exists C, \exists N, \forall n > N, b^n \leq C \cdot a^n.$$

$$\text{即 } b^n = O(a^n).$$

$$\text{反过来, } \forall C, \forall N, \exists n > N, a^n \geq C \cdot b^n.$$

因此 $a^n \neq O(b^n)$ 。