

# 前 言

近四十年来,机器人制造业与机器人学的研究一直是国际、国内极为重视的高技术领域之一,得到了极其迅速的发展。当前,机器人的应用范围已扩大到人类生产和生活的各个方面,极大地影响和促进了工业、国防和科技事业的发展。

在早期的机器人研究中,与机器人的机械结构相比,其控制用计算机的价格高且运算能力有限,故只能采用极简单的控制方案,难于满足高速、高精度机器人的性能要求。自 20 世纪 70 年代以来,随着电子技术与计算机科学的发展,计算机运算能力大大提高而成本不断下降,这就使得人们越来越重视发展各种考虑机器人动力学模型的计算机实时控制方案,以充分发挥出为完成复杂任务而设计得日益精密从而也越加昂贵的机器人机械结构的潜力<sup>[1]</sup>。因此,在机器人研究中,控制系统的设计已显得越来越重要,成为提高机器人性能的关键问题之一。由于机器人控制涉及机器人学、控制理论、力学、计算机控制等多方面的知识,特别是这一研究领域正处于迅速发展之中,大量的文献不断出现,这常常使得初次接触这一领域的人感到难于入手。本书的目的就是为有志于从事机器人控制研究的研究生和科技人员提供一本有价值的入门教材。

本书中详细讲述了关于机器人运动学、动力学及控制的基本问题和基础理论,并附有习题作为练习。考虑到一些研究生和科研人员对力学不太熟悉的情况,书中对所用到的力学知识都做了详细推导,这些都有利于读者系统而扎实地掌握机器人动力学与控制方面的基础理论,以便进一步深入学习及从事有关的科研和应用工作。

本书作为研究生教材,供课内 36~40 学时使用。课时安排为第 1 章 10 学时,第 2 章 12 学时,第 3 章 14~18 学时。书中的习题分为两类:一类是希望在课程学习过程中完成的,它们或是因书中篇幅所限而未能予以证明的一些重要结论、引理或推论,或是为牢固掌握所学知识,以便进一步学习所需要做的练习;另一类是取自有关文献的难度较大的选做题,这类习题用 \* 号标出。为了理论上的完整,书中 2.6 节第四部分给出了用机器人几何参数直接确定其最小惯性参数的理论证明,但这部分证明相当繁琐,在教学中可不讲授,而只要求学生学会使用相关结果即可。学习本书不要求读者具有理论力学及分析力学知识,但要求具有运动稳定

性及线性控制系统理论的基础知识。学习本书的主要参考书为文献[2~4]。

值得说明的是,由于本书着重叙述基础理论以及学时和篇幅的限制,对国内外很多很好的工作都未能提及,参考文献中也只列出了书中直接引用了的文献,一些重要论文及著作并没有全部列出,敬希见谅。

作者所在的北京航空航天大学第七研究室(系统与控制研究室)自20世纪80年代初在高为炳院士领导下开始进行机器人动力学与控制方面的研究,作者也一直在他的指导下从事相关研究工作。高先生1985年自编讲义为硕士研究生开设了“机器人动力学与控制”课程,作者1988年自美国Michigan大学工学院Robot Systems Division进修回国后开始讲授此课程,并结合教学实践对讲义做了多次补充修改。1993年高为炳院士打算与作者合作编写正式教材,但遗憾的是,这一工作因他1994年3月猝然病逝而未能完成。光阴荏苒,至今高先生去世已经十年,愿以此书的出版作为对导师高为炳院士逝世十周年的纪念。

本书中一部分本研究室的科研成果得到国家自然科学基金(No. 69774009, No. 60174003, No. 60334030)、航空科研基金(No. 91F51134)和高校博士点基金(No. 09)资助,作者对此深表谢意。自1997年起,本书初稿开始在北京航空航天大学控制理论与控制工程专业硕士生和部分博士生的教学中试用,历届研究生都对此书提出了许多宝贵的改进意见,作者对他们的热心帮助表示衷心的感谢。

尽管本书是作者基于多年来从事机器人动力学与控制的科研和教学工作的体会编著而成,但由于学识和水平所限,错误及不妥之处一定难免,欢迎广大读者批评指正。

作者

2004年11月

# 目 录

绪论 .....	1
第 1 章 机器人运动学 .....	5
1.1 刚体位置与指向的确定 .....	5
1.2 机器人杆件坐标系的建立 .....	16
1.3 运动学问题 .....	23
1.4 速度问题 .....	31
1.5 加速度问题 .....	46
第 2 章 机器人动力学 .....	51
2.1 用 Lagrange 方程建立自由运动机器人的动力学方程 .....	51
2.2 用 Newton-Euler 方程建立自由运动机器人的动力学方程 .....	63
2.3 自由运动机器人的逆动力学算法 .....	73
2.4 自由运动机器人的正动力学算法 .....	80
2.5 机器人的最小惯性参数及其应用 .....	87
2.6 运动受限机器人模型及其他有关问题 .....	119
第 3 章 机器人控制 .....	123
3.1 概述 .....	123
3.2 独立的 PD 控制 .....	125
3.3 具有重力补偿的 PD 控制 .....	127
3.4 计算力矩法 .....	137
3.5 解出加速度控制 .....	140
3.6 机器人的最优控制 .....	144
3.7 非线性解耦及任意极点方法 .....	149
3.8 基于输入-输出稳定性理论设计的机器人控制器 .....	152
3.9 机器人的自适应控制 .....	157
3.10 机器人的变结构控制 .....	165
3.11 机器人的鲁棒控制 .....	174
3.12 运动受限机器人的位置-力混合控制 .....	181
3.13 多机器人的位置-力混合控制 .....	189
习题 .....	195
参考文献 .....	204

# 绪 论

随着生产和科技的进步,人们需要用机器代替人完成一些人类无法完成或不能高质量完成的任务.另外,由于市场经济的发展,对增加商品种类、提高质量、降低成本提出了越来越高的要求.产品生产也从单一品种、大批量生产向多品种、小批量过渡.机器人正是为适应生产自动化及市场应变性的更高要求而出现的.

## 一、机器人的定义

机器人(Robot)一词来源于1920年捷克作家 Karel Capek 的科幻话剧《Rossum's Universal Robot》.剧中有一批听命于人的、能从事各项劳动的机器,名叫 Robot,我国译为“机器人”.

在当今工业和科研领域中所使用的机器人,一般不具有人的外貌和全部功能,而是一类能代替人从事多种工作的高度灵活的自动化机械的统称.目前世界上对机器人尚无统一的严格定义,美国机器人协会(Robot Institute of American)定义机器人为:“机器人是一种用来移动材料、零件、工具或特定装置的可重新编程的多功能操作器,可以通过改变编程运动来执行不同的任务.”

由上所述可看出:机器人是为完成多种任务而设计的,因此它必定具有能灵活执行多种任务的机械结构.通常它被设计成类似于人手臂的结构,所以又常被称为机器人操作手(Robot Manipulator)或机械臂(Robot Arm).

## 二、机器人的发展简史

早在第二次世界大战时期,为操作放射性材料,美国 Argonne 国家实验室设计了连杆关节型的遥控操作手.为提高操作精度,1947年又研制了电动伺服控制的遥控操作手.1949年,为制造先进飞机的需要,美国空军资助 MIT(麻省理工学院)辐射实验室研制数控铣床,并于1953年得到成功.关节型遥控操作手和数控铣床的研究为机器人的产生准备了技术基础.

1954年美国 George Devol 巧妙地将遥控操作手的连杆机构与数控铣床的伺服轴连接起来,设计制成了世界上第一台可编程的通用工业

机器人,并获得了专利.这种机器人可事先将要完成的任务用编程输入的方式或用手带动机器人末端夹持器(End Effector,简称手端)顺序通过工作位置的方式将数据依次存入记忆装置,工作时机器人即可按所记忆程序完成指定的任务.通过改变所记忆的程序,就可用同一机器人完成不同的工作任务,即这种机器人具有“示教-再现”和“可编程”的功能.1956年 Joseph Engelberger 购买了 Devol 的专利成立了 Unimation 公司.1961年该公司制成了第一台 Unimate 机器人.同时,美国 AMF(机床与铸造公司)设计生产了 Versatran 机器人.这两种机器人在汽车生产线上卓有成效的应用,使机器人开始作为商品在世界市场上销售,西欧的工业发达国家及日本等也纷纷从美国引进机器人技术.

机器人在工业上的成功应用也极大鼓舞和促进了机器人研究的深入进行. MIT 的 Lincoln 实验室于 1961 年研制成功利用力反馈信息工作的机器人,并于 1963 年开始研究机器人视觉系统. 1965 年美国 Stanford 大学建立了实验室进行机器人研究,并于 1971 年制成了 Stanford 臂(Stanford Arm),1973 年开发了机器人编程语言 WAVE.

自 20 世纪 70 年代以来,随着微电子和计算机技术的飞速发展,以及机器人研究的不断深入,机器人性能大幅度提高,成本不断下降,使机器人产业蓬勃兴起,机器人研究也掀起了高潮. 1978 年 Unimation 公司开始生产性能优良的 PUMA (Programm-able Universal Manipulator for Assembly) 系列机器人(其基本结构参见图 0-1),1979 年日本研制了适用于垂直装配的 SCARA (Selective Compliant Articulated Robot) 机器人. 这些机器人的出现促进了机器人应用领域的进一步扩大. 当前,世界上已有几百种不同类型、数以万计的机器人被广泛用于生产和科研.

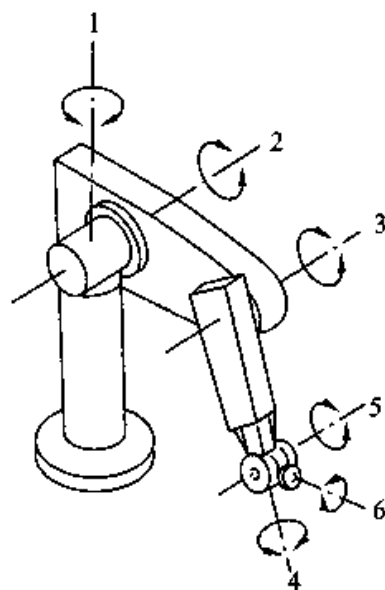


图 0-1

在我国,机器人研究与应用是在 20 世纪 70 年代末逐渐发展起来的. 机器人研究先后列入国家“七五”、“八五”科技发展计划及“863”计划等. 经过二十多年的不懈努力,取得显著进展,其中一些成果已接近或达到国际先进水平. 中国已自行研制出许多不同种类和用途的机器人用于生产、国防及社会生活的某些方面.

### 三、机器人的分类

可以按许多标准将机器人分类,最常见的是按照发展程度将机器人分为三代:

第一代机器人是以“示教-再现”方式工作的机器人,这种机器人目前已在生产中得到广泛应用。

第二代机器人是具有一定传感装置,能利用所获取的环境与操作对象的简单信息进行反馈控制的机器人,这种机器人目前已有少量应用。

第三代机器人是具有多种感知功能,可进行推理判断,能在未知工作环境中独立工作的机器人,这种机器人尚处于试验阶段。

也常按功能将机器人分为:

工业机器人(Industrial Robot),它是应用于工业生产自动化领域的机器人,这类机器人绝大多数是按“示教-再现”方式进行重复作业的第一代机器人,少数具有第二代机器人的功能。

遥控机器人(Telerobot),它是接受遥控指令而进行远距离作业的机器人,主要用于宇航、海底、核工业及真空等领域。

智能机器人(Intelligent Robot),它是具有运动、感知、学习、适应、逻辑判断及人机通信功能的机器人,属于第三代机器人。

### 四、机器人领域的主要研究方向及本书内容

机器人领域的研究方向主要有:

- ① 机器人机械结构设计。
- ② 机器人传感器研究。
- ③ 机器人运动轨迹设计与规划。
- ④ 机器人运动学、动力学与控制。
- ⑤ 机器人控制语言。
- ⑥ 机器人视觉、听觉等系统的研究。
- ⑦ 机器人智能研究。

从中可看出,机器人研究综合了机械学、电子学、力学、自动控制、计算机、人工智能等多种学科,已形成了一个新的综合性学科——机器人学。

本书不是全面论述机器人学的著作,而是着重讲述机器人控制理论问题及相关的机器人运动学和动力学基础的教材,书中内容不涉及具体的控制器实现技术,以及有多种传感器的智能机器人或移动机器人控制问题。本书以由刚性杆件串联而成的工业机器人为对象,详细介绍了其

运动学、动力学及控制研究中的基本概念、方法和结论。学习这些内容不仅是从事机器人控制研究所必需,也可为进一步研究智能机器人、移动机器人、乃至更一般的复杂非线性动力学系统的控制问题打下坚实的理论基础。

# 第1章 机器人运动学

## 1.1 刚体位置与指向的确定

为使机器人能完成给定的工作任务,需要知道其末端夹持器在三维空间中的状况.末端夹持器作为具有一定体积的刚体,与一个可不考虑其体积的质点不同.要确定刚体在空间的状况,不仅要知道刚体的位置,还要知道其指向(也称方位或姿态).通常的方法是建立一个和刚体固连的坐标系(简称刚体坐标系),用此坐标系相对参考坐标系的位置和指向来刻画刚体的位置和指向.

### 一、刚体位置的确定

建立和刚体固连的坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$ .则刚体上任一点  $Q$  在刚体坐标系中的位置矢量(简称矢径)  $r$  都是已知的.要确定刚体上点  $Q$  在参考坐标系  $OXYZ$  中的位置,只要知道刚体坐标系原点  $O_1$  的矢径  $p$ ,则立即可知点  $Q$  在参考坐标系  $OXYZ$  中的矢径为  $p + r$ (参看图 1-1).这表明:刚体的位置可用刚体坐标系原点的矢径来刻画.只要知道此矢径,即可确定刚体上任一点的位置.

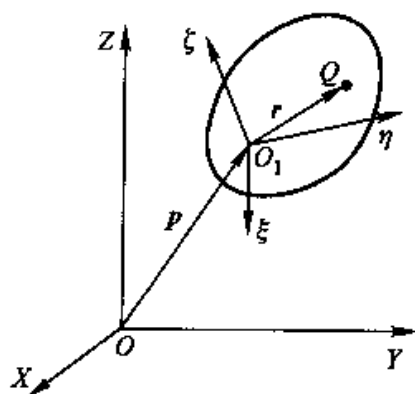


图1-1

在本书中,所有坐标系均为右手坐标系.除非特别说明,一般用大写字母或希腊字母表示坐标轴;用黑体英文字母表示矢量;用带左上标



的黑体英文字母表示矢量的坐标表达式,其中左上标用来标示出相应的坐标系.

## 二、刚体指向的确定

刚体的指向可用刚体坐标系与参考坐标系间的相对位置来刻画.具体方法是:记刚体坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$  (简称为系1) 坐标轴上的三个单位矢量  $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}$  在参考坐标系  $OXYZ$  (简称为系0) 中的坐标表达式为

$${}^0\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

则可用  $3 \times 3$  矩阵

$${}^0\boldsymbol{R}_1 \triangleq \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = [{}^0\boldsymbol{n}, {}^0\boldsymbol{o}, {}^0\boldsymbol{a}] \quad (1-1)$$

来表示刚体相对参考坐标系的指向,式中  $\triangleq$  表示定义.

另一方面,当已知参考坐标系0的情况下,给定一个  ${}^0\boldsymbol{R}_1$ ,即能确定出坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$  的指向.这表明坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$  的指向与矩阵  ${}^0\boldsymbol{R}_1$  是一一对应的.

对于矩阵  ${}^0\boldsymbol{R}_1$ ,需要说明以下几点:

① 若记  $X, Y, Z$  轴上的单位矢量为  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ , 则由式(1-1)知

$${}^0\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} & \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{y} & \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{y} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) & \cos(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}) & \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \\ \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}) & \cos(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{y}) & \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) \\ \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{z}) & \cos(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{z}) & \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) \end{bmatrix}$$

式中,  $\cos(\cdot, \cdot)$  表示两矢量间夹角的余弦,故矩阵  ${}^0\boldsymbol{R}_1$  又称为系1(即坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$ ) 相对系0(即坐标系  $OXYZ$ ) 的方向余弦矩阵.

② 尽管  $3 \times 3$  方向余弦矩阵  ${}^0\boldsymbol{R}_1$  中有9个元素,但其中只有3个元素是独立的,因为这时存在6个约束方程

$$\|\boldsymbol{n}\| = \|\boldsymbol{o}\| = \|\boldsymbol{a}\| = 1, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$$

式中  $\|\cdot\|$  表示矢量的模.

③  ${}^0\boldsymbol{R}_1$  是把矢量在系1中的坐标表达式变为在系0中的坐标表达式的变换矩阵.事实上,若记矢量  $\boldsymbol{b}$  在  $OXYZ$  和  $O_1\xi\eta\zeta$  中的坐标表达式分别为

$${}^0\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_\xi \\ b_\eta \\ b_\zeta \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} b_x &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = (b_n \mathbf{n} + b_o \mathbf{o} + b_a \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} \\ &= b_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + b_o (\mathbf{o} \cdot \mathbf{x}) + b_a (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \\ &= [\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{o} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}] \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} b_y &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{o} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}] \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix} \\ b_z &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{o} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{z}] \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{o} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_o \\ b_a \end{bmatrix}$$

即

$${}^0\mathbf{b} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{b}$$

①  ${}^0\mathbf{R}_1$  是正交矩阵, 即有  $({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T$ , 亦即  ${}^1\mathbf{R}_0 = ({}^0\mathbf{R}_1)^T$  (习题1-1).

### 三、旋转变换

#### 1. 欧拉公式

设有坐标系0, 将其绕着过系0原点的一轴转动一个角度后得到一个新的坐标系1, 以下研究求系1相对系0的方向余弦矩阵的问题.

记转轴上单位矢量  $\mathbf{k}$  在系0中坐标表达式为  ${}^0\mathbf{k} \triangleq [k_x, k_y, k_z]^T$ , 绕此轴的转角为  $\theta$ , 则有以下欧拉公式(习题1-3):

$${}^0\mathbf{R}_1 = (\cos \theta) \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) {}^0\mathbf{k} {}^0\mathbf{k}^T + (\sin \theta) \mathbf{S}({}^0\mathbf{k}) \triangleq \mathbf{R}_k(\theta) \quad (1-2)$$

式中  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,

$$\mathbf{S}({}^0\mathbf{k}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

称为 ${}^0k$ 所对应的叉乘矩阵, 因为很容易验证: 对任一 ${}^0b$ , 均有 $S({}^0k){}^0b = {}^0k \times {}^0b$ . 显然, 反对称矩阵 $S({}^0k)$ 是与 ${}^0k$ 一一对应的.

## 2. 旋转矩阵

可以证明: 任意给定一个坐标系及希望它达到的指向, 总可以找到一个过坐标系原点的轴(用轴上的单位矢量 $k$ 表示)和一个转角 $\theta$ , 使得坐标系绕 $k$ 轴转动 $\theta$ 角后具有所希望的指向. 换句话说: 任给一方向余弦矩阵 ${}^0R_1$ , 总可找到单位矢量 $k$ 和角 $\theta$ , 使得 $R_k(\theta) = {}^0R_1$ (习题1-8). 这表明: 方向余弦矩阵可用来描述坐标系的旋转. 若记旋转前的坐标系为系0, 旋转后得到的新坐标系为系1, 则 ${}^0R_1$ 又被称为从系0到系1的旋转矩阵.

另外, 若一矢量 $b$ 在系0中的坐标表达式为 ${}^0b$ , 将 $b$ 绕一轴 $k$ 转动 $\theta$ 角, 得到一个新的矢量 $b'$ . 记 $b'$ 在系0中的坐标系表达式为 ${}^0b'$ , 以下研究 ${}^0b$ 与 ${}^0b'$ 间的关系. 建立一坐标系1与矢量 $b$ 固连且在 $b$ 转动前与系0重合, 则当 $b$ 转动时系1也随之转动. 当转动完成后, 从系0到系1的转动可用旋转矩阵 ${}^0R_1$ 表示. 因为系1与矢量 $b$ 固连, 故有 ${}^1b' = {}^0b$ , 从而知

$${}^0b' = {}^0R_1 {}^1b' = {}^0R_1 {}^0b$$

这个公式表明: 旋转矩阵 ${}^0R_1$ 可表示矢量的旋转变换, 即它是矢量旋转前后的坐标表达式间的变换矩阵.

## 3. 基本旋转矩阵

绕坐标轴的转动称为基本转动. 绕 $X, Y, Z$ 轴的三个基本转动所对应的旋转矩阵称为基本旋转矩阵. 由欧拉公式(1-2)知这3个基本旋转矩阵为

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 4. 连续相对转动的合成

设一坐标系相对坐标系0转动后得到坐标系1, 再相对坐标系1转动后得到坐标系2. 由于这种转动每次都是相对所得到的前一坐标系而进行的, 故常称为相对转动. 记从系0到系1的旋转矩阵为 ${}^0R_1$ , 从系1到系2的旋转矩阵为 ${}^1R_2$ , 以下研究如何求出从系0到系2的旋转矩阵 ${}^0R_2$ .

记任一矢量 $b$ 在系0、系1和系2中的坐标分别为 ${}^0b$ 、 ${}^1b$ 和 ${}^2b$ , 则由定义知

$${}^0b = {}^0R_1 {}^1b, \quad {}^1b = {}^1R_2 {}^2b, \quad {}^0b = {}^0R_2 {}^2b$$

故

$${}^0\boldsymbol{b} = {}^0\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{b} = {}^0\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{R}_2^2\boldsymbol{b} = {}^0\boldsymbol{R}_2^2\boldsymbol{b}$$

由  $\boldsymbol{b}$  的任意性知:  ${}^0\boldsymbol{R}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{R}_2$ . 上述推理可推广到多次连续的相对转动, 从而得出以下结论: 连续相对转动的旋转矩阵可按相对转动的次序连续右乘各次转动的旋转矩阵来得到.

### 5. 欧拉角

要使一坐标系经旋转后达到一给定的指向, 用求转轴  $\boldsymbol{k}$  和转角  $\theta$  的方法是很麻烦的 (参见习题 1-8 的结果). 但可以证明: 每个任意给定的指向都可通过 3 个连续的绕坐标轴的相对转动来实现, 即: 任一方向余弦矩阵等于 3 个基本旋转矩阵的乘积. 这 3 个基本旋转矩阵的转角称为欧拉角.

例如, 坐标系  $OXYZ$  可经过以下 3 个连续绕坐标轴的相对转动变为坐标系  $O\xi\eta\zeta$  (参看图 1-2):

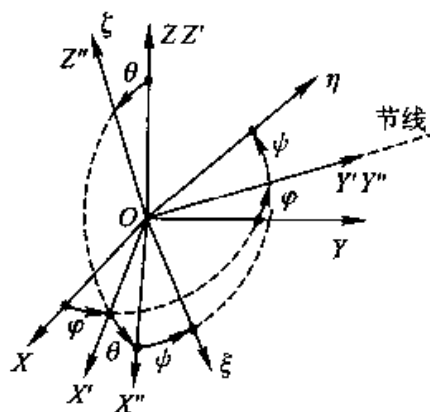


图1-2

第1步: 绕  $Z$  轴转  $\varphi$  角, 坐标系  $OXYZ$  变为  $OX'Y'Z'$  (其中  $Z' = Z$ );

第2步: 绕新的  $Y$  轴 ( $Y'$  轴) 转  $\theta$  角, 坐标系  $OX'Y'Z'$  变为  $OX''Y''Z''$  (其中  $Y'' = Y'$ );

第3步: 绕新的  $Z$  轴 ( $Z''$  轴) 转  $\psi$  角, 坐标系  $OX''Y''Z''$  变为  $O\xi\eta\zeta$ .

这里的 3 个转角  $\{\varphi, \theta, \psi\}$  即为欧拉角. 由前所述的连续相对转动时旋转矩阵的求法, 可以用欧拉角表示出从坐标系  $OXYZ$  (系 0) 到坐标系  $O\xi\eta\zeta$  (系 1) 的旋转矩阵

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{R}_1 &= \boldsymbol{R}_z(\varphi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_z(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi c\theta c\psi & s\varphi s\psi & -c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta \\ s\varphi c\theta c\psi + c\varphi s\psi & -s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta & s\varphi s\psi \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

式中,  $c\varphi \triangleq \cos \varphi$ ,  $s\varphi \triangleq \sin \varphi$ ,  $c\theta \triangleq \cos \theta$ ,  $s\theta \triangleq \sin \theta$ ,  $c\psi \triangleq \cos \psi$ ,  $s\psi \triangleq \sin \psi$ .

对于欧拉角,需要说明的是:

① 是否任一指向都可用3个欧拉角来实现,即任给一指向,如何确定3个欧拉角.对于这一问题的回答是肯定的.具体方法是:首先由图1-2知 $\theta$ 是Z轴与 $\zeta$ 轴间的夹角.再找出 $\xi\eta$ 平面与XY平面的交线 $\bar{OY}'$ (称为节线),显然 $\varphi$ 是Y轴与节线间的夹角, $\psi$ 是节线与 $\eta$ 轴间的夹角.当然,也可以利用解析的方法求出3个欧拉角(习题1-10).

② 欧拉角不是唯一确定的.因为易知欧拉角 $\{\varphi, \theta, \psi\}$ 与 $\{\varphi + \pi, -\theta, \psi + \pi\}$ 对应于同一指向.

③ 欧拉角的定义不是唯一的.在定义欧拉角时,三次转动的轴的选取及转动的顺序是至关重要的.上述定义的欧拉角是由依次绕Z,Y,Z轴的三个相对转动得到的,故常称为ZYZ欧拉角.类似地,还可定义ZXZ欧拉角,ZYX欧拉角(习题1-11).

## 6. 齐次变换矩阵

### (1) 点在不同坐标系中的坐标变换

设点Q在坐标系OXYZ(系0)和 $O_1\xi\eta\zeta$ (系1)中的坐标分别为 ${}^0r$ 和 ${}^1r$ (参看图1-3).记系1的原点 $O_1$ 在系0中的坐标为 ${}^0p$ ,系1三个轴上的

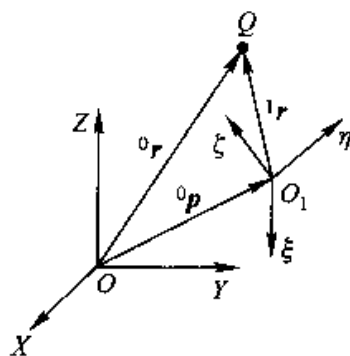


图1-3

单位矢量分别为 $n, o, a$ , 则有

$$\begin{aligned} {}^0r &= {}^0(\overrightarrow{OQ}) = {}^0p + {}^0(\overrightarrow{O_1Q}) \\ &= {}^0p + [{}^0n, {}^0o, {}^0a] {}^1r = {}^0p + {}^0R_1 {}^1r \end{aligned} \quad (1-4)$$

### (2) 齐次变换矩阵

利用点的坐标变换公式(1-4)进行多个坐标系间的坐标变换时是

较繁琐的. 例如: 当已知系1相对系0的位置和指向及系2相对系1的位置和指向时, 求点Q在系2和系0间的坐标变换关系. 记点Q在系0, 系1和

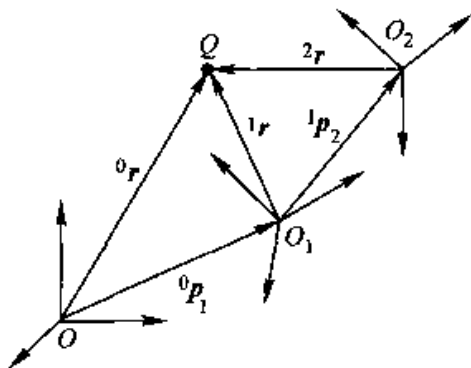


图1-4

系2中的坐标分别为 ${}^0r$ ,  ${}^1r$ 和 ${}^2r$ (参看图1-4), 则由

$${}^0r = {}^0p_1 + {}^0R_1 {}^1r, \quad {}^1r = {}^1p_2 + {}^1R_2 {}^2r$$

知

$${}^0r = {}^0p_1 + {}^0R_1 ({}^1p_2 + {}^1R_2 {}^2r) = {}^0p_1 + {}^0R_1 {}^1p_2 + {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2r \quad (1-5)$$

为简化多个坐标系间点的坐标变换式, 利用式(1-4)可得

$$\begin{bmatrix} {}^0r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0n & {}^0o & {}^0a & {}^0p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r \\ 1 \end{bmatrix}$$

此式可简记为

$${}^0\bar{r} = {}^0A_1 {}^1\bar{r}$$

式中,  ${}^0\bar{r}$ ,  ${}^1\bar{r}$ 称为点Q在系0和系1中的齐次坐标;  $4 \times 4$ 矩阵 ${}^0A_1$ 为从系0到系1的齐次变换矩阵.

这里值得说明的是:

① 关于齐次坐标的定义. 若以空间中一已知点O为参考点, 则任一点Q的位置由矢径 $r = \overrightarrow{OQ}$ 完全确定. 因此只要知道点Q的方向(即 $\overrightarrow{OQ}$ 方向上任一以O为起点的矢量 $a_0$ )和Q与O间的距离(即比值 $\alpha \triangleq \frac{\|a_0\|}{\|\overrightarrow{OQ}\|}$ ),

即可确定出 $r = \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\alpha} a_0$ . 因此称点Q的方程为

$$\alpha r = a_0 \quad (1-6)$$

这个方程(即点Q)由 $a_0$ 和 $\alpha$ 唯一确定. 在数学上, 坐标被称为齐次的是指用任一非零常数乘此坐标后, 坐标所代表的实体不变. 根据点的方程

(1-6), 定义点Q的齐次坐标为 $\begin{bmatrix} a_0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ . 易证明这一坐标确是齐次的, 因为

用任一非零常数  $\lambda$  乘此坐标后, 由方程(1-6) 知  $\begin{bmatrix} \lambda a_0 \\ \lambda \alpha \end{bmatrix}$  仍表示原来的点. 通常可不失一般性地在齐次坐标中取  $\alpha = 1$ , 因为当  $\alpha \neq 1$  时可将齐次坐标乘  $\frac{1}{\alpha}$  后将  $\alpha$  变为 1. 按齐次坐标的定义知, 这种  $\alpha = 1$  的齐次坐标仍表示原来的点.

② 齐次变换矩阵  ${}^0A_1$  由方向余弦矩阵  ${}^0R_1$  和  ${}^0p = {}^0(\overrightarrow{OO_1})$  组成, 它包含了刻画两坐标系间相对指向和位置的全部信息, 因此可用它很完整、方便地表示出空间中两刚体间的相对关系.

③ 齐次变换矩阵  ${}^0A_1$  具有以下和方向余弦矩阵相类似的意义和性质:

(i)  ${}^0A_1$  表示了系 1 相对系 0 的位置和指向.

(ii)  ${}^0A_1$  是把点在系 1 中的齐次坐标变为在系 0 中的齐次坐标的变换矩阵.

(iii)  ${}^0A_1$  表示系 1 可由系 0 经移动和转动后得到.

(iv) 沿坐标轴的移动或绕坐标轴的转动统称为基本运动, 对应有以下两类共 6 个基本齐次变换矩阵.

第一类: 沿坐标轴的移动 (这时方向余弦矩阵为  ${}^0R_1 = I$ )

a. 沿 X 轴移动  $d$ ; 对应的齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \text{Trans}_x(d)$$

b. 沿 Y 轴移动  $d$ ; 对应的齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \text{Trans}_y(d)$$

c. 沿 Z 轴移动  $d$ ; 对应的齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \text{Trans}_z(d)$$

第二类: 绕坐标轴的转动 (这时  ${}^0p = 0$ )

a. 绕 X 轴转动  $\theta$ ; 对应的齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} R_x(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \text{Rot}_x(\theta)$$

b. 绕 Y 轴转动  $\theta$ ; 对应的齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} R_y(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \text{Rot}_y(\theta)$$

c. 绕 Z 轴转动  $\theta$ ; 对应的齐次变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} R_z(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \text{Rot}_z(\theta)$$

(v) 连续相对运动的齐次变换矩阵可按相对运动的次序连续右乘各次运动的齐次变换矩阵得到. 事实上, 由式(1-5)知

$$\begin{bmatrix} {}^0r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 & {}^0R_1 {}^1p_2 + {}^0p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1R_2 & {}^1p_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2r \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$${}^0\hat{r} = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2\hat{r} \quad (1-7)$$

此式表明

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2$$

显然, 这一结果也可推广到多次连续相对运动的情况.

另外, 将式(1-7)与式(1-5)比较可知: 利用齐次变换矩阵进行点的齐次坐标变换, 其表达式要比进行点的三维坐标变换简洁得多.

(3) 齐次变换矩阵的逆

由

$${}^0r = {}^0p + {}^1R_1 {}^1r$$

可知

$${}^1r = -({}^0R_1)^T {}^0p + ({}^0R_1)^T {}^0r$$

故有

$$\begin{bmatrix} {}^1r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^0R_1)^T & -({}^0R_1)^T {}^0p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0r \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$({}^0A_1)^{-1} = {}^1A_0 = \begin{bmatrix} ({}^0R_1)^T & -({}^0R_1)^T {}^0p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^0n)^T & -n \cdot p \\ ({}^0o)^T & -o \cdot p \\ ({}^0a)^T & -a \cdot p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**例 1-1** 机器人末端夹持器的示意图如图 1-5(a)所示, 坐标系  $O_1\xi\eta\zeta$ (系 1) 与夹持器固连. 将夹持器绕经过参考坐标系  $OXYZ$ (系 0) 的



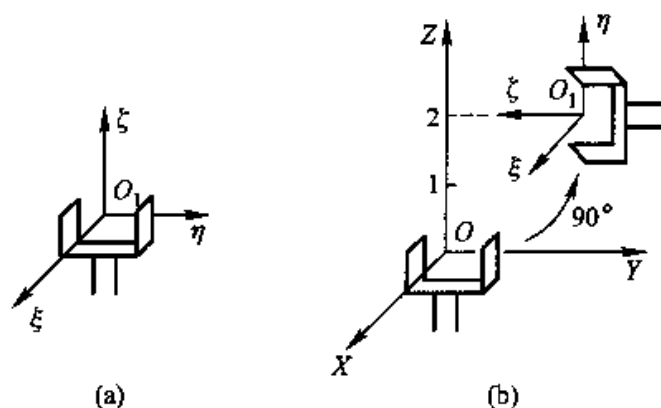


图 1-5

$[0, 0, 2]^T$  点且平行于  $X$  轴的一轴转动  $90^\circ$  后, 其位置如图 1-5(b) 所示. 这时夹持器位置可用  ${}^0(\overrightarrow{OO_1}) = [0, 2, 2]^T$  表示, 转动后夹持器的指向可用方向余弦矩阵

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

表示. 这一指向的  $ZXZ$  欧拉角为  $\{-90^\circ, 90^\circ, 90^\circ\}$  (或者  $\{90^\circ, -90^\circ, 270^\circ\}$ ). 转动后系 0 到系 1 的齐次变换矩阵

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**例 1-2** 机器人、方桌、物体和照相机的相对位置如图 1-6 所示. 坐标系  $O_0X_0Y_0Z_0$  (系 0),  $O_1X_1Y_1Z_1$  (系 1),  $O_2X_2Y_2Z_2$  (系 2) 和  $O_3X_3Y_3Z_3$  (系 3) 分别与机器人基座、方桌、物体和照相机固连. 方桌高 1 m, 每边长 2 m. 系 2 原点  $O_2$  位于方桌中心, 系 3 原点  $O_3$  位于  $O_2$  正上方. 求出系 0 到系 1 的齐次变换矩阵  ${}^0A_1$ , 系 1 到系 2 的齐次变换矩阵  ${}^1A_2$ , 系 2 到系 3 的齐次变换矩阵  ${}^2A_3$  以及系 0 到系 3 的齐次变换矩阵  ${}^0A_3$  (长度单位为 m).

由连续相对运动的齐次变换矩阵求法知

$${}^0A_1 = \text{Trans}_y(1)\text{Trans}_x(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

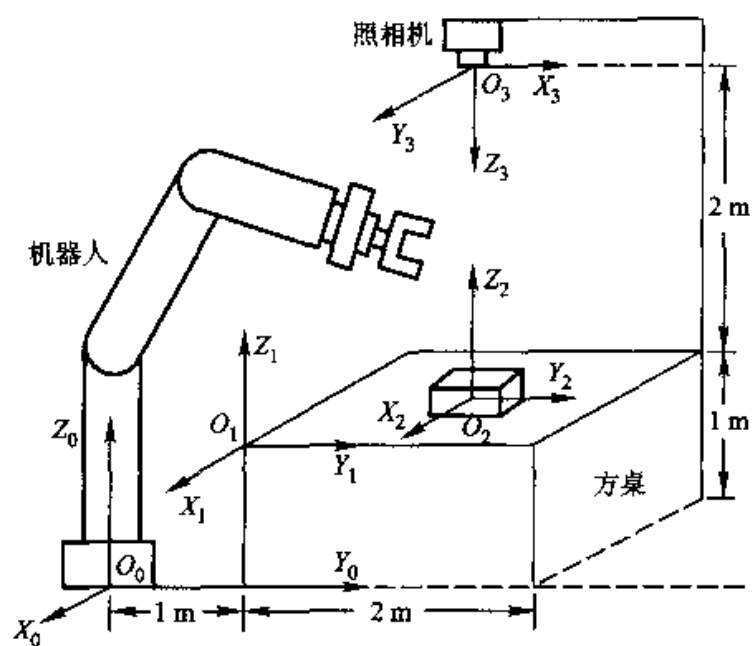


图 1-6

$${}^1A_2 = \text{Trans}_y(1)\text{Trans}_x(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \text{Trans}_z(2)\text{Rot}_z(90^\circ)\text{Rot}_z(180^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.2 机器人杆件坐标系的建立

### 一、机器人杆件与关节的编号

开链(Open Chain)机器人,也称串接杆件(Serial Link)机器人,其结构示意图如图1-7所示。它是由若干刚性杆件首尾相连而成,杆件间的连接物称为关节。杆件和关节的编号方法为:基座为杆0,从基座起依次向上为杆1、杆2、…;关节*i*连接杆*i-1*和杆*i*,即杆*i*离基座近的一端(简称近端)有关节*i*,而离基座远的一端(简称远端)有关节*i+1*。机器人的每个杆(除杆0,即基座外)都有一单独的作动器(Actuator),所产生的驱动力经关节*i*的轴传到杆*i*上,使其可产生独立的相对运动。

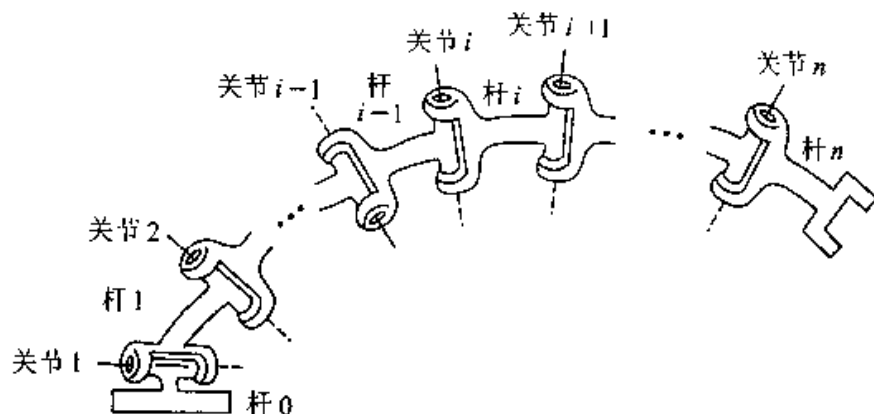


图1-7

关节的种类很多,但基本的是两种单自由度柱关节:一是圆柱关节,又称转动关节,它有一个转动自由度,其结构与结构示意图参见图1-8(a);二是棱柱关节,又称移动关节,它有一个移动自由度,其结构与结构示意图参见图1-8(b)。其他类型的 $m(>1)$ 自由度的关节都可等效为 $m$ 个单自由度柱关节(其间由 $m-1$ 个零长度的杆件相连)。因此在研究机器人时总可不失一般性地认为其关节均为单自由度的转动或移动关节。这样,对于开链机器人来说,其自由度数等于其关节的个数;即对于 $n$ 自由度机器人来说,它有 $n$ 个关节, $n+1$ 个杆(包括杆0)。

为刻画关节*i*是转动关节还是移动关节,引入一个数

$$\sigma_i = \begin{cases} 0, & \text{当关节 } i \text{ 是转动关节} \\ 1, & \text{当关节 } i \text{ 是移动关节} \end{cases}$$

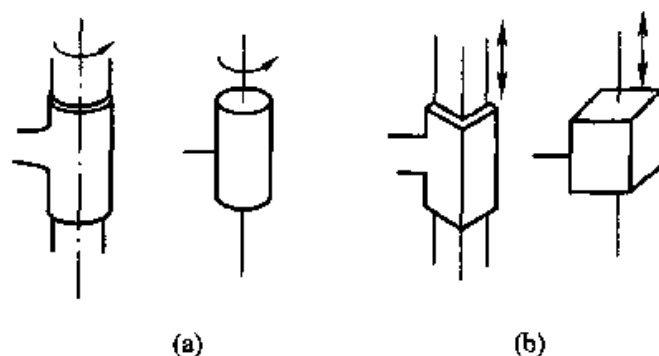


图 1-8

## 二、建立杆件坐标系的 D-H 方法

以下介绍合理地建立与机器人各杆固连坐标系的方法,因这一方法是 Danevit, Hartenberg 给出的<sup>[5]</sup>,故称为 D-H 方法。

### 1. 建立杆件坐标系的方法

对于  $n$  自由度机器人,可用以下步骤建立与各杆件  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 固连的坐标系  $O_i X_i Y_i Z_i$ ,并简称其为系  $i$ (注意:其中每一步都从  $i = 0$  到  $i = n$  进行完后再执行下一步骤)。

第1步:确定各坐标系的  $Z$  轴。基本原则是:选取  $Z_i$  轴沿关节  $i+1$  的轴向(指向可任选,但通常都将各平行的  $Z$  轴均取为相同的指向)。这里需要说明的是:

① 当关节  $i+1$  是移动关节(即  $\sigma_{i+1} = 1$ )时,其轴线指向已知但位置不确定,这时选取  $Z_i$  轴与  $Z_{i-1}$  轴相交(若还有  $\sigma_{i+2} = 1$ ,则取  $Z_i$  轴和  $Z_{i-1}$  轴都与  $Z_{i+2}$  轴相交;……)。

② 机器人杆  $n$  的远端没有关节  $n+1$ ,这时可选取  $Z_n$  轴与  $Z_{n-1}$  轴重合。

第2步:确定各坐标系的原点。基本原则是:选取原点  $O_i$  在过  $Z_{i-1}$  轴和  $Z_i$  轴的公法线上(即  $O_i$  为此公法线与  $Z_i$  轴的交点)。这里要说明的是:

① 当  $Z_{i-1}$  轴与  $Z_i$  轴平行时,经过两轴的公法线不唯一,确定  $O_i$  的方法是:若  $Z_{i-1}$  轴与  $Z_i$  轴重合,取  $O_i = O_{i-1}$ 。若  $Z_{i-1}$  轴与  $Z_i$  轴平行且不重合;过  $O_{i-1}$  点作  $Z_{i-1}$  轴和  $Z_i$  轴的公法线,取此公法线与  $Z_i$  轴的交点为  $O_i$ 。

② 由于没有  $Z_{-1}$  轴,故无法按上述基本原则选取  $O_0$ 。这时确定  $O_0$  的方法是:若  $Z_0$  与  $Z_1$  相交时,取  $O_0 = O_1$ ;若  $Z_0$  与  $Z_1$  不相交时,取  $O_0$  在  $Z_0$  与  $Z_1$  的公法线上。

第3步:确定各坐标系的  $X$  轴。基本原则是:选取  $X_i$  轴沿过  $Z_{i-1}$  轴和

$Z_i$  轴的公法线,方向从  $Z_{i-1}$  指向  $Z_i$ . 这里要说明的是:

① 当  $Z_{i-1}$  轴与  $Z_i$  轴重合时(这时  $O_i = O_{i-1}$ ),选取  $X_i$  轴满足在初始位置时  $X_i$  轴与  $X_{i-1}$  轴重合.

② 当  $Z_{i-1}$  轴与  $Z_i$  轴相交且不重合时,选择  $X_i = \pm (Z_{i-1} \times Z_i)$ ,通常使所有平行的  $X$  轴均有相同的指向.

③ 当  $i = 0$  时,由上所述知,这时  $O_0 = O_1$  或  $O_0$  在  $Z_0$  轴和  $Z_1$  轴的公法线上,选取在初始位置时  $X_0$  轴与  $X_1$  轴重合.

第4步:确定各坐标系的  $Y$  轴. 原则是使  $Y_i = Z_i \times X_i$ ,即构成右手坐标系.

## 2. D-H 参数

当用 D-H 方法建立起各杆件坐标系后,系  $i-1$  和系  $i$  间的相对位置和指向可用以下 4 个参数表示:

① 杆件长度  $a_i$ , 定义为从  $Z_{i-1}$  轴到  $Z_i$  轴的距离,沿  $X_i$  轴的指向为正.

② 杆件扭角  $\alpha_i$ , 定义为从  $Z_{i-1}$  轴到  $Z_i$  轴的转角,绕  $X_i$  轴正向转动为正,且规定  $\alpha_i \in (-\pi, \pi]$ .

③ 关节距离  $d_i$ , 定义为从  $X_{i-1}$  轴到  $X_i$  轴的距离,沿  $Z_{i-1}$  轴的指向为正. ④ 关节转角  $\theta_i$ , 定义为从  $X_{i-1}$  轴到  $X_i$  轴的转角,绕  $Z_{i-1}$  轴正向转动为正,且规定  $\theta_i \in (-\pi, \pi]$ .

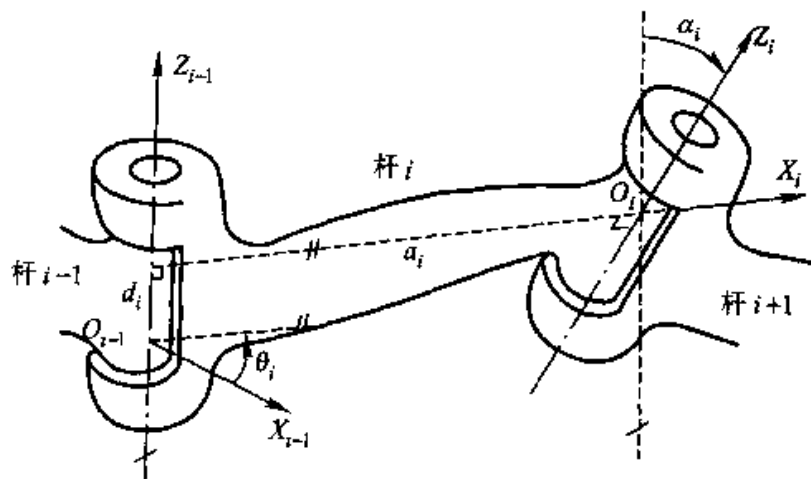


图1-9

参数  $\{a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i\}$  的意义见图1-9. 这些参数被称为 D-H 参数, 又常被称为机器人的运动参数或几何参数. 这里要说明的是:

① 杆  $i$  的两端分别有  $Z_{i-1}$  和  $Z_i$  轴,  $a_i$  和  $\alpha_i$  分别描述了从  $Z_{i-1}$  轴到  $Z_i$  轴的距离和转角. 关节  $i$  的轴向  $Z_{i-1}$  是  $X_{i-1}$  轴和  $X_i$  轴的公法线,  $d_i$  和  $\theta_i$

分别描述了从  $X_{i-1}$  轴到  $X_i$  轴的距离和转角.

②  $a_i$  和  $\alpha_i$  由杆  $i$  的结构确定, 是常数; 而  $d_i$  和  $\theta_i$  与关节  $i$  的类型有关, 其中一个为常数, 另一个是变量. 当关节  $i$  是转动关节 (即  $\sigma_i = 0$ ) 时,  $d_i$  是常数,  $\theta_i$  是变量; 当关节  $i$  是移动关节 (即  $\sigma_i = 1$ ) 时,  $d_i$  是变量,  $\theta_i$  是常数. 通常称  $q_i \triangleq \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i d_i$  (其中  $\bar{\sigma}_i \triangleq 1 - \sigma_i$ ) 为关节变量,  $q_i$  刻画了系  $i$  相对系  $i-1$  的运动.

③ 利用 D-H 参数的概念可看出, 在用 D-H 方法建立杆坐标系时, 如果某一步不能按基本原则唯一确定时, 总是在设置时力图使更多的 D-H 参数为零 (在后面的章节中可看出, 这样做可以极大地简化机器人运动学与动力学模型及计算的复杂性). 特别是当  $i=1$  和  $n$  时, 可不失一般性地认为一些 D-H 参数为零, 具体地说有

$$\bar{\sigma}_1 a_1 = \sigma_1 \theta_1 + \bar{\sigma}_1 d_1 = 0$$

$$a_n = \alpha_n = \sigma_n \theta_n + \bar{\sigma}_n d_n = 0$$

④ 有时为应用方便, 也可不像前面所述那样设置系  $n$ , 而是将系  $n$  设置在机器人末端夹持器的端点 (参看图 1-10), 或在其所夹持工具的端点.

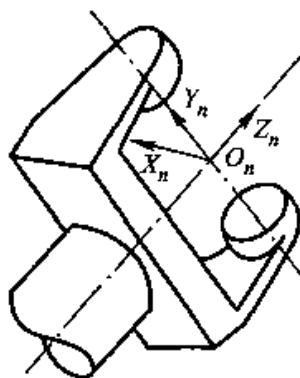


图1-10

### 3. 用 D-H 参数确定坐标系间的齐次变换矩阵

由图1-9可以明显看出, 系  $i-1$  可经过以下连续的相对运动变到系  $i$ :

第1步: 沿  $Z_{i-1}$  轴移动  $d_i$ .

第2步: 绕  $Z_{i-1}$  轴转动  $\theta_i$ .

第3步: 沿  $X_i$  轴移动  $a_i$ .

第4步: 绕  $X_i$  轴转动  $\alpha_i$ .

由连续相对运动时齐次变换矩阵的求法知

$${}^1A_4 = \text{Trans}_z(d_1)\text{Rot}_z(\theta_1)\text{Trans}_x(a_1)\text{Rot}_x(\alpha_1)$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & -ca_1s_1 & sa_1s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & ca_1c_1 & -sa_1c_1 & a_1s_1 \\ 0 & sa_1 & ca_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

式中,  $s_i \triangleq \sin \theta_i$ ,  $c_i \triangleq \cos \theta_i$ ,  $sa_i \triangleq \sin \alpha_i$ ,  $ca_i \triangleq \cos \alpha_i$ .

例1-3 对Stanford臂用D-H方法建立杆坐标系如图1-11所示. 其D-H参数见表1-1.

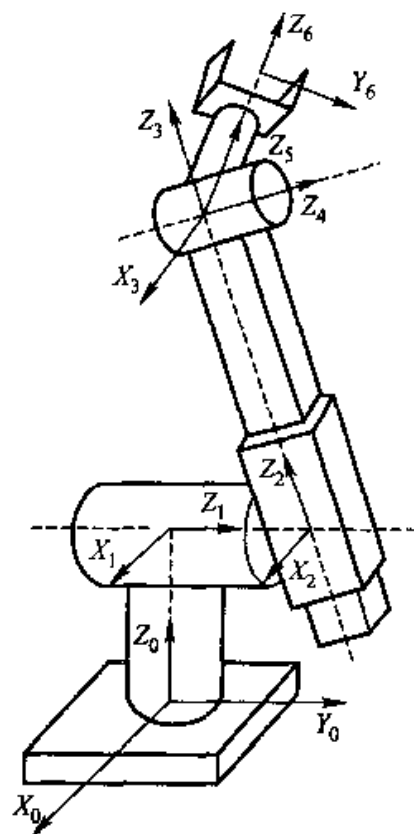


图1-11

表 1-1

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-90^\circ$	$d_1$	$\theta_1$ (变量)
2	0	$90^\circ$	$d_2$	$\theta_2$ (变量)
3	0	0	$d_3$ (变量)	0

续表

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
4	0	$-90^\circ$	0	$\theta_4$ (变量)
5	0	$90^\circ$	0	$\theta_5$ (变量)
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$ (变量)

由后3个杆的 D-H 参数可算出

$$\begin{aligned}
 {}^3A_6 &= {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} {}^3R_6 & {}^3p_{36} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_6d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_6d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

与式(1-3)相比较可知,后3个转角 $\{\theta_4, \theta_5, \theta_6\}$ 即为从系3到系6的3个 ZYZ 欧拉角。

### 三、用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系

#### 1. 传动轴坐标系与驱动轴坐标系

由上所述知:杆 $i$ 的近端是关节 $i$ ,远端是关节 $i+1$ 。驱动杆 $i$ 的力(或力矩)是经由关节 $i$ 的轴线施加到杆 $i$ 上的,故关节 $i$ 的轴称为杆 $i$ 的驱动轴(Driving Axis)。对杆 $i$ 来说,关节 $i+1$ 的作用是将杆 $i$ 的运动和力传到杆 $i+1$ 上,故关节 $i+1$ 的轴称为杆 $i$ 的传动轴(Transmitting Axis)。在用 D-H 方法建立杆坐标系时,和杆 $i$ 固连的坐标系 $i$ 的 $Z_i$ 轴沿杆 $i$ 的传动轴轴向,故称用这种方法建立的杆坐标系为传动轴坐标系。这种建立杆坐标系方法的一个明显缺点是:对于树形结构或含闭链的机器人,有的杆上会存在多于一个传动轴,这时用 D-H 方法建立杆坐标系时会产生歧义。

1986年 Khalil, Kleinfinger 提出一种修改的 D-H 方法<sup>[6]</sup>,其特点是:选取和杆 $i$ 固连坐标系的 $Z_i$ 轴沿杆 $i$ 的驱动轴轴向,故称用这种方法建立的杆坐标系为驱动轴坐标系。修改的 D-H 方法克服了 D-H 方法的上述缺点。

#### 2. 建立驱动轴坐标系的方法

可按以下步骤建立驱动轴坐标系:

第1步:确定 $Z_i$ 轴。基本原则是: $Z_i$ 轴沿关节 $i$ 的轴向。

第2步:确定原点 $O_i$ 。基本原则是: $O_i$ 在过 $Z_i$ 和 $Z_{i+1}$ 轴的公法线上。



第3步: 确定  $X_i$  轴. 基本原则是:  $X_i$  轴沿过  $Z_i$  和  $Z_{i-1}$  轴的公法线方向, 从  $Z_i$  指向  $Z_{i-1}$ .

第4步: 确定  $Y_i$  轴. 基本原则是:  $Y_i = Z_i \times X_i$ , 使坐标系为右手坐标系.

### 3. 修改的 D-H 参数

修改的 D-H 参数定义如下(参看图1-12):

- ① 杆件长度  $a_i$  定义为从  $Z_{i-1}$  到  $Z_i$  的距离, 沿  $X_{i-1}$  轴指向为正.
- ② 杆件扭角  $\alpha_i$  定义为从  $Z_{i-1}$  到  $Z_i$  的转角, 绕  $X_{i-1}$  轴正向转动为正.
- ③ 关节距离  $d_i$  定义为从  $X_{i-1}$  到  $X_i$  的距离, 沿  $Z_i$  轴指向为正.
- ④ 关节转角  $\theta_i$  定义为从  $X_{i-1}$  到  $X_i$  的转角, 绕  $Z_i$  轴正向转动为正.

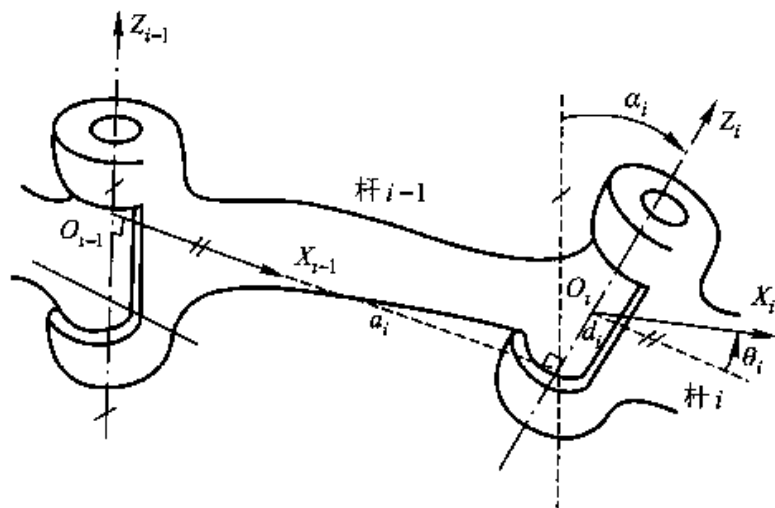


图1-12

这里值得说明的是:

- ① 在建立驱动轴坐标系遇到不可应用基本原则的特殊情况时, 总是要使修改的 D-H 参数尽可能为零. 特别是, 当  $i=1$  和  $i=n$  时, 可不失一般性地认为修改的 D-H 参数满足

$$a_1 = \alpha_1 = \sigma_1 \theta_1 + \bar{\sigma}_1 d_1 = \sigma_n \theta_n + \bar{\sigma}_n d_n = 0$$

- ② D-H 参数与修改的 D-H 参数间, 除  $i=0$  和  $i=n$  的某些特殊情况外, 一般地有以下关系:

$$\text{D-H 参数 } \{a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i\} = \text{修改的 D-H 参数 } \{a_{i-1}, \alpha_{i+1}, d_i, \theta_i\}$$

### 4. 用修改的 D-H 参数确定齐次变换矩阵

利用图1-12很容易求出用修改的 D-H 方法建立起驱动轴坐标系时的齐次变换矩阵为

$${}^{i-1}A_i = \text{Trans}_x(a_i) \text{Rot}_x(\alpha_i) \text{Trans}_z(d_i) \text{Rot}_z(\theta_i)$$

$$= \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i \\ c\alpha_i s_i & c\alpha_i c_i & -s\alpha_i & -d_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s_i & s\alpha_i c_i & c\alpha_i & d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

利用式(1-8)和(1-9)很容易证明:不论选用D-H方法或修改的D-H方法,齐次变换矩阵 ${}^{i-1}A_i$ 和其逆变换矩阵 $({}^{i-1}A_i)^{-1} = {}^iA_{i-1}$ 都只是变量 $q_i$ 的函数(习题1-18)。

## 1.3 运动学问题

### 一、问题的提法

机器人运动学问题是研究机器人关节变量 $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ 与其末端夹持器位置和指向间的关系。因末端夹持器与杆 $n$ 固连,故其位置和指向由系 $n$ 唯一确定,亦即由齐次变换矩阵 ${}^0A_n$ 唯一确定,因此也可以说运动学问题是研究 $\mathbf{q}$ 与 ${}^0A_n$ 间的关系。

运动学问题分为两类:一类是正运动学问题,即已知 $\mathbf{q}$ ,求相应的 ${}^0A_n(\mathbf{q})$ ;另一类是逆运动学问题,即已知 ${}^0A_n$ ,求对应的 $\mathbf{q}$ 。

### 二、正运动学问题的解法

当已知 $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ 时,可确定 ${}^{i-1}A_i(q_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ),由连续相对运动齐次变换矩阵的求法立即可得正运动学问题的解为

$${}^0A_n(\mathbf{q}) = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) \cdots {}^{n-1}A_n(q_n) \quad (1-10)$$

此方程又称为机器人的运动学方程。

### 三、逆运动学问题的解法

#### 1. Stanford臂的逆运动学问题

机器人逆运动学问题不像正运动学问题那样简单,下面先以Stanford臂为例进行研究。

**例1-4** 在1.2节的例1-3中已用D-H方法建立了Stanford臂的杆坐标系(图1-11)。现在的问题是:给定

$${}^0A_6 = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要求确定 $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_6]^T$ ,使得

$${}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) \cdots {}^4A_5(q_5) = {}^0A_5 \quad (1-11)$$

从图 1-11 中可看出系 3 原点的矢径  $\vec{p_3} \triangleq \vec{O_0O_3}$  满足

$$\vec{p_3} + d_6 \vec{z_6} = \vec{p_6}$$

式中,  $\vec{z_6}$  为  $Z_6$  轴上单位矢量,  $\vec{p_6} \triangleq \vec{O_0O_6}$ , 故此式在系 0 中的坐标表达式为

$${}^0\vec{p_3} + d_6 {}^0\vec{z_6} = {}^0\vec{p_6} \quad (1-12)$$

因已知

$${}^0A_6 = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0\vec{p_6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_6 & {}^0y_6 & {}^0z_6 & {}^0\vec{p_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  ${}^0x_6, {}^0y_6$  为  $X_6$  轴和  $Y_6$  轴上单位矢量  $\vec{x_6}, \vec{y_6}$  在系 0 中的坐标表达式, 故由式(1-12)可求出

$${}^0\vec{p_3} = {}^0\vec{p_6} - d_6 {}^0\vec{z_6} \triangleq [p_x, p_y, p_z]^T \quad (1-13)$$

由齐次变换矩阵的定义知  ${}^0\vec{p_3}$  是  ${}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3$  中最后一列的前 3 个元素, 且知  $q_3 = d_3$ , 故利用齐次变换矩阵的表达式可算出

$$\begin{bmatrix} {}^0\vec{p_3} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_1 {}^1A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1s_2q_3 - s_1d_2 \\ s_1s_2q_3 + c_1d_2 \\ c_2q_3 + d_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

利用式(1-13)和(1-14)可得出  $q_1, q_2$  和  $q_3$  应满足的方程组

$$\begin{cases} c_1s_2q_3 - s_1d_2 = p_x \\ s_1s_2q_3 + c_1d_2 = p_y \\ c_2q_3 + d_1 = p_z \end{cases} \quad (1-15)$$

若定义  $\vec{O_1O_3} = \vec{r}$ , 则由图 1-11 可知

$$\vec{p_3} = d_1 \vec{z_0} + \vec{r}$$

因  ${}^0\vec{p_3}, d_1$  和  ${}^0\vec{z_0} = [0, 0, 1]^T$  均为已知, 故由式(1-13)和(1-15)可得

$${}^0\vec{r} = {}^0\vec{p_3} - d_1 {}^0\vec{z_0} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z - d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1s_2q_3 - s_1d_2 \\ s_1s_2q_3 + c_1d_2 \\ c_2q_3 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

从图 1-11 可明显看出  $\vec{r}$  的长度  $\|\vec{r}\|$  仅与  $q_3$  有关, 利用式(1-16)计算后知

$$\|\vec{r}\|^2 = ({}^0\vec{r})^T {}^0\vec{r} = q_3^2 + d_2^2$$

因  $\|\vec{r}\|^2 - d_2^2 = q_3^2 \geq 0$ , 故可解出

$$q_3 = \pm \sqrt{\|\vec{r}\|^2 - d_2^2} = \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 - d_2^2}$$

考虑到机器人结构的限制,  $q_3$  只能取 + 号, 故求出

$$q_3 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 - d_2^2}$$

这里需要特别注意的是:当求出  $q_3$  后,很容易想到可由方程组(1-15)的第三式求出

$$q_2 = \theta_2 = \pm \arccos \left| \frac{p_z - d_1}{q_3} \right|$$

但实际在解机器人逆运动学问题时,一般并不用反三角函数  $\arccos$  或  $\arcsin$ . 主要原因一是仅用  $\arccos$  或  $\arcsin$  不能在  $[-\pi, \pi)$  范围内唯一确定出角度;二是利用它们来确定角度时,精度与角度本身的值有很大关系. 因为对任一函数  $y = f(x)$ , 当用  $x$  确定  $y$  的值时,误差  $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ , 这时精度不仅与  $x$  的测量误差  $\Delta x$  有关,也与  $f'(x)$  有关. 对于函数  $y = \arccos x$ ,  $\Delta y \approx -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x$ , 当  $x$  值在其定义域  $(-1, 1)$  内变化时,  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的值在  $(-\infty, -1)$  间变化. 但如果利用反正切函数  $y = \arctan x$ , 则  $\Delta y \approx \frac{1}{1+x^2}\Delta x$ , 当  $x$  在  $(-\infty, +\infty)$  间变化时,  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  仅在  $(0, 1]$  间变化, 因此从保证精度均匀性来看, 用反正切(反余切)函数比用反正弦(反余弦)函数更好. 另外, 为了能在  $[-\pi, \pi)$  内唯一确定出角度, 不用通常的反正切函数, 而采用双变量的反正切函数  $\text{atan2}\left(\frac{x}{y}\right)$ , 它与通常反正切函数的区别在于:可利用  $x$ ,  $y$  的符号在  $[-\pi, \pi)$  范围内唯一确定角度值.

由定义很容易验证  $\text{atan2}$  函数具有下列性质(习题1-21):

$$\theta = \text{atan2}\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) = \text{atan2}\left(\frac{k \sin \theta}{k \cos \theta}\right), \quad \forall k > 0 \quad (1-17)$$

$$\text{atan2}\left(\frac{-a}{b}\right) = -\text{atan2}\left(\frac{a}{b}\right) \quad (1-18)$$

$$\text{atan2}\left(\frac{a}{\pm b}\right) = \frac{\pi}{2} \mp \text{atan2}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1-19)$$

$$\pm \text{atan2}\left(\frac{-a}{b}\right) = \pi \pm \text{atan2}\left(\frac{a}{b}\right) \quad (1-20)$$

利用  $\text{atan2}$  函数可以求出三角方程

$$k_1 \sin \theta + k_2 \cos \theta = k_3 \quad (1-21)$$

(其中  $k_1, k_2$  和  $k_3$  满足  $k_3^2 \leq k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ) 的解为(习题1-22)

$$\theta = \text{atan2}\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \pm \text{atan2}\left(\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3}\right) \quad (1-22)$$

利用以上知识可完成 Stanford 臂逆运动学的求解问题. 将式(1-15)前两式分别乘  $s_1, c_1$  后相减, 可消去  $q_3$ , 得到

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = d_2 \quad (1-23)$$

这一方程具有式(1-21)的形式,故由式(1-22)和(1-18)知

$$\begin{aligned} q_1 = \theta_1 &= \operatorname{atan2}\left\{\frac{-p_x}{p_y}\right\} \pm \operatorname{atan2}\left\{\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2}\right\} \\ &= -\operatorname{atan2}\left\{\frac{p_x}{p_y}\right\} \pm \operatorname{atan2}\left\{\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2}\right\} \end{aligned} \quad (1-24)$$

这里要注意的是:

① 只有当  $p_x^2 + p_y^2 \geq d_2^2$  时  $q_1$  才有解. 当不满足此式时,所给出的 ${}^0A_6$ 不在机器人的工作空间(即机器人手端所能达到的位置和指向范围)内.

②  $q_1$  有两个解. 这分别对应杆1的两种状态.

再将式(1-15)的前两式分别乘  $c_1, s_1$  后相加得

$$s_2 q_3 = p_x c_1 + p_y s_1$$

与式(1-15)中最后一式联立得

$$\frac{s_2}{c_2} = \frac{p_x c_1 + p_y s_1}{p_z - d_1}$$

由此式解出

$$q_2 = \theta_2 = \operatorname{atan2}\left\{\frac{p_x c_1 + p_y s_1}{p_z - d_1}\right\}$$

这时要注意的是: 因  $q_1 = \theta_1$  有两个解, 故  $q_2 = \theta_2$  也相应地有两个解. 这样  $\{q_1, q_2, q_3\}$  有两组解.

当求出  $q_1, q_2$  和  $q_3$  后,  ${}^0A_3 = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) {}^2A_3(q_3)$  已知, 故

$$\begin{aligned} {}^3A_6 &= ({}^0A_3)^{-1} {}^0A_6 \triangleq \begin{bmatrix} {}^3x_6 & {}^3y_6 & {}^3z_6 & {}^3p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & \hat{z}_1 & \hat{p}_1 \\ \hat{x}_2 & \hat{y}_2 & \hat{z}_2 & \hat{p}_2 \\ \hat{x}_3 & \hat{y}_3 & \hat{z}_3 & \hat{p}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-25)$$

也为已知. 另外, 又可计算出

$$\begin{aligned} {}^1A_6 &= {}^1A_4(q_4) {}^4A_5(q_5) {}^5A_6(q_6) \\ &= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_6 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} {}^3R_6 & {}^3p_{36} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-26)$$

比较式(1-25)和(1-26)前3行的元素可得12个方程,但由式(1-26)知 ${}^3p_{30}$ 元素和 ${}^3R_6$ 中第3列的元素成比例,故只需考虑 ${}^3R_6$ 中元素所对应的9个方程.因这时待求的未知数只有3个,且由上述 ${}^3R_6$ 所确定的9个方程也并非彼此独立,所以在求解时并不需要用到所有的9个方程.

比较式(1-25)和(1-26)第3列前两个元素知

$$\begin{cases} c_4 s_5 = \hat{z}_1 \\ s_4 s_5 = \hat{z}_2 \end{cases} \quad (1-27)$$

$$(1-28)$$

这时有两种情况:

① 若 $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ 不全为零,显然这时 $s_5 \neq 0$ ,故由上两式可解出

$$q_4 = \theta_4 = \begin{cases} \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_2}{\hat{z}_1}\right), & \text{当 } s_5 > 0 \\ \text{atan2}\left(\frac{-\hat{z}_2}{-\hat{z}_1}\right) = \pi + \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_2}{\hat{z}_1}\right), & \text{当 } s_5 < 0 \end{cases}$$

再比较式(1-25)和(1-26)中第3行的前两个元素得

$$\begin{cases} s_5 c_6 = -\hat{x}_3 \\ s_5 s_6 = \hat{y}_3 \end{cases}$$

因 $s_5 \neq 0$ ,故上式中 $\hat{x}_3, \hat{y}_3$ 也不同时为零,这样由上式可解出

$$q_6 = \theta_6 = \begin{cases} \text{atan2}\left(\frac{\hat{y}_3}{-\hat{x}_3}\right) = \frac{\pi}{2} + \text{atan2}\left(\frac{\hat{x}_3}{\hat{y}_3}\right), & \text{当 } s_5 > 0 \\ \text{atan2}\left(\frac{-\hat{y}_3}{\hat{x}_3}\right) = -\text{atan2}\left(\frac{\hat{y}_3}{\hat{x}_3}\right), & \text{当 } s_5 < 0 \end{cases}$$

将式(1-27)和(1-28)分别乘 $c_4$ 和 $s_4$ 后相加得

$$s_5 = \hat{z}_1 c_4 + \hat{z}_2 s_4$$

又由式(1-25)和(1-26)中第3行3列的元素知

$$c_5 = \hat{z}_3$$

将以上两式联立后即可解出

$$q_5 = \theta_5 = \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_1 c_4 + \hat{z}_2 s_4}{\hat{z}_3}\right)$$

这时同样要注意的是:因 $q_4 = \theta_4$ 有两个解,故 $q_5 = \theta_5$ 也有对应的两个解.由 $\cos(\pi + \theta_4) = -\cos \theta_4$ 和 $\sin(\pi + \theta_4) = -\sin \theta_4$ 知, $q_5 = \theta_5$ 的两个解相差一个“-”号.

② 若 $\hat{z}_1 = \hat{z}_2 = 0$ ,则 $\hat{z}_3 = \pm 1$ ,由式(1-25)~(1-28)知 $s_5 = 0, c_5 = \hat{z}_3$ ,故

$$q_5 = \theta_5 = (1 - \hat{z}_3) \frac{\pi}{2}$$

这对应于  $Z_5$  轴与  $Z_3$  轴重合的情况, 这时由式(1-26)知  ${}^0R_6$  化为

$${}^0R_6 = \begin{bmatrix} \hat{z}_3 c_4 c_6 - s_4 s_6 & -\hat{z}_3 c_4 s_6 - s_4 c_6 & 0 \\ \hat{z}_3 s_4 c_6 + c_4 s_6 & -\hat{z}_3 s_4 s_6 + c_4 c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \hat{c}_{4,6} - \hat{s}_{4,6} & 0 \\ \hat{z}_3 \hat{s}_{4,6} & \hat{c}_{4,6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

式中  $\hat{c}_{4,6} \triangleq \cos(\theta_4 + \hat{z}_3 \theta_6)$ ,  $\hat{s}_{4,6} \triangleq \sin(\theta_4 + \hat{z}_3 \theta_6)$ . 比较式(1-25)和(1-29)中第1列的元素得到

$$\begin{cases} \hat{c}_{4,6} = \hat{z}_3 \hat{x}_1 \\ \hat{s}_{4,6} = \hat{z}_3 \hat{x}_2 \end{cases}$$

故

$$q_4 + \hat{z}_3 q_6 = \theta_1 + \hat{z}_3 \theta_6 = \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_3 \hat{x}_2}{\hat{z}_3 \hat{x}_1}\right)$$

这时任取一个  $\theta_4$  (或  $\theta_6$ ) 的值后, 即可由上式求出一个相应的  $\theta_6$  (或  $\theta_4$ ) 的值, 这表明这时  $\{q_4, q_5, q_6\}$  有无穷多组解.

## 2. 关于逆运动学问题的进一步研究

通过求解 Stanford 臂的逆运动学问题, 已对解逆运动学问题有了一个感性认识, 以下进一步研究有关的一般理论问题.

### (1) 解的存在性与唯一性问题

从直观上很容易理解, 只要所给定的  ${}^0A_n$  在机器人的工作空间中, 逆运动学问题是有解的. 从数学上看, 解逆运动学问题就是在给定  ${}^0A_n$  后, 从机器人运动学方程

$${}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) \cdots {}^{n-1}A_n(q_n) = {}^0A_n \quad (1-30)$$

中解出  $q$ . 这里有 6 个独立的方程和  $n$  个未知数, 故当  $n < 6$  时, 方程(1-30) 不是对任意给定的  ${}^0A_n$  都有解 (这表明要使机器人手端具有任意的位置和指向, 至少应使机器人有 6 个自由度). 当  $n = 6$  时, 方程(1-30) 在数学上是有解的 (其中只有在机器人工作空间内的解才有意义), 解的个数取决于事先给定的常数项  ${}^0A_6$ , 这时可能有有限组解, 也可能有无穷多组解. 当  $n > 6$  时, 称这种机器人为有冗余度的机器人, 简称冗余机器人 (Redundant Robot), 这时逆运动学问题有无穷多组解.

### (2) 解析解的存在性问题

由齐次变换矩阵的形式知, 机器人运动方程是  $q_i (i = 1, \dots, n)$  及其三角函数的多项式, 是一个很复杂的非线性方程组. 即使有解时也不一定有解析解 (封闭形式的解). 尽管无解析解时可用数值方法求解, 但与

解析解相比,数值解法的计算量太大,不能满足机器人实时控制中对高速求解逆运动学问题的要求.因此总希望所设计的机器人能使其逆运动学问题有解析解.

显然,解析解的存在性与机器人结构有关.1968年 Pieper 在其博士论文中对此进行了详细研究<sup>[7]</sup>,得出一些使逆运动学问题有解析解的充分条件,并列出了相应的机器人结构和对应的解析解.其中最常用的一个充分条件是:若一个6自由度机器人后3个关节的轴线始终交于一点,则此机器人的逆运动学问题必有解析解.其证明的基本思路是:若后3个关节轴始终交于一点,则此点位置与后3个关节变量  $q_4, q_5, q_6$  无关,从而将逆运动学问题解耦成两个独立的只有3个变量的方程组.由于这些方程组中每个方程都是其3个变元及其三角函数的多项式,对三角函数作变量置换后可以化为代数方程,且可证明其阶数小于5,故存在解析解.

基于以上充分条件,现今几乎所有的6自由度机器人都设计成使后3个关节均为转动关节,且它们的轴线都始终交于一点(该交点称为机器人的腕).也就是说,用机器人的前3个杆确定腕的位置,后三个杆确定手端的指向.

通常机器人前3个杆的结构有以下5种:

① 肘状(Elbow)结构:由3个转动关节组成(简称 RRR 结构),其结构简图及工作空间的侧视和顶视图见图1-13.

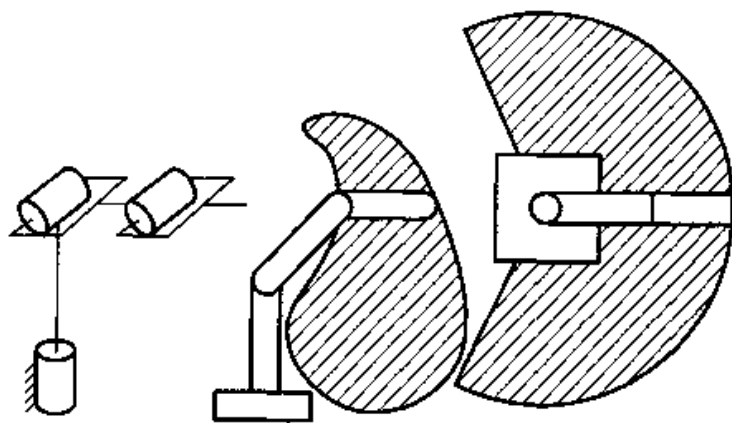


图1-13

② SCARA 结构:由2个转动关节和1个移动关节组成(简称 RRT 结构),其结构简图及工作空间的侧视和顶视图见图1-14.

③ 球坐标结构:是另一种 RRT 结构,其结构简图及工作空间的侧视和顶视图见图1-15.

④ 柱坐标结构:具有 RTT 结构,其结构简图及工作空间的侧视和顶视图见图1-16.



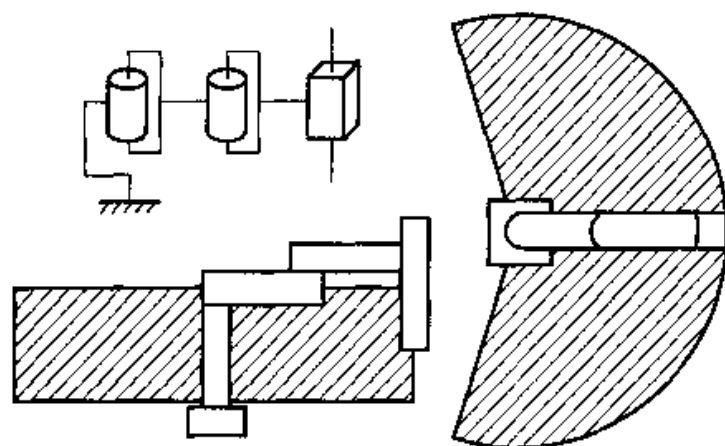


图1-14

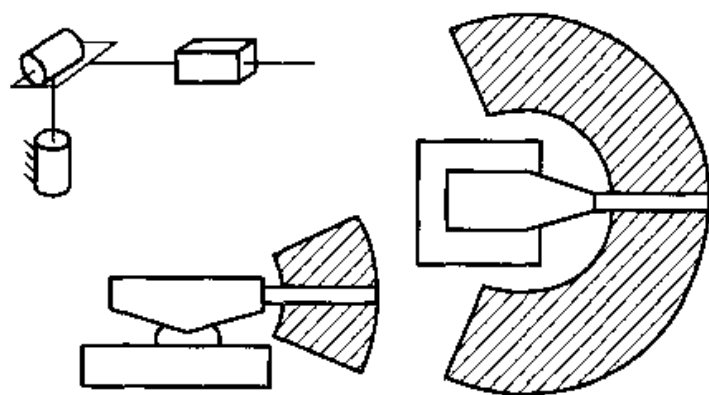


图1-15

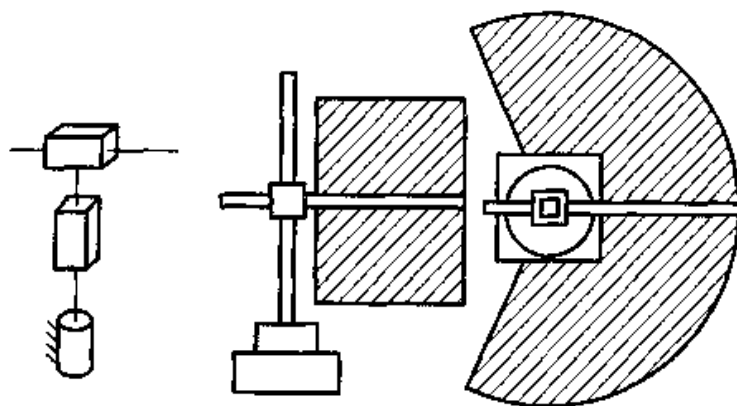


图1-16

⑤ 直角坐标结构：由3个移动关节组成(即为 TTT 结构)，其结构简图及工作空间的侧视和顶视图见图1-17。

具有这5种结构的机器人分别称为肘状机器人、SCARA 机器人、球坐标机器人、柱坐标机器人和直角坐标机器人。这些机器人的逆运动问题都有解析解(习题1-25)。求解步骤可概述如下：

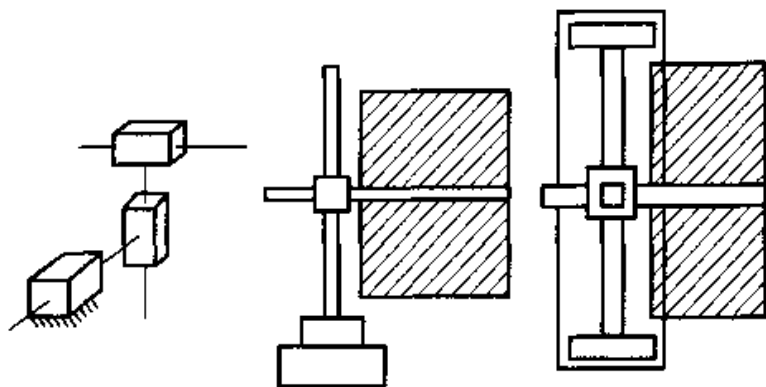


图1-17

第1步: 由 ${}^0A_6$  确定腕(后3个关节轴的交点)的位置.

第2步: 由腕的位置解出  $q_1, q_2$  和  $q_3$ .

第3步: 由方程 ${}^0A_6 = [{}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) {}^2A_3(q_3)]^{-1} {}^0A_6$  解出  $q_4, q_5$  和  $q_6$ .

另外,在求解逆运动学问题的过程中要善于借助几何直观,并注意解可能出现的多值性.

## 1.4 速度问题

### 一、预备知识

所谓机器人的速度问题,是在已知机器人关节位置 $q$ 的情况下,研究机器人的关节速度 $\dot{q}$ 与其手端运动速度间的关系问题.

因手端与杆 $n$ 相固连,故手端的速度可用系 $n$ 的速度来表示.在前面的学习中已知系 $n$ 的位置和指向可用其原点的矢径在系0中的坐标表达式 $p_n$ (以后为方便起见,在表示矢量在系0中的坐标表达式时,省去其左上标0.这样做只要联系上下文内容看,不会引起混淆)和旋转矩阵 ${}^0R_n$ 来表示,即可用齐次变换矩阵

$${}^0A_n = \begin{bmatrix} {}^0R_n & p_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

完整地表示出来,故系 $n$ 运动的速度可用 ${}^0A_n$ 的导数

$$\dot{{}^0A}_n = \begin{bmatrix} \dot{{}^0R}_n & \dot{p}_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

来刻画,其中 $\dot{p}_n \triangleq v_n$ 是系 $n$ 原点 $O_n$ 的速度(在系0中的坐标表达式),它是一个三维矢量的坐标表达式,反映了系 $n$ 随其原点移动的速度;而 $\dot{{}^0R}_n$

反映了系  $n$  绕  $O_n$  (相对系 0) 旋转的速度. 已经知道  ${}^0R_n$  的 9 个元素中只有 3 个是独立的, 所以用  ${}^0R_n$  来表示系  $n$  旋转的速度并不是一种很好的方式. 这时会很自然地想到: 在前面已经学过用 3 个独立的量描述角位置的方法, 例如: 用转轴上单位矢量  $k$  的坐标表达式  $k = [k_x, k_y, k_z]^T$  和转角  $\theta$  表示, 或用欧拉角  $\{\varphi, \theta, \psi\}$  表示. 那么为什么不能将  $\theta k = [\theta k_x, \theta k_y, \theta k_z]^T$  或  $[\varphi, \theta, \psi]^T$  视为矢量的坐标表达式来作为角位置的三维表示法呢?

事实上可以证明:  $\theta k$  和  $[\varphi, \theta, \psi]^T$  都不是矢量的坐标表达式. 因为矢量的加法运算应满足交换律, 即对任意两个矢量  $a$  和  $b$  有:  $a + b = b + a$ . 如果以  $k$  为轴转  $\theta$  角的转动 (对应于旋转矩阵  $R_k(\theta)$ ) 可用矢量  $\theta k$  表示, 同样, 以  $l$  为轴转  $\varphi$  角的转动 (对应于  $R_l(\varphi)$ ) 可用矢量  $\varphi l$  表示, 则先绕  $k$  转  $\theta$  角再绕  $l$  转  $\varphi$  角的连续转动 (对应于  $R_l(\varphi)R_k(\theta)$ ) 就应当可用两矢量的和  $\theta k + \varphi l$  表示. 同理, 先绕  $l$  转  $\varphi$  角再绕  $k$  转  $\theta$  角 (对应于  $R_k(\theta)R_l(\varphi)$ ) 也就应当可用矢量和  $\varphi l + \theta k$  表示. 然而利用欧拉公式 (1-2) 很容易证明

$$R_l(\varphi)R_k(\theta) \neq R_k(\theta)R_l(\varphi)$$

这意味着对上述表示有  $\theta k + \varphi l \neq \varphi l + \theta k$ , 与  $\theta k$  和  $\varphi l$  均为矢量矛盾. 这就证明了绕  $k$  转  $\theta$  角的转动不能用矢量  $\theta k$  表示, 或者说, 若用  $\theta k = [\theta k_x, \theta k_y, \theta k_z]^T$  来表示绕  $k$  转  $\theta$  角的转动, 则  $[\theta k_x, \theta k_y, \theta k_z]^T$  不是矢量的坐标表达式. 这就是通常文献中常提到的“有限转动不能用矢量表示”. 同理可证明: 由三个欧拉角组成的  $[\varphi, \theta, \psi]^T$  也不是矢量的坐标表达式 (习题 1-26).

尽管有限转动不能用矢量表示, 但可以证明转动的的时间变化率 (即角速度) 可以用矢量表示. 事实上, 设坐标系在无穷小时间  $\Delta t$  内绕  $k$  转动一无穷小转角  $\Delta\theta$ , 因这时  $\cos \Delta\theta \approx 1$ ,  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ , 由欧拉公式 (1-2) 可知这一无穷小转动对应于旋转矩阵

$$R_k(\Delta\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta \\ k_z\Delta\theta & 1 & -k_x\Delta\theta \\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 1 \end{bmatrix}$$

因转动前的旋转矩阵为  $I$ , 故可算出对应于此转动的旋转矩阵的时间变化率为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_k(\Delta\theta) - I}{\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\theta & k_y\theta \\ k_z\theta & 0 & -k_x\theta \\ -k_y\theta & k_x\theta & 0 \end{bmatrix} = S(\theta k)$$

由叉乘矩阵与三维矢量的一一对应关系知, 此转动的的时间变化率可用矢量  $\theta k$  表示. 这一矢量即为角速度矢量, 记为  $\omega$ , 其方向为 (瞬时) 转轴的方向, 其大小为转角的时间变化率 (即转角的导数). 可以证明角速度矢量

满足矢量的加法交换率. 事实上, 因绕  $k$  转  $\Delta\theta$  角对应于  $R_k(\Delta\theta)$ , 绕  $l$  转  $\Delta\varphi$  角对应于  $R_l(\Delta\varphi)$ , 则经计算并忽略高阶小量后知

$$R_l(\Delta\varphi)R_k(\Delta\theta) = R_k(\Delta\theta)R_l(\Delta\varphi)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -k_x\Delta\theta - l_x\Delta\varphi & k_y\Delta\theta + l_y\Delta\varphi \\ k_x\Delta\theta + l_x\Delta\varphi & 1 & -k_z\Delta\theta - l_z\Delta\varphi \\ -k_x\Delta\theta - l_x\Delta\varphi & k_x\Delta\theta + l_x\Delta\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

从而可算出

$$S(\theta k + \dot{\varphi} l) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_l(\Delta\varphi)R_k(\Delta\theta) - I}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_k(\Delta\theta)R_l(\Delta\varphi) - I}{\Delta t} = S(\dot{\varphi} l + \theta k)$$

即有

$$\theta k + \dot{\varphi} l = \dot{\varphi} l + \theta k$$

这就证明了角速度矢量确实满足交换律.

利用角速度的概念可知, 可用两种方法刻画系  $n$  的运动速度: 一是用齐次变换阵表示法, 即用  ${}^0A_n$  的表达式(1-31)表示; 二是用三维矢量表示法, 即用角速度矢量和系  $n$  原点的速度的坐标表达式  $\omega_n$  和  $v_n$  来表示. 显然, 因  $p_n = v_n$ , 所以这两种表示方法的区别只是刻画系  $n$  旋转速度(即角速度)的方法不同: 一种是用  ${}^0\dot{R}_n$  表示, 而另一种是用  $\omega_n$  表示. 因此很自然地需要研究  ${}^0\dot{R}_n$  与  $\omega_n$  间的关系. 由前所述知, 对旋转矩阵  ${}^0R_n = {}^0R_n(t)$ , 在每个瞬时  $t$ , 都存在一转轴(用其上单位矢量  $k$  刻画)和一转角  $\theta$ , 使得  ${}^0R_n = R_k(\theta)$ . 因此该瞬时转角  $\theta$  的变化率所引起的  ${}^0\dot{R}_n$  的变化率为

$${}^0\dot{R}_n = \frac{d}{dt}R_k(\theta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} R_k(\theta) \right] \frac{d\theta}{dt} = \theta \frac{\partial}{\partial \theta} R_k(\theta) \quad (1-32)$$

利用欧拉公式(1-2)很容易证明(习题1-27)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} R_k(\theta) = S(k)R_k(\theta) = S(k) {}^0R_n \quad (1-33)$$

代入式(1-32)后得到

$${}^0\dot{R}_n = S(\theta k) {}^0R_n \triangleq S(\omega_n) {}^0R_n \quad (1-34)$$

式中,  $\omega_n \triangleq \theta k$  为系  $n$  相对系 0 的角速度在系 0 中的坐标表达式.

这时应当特别指出的是: 在以上证明式(1-34)的过程中并没有用到系 0 和系  $n$  的任何特殊性质, 故上述证明对任意两坐标系都成立, 即对任意两坐标系 1 和 2 均有

$${}^1\dot{R}_2 = S({}^1\omega_2) {}^1R_2 \quad (1-35)$$

式中  ${}^1\omega_2$  为坐标系 2 相对坐标系 1 的角速度  $\omega_2$  在系 1 中的坐标表达式. 由此式可知: 当已知两坐标系间的相对指向(即已知  ${}^1R_2$ ) 时,  ${}^1\dot{R}_2$  是与  ${}^1\omega_2$  一

一对应的。

## 二、正速度问题的解法

### 1. 用齐次变换矩阵表示的正速度关系

#### (1) 问题的提法

当杆  $n$  的速度用  $4 \times 4$  矩阵  ${}^0\dot{A}_n$  表示时, 正速度问题的提法是: 已知  $q$  和  $\dot{q}$ , 求  ${}^0\dot{A}_n$ 。

#### (2) 递推公式及框图

由  ${}^0A_n = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) \cdots {}^{n-1}A_n(q_n)$  知

$${}^0\dot{A}_n = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} {}^0A_n \right] \dot{q}_i \quad (1-36)$$

又由  ${}^0A_n = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) \cdots {}^{n-1}A_n(q_n)$  知

$$\frac{\partial}{\partial q_i} {}^0A_n = {}^0A_{i-1} \left[ \frac{d}{dq_i} {}^{i-1}A_i(q_i) \right] {}^iA_n \quad (1-37)$$

考虑到  $q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i d_i$  后知

$$\frac{d}{dq_i} {}^{i-1}A_i(q_i) = \bar{\sigma}_i \frac{d}{d\theta_i} {}^{i-1}A_i(\theta_i) + \sigma_i \frac{d}{dd_i} {}^{i-1}A_i(d_i) \quad (1-38)$$

如果杆坐标系是用 D-H 方法建立的传动轴坐标系, 则由  ${}^{i-1}A_i$  的表达式(1-8)可计算出

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_i} {}^{i-1}A_i(\theta_i) &= \begin{bmatrix} -s_i & -c_i c\alpha_i & c_i s\alpha_i & -a_i s_i \\ c_i & -s_i c\alpha_i & s_i s\alpha_i & a_i c_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^{i-1}A_i \end{aligned} \quad (1-39)$$

$$\frac{d}{dd_i} {}^{i-1}A_i(d_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^{i-1}A_i \quad (1-40)$$

因此若记

$$Q = \bar{\sigma}_i \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

则将式(1-39)~(1-41)代入式(1-38)后有

$$\frac{d}{dq_i} {}^{i-1}A_i(q_i) = Q_i {}^{i-1}A_i \quad (1-42)$$

再代入式(1-37)和(1-36)得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} {}^0A_n &= {}^0A_{i-1} Q_i {}^{i-1}A_n \\ {}^0\dot{A}_n &= \sum_{i=1}^n {}^0A_{i-1} Q_i {}^{i-1}A_n \dot{q}_i \end{aligned} \quad (1-43)$$

但为了减少运算量,提高运算速度,实际上并不用式(1-43)来解正速度问题,而是利用式(1-42)得到以下递推公式:

$${}^0A_i = {}^0A_{i-1} {}^{i-1}A_i, \quad ({}^0A_0 = I) \quad (1-44)$$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{A}_i &= {}^0\dot{A}_{i-1} {}^{i-1}A_i + {}^0A_{i-1} \left[ \frac{d}{dq_i} {}^{i-1}A_i \right] \dot{q}_i \\ &= {}^0\dot{A}_{i-1} {}^{i-1}A_i + {}^0A_{i-1} Q_i {}^{i-1}A_i \dot{q}_i, \quad ({}^0\dot{A}_0 = O) \end{aligned} \quad (1-45)$$

计算框图如图1-18所示。

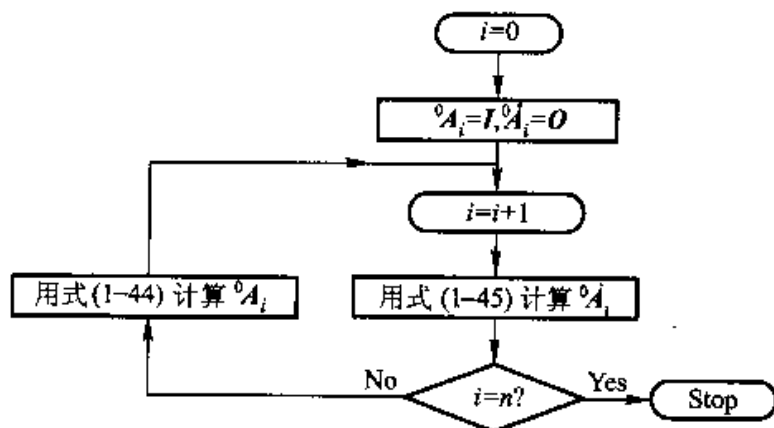


图1-18

值得注意的是:以上算法只适用于用D-H方法建立的传动轴坐标系,对于用修改的D-H方法建立的驱动轴坐标系,需将以上公式(1-44)和(1-45)做适当修改(习题1-28)。

## 2. 用三维矢量法表示的正速度关系

### (1) 问题的提法

当杆 $n$ 的角速度用 $\omega_n$ 表示时,正速度问题的提法是:已知 $q$ 和 $\dot{q}$ ,求这时系 $n$ 的角速度 $\omega_n$ 和其原点 $O_n$ 的速度 $v_n$ 。

解决上述问题的办法有两种:一是直接用矢量力学公式求解;二是利用描述旋转速度两种表示方法间的关系式(1-34),从上面已经求出的

用齐次变换矩阵表示的递推公式(1-44)和(1-45)来推导用三维矢量表示的正速度递推公式. 尽管用第一种方法来推导更为简单, 但以下仅讲述第二种办法, 主要目的是想通过推导过程使读者更加熟悉和进一步理解这两种表示法间的关系, 同时也为了使不熟悉矢量力学的读者避免学习更多的预备知识.

(2) 用齐次变换矩阵推导相应的三维矢量公式

若记  $\mathbf{z} = [0, 0, 1]^T$ , 则由式(1-41)易知

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\dot{\sigma}_i, \mathbf{z}) & \sigma_i \mathbf{z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-46)$$

因为

$${}^0A_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} & \mathbf{p}_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}\mathbf{p}_i^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中  $\mathbf{p}_i^* \triangleq \overline{O_i} \overline{O_i^*}$ , 故由以上两式知

$$\begin{aligned} {}^0A_{i-1} \mathbf{Q}_i {}^{i-1}A_i &= \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} & \mathbf{p}_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\dot{\sigma}_i, \mathbf{z}) & \sigma_i \mathbf{z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}\mathbf{p}_i^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^0R_{i-1} \mathbf{S}(\dot{\sigma}_i, \mathbf{z}) {}^{i-1}R_i & {}^0R_{i-1} \mathbf{S}(\dot{\sigma}_i, \mathbf{z}) {}^{i-1}\mathbf{p}_i^* + \sigma_i {}^0R_{i-1} \mathbf{z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-47)$$

因为由习题1-5知: 对任意旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和任意矢量  $\mathbf{a}$ , 均有  $\mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathbf{a})$ , 再考虑到  $Z_{i-1}$  轴上的单位矢量  $\mathbf{z}_{i-1}$  在系 0 中的坐标  $\mathbf{z}_{i-1} = {}^0R_{i-1}\mathbf{z}$  后可知

$$\begin{aligned} {}^0R_{i-1} \mathbf{S}(\dot{\sigma}_i, \mathbf{z}) {}^{i-1}R_i &= \bar{\sigma}_i {}^0R_{i-1} \mathbf{S}(\mathbf{z}) ({}^0R_{i-1})^T {}^0R_{i-1} {}^{i-1}R_i \\ &= \bar{\sigma}_i \mathbf{S}({}^0R_{i-1} \mathbf{z}) {}^0R_i = \mathbf{S}(\bar{\sigma}_i \mathbf{z}_{i-1}) {}^0R_i \\ {}^0R_{i-1} \mathbf{S}(\dot{\sigma}_i, \mathbf{z}) {}^{i-1}\mathbf{p}_i^* &= \bar{\sigma}_i {}^0R_{i-1} \mathbf{S}(\mathbf{z}) ({}^0R_{i-1})^T {}^0R_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{p}_i^* \\ &= \bar{\sigma}_i \mathbf{S}({}^0R_{i-1} \mathbf{z}) \mathbf{p}_i^* = \bar{\sigma}_i \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* \end{aligned}$$

$$\sigma_i {}^0R_{i-1} \mathbf{z} = \sigma_i \mathbf{z}_{i-1}$$

将以上三式代入式(1-47)得

$${}^0A_{i-1} \mathbf{Q}_i {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\bar{\sigma}_i \mathbf{z}_{i-1}) {}^0R_i & \bar{\sigma}_i \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* + \sigma_i \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-48)$$

因为若记杆  $i$  ( $i = \{1, \dots, n\}$ ) 的角速度为  $\boldsymbol{\omega}_i$ , 系  $i$  原点的速度为  $\mathbf{v}_i$ , 则

$${}^0\dot{A}_i = \begin{bmatrix} {}^0\dot{R}_i & \dot{\mathbf{p}}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) {}^0R_i & \mathbf{v}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-49)$$

$${}^0\dot{A}_{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) {}^0R_{i-1} & \mathbf{v}_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-50)$$

将式(1-18), (1-49)和(1-50)代入递推公式(1-45)后得到

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} S(\omega_i)^0 R_i & v_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S(\omega_{i-1})^0 R_{i-1} & v_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}p_i^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
 &\quad \begin{bmatrix} S(\bar{\sigma}_i z_{i-1})^0 R_i & \bar{\sigma}_i z_{i-1} \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i \\
 &= \begin{bmatrix} S(\omega_{i-1})^0 R_{i-1} {}^{i-1}R_i & S(\omega_{i-1})^0 R_{i-1} {}^{i-1}p_i^* + v_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 &\quad \begin{bmatrix} S(\bar{\sigma}_i z_{i-1})^0 R_i & \bar{\sigma}_i z_{i-1} \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, \\
 \begin{bmatrix} S(\omega_0)^0 R_0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

故有

$$S(\omega_i)^0 R_i = S(\omega_{i-1})^0 R_i + S(\bar{\sigma}_i z_{i-1})^0 R_i \dot{q}_i, \quad (S(\omega_0)^0 R_0 = 0)$$

$$v_i = v_{i-1} + \omega_{i-1} \times p_i^* + (\bar{\sigma}_i z_{i-1} \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1}) \dot{q}_i, \quad (v_0 = 0)$$

由此立即可得出计算 $\omega_i, v_i$ 在系0中表达式的递推公式

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \bar{\sigma}_i z_{i-1} \dot{q}_i, \quad (\omega_0 = 0) \quad (1-51)$$

$$v_i = v_{i-1} + \omega_i \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1} \dot{q}_i, \quad (v_0 = 0) \quad (1-52)$$

但实际上在计算 $\omega_i$ 和 $v_i$ 时并不直接应用以上两式,原因是这样做需要事先计算出 $z_{i-1}$ 和 $p_i^*$ 在系0中的表达式 $z_{i-1}$ 和 $p_i^*$ (它们都是 $q$ 的函数). 然而已知 $z_{i-1}$ 在系 $i-1$ 中的表达式 ${}^{i-1}z_{i-1} = z = [0, 0, 1]^T$ 是一非常简单的常量, 又由

$$\begin{aligned}
 {}^iA_{i-1} &= ({}^{i-1}A_i)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^iR_{i-1} & {}^i(\vec{O}_i \vec{O}_{i-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} {}^iR_{i-1} & -{}^i p_i^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iR_{i-1} & - \begin{bmatrix} a_i \\ d_i s\alpha_i \\ d_i c\alpha_i \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

知 $p_i^*$ 在系 $i$ 中的表达式

$${}^i p_i^* \triangleq \tilde{p}_i^* = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i s\alpha_i \\ d_i c\alpha_i \end{bmatrix}$$

很容易由D-H参数确定, 且当关节 $i$ 是转动关节时它是一常量. 这就启发我们将式(1-51)和(1-52)变换到系 $i$ 中, 即两端同乘 ${}^iR_0$ 后得到

$${}^iR_0 \omega_i = {}^iR_{i-1} ({}^{i-1}R_0 \omega_{i-1}) + \bar{\sigma}_i {}^iR_{i-1} ({}^{i-1}R_0 z_{i-1}) \dot{q}_i$$



$$\begin{aligned}
 &= {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1} + \sigma_i {}^{i-1} R_0 z_{i-1} \dot{q}_i), \quad ({}^0 R_0 \omega_0 = 0) \\
 {}^i R_0 v_i &= {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 v_{i-1}) + {}^i R_0 (\omega_i \times p_i^*) + \sigma_i {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 z_{i-1}) \dot{q}_i \\
 &= {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 v_{i-1} + \sigma_i {}^{i-1} R_0 z_{i-1} \dot{q}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 p_i^*), \\
 &\quad ({}^0 R_0 v_0 = 0)
 \end{aligned}$$

若记  $\omega_i$  和  $v_i$  在系  $i$  中的坐标表达式  ${}^i R_0 \omega_i = \tilde{\omega}_i$  及  ${}^i R_0 v_i = \tilde{v}_i$ , 并考虑到  ${}^{i-1} R_0 z_{i-1} = z_i$ ,  ${}^i R_0 p_i^* = \tilde{p}_i^*$ , 则上两式可写为

$$\tilde{\omega}_i = {}^i R_{i-1} (\tilde{\omega}_{i-1} + \sigma_i z_i \dot{q}_i), \quad (\tilde{\omega}_0 = 0) \quad (1-53)$$

$$\tilde{v}_i = {}^i R_{i-1} (\tilde{v}_{i-1} + \sigma_i z_i \dot{q}_i) + \tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_i^*, \quad (\tilde{v}_0 = 0) \quad (1-54)$$

这就是在实际中实用的在杆坐标系中求解正速度问题的递推公式, 其框图见图1-19.

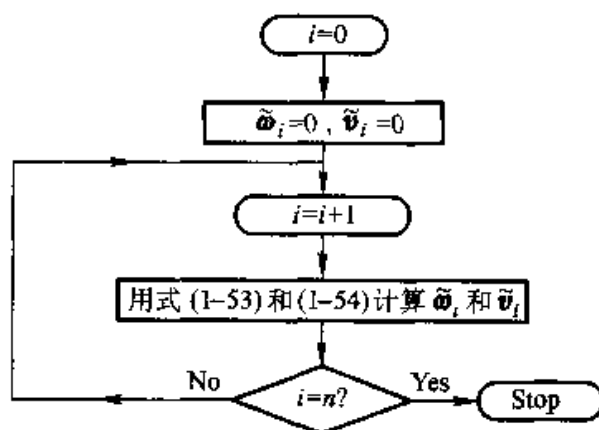


图1-19

这里需要指出的是:

① 将用齐次变换矩阵表示的递推公式(1-44)和(1-45)与用三维矢量表示的递推公式(1-53)和(1-54)相比可看出, 用三维矢量表示的公式计算时, 所需的计算量要少得多. 原因一是用三维角速度矢量描述转动速度要比用有9个元素的旋转矩阵导数来描述要简明得多; 二是将与各杆有关的矢量用其在各自杆坐标系中的坐标表达式来表示可减少计算量.

② 递推公式(1-53)和(1-54)是由式(1-45)导出的, 当然也只适用于D-H方法建立的传动轴坐标系的情况. 可以用类似方法导出适用于驱动轴坐标系的正速度递推公式(习题1-29).

### 三、机器人的雅可比矩阵

由式(1-43)知

$${}^0 \dot{A}_n = \sum_{i=1}^n {}^0 A_{i-1} Q_i {}^{i-1} A_n \dot{q}_i \quad (1-55)$$

再利用式(1-48)可计算出

$$\begin{aligned}
 {}^0A_{i-1}Q_i^{-1}A_n &= {}^0A_{i-1}Q_i^{-1}A_iA_n \\
 &= \begin{bmatrix} S(\sigma, z_{i-1}) {}^0R_i & \sigma, z_{i-1} \times p_i + \sigma, z_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_n & (p_n - p_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} S(\sigma, z_{i-1}) {}^0R_n & \sigma, z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1}) + \sigma, z_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

式中  $p_i \triangleq \overrightarrow{O_0O_i}$ . 将其代入式(1-55)并比较其最后一列即可得到

$$\begin{aligned}
 v_n &= \sum_{i=1}^n [\sigma, z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1}) + \sigma, z_{i-1}] \dot{q}_i \\
 &\triangleq \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i = [b_1, \dots, b_n] \dot{q}
 \end{aligned} \quad (1-56)$$

又由式(1-51)易知

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n \sigma, z_{i-1} \dot{q}_i \triangleq \sum_{i=1}^n c_i \dot{q}_i = [c_1, \dots, c_n] \dot{q} \quad (1-57)$$

这样由式(1-56)和(1-57)可知存在线性关系

$$\begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \dot{q} \triangleq J \dot{q} \quad (1-58)$$

式中  $6 \times n$  矩阵  $J = J(q)$  称为机器人的雅可比矩阵 (Jacobian).

雅可比矩阵具有明显的物理意义. 若记  $J = [J_1, \dots, J_n]$ , 则由式(1-56)~(1-58)知

$$J_i = \sigma, \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} + \sigma, \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-59)$$

这表明: 当关节  $i$  是转动关节时, 其转动速度  $\dot{q}_i$  所引起的系  $n$  角速度为  $z_{i-1} \dot{q}_i \triangleq \omega_i$ , 而它所引起的系  $n$  原点速度为  $(z_{i-1} \dot{q}_i) \times (p_n - p_{i-1}) = \omega_i \times r_i$  (参看图 1-20); 而当关节  $i$  是移动关节时, 其移动速度  $\dot{q}_i$  只引起系  $n$  原点的速度  $z_{i-1} \dot{q}_i$ , 而不会引起系  $n$  的角速度.

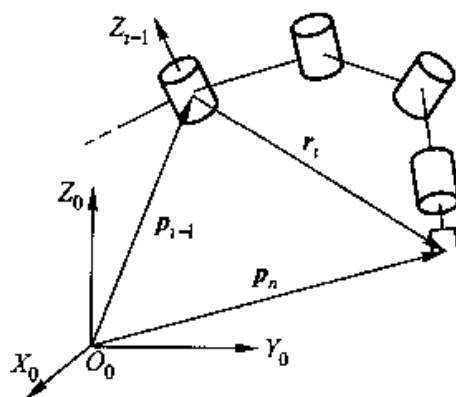


图1-20

由式(1-59)可知,雅可比矩阵 $J$ 的第 $i$ 列 $J_i$ 由 $z_{i-1}$ 、 $p_{i-1}$ 和 $p_i$ 确定,而 $z_{i-1}$ 是 ${}^0A_{i-1}$ 中第3列的前3行, $p_{i-1}$ 和 $p_i$ 分别是 ${}^iA_{i-1}$ 和 ${}^iA_i$ 中第4列的前3行,故只要用递推公式(1-44)依次算出 ${}^0A_1, {}^1A_2, \dots, {}^{n-1}A_n$ 后即可算出 $J$ 。当然,也可以利用正速度递推公式(1-53)和(1-54)算出 $v_n$ 和 $\omega_n$ 后,将其写为式(1-58)的形式而得到 $J$ 。但在实用中为减少计算量以满足实时控制的需要,一般不用上述方法来计算雅可比矩阵 $J(q)$ ,更加有效地计算 $J(q)$ 的方法可在文献[8]中找到。

最后要指出的是:由推导过程可明显看出,由式(1-56)和(1-57)确定的雅可比矩阵表达式(1-58)只适用于用D-H方法建立杆坐标系的情况,用修改的D-H方法建立杆坐标系时雅可比矩阵表达式的推导留给读者作为练习(习题1-32)。

#### 四、逆速度问题的解法

##### 1. 问题的提法

逆速度问题的提法是:已知 $q$ 及 $\omega_n, v_n$ ,求相应的关节速度 $\dot{q}$ 。

首先要说明的是:研究逆速度问题时,一般不研究用齐次变换矩阵表示的逆速度问题(即不提:已知 $q$ 和 ${}^0\dot{A}_n$ ,求 $\dot{q}$ )。原因是

$${}^0\dot{A}_n = \begin{bmatrix} {}^0\dot{R}_n & \dot{p}_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因而由 $\dot{p}_n = v_n$ 及 ${}^0\dot{R}_n$ 与 $\omega_n$ 间的关系式(1-34)立即可由 ${}^0\dot{A}_n$ 确定出 $\omega_n$ 和 $v_n$ ,从而转化为求解用三维矢量表示的逆速度问题。

##### 2. 逆速度问题的解

因为从对雅可比矩阵的研究已知

$$\begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} \triangleq \dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (1-60)$$

故求解逆速度问题实际上归结为求解以上线性方程组问题。因为 $J \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,由线性方程组理论知逆速度问题对任给的 $v_n$ 和 $\omega_n$ 都有解的必要条件是:

$$\text{rank } J = \text{rank} \begin{bmatrix} J & \begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \text{即} \quad \text{rank } J = 6$$

这表明:对任给的 $v_n$ 和 $\omega_n$ ,逆速度问题均有解的必要条件是机器人自由度数 $n \geq 6$ 。

因为式(1-60)中的 $J = J(q)$ ,故 $\text{rank } J$ 随着 $q$ 的变化而改变。通常称使 $J(q)$ 不满秩的 $q$ 为机器人的奇异位置(或称奇异点),在此位置上机器人手端不能在某些方向上运动,这时也会给逆速度问题的解带来麻烦。

因此在规划机器人关节运动轨线  $q$  时,总是使  $q$  不通过机器人的奇异位置.所以在解逆速度问题(即求解式(1-60))时,总可假设  $J(q)$  是满秩矩阵.

根据机器人自由度  $n$  的不同,可将逆速度问题的解分为以下三种情况:

(1)  $n = 6$

这时由  $J$  满秩知  $J$  可逆,故逆速度问题有唯一解

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{x}$$

由于求逆矩阵需要较多的计算量,所以在实际求解时并不是先求出  $J^{-1}$ ,而是常利用以下递推算法.

因  $J = [J_1, \dots, J_n]$  满秩,故  $J_1, \dots, J_n$  线性无关,从而可采用以下方法利用  $J_1, \dots, J_n$  构造出一组正交矢量  $\{n_1, \dots, n_n\}$ :

$$n_1 \triangleq J_1; \quad n_i \triangleq \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \cdots & J_i \\ J_1^T J_1 & J_1^T J_2 & \cdots & J_1^T J_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{i-1}^T J_1 & J_{i-1}^T J_2 & \cdots & J_{i-1}^T J_i \end{bmatrix}, \quad i = 2, \dots, n$$

当然,上式只是为表达方便而采用的一种形式上的写法,因为其中第1行中的  $J_1, \dots, J_i$  均为矢量,而其余各行的元素均为标量.

利用定义很容易证明  $\{n_1, \dots, n_n\}$  满足以下性质(习题1-33):

$$\text{span}\{n_1, \dots, n_i\} = \text{span}\{J_1, \dots, J_i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1-61)$$

$$n_i \perp \text{span}\{J_1, \dots, J_i\}, \quad \forall j > i \quad (1-62)$$

$$J_i^T n_i \neq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1-63)$$

因为由式(1-60)知

$$\dot{x} = J\dot{q} = \sum_{i=1}^n J_i \dot{q}_i$$

由式(1-62)知

$$\dot{x}^T n_n = \sum_{i=1}^n (J_i^T n_n) \dot{q}_i = J_n^T n_n \dot{q}_n$$

又由式(1-63)知  $J_n^T n_n \neq 0$ , 故可由上式解出

$$\dot{q}_n = \frac{\dot{x}^T n_n}{J_n^T n_n}$$

当求出  $\dot{q}_n$  后,继续有

$$\dot{x} - J_n \dot{q}_n = \sum_{i=1}^{n-1} J_i \dot{q}_i$$

$$(\dot{x} - J_n \dot{q}_n)^T n_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} (J_i^T n_{n-1}) \dot{q}_i = J_{n-1}^T n_{n-1} \dot{q}_{n-1}$$

从而可解出

$$\dot{q}_{n-1} = \frac{(\dot{x} - J_n \dot{q}_n)^T n_{n-1}}{J_{n-1}^T n_{n-1}}$$

如此不断做下去,可得到以下递推公式

$$\dot{q}_i = \frac{(\dot{x} - \sum_{j=i+1}^n J_j \dot{q}_j)^T n_i}{J_i^T n_i}, \quad i = n, \dots, 1$$

(2)  $n > 6$

此时因  $J$  满秩且方程个数少于未知数个数,故式(1-60)有无穷多个解  $\dot{q}$ ,但其中需要的是最小范数解(即使  $\|\dot{q}\|$  最小的解);或更一般地,需要加权最小范数解(即使  $\dot{q}^T D \dot{q}$  最小的解,其中  $D$  是事先给定的对称正定矩阵)。因为这样的解对应于使机器人在消耗最小能量的条件下产生所要求的  $\dot{x}$ ,所以这时逆速度问题可叙述为:求  $\dot{q}$  满足  $\dot{x} = J\dot{q}$  且使  $L \triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T D \dot{q}$  最小。这实际上是求性能指标  $L$  在约束条件  $\dot{x} = J\dot{q}$  下的极值,可用 Lagrange 乘子法求解。定义

$$\bar{L} = L + \lambda^T (\dot{x} - J\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D \dot{q} + \lambda^T (\dot{x} - J\dot{q})$$

式中  $\lambda$  为 Lagrange 乘子,令  $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} = 0$ ,得到

$$D\dot{q} - J^T \lambda = 0$$

由此可解出

$$\dot{q} = D^{-1} J^T \lambda \quad (1-64)$$

代入条件  $\dot{x} = J\dot{q}$  后得到

$$\dot{x} = J\dot{q} = JD^{-1} J^T \lambda$$

由此可知 Lagrange 乘子

$$\lambda = (JD^{-1} J^T)^{-1} \dot{x}$$

代入式(1-64)后即求出所要求的解为

$$\dot{q} = D^{-1} J^T (JD^{-1} J^T)^{-1} \dot{x}$$

(3)  $n < 6$

此时因  $J$  满秩且方程个数多于未知数个数,故式(1-60)可能是无解的矛盾方程组。这时可求出此方程组的最小误差解,即求  $\dot{q}$  使得

$$\bar{L} \triangleq \frac{1}{2} (\dot{x} - J\dot{q})^T (\dot{x} - J\dot{q}) = \frac{1}{2} \|\dot{x} - J\dot{q}\|^2$$

最小,此时实际上是求  $\bar{L}$  的无条件极值问题。令  $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} = 0$ ,得到

$$J^T (\dot{x} - J\dot{q}) = 0$$

从而解出式(1-60)的最小误差解为

$$\dot{q} = (J^T J)^{-1} J^T \dot{x}$$

## 五、机器人的奇异位置及其确定

### 1. 奇异位置的特点

前面已知使雅可比矩阵  $J(q)$  不满秩的关节位置  $q$  称为机器人的奇异位置(或称奇异点),由式(1-60)可知:

① 当  $q$  为奇异点时,逆速度问题不存在唯一解,这时可能无解,也可能有无穷多个解.

② 在奇异点处,系  $n$  有限的速度对应于无穷大的关节速度.

③ 在奇异点,机器人可能在某些方向不能运动,这表明机器人的奇异点常对应于机器人工作空间的边界点.

### 2. 奇异位置的解耦

与解逆运动学问题相类似,对于具有“腕”结构(即最后三个杆坐标系的  $Z$  轴始终相交于一点)的6自由度机器人,可以将确定机器人奇异点的问题解耦为两个三维的子问题来解决.

事实上,由于机器人后三个  $Z$  轴相交于一点,所以在用 D-H 方法设置与杆固连的坐标系时,可不失一般性地使杆坐标系 3, 4, 5, 6 的原点均为后三个  $Z$  轴的交点. 记  $O_3 = O_4 = O_5 = O_6 \triangleq O_c$ , 则有

$$\begin{aligned} p_3 (= \overrightarrow{O_0 O_3}) &= p_4 (= \overrightarrow{O_0 O_4}) = p_5 (= \overrightarrow{O_0 O_5}) \\ &= p_6 (= \overrightarrow{O_0 O_6}) \triangleq p_c (= \overrightarrow{O_0 O_c}) \end{aligned}$$

因此雅可比矩阵

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 z_0 \times (p_1 - p_0) + \sigma_1 z_0 & \bar{\sigma}_2 z_1 \times (p_1 - p_1) + \sigma_2 z_1 & \bar{\sigma}_3 z_2 \times (p_c - p_2) + \sigma_3 z_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\sigma}_1 z_0 & \bar{\sigma}_2 z_1 & \sigma_3 z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-65)$$

故其行列式

$$|J| = |J_{11}| |z_3, z_4, z_5|$$

此式表明:由  $|J| = 0$  确定奇异点  $q$  的问题可解耦为两个子问题,即:分别求  $|J_{11}| = 0$  和  $|z_3, z_4, z_5| = 0$  的解. 显然,由  $|J_{11}| = 0$  确定的奇异点是由机器人前三个杆产生的奇异点,称为臂奇异点;而由  $|z_3, z_4, z_5| = 0$  确定的奇异点是由机器人后三个杆产生的奇异点,称为腕奇异点.

腕奇异点是容易确定的. 因为由  $|z_3, z_4, z_5| = 0$  知奇异位置在三轴  $\{Z_3, Z_4, Z_5\}$  共面时. 通常腕的结构如图 1-21(a) 所示,从图中可看出其三个轴交于一点,且  $Z_4$  始终垂直于  $Z_3$ ,故奇异位置在  $Z_3$  与  $Z_5$  共线时,亦

即  $\theta_5 = 0$  (图 1-21(b)) 时, 这是腕的唯一奇异位置. 这种奇异位置如不对杆的转动范围加以机械限制是不可避免的.

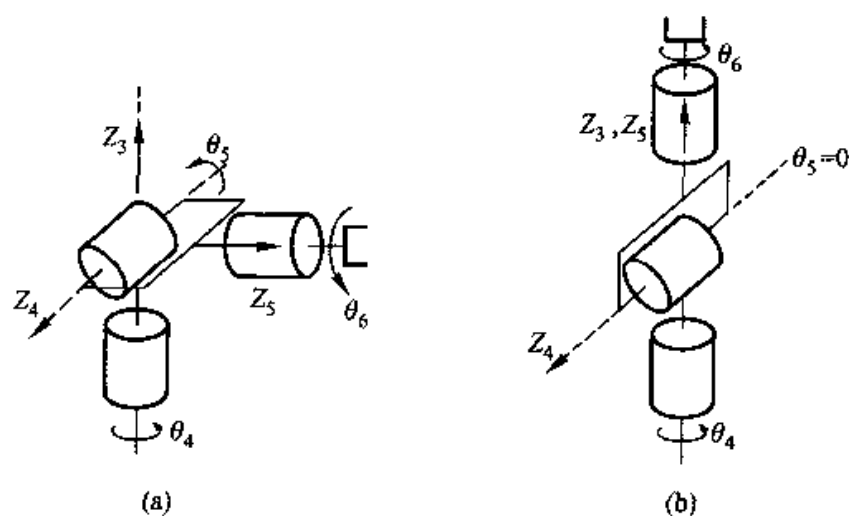


图1-21

臂的奇异位置的确定留给读者作为练习(习题1-34).

**例1-5** 对 Stanford 臂用 D-H 方法建立杆坐标系如图1-22 所示, 其 D-H 参数如表1-2所示.

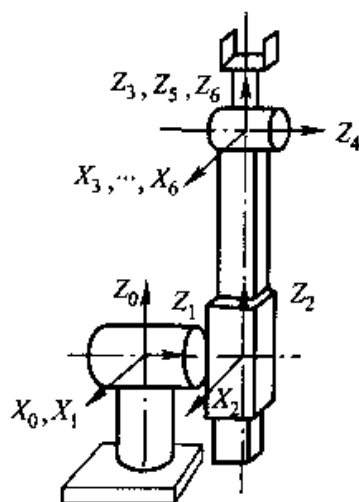


图1-22

表 1-2

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-90^\circ$	0	$\theta_1$ (变量)
2	0	$90^\circ$	$d_2$	$\theta_2$ (变量)
3	0	0	$d_3$ (变量)	0
4	0	$-90^\circ$	0	$\theta_4$ (变量)
5	0	$90^\circ$	0	$\theta_5$ (变量)
6	0	0	0	$\theta_6$ (变量)

利用 D-H 参数可用递推公式(1-44)算出

$${}^0A_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, 6$$

其中

$$\begin{aligned} z_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ z_4 &= \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_1 \end{bmatrix}, \quad z_5 = \begin{bmatrix} (c_1 c_2 c_4 - s_1 s_4) s_5 + c_1 s_2 c_5 \\ (s_1 c_2 c_4 + c_1 s_4) s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix} \\ p_0 = p_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ d_3 c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入式(1-65)后可知其雅可比矩阵

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} z_0 \times p_6 & z_1 \times p_6 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0 & z_1 & 0 & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中

$$J_{11} = \begin{bmatrix} -d_2 c_1 - d_3 s_1 s_2 & d_3 c_1 c_2 & c_1 s_2 \\ -d_2 s_1 + d_3 c_1 s_2 & d_3 s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 & c_2 \end{bmatrix}$$



$$J_{22} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 & (c_1 c_2 c_4 - s_1 s_4) s_5 + c_2 s_2 c_5 \\ s_1 s_2 & -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 & (s_1 c_2 c_4 + c_1 s_4) s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ c_2 & s_2 s_4 & -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

容易算出

$$|J_{11}| = -d_3^2 s_2, \quad |J_{22}| = -s_5$$

分别令

$$|J_{11}| = 0, \quad |J_{22}| = 0$$

即可求出 Stanford 臂的臂奇异位置为  $\theta_2 = 0$  或  $\pi$ ; 而腕奇异位置为  $\theta_5 = 0$ .

## 1.5 加速度问题

机器人加速度问题是在已知机器人关节位置  $q$  和关节速度  $\dot{q}$  的前提下, 研究关节加速度  $\ddot{q}$  与杆  $n$  加速度间的关系.

与研究机器人的速度问题一样, 这里所用的数学工具也有  $4 \times 4$  齐次变换矩阵和三维矢量法两种, 所研究的问题也有正加速度问题和逆加速度问题两类.

### 一、正加速度问题的解法

#### 1. 用齐次变换矩阵描述的正加速度问题

##### (1) 问题的提法

这时问题的提法是: 已知  $q, \dot{q}$  和  $\ddot{q}$ , 求相应的  ${}^0\ddot{A}_n$ .

##### (2) 用齐次变换矩阵表示的正加速度递推公式

利用 1.4 节中已证明的式 (1-42) 可知

$${}^{i-1}\dot{A}_i = \frac{d}{dq_i} [{}^{i-1}A_i(q_i)] \dot{q}_i = Q_i {}^{i-1}A_i \dot{q}_i \quad (1-66)$$

再将 1.4 节中导出的用齐次变换矩阵表示的正速度递推公式 (1-45) 求导, 并代入上式后即可得到

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{A}_i &= {}^0\ddot{A}_{i-1} {}^{i-1}A_i + {}^0\dot{A}_{i-1} {}^{i-1}\dot{A}_i + {}^0\dot{A}_{i-1} Q_i {}^{i-1}A_i \dot{q}_i + \\ &\quad {}^0A_{i-1} Q_i {}^{i-1}\dot{A}_i \dot{q}_i + {}^0A_{i-1} Q_i {}^{i-1}A_i \ddot{q}_i \\ &= {}^0\ddot{A}_{i-1} {}^{i-1}A_i + 2 {}^0\dot{A}_{i-1} Q_i {}^{i-1}A_i \dot{q}_i + {}^0A_{i-1} (Q_i^2 {}^{i-1}A_i \dot{q}_i^2 + \\ &\quad Q_i {}^{i-1}A_i \ddot{q}_i), \quad ({}^0\ddot{A}_0 = O) \end{aligned} \quad (1-67)$$

这样, 1.4 节中求出的计算  ${}^0A_i, {}^0\dot{A}_i$  的递推公式与式 (1-67) 一起构成了用齐次变换矩阵表示的正加速度递推公式, 且只要在求解  ${}^0\dot{A}_n$  的框图 1-18 中加入式 (1-67) 的计算后即可得到求解  ${}^0\ddot{A}_n$  的框图.

由于式(1-67)是从1.4节中式(1-45)求导得出的,故它也只适用于用D-H方法建立的传动轴坐标系情况.对适用于用修改的D-H方法建立的驱动轴坐标系的正加速度公式的推导留给读者作为练习(习题1-36).

## 2. 用三维矢量表示的正加速度关系

### (1) 问题的提法

这时问题的提法是:已知 $q, \dot{q}$ 和 $\ddot{q}$ ,求这时系 $n$ (相对系0)的角加速度 $\dot{\omega}_n \triangleq \epsilon_n$ 和其原点 $O_n$ 的加速度 $\dot{v}_n \triangleq a_n$ .

### (2) 用三维矢量表示的正加速度递推公式

将1.4节中求出的角速度递推公式(1-51)求导得

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \bar{\sigma}_i(\dot{z}_{i-1}\dot{q}_i + z_{i-1}\ddot{q}_i), (\dot{\omega}_0 = 0) \quad (1-68)$$

因 $z_{i-1}$ 是 ${}^0R_{i-1}$ 的第3列,故 $\dot{z}_{i-1}$ 是 ${}^0\dot{R}_{i-1}$ 的第3列,因此由

$${}^0\dot{R}_{i-1} = S(\omega_{i-1}){}^0R_{i-1}$$

知

$$\dot{z}_{i-1} = S(\omega_{i-1})z_{i-1} = \omega_{i-1} \times z_{i-1} \quad (1-69)$$

代入式(1-68)并记 $\dot{\omega}_i = \epsilon_i (i = \{1, \dots, n\})$ 后即得到以下计算角加速度的递推公式

$$\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + \bar{\sigma}_i(\omega_{i-1} \times z_{i-1}\dot{q}_i + z_{i-1}\ddot{q}_i), (\epsilon_0 = 0) \quad (1-70)$$

再将1.4节中求出的系 $i$ 原点速度的递推公式(1-52)求导,得到

$$\begin{aligned} \dot{v}_i = \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times p_i^* + \omega_i \times \dot{p}_i^* + \\ \sigma_i(\dot{z}_{i-1}\dot{q}_i + z_{i-1}\ddot{q}_i), \quad (\dot{v}_0 = 0) \end{aligned} \quad (1-71)$$

考虑到 $p_i^* = {}^0R_{i-1}{}^{i-1}p_i^*$ ,故

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^* &= {}^0\dot{R}_{i-1}{}^{i-1}p_i^* + {}^0R_{i-1} \frac{d}{dt}({}^{i-1}p_i^*) \\ &= S(\omega_{i-1}){}^0R_{i-1}{}^{i-1}p_i^* + {}^0R_{i-1} \frac{d}{dt}({}^{i-1}p_i^*) \\ &= \omega_{i-1} \times p_i^* + {}^0R_{i-1} \frac{d}{dt}({}^{i-1}p_i^*) \end{aligned} \quad (1-72)$$

又因

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}p_i^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $\frac{d}{dt}({}^{i-1}p_i^*)$ 是 ${}^{i-1}\dot{A}_i$ 第4列的前3个元.由式(1-66)和(1-46)知

$${}^{i-1}\dot{A}_i = Q_i{}^{i-1}A_i\dot{q}_i = \begin{bmatrix} S(\bar{\sigma}_i z) & \sigma_i z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}p_i^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q}_i$$

$$= \begin{bmatrix} S(\bar{\sigma}_i z)^{-1} R_i & \bar{\sigma}_i z \times {}^{i-1} p_i^* + \sigma_i z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i$$

所以

$$\frac{d}{dt}({}^{i-1} p_i^*) = (\bar{\sigma}_i z \times {}^{i-1} p_i^* + \sigma_i z) \dot{q}_i$$

将其代入式(1-72), 并利用 1.4 节中的角速度递推公式(1-51)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^* &= \omega_{i-1} \times p_i^* + {}^0 R_{i-1} (\bar{\sigma}_i z \times {}^{i-1} p_i^* + \sigma_i z) \dot{q}_i \\ &= \omega_{i-1} \times p_i^* + (\bar{\sigma}_i z_{i-1} \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1}) \dot{q}_i \\ &= \omega_i \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1} \dot{q}_i \end{aligned}$$

将上式和式(1-69)代入式(1-71)后有

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times p_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^* + \sigma_i z_{i-1} \dot{q}_i) + \\ &\quad \sigma_i (\omega_{i-1} \times z_{i-1} \dot{q}_i + z_{i-1} \ddot{q}_i) \\ &= \dot{v}_{i-1} + \epsilon_i \times p_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + \\ &\quad \sigma_i (\omega_i \times z_{i-1} \dot{q}_i + \omega_{i-1} \times z_{i-1} \dot{q}_i + z_{i-1} \ddot{q}_i), \quad (\dot{v}_0 = 0) \end{aligned}$$

记  $\dot{v}_i = a_i (i = \{0, 1, \dots, n\})$ , 并考虑到由 1.4 节中式(1-51)已知当  $\sigma_i = 1$  时  $\omega_i = \omega_{i-1}$ , 故上式可写为

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-1} + \epsilon_i \times p_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + \\ &\quad \sigma_i (2 \omega_i \times z_{i-1} \dot{q}_i + z_{i-1} \ddot{q}_i), \quad (a_0 = 0) \end{aligned} \quad (1-73)$$

与 1.4 节中同理, 在实际计算  $\epsilon_i$  和  $a_i$  时并不直接利用式(1-70)和(1-73), 而将其投影到杆坐标系中, 得到以下计算量更少的公式:

$$\tilde{\epsilon}_i = {}^i R_{i-1} [\tilde{\epsilon}_{i-1} + \bar{\sigma}_i (\tilde{\omega}_{i-1} \times z \dot{q}_i + z \ddot{q}_i)], \quad (\tilde{\epsilon}_0 = 0) \quad (1-74)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= {}^i R_{i-1} (\tilde{a}_{i-1} + \sigma_i z \ddot{q}_i) + \tilde{\epsilon}_i \times \tilde{p}_i^* + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_i^*) + \\ &\quad 2 \sigma_i \tilde{\omega}_i \times ({}^i R_{i-1} z) \dot{q}_i, \quad (\tilde{a}_0 = 0) \end{aligned} \quad (1-75)$$

式中  $\tilde{\epsilon}_i \triangleq {}^i R_0 \epsilon_i$  和  $\tilde{a}_i \triangleq {}^i R_0 a_i$  为杆  $i$  角加速度  $\epsilon_i$  和杆  $i$  原点加速度  $a_i$  在系  $i$  中的坐标表达式. 其计算框图也只要在 1.4 节中计算  $\tilde{\omega}_i$  和  $\tilde{v}_i$  的框图 1-19 中加入计算  $\tilde{\epsilon}_i, \tilde{a}_i$  的递推公式(1-74)和(1-75)即可.

这里还应当指出的是:

① 当然也可以像 1.4 节中那样从用齐次变换矩阵表示的正加速度公式(1-67)中导出式(1-70)和(1-73), 但那样做要比以上推导方法复杂得多(习题 1-37).

② 递推公式(1-74)和(1-75)显然也只适用于用 D-H 方法建立杆坐标系的情况, 推导适用于用修改的 D-H 方法建立杆坐标系的加速度递推公式留作练习(习题 1-38).

## 二、逆加速度问题的解法

### 1. 问题的提法

逆加速度问题的提法是: 已知  $q, \dot{q}$  和  $a_n, \epsilon_n$ , 求这时对应的关节加速度  $\ddot{q}$ .

### 2. 逆加速度问题的解法

由1.4节中已知, 若记  $\dot{x} = [\mathbf{v}_n^T, \boldsymbol{\omega}_n^T]^T$ , 则有

$$\dot{x} = J\dot{q}$$

故

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_n \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n \\ \boldsymbol{\epsilon}_n \end{bmatrix} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \quad (1-76)$$

因在1.4节中已求出

$$J = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad (1-77)$$

式中

$$\begin{cases} b_i = \bar{\sigma}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{i-1}) + \sigma_i \mathbf{z}_{i-1} & (1-78) \\ c_i = \bar{\sigma}_i \dot{\mathbf{z}}_{i-1} & (1-79) \end{cases}$$

故

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \dot{b}_1 & \cdots & \dot{b}_n \\ \dot{c}_1 & \cdots & \dot{c}_n \end{bmatrix} \quad (1-80)$$

其中

$$\begin{cases} \dot{b}_i = \bar{\sigma}_i [\dot{\mathbf{z}}_{i-1} \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{i-1}) + \mathbf{z}_{i-1} \times (\dot{\mathbf{p}}_n - \dot{\mathbf{p}}_{i-1})] + \sigma_i \dot{\mathbf{z}}_{i-1} & (1-81) \\ \dot{c}_i = \bar{\sigma}_i \dot{\mathbf{z}}_{i-1} & (1-82) \end{cases}$$

易知: 将1.4节中的式(1-55)和(1-56)中的  $n$  改为  $j (\leq n)$  后仍成立, 故有

$$\dot{\mathbf{p}}_n - \dot{\mathbf{p}}_{i-1} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{i-1} = \sum_{k=1}^n \mathbf{b}_k \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{b}_k \dot{q}_k = \sum_{k=i}^n \mathbf{b}_k \dot{q}_k$$

将上式和式(1-69)代入式(1-81)和(1-82)后得到

$$\begin{cases} \dot{b}_i = \bar{\sigma}_i [(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_{i-1}) \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{i-1}) + \mathbf{z}_{i-1} \times (\sum_{k=i}^n \mathbf{b}_k \dot{q}_k)] + \sigma_i (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_{i-1}) & (1-83) \\ \dot{c}_i = \bar{\sigma}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_{i-1} & (1-84) \end{cases}$$

因此当已知  $q, \dot{q}$  后, 可用式(1-77) ~ (1-79) 算出  $J = J(q)$ , 再用式(1-80), (1-83) 和(1-84) 算出  $\dot{J} = \dot{J}(q, \dot{q})$ , 则式(1-76)可写为

$$\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$

若定义  $\ddot{\mathbf{x}}^* = \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ , 则当  $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{a}_n^T, \boldsymbol{\epsilon}_n^T]^T$  已知时可算出  $\ddot{\mathbf{x}}^*$ , 这样解逆加速度问题即化为求解方程

$$\ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$

因这个方程与求解逆速度问题的方程具有完全相同的形式, 所以可以用求解逆速度问题完全相同的方法求解.

注意: 以上式(1-83)和(1-84)仍只对用 D-H 方法建立的杆坐标系成立, 对于用修改的 D-H 方法建立杆坐标系的情况应做相应的修改(习题1-40).

## 第2章 机器人动力学

### 2.1 用 Lagrange 方程建立自由运动机器人的动力学方程

#### 一、预备知识——第二类 Lagrange 方程

利用第二类 Lagrange 方程建立力学系统(本书中限于研究质点系或刚体系)的运动微分方程是推导系统动力学方程最基本的途径之一. 推导第二类 Lagrange 方程需要以下基础知识.

##### 1. 广义坐标

系统的广义坐标是可以完全确定系统位置的彼此独立的一组参数. 系统广义坐标的个数称为系统的自由度.

以下为推导书写方便起见, 研究由  $N$  个质点组成的  $n$  自由度质点系(但所得结果对刚体系也是成立的, 这只要在研究中将相应的和号改为积分号即可). 若记此质点系的  $n$  个广义坐标为  $q_1, \dots, q_n$ , 则系统中质点  $i$  的矢径可表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1(t), \dots, q_n(t), t), \quad i = 1, \dots, N \quad (2-1)$$

故

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

对于  $\dot{\mathbf{r}}_i$  很容易证明(习题 2-2): 对任一  $k \in \{1, \dots, n\}$  均有

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (2-3)$$

##### 2. 虚位移

限制一物体运动的其他物体称为此物体的约束. 系统中运动受到约束的质点  $i$  的虚位移是相对真位移而言的. 所谓真位移是质点  $i$  在无穷小时间内的无限小位移  $d\mathbf{r}_i$ , 即其矢径  $\mathbf{r}_i$  经时间  $dt$  后变为  $\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i$ . 真位移应满足以下几点:

- ① 在力的作用下发生(即与作用力有关).
- ② 经过时间  $dt$  后发生(即与时间有关).
- ③ 应满足质点的运动微分方程——Newton 第二定律(即与质点动力学性质有关).

④ 应满足约束条件(即与约束的性质有关).

而该质点的虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$  定义为

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2-4)$$

式中  $\delta q_j$  为在约束所允许的条件下广义坐标  $q_j$  的无限小位移. 上式表明虚位移是约束所允许的无限小位移, 它本质上是一种几何概念, 与作用在质点上的力、时间、质点运动微分方程等均无关, 只是从几何上描述质点位移的可能性.

### 3. 理想约束

约束施加给物体的力叫约束反力, 物体所受约束反力以外的其他力统称为主动力. 若一约束使得在系统的任何虚位移中, 约束反力的元功之和为零, 即满足

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2-5)$$

式中  $\mathbf{N}_i$  为此约束给质点  $i$  的约束反力, 则称这种约束为理想约束. 理想约束的例子很多, 如光滑固定面、光滑铰链、无滑动的滚动、不可伸长的软绳等. 可以证明: 理想约束的约束反力满足

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad (2-6)$$

这是因为由式(2-5)和(2-4)知

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

所以由广义坐标的独立性知式(2-6)成立.

### 4. 虚功与广义力

虚功是作用在系统上的力在虚位移中所作的元功, 即虚功

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (2-7)$$

式中  $\mathbf{F}_i$  是作用在质点  $i$  上的合力. 将上式用广义坐标表示, 得到

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \triangleq \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \end{aligned} \quad (2-8)$$

其中  $\delta q_j$  前的系数

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (2-9)$$

称为对应于广义坐标  $q_j$  的广义力. 这里要特别注意以下几点:

① 广义力与力不同, 它不是矢量而是标量, 同时它当然也不一定具有力的量纲.

② 式(2-9)中  $\mathbf{F}_i$  不仅包括作用在质点  $i$  上的主动力, 也包括约束反力. 只有在理想约束的情况下, 才可将  $\mathbf{F}_i$  视为主动力.

③ 广义力的定义式(2-9)在理论分析中是很有用的, 但在实际计算广义力  $Q_j$  时, 一般并不直接用式(2-9), 而是利用式(2-8). 方法是: 使系统仅有一个虚位移  $\delta q_j$  而保持其他广义坐标不变, 计算出此时的虚功

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = Q_j \delta q_j, \text{ 从而得到 } Q_j.$$

### 5. 保守力的广义力

记矢径  $\mathbf{r}_i$  的直角坐标表达式为

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \quad i = 1, \dots, N$$

式中  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为直角坐标轴上的 3 个单位向量. 若存在一势函数  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = V(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N)$ , 使得力  $\mathbf{F}_i (i = 1, \dots, N)$  满足

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V, \quad \nabla_i \triangleq \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{k}, \quad i = 1, \dots, N$$

则称力系  $\{\mathbf{F}_i | i = 1, \dots, N\}$  是保守力系. 例如重力系即为一个保守力系. 利用式(2-9)可计算出保守力系  $\{\mathbf{F}_i | i = 1, \dots, N\}$  对应于广义坐标  $q_j (j = 1, \dots, n)$  的广义力

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N (\nabla_i V) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2-10)$$

### 6. 第二类 Lagrange 方程

第二类 Lagrange 方程是用广义坐标表示的受理想约束的力学系统的运动微分方程, 其推导过程如下:

由 Newton 第二定律知, 对系统中每个质点  $i$  均有

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

式中  $m_i, \mathbf{a}_i$  分别为质点  $i$  的质量和加速度,  $\mathbf{F}_i$  和  $\mathbf{N}_i$  分别为作用于质点  $i$  的



主动力和约束反力,故

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2-11)$$

当约束为理想约束时,一方面由式(2-6)和(2-9)可得到

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2-12)$$

另一方面利用式(2-2)和(2-3)可计算出

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right), \\ &\quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

因  $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$  为质点  $i$  速度,  $\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \triangleq T_i$  为质点  $i$  的动能,

$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N T_i \triangleq T$  是整个系统的动能,故上式可写为

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2-13)$$

将式(2-12)和(2-13)分别代入式(2-11)两端即得出第二类 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n$$

若定义  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ ,  $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_n]^T$ , 则可将其写为更紧凑的形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q} \quad (2-14)$$

更进一步地,当主动力系是保守力系时,由式(2-10)知  $\mathbf{Q} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$ . 定义 Lagrange 函数  $L = T - V$ , 因势能函数仅与位置有关,即有  $V = V(\mathbf{q})$ , 而不含  $\dot{\mathbf{q}}$ , 故  $\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$ . 因此当主动力系为保守力系时, Lagrange 方程(2-14)可写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2-15)$$

更一般地,当主动力系中只有一部分为保守力时,可将 Lagrange 方程写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2-16)$$

式中  $Q$  为非保守的主动力系所对应的广义力。

综上所述,用第二类 Lagrange 方程建立系统动力学方程,只须用广义坐标将系统的动能  $T$  和势能  $V$  表示出来,并求出非保守的主动力系的广义力,再代入方程计算即可。另外值得特别指出的是:由式(2-12)知 Lagrange 方程中的广义力只是主动力系的广义力,而约束反力不出现在方程中,这就使得用它来表示具有理想约束的系统的动力学方程十分简洁。这是第二类 Lagrange 方程的主要特点,也是其主要优点之一。

## 二、用 Lagrange 方程建立自由运动机器人动力学方程

### 1. 广义坐标的选取和广义力的计算

所谓自由运动机器人是指其手端不与环境接触的机器人(以后如无特别说明,所提到的机器人均为自由运动机器人),这种机器人的位置可用关节变量  $q$  完全确定,且  $q$  的各分量又都彼此独立,因此通常选取  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  为机器人的广义坐标。

给广义坐标  $q_j$  以虚位移  $\delta q_j$ ,而令其余广义坐标  $q_i (i \neq j, i \in \{1, \dots, n\})$  均不动。显然这时除保守力重力外的其他非保守力所做的元功为  $\delta W = \tau_j \delta q_j$ ,其中  $\tau_j$  为作动器沿关节  $j$  轴向所施加的力(若关节  $j$  是移动关节)或力矩(若关节  $j$  是转动关节)。由式(2-8)知对应于广义坐标  $q_j$  的非保守力的广义力

$$Q_j = \tau_j \quad (2-17)$$

### 2. 机器人动能和势能的计算

记杆  $i$  中任一质点在系  $i$  中的齐次坐标为  ${}^i\tilde{r} = [{}^ix, {}^iy, {}^iz, 1]^T$ ,显然其在系 0 中的表示为

$$\tilde{r} = {}^0A_i {}^i\tilde{r}$$

该点的齐次速度定义为

$$\dot{\tilde{r}} = {}^0\dot{A}_i {}^i\tilde{r} = \left( \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^i\tilde{r} \quad (2-18)$$

故该元质点的动能

$$\begin{aligned} dT_i &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{r}} \cdot \dot{\tilde{r}} dm = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\tilde{r}} \dot{\tilde{r}}^T) dm \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left( \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j {}^i\tilde{r} \right) \left( \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \dot{q}_k {}^i\tilde{r} \right)^T \right] dm \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} {}^i\tilde{\mathbf{r}} {}^i\tilde{\mathbf{r}}^T \frac{\partial ({}^0\mathbf{A}_i)^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm$$

由此立即知杆  $i$  的动能

$$\begin{aligned} T_i &= \int_{\mathbb{R}^3} dT_i = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} {}^i\tilde{\mathbf{r}} {}^i\tilde{\mathbf{r}}^T \frac{\partial ({}^0\mathbf{A}_i)^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} ({}^i\tilde{\mathbf{r}} {}^i\tilde{\mathbf{r}}^T) dm \right] \frac{\partial ({}^0\mathbf{A}_i)^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{tr} \left\{ \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0\mathbf{A}_i)^T}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (2-19)$$

式中

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{\mathbb{R}^3} ({}^i\tilde{\mathbf{r}} {}^i\tilde{\mathbf{r}}^T) dm = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} dm \\ &= \begin{bmatrix} \int_{\mathbb{R}^3} x^2 dm & \int_{\mathbb{R}^3} x'y dm & \int_{\mathbb{R}^3} x'z dm & \int_{\mathbb{R}^3} x dm \\ \int_{\mathbb{R}^3} x'y dm & \int_{\mathbb{R}^3} y^2 dm & \int_{\mathbb{R}^3} y'z dm & \int_{\mathbb{R}^3} y dm \\ \int_{\mathbb{R}^3} x'z dm & \int_{\mathbb{R}^3} y'z dm & \int_{\mathbb{R}^3} z^2 dm & \int_{\mathbb{R}^3} z dm \\ \int_{\mathbb{R}^3} x dm & \int_{\mathbb{R}^3} y dm & \int_{\mathbb{R}^3} z dm & \int_{\mathbb{R}^3} dm \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-20)$$

在力学中,常用刚体的质心  $C = [x_C, y_C, z_C]^T$ 、对三个轴的转动惯量  $I_x, I_y, I_z$  及惯性积  $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  来刻画刚体的质量分布,其中

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m} \int x dm, & y_C &= \frac{1}{m} \int y dm, & z_C &= \frac{1}{m} \int z dm \\ I_x &= \int (y^2 + z^2) dm, & I_y &= \int (x^2 + z^2) dm, & I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \\ I_{xy} &= \int xy dm, & I_{xz} &= \int xz dm, & I_{yz} &= \int yz dm \end{aligned}$$

式中  $m$  为刚体质量,  $[x, y, z]^T$  为元质点  $dm$  矢径的坐标表达式,积分均为对整个刚体体积积分. 利用以上9式并考虑到  $\int_{\mathbb{R}^3} dm = m$  (后  $m$  为杆  $i$  质量), 可将  $J_i$  写为

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-{}^iI_x + {}^iI_y + {}^iI_z}{2} & {}^iI_{xx} & {}^iI_{xz} & m_i'x_{Ci} \\ {}^iI_{xy} & \frac{{}^iI_x - {}^iI_y + {}^iI_z}{2} & {}^iI_{yz} & m_i'y_{Ci} \\ {}^iI_{xz} & {}^iI_{yz} & \frac{{}^iI_x + {}^iI_y - {}^iI_z}{2} & m_i'z_{Ci} \\ m_i'x_{Ci} & m_i'y_{Ci} & m_i'z_{Ci} & m_i \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

式中  $[{}^i x_{Ci}, {}^i y_{Ci}, {}^i z_{Ci}]^T$  为杆  $i$  质心在系  $i$  中的坐标表达式. 由上式立即知  $J_i$  是一对称常值阵, 它完整地刻画了杆  $i$  的质量分布情况.

很容易验证: 对任一双指标的函数  $f(i, j)$ , 有恒等式

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i f(i, j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n f(i, j) \quad (2-22)$$

$$\sum_{i=j}^n \sum_{k=i}^i f(i, k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=\max_{i,j,k}}^n f(i, k) \quad (2-23)$$

因此由式(2-19)可知整个机器人的动能

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^i \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0A_i)^T}{\partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \sum_{k=i}^i \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0A_i)^T}{\partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^i \left[ \sum_{j=\max_{i,j,k}}^n \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0A_i)^T}{\partial q_k} \right] \right] \dot{q}_i \dot{q}_k \\ &\triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^i h_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (2-24)$$

上式中的  $n \times n$  矩阵  $H(q) = [h_{ij}]$  常称为机器人的惯性矩阵, 由其定义知它是一对称矩阵. 又由系统动能的正定性(即当  $\dot{q} \neq 0$  时总有  $T > 0$ )知  $H(q)$  是一正定矩阵.

下面再来求机器人的势能. 记杆  $i$  质心的齐次坐标在系  $i$  中的表达式为  ${}^i\bar{r}_{Ci}$ , 则其在系 0 中的表达式为  $\bar{r}_{Ci} = {}^0A_i {}^i\bar{r}_{Ci}$ , 故杆  $i$  的势能

$$V_i = -m_i \bar{g} \cdot \bar{r}_{Ci} = -m_i \bar{g}^T {}^0A_i {}^i\bar{r}_{Ci}$$

式中  $\bar{g} \triangleq \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $g$  为重力加速度矢量在系 0 中的坐标表达式. 由上式知整个机器人的势能

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = - \sum_{i=1}^n m_i \bar{g}^T {}^0A_i {}^i\bar{r}_{Ci} \quad (2-25)$$

### 3. 利用第二类 Lagrange 方程建立机器人动力学模型

利用式(2-24)和(2-25)可计算出 Lagrange 函数及其偏导数

$$L = T - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n h_{jk} \dot{q}_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n h_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \dot{h}_{jk} \dot{q}_k \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} &= \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} - \left( - \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{g}}^T \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \mathbf{r}_{Ci} \right) \\ &\triangleq \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} - g_j \end{aligned} \quad (2-27)$$

将式(2-26)、(2-27)和(2-17)代入 Lagrange 方程(2-16)得到

$$\sum_{k=1}^n h_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \dot{h}_{jk} \dot{q}_k - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + g_j = \tau_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2-28)$$

因

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \dot{h}_{jk} \dot{q}_k - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{ki}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_i \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2-29)$$

故式(2-28)可写为

$$\sum_{k=1}^n h_{jk} \ddot{q}_k + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{q}} + g_j = \tau_j, \quad j = 1, \dots, n$$

或写为矩阵形式

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{G} = \boldsymbol{\tau} \quad (2-30)$$

也可更简洁地写为

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2-31)$$

式中

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \triangleq [h_{ij}], \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} \triangleq \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

式(2-31)即为最常在文献中见到的机器人动力学方程。方程中的各项均有明确的物理含义。其中  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$  为与广义加速度  $\ddot{\mathbf{q}}$  成正比的惯性力；

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$  中各分量均为广义速度的二次型，其中含  $\dot{q}_i^2$  的项为离心力，含  $\dot{q}_i \dot{q}_j (i \neq j)$  的项为哥氏力； $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  为重力项； $\boldsymbol{\tau}$  为机器人作动器加在

各杆轴上的驱动力.

对机器人方程(2-31)特别要注意其中的矩阵  $C(q, \dot{q})$ , 对它要弄清以下4点:

①  $C(q, \dot{q})$  的定义不是唯一的.

这很容易理解, 因为由

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T C_1 \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T C_n \dot{q} \end{bmatrix}$$

知: 若不要求  $C_i$  是对称矩阵, 则  $C_i$  的定义不是唯一的, 从而

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{q}^T C_1 \\ \vdots \\ \dot{q}^T C_n \end{bmatrix}$$

当然也不是唯一的.

② 无论  $C(q, \dot{q})$  如何定义, 对任意  $q, \dot{q}$  总有

$$\dot{q}^T [\dot{H} - 2C] \dot{q} = 0 \quad (2-32)$$

这是因为由动能定理知: 系统动能的变化率等于作用在系统上的力系所作功的功率. 因机器人动能  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q}$ , 又因机器人各关节均为理想约束, 其约束反力不作功, 作功的只有主动力 (即重力  $-\frac{\partial V}{\partial q} = -G(q)$  和机器人作动器产生的驱动力  $\tau$ ), 故由动能定理知

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{q}^T H(q) \dot{q}] = \dot{q}^T [\tau - G] \quad (2-33)$$

直接计算上式左端并利用机器人方程(2-31)化简后得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{q}^T H(q) \dot{q}] &= \dot{q}^T H \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} \\ &= \dot{q}^T (\tau - G - C\dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} \\ &= \dot{q}^T (\tau - G) + \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{H} - 2C) \dot{q} \end{aligned}$$

将此式代入式(2-33)后即得到式(2-32), 从而证明了式(2-32)的成立与  $C$  的定义方式无关.

③ 可以适当定义  $C(q, \dot{q})$ , 使得  $\dot{H} - 2C$  是反对称矩阵.

因  $\dot{H} = \dot{H}(q, \dot{q})$ ,  $C = C(q, \dot{q})$ , 故式(2-32)成立是指: 对任意的  $q$  和  $\dot{q}$ , 总有

$$\dot{q}^T [\dot{H}(q, \dot{q}) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0$$

但这并不意味着  $\dot{H} - 2C$  是反对称矩阵, 换句话说, 这不意味着对任意  $x$

$\in \mathbf{R}^n$  及  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  均成立

$$\mathbf{x}^T [\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \mathbf{x} = 0$$

(习题 2-3). 而且通过例子也很容易验证: 的确并非所有  $\mathbf{C}$  都满足  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  是反对称阵.

然而由式(2-29)知

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right] \dot{q}_j \triangleq \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j \end{aligned}$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \triangleq \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad (2-34)$$

式中

$$c_{ijk} \triangleq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

被称为第一类 Christoffel 符号.

可以证明: 当  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [c_{ij}]$ ,  $c_{ij}$  由式(2-34)所定义时,  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  是反对称矩阵. 事实上, 由式(2-34)知对所有  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  都有

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \dot{h}_{ij} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right]$$

故

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ij} - 2c_{ij} &= - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \\ &= - \left\{ \dot{h}_{ji} - \left[ \dot{h}_{ji} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \right] \right\} = - (\dot{h}_{ji} - 2c_{ji}) \end{aligned}$$

这就证明了  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  是反对称矩阵.

$\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  的反对称性对于简化机器人控制器(特别是自适应控制器)的分析和计算具有极重要的意义, 在文献中常常用到, 是机器人模型最重要的性质之一.

④ 满足  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  是反对称矩阵的  $\mathbf{C}$  不是唯一确定的.

因为在目前几乎所有提到  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  反对称性的文献中,  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  都是用式(2-34)定义的, 这就使得一些人产生一个误解, 认为满足  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$

是反对称矩阵的  $C$  是唯一地由式(2-34)所确定的<sup>[9]</sup>。但现已证明:当机器人杆数  $n > 2$  时,满足  $\dot{H} - 2C$  是反对称的  $C$  不是唯一确定的<sup>[10]</sup>。

最后,特别要指出的是:在以上推导机器人动力学方程的过程中,完全没有涉及如何建立杆坐标系的问题,因此上述关于机器人动力学方程的所有结论,不论是对用 D-H 方法或是对用修改的 D-H 方法建立杆坐标系的情况都是成立的。

**例 2-1** 美国 MIT 串连杆件 DDArm 机械臂(MIT Serial Link Direct Drive Arm)<sup>[11]</sup>的结构图可用图 2-1 表示,对其用 D-H 方法建立

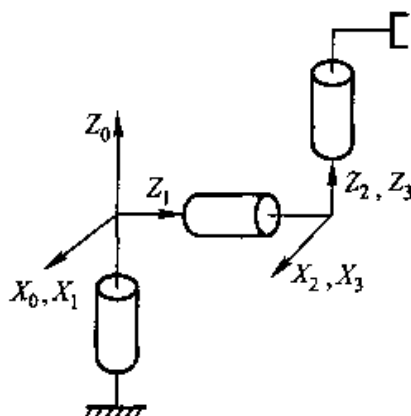


图 2-1

如图所示的杆坐标系后,可知其 D-H 参数如表 2-1 所示。

表 2-1

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-90^\circ$	0	$\theta_1$ (变量)
2	0	$90^\circ$	$d_2$	$\theta_2$ (变量)
3	0	0	0	$\theta_3$ (变量)

由本节所述可知:若定义  $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ ,  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ , 则其动力学方程可写为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

且由式(2-24)、(2-34)和(2-27)知上式中

$$H(q) = [h_{ij}]; h_{ij} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^n \text{tr} \left( \frac{\partial {}^0A_k}{\partial q_i} J_k \frac{\partial ({}^0A_k)^T}{\partial q_j} \right); i, j = 1, 2, 3$$

$$C(q, \dot{q}) = [c_{ij}]; c_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k; i, j = 1, 2, 3$$



$$G(q) = [g_1, g_2, g_3]^T; g_i = - \sum_{j=1}^n m_j \bar{g}^T \frac{\partial {}^0A_j}{\partial q_i} \bar{r}_{Cj}; i = 1, 2, 3$$

利用表中所列 D-H 参数及以上 3 式可算出

$$\begin{aligned} h_{11} &= I_x + s_2^2({}^2I_x + c_3^2{}^3I_x + 2cs_3{}^3I_{xy} + s_3^2{}^3I_y) + \\ &\quad 2cs_2({}^2I_{xz} + c_3{}^3I_{xz} - s_3{}^3I_{yz}) + c_2^2({}^2I_x + {}^3I_x) + \\ &\quad 2d_2(m_2^2y_{c2} + s_3m_3^3x_{c3} + c_3m_3^3y_{c3}) + d_2^2(m_2 + m_3) \\ h_{12} &= h_{21} = s_2[{}^2I_{xy} + d_2m_2^2x_{c2} - cs_3({}^3I_x - {}^3I_y) + \\ &\quad (c_3^2 - s_3^2){}^3I_{xy} + d_2(c_3m_3^3x_{c3} - s_3m_3^3y_{c3})] - \\ &\quad c_2[{}^2I_{yz} + s_3{}^3I_{xz} + c_3{}^3I_{yz} + d_2(m_2^2z_{c2} + m_3^3z_{c3})] \\ h_{13} &= h_{31} = s_2(c_3{}^3I_{xz} - s_3{}^3I_{yz}) + c_2[{}^3I_z + d_2(s_3m_3^3x_{c3} + \\ &\quad c_3m_3^3y_{c3})] \\ h_{22} &= {}^2I_y + s_3^2{}^3I_x - 2cs_3{}^3I_{xy} + c_3^2{}^3I_y \\ h_{23} &= h_{32} = -s_3{}^3I_{xz} - c_3{}^3I_{yz} \\ h_{33} &= {}^3I_z \\ c_{11} &= [cs_2({}^2I_x - {}^2I_z + c_3^2{}^3I_x + 2cs_3{}^3I_{xy} + s_3^2{}^3I_y - {}^3I_z) + \\ &\quad (c_2^2 - s_2^2)({}^2I_{xz} + c_3{}^3I_{xz} - s_3{}^3I_{yz})]\dot{q}_2 + \\ &\quad \{s_2^2[cs_3(-{}^3I_x + {}^3I_y) + (c_3^2 - s_3^2){}^3I_{xy}] - \\ &\quad cs_2(s_3{}^3I_{xz} + c_3{}^3I_{yz}) + d_2(c_3m_3^3x_{c3} - s_3m_3^3y_{c3})\}\dot{q}_3 \\ c_{12} &= [cs_2({}^2I_x - {}^2I_z + c_3^2{}^3I_x + 2cs_3{}^3I_{xy} + s_3^2{}^3I_y - {}^3I_z) + \\ &\quad (c_2^2 - s_2^2)({}^2I_{xz} + c_3{}^3I_{xz} - s_3{}^3I_{yz})]\dot{q}_1 + \\ &\quad \{c_2[{}^2I_{xy} - cs_3({}^3I_x - {}^3I_y) + (c_3^2 - s_3^2){}^3I_{xy} + \\ &\quad d_2(m_2^2x_{c2} + c_3m_3^3x_{c3} - s_3m_3^3y_{c3})] + \\ &\quad s_2[{}^2I_{yz} + s_3{}^3I_{xz} + c_3{}^3I_{yz} + d_2(m_2^2z_{c2} + m_3^3z_{c3})]\}\dot{q}_2 - \\ &\quad \frac{1}{2}s_2[(c_3^2 - s_3^2)({}^3I_x - {}^3I_y) + 4cs_3{}^3I_{xy} + {}^3I_z + \\ &\quad 2d_2(s_3m_3^3x_{c3} + c_3m_3^3y_{c3})]\dot{q}_3 \\ c_{13} &= \{s_2^2[cs_3(-{}^3I_x + {}^3I_y) + (c_3^2 - s_3^2){}^3I_{xy}] - \\ &\quad cs_2(s_3{}^3I_{xz} + c_3{}^3I_{yz}) + d_2(c_3m_3^3x_{c3} - s_3m_3^3y_{c3})\}\dot{q}_1 - \\ &\quad \frac{1}{2}s_2[(c_3^2 - s_3^2)({}^3I_x - {}^3I_y) + 4cs_3{}^3I_{xz} + {}^3I_z + \\ &\quad 2d_2(s_3m_3^3x_{c3} + c_3m_3^3y_{c3})]\dot{q}_2 - \\ &\quad [s_2(s_3{}^3I_{xz} + c_3{}^3I_{yz}) - d_2c_2(c_3m_3^3x_{c3} - s_3m_3^3y_{c3})]\dot{q}_3 \\ c_{21} &= -[cs_2({}^2I_x - {}^2I_z + c_3^2{}^3I_x + 2cs_3{}^3I_{xy} + s_3^2{}^3I_y - {}^3I_z) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (c_2^2 - s_2^2)({}^2I_{xz} + c_3 {}^3I_{xz} - s_3 {}^3I_{yz})] \dot{q}_1 - \\
& \frac{1}{2} \{s_2[(c_3^2 - s_3^2)({}^3I_x - {}^3I_y) + 4cs_3 {}^3I_{xy} - {}^3I_z] + \\
& 2c_2(c_3 {}^3I_{xz} - s_3 {}^3I_{yz})\} \dot{q}_3 \\
c_{22} = & [cs_3({}^3I_x - {}^3I_y) - (c_3^2 - s_3^2) {}^3I_{xy}] \dot{q}_3 \\
c_{23} = & -\frac{1}{2} \{s_2[(c_3^2 - s_3^2)({}^3I_x - {}^3I_y) + 4cs_3 {}^3I_{xy} - {}^3I_z] + \\
& 2c_2(c_3 {}^3I_{xz} - s_3 {}^3I_{yz})\} \dot{q}_1 + [cs_3({}^4I_x - {}^3I_y) - \\
& (c_3^2 - s_3^2) {}^3I_{xy}] \dot{q}_2 - (c_3 {}^3I_{xz} - s_3 {}^3I_{yz}) \dot{q}_3 \\
c_{31} = & -\{s_2^2[cs_3(-{}^4I_x + {}^3I_y) + (c_3^2 - s_3^2) {}^3I_{xy}] - \\
& cs_2(s_3 {}^3I_{xz} + c_3 {}^3I_{yz}) + d_2(c_3 m_3 {}^3x_{c3} - s_3 m_3 {}^3y_{c3})\} \dot{q}_1 \times \\
& \frac{1}{2} \{s_2[(c_3^2 - s_3^2)({}^3I_x - {}^3I_y) + 4cs_3 {}^3I_{xz} - {}^3I_z] + \\
& 2c_2(c_3 {}^3I_{xz} - s_3 {}^3I_{yz})\} \dot{q}_2 \\
c_{32} = & \frac{1}{2} \{s_2[(c_3^2 - s_3^2)({}^3I_x - {}^3I_y) + 4cs_3 {}^3I_{xz} - {}^3I_z] + \\
& 2c_2(c_3 {}^3I_{xz} - s_3 {}^3I_{yz})\} \dot{q}_1 - \\
& [cs_3({}^3I_x - {}^3I_y) - (c_3^2 - s_3^2) {}^3I_{xy}] \dot{q}_2 \\
c_{33} = & 0 \\
g_1 = & 0 \\
g_2 = & -s_2(m_2 {}^2x_{c2} + m_3 {}^3x_{c3})g_c - \\
& c_2(m_2 {}^2x_{c2} + c_3 m_3 {}^3x_{c3} - s_3 m_3 {}^3y_{c3})g_c \\
g_3 = & s_2(s_3 m_3 {}^3x_{c3} + c_3 m_3 {}^3y_{c3})g_c
\end{aligned}$$

式中  $cs, \triangleq \cos \theta, \sin \theta, (i = 1, 2, 3)$ ,  $g_c$  为重力加速度常数。

## 2.2 用 Newton-Euler 方程建立自由运动机器人的动力学方程

### 一、预备知识——Newton 方程和 Euler 方程

#### 1. Newton 方程

##### (1) 质点的 Newton 方程

质点的 Newton 方程即 Newton 第二定律, 即若质点质量为  $m$ , 矢径为  $r$ , 加在质点上的合力为  $F$ , 则有

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

### (2) 平动刚体的 Newton 方程

刚体平动是指这样的运动:刚体在运动中其上每一条直线的方向都保持不变.由此可知平动刚体上每一点的速度均相同.记刚体上一质点  $i$  的质量为  $m_i$ , 矢径为  $\mathbf{r}_i$ , 质点  $i$  受到的力有外界作用于此质点的力(简称外力)  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  和此质点与刚体内部其他质点间的相互作用力(简称内力)  $\mathbf{F}_i^{(i)}$ . 由质点的 Newton 方程知

$$m_i \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)}$$

从而对整个刚体有

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(i)} \quad (2-35)$$

式中  $\sum_i$  表示对刚体中每个质点  $i$  求和. 因刚体上每个质点的速度均相同, 故

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_i = \left( \sum_i m_i \right) \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_P = m \ddot{\mathbf{r}}_P \quad (2-36)$$

式中  $\dot{\mathbf{r}}_P$  为刚体上任一点  $P$  的速度,  $m = \sum_i m_i$  为刚体质量. 又由 Newton 第三定律(作用与反作用力大小相等, 方向相反)知:刚体内的内力总是成对出现, 大小相等且方向相反的, 故有

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(i)} = 0 \quad (2-37)$$

同时又知作用于刚体上所有外力的和  $\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$  即为作用在刚体上外力系的主矢  $\mathbf{F}$ , 即有

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F} \quad (2-38)$$

所以由式(2-35)~(2-38)知平动刚体的运动微分方程可写为

$$m \ddot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{F} \quad (2-39)$$

此方程即为描述刚体平动的 Newton 方程, 它与质点的 Newton 方程具有完全相同的形式, 但值得指出的是: 这时  $\ddot{\mathbf{r}}_P$  可以是平动刚体上任一点  $P$  的加速度.

### (3) 一般运动刚体的 Newton 方程

作一般运动刚体与平动刚体的区别是: 作一般运动刚体上各点的速度一般是不相同的. 当然这时对刚体上每个质点  $i$  仍成立

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)}$$

同时对整个刚体仍成立

$$\sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(i)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F} \quad (2-40)$$

因由质心定义知

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$$

式中  $m$  为刚体质量,  $\mathbf{r}_C$  为刚体质心矢径, 故

$$\sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} (m \mathbf{r}_C) = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_C = m \ddot{\mathbf{r}}_C$$

代入式(2-40)后有

$$m \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} \quad (2-41)$$

这就是做一般运动刚体的 Newton 方程, 它在形式上与平动刚体的 Newton 方程(2-39)完全相同, 但特别要注意的是: 这时式中的加速度必须是刚体质心的加速度.

从做一般运动刚体的 Newton 方程(2-41)看, 它刻画的仿佛是一个以加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_C$  做平动的刚体, 而事实上所研究的是一个做一般运动(既有平动, 又有转动)的刚体. 这表明 Newton 方程(2-41)没有刻画出刚体的转动情况, 也就是说: 对做一般运动的刚体, 仅用 Newton 方程不能完全刻画出刚体的全部动力学行为.

## 2. Euler 方程

### (1) 动量矩定理

#### ① 质点的动量矩定理.

记质点质量为  $m$ , 它在一个以固定参考点  $O$  为原点的坐标系中的矢径为  $\mathbf{r}$ . 质点的动量定义为  $m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v}$  为质点速度), 质点对参考点  $O$  的动量矩定义为  $\mathbf{l}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ .

将动量矩  $\mathbf{l}_O$  求导, 得到

$$\dot{\mathbf{l}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}$$

将 Newton 方程  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  代入上式, 并记  $\mathbf{n}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  为  $\mathbf{F}$  对  $O$  点之矩, 则有

$$\dot{\mathbf{l}}_O = \mathbf{n}_O \quad (2-42)$$

这就是质点的动量矩定理: 质点对一定点  $O$  之动量矩的导数等于作用于质点上的合力对  $O$  点之矩.

#### ② 刚体对定点的动量矩定理.

以固定点  $O$  为参考点, 刚体上每一质点  $i$  都满足动量矩定理

$$\dot{\mathbf{l}}_{iO} = \mathbf{n}_{iO}^{(e)} + \mathbf{n}_{iO}^{(i)}$$

式中  $L_{iO} = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  ( $m_i$  为质点  $i$  的质量,  $\mathbf{r}_i$  为其矢径) 是质点  $i$  对  $O$  点的动量矩;  $\mathbf{n}_{iO}^{(e)} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$  和  $\mathbf{n}_{iO}^{(i)} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}$  分别为作用在质点  $i$  上的外力  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  和内力  $\mathbf{F}_i^{(i)}$  对  $O$  点之矩. 这样对整个刚体有

$$\sum_i \frac{d}{dt} L_{iO} = \sum_i \mathbf{n}_{iO}^{(e)} + \sum_i \mathbf{n}_{iO}^{(i)}$$

因刚体上各质点的内力成对出现, 大小相等, 方向相反, 故  $\sum_i \mathbf{n}_{iO}^{(i)} = 0$ , 从而有

$$\frac{d}{dt} \sum_i L_{iO} = \sum_i \mathbf{n}_{iO}^{(e)}$$

定义  $L_O = \sum_i L_{iO} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  为刚体对  $O$  点的动量矩,  $M_O = \sum_i \mathbf{n}_{iO}^{(e)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$  为刚体所受外力系对点  $O$  的主矩. 则上式可写为

$$\dot{L}_O = M_O \quad (2-43)$$

这就是刚体对定点的动量矩定理: 刚体对定点  $O$  之动量矩的导数等于刚体所受外力系对  $O$  点之主矩.

刚体对定点的动量矩定理(2-43)与质点的动量矩定理(2-42)具有完全相同的形式, 只是将质点对定点  $O$  的动量矩换为刚体对定点  $O$  的动量矩, 将质点所受的合力对  $O$  点之矩换为刚体所受外力系对  $O$  点的主矩.

### ③ 刚体对任意点的动量矩定理.

若不以定点  $O$  为参考点, 而以任意一点(可以是动点)  $P$  为参考点. 记刚体上质点  $i$  在以定点  $O$  为原点的坐标系中的矢径为  $\mathbf{r}_i$ , 从  $P$  点到质点  $i$  的矢径为  $\tilde{\mathbf{r}}_i$ , 则显然有

$$\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP} + \tilde{\mathbf{r}}_i$$

因此, 按定义, 刚体对  $P$  点的(绝对)动量矩

$$\begin{aligned} L_P &= \sum_i \tilde{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i \overrightarrow{OP} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= L_O - \overrightarrow{OP} \times \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \end{aligned}$$

由质心定义知  $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$  ( $\mathbf{r}_C$  为刚体质心矢径), 故上式可写为

$$L_P = L_O - \overrightarrow{OP} \times m \dot{\mathbf{r}}_C = L_O - \overrightarrow{OP} \times m \mathbf{v}_C \quad (2-44)$$

式中  $\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C$  为刚体质心的速度, 式(2-44)反映了刚体对动点和对定点动量矩间的关系.

将式(2-44)求导, 并利用刚体对定点  $O$  的动量矩定理(2-43)和做一般运动刚体的 Newton 方程(2-41)得到

$$\begin{aligned}\dot{L}_P &= \dot{L}_O + \overrightarrow{PO} \times m\dot{\mathbf{r}}_C - \overrightarrow{OP} \times m\mathbf{v}_C \\ &= \mathbf{M}_O + \overrightarrow{PO} \times \mathbf{F} - \mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_C\end{aligned}$$

式中  $\mathbf{v}_P$  为  $P$  点速度, 考虑到  $\mathbf{M}_O + \overrightarrow{PO} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_P$  为作用在刚体上的外力系对  $P$  点的主矩, 故上式又可写为

$$\dot{L}_P = \mathbf{M}_P - \mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_C \quad (2-45)$$

这就是刚体对任意点  $P$  的动量矩定理.

利用式(2-45)立即可知以下 3 点:

(i) 当  $P$  点为动点时, 刚体对  $P$  点的动量矩定理不能写成像刚体对定点的动量矩定理那样简洁的形式.

(ii) 刚体对任意点的动量矩定理(2-45)包含了刚体对定点的动量矩定理(2-43). 因为若取参考点  $P$  为定点  $O$ , 则有  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O = 0$ , 式(2-45)化为式(2-43).

(iii) 当取参考点  $P$  为刚体质心时, 因  $\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C \times m\mathbf{v}_C = 0$ , 式(2-45)化为

$$\dot{L}_C = \mathbf{M}_C \quad (2-46)$$

上式表明: 不论刚体作怎样的运动, 刚体对质心的动量矩定理总具有和刚体对定点的动量矩定理完全相同的简单形式.

对于刚体对其质心的动量矩, 有以下很重要的性质.

记从刚体质心  $C$  到质点  $i$  的矢径为  $\mathbf{r}_{Ci}$ , 则质点  $i$  矢径  $\mathbf{r}_i$  满足

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{Ci}$$

将其求导得

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_C + \dot{\mathbf{r}}_{Ci}$$

即

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \tilde{\mathbf{v}}_i$$

式中  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{r}}_{Ci}$  为质点  $i$  相对质心  $C$  的速度. 刚体对其质心的相对动量矩  $L_C^r$  定义为

$$L_C^r = \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i \tilde{\mathbf{v}}_i$$

从而有

$$\begin{aligned}L_C &= \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i (\mathbf{v}_C + \tilde{\mathbf{v}}_i) \\ &= \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_{Ci} \right) \times \mathbf{v}_C + \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i \tilde{\mathbf{v}}_i \\ &= \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_{Ci} \right) \times \mathbf{v}_C + L_C^r\end{aligned}$$

因按质心定义有  $\sum_i m_i \mathbf{r}_{Ci} = 0$ , 故有

$$L_C = L'_C$$

即刚体对其质心的绝对动量矩与其相对动量矩相同,因此式(2-46)也可写为

$$\dot{L}_C = M_C \quad (2-47)$$

上式通常称为刚体相对质心的动量矩定理:刚体对其质心相对动量矩的导数等于作用在刚体上的外力系对质心之主矩。

(2) 刚体动量矩的坐标表达式

① 刚体绕定点转动时动量矩的坐标表达式。

设刚体以角速度  $\omega$  绕定点  $O$  转动,这时刚体上任一矢径为  $r_i$  的质点  $i$  的速度为

$$\dot{r}_i = v_i = \omega \times r_i$$

故按动量矩定义知

$$L_O = \sum_i (r_i \times m_i \dot{r}_i) = \sum_i m_i [r_i \times (\omega \times r_i)] \quad (2-48)$$

因对任意矢量  $a, b, c$  有恒等式

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

因此式(2-48)可写为

$$L_O = \sum_i m_i [(r_i \cdot r_i) \omega - (r_i \cdot \omega) r_i]$$

记  $\omega$  和  $r_i$  在以定点  $O$  为原点的坐标系中的坐标表达式为  $\omega$  和  $r_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ ,则由上式知  $L_O$  在此坐标系中的坐标表达式

$$\begin{aligned} L_O &= \sum_i m_i [(r_i^T r_i) \omega - r_i (r_i^T \omega)] = \left\{ \sum_i m_i [(r_i^T r_i) I - r_i r_i^T] \right\} \omega \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & - \sum_i m_i x_i y_i & - \sum_i m_i x_i z_i \\ - \sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & - \sum_i m_i y_i z_i \\ - \sum_i m_i x_i z_i & - \sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \omega \\ &\triangleq I_O \omega \end{aligned} \quad (2-49)$$

由转动惯量和惯性积的定义知

$$I_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

$I_O$  被称为刚体对定点  $O$  的惯性张量阵,由定义知它是一对称矩阵,还可以更进一步地利用这时动能的表达式证明它是一个正定矩阵(习题

2-8).

对于惯性张量阵值得说明以下几点:

(i) 惯性张量阵的表示与坐标系的选择有关. 若坐标系 1 和坐标系 2 是以定点  $O$  为原点的两坐标系, 且从系 1 到系 2 的旋转矩阵为  ${}^1R_2$ , 则同一刚体对定点  $O$  的惯性张量阵在系 1 和系 2 中的两个表示  ${}^1I_O$  和  ${}^2I_O$  间有以下关系(习题 2-9):

$${}^1I_O = {}^1R_2 {}^2I_O ({}^1R_2)^T \quad (2-51)$$

(ii) 当利用动量矩的坐标表达式  $L_O = I_O \omega$  时, 要注意这时  $L_O, I_O, \omega$  都应表示在同一坐标系中.

(iii) 当将惯性张量阵  $I_O$  表示在与刚体固连的坐标系中时, 它是一常值矩阵.

(iv) 只有当刚体绕定点  $O$  做定点转动时, 其对  $O$  点的动量矩  $L_O$  才能表示为  $L_O = I_O \omega$ .

② 刚体对质心动量矩的坐标表达式.

由定义知, 刚体对其质心的相对动量矩  $L_C = \sum_i r_{Ci} \times m_i \dot{r}_{Ci}$ . 因质点  $i$  相对质心  $C$  的速度  $\dot{r}_{Ci} = \omega \times r_{Ci}$  ( $\omega$  为刚体角速度), 代入上式后用与推导定点转动刚体的动量矩同样的方法可得到

$$\begin{aligned} L_C &= \sum_i m_i [r_{Ci} \times (\omega \times r_{Ci})] \\ &= \sum_i m_i [(r_{Ci} \cdot r_{Ci}) \omega - (r_{Ci} \cdot \omega) r_{Ci}] \end{aligned}$$

记  $L_C, \omega, r_{Ci}$  在一与刚体固连的坐标系中的坐标表达式分别为  $\tilde{L}_C, \tilde{\omega}, \tilde{r}_{Ci} = [\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i]^T$ , 则由上式知

$$\begin{aligned} \tilde{L}_C &= \sum_i m_i [(\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci}) \tilde{\omega} - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T \tilde{\omega}] = \left\{ \sum_i m_i [(\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci}) I - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T] \right\} \tilde{\omega} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i m_i (\tilde{y}_i^2 + \tilde{z}_i^2) & -\sum_i m_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i & -\sum_i m_i \tilde{x}_i \tilde{z}_i \\ -\sum_i m_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i & \sum_i m_i (\tilde{x}_i^2 + \tilde{z}_i^2) & -\sum_i m_i \tilde{y}_i \tilde{z}_i \\ -\sum_i m_i \tilde{x}_i \tilde{z}_i & -\sum_i m_i \tilde{y}_i \tilde{z}_i & \sum_i m_i (\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2) \end{bmatrix} \tilde{\omega} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{I}_x & -\tilde{I}_{xy} & -\tilde{I}_{xz} \\ -\tilde{I}_{xy} & \tilde{I}_y & -\tilde{I}_{yz} \\ -\tilde{I}_{xz} & -\tilde{I}_{yz} & \tilde{I}_z \end{bmatrix} \tilde{\omega} \triangleq \tilde{I}_C \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (2-52)$$

注意: 在上式中  $\tilde{I}_C$  是一常值矩阵, 且是一对称正定矩阵.

(3) 变矢量的绝对导数与相对导数定理



一矢量  $\mathbf{a}$  的绝对导数是指它相对一静止坐标系的时间导数, 记为  $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$   $= \dot{\mathbf{a}}$ ; 而其相对导数是指该矢量相对一动坐标系的时间导数, 记为  $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ . 在矢量力学中有所谓“变矢量的绝对导数与相对导数定理”

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

式中  $\boldsymbol{\omega}$  为动系相对静系的角速度. 当然将上式表示在任一坐标系中, 对应的坐标表达式

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (2-53)$$

也是成立的(习题 2-10).

#### (4) Euler 方程

所谓 Euler 方程, 就是用变矢量的绝对导数和相对导数定理把动量矩定理表示在动坐标系(通常是与刚体固连的坐标系)中.

##### ① 绕定点转动刚体的 Euler 方程.

由刚体对定点  $O$  的动量矩定理式(2-43)及变矢量的绝对导数与相对导数定理式(2-53)知

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O \quad (2-54)$$

式中  $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$  表示将刚体对定点  $O$  的动量矩  $\mathbf{L}_O$  相对一与刚体固连的坐标系求导,  $\boldsymbol{\omega}$  为与此刚体固连坐标系的角速度(亦即刚体的角速度).

若刚体绕定点  $O$  转动, 则可将式(2-54)表示在上述与刚体固连的坐标系中, 并利用动量矩的坐标表达式(2-49), 这时有

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \left( \frac{d}{dt} \mathbf{I}_O \right) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_O \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O \quad (2-55)$$

因刚体对  $O$  点的惯性张量阵在与刚体固连坐标系中的表示  $\mathbf{I}_O$  是常值矩阵,  $\frac{d}{dt} \mathbf{I}_O = 0$ . 又由式(2-53)知

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

因此将  $\frac{d}{dt} \mathbf{I}_O = 0$  和  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  代入式(2-55)后即得到绕定点  $O$  转动刚体的 Euler 方程

$$\mathbf{I}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O \quad (2-56)$$

##### ② 做一般运动刚体对质心的 Euler 方程.

利用变矢量的绝对导数与相对导数定理, 可将刚体对质心的动量矩

定理式(2-47)表示为

$$\frac{dL_c}{dt} + \omega \times L_c = M_c$$

式中  $\frac{d}{dt}$  表示相对与刚体固连的坐标系求导,  $\omega$  为刚体角速度. 将此式表示在与刚体固连的坐标系中并利用刚体对其质心的动量矩的表达式(2-52), 得到

$$\frac{d}{dt}(\bar{I}_c \tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \times \bar{I}_c \tilde{\omega} - \left(\frac{d}{dt}\bar{I}_c\right) \tilde{\omega} + \bar{I}_c \frac{d}{dt}\tilde{\omega} - \tilde{\omega} \times \bar{I}_c \tilde{\omega} = \tilde{M}_c$$

因刚体对其质心的惯性张量阵在与刚体固连坐标系中的表示  $\bar{I}_c$  为常值矩阵, 故  $\frac{d}{dt}\bar{I}_c = 0$ ; 又用与前面推导  $\frac{d}{dt}\omega = \dot{\omega}$  完全相同的方法可证明  $\frac{d}{dt}\tilde{\omega} = \dot{\tilde{\omega}}$ . 将这些结果代入上式后得到

$$\bar{I}_c \dot{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega} \times \bar{I}_c \tilde{\omega} = \tilde{M}_c \quad (2-57)$$

式(2-57)即为(做一般运动刚体对其质心的)Euler 方程.

这里特别要注意以下 3 点:

(i) Euler 方程(2-57)中各量均为在与刚体固连坐标系中的表达式, 但这并不意味着此方程只在与刚体固连的坐标系中才成立. 事实上很容易证明: 对任一坐标系均有

$$I_c \dot{\omega} + \omega \times I_c \omega = M_c$$

式中各量均为在上述给定坐标系中的表达式. 当然, 将 Euler 方程表示在与刚体固连坐标系中有其特殊的优点, 即惯性张量阵是常值矩阵, 它可以预先计算或辨识出来, 这给 Euler 方程的应用带来很大方便.

(ii) 从 Euler 方程(2-57)中表征运动学的量可以看出, Euler 方程是刻画刚体转动的方程.

(iii) 刚体对其质心的 Euler 方程(2-57)对做任意运动的刚体都是成立的, 且其形式与定点转动刚体的 Euler 方程(2-56)完全相同. 因此当用 Euler 方程(2-57)刻画一个做一般运动刚体的转动情况时, 如同所研究的是一个绕其质心作定点转动的刚体. 联想到以前对做一般运动刚体的 Newton 方程所说的话后, 立即可知: 刚体的一般运动可以分解为随质心的平动和绕质心的转动; 其随质心平动的动力学行为用 Newton 方程(2-41)刻画, 而其绕质心转动的动力学行为用 Euler 方程(2-57)刻画. 也就是说, 整个刚体的运动要用两个方程, 即 Newton-Euler 方程来表示.

## 二、用 Newton-Euler 方程建立自由运动机器人动力学方程

### 1. 概述

Newton-Euler 方程与第二类 Lagrange 方程最大的不同点之一是: Newton-Euler 方程刻画的是一个刚体的动力学方程,而 Lagrange 方程可以刻画多刚体系统的动力学方程. 由于机器人是由多个杆组成的刚体系统,因此用 Newton-Euler 方程导出的机器人方程是由多个方程组成的联立方程组,而不像用第二类 Lagrange 方程推导那样可以得到用一个公式表示的机器人动力学方程.

### 2. 机器人各杆的受力分析

研究机器人的杆  $i$ , 杆  $i$  的两端是关节  $i$  和关节  $i+1$ , 若用 D-H 方法建立和杆固连的传动轴坐标系, 则杆  $i$  的两端分别有系  $i-1$  和系  $i$  的原点  $O_{i-1}$  和  $O_i$ , 作用于杆  $i$  的外力(参见图 2-2)有:

① 杆  $i-1$  作用到杆  $i$  上的力系. 此力系可向  $O_{i-1}$  点简化为一个力  $f_i$  和一个力矩  $n_i$ .

② 杆  $i+1$  作用到杆  $i$  上的力系. 按照上面的记法, 杆  $i$  作用到杆  $i+1$  上的力系可向  $O_i$  点简化为一个力  $f_{i+1}$  和一个力矩  $n_{i+1}$ , 因此杆  $i+1$  作用到杆  $i$  上的是  $f_{i+1}$  和  $n_{i+1}$  的反作用力  $-f_{i+1}$  和  $-n_{i+1}$  (对于不与环境接触的自由运动机器人, 显然有  $f_{n+1} = n_{n+1} = 0$ ).

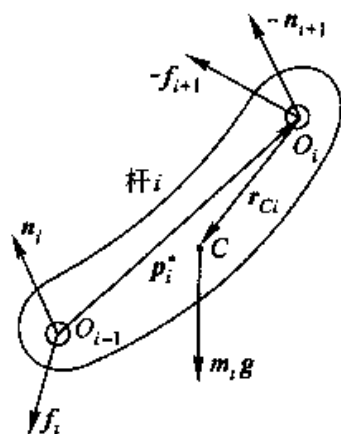


图 2-2

③ 杆  $i$  上所受的重力  $m_i g$  (其中  $m_i$  为杆  $i$  质量,  $g$  为重力加速度矢量).

### 3. 用 Newton-Euler 方程建立自由运动机器人的动力学方程

由 Newton 方程(2-41)知, 描述杆  $i$  随其质心平动的方程为

$$m_i a_{Ci} = f_i - f_{i+1} + m_i g, \quad i = 1, \dots, n, \quad (f_{n+1} = 0)$$

式中  $a_{Ci}$  为杆  $i$  质心的加速度矢量. 上式的坐标表达式为

$$m_i (a_{Ci} - g) = f_i - f_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (f_{n+1} = 0) \quad (2-58)$$

又由 Euler 方程(2-57)知, 描述杆  $i$  绕其质心转动的方程为

$$I_{Ci} \dot{\omega}_i + \omega_i \times I_{Ci} \omega_i = M_{Ci}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-59)$$

式中  $I_{Ci}$  为杆  $i$  对其质心的惯性张量阵,  $M_{Ci}$  为作用在杆  $i$  上的外力系对杆  $i$  质心的主矩. 若记  $r_{Ci}$  为杆  $i$  质心在系  $i$  中的矢径,  $p_i^* \triangleq \overrightarrow{O_{i-1}O_i}$ , 则利用图 2-2 可计算出

$$M_{Ci} = n_i - n_{i+1} + [-(p_i^* + r_{Ci})] \times f_i + (-r_{Ci}) \times (-f_{i+1})$$

将其坐标表达式代入式(2-59)后即得到描述刚体绕其质心转动的方程为

$$I_{C_i} \dot{\omega}_i + \omega_i \times I_{C_i} \omega_i = n_i - n_{i+1} - (p_i' + r_{C_i}) \times f_i + r_{C_i} \times f_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (f_{n+1} = n_{n+1} = 0) \quad (2-60)$$

尽管用 Newton-Euler 方程导出的式(2-58)和(2-60)已完全刻画了机器人的动力学行为,但其中的力  $f_i$  和力矩  $n_i (i = 1, \dots, n)$  不仅包括了作用于各杆上的主动力,还包括了约束反力。因此通常还用一辅助方程把机器人作动器施加到杆  $i$  关节轴向上的驱动力  $\tau_i$  与  $f_i$  和  $n_i$  的关系明显地表示出来。不难看出:当关节  $i$  是转动关节时,  $\tau_i$  是  $n_i$  在  $Z_{i-1}$  轴上的分量;而当关节  $i$  是移动关节时,  $\tau_i$  为  $f_i$  在  $Z_{i-1}$  轴上的分量;即

$$\tau_i = z_{i-1}^T (\sigma_i n_i + \sigma_i f_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2-61)$$

式(2-58)、(2-60)和(2-61)即为用 Newton-Euler 方程导出的自由运动机器人的动力学方程,它与用 Lagrange 方程导出的机器人动力学方程(2-31)最大的不同点是:它具有联立方程组的形式且方程中出现了约束反力。

由于用 Newton-Euler 方程导出的机器人模型的上述特点,使得用它来进行理论分析不如用 Lagrange 方程导出的封闭形式的机器人模型(2-31)方便。但用 Newton-Euler 方程导出的机器人模型(2-58)、(2-60)和(2-61)也有其明显的优点,一是建立方程容易,不需像用 Lagrange 方程那样先求出机器人的动能、势能等;二是由于模型具有递推形式,所以用它来进行动力学计算时比用 Lagrange 方程导出机器人模型进行计算时所用的计算量要少得多(这一点在 2.3 节中还要更详细说明)。

最后需要指出的是:在上面用 Newton-Euler 方程推导机器人模型(2-58)、(2-60)和(2-61)时,式中各量都是在同一坐标系中的坐标表达式。但这时并没有具体说明是在哪个坐标系中的表达式(事实上在任一坐标系中式(2-58)、(2-60)和(2-61)都成立),为确定起见,可以认为它们都是在和杆 0(基底)固连的静止坐标系(即系 0)中的坐标表达式。

## 2.3 自由运动机器人的逆动力学算法

### 一、概述

研究动力学问题时也和研究运动学问题相类似,有正动力学问题和逆动力学问题。概括地说,所谓正动力学问题,是指已知作用于系统上的

力,求系统的运动;而逆动力学问题则反之:已知系统的运动,求此时作用于系统上的力.具体对机器人来说,正动力学问题是指:已知机器人作动器在某一时刻施加的驱动力 $\tau$ 和该瞬时关节位置 $q$ 和关节速度 $\dot{q}$ ,求此时机器人的关节加速度 $\ddot{q}$ ;逆动力学问题是指:已知某一时刻机器人的关节位置 $q$ ,关节速度 $\dot{q}$ 及关节加速度 $\ddot{q}$ ,求此时作动器施加在机器人上的驱动力 $\tau$ .求解正动力学和逆动力学问题的计算方法分别称为正动力学和逆动力学算法.本节研究自由运动机器人的逆动力学算法,即已知 $q, \dot{q}$ 和 $\ddot{q}$ 时,求 $\tau$ 的有效递推算法.

## 二、用 Lagrange 方程推导自由运动机器人的逆动力学算法

### 1. 算法的推导<sup>[12]</sup>

在 2.1 节中已用 Lagrange 方程求出机器人动力学方程

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i = \tau_i, \quad (2-62)$$

$$i = 1, \dots, n$$

式中

$$h_{ij} = \sum_{s=\max\{i,j\}}^n \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j} J_s \frac{\partial ({}^s A_i)^T}{\partial q_j} \right] \quad (2-63)$$

$$g_i = - \sum_{s=1}^n m_s \bar{g}^T \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_i} \bar{r}_{Ci} \quad (2-64)$$

由式(2-63)知

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} = \sum_{s=\max\{i,j\}}^n \left\{ \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j \partial q_k} J_s \frac{\partial ({}^s A_i)^T}{\partial q_j} \right] + \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j} J_s \frac{\partial^2 ({}^s A_i)^T}{\partial q_j \partial q_k} \right] \right\} \quad (2-65)$$

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} = \sum_{s=\max\{j,k\}}^n \left\{ \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_j}{\partial q_i \partial q_k} J_s \frac{\partial ({}^s A_j)^T}{\partial q_i} \right] + \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_j}{\partial q_i} J_s \frac{\partial^2 ({}^s A_j)^T}{\partial q_i \partial q_k} \right] \right\} \quad (2-66)$$

将式(2-63)~(2-66)代入式(2-62)后得

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=\max\{i,j\}}^n \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j} J_s \frac{\partial ({}^s A_i)^T}{\partial q_j} \right] \ddot{q}_j + \\ &\quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=\max\{i,j\}}^n \left\{ \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j \partial q_k} J_s \frac{\partial ({}^s A_i)^T}{\partial q_j} \right] + \right. \\ &\quad \left. \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j} J_s \frac{\partial^2 ({}^s A_i)^T}{\partial q_j \partial q_k} \right] - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j \partial q_i} J_s \frac{\partial ({}^s A_i)^T}{\partial q_k} \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j} J_s \frac{\partial^2 ({}^s A_i)^T}{\partial q_i \partial q_k} \right] \right\} \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i \\ &= \sum_{s=i}^n \sum_{j=1}^s \text{tr} \left[ \frac{\partial {}^s A_i}{\partial q_j} J_s \frac{\partial ({}^s A_i)^T}{\partial q_j} \right] \ddot{q}_j + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=\max\{i,j\}}^n \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j} \right] \ddot{q}_j + \\
& \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=\max\{i,j\}}^n \sum_{k=1}^i \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j} \right] \ddot{q}_j + \\
& \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left\{ \sum_{j=1}^i \left\{ \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j} \right] \ddot{q}_j + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sum_{k=1}^j \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \right\} + g_i \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} J_i \sum_{j=1}^i \left\{ \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \dot{q}_j + \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j \right\} \right\} + g_i \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} J_i \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial ({}^0 A_i)^T}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] \right\} + g_i \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} J_i ({}^0 \ddot{A}_i)^T \right] - \sum_{i=1}^n m_i \bar{g}^T \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} {}^i \tilde{r}_{Ci} \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} {}^i A_i J_i ({}^0 \ddot{A}_i)^T \right] - \sum_{i=1}^n m_i \bar{g}^T \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} {}^i A_i {}^i \tilde{r}_{Ci} \\
&= \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} \sum_{i=1}^n {}^i A_i J_i ({}^0 \ddot{A}_i)^T \right] - \bar{g}^T \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} \left( \sum_{i=1}^n m_i {}^i A_i {}^i \tilde{r}_{Ci} \right) \\
&\triangleq \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} D_i \right] - \bar{g}^T \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_i} \bar{c}_i \tag{2-67}
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
D_i &= \sum_{j=1}^n {}^j A_j J_j ({}^0 \ddot{A}_i)^T = J_i ({}^0 \ddot{A}_i)^T + \sum_{j=i+1}^n {}^j A_{j+1} {}^{j+1} A_j J_j ({}^0 \ddot{A}_i)^T \\
&= J_i ({}^0 \ddot{A}_i)^T + {}^i A_{i+1} \sum_{j=i+1}^n {}^{j+1} A_j J_j ({}^0 \ddot{A}_i)^T \\
&= J_i ({}^0 \ddot{A}_i)^T + {}^i A_{i+1} D_{i+1}, \quad (D_n \triangleq J_n ({}^0 \ddot{A}_n)^T) \tag{2-68} \\
\bar{c}_i &= \sum_{j=1}^n m_j {}^j A_j {}^j \tilde{r}_{Cj} = m_i {}^i \tilde{r}_{Ci} + {}^i A_{i+1} \sum_{j=i+1}^n m_j {}^{j+1} A_j {}^j \tilde{r}_{Cj}
\end{aligned}$$

$$= m_i {}^i\tilde{r}_{Ci} + {}^iA_{i+1}\tilde{c}_{i+1}, \quad (\tilde{c}_n \triangleq m_n {}^n\tilde{r}_{Cn}) \quad (2-69)$$

如果和各杆固连的坐标系是用 D-H 方法建立的传动轴坐标系, 则由于在第 1 章中已证明

$$\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_i} = {}^0A_{i-1} \frac{d {}^{i-1}A_i}{dq_i} = {}^0A_{i-1} Q_i'^{-1} A_i$$

因此式(2-67)可写为

$$\tau_i = \text{tr}({}^0A_{i-1} Q_i'^{-1} A_i D_i) - \bar{g}^T {}^0A_{i-1} Q_i'^{-1} A_i \tilde{c}_i \quad (2-70)$$

由上所述, 可用以下步骤计算机器人逆动力学问题:

第 1 步: 用正运动学公式(1-44), (1-45)和(1-67)正向递推(即按  $i = 1, \dots, n$  的顺序)计算  ${}^0A_i, {}^0\dot{A}_i, {}^0\ddot{A}_i$ ;

第 2 步: 用式(2-68)~(2-70)反向递推(即按  $i = n, \dots, 1$  的顺序)计算  $D_i, \tilde{c}_i$  和  $\tau_i$ .

## 2. 计算框图

逆动力学算法的计算框图见图 2-3.

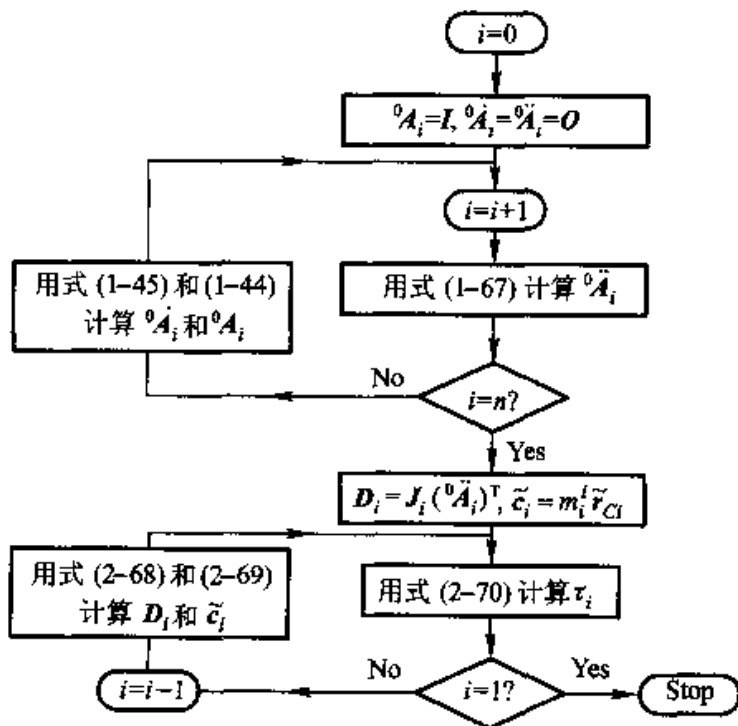


图 2-3

注意: 若与杆固连的坐标系是用修改的 D-H 方法建立的驱动轴坐标系, 则式(2-70)和以上框图中有关的公式都要做相应的修改(习题 2-11).

### 三、用 Newton-Euler 方程推导自由运动机器人的逆动力学算法<sup>[13]</sup>

#### 1. 将 Newton-Euler 方程写为递推形式

用 Newton-Euler 方程导出的描述杆  $i$  随质心平动的方程(2-58)可写为以下递推形式:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i = m_i(\mathbf{a}_{C_i} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1}, \quad (\mathbf{f}_{n+1} = 0), \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

而用 Euler 方程导出的刻画杆  $i$  绕其质心转动的方程式(2-60)可写为以下递推形式:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_i = \mathbf{I}_{C_i} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_{C_i} \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{n}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{p}_i^* + \mathbf{r}_{C_i}) \times \mathbf{f}_i - \mathbf{r}_{C_i} \times \mathbf{f}_{i+1} \\ \quad = \mathbf{N}_i + \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_i + \mathbf{r}_{C_i} \times \mathbf{F}_i \\ (\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} = 0), \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

为减少计算量,将以上 4 式表示在和杆  $i$  固连的坐标系中有

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}_i = m_i(\tilde{\mathbf{a}}_{C_i} - \tilde{\mathbf{g}}_i) \end{cases} \quad (2-71)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_i = \tilde{\mathbf{F}}_i + {}^i\mathbf{R}_{i+1}\tilde{\mathbf{f}}_{i+1} \end{cases} \quad (2-72)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}_i = \tilde{\mathbf{I}}_{C_i} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{I}}_{C_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \end{cases} \quad (2-73)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{n}}_i = \tilde{\mathbf{N}}_i + {}^i\mathbf{R}_{i+1}\tilde{\mathbf{n}}_{i+1} + \tilde{\mathbf{p}}_i^* \times \tilde{\mathbf{f}}_i + \tilde{\mathbf{r}}_{C_i} \times \tilde{\mathbf{F}}_i \end{cases} \quad (2-74)$$

$$(\tilde{\mathbf{n}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} = 0) \quad i = 1, \dots, n$$

式中  $\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{a}}_{C_i}, \tilde{\mathbf{g}}_i, \tilde{\mathbf{f}}_i, \tilde{\mathbf{N}}_i, \tilde{\mathbf{n}}_i, \tilde{\mathbf{I}}_{C_i}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_i, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i^*, \tilde{\mathbf{r}}_{C_i}$  为相应量在系  $i$  中的坐标表达式。

若和杆固连的坐标系为用 D-H 方法建立的传动轴坐标系,则式(2-61)可写为

$$\boldsymbol{\tau}_i = ({}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z})^T(\sigma_i\tilde{\mathbf{n}}_i + \sigma_i\tilde{\mathbf{f}}_i) \quad (2-75)$$

#### 2. 杆 $i$ 质心加速度的计算

当用 D-H 方法建立杆坐标系时,杆  $i$  的角速度  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$  和角加速度  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_i$  可用递推公式(1-53)和(1-74)算出,所以只要能算出杆  $i$  质心的加速度  $\tilde{\mathbf{a}}_{C_i}$ ,则可用式(2-71)~(2-75)反向递推计算出  $\boldsymbol{\tau}_n, \dots, \boldsymbol{\tau}_1$ 。

因杆  $i$  质心矢径

$$\mathbf{p}_{C_i} = \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_{C_i}$$

式中  $\mathbf{p}_i$  为系  $i$  原点  $O_i$  的矢径,  $\mathbf{r}_{C_i}$  为从  $O_i$  到杆  $i$  质心的矢径,故有

$$\mathbf{p}_{C_i} = \mathbf{p}_i + {}^0\mathbf{R}_i\mathbf{r}_{C_i}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{C_i} = \dot{\mathbf{p}}_i + {}^0\dot{\mathbf{R}}_i\mathbf{r}_{C_i} = \dot{\mathbf{p}}_i + S(\boldsymbol{\omega}_i){}^0\mathbf{R}_i\mathbf{r}_{C_i}$$

$$\mathbf{a}_{C_i} = \ddot{\mathbf{p}}_{C_i} = \ddot{\mathbf{p}}_i + S(\dot{\boldsymbol{\omega}}_i){}^0\mathbf{R}_i\mathbf{r}_{C_i} + S(\boldsymbol{\omega}_i)S(\boldsymbol{\omega}_i){}^0\mathbf{R}_i\mathbf{r}_{C_i}$$

$$= \ddot{\mathbf{p}}_i + S(\boldsymbol{\epsilon}_i)\mathbf{r}_{C_i} + S(\boldsymbol{\omega}_i)S(\boldsymbol{\omega}_i)\mathbf{r}_{C_i}$$



$$= \mathbf{a}_i + \mathbf{\epsilon}_i \times \mathbf{r}_{Ci} + \mathbf{\omega}_i \times (\mathbf{\omega}_i \times \mathbf{r}_{Ci})$$

将其表示在和杆  $i$  固连的坐标系中有

$$\tilde{\mathbf{a}}_{Ci} = \tilde{\mathbf{a}}_i + \tilde{\mathbf{\epsilon}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_{Ci} + \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times (\tilde{\mathbf{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_{Ci}) \quad (2-76)$$

因为系  $i$  原点  $O_i$  的加速度  $\tilde{\mathbf{a}}_i$  可用递推公式(1-75)算出,故  $\tilde{\mathbf{a}}_{Ci}$  可用上式算出。

### 3. 重力项计算的简化

由式(2-76)知

$$\tilde{\mathbf{a}}_{Ci} - \tilde{\mathbf{g}}_i = (\tilde{\mathbf{a}}_i - \tilde{\mathbf{g}}_i) + \tilde{\mathbf{\epsilon}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_{Ci} + \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times (\tilde{\mathbf{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_{Ci}) \quad (2-77)$$

因为

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = {}^i\mathbf{R}_0 \mathbf{g} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0 \mathbf{g}) = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \tilde{\mathbf{g}}_{i-1}$$

故由计算  $\tilde{\mathbf{a}}_i$  的递推公式(1-75)知

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_i - \tilde{\mathbf{g}}_i = & {}^i\mathbf{R}_{i-2} (\tilde{\mathbf{a}}_{i-1} - \tilde{\mathbf{g}}_{i-1} + \sigma_i z \ddot{q}_i) + \tilde{\mathbf{\epsilon}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i^* + \\ & \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times (\tilde{\mathbf{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i^*) + 2\sigma_i \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times ({}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}) \dot{q}_i, \quad (\tilde{\mathbf{a}}_0 = 0) \end{aligned} \quad (2-78)$$

因此若记  $\tilde{\mathbf{a}}_i^* = \tilde{\mathbf{a}}_i - \tilde{\mathbf{g}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_{Ci}^* = \tilde{\mathbf{a}}_{Ci} - \tilde{\mathbf{g}}_i$ , 则式(2-78), (2-77)和(2-71)可写为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_i^* = & {}^i\mathbf{R}_{i-2} (\tilde{\mathbf{a}}_{i-1}^* + \sigma_i z \ddot{q}_i) + \tilde{\mathbf{\epsilon}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i^* + \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times (\tilde{\mathbf{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i^*) + \\ & 2\sigma_i \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times ({}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}) \dot{q}_i, \quad (\tilde{\mathbf{a}}_0^* = -\mathbf{g}) \\ \tilde{\mathbf{a}}_{Ci}^* = & \tilde{\mathbf{a}}_i^* + \tilde{\mathbf{\epsilon}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_{Ci} + \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times (\tilde{\mathbf{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_{Ci}) \\ \tilde{\mathbf{F}}_i = & m_i \tilde{\mathbf{a}}_{Ci}^* \end{aligned}$$

这表明:如果将计算加速度  $\tilde{\mathbf{a}}_i$  的式(1-75)改为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_i = & {}^i\mathbf{R}_{i-2} (\tilde{\mathbf{a}}_{i-1} + \sigma_i z \ddot{q}_i) + \tilde{\mathbf{\epsilon}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i^* + \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times (\tilde{\mathbf{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i^*) + \\ & 2\sigma_i \tilde{\mathbf{\omega}}_i \times ({}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}) \dot{q}_i, \quad (\tilde{\mathbf{a}}_0 = -\mathbf{g}) \end{aligned} \quad (2-79)$$

后仍用式(2-76)计算  $\tilde{\mathbf{a}}_{Ci}$ , 则式(2-71)可简化为

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = m_i \tilde{\mathbf{a}}_{Ci} \quad (2-80)$$

也就是说,若令  $\tilde{\mathbf{a}}_0 = -\mathbf{g}$ , 则重力项  $m_i \tilde{\mathbf{g}}_i$  的计算可省去。

### 4. 算法及框图

综上所述知,用 Newton-Euler 方程导出的逆动力学算法如下:

第一步:用递推公式(1-74), (1-53), (2-79)和(2-76)正向递推计算  $\tilde{\mathbf{\epsilon}}_i, \tilde{\mathbf{\omega}}_i, \tilde{\mathbf{a}}_i$  和  $\tilde{\mathbf{a}}_{Ci}$ ;

第二步:用式(2-80), (2-72)~(2-75)反向递推计算  $\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{f}}_i, \tilde{\mathbf{N}}_i, \tilde{\mathbf{n}}_i$  和  $\tau_i$ 。

其框图如图 2-4 所示。

当然,以上逆动力学递推计算公式只适用于用 D-H 方法建立的杆

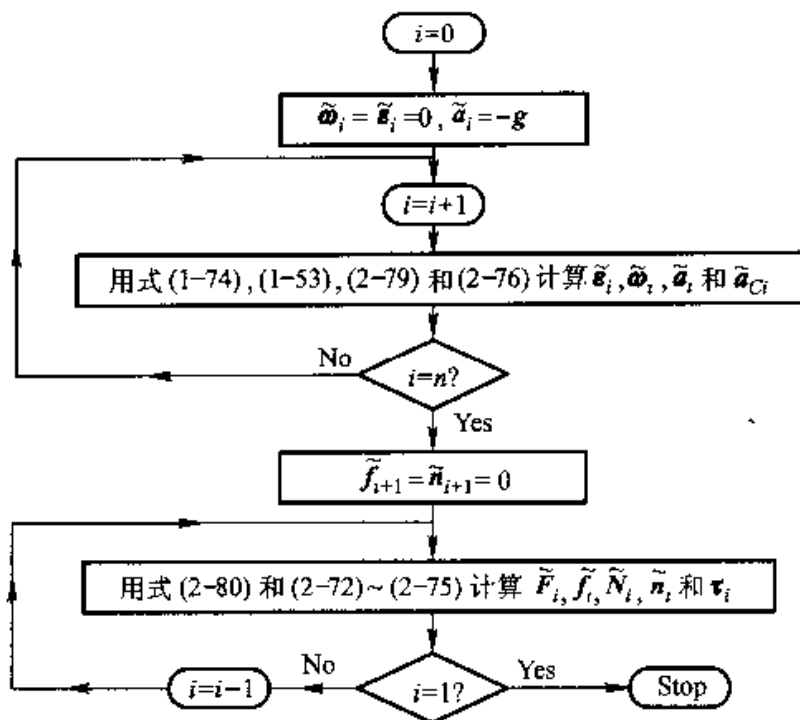


图 2-4

坐标系,对于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系的情况,递推公式应进行相应的修改(习题 2-12)。

#### 四、两种算法计算量的比较及等价性

##### 1. 两种算法计算量的比较

上述两种算法计算量的比较列于表 2-2 中。

表 2-2

	乘法次数( $n=6$ 时)	加法次数( $n=6$ 时)
用 Lagrange 方程推导的算法	$830n-592$ (4 388)	$675n-464$ (3 586)
用 Newton-Euler 方程推导的算法	$150n-48$ (852)	$131n-48$ (738)

##### 2. 用 Lagrange 方程和用 Newton-Euler 方程推导逆动力学算法的等价性

从上面表中可以看出:用 Newton-Euler 方程导出的逆动力学算法要比用 Lagrange 方程导出的算法的计算量少得多。很容易理解:这两种算法计算量相差很大的真正原因绝不会是由于采用了不同的方程来推导。因为从本质上说,经典力学中所有的方程都是从 Newton 定律出发的,因

此利用不同的方程应当总可以导出同一形式的结果. W. M. Silver 研究了用 Lagrange 方程和 Newton-Euler 方程推导逆动力学算法的等价性问题<sup>[14]</sup>, 指出用这两种方法导出的逆动力学算法计算量相差很大的主要原因, 是由于刻画机器人各杆角速度时所用的数学工具不同. 在用 Newton-Euler 方程推导时, 是用三维矢量来刻画各杆的角速度; 而在用 Lagrange 方程推导时, 是用  $3 \times 3$  旋转矩阵的导数来刻画杆的角速度. 显然, 用有 9 个元素的矩阵来描述只有 3 个自由度的转动会引起多余的运算. Silver 在他的文章中证明了: 如果在求机器人动能时不用旋转矩阵的导数, 而用三维的角速度矢量来描述, 则用 Lagrange 方程也可以推导出和用 Newton-Euler 方程导出的同样形式的逆动力学算法, 也就是说, 证明了用 Lagrange 方程和用 Newton-Euler 方程推导机器人逆动力学算法的等价性.

## 2.4 自由运动机器人的正动力学算法

### 一、概述

#### 1. 问题的提法

对自由运动机器人来说, 其正动力学算法是指在已知某一时刻的  $q$ ,  $\dot{q}$  和  $\tau$  时, 求此时  $\ddot{q}$  的有效算法.

#### 2. 推导方法

推导机器人正动力学算法的基本途径有两种: 一是以其逆动力学算法为基本子程序计算后, 化为求解具有对称系数矩阵的  $n$  阶方程组问题; 二是从用 Newton-Euler 方程导出的机器人模型出发, 直接推导出求  $\ddot{q}$  的递推公式<sup>[15], [16]</sup>.

从运算次数上看, 由第一种途径得到的正动力学算法的计算量是  $O(n^3)$  阶的 (即其运算次数是  $n$  的 3 阶多项式), 而用第二种途径得到的递推算法的计算量是  $O(n)$  阶的. 但好在用第一种途径得到的算法的计算量在  $n^3$  前的系数很小, 所以当  $n \leq 10$  时, 用第一种途径得到的算法仍比用第二种途径得到的算法的计算量小 (当然, 用第二种途径得到的算法也有其优点, 就是其计算结构比用第一种途径得到的算法简单, 从而易于编程). 由于用第二种途径推导正动力学算法一般都采用一种新的数学力学工具——Spatial Notation<sup>[17]</sup>, 关于这种工具的讲解已超出本书的范围 (有兴趣的读者可参阅文献[18]), 所以本节只讲述用第一种途径推导的

正动力学算法.

## 二、以逆动力学算法为基础的正动力学算法

### 1. 基本原理

由于用 Newton-Euler 公式导出的逆动力学算法是十分有效的,这就促使人们利用逆动力学算法来解正动力学问题. 这方面的经典工作是 M. Walker 等在 20 世纪 80 年代初完成的<sup>[19]</sup>. 其基本原理是:由机器人方程

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (2-81)$$

知,当已知  $q, \dot{q}$  和  $\tau$  后,可计算出  $H(q), C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \triangleq b$  以及  $\tau - b \triangleq \tau^*$ . 这样式(2-81)化为

$$H(q)\ddot{q} = \tau^* \quad (2-82)$$

解此线性方程组即可求出  $\ddot{q}$ ,这就解决了正动力学问题.

由机器人方程(2-81)很容易看出,若在逆动力学算法中令  $\ddot{q}=0$ ,则这时计算出的  $\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = b$ ,从而再利用已知的  $\tau$  可确定出式(2-82)右端的  $\tau^* = \tau - b$ . 由于解具有对称系数矩阵的线性方程组已有很成熟的算法(如文献[20]),因此用这种途径求解正动力学问题的关键是如何有效地求出  $H(q)$ . 显然,由式(2-81)知,求出  $H(q)$  的一种方法是在逆动力学算法中令  $\ddot{q}=0, g=0, \dot{q}=e_j$  ( $e_j$  是  $\mathbb{R}^n$  中第  $j$  个单位矢量),这时计算出的  $\tau$  为  $H(q)$  的第  $j$  列. 这样取  $j=1, \dots, n$ , 共计算  $n$  次后,即可求出  $H(q)$ . 但这样计算  $H(q)$  很明显不是最有效的. 因为  $H(q)$  是一对称矩阵,要确定它并不需要知道全部  $n^2$  个元素,而只要计算出其对角线以上(或以下)的  $\frac{(1+n)n}{2}$  个元素即可. 从 20 世纪 80 年代以来,沿着这一途径求解正动力学问题的研究主要集中在如何有效地计算  $H(q)$ ,目前已有多种计算  $H(q)$  的方法,其中最著名的仍是上述文献[19]中提出的“组合体惯量法”.

### 2. 组合体惯量法

组合体惯量法的目的是要按  $h_{nn}, h_{n-1,n}, \dots, h_{1n}; h_{n-1,n-1}, h_{n-2,n-1}, \dots, h_{1,n-1}; \dots; h_{22}, h_{1,2}; h_{11}$  的顺序计算出  $H(q)$  中对角线以上(包括对角线)的元素.

已经知道,当  $\ddot{q}=0, g=0, \dot{q}=e_j$  时用逆动力学算法计算出的  $\tau$  即为  $H(q)$  的第  $j$  列. 因为这时对于  $i > j$  有  $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$ ,这表明最后  $n - (j-1)$  个杆(即杆  $j$  直到杆  $n$ )间无相对运动,组成了一个(由  $q_{j+1}, \dots, q_n$  确定了其形状的)刚体,称为杆  $j$  至杆  $n$  的组合体. 同理,由于这时对  $i < j$  也

有  $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$ , 故前  $j$  个杆 (杆 0 至杆  $j-1$ ) 也构成了一个静止的 (由  $q_1, \dots, q_{j-1}$  确定了其形状的) 刚体, 可视为一个新的基座. 因为只有  $\ddot{q}_j = 1 \neq 0$ , 这表明只有关节  $j$  是唯一的活动关节, 因此这时的机器人化为一个绕关节  $j$  的轴线做定轴转动 (若关节  $j$  是转动关节) 或沿关节  $j$  的轴线平移 (若关节  $j$  是移动关节) 的组合体.

由 Newton-Euler 方程知这时杆  $j$  至杆  $n$  组合体的动力学方程为

$$\begin{cases} m_j^c a_j^c = F_j^c \\ I_{C_j}^c \epsilon_j^c + \omega_j^c \times I_{C_j}^c \omega_j^c = M_j^c \end{cases} \quad (2-83)$$

式中  $m_j^c, a_j^c, I_{C_j}^c, \omega_j^c$  和  $\epsilon_j^c$  分别为组合体的质量, 质心加速度, 对质心的惯性张量阵, 角速度和角加速度;  $F_j^c, M_j^c$  为作用在组合体上外力系的主矢和对其质心的主矩.

当和杆固连的坐标系为用 D-H 方法建立的传动轴坐标系时, 关节  $j$  的轴连接新基座和组合体, 故此轴线上单位矢量  $z_{j-1}$  为一常量. 由  $\dot{q}_i = 0$  和  $\ddot{q}_j = 1$  可算出此时组合体的角速度和角加速度分别为

$$\omega_j^c = \bar{\sigma}_j z_{j-1} \dot{q}_j = 0, \quad \epsilon_j^c = \bar{\sigma}_j z_{j-1} \ddot{q}_j = \bar{\sigma}_j z_{j-1}$$

利用上两式可进一步计算出这时组合体质心速度

$$v_j^c = \bar{\sigma}_j \omega_j^c \times c_j^c + \sigma_j z_{j-1} \dot{q}_j = 0$$

式中  $c_j^c$  为从系  $j-1$  原点  $O_{j-1}$  到组合体质心的矢径. 组合体质心加速度

$$a_j^c = \bar{\sigma}_j (\epsilon_j^c \times c_j^c + \omega_j^c \times \dot{c}_j^c) + \sigma_j z_{j-1} \ddot{q}_j = \bar{\sigma}_j z_{j-1} \times c_j^c + \sigma_j z_{j-1}$$

代入方程 (2-83) 后得到

$$F_j^c = m_j^c (\bar{\sigma}_j z_{j-1} \times c_j^c + \sigma_j z_{j-1}) \quad (2-84)$$

$$M_j^c = \bar{\sigma}_j I_{C_j}^c z_{j-1} \quad (2-85)$$

由于这时  $g=0$ , 故作用在组合体上的力只有从杆  $j-1$  传到杆  $j$  上的力系. 如 2.2 节中一样, 仍记此力系的主矢为  $f_j$ , 对系  $j-1$  原点  $O_{j-1}$  的主矩为  $n_j$ , 则有

$$f_j = F_j^c \quad (2-86)$$

$$n_j = M_j^c + c_j^c \times F_j^c \quad (2-87)$$

$$\tau_j = z_{j-1}^T (\sigma_j n_j + \sigma_j f_j) \quad (2-88)$$

另外, 2.3 节中已用 Newton-Euler 方程求出机器人各杆的动力学方程为

$$\begin{cases} F_i = m_i a_{C_i} \\ N_i = I_{C_i} \epsilon_i + \omega_i \times I_{C_i} \omega_i \\ f_i = F_i + f_{i+1} \\ n_i = N_i + n_{i+1} + p_i^* \times f_i + r_{C_i} \times F_i \\ \tau_i = z_i^T (\bar{\sigma}_i n_i + \sigma_i f_i) \end{cases}$$

$$(f_{n+1} = n_{n+1} = 0), \quad i = 1, \dots, n$$

而现在因杆  $1, \dots, \text{杆 } j-1$  均静止, 故有

$$a_{C_i} = \omega_i = \epsilon_i = 0, \quad i = 1, \dots, j-1$$

因此对于  $i=1, \dots, j-1$ , 其  $\tau_i$  可用下式求得

$$\begin{cases} f_i = f_{i-1} \end{cases} \quad (2-89)$$

$$\begin{cases} n_i = n_{i+1} + p_i^* \times f_i \end{cases} \quad (2-90)$$

$$\begin{cases} \tau_i = z_{i-1}^T (\bar{\sigma}_i n_i + \sigma_i f_i) \\ i = j-1, \dots, 1 \end{cases} \quad (2-91)$$

因为已知这时用逆动力学算法计算出的  $\tau$  即为  $H(q)$  的第  $j$  列, 利用式 (2-84)~(2-91) 按  $i=j, \dots, 1$  的顺序计算出的  $\tau_i$  即为  $h_{ij}$ , 也就是说式 (2-88) 和 (2-91) 可改写为

$$h_{ij} = z_{i-1}^T (\bar{\sigma}_i n_i + \sigma_i f_i), \quad i = j, \dots, 1 \quad (2-92)$$

所以只要令  $j=n, \dots, 1; i=j, \dots, 1$ , 即可用式 (2-84)~(2-90) 和 (2-92) 依次计算出  $h_{nn}, h_{n-1,n}, \dots, h_{1n}; h_{n-1,n-1}, h_{n-2,n-1}, \dots, h_{1,n-1}; \dots; h_{11}$ . 这就是所谓“组合体惯量法”。

### 3. 计算组合体质量、质心位置和对其质心惯性张量阵的递推公式

从式 (2-84) 和 (2-85) 可明显看出: 要用组合体惯量法计算  $H(q)$ , 必须首先计算出组合体的质量  $m_j^C$ , 从  $O_{j-1}$  到组合体质心的矢径  $c_j^C$  和组合体对其质心的惯性张量阵  $I_j^C$ . 以下推导计算  $m_j^C, c_j^C$  和  $I_j^C$  的递推公式。

按组合体质量的定义有

$$m_j^C = \sum_{k=j}^n m_k = m_j + \sum_{k=j+1}^n m_k = m_j + m_{j+1}^C$$

故可用以下递推公式计算  $m_j^C$ :

$$m_j^C = m_j + m_{j+1}^C, \quad (m_{n+1}^C = 0) \quad (2-93)$$

又按质心定义有

$$\begin{aligned} m_j^C c_j^C &= \sum_{k=j}^n m_k r_{j-1}^k = m_j r_{j-1}^j + \sum_{k=j+1}^n m_k r_{j-1}^k \\ &= m_j (p_j^* + r_{C_j}) + \sum_{k=j+1}^n m_k (p_j^* + r_j^k) \\ &= m_j (p_j^* + r_{C_j}) + m_{j+1}^C p_j^* + \sum_{k=j+1}^n m_k r_j^k \\ &= m_j (p_j^* + r_{C_j}) + m_{j+1}^C (p_j^* + c_{j+1}^C) \end{aligned}$$

式中  $r_{j-1}^k$  为从  $O_{j-1}$  到杆  $k$  质心的矢径在系 0 中的坐标表达式,  $p_j^*$  为  $\overrightarrow{O_{j-1}O_j}$  在系 0 中的坐标表达式. 故从  $O_{j-1}$  到组合体质心的矢径  $c_j^C$  可用下式计算:

$$c_j^c = \frac{1}{m_j^c} [m_j(p_j^* + r_{Cj}) + m_{j-1}^c(p_j^* + c_{j+1}^c)], \quad (m_{n+1}^c = c_{n+1}^c = 0) \quad (2-94)$$

推导计算组合体惯性张量阵  $I_j^c$  的递推公式要稍复杂些. 首先按惯性张量阵的定义很容易证明(习题 2-16):

① 若一刚体由两部分组成, 其第一部分对任一点  $O$  的惯性张量阵为  $I_O^1$ , 其第二部分对同一点  $O$  的惯性张量阵为  $I_O^2$ , 则整个刚体对  $O$  点的惯性张量阵

$$I_O = I_O^1 + I_O^2 \quad (2-95)$$

② 平行轴定理: 若一质量为  $m$  的刚体对其质心  $C$  的惯性张量阵为  $I_C$ , 对任一点  $O$  的惯性张量阵为  $I_O$ , 则有

$$I_O = I_C + m(r^T r I - r r^T) \quad (2-96)$$

式中  $r$  为  $\overrightarrow{OC}$  的坐标表达式,  $I$  为 3 阶单位矩阵.

利用以上两点易知(参见图 2-5)

$$\begin{aligned} I_{Cj}^c = & I_{Cj} + m_j[(p_j^* + r_{Cj} - c_j^c)^T(p_j^* + r_{Cj} - c_j^c)I - \\ & (p_j^* + r_{Cj} - c_j^c)(p_j^* + r_{Cj} - c_j^c)^T] + \\ & I_{C_{j+1}}^c + m_{j+1}^c[(p_j^* + c_{j-1}^c - c_j^c)^T(p_j^* + c_{j+1}^c - c_j^c)I - \\ & (p_j^* + c_{j-1}^c - c_j^c)(p_j^* + c_{j+1}^c - c_j^c)^T], \\ & (I_{C_{n+1}}^c = 0, \quad m_{n+1}^c = 0, \quad c_{n+1}^c = 0) \end{aligned} \quad (2-97)$$

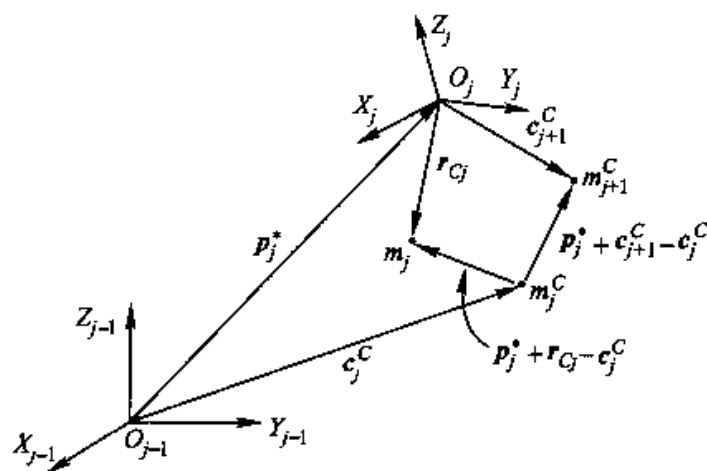


图 2-5

#### 4. 计算公式及框图

为减少计算量, 在计算  $H(q)$  时将式(2-94), (2-97), (2-84)~(2-87), (2-89), (2-90)和(2-92)表示在杆坐标系中, 得到

$$\tilde{c}_j^c = \frac{1}{m_j^c} [m_j(\tilde{p}_j^* + \tilde{r}_{C_j}) + m_{j+1}^c(\tilde{p}_j^* + {}^jR_{j+1}\tilde{c}_{j+1}^c)] \quad (2-98)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{C_j}^c &= \tilde{I}_{C_j} + m_j[(\tilde{p}_j^* + \tilde{r}_{C_j} - \tilde{c}_j^c)^\top(\tilde{p}_j^* + \tilde{r}_{C_j} - \tilde{c}_j^c)I - \\ &\quad (\tilde{p}_j^* + \tilde{r}_{C_j} - \tilde{c}_j^c)(\tilde{p}_j^* + \tilde{r}_{C_j} - \tilde{c}_j^c)^\top] + {}^jR_{j+1}\tilde{I}_{C_{j+1}}^{c,j+1}{}^jR_j + \\ &\quad m_{j+1}^c[(\tilde{p}_j^* + {}^jR_{j+1}\tilde{c}_{j+1}^c - \tilde{c}_j^c)^\top(\tilde{p}_j^* + {}^jR_{j+1}\tilde{c}_{j+1}^c - \tilde{c}_j^c)I - \\ &\quad (\tilde{p}_j^* + {}^jR_{j+1}\tilde{c}_{j+1}^c - \tilde{c}_j^c)(\tilde{p}_j^* + {}^jR_{j+1}\tilde{c}_{j+1}^c - \tilde{c}_j^c)^\top] \end{aligned} \quad (2-99)$$

$$\tilde{F}_j^c = m_j^c(\bar{\sigma}_j {}^jR_{j-1}z \times \tilde{c}_j^c + \sigma_j {}^jR_{j-1}z) \quad (2-100)$$

$$\tilde{M}_j^c = \bar{\sigma}_j \tilde{I}_{C_j}^c {}^jR_{j-1}z \quad (2-101)$$

$$\tilde{f}_j = \tilde{F}_j^c \quad (2-102)$$

$$\tilde{n}_j = \tilde{M}_j^c + \tilde{c}_j^c \times \tilde{F}_j^c \quad (2-103)$$

$$(\tilde{I}_{C_{n+1}}^c = 0, \tilde{c}_{n+1}^c = 0, m_{n+1}^c = 0); \quad j = n, \dots, 1$$

$$\tilde{f}_i = {}^iR_{i+1}\tilde{f}_{i+1} \quad (2-104)$$

$$\tilde{n}_i = {}^iR_{i+1}\tilde{n}_{i+1} + \tilde{p}_i^* \times \tilde{f}_i \quad (2-105)$$

$$i = j - 1, \dots, 1$$

$$h_{ij} = ({}^iR_{i+1}z)^\top(\bar{\sigma}_i\tilde{n}_i + \sigma_i\tilde{f}_i) \quad (2-106)$$

$$j = n, \dots, 1; \quad i = j, \dots, 1$$

计算  $H(q)$  的框图如图 2-6 所示。

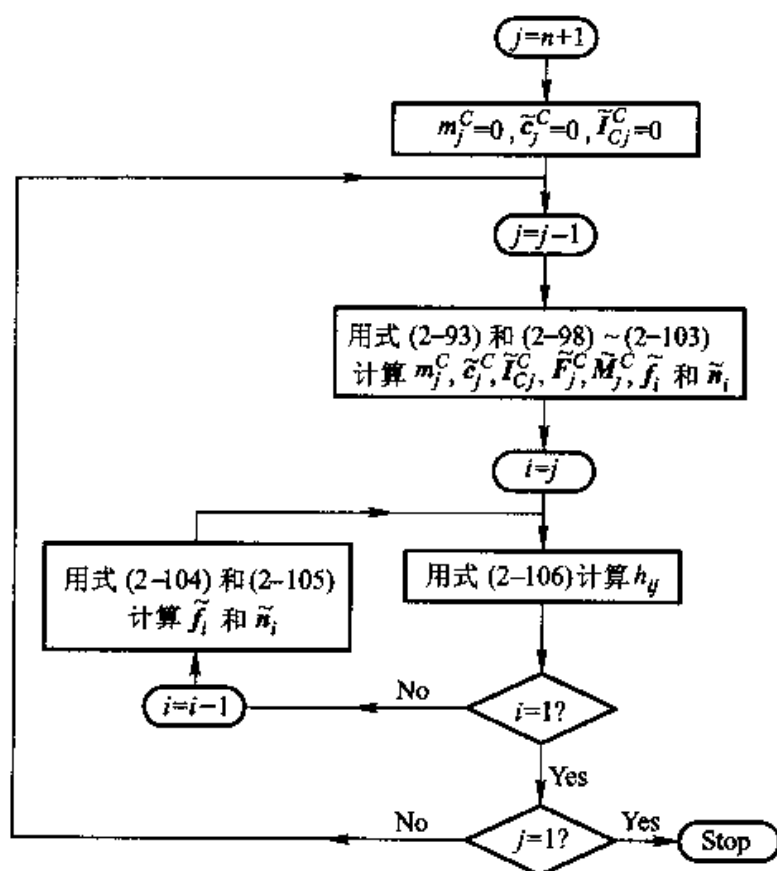


图 2-6



上述正动力学算法的计算量见表 2-3.

表 2-3

	乘法次数( $n=6$ 时)	加法次数( $n=6$ 时)
计算 $b=C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)$	$137n-22$ (800)	$101n-11$ (595)
计算 $H(q)$	$12n^2+56n-27$ (741)	$7n^2+67n-53$ (601)
用三角形分解法解 $H(q)\ddot{q}=\tau'$	$\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{2}{3}n$ (86)	$\frac{1}{6}n^3+n^2-\frac{7}{6}n$ (65)
合计	$\frac{1}{6}n^3+13\frac{1}{2}n^2$ $+192\frac{1}{3}n-49$ (1 627)	$\frac{1}{6}n^3+8n^2$ $+166\frac{5}{6}n-64$ (1 261)

从以上“组合体惯量法”计算公式的推导可以看出,它们显然只适用于用 D-H 方法建立杆坐标系的情况.对于适用于用修改的 D-H 方法建立杆坐标系时的“组合体惯量法”计算公式的推导,留给读者作为练习(习题 2-17).

### 三、利用正动力学算法进行机器人模拟

正动力学算法主要用于机器人模拟.若要模拟受控机器人在时间区间  $[t_0, t_f]$  中的运动,可将此区间分为若干以  $\Delta t$  为间隔的小区间,从  $t=t_0$  开始,用正动力学算法由已知的  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  和  $\tau(t)$  计算出  $\ddot{q}(t)$  后,可用以下近似积分法计算出

$$\begin{cases} \dot{q}(t+\Delta t) = \dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\Delta t & (2-107) \\ q(t+\Delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}(t)(\Delta t)^2 & (2-108) \end{cases}$$

如此迭代计算下去,即可模拟计算出受控机器人在区间  $[t_0, t_f]$  中的运动,其框图如图 2-7 所示.

有时为提高模拟精度,在积分计算时不采用式(2-107)和(2-108),而采用更为精确的积分方法——Runge-Kutta 法<sup>[21]</sup>.

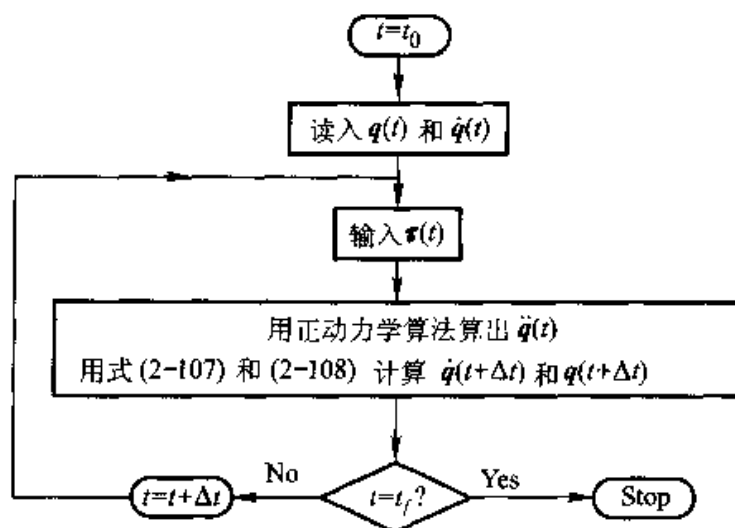


图 2-7

## 2.5 机器人的最小惯性参数及其应用

### 一、机器人动力学特性与其惯性参数间的线性关系

按定义, 机器人杆  $i$  的动能

$$\begin{aligned}
 T_i &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}_i} (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}) dm \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{H}_i} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) dm + 2 \int_{\mathcal{H}_i} \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}) dm + \right. \\
 &\quad \left. \int_{\mathcal{H}_i} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}) dm \right]
 \end{aligned}$$

式中  $\mathbf{v}$  为元质点  $dm$  的速度,  $\mathbf{v}_i$  为和杆  $i$  固连坐标系  $i$  的原点  $O_i$  的速度,  $\mathbf{r}$  为从  $O_i$  到元质点  $dm$  的矢径,  $\boldsymbol{\omega}_i$  为杆  $i$  的角速度。利用对任意矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  均成立的恒等式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

及杆  $i$  质量  $m_i$ , 质心矢径  $\mathbf{r}_{Ci}$  和对  $O_i$  点惯性张量阵  $I_i$  的定义知

$$\begin{aligned}
 T_i &= \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \int_{\mathcal{H}_i} dm + 2 \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \int_{\mathcal{H}_i} \mathbf{r} dm) + \right. \\
 &\quad \left. \int_{\mathcal{H}_i} [(\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}_i)] dm \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i m_i + 2 \mathbf{v}_i^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) m_i \mathbf{r}_{Ci} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_i^T \left[ \int_{\mathbb{R}^3} (r^T r I - r r^T) dm \right] \omega_i \\
&= \frac{1}{2} \{ \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i m_i + 2 \mathbf{v}_i^T S(\omega_i) m_i \mathbf{r}_{Ci} + \omega_i^T I_i \omega_i \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \tilde{\mathbf{v}}_i^T \tilde{\mathbf{v}}_i m_i + 2 \tilde{\mathbf{v}}_i^T S(\tilde{\omega}_i) m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Ci} + \tilde{\omega}_i^T \tilde{I}_i \tilde{\omega}_i \} \quad (2-109)
\end{aligned}$$

注意到  $m_i, m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Ci}$  及  $\tilde{I}_i$  均为常量, 并记

$$m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Ci} = \begin{bmatrix} m_i x_i \\ m_i y_i \\ m_i z_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_i = \begin{bmatrix} x x_i & x y_i & x z_i \\ x y_i & y y_i & y z_i \\ x z_i & y z_i & z z_i \end{bmatrix}$$

则称  $\mathbf{p}' \triangleq [x x_i, x y_i, x z_i, y y_i, y z_i, z z_i, m_i x_i, m_i y_i, m_i z_i, m_i]^T \triangleq [p'_1, p'_2, \dots, p'_{10}]^T \in \mathbf{R}^{10}$  为机器人杆  $i$  的惯性参数, 称  $\mathbf{p} = [(\mathbf{p}^1)^T, \dots, (\mathbf{p}^n)^T]^T \in \mathbf{R}^{10n}$  为机器人的惯性参数. 对一个给定的机器人来说, 其惯性参数是一给定的常量.

若记  $\tilde{\omega}_i = [\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z]^T$ , 则很容易验证

$$\tilde{I}_i \tilde{\omega}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x & \tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_x & 0 & \tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_z & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega}_x & 0 & \tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x x_i \\ x y_i \\ x z_i \\ y y_i \\ y z_i \\ z z_i \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{K}(\tilde{\omega}_i) \begin{bmatrix} x x_i \\ x y_i \\ x z_i \\ y y_i \\ y z_i \\ z z_i \end{bmatrix} \quad (2-110)$$

将式(2-110)代入式(2-109)后得到

$$T_i = \left[ \frac{1}{2} \tilde{\omega}_i^T \mathbf{K}(\tilde{\omega}_i), \tilde{\mathbf{v}}_i^T S(\tilde{\omega}_i), \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_i^T \tilde{\mathbf{v}}_i \right] \mathbf{p}' \triangleq (\tilde{T}^i)^T \mathbf{p}'$$

故整个机器人的动能

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n (\tilde{T}^i)^T \mathbf{p}' \\
&= [(\tilde{T}^1)^T, \dots, (\tilde{T}^n)^T] \mathbf{p} \triangleq \tilde{T} \mathbf{p} \quad (2-111)
\end{aligned}$$

式中  $1 \times 10n$  矩阵  $\tilde{T} = \tilde{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 与机器人的惯性参数无关. 式(2-111)表明: 机器人的动能是机器人惯性参数的线性函数.

又按势能的定义知, 机器人杆  $i$  的势能

$$\begin{aligned}
V_i &= -m_i \mathbf{g} \cdot (\mathbf{p}_i + \mathbf{r}_{Ci}) = -\mathbf{g}^T (\mathbf{p}_i m_i + {}^0 \mathbf{R}_i m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Ci}) \\
&= [0, -\mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{R}_i, -\mathbf{g}^T \mathbf{p}_i] \mathbf{p}' \triangleq (\tilde{V}^i)^T \mathbf{p}'
\end{aligned}$$

式中  $\mathbf{g}$  为重力加速度矢量,  $\mathbf{p}_i$  为  $O_i$  点矢径, 故整个机器人势能

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n (\tilde{V}^i)^T \mathbf{p}'$$

$$=[(\tilde{V}^1)^T, \dots, (\tilde{V}^n)^T]p \triangleq \tilde{V}p \quad (2-112)$$

式中  $1 \times 10n$  矩阵  $\tilde{V} = \tilde{V}(q)$  与机器人惯性参数无关。式(2-112)表明机器人的势能也是机器人惯性参数的线性函数。

由第二类 Lagrange 方程知

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}} \right) \right] p - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q} p + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q} p \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q} \right] p \triangleq Yp \end{aligned} \quad (2-113)$$

式中  $n \times 10n$  矩阵  $Y = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q} \right]$  与机器人的惯性参数  $p$  无关。将式(2-113)与机器人方程

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

比较后知

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Yp \quad (2-114)$$

式(2-114)表明机器人的动力学特性是机器人惯性参数的线性函数。这是机器人非常重要的一个性质,它在简化机器人动力学计算,机器人惯性参数辨识及机器人控制系统设计和分析中起着十分重要的作用。

## 二、惯性参数重组法与机器人的最小惯性参数

从式(2-114)知,若记  $Y = [Y_1, \dots, Y_{10n}]$ ,  $p = [p_1, \dots, p_{10n}]^T$ , 则机器人模型可写为

$$\tau = \sum_{i=1}^{10n} Y_i p_i \quad (2-115)$$

对于  $Y = [Y_1, \dots, Y_{10n}]$  的各列,有可能出现以下两种情况:

① 若某个  $Y_i$  满足

$$Y_i \equiv 0 \quad (2-116)$$

则表明惯性参数  $p_i$  对机器人模型无影响,所以可在机器人模型中消去惯性参数  $p_i$  (即令  $p_i = 0$ )。

② 若某个  $Y_i$  满足常值线性关系

$$Y_i \equiv \beta_{i_1} Y_{i_1} + \dots + \beta_{i_m} Y_{i_m} \quad (2-117)$$

式中  $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$  均为常数,则

$$Y_i p_i \equiv Y_{i_1} (\beta_{i_1} p_i) + \dots + Y_{i_m} (\beta_{i_m} p_i)$$

这样由式(2-115)知:若将惯性参数  $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$  分别改为  $p'_{i_1} \triangleq p_{i_1} + \beta_{i_1} p_i, \dots, p'_{i_m} \triangleq p_{i_m} + \beta_{i_m} p_i$  后,再消去惯性参数  $p_i$ ,则对机器人模型无影响。也就是说,这时惯性参数  $p_i$  可消去,而  $p_i$  对机器人模型的影响可以通过将  $p_i$  按线性关系式(2-117)所确定的比例组合进  $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$  中而等价地

反映出来。

上面①,②中所述的消去机器人某些惯性参数的方法即所谓的“惯性参数重组法”<sup>[22]</sup>。当用惯性参数重组法消去机器人的某些参数后,余下的那些参数称为重组后的惯性参数(Regrouped Inertial Parameters),而将 $p_1, \dots, p_{10n}$ 称为机器人的经典惯性参数(Classical Inertial Parameters)。这里要注意的是:

① 重组后的惯性参数有些是经典惯性参数的线性组合,有些就是经典惯性参数本身。

② 当重组后的惯性参数是经典惯性参数的线性组合时,组合系数由机器人的常值几何参数(即D-H参数或修改的D-H参数中的常数)和结构参数 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ 确定。

用惯性参数重组法所能得到的一组个数最少的重组后的惯性参数称为机器人的一组最小惯性参数(Minimum Inertial Parameters),又称为机器人的基参数(Base Parameters)。换句话说,机器人的一组最小惯性参数中的任一参数均不能再用惯性参数重组法消去。这时矩阵 $Y$ 中与这组最小惯性参数所对应的列都是线性无关的(即在這些列中不存在形如式(2-117)所示的那种常值线性关系)。

对于最小惯性参数的概念,有4点要特别注意:

① 最小惯性参数的确定和杆坐标系的设置方法有关。因为惯性参数的定义本身就与坐标系的设置有关。

② 即使当杆坐标系已给定后,最小惯性参数的确定一般也不是唯一的。因为 $Y=[Y_1, \dots, Y_{10n}]$ 中各列间的线性关系式(2-117)一般不是唯一确定的。

③ 尽管当杆坐标系给定后最小惯性参数一般不是唯一确定的,但最小惯性参数的个数是唯一确定的,它等于 $Y$ 中全部线性无关列的个数。

④ 由惯性参数重组法知:机器人的一组最小惯性参数是与其一组经典惯性参数一一对应的;凡不与最小惯性参数对应的经典惯性参数都是可消去的惯性参数。

### 三、最小惯性参数的应用

#### 1. 用最小惯性参数简化机器人动力学计算

利用最小惯性参数简化机器人动力学计算的原理是很容易理解的。因为由惯性参数重组法知,可以在机器人模型中消去某些惯性参数,而将其余经典惯性参数换为相应的一组最小惯性参数。因被消去的那些惯性参数均取零值,这也就消去了相应的运算,从而减小了计算量。

然而,要特别注意的是:在 2.3 节中推导机器人逆动力学算法和 2.4 节中推导正动力学算法时,是用杆  $i$  的质量  $m_i$  和杆  $i$  对其质心的惯性张量阵  $\tilde{I}_G$  来刻画杆  $i$  质量分布情况的,而不是用杆  $i$  质量  $m_i$ ,质量与质心矢径的乘积  $m_i \tilde{r}_G$  和杆  $i$  对系  $i$  原点  $O_i$  的惯性张量阵  $\tilde{I}_i$  来描述杆  $i$  质量分布情况.因此,要想用最小惯性参数简化机器人动力学计算,必须先将有关的动力学计算公式做相应的修改,使其明显含有  $m_i, m_i \tilde{r}_G$  和  $\tilde{I}_i$ .

先研究逆动力学算法,在 2.3 节中已知,若用 D-H 方法建立杆坐标系,则可用 Newton-Euler 方程导出逆动力学计算公式

$$\dot{\tilde{\omega}}_i = {}^i R_{i-1}(\tilde{\omega}_{i-1} + \tilde{\sigma}_i \dot{z}_i \dot{q}_i), \quad (\tilde{\omega}_0 = 0) \quad (2-118)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_i = {}^i R_{i-1}[\tilde{\epsilon}_{i-1} + \tilde{\sigma}_i(\tilde{\omega}_{i-1} \times z_i \dot{q}_i + z_i \dot{q}_i)], \quad (\tilde{\epsilon}_0 = 0) \quad (2-119)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i = & {}^i R_{i-1}(\tilde{a}_{i-1} + \sigma_i z_i \ddot{q}_i) + \tilde{\epsilon}_i \times \tilde{p}_i^* + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_i^*) + \\ & 2\sigma_i \tilde{\omega}_i \times ({}^i R_{i-1} z_i) \dot{q}_i, \quad (\tilde{a}_0 = -g) \end{aligned} \quad (2-120)$$

$$\tilde{a}_{G_i} = \tilde{a}_i + \tilde{\epsilon}_i \times \tilde{r}_{G_i} + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{r}_{G_i}) \quad (2-121)$$

$$\tilde{F}_i = m_i \tilde{a}_{G_i} \quad (2-122)$$

$$\tilde{f}_i = \tilde{F}_i + {}^i R_{i-1} \tilde{f}_{i-1}, \quad (\tilde{f}_{n-1} = 0) \quad (2-123)$$

$$\tilde{N}_i = \tilde{I}_{G_i} \tilde{\epsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times \tilde{I}_{G_i} \tilde{\omega}_i \quad (2-124)$$

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i = & \tilde{N}_i + {}^i R_{i+1} \tilde{n}_{i+1} + (\tilde{p}_i^* + \tilde{r}_{G_i}) \times \tilde{F}_i + \\ & \tilde{p}_i^* \times ({}^i R_{i+1} \tilde{f}_{i+1}), \quad (\tilde{f}_{n+1} = \tilde{n}_{n+1} = 0) \end{aligned} \quad (2-125)$$

$$\tau_i = ({}^i R_{i-1} z_i)^T (\sigma_i \tilde{f}_i + \dot{\sigma}_i \tilde{n}_i) \quad (2-126)$$

将式(2-121)代入式(2-122)后得到

$$\tilde{F}_i = m_i \tilde{a}_i + \tilde{\epsilon}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i} + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i}) \quad (2-127)$$

又由式(2-124)和(2-127)知

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i^* \triangleq & \tilde{N}_i + (\tilde{p}_i^* + \tilde{r}_{G_i}) \times \tilde{F}_i \\ = & \tilde{I}_{G_i} \tilde{\epsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times \tilde{I}_{G_i} \tilde{\omega}_i + \tilde{p}_i^* \times m_i \tilde{a}_i + \tilde{p}_i^* \times (\tilde{\epsilon}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i}) + \\ & \tilde{p}_i^* \times [\tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i})] + m_i \tilde{r}_{G_i} \times \tilde{a}_i + \\ & \tilde{r}_{G_i} \times (\tilde{\epsilon}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i}) + \tilde{r}_{G_i} \times [\tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i})] \end{aligned} \quad (2-128)$$

利用对任意矢量  $a, b, c$  的坐标表达式均成立的恒等式

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \quad (2-129)$$

$$a \times (b \times c) = (a^T c)b - (a^T b)c = [a^T c I - c a^T]b \quad (2-130)$$

可知

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{G_i} \times [\tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i})] = & \tilde{\omega}_i \times [\tilde{r}_{G_i} \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i})] + \\ & (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{G_i}) \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{r}_{G_i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\omega}_i \times [\tilde{r}_{Ci} \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{Ci})] \\
&= \tilde{\omega}_i \times [m_i (\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci} I - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T) \tilde{\omega}_i]
\end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{Ci} \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{Ci}) = m_i (\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci} I - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T) \tilde{\omega}_i$$

将以上两式代入式(2-128)得到

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_i^* &= \tilde{I}_{Ci} \tilde{\epsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times \tilde{I}_{Ci} \tilde{\omega}_i + \tilde{p}_i^* \times m_i \tilde{a}_i + \tilde{p}_i^* \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{Ci}) + \\
&\quad \tilde{p}_i^* \times [\tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{Ci})] + m_i \tilde{r}_{Ci} \times \tilde{a}_i + \\
&\quad m_i (\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci} I - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T) \tilde{\epsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times [m_i (\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci} I - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T) \tilde{\omega}_i] \quad (2-131)
\end{aligned}$$

因由平行轴定理式(2-96)知

$$\tilde{I}_i = \tilde{I}_{Ci} + m_i (\tilde{r}_{Ci}^T \tilde{r}_{Ci} I - \tilde{r}_{Ci} \tilde{r}_{Ci}^T)$$

故可将式(2-131)写为

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_i^* &= \tilde{I}_i \tilde{\epsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times \tilde{I}_i \tilde{\omega}_i + (m_i \tilde{p}_i^* + m_i \tilde{r}_{Ci}) \times \tilde{a}_i + \\
&\quad \tilde{p}_i^* \times \{(\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{Ci}) + [\tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{Ci})]\} \quad (2-132)
\end{aligned}$$

利用 $\tilde{N}_i^*$ 的定义可将式(2-125)写为

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_i &= \tilde{N}_i^* + {}^i R_{i-1} \tilde{n}_{i-1} + \\
&\quad \tilde{p}_i^* \times {}^i R_{i+1} \tilde{f}_{i+1}, \quad (\tilde{f}_{n+1} = \tilde{n}_{n+1} = 0) \quad (2-133)
\end{aligned}$$

这样就得出了修改后的逆动力学算法如下:

第1步:用式(2-118)~(2-120)正向递推进行运动学计算,算出 $\tilde{\omega}_i$ ,  $\tilde{\epsilon}_i$ 和 $\tilde{a}_i$ .

第2步:用式(2-127), (2-132), (2-123), (2-133)和(2-126)反向递推进行动力学计算,算出 $\tilde{F}_i$ ,  $\tilde{N}_i^*$ ,  $\tilde{f}_i$ ,  $\tilde{n}_i$ 和 $\tau_i$ .

从以上逆动力学算法中的式(2-127)和(2-132)可明显看出 $\tilde{F}_i$ ,  $\tilde{N}_i^*$  ( $i=1, \dots, n$ )均为惯性参数 $m_i$ ,  $m_i \tilde{r}_{Ci}$ ,  $\tilde{I}_i$ 的线性函数,故 $\tilde{f}_i$ ,  $\tilde{n}_i$ ,  $\tau_i$  ( $i=1, \dots, n$ )也均为惯性参数的线性函数. 因此由惯性参数重组法知,在上述逆动力学算法中可用机器人的一组最小惯性参数替代经典惯性参数,从而达到简化运算的目的.

对于以逆动力学算法为基本子程序导出的正动力学算法,也可用类似的方法修改原公式后利用最小惯性参数的概念来简化运算(习题2-19).

## 2. 将最小惯性参数的概念用于机器人惯性参数辨识

尽管一个机器人的惯性参数是一个确定的常量,但由于机器人部件的复杂性及装配误差,使得有些惯性参数甚至对机器人制造者来说也是未知的. 而为了建立机器人的动力学模型,其惯性参数又是必须知道的,因此人们开始研究如何通过机器人本身的测量装置所能获得的数据来辨识机器人惯性参数.

自从 20 世纪 80 年代中期人们认识到机器人的动力学特性是其惯性参数的线性函数后,就把机器人惯性参数的辨识问题转化为解线性方程组的问题,具体地说,由式(2-113)知

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})p \quad (2-134)$$

当已知  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  和  $\tau$  后,因  $Y$  是一与惯性参数  $p$  无关的已知函数,因此辨识  $p$  的问题就化为解线性方程组(2-134)的问题. 因式(2-134)是一个含有  $10n$  个未知数的  $n$  阶方程组,因此要用式(2-134)辨识  $p$ ,至少需要知道在 10 个不同位置上的  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  和  $\tau$ . 一般地,设已在  $N$  ( $N \geq 10$ , 通常为在有量测噪音的情况下提高辨识精度,取  $N$  为很大的数)个不同位置取  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  和  $\tau$ ,这时由式(2-134)可得以下方程

$$\tau \triangleq \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \vdots \\ \tau^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^N \end{bmatrix} p \triangleq Y p \quad (2-135)$$

式中  $\tau = Y^i p$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) 对应于第  $i$  个位置上的值. 若能从上式中解出  $p$ , 则就辨识出机器人的惯性参数  $p$ .

然而要从式(2-135)中解出  $p$  并不是容易的事,因为可以证明(参见本节第四部分):式(2-134)中的  $Y$  中有些列恒为零,有些列间存在常值线性关系. 所以不论  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  和  $N$  取何值,  $Y$  总是不满秩的,因而不能利用

$$(Y^T Y)^{-1} Y^T \tau = p$$

解出  $p$ .

但另一方面,正因为  $Y$  中有些列恒为零,有些列是其余列的常值线性组合,因此知存在  $m \times 10n$  ( $m$  为  $Y$  中线性无关列的个数)阶常值矩阵  $C$ , 使得

$$Y = \hat{Y}C$$

其中  $n \times m$  矩阵  $\hat{Y}$  的各列都是线性无关的. 因此式(2-134)可写为

$$\tau = \hat{Y}Cp$$

由惯性参数重组法立即知  $Cp \triangleq p'$  正是机器人的一组最小惯性参数. 因此式(2-135)可写为

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \vdots \\ \tau^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}^1 \\ \vdots \\ \hat{Y}^N \end{bmatrix} Cp \triangleq \hat{Y} p'$$

因为  $\hat{Y}$  中的各列是线性无关的,所以由  $\hat{Y}$  的定义及其对  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  的连续性知,几乎任意  $N$  个不同位置上的  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  都能使  $\hat{Y}$  满秩,从而可用

$$(\hat{Y}^T \hat{Y})^{-1} \hat{Y}^T \tau = p' \quad (2-136)$$

解出  $p'$ . 以上分析说明,当利用式(2-135)来辨识机器人的惯性参数时,



并不能独立地辨识出机器人的各个经典惯性参数,而只有机器人的一组最小惯性参数才是可辨识的。

当然,只能辨识出一组最小惯性参数这一点并没给实际应用带来任何困难,因为根据惯性参数重组法知

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Yp = \tilde{Y}p'$$

即用最小惯性参数取代经典惯性参数后得到的机器人模型与用经典惯性参数得到的模型是等价的。因此可用以最小惯性参数建立的机器人模型来进行机器人动力学分析和控制器设计。

另外,在实际进行辨识计算时,因  $N$  很大,通常并不真正用式(2-136)算出  $p'$ ,而是利用  $Y$  的三角形结构来简化计算。

事实上,利用式(2-110)可将式(2-127)和(2-132)合并写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_i \\ \tilde{N}_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S(\tilde{\omega}_i) + S(\tilde{\omega}_i)S(\tilde{\omega}_i) & \tilde{a}_i \\ K(\tilde{\epsilon}_i) + S(\tilde{\omega}_i)K(\tilde{\omega}_i) & S(\tilde{p}_i^*)[S(\tilde{\epsilon}_i) + S(\tilde{\omega}_i)S(\tilde{\omega}_i)] - S(\tilde{a}_i) & S(\tilde{p}_i^*)\tilde{a}_i \end{bmatrix} p' \\ \triangleq A_i p' \quad (2-137)$$

再用式(2-123)和(2-133)可得到

$$\tilde{f}_i = \tilde{F}_i + \sum_{j=i+1}^n {}^iR_j \tilde{F}_j \quad (2-138)$$

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i &= \tilde{N}_i^* + \sum_{j=i+1}^n {}^iR_j \tilde{N}_j^* + \tilde{p}_i^* \times \left( \sum_{j=i+1}^n {}^iR_j \tilde{F}_j \right) + \\ &\quad ({}^iR_{i+1} \tilde{p}_{i+1}^*) \times \left( \sum_{j=i+2}^n {}^{i+1}R_j \tilde{F}_j \right) + \cdots + \\ &\quad ({}^iR_n \tilde{p}_n^*) \times {}^iR_n \tilde{F}_n \\ &= \tilde{N}_i^* + \sum_{j=i+1}^n {}^iR_j \tilde{N}_j^* + \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n ({}^iR_k \tilde{p}_k^*) \times ({}^iR_j \tilde{F}_j) \\ &= \tilde{N}_i^* + \sum_{j=i+1}^n {}^iR_j \tilde{N}_j^* + \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=i}^{j-1} ({}^iR_k \tilde{p}_k^*) \times ({}^iR_j \tilde{F}_j) \\ &= \tilde{N}_i^* + \sum_{j=i+1}^n [{}^iR_j \tilde{N}_j^* + \sum_{k=i}^{j-1} ({}^iR_k S(\tilde{p}_k^*) {}^kR_j \tilde{F}_j)] \end{aligned} \quad (2-139)$$

上两式表明,  $\tilde{f}_i, \tilde{n}_i$  可表示为

$$\tilde{f}_i = \tilde{F}_i + \sum_{j=i+1}^n \tilde{f}_{ij} \quad (2-140)$$

$$\tilde{n}_i = \tilde{N}_i^* + \sum_{j=i+1}^n \tilde{n}_{ij} \quad (2-141)$$

式中  $\tilde{f}_{ij} = {}^iR_j \tilde{F}_j$  反映了杆  $j$  动力学性质对  $\tilde{f}_i$  的影响,  $\tilde{n}_{ij} = {}^iR_j \tilde{N}_j^* +$

$\sum_{k=i}^{j-1} {}^iR_k S(\tilde{p}_k) {}^kR_j \tilde{F}_j$  反映了杆  $j$  动力学性质对  $\tilde{n}_i$  的影响, 若记

$$W_i = \begin{bmatrix} \tilde{f}_i \\ \tilde{n}_i \end{bmatrix}, \quad W_{i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{i,j} \\ \tilde{n}_{i,j} \end{bmatrix}, \quad W_i^* = \begin{bmatrix} \tilde{F}_i \\ -\tilde{N}_i^* \end{bmatrix}$$

则式(2-140)和(2-141)可合并写为

$$W_i = W_i^* + \sum_{j=i+1}^n W_{i,j} \quad (2-142)$$

利用式(2-138)和(2-139)很容易验证

$$\begin{aligned} W_{i,i+1} &= \begin{bmatrix} \tilde{f}_{i,i+1} \\ \tilde{n}_{i,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iR_{i+1} \tilde{F}_{i+1} \\ {}^iR_{i+1} \tilde{N}_{i+1}^* + S(\tilde{p}_i) {}^iR_{i+1} \tilde{F}_{i+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^iR_{i+1} & 0 \\ S(\tilde{p}_i) {}^iR_{i+1} & {}^iR_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_{i+1} \\ \tilde{N}_{i+1}^* \end{bmatrix} \triangleq T_i W_{i+1} \end{aligned}$$

更一般地, 对  $j(i < j \leq n)$  有

$$\begin{aligned} W_{i,j} &= \begin{bmatrix} \tilde{f}_{i,j} \\ \tilde{n}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iR_j \tilde{F}_j \\ {}^iR_j \tilde{N}_j^* + \sum_{k=i}^{j-1} {}^iR_k S(\tilde{p}_k) {}^kR_j \tilde{F}_j \end{bmatrix} \\ &= T_i T_{i+1} \cdots T_{j-1} W_j^* \end{aligned} \quad (2-143)$$

将式(2-137)代入式(2-143), 再代入式(2-142)后可得出

$$W_i = A_i p^i + \sum_{j=i+1}^n T_i T_{i+1} \cdots T_{j-1} A_j p^j \triangleq \sum_{j=i}^n U_{ij} p^j$$

式中

$$U_{ij} = \begin{cases} A_i & \text{当 } i = j \\ T_i T_{i+1} \cdots T_{j-1} A_j & \text{当 } i < j \end{cases} \quad (2-144)$$

再由式(2-126)知

$$\begin{aligned} \tau_i &= [0, 0, \sigma_i, 0, 0, \bar{\sigma}_i] \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i \tilde{f}_i \\ {}^{i-1}R_i \tilde{n}_i \end{bmatrix} \\ &= [0, 0, \sigma_i, 0, 0, \bar{\sigma}_i] \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & 0 \\ 0 & {}^iR_i \end{bmatrix} W_i \triangleq \sum_{j=i}^n Y_{ij} p^j \end{aligned}$$

式中

$$Y_{ij} = [0, 0, \sigma_i, 0, 0, \bar{\sigma}_i] \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & 0 \\ 0 & {}^iR_i \end{bmatrix} U_{ij} \quad (2-145)$$

因此

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^n \end{bmatrix} \quad (2-146)$$

将式(2-146)与式(2-134)比较即可知  $Y$  具有上三角结构

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ 0 & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

因  $\tilde{Y}$  为  $Y$  中去掉某些列后所得到的矩阵,故  $\tilde{Y}$  也具有类似的上三角结构

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} & \cdots & \tilde{Y}_{1n} \\ & \tilde{Y}_{22} & \cdots & \tilde{Y}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{Y}_{nn} \end{bmatrix}$$

当已知  $q, \dot{q}$  和  $\ddot{q}$  时,可用式(2-118)~(2-120)计算出  $\tilde{\omega}, \tilde{\epsilon}$  和  $\tilde{a}$ ,再利用式(2-137)计算出  $A^*$  ( $A^*$  为  $A_i$  中去掉对应于消去的那些惯性参数的列后所成的矩阵),再由式(2-144)和(2-145)计算出

$$U_i^* = \begin{cases} A_i^*, & \text{当 } i = j \\ T_i T_{i-1} \cdots T_{j+1} A_j^*, & \text{当 } i < j \end{cases}$$

$$\tilde{Y}_{ij} = [0, 0, \sigma_i, 0, 0, \tilde{a}_i] \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & 0 \\ 0 & {}^{i-1}R_{j+1} \end{bmatrix} U_j^*$$

即可得到  $\tilde{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})$ .

当在  $N$  个不同的位置上计算出  $\tilde{Y}$  后,即可得到方程

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \vdots \\ \tau^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}^N \end{bmatrix} p^r = \tilde{Y} p^r$$

由  $\tilde{Y}$  的上三角结构知,经适当行置换后要将  $\tilde{Y}$  也换为具有上三角结构,即将上式化为

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \vdots \\ \tau^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} & \cdots & \tilde{Y}_{1n} \\ & \tilde{Y}_{22} & \cdots & \tilde{Y}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{r1} \\ p^{r2} \\ \vdots \\ p^{rn} \end{bmatrix} = \tilde{Y} p^r \quad (2-147)$$

若定义

$$\tilde{\tau}' = \underline{\tau}' - \sum_{j=i+1}^n \tilde{Y}_{ij} p^j, \quad (\tilde{\tau}^n = \underline{\tau}^n) \quad (2-148)$$

则式(2-147)可写为

$$\tilde{\tau}' = \tilde{Y}_n p^n, \quad i = 1, \dots, n$$

因 $\tilde{Y}$ 是满秩的,故 $\tilde{Y}_n$ 也是满秩的,据此很容易证明 $\tilde{Y}_n (i = 1, \dots, n)$ 都是满秩的,从而由上式可解出

$$p^n = (\tilde{Y}_n^T \tilde{Y}_n)^{-1} \tilde{Y}_n^T \tilde{\tau}' \quad (2-149)$$

这样就可利用式(2-148)和(2-149)按 $i = n, \dots, 1$ 的顺序递推地计算出 $p^i$ .

#### 四、用机器人几何参数直接确定其最小惯性参数

##### 1. 用修改的 D-H 参数直接确定机器人的最小惯性参数

由前所述知,确定机器人的最小惯性参数对减少机器人动力学计算量及辨识机器人惯性参数都是至关重要的.但由于机器人动力学模型的极端复杂性,若用事先计算出 $n \times 10n$ 矩阵 $Y = [Y_1, \dots, Y_{10n}]$ 的解析表达式,再判断 $Y$ 的各列是否满足式(2-116)和(2-117)的方法来求出机器人的一组最小惯性参数是十分复杂的,也是不实用的.因此自20世纪80年代以来人们一直在寻求直接利用机器人的几何参数确定其最小惯性参数的方法. H. Mayeda 等提出了用机器人几何参数直接确定全由相互垂直或平行的关节构成之机器人的一组最小惯性参数的公式<sup>[23,24]</sup>,但这些公式不适用于具有一般结构的机器人. M. Gautier 等<sup>[25]</sup>、W. Khalil 等<sup>[26]</sup>、霍伟等<sup>[27]</sup>和 G. Niemeyer 等<sup>[28]</sup>分别提出了用修改的 D-H 参数和 D-H 参数直接确定一般结构机器人的一组最小惯性参数中大多数参数的递推公式,然而这些公式尚不能完全确定一组最小惯性参数.直到1991年 H. Kawasaki 等<sup>[29]</sup>才推导出用修改的 D-H 参数完全确定机器人一组最小惯性参数的递推公式.尽管其推导中有些错误,但不难加以改正得出正确的公式<sup>[30]</sup>.

用这种方法导出用修改的 D-H 参数直接确定机器人最小惯性参数公式的理论依据是以下3点:

① 机器人最小惯性参数是用 $\tau$ 和 $q, \dot{q}, \ddot{q}$ 可辨识的.

② 由式(2-146)知机器人杆 $i$ 的惯性参数只影响 $\tau_1, \dots, \tau_i$ ,而不影响 $\tau_{i+1}, \dots, \tau_n$ .

③ 对任意结构的机器人,都可将其关节划分为7类,进行细致的分类研究.具体方法是:首先可不失一般性地在设置坐标系时使系0的 $Z$ 轴与重力方向平行,且使所有平行的 $z_i (i \in \{1, \dots, n\})$ , $z_i$ 为系 $i$ 的 $Z$ 轴上单位

矢量)都具有相同的正方向,并定义关节0为虚拟的移动关节(即定义 $\sigma_0 = 1$ ).再对每个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 定义以下集合:

$$S_i^R = \{k \mid 0 \leq k < i, \sigma_k = 0 \text{ 且 } z_k \text{ 平行于 } z_i\}$$

= {关节0 ~ 关节 $i-1$ 中其轴向平行于关节 $i$ 轴向的转动关节编号}

$$\bar{S}_i^R = \{k \mid 0 \leq k < i, \sigma_k = 0 \text{ 且 } z_k \text{ 不平行于 } z_i\}$$

= {关节0 ~ 关节 $i-1$ 中其轴向不平行于关节 $i$ 轴向的转动关节编号}

$$\hat{S}_i^R = \{k \mid k \in S_i^R, z_k \text{ 不与 } z_i \text{ 重合}\}$$

= {关节0 ~ 关节 $i-1$ 中其轴向与关节 $i$ 轴向平行但不重合的转动关节编号}

$$\bar{S}_i^T = \{k \mid 0 \leq k < i, \sigma_k = 1 \text{ 且 } z_k \text{ 不平行于 } z_i\}$$

= {关节0 ~ 关节 $i-1$ 中其轴向不与关节 $i$ 轴向平行的移动关节编号}

这样任一关节 $i (i \in \{1, \dots, n\})$ 必为以下7种情况之一(参看图2-8):

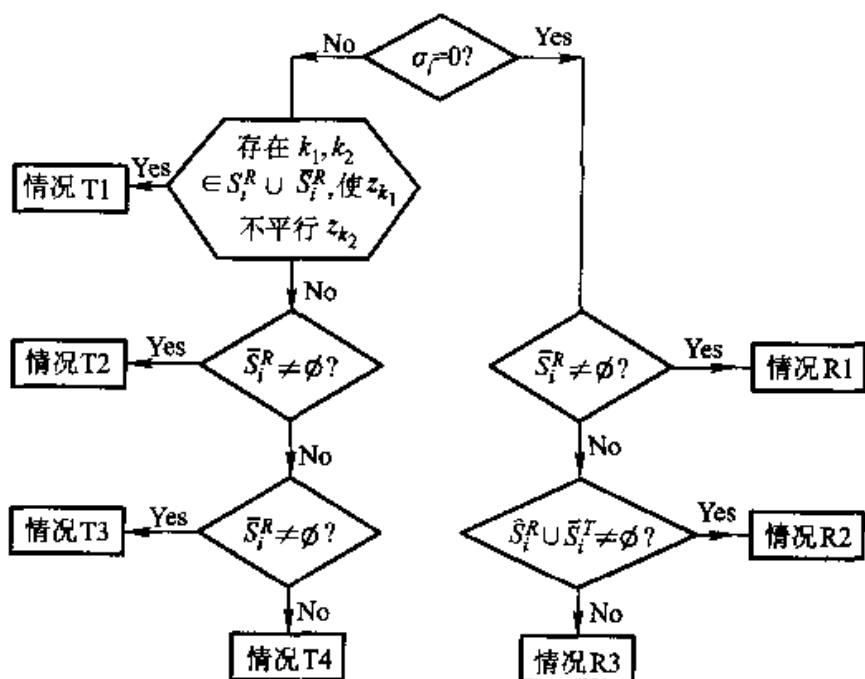


图 2-8

关节 $i$ 是移动关节	情况 T1: 存在 $k_1, k_2 \in S_i^R \cup \bar{S}_i^R$ 使得 $z_{k_1}$ 不平行于 $z_{k_2}$ (即在关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中存在两个轴向不平行的转动关节)
	情况 T2: $S_i^R = \emptyset, \bar{S}_i^R \neq \emptyset$ 且所有 $z_k (k \in \bar{S}_i^R)$ 均平行 (即在关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中存在转动关节, 所有这些转动关节的轴向均平行且都不平行于关节 $i$ 的轴向)
	情况 T3: $S_i^R \neq \emptyset, \bar{S}_i^R = \emptyset$ (即在关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中存在转动关节且所有这些转动关节的轴向均与关节 $i$ 轴向平行)
	情况 T4: $S_i^R = \bar{S}_i^R = \emptyset$ (即在关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中无转动关节, 亦即关节 1 ~ 关节 $i$ 均为移动关节)
关节 $i$ 是转动关节	情况 R1: $\bar{S}_i^R \neq \emptyset$ (即关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中存在其轴向不与关节 $i$ 轴向平行的转动关节)
	情况 R2: $\bar{S}_i^R = \emptyset, \hat{S}_i^R \cup \bar{S}_i^T \neq \emptyset$ (即关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中不存在其轴向不与关节 $i$ 轴向平行的转动关节, 但存在其轴向不与关节 $i$ 轴向重合的转动关节或其轴向不与关节 $i$ 轴向平行的移动关节)
	情况 R3: $\hat{S}_i^R = \bar{S}_i^R = \bar{S}_i^T = \emptyset$ (即关节 0 ~ 关节 $i-1$ 中不存在其轴向不与关节 $i$ 轴向重合的转动关节和其轴向不与关节 $i$ 轴向平行的移动关节)

除此之外, 还需要引入以下定义:

**定义 2-1** 若机器人的一个惯性参数是可用  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  和  $\tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n$  来辨识出的, 则称其为  $\tau_i$  可辨识的; 否则称其为  $\tau_i$  不可辨识的。

由此定义立即可知: 若一个惯性参数是  $\tau_i$  可辨识的, 则它一定也是  $\tau_j (1 \leq j < i)$  可辨识的; 且机器人的一组最小惯性参数是  $\tau_i$  可辨识的, 即用  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  和  $\tau$  可辨识的。

利用  $\tau_i$  可辨识的定义, 可用以下方法递推地求出机器人的一组最小惯性参数:

第 1 步: 令  $i = n$ 。

第 2 步: 在杆  $i$  的惯性参数中求出所有  $\tau_i$  可辨识的参数。

第3步:证明杆 $i$ 惯性参数中 $\tau_i$ 不可辨识的惯性参数或者是对机器人模型无影响的惯性参数,或者可用惯性参数法组合进杆 $i-1$ 惯性参数中的参数,即 $\tau_i$ 不可辨识的杆 $i$ 惯性参数都是可消去的惯性参数。

第4步:若 $i=1$ ,则停止;否则令 $i=i-1$ 后到第2步。

考虑到用上述方法消去杆 $i$ 的某些惯性参数不会对 $\tau_{i+1}, \dots, \tau_n$ 产生影响,故可用以上方法按 $i=n, \dots, 1$ 的顺序求出 $\tau_1$ 可辨识的所有惯性参数,即机器人的一组最小惯性参数。

以下为用上述方法具体求出机器人的一组最小惯性参数及相应的重组惯性参数的递推公式,先研究杆 $n$ 的惯性参数,这表现在以下4个命题中。

**命题2-1** 若如上所述用修改的D-H方法建立机器人杆坐标系,则当关节 $n$ 是移动关节时有:

- ①  $m_n$  是  $\tau_n$  可辨识的。
- ②  $\tilde{I}_n$  中所有惯性参数均对  $\tau_n$  无影响,故它们都是  $\tau_n$  不可辨识的。
- ③  $m_n \tilde{r}_{C_n}$  中的3个惯性参数按关节 $n$ 的类型分别有:

a. 若关节 $n$ 属情况T1,则  $m_n \tilde{r}_{C_n} = [mx_n, my_n, mz_n]^T$  中的3个惯性参数都是  $\tau_n$  可辨识的。

b. 若关节 $n$ 属情况T2,记  $\tilde{S}_n^R$  中最大者为  $j^*$ ,这时

$${}^n z_{j^*} = {}^n R_j \cdot z \triangleq [\lambda, \mu, \nu]^T \quad (2-150)$$

为已知常值矢量且  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ,则当  $\lambda \neq 0$  时,  $mx_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的,而  $my_n - \frac{\mu}{\lambda} mx_n$  和  $mz_n - \frac{\mu}{\lambda} mx_n$  是  $\tau_n$  可辨识的;当  $\lambda = 0$  时,  $my_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的,而  $mx_n$  和  $mz_n - \frac{\nu}{\mu} my_n$  是  $\tau_n$  可辨识的。

c. 若关节 $n$ 属情况T3或T4,则  $m_n \tilde{r}_{C_n}$  中3个惯性参数均对  $\tau_n$  无影响,故它们都是  $\tau_n$  不可辨识的。

**证:**对于任一给定的串联杆件机器人,当其杆坐标系是按上述方法用修改的D-H参数确定时,可用与推导式(2-118)~(2-120), (2-127), (2-123), (2-132), (2-133) 及(2-126) 相同的方法导出其递推形式的动力学方程为(习题2-20)

$$\tilde{\omega}_i = {}^i R_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1} + \tilde{\sigma}_i z \dot{q}_i, \quad (\tilde{\omega}_0 = 0) \quad (2-151)$$

$$\tilde{\epsilon}_i = {}^i R_{i-1} \tilde{\epsilon}_{i-1} + \tilde{\sigma}_i (\tilde{\omega}_i \times z \dot{q}_i + z \ddot{q}_i), \quad (\tilde{\epsilon}_0 = 0) \quad (2-152)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i = & {}^i R_{i-1} [\tilde{a}_{i-1} + \tilde{\epsilon}_{i-1} \times \tilde{p}_i^* + \tilde{\omega}_{i-1} \times (\tilde{\omega}_{i-1} \times \tilde{p}_i^*)] + \\ & \sigma_i (2 \tilde{\omega}_i \times z \dot{q}_i + z \ddot{q}_i), \quad (\tilde{a}_0 = -g) \end{aligned} \quad (2-153)$$

$$\tilde{f}_i = m_i \tilde{a}_i + \tilde{\epsilon}_i \times m_i \tilde{r}_{C_i} + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times m_i \tilde{r}_{C_i}) +$$

$${}^i R_{i+1} \dot{\bar{f}}_{i+1}, \quad (\dot{\bar{f}}_{n+1} = 0) \quad (2-154)$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_i = \bar{I}_i \bar{\epsilon}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{I}_i \bar{\omega}_i + m_i \bar{r}_{Ci} \times \bar{a}_i + {}^i R_{i+1} (\bar{p}_{i+1}^* \times \dot{\bar{f}}_{i+1} + \\ \bar{n}_{i+1}), \quad (\dot{\bar{f}}_{n+1} = \bar{n}_{n+1} = 0) \end{aligned} \quad (2-155)$$

$$\tau_i = z^T (\sigma_i \dot{\bar{f}}_i + \bar{\sigma}_i \bar{n}_i) \quad (2-156)$$

式中  $\bar{p}_i^* \triangleq {}^{i-1}(\overrightarrow{O_{i-1}O_i})$ ,  $\bar{p}_i \triangleq {}^i(\overrightarrow{O_{i-1}O_i})$ .

若记

$$\bar{\epsilon}_n = [\epsilon_x^n, \epsilon_y^n, \epsilon_z^n]^T, \quad \bar{\omega}_n = [\omega_x^n, \omega_y^n, \omega_z^n]^T$$

则由式(2-156)和(2-154)知

$$\begin{aligned} \tau_n = z^T \dot{\bar{f}}_n = z^T [m_n \bar{a}_n + \bar{\epsilon}_n \times m_n \bar{r}_{Cn} + \bar{\omega}_n \times (\bar{\omega}_n \times m_n \bar{r}_{Cn})] \\ = m_n z^T \bar{a}_n + (-\epsilon_y^n + \omega_x^n \omega_z^n) m x_n + (\epsilon_x^n + \omega_y^n \omega_z^n) m y_n - \\ [(\omega_x^n)^2 + (\omega_y^n)^2] m z_n \end{aligned} \quad (2-157)$$

由此式立即知  $\bar{I}_n$  中各惯性参数均对  $\tau_n$  无影响, 故它们都是  $\tau_n$  不可辨识的. 又由式(2-151)~(2-153)知  $\bar{a}_n$  是  $\ddot{q}_n$  的函数, 而  $\bar{\omega}_n$  和  $\bar{\epsilon}_n$  均不是  $\ddot{q}$  的函数, 故很容易由式(2-157)知可适当设置测试轨线, 使得  $m_n$  是  $\tau_n$  可辨识的(习题 2-21).

以下分别研究 T1~T4 这 4 种情况下,  $m_n \bar{r}_{Cn}$  中 3 个惯性参数的可辨识性.

a. 若关节  $n$  属情况 T1: 这时存在两个转动关节  $k_1$  和  $k_2$  ( $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n-1\}$ ), 满足其轴向上单位矢量  $z_{k_1}$  和  $z_{k_2}$  不平行, 故绕关节  $k_1$  和  $k_2$  的转动是彼此独立的. 注意到这时  $m_n$  是  $\tau_n$  可辨识的, 则可由式(2-157)证明这时  $m_n \bar{r}_{Cn}$  的 3 个惯性参数  $m x_n, m y_n$  和  $m z_n$  都是  $\tau_n$  可辨识的(习题 2-22).

b. 若关节  $n$  属情况 T2: 这时在关节 1~关节  $n-1$  中存在转动关节, 且这些转动关节轴向上均平行但均不平行于关节  $n$  轴向上单位矢量  $z_n$ . 因这时  $\bar{S}_n^* \neq \emptyset$ , 故若记  $\bar{S}_n^*$  中最大者为  $j^*$ , 则有

$$\bar{\sigma}_k {}^j R_k z = \bar{\sigma}_k z, \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$$

从而可知任取  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  有

$$\bar{\sigma}_k {}^n R_k z = \bar{\sigma}_k {}^n R_{j^*} {}^{j^*} R_{j^*} z = \bar{\sigma}_k {}^n R_{j^*} z \quad (2-158)$$

由上式及式(2-151), 并考虑到  ${}^n R_{n-1}$  和  ${}^n R_{j^*}$  均为常值矩阵后可知

$$\bar{\omega}_n = {}^n R_{n-1} \bar{\omega}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k {}^n R_k z \dot{q}_k = {}^n R_{j^*} z \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \dot{q}_k = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \dot{q}_{n-1}^* \quad (2-159)$$

$$\bar{\epsilon}_n = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_n = {}^n R_{n-1} \bar{\epsilon}_{n-1} = {}^n R_{j^*} z \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \ddot{q}_k = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \ddot{q}_{n-1}^* \quad (2-160)$$



式中

$${}^n R_{j^*} z \triangleq \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \dot{q}_k \triangleq \dot{q}_{n-1}^*, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \ddot{q}_k \triangleq \ddot{q}_{n-1}^* \quad (2-161)$$

因 ${}^n R_{j^*}$ 为常值矩阵,故

$${}^n z_{j^*} = {}^n R_{j^*} z = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}$$

为已知常值量,且由 $z_{j^*}$ 不平行 $z_n$ 知 $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ,即 $\lambda$ 和 $\mu$ 不同时为零.

若 $\lambda \neq 0$ ,则由式(2-159)知

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n \times m_n \tilde{r}_{Cn} &= \begin{bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx_n \\ my_n \\ mz_n \end{bmatrix} \dot{q}_{n-1}^* \\ &= \begin{bmatrix} -\nu my_n + \mu mz_n \\ \nu mx_n - \lambda mz_n \\ -\mu mx_n + \lambda my_n \end{bmatrix} \dot{q}_{n-1}^* \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ MY_n^* \\ MZ_n^* \end{bmatrix} \dot{q}_{n-1}^* \\ &= \tilde{\omega}_n \times \begin{bmatrix} 0 \\ MY_n^* \\ MZ_n^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-162)$$

式中 $MY_n^* \triangleq my_n - \frac{\mu}{\lambda} mx_n$ ,  $MZ_n^* \triangleq mz_n - \frac{\nu}{\lambda} mx_n$ .

用同样方法可由式(2-160)证明

$$\tilde{\epsilon}_n \times m_n \tilde{r}_{Cn} = \tilde{\epsilon}_n \times \begin{bmatrix} 0 \\ MY_n^* \\ MZ_n^* \end{bmatrix} \quad (2-163)$$

将以上两式代入式(2-157)后知

$$\tau_n = z_n^T \left\{ m_n \ddot{a}_n + \tilde{\epsilon}_n \times \begin{bmatrix} 0 \\ MY_n^* \\ MZ_n^* \end{bmatrix} + \tilde{\omega}_n \times \left\{ \tilde{\omega}_n \times \begin{bmatrix} 0 \\ MY_n^* \\ MZ_n^* \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

由此式可知 $mx_n$ 是 $\tau_n$ 不可辨识的.

因 $m_n$ 已先用 $\tau_n, \dot{q}, \ddot{q}$ 辨识出,故将式(2-159)和(2-160)代入上式可算出

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_n &\triangleq \tau_n - m_n \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{a}}_n \\ &= (\lambda \ddot{q}_{n-1}^* + \nu \mu \dot{q}_{n-1}^*) MY_n^* - (\lambda^2 + \mu^2) MZ_n^* \dot{q}_{n-1}^* \quad (2-164)\end{aligned}$$

先选取测试轨线满足  $\ddot{q}_{n-1}^* = 0, \dot{q}_{n-1}^* \triangleq \dot{q}_{n-1}^*(1) \neq 0$ , 并记这时得到的  $\tilde{\tau}_n$  为  $\tilde{\tau}_n(1)$ , 则由上式可得到

$$\tilde{\tau}_n(1) = \nu \mu \dot{q}_{n-1}^*(1) MY_n^* - (\lambda^2 + \mu^2) \dot{q}_{n-1}^*(1) MZ_n^* \quad (2-165)$$

再取测试轨线满足  $\ddot{q}_{n-1}^* \triangleq \ddot{q}_{n-1}^*(2) \neq 0, \dot{q}_{n-1}^* = \dot{q}_{n-1}^*(2)$ , 并记这时得到的  $\tilde{\tau}_n$  为  $\tilde{\tau}_n(2)$ , 则由式(2-164)可得到

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_n(2) &= [\lambda \ddot{q}_{n-1}^*(2) + \nu \mu \dot{q}_{n-1}^*(2)] MY_n^* - \\ &\quad (\lambda^2 + \mu^2) \dot{q}_{n-1}^*(2) MZ_n^* \quad (2-166)\end{aligned}$$

考虑到  $\lambda \neq 0$  后立即可知

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} \nu \mu \dot{q}_{n-1}^*(1) & -(\lambda^2 + \mu^2) \dot{q}_{n-1}^*(1) \\ \lambda \ddot{q}_{n-1}^*(2) + \nu \mu \dot{q}_{n-1}^*(2) & -(\lambda^2 + \mu^2) \dot{q}_{n-1}^*(2) \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2 + \mu^2) \dot{q}_{n-1}^*(1) \ddot{q}_{n-1}^*(2) \neq 0\end{aligned}$$

故可将方程(2-165)和(2-166)联立解出  $MY_n^*$  和  $MZ_n^*$ . 这就证明了在这种情况下  $MY_n^*$  和  $MZ_n^*$  是  $\tau_n$  可辨识的.

若  $\lambda = 0$ , 则  $\mu \neq 0$ , 可用完全类似的方法证明这时

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n \times m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n \times \begin{bmatrix} m x_n \\ 0 \\ MZ_n^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \times m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \times \begin{bmatrix} m x_n \\ 0 \\ MZ_n^* \end{bmatrix} \quad (2-167)$$

式中  $MZ_n^* = m z_n - \frac{\nu}{\mu} m y_n$ , 且  $m x_n$  和  $MZ_n^*$  是  $\tau_n$  可辨识的, 而  $m y_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的.

c. 若关节  $n$  属情况 T3, 这时关节  $1 \sim$  关节  $n-1$  中存在转动关节, 且这些转动关节的轴向全与移动关节  $n$  的轴向平行, 故有

$$\bar{\sigma}_k {}^n R_k \mathbf{z} = \bar{\sigma}_k \mathbf{z}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

代入式(2-151)和(2-152)后知

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n = {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k {}^n R_k \mathbf{z} \dot{q}_k = \mathbf{z} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \dot{q}_k = \mathbf{z} \dot{q}_{n-1}^* \quad (2-168)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n = {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k {}^n R_k \mathbf{z} \ddot{q}_k = \mathbf{z} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \ddot{q}_k = \mathbf{z} \ddot{q}_{n-1}^* \quad (2-169)$$

由以上两式可得到

$$\mathbf{z}^T [\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \times m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n \times m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn})] = 0 \quad (2-170)$$

$$\mathbf{z}^T [\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_n \times \bar{\mathbf{p}}_n^* + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n \times \bar{\mathbf{p}}_n^*)] = 0 \quad (2-171)$$

代入式(2-157)后知

$$\tau_n = m_n \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{a}}_n \quad (2-172)$$

故立即可知  $m_n \bar{r}_{C_n}$  对  $\tau_n$  无影响, 从而其中 3 个惯性参数都是  $\tau_n$  不可辨识的.

而若关节  $n$  属情况 T4 时, 关节 1 ~ 关节  $n$  均为移动关节, 故由式 (2-151) 和 (2-152) 知这时

$$\tilde{\omega}_n = \tilde{\epsilon}_n = 0$$

代入式 (2-157) 后知仍有式 (2-172) 成立, 故  $m_n \bar{r}_{C_n}$  中 3 个惯性参数都是  $\tau_n$  不可辨识的.

**命题 2-2** 当关节  $n$  是移动关节时, 若

① 令杆  $n$  的  $\tau_n$  不可辨识惯性参数为零.

② 将杆  $n-1$  的惯性参数  $m_{n-1}, m_{n-1} \bar{r}_{C_{n-1}}, \bar{I}_{n-1}$  分别换为  $M_{n-1}, MS_{n-1}, I_{n-1}^*$ , 其中

$$M_{n-1} = m_{n-1}$$

$$MS_{n-1} = \begin{cases} m_{n-1} \bar{r}_{C_{n-1}}, & \text{若关节 } n \text{ 属 T1, T2, T4} \\ m_{n-1} \bar{r}_{C_{n-1}} + {}^{n-1}R_n U_3 MS_n, & \text{若关节 } n \text{ 属 T3} \end{cases}$$

$$I_{n-1}^* = \begin{cases} \bar{I}_{n-1} + {}^{n-1}R_n I_n^* R_{n-1}, & \text{若关节 } n \text{ 属 T1, T2} \\ \bar{I}_{n-1} + {}^{n-1}R_n [U_3 I_n^* U_3 + 2(\tilde{p}_n^* {}^T U_3 MS_n) U_3] {}^n R_{n-1}, & \text{若关节 } n \text{ 属 T3} \\ \bar{I}_{n-1}, & \text{若关节 } n \text{ 属 T4} \end{cases}$$

式中  $M_n \triangleq m_n, MS_n \triangleq m_n \bar{r}_{C_n}, I_n^* \triangleq \bar{I}_n$ ,

$$U_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad U_3 = I - U_3 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

则这样做后对  $\tau$  无影响, 即对机器人模型无影响.

证: 因在命题 2-1 的证明中可看出,  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  惯性参数均对  $\tau_n$  无影响, 故将其令为零后对  $\tau_n$  无影响. 因此只需证明此命题对  $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$  成立即可.

由式 (2-154) 和 (2-155) 知: 任取  $i \in \{1, \dots, n\}$ , 可以将  $\tilde{f}_i$  和  $\tilde{n}_i$  写为

$$\tilde{f}_i = \phi_i(m_i, m_i \bar{r}_{C_i}, \tilde{f}_{i+1}), \quad (\tilde{f}_{n+1} = 0)$$

$$\tilde{n}_i = \psi_i(\bar{I}_i, m_i \bar{r}_{C_i}, \tilde{f}_{i+1}, \tilde{n}_{i+1}), \quad (\tilde{f}_{n+1} = \tilde{n}_{n+1} = 0)$$

若记在  $\tilde{f}_i$  和  $\tilde{n}_i$  中令  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  惯性参数为零后分别为  $f_n^*$  和  $n_n^*$ , 则由式 (2-156) 知: 若可证明

$$\tilde{f}_{n-1} = \phi_{n-1}(M_{n-1}, MS_{n-1}, f_n^*) \quad (2-173)$$

$$\tilde{n}_{n-1} = \psi_{n-1}(I_{n-1}^*, MS_{n-1}, f_n^*, n_n^*) \quad (2-174)$$

或令上两式成立后,  $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$  均不变, 则此命题得证.

以下分 4 种情况证明:

① 若关节  $n$  属情况 T1, 由命题 2-1 知这时  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  惯性参数为  $\tilde{I}_n$ . 又由式(2-154) 和(2-155) 知令  $\tilde{I}_n = 0$  后有

$$\begin{aligned} f_n^* &= m_n \tilde{a}_n + \tilde{\epsilon}_n \times m_n \tilde{r}_{C_n} + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{\omega}_n \times m_n \tilde{r}_{C_n}) \\ n_n^* &= m_n \tilde{r}_{C_n} \times \tilde{a}_n \\ \tilde{f}_n &= f_n^* \end{aligned} \quad (2-175)$$

$$\tilde{n}_n = n_n^* + \tilde{I}_n \tilde{\epsilon}_n + \tilde{\omega}_n \times \tilde{I}_n \tilde{\omega}_n \quad (2-176)$$

因关节  $n$  是移动关节, 由式(2-151) 和(2-152) 知

$${}^{n-1}R_n \tilde{\omega}_n = \tilde{\omega}_{n-1}, \quad {}^{n-1}R_n \tilde{\epsilon}_n = \tilde{\epsilon}_{n-1} \quad (2-177)$$

将式(2-175)~(2-177)代入式(2-155)后知

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{n-1} &= (\tilde{I}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{I}_n {}^nR_n) \tilde{\epsilon}_{n-1} + \tilde{\omega}_{n-1} \times (\tilde{I}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{I}_n {}^nR_n) \tilde{\omega}_{n-1} + \\ &\quad m_{n-1} \tilde{r}_{C_{n-1}} \tilde{a}_{n-1} + {}^{n-1}R_n (p_n^* \times f_n^* + n_n^*) \\ &= \phi_{n-1}(\tilde{I}_{n-1}, MS_{n-1}, f_n^*, n_n^*) \end{aligned}$$

这就证明了式(2-174) 成立, 又由式(2-175) 和(2-154) 显然知式(2-173) 成立, 故在关节  $n$  属情况 T1 时命题成立.

② 若关节  $n$  属情况 T2, 由命题 2-1 知这时令  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  惯性参数为零后有

$$f_n^* = m_n \tilde{a}_n + \tilde{\epsilon}_n \times MS_n^* + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{\omega}_n \times MS_n^*) \quad (2-178)$$

$$n_n^* = MS_n^* \times \tilde{a}_n \quad (2-179)$$

式中

$$MS_n^* \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ MY_n^* \\ MZ_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ my_n - \frac{\mu}{\lambda} mx_n \\ mz_n - \frac{\nu}{\lambda} mx_n \end{bmatrix}, & \text{当 } \lambda \neq 0 \\ \begin{bmatrix} mx_n \\ 0 \\ MZ_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_n \\ 0 \\ mz_n - \frac{\nu}{\mu} my_n \end{bmatrix}, & \text{当 } \lambda = 0 \end{cases} \quad (2-180)$$

且由式(2-162), (2-163) 和(2-167) 可算出

$$\tilde{f}_n = f_n^* \quad (2-181)$$

$$\tilde{n}_n = n_n^* + \tilde{I}_n \tilde{\epsilon}_n + \tilde{\omega}_n \times \tilde{I}_n \tilde{\omega}_n + (m_n \tilde{r}_{C_n} - MS_n^*) \times \tilde{a}_n \quad (2-182)$$

从式(2-154) 和(2-178), (2-181) 立即可知式(2-173) 成立. 又因这时仍有式(2-177) 成立, 故将上两式代入式(2-155) 后知

$$\begin{aligned}
\bar{n}_{n-1} = & (\bar{I}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \bar{I}_n {}^nR_{n-1}) \dot{\bar{\epsilon}}_{n-1} + \\
& \bar{\omega}_{n-1} \times (\bar{I}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \bar{I}_n {}^nR_{n-1}) \omega_{n-1} + \\
& m_{n-1} \bar{r}_{C,n-1} \times \bar{a}_{n-1} + {}^{n-1}R_n (\bar{p}_n^* \times \bar{f}_n^* + \bar{n}_n^*) + \\
& {}^{n-1}R_n [(m_n \bar{r}_{C,n} - MS_n^*) \times \bar{a}_n] \\
= & \phi_{n-1}(\bar{I}_{n-1}, MS_{n-1}, \bar{f}_n^*, \bar{n}_n^*) + \bar{b}_{n-1}
\end{aligned} \quad (2-183)$$

式中

$$\bar{b}_{n-1} \triangleq {}^{n-1}R_n [(m_n \bar{r}_{C,n} - MS_n^*) \times \bar{a}_n] \quad (2-184)$$

因由式(2-155)知:任取  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  均有

$$\begin{aligned}
\bar{n}_i = & \sum_{j=i}^{n-2} {}^iR_j (\bar{I}_j \dot{\bar{\epsilon}}_j + \bar{\omega}_j \times \bar{I}_j \bar{\omega}_j + m_j \bar{r}_{C,j} \times \bar{a}_j) + \\
& \sum_{j=i+1}^{n-1} {}^iR_j (\bar{p}_j^* \times \bar{f}_j^*) + {}^iR_{n-1} \bar{n}_{n-1}
\end{aligned} \quad (2-185)$$

又由式(2-184)和(2-158)式知:对任意  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  均有

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_i z^T {}^iR_{n-1} \bar{b}_{n-1} = & \bar{\sigma}_i ({}^nR_z)^T [(m_n \bar{r}_{C,n} - MS_n^*) \times \bar{a}_n] \\
= & \bar{\sigma}_i ({}^nR_j \cdot z)^T [(m_n \bar{r}_{C,n} - MS_n^*) \times \bar{a}_n] \\
= & \begin{cases} \bar{\sigma}_i [\lambda, \mu, \nu] \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \times \bar{a}_n \right\} \frac{mx_n}{\lambda} = 0, & \text{当 } \lambda \neq 0 \\ \bar{\sigma}_i [\lambda, \mu, \nu] \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \times \bar{a}_n \right\} \frac{my_n}{\mu} = 0, & \text{当 } \lambda = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

故由式(2-156), (2-185)和上式知对任意  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  均有

$$\begin{aligned}
\tau_i = & z^T (\sigma_i \bar{f}_i + \bar{\sigma}_i \bar{n}_i) \\
= & z^T \{ \sigma_i \bar{f}_i + \bar{\sigma}_i [ \sum_{j=i}^{n-2} {}^iR_j (\bar{I}_j \dot{\bar{\epsilon}}_j + \bar{\omega}_j \times \bar{I}_j \bar{\omega}_j + m_j \bar{r}_{C,j} \times \bar{a}_j) + \\
& \sum_{j=i+1}^{n-1} {}^iR_j (\bar{p}_j^* \times \bar{f}_j^*) + {}^iR_{n-1} \phi_{n-1}(\bar{I}_{n-1}, MS_{n-1}, \bar{f}_n^*, \bar{n}_n^*) ] \}
\end{aligned}$$

此式表明:若令式(2-183)中  $\bar{b}_{n-1} \equiv 0$ , 即将  $\bar{n}_{n-1}$  改为式(2-174)后, 对  $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$  均无影响. 这就证明了当关节  $n$  属情况 T2 时命题成立.

③ 当关节  $i$  属情况 T3, 由命题 2-1 知这时  $\bar{I}_n$  和  $m_n \bar{r}_{C,n}$  中惯性参数都是  $\tau_n$  不可辨识时, 令其为零后得到

$$\begin{aligned}
\bar{f}_n^* &= m_n \bar{a}_n \\
\bar{n}_n^* &= 0 \\
\bar{f}_n &= \bar{f}_n^* + \bar{\epsilon}_n \times m_n \bar{r}_{C,n} + \bar{\omega}_n \times (m_n \bar{r}_{C,n} \times \bar{\omega}_n) \\
\bar{n}_n &= \bar{n}_n^* + \bar{I}_n \bar{\epsilon}_n + \bar{\omega}_n \times \bar{I}_n \bar{\omega}_n + m_n \bar{r}_{C,n} \times \bar{a}_n
\end{aligned} \quad (2-186)$$

$$(2-187)$$

因这时仍有式(2-177)成立,且由式(2-153)知

$${}^{n-1}R_n \tilde{a}_n = \tilde{a}_{n-1} + \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times \bar{\mathbf{p}}_n^* + \tilde{\omega}_{n-1} \times (\tilde{\omega}_{n-1} \times \bar{\mathbf{p}}_n^*) + {}^{n-1}R_n \mathbf{z} \tilde{q}_n \quad (2-188)$$

将式(2-177)和(2-186)~(2-188)代入式(2-154)和(2-155)可算出

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_{n-1} = & m_{n-1} \tilde{a}_{n-1} + \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times (m_{n-1} \tilde{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times [\tilde{\omega}_{n-1} \times (m_{n-1} \tilde{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn})] + \\ & {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{f}}_n \end{aligned} \quad (2-189)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}_{n-1} = & (\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{I}}_n {}^nR_n) \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times (\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{I}}_n {}^nR_n) \tilde{\omega}_{n-1} + \\ & (m_{n-1} \tilde{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times \tilde{a}_{n-1} + \\ & {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{p}}_n^* \times \tilde{\mathbf{f}}_n^* + \tilde{\mathbf{n}}_n^*) + \bar{\mathbf{p}}_n^* \times (\tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) + \\ & ({}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times (\tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times \bar{\mathbf{p}}_n^*) + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times [\bar{\mathbf{p}}_n^* \times (\tilde{\omega}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn})] + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times [({}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times (\tilde{\omega}_{n-1} \times \bar{\mathbf{p}}_n^*)] + \\ & {}^{n-1}R_n (m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times \mathbf{z} \tilde{q}_n) \end{aligned} \quad (2-190)$$

利用式(2-169)可算出

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} &= {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{e}}_n \times m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) = {}^{n-1}R_n (\mathbf{z} \times m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \tilde{q}_{n-1}^* \\ &= {}^{n-1}R_n (\mathbf{z} \times U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \tilde{q}_{n-1}^* = {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{e}}_n \times U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \\ &= \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times \bar{\mathbf{p}}_n^* &= {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{e}}_n \times \tilde{\mathbf{p}}_n^*) = {}^{n-1}R_n (\mathbf{z} \times U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^*) \tilde{q}_{n-1}^* \\ &= \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^* \end{aligned}$$

用同样方法由式(2-168)还可算出

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} &= \tilde{\omega}_{n-1} \times ({}^{n-1}R_n U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \\ \tilde{\omega}_{n-1} \times \tilde{\mathbf{p}}_n^* &= \tilde{\omega}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^* \end{aligned}$$

将以上4式代入式(2-154)和(2-155)后可得到式(2-173),且有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}_{n-1} = & (\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{I}}_n {}^nR_n) \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times (\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{I}}_n {}^nR_n) \tilde{\omega}_{n-1} + \\ & (m_{n-1} \tilde{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times \tilde{a}_{n-1} + \\ & {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{p}}_n^* \times \tilde{\mathbf{f}}_n^* + \tilde{\mathbf{n}}_n^*) + \\ & {}^{n-1}R_n \{ \tilde{\mathbf{p}}_n^* \times [({}^nR_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}) \times U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}] \} + \\ & {}^{n-1}R_n \{ m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times [({}^nR_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}) \times U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^*] \} + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n \{ \tilde{\mathbf{p}}_n^* \times [({}^nR_{n-1} \tilde{\omega}_{n-1}) \times U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}] \} + \\ & \tilde{\omega}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n \{ m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times [({}^nR_{n-1} \tilde{\omega}_{n-1}) \times U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^*] \} + \\ & {}^{n-1}R_n (m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times \mathbf{z} \tilde{q}_n) \end{aligned} \quad (2-191)$$

很容易验证:对任一3阶方阵 $A$ ,均有

$$A {}^n R_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} = A U_3 {}^n R_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}, \quad A {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} = A U_3 {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1}$$

利用上式及式(2-130)可将式(2-191)化简为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}_{n-1} &= (\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{I}}_n U_3 {}^n R_{n-1}) \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ &\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} \times (\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n \tilde{\mathbf{I}}_n U_3 {}^n R_{n-1}) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} + \\ &\quad (m_{n-1} \tilde{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times \tilde{\mathbf{a}}_{n-1} + \\ &\quad {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{p}}_n^* \times \mathbf{f}_n^* + \mathbf{n}_n^*) + \\ &\quad {}^{n-1}R_n \{2(\tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \mathbf{I}_3 + U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} - \\ &\quad U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^* m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}^\top\} {}^n R_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ &\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n \{2(\tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \mathbf{I}_3 - U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} - \\ &\quad U_3 \tilde{\mathbf{p}}_n^* m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}^\top\} {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n (m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times z \ddot{\mathbf{q}}_n) \\ &= \{\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n [U_3 \tilde{\mathbf{I}}_n U_3 + 2(\tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) U_3] {}^n R_{n-1}\} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ &\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} \times \{\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n [U_3 \tilde{\mathbf{I}}_n U_3 + \\ &\quad 2(\tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) U_3] {}^n R_{n-1}\} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} + \\ &\quad (m_{n-1} \tilde{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times \tilde{\mathbf{a}}_{n-1} + \\ &\quad {}^{n-1}R_n (\tilde{\mathbf{p}}_n^* \times \mathbf{f}_n^* + \mathbf{n}_n^*) + \mathbf{b}_{n-1} \\ &= \boldsymbol{\phi}_{n-1}(\mathbf{I}_{n-1}^*, \mathbf{M} \mathbf{S}_{n-1}, \mathbf{f}_n^*, \mathbf{n}_n^*) + \mathbf{b}_{n-1} \end{aligned} \quad (2-192)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{n-1} &\triangleq {}^{n-1}R_n U_3 [\tilde{\mathbf{I}}_n - m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} - \tilde{\mathbf{p}}_n^* m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}^\top] {}^n R_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ &\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} \times {}^{n-1}R_n U_3 [\tilde{\mathbf{I}}_n - m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} - \tilde{\mathbf{p}}_n^* m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}^\top] {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} + \\ &\quad ({}^{n-1}R_n U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times \tilde{\mathbf{a}}_{n-1} + {}^{n-1}R_n (m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times z \ddot{\mathbf{q}}_n) \end{aligned} \quad (2-193)$$

因由式(2-168)和(2-169)知对任意 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 均成立

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i \mathbf{z}^\top {}^n R_{n-1} \mathbf{b}_{n-1} &= \bar{\sigma}_i \mathbf{z}^\top \{U_3 [\tilde{\mathbf{I}}_n - m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} - \tilde{\mathbf{p}}_n^* m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}^\top] {}^n R_{n-1} \tilde{\mathbf{e}}_{n-1} + \\ &\quad \mathbf{z} (\sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_k \dot{\mathbf{q}}_k) \times U_3 [\tilde{\mathbf{I}}_n - m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \tilde{\mathbf{p}}_n^{*\top} - \tilde{\mathbf{p}}_n^* m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}^\top] {}^n R_{n-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} + \\ &\quad (U_3 m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}) \times \tilde{\mathbf{a}}_{n-1} + m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn} \times z \ddot{\mathbf{q}}_n\} = 0 \end{aligned}$$

故与情况T2中同理可知,这时若令式(2-192)中 $\mathbf{b}_{n-1} \equiv 0$ ,即令 $\tilde{\mathbf{n}}_{n-1}$ 满足式(2-174)后,对 $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$ 均无影响,这就证明了当关节 $n$ 属情况T3时命题成立。

④若关节 $n$ 属情况T4,由命题2-1知这时 $\tilde{\mathbf{I}}_n$ 和 $m_n \tilde{\mathbf{r}}_{Cn}$ 中惯性参数都是 $\tau_n$ 不可辨识的,令其为零后得到

$$\mathbf{f}_n^* = m_n \tilde{\mathbf{a}}_n$$

因这时关节1~关节 $n$ 均为移动关节,故由式(2-151)和(2-152)知

$$\tilde{\omega}_n = \tilde{\epsilon}_n = 0$$

将以上两式代入式(2-154)后得到

$$\tilde{f}_n = f_n^*$$

从而立即可知式(2-173)成立,考虑到这时

$$\tau_i = z^T \tilde{f}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

后可知当关节  $n$  属情况 T4 时,此命题也是成立的.

对于转动关节,有以下命题:

**命题 2-3** 若关节  $n$  是转动关节,则  $m_n, mz_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的,  $zz_n$  是  $\tau_n$  可辨识的,而对于杆  $n$  的其余惯性参数有:

① 若关节  $n$  属情况 R1, 则  $yy_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的, 而  $XX_n^* = xx_n - yy_n, xy_n, xz_n, yz_n, mx_n, my_n$  都是  $\tau_n$  可辨识的.

② 若关节  $n$  属情况 R2, 则  $xx_n, xy_n, xz_n, yy_n, yz_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的, 而  $mx_n, my_n$  是  $\tau_n$  可辨识的.

③ 若关节  $n$  属情况 R3, 则  $xx_n, xy_n, xz_n, yy_n, yz_n, mx_n, my_n$  都是  $\tau_n$  不可辨识的.

证:若记

$$\tilde{\omega}_n = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \tilde{\epsilon}_n = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_n = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

则由式(2-155)和(2-156)可算出

$$\begin{aligned} \tau_n = & -\omega_x \omega_y (xx_n - yy_n) + (\omega_x - \omega_y) xy_n + (\epsilon_x - \omega_y \omega_z) xz_n + \\ & (\epsilon_y + \omega_x \omega_z) yz_n + \epsilon_z zz_n - a_y mx_n + a_x my_n \end{aligned} \quad (2-194)$$

因  $m_n$  和  $mz_n$  不出现在上式中,故它们都是  $\tau_n$  不可辨识的. 又由式(2-151) ~ (2-153) 知  $\epsilon_z$  是  $\dot{q}_n$  的函数, 而  $\tilde{\epsilon}_n$  和  $\tilde{a}_n$  的前两个分量及  $\tilde{\omega}_n$  都不是  $\dot{q}_n$  的函数, 故由上式立即可知  $zz_n$  是  $\tau_n$  可辨识的.

以下再分别研究杆  $n$  的其余惯性参数.

① 若关节  $n$  属 R1, 由定义知这时存在转动关节  $j^*$  ( $j^* \in \{1, \dots, n-1\}$ ), 其轴向上单位矢量  $z_{j^*}$  不平行于关节  $n$  轴向上单位矢量  $z_n$ , 可以证明:通过关节  $j^*$ , 关节  $n$  和虚拟的关节 0 的运动, 可利用  $\tau_n, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}$  辨识出  $XX_n^* = xx_n - yy_n, xy_n, xz_n, yz_n, mx_n, my_n$  (习题 2-23). 因  $xx_n$  和  $yy_n$  不是利用  $\tau_n$  和  $\dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}$  单独可辨识的, 而只能辨识出其组合  $xx_n - yy_n$ , 由式(2-194)知:可以认为辨识出的  $xx_n$  的值为  $XX_n^* = xx_n - yy_n$ , 而  $yy_n$  是  $\tau_n$  不可辨识的.

② 若关节  $n$  属情况 R2, 由定义知这时所有的转动关节均有相同的轴



向, 即有

$$\sigma_i^{-1} R_i z = \bar{\sigma}_i z, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

将上式代入式(2-151)后知

$$\bar{\omega}_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1} R_i z \dot{q}_i = z \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_i \dot{q}_i = z \dot{q}_n^* \quad (2-195)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_n = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_n = z \ddot{q}_n^* \quad (2-196)$$

再代入式(2-194)知这时

$$\tau_n = \ddot{q}_n^* z z_n + a_x m x_n + a_y m y_n \quad (2-197)$$

由此式知  $x x_n, x y_n, x z_n, y y_n, y z_n$  对  $\tau_n$  无影响, 故它们都是  $\tau_n$  不可辨识的。

因由式(2-153)知  $\bar{\mathbf{a}}_n$  的前两个分量  $a_x$  和  $a_y$  都不是  $\dot{q}_n$  和  $\ddot{q}_n$  的函数, 而是  $q$  和  $\dot{q}_j (j \in \dot{S}_n^R \cap \bar{S}_n^I)$  的函数, 故可通过关节  $j$  的运动用上式辨识出  $m x_n$  和  $m y_n$  (习题 2-24)。

③ 若关节  $n$  属情况 R3, 由定义知这时关节  $0 \sim$  关节  $n$  的轴向均平行, 且其中转动关节的轴均重合, 故  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$  均有

$${}^0 R_i z = z, \quad \bar{\sigma}_i^{-1} (\vec{O_i O_n}) = \bar{\sigma}_i [0, 0, *]^T \quad (2-198)$$

代入式(2-151) ~ (2-153) 可知有式(2-195)和(2-196)成立, 且  $\bar{\mathbf{a}}_n$  的前两个分量  $a_x = a_y = 0$  (习题 2-25), 再代入式(2-194)知

$$\tau_n = \ddot{q}_n^* z z_n$$

由此式知  $x x_n, x y_n, x z_n, y y_n, y z_n, m x_n, m y_n$  都是  $\tau_n$  不可辨识的。

**命题 2-4** 当关节  $n$  是转动关节时, 若

① 令杆  $n$  的  $\tau_n$  不可辨识惯性参数均为零。

② 将杆  $n-1$  的惯性参数  $m_{n-1}, m_{n-1} \bar{\mathbf{r}}_{C,n-1}, \bar{\mathbf{I}}_{n-1}$  分别换为  $M_{n-1}, MS_{n-1}, J_{n-1}$ , 其中

$$M_{n-1} = m_{n-1} + M_n$$

$$MS_{n-1} = \begin{cases} m_{n-1} \bar{\mathbf{r}}_{C,n-1} + {}^{n-1}R_n U_3 MS_n + M_n \bar{\mathbf{p}}_n^*, & \text{若关节 } n \text{ 属 R1} \\ m_{n-1} \bar{\mathbf{r}}_{C,n-1} + M_n \bar{\mathbf{p}}_n^*, & \text{若关节 } n \text{ 属 R2} \\ m_{n-1} \bar{\mathbf{r}}_{C,n-1}, & \text{若关节 } n \text{ 属 R3} \end{cases}$$

$$J_{n-1} = \begin{cases} \bar{\mathbf{I}}_{n-1} + Y Y_n^{-1} {}^{n-1}R_n U_3 {}^{n-1}R_{n-1} + 2[(\bar{\mathbf{p}}_n^*)^T {}^{n-1}R_n U_3 MS_n] \mathbf{I} - \\ {}^{n-1}R_n U_3 MS_n (\bar{\mathbf{p}}_n^*)^T - \bar{\mathbf{p}}_n^* ({}^{n-1}R_n U_3 MS_n)^T + \\ M_n [(\bar{\mathbf{p}}_n^*)^T \bar{\mathbf{p}}_n^* \mathbf{I} - \bar{\mathbf{p}}_n^* (\bar{\mathbf{p}}_n^*)^T], & \text{若关节 } n \text{ 属 R1} \\ \bar{\mathbf{I}}_{n-1} + M_n [(\bar{\mathbf{p}}_n^*)^T \bar{\mathbf{p}}_n^* \mathbf{I} - \bar{\mathbf{p}}_n^* (\bar{\mathbf{p}}_n^*)^T], & \text{若关节 } n \text{ 属 R2} \\ \bar{\mathbf{I}}_{n-1}, & \text{若关节 } n \text{ 属 R3} \end{cases}$$

式中  $I$  为 3 阶单位矩阵,

$$M_n = m_n, \quad MS_n = m_n \tilde{r}_{C_n}$$

$$J_n = \begin{bmatrix} XX_n & XY_n & XZ_n \\ XY_n & YY_n & YZ_n \\ XZ_n & YZ_n & ZZ_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx_n & xy_n & xz_n \\ xy_n & yy_n & yz_n \\ xz_n & yz_n & zz_n \end{bmatrix} = \tilde{I}_n$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_3 = I - U_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

则这样做后对  $\tau$  无影响, 即对机器人动力学模型无影响.

证: 与命题 2-2 的证明同理可知: 若记在  $\tilde{f}_n$  和  $\tilde{n}_n$  中令  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  参数均为零后分别为  $f_n^*$  和  $n_n^*$ , 如果能证明 (2-173) 和 (2-174) 两式成立, 或令此两式成立后,  $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$  均不变, 则此命题成立.

以下分别 3 种情况讨论:

① 若关节  $n$  属情况 R1, 这时若令  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  惯性参数均为零后得到

$$f_n^* = \tilde{\mathbf{e}}_n \times (\underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n}) + \tilde{\omega}_n \times [\tilde{\omega}_n \times (\underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n})]$$

$$n_n^* = (\tilde{I}_n - YY_n \underline{U}_3) \tilde{\mathbf{e}}_n + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{I}_n - YY_n \underline{U}_3) \tilde{\omega}_n +$$

$$(\underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n}) \times \tilde{\mathbf{a}}_n$$

利用式 (2-151)~(2-155) 可证明 (习题 2-26)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n-1} &= \varphi_{n-1}(m_{n-1} + m_n, m_{n-1} \tilde{r}_{C_{n-1}} + {}^n {}^1 R_n \underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n} + m_n \bar{p}_n^*, f_n^*) \\ &= \varphi_{n-1}(M_{n-1}, MS_{n-1}, f_n^*) \quad (2-199) \\ \tilde{n}_{n-1} &= \phi_{n-1}[\tilde{I}_{n-1} + YY_n {}^{n-1} R_n \underline{U}_3 {}^n {}^1 R_{n-1} + 2[(\bar{p}_n^*)^T {}^{n-1} R_n \underline{U}_3 MS_n]I - \\ &\quad {}^{n-1} R_n \underline{U}_3 MS_n (\bar{p}_n^*)^T - \bar{p}_n^* ({}^{n-1} R_n \underline{U}_3 MS_n)^T + \\ &\quad M_n [(\bar{p}_n^*)^T \bar{p}_n^* I - \bar{p}_n^* (\bar{p}_n^*)^T], \\ &\quad m_{n-1} \tilde{r}_{C_{n-1}} + {}^n {}^1 R_n \underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n} + m_n \bar{p}_n^*, f_n^*, n_n^*] \\ &= \phi_{n-1}(J_{n-1}, MS_{n-1}, f_n^*, n_n^*) \quad (2-200) \end{aligned}$$

这表明 (2-173) 和 (2-174) 两式成立, 结论得证.

② 若关节  $n$  属情况 R2, 这时若令  $\tau_n$  不可辨识的杆  $n$  惯性参数均为零后得到

$$f_n^* = \tilde{\mathbf{e}}_n \times \underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n} + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{\omega}_n \times \underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n})$$

$$n_n^* = zz_n \underline{U}_3 \tilde{\mathbf{e}}_n + \tilde{\omega}_n \times (zz_n \underline{U}_3 \tilde{\omega}_n) + \underline{U}_3 m_n \tilde{r}_{C_n} \times \tilde{\mathbf{a}}_n$$

利用式 (2-151)~(2-155), (2-195) 和 (2-196) 可证明 (习题 2-27):

$$\tilde{f}_{n-1} = \varphi_{n-1}(m_{n-1} + m_n, m_{n-1} \tilde{r}_{C_{n-1}} + m_n \bar{p}_n^*, f_n^*)$$

$$= \phi_{n-1}(M_{n-1}, MS_{n-1}, f_n^*) \quad (2-201)$$

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{n-1} &= \phi_{n-1}(\tilde{I}_{n-1} + m_n[(\bar{p}_n^*)^T \bar{p}_n^* I - \bar{p}_n^* (\bar{p}_n^*)^T], m_{n-1} \tilde{r}_{C,n-1} + \\ &\quad m_n \bar{p}_n^*, f_n^*, n_n^*) + {}^{n-1}R_n[(\tilde{I}_n - zz_n U_3) \tilde{\epsilon}_n + \\ &\quad \tilde{\omega}_n \times (\tilde{I}_n - zz_n U_3) \tilde{\omega}_n + U_3 \times \tilde{a}_n] \\ &\triangleq \phi_{n-1}(J_{n-1}, MS_{n-1}, f_n^*, n_n^*) + d_{n-1} \end{aligned} \quad (2-202)$$

式中

$$d_{n-1} = {}^{n-1}R_n[(\tilde{I}_n - zz_n U_3) \tilde{\epsilon}_n + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{I}_n - zz_n U_3) \tilde{\omega}_n + U_3 \times \tilde{a}_n]$$

且令式(2-202)为式(2-174)后,对 $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$ 均无影响,故结论得证。

③ 若关节 $n$ 属情况R3,这时若令杆 $n$ 的 $\tau_n$ 不可辨识惯性参数均为零后得到

$$f_n^* = 0, \quad n_n^* = zz_n U_3 \tilde{\epsilon}_n + \tilde{\omega}_n \times (zz_n U_3 \tilde{\omega}_n)$$

利用式(2-151)~(2-155)和(2-198)可证明(习题2-28)

$$\tilde{f}_{n-1} = \phi_{n-1}(m_{n-1} + m_n, m_{n-1} \tilde{r}_{C,n-1}, f_n^*) + \tilde{e}_{n-1} \quad (2-203)$$

$$\tilde{n}_{n-1} = \phi_{n-1}(\tilde{I}_{n-1}, m_{n-1} \tilde{r}_{C,n-1}, f_n^*, n_n^*) + e_{n-1} \quad (2-204)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{n-1} &= {}^{n-1}R_n[\tilde{\epsilon}_n \times m_n \tilde{r}_{Cn} + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{\omega}_n \times m_n \tilde{r}_{Cn})] \\ e_{n-1} &= {}^{n-1}R_n[(\tilde{I}_n - zz_n U_3) \tilde{\epsilon}_n + \tilde{\omega}_n \times (\tilde{I}_n - zz_n U_3) \tilde{\omega}_n + \\ &\quad m_n \tilde{r}_{Cn} \times \tilde{a}_n] \end{aligned}$$

且令 $\tilde{e}_{n-1} = e_{n-1} \equiv 0$ 后,即令式(2-203)和(2-204)为式(2-173)和(2-174)后,对 $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$ 无影响,故结论得证。

很容易看,以上命题2-1和2-3给出了 $\tau_n$ 可辨识的杆 $n$ 惯性参数,而命题2-2和2-4揭示了杆 $n$ 的可用惯性参数重组法消去的惯性参数,并且具体给出了将杆 $n$ 惯性参数重组进杆 $n-1$ 惯性参数中的公式。由于杆 $i (i < n)$ 的惯性参数变化不会影响到 $\tau_{i+1}, \dots, \tau_n$ ,故推导以上命题2-1~2-4的方法可递推地对杆 $n-1, \dots$ ,杆1使用,由此得出机器人所有可用惯性参数重组法消去的惯性参数和相应的参数重组公式。考虑到除了这些可消去的惯性参数外,其余惯性参数都是可用 $\tau, q, \dot{q}, \ddot{q}$ 辨识出的惯性参数,从而由最小惯性参数的可辨识性立即知这些惯性参数即为机器人的一组最小惯性参数。若记重组后的杆 $i$ 惯性参数为

$$J_i = \begin{bmatrix} XX_i & XY_i & XZ_i \\ XY_i & YY_i & YZ_i \\ XZ_i & YZ_i & ZZ_i \end{bmatrix}, \quad MS_i = \begin{bmatrix} MX_i \\ MY_i \\ MZ_i \end{bmatrix}, \quad M_i$$

且称这组辨识出的机器人最小惯性参数中杆  $i$  的那些惯性参数为杆  $i$  的最小惯性参数,则可得到以下定理.

**定理 2-1** 若一个  $n$  自由度机器人杆坐标系为用修改的 D-H 参数建立的驱动轴坐标系,且其轴向由前述所定义,则可用以下各式按  $i = n, \dots, 1$  的顺序递推地确定其一组最小惯性参数(初始值  $\{XX_n, XY_n, XZ_n, YY_n, YZ_n, ZZ_n, MX_n, MY_n, MZ_n, M_n\} \triangleq \{xx_n, xy_n, xz_n, yy_n, yz_n, zz_n, mx_n, my_n, mz_n, m_n\}; \lambda, \mu, \nu$  由式(2-150)定义).

① 杆  $i$  的最小惯性参数为

$$\begin{cases} MX_i, MY_i, MZ_i, M_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T1} \\ MY_i^* = MY_i - \frac{\mu}{\lambda} MX_i, MZ_i^* = MZ_i - \frac{\nu}{\lambda} MX_i, M_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T2 且 } \lambda \neq 0 \\ MX_i, MZ_i^* = MZ_i - \frac{\nu}{\mu} MY_i, M_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T2 且 } \lambda = 0 \\ M_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T3, T4} \\ XX_i^* = XX_i - YY_i, XY_i, XZ_i, YZ_i, ZZ_i, MX_i, MY_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R1} \\ ZZ_i, MX_i, MY_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R2} \\ ZZ_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R3} \end{cases}$$

② 重组后的杆  $i-1$  惯性参数为

$$\begin{aligned} M_{i-1} &= \begin{cases} m_{i-1}, & \text{若关节 } i \text{ 为移动关节} \\ m_{i-1} + M_i, & \text{若关节 } i \text{ 为转动关节} \end{cases} \\ MS_{i-1} &= \begin{cases} m_{i-1} \bar{r}_{i-1,C}, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T1, T2, T4, R3} \\ m_{i-1} \bar{r}_{i-1,C} + {}^{i-1}R_3 U_3 MS_i, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T3} \\ m_{i-1} \bar{r}_{i-1,C} + {}^{i-1}R_3 U_3 MS_i + M_i \bar{p}_i^*, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R1} \\ m_{i-1} \bar{r}_{i-1,C} + M_i \bar{p}_i^*, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R2} \end{cases} \\ J_{i-1} &= \begin{cases} \bar{I}_{i-1} + {}^{i-1}R_i J_i {}^iR_{i-1}, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T1, T2} \\ \bar{I}_{i-1} + {}^{i-1}R_i \{U_3 J_i U_3 + 2[(\bar{p}_i^*)^T U_3 MS_i] U_3\} {}^iR_{i-1}, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T3} \\ \bar{I}_{i-1}, & \text{若关节 } i \text{ 属情况 T4, R3} \\ \bar{I}_{i-1} + YY_i {}^{i-1}R_3 U_3 {}^iR_{i-1} + 2[(\bar{p}_i^*)^T {}^{i-1}R_3 U_3 MS_i] I - \\ & {}^{i-1}R_3 U_3 MS_i (\bar{p}_i^*)^T - \bar{p}_i^* ({}^{i-1}R_3 U_3 MS_i)^T + \\ & M_i [(\bar{p}_i^*)^T \bar{p}_i^* I - \bar{p}_i^* (\bar{p}_i^*)^T], & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R1} \\ \bar{I}_{i-1} + M_i [(\bar{p}_i^*)^T \bar{p}_i^* I - \bar{p}_i^* (\bar{p}_i^*)^T], & \text{若关节 } i \text{ 属情况 R2} \end{cases} \end{aligned}$$

为了更便于应用以上定理,可具体计算出其中重组后惯性参数的表达式,将此定理写为以下等价的形式.

**定理 2-2** 若由  $n$  个刚性杆串联而成的机器人是按本节所述方法用修改的 D-H 参数设置杆坐标系,则可按  $i$  从  $n$  到 1 的顺序用以下公式递推地确定其一组最小惯性参数(初始值  $\{XX_n, XY_n, XZ_n, YY_n, YZ_n, ZZ_n, MX_n, MY_n, MZ_n, M_n\} = \{xx_n, xy_n, xz_n, yy_n, yz_n, zz_n, mx_n, my_n, mz_n, m_n\}$ ).

① 若关节  $i$  属情况 T1,则杆  $i$  的最小惯性参数为  $MX_i, MY_i, MZ_i, M_i$ ;经重组后杆  $i-1$  的惯性参数

$$XX_{i-1} = xx_{i-1} + c_i^2 XX_i - 2cs_i XY_i + s_i^2 YY_i,$$

$$XY_{i-1} = xy_{i-1} + ca_i cs_i XX_i + ca_i (c_i^2 - s_i^2) XY_i - sa_i c_i XZ_i - ca_i cs_i YY_i + sa_i s_i YZ_i,$$

$$XZ_{i-1} = xz_{i-1} + sa_i cs_i XX_i + sa_i (c_i^2 - s_i^2) XY_i + ca_i c_i XZ_i - sa_i cs_i YY_i - ca_i s_i YZ_i,$$

$$YY_{i-1} = yy_{i-1} + c_i^2 a_i^2 XX_i + 2c_i^2 a_i cs_i XY_i - 2cs_i a_i s_i XZ_i + c_i^2 a_i c_i^2 YY_i - 2cs_i a_i c_i YZ_i + s_i^2 a_i^2 ZZ_i,$$

$$YZ_{i-1} = yz_{i-1} + cs_i a_i s_i^2 XX_i + 2cs_i a_i cs_i XY_i + (c_i^2 a_i - s_i^2 a_i) s_i XZ_i + cs_i a_i c_i^2 YY_i + (c_i^2 a_i - s_i^2 a_i) c_i YZ_i - cs_i a_i^2 ZZ_i,$$

$$ZZ_{i-1} = zz_{i-1} + s_i^2 a_i^2 s_i^2 XX_i + 2s_i^2 a_i cs_i XY_i + 2cs_i a_i s_i XZ_i + s_i^2 a_i c_i^2 YY_i + 2cs_i a_i c_i YZ_i + c_i^2 a_i^2 ZZ_i,$$

$$MX_{i-1} = mx_{i-1}, \quad MY_{i-1} = my_{i-1}, \quad MZ_{i-1} = mz_{i-1}$$

$$M_{i-1} = m_{i-1}$$

式中  $c_i^2 a_i \triangleq \cos^2 \alpha_i, s_i^2 a_i \triangleq \sin^2 \alpha_i, cs_i a_i \triangleq \cos \alpha_i \sin \alpha_i$ .

② 若关节  $i$  属情况 T2,记  $j^* \triangleq \max\{j | j \in \bar{S}_i^k\}$ ,  $R_{j^*} z \triangleq [\lambda, \mu, \nu]^T$ ,则杆  $i$  的最小惯性参数为

$$\begin{cases} MY_i^* = MY_i - \frac{\mu}{\lambda} MX_i, MZ_i^* = MZ_i - \frac{\nu}{\lambda} MX_i, M_i, & \text{当 } \lambda \neq 0 \\ MX_i, MZ_i^* = MZ_i - \frac{\nu}{\mu} MY_i, M_i, & \text{当 } \lambda = 0 \end{cases}$$

经重组后杆  $i-1$  的惯性参数与情况 T1 相同.

③ 若关节  $i$  属情况 T3,则杆  $i$  的最小惯性参数为  $M_i$ ;经重组后杆  $i-1$  的惯性参数

$$XX_{i-1} = xx_{i-1}, \quad XY_{i-1} = xy_{i-1}, \quad XZ_{i-1} = xz_{i-1}$$

$$YY_{i-1} = yy_{i-1} + s_i^2 a_i (ZZ_i + 2a_i c_i MX_i - 2a_i s_i MY_i)$$

$$YZ_{i-1} = yz_{i-1} - cs_i a_i (ZZ_i + 2a_i c_i MX_i - 2a_i s_i MY_i)$$

$$ZZ_{i-1} = zz_{i-1} + c^2\alpha_i(ZZ_i + 2a_i c_i MX_i - 2a_i s_i MY_i)$$

$$MX_{i-1} = mx_{i-1} + c_i MX_i - s_i MY_i$$

$$MY_{i-1} = my_{i-1} + c_i s_i MX_i - c_i MY_i$$

$$MZ_{i-1} = mz_{i-1} + s_i \alpha_i (s_i MX_i + c_i MY_i)$$

$$M_{i-1} = m_{i-1}$$

④ 若关节  $i$  属情况 T4, 则杆  $i$  的最小惯性参数为  $M_i$ ; 经重组后杆  $i-1$  的惯性参数

$$XX_{i-1} = xx_{i-1}, \quad XY_{i-1} = xy_{i-1}, \quad XZ_{i-1} = xz_{i-1}$$

$$YY_{i-1} = yy_{i-1}, \quad YZ_{i-1} = yz_{i-1}, \quad ZZ_{i-1} = zz_{i-1}$$

$$MX_{i-1} = mx_{i-1}, \quad MY_{i-1} = my_{i-1}, \quad MZ_{i-1} = mz_{i-1}$$

$$M_{i-1} = m_{i-1}$$

⑤ 若关节  $i$  属情况 R1, 则杆  $i$  的最小惯性参数为  $XX_i^* = XX_i - YY_i$ ,  $XY_i$ ,  $XZ_i$ ,  $YZ_i$ ,  $ZZ_i$ ,  $MX_i$ ,  $MY_i$ ; 经重组后杆  $i-1$  的惯性参数

$$XX_{i-1} = xx_{i-1} + YY_i + 2d_i MZ_i + d_i^2 M_i$$

$$XY_{i-1} = xy_{i-1} + a_i s_i \alpha_i (MZ_i + d_i M_i)$$

$$XZ_{i-1} = xz_{i-1} - a_i c_i \alpha_i (MZ_i + d_i M_i)$$

$$YY_{i-1} = yy_{i-1} + c_i^2 \alpha_i YY_i + 2d_i c_i^2 \alpha_i MZ_i + (d_i^2 c_i^2 \alpha_i + a_i^2) M_i$$

$$YZ_{i-1} = yz_{i-1} + c_i s_i \alpha_i (YY_i + 2d_i MZ_i + d_i^2 M_i)$$

$$ZZ_{i-1} = zz_{i-1} + s_i^2 \alpha_i YY_i + 2d_i s_i^2 \alpha_i MZ_i + (d_i^2 s_i^2 \alpha_i + a_i^2) M_i$$

$$MX_{i-1} = mx_{i-1} + a_i M_i$$

$$MY_{i-1} = my_{i-1} - s_i \alpha_i (MZ_i + d_i M_i)$$

$$MZ_{i-1} = mz_{i-1} + c_i \alpha_i (MZ_i + d_i M_i)$$

$$M_{i-1} = m_{i-1} + M_i$$

⑥ 若关节  $i$  属情况 R2, 则杆  $i$  的最小惯性参数为  $ZZ_i$ ,  $MX_i$ ,  $MY_i$ ; 经重组后杆  $i-1$  惯性参数

$$XX_{i-1} = xx_{i-1} + d_i^2 M_i$$

$$XY_{i-1} = xy_{i-1} + a_i d_i s_i \alpha_i M_i$$

$$XZ_{i-1} = xz_{i-1} - a_i d_i c_i \alpha_i M_i$$

$$YY_{i-1} = yy_{i-1} + (a_i^2 + d_i^2 c_i^2 \alpha_i) M_i$$

$$YZ_{i-1} = yz_{i-1} + d_i^2 c_i s_i \alpha_i M_i$$

$$ZZ_{i-1} = zz_{i-1} + (a_i^2 + d_i^2 s_i^2 \alpha_i) M_i$$

$$MX_{i-1} = mx_{i-1} + a_i M_i$$

$$MY_{i-1} = my_{i-1} - d_i s_i \alpha_i M_i$$

$$MZ_{i-1} = mz_{i-1} + d_i c_i \alpha_i M_i$$

$$M_{i-1} = m_{i-1} + M_i$$

⑦ 若关节  $i$  属情况 R3, 则杆  $i$  的最小惯性参数为  $ZZ_i$ ; 经重组后杆  $i-1$  惯性参数

$$\begin{aligned} XX_{i-1} &= xx_{i-1}, & XY_{i-1} &= xy_{i-1}, & XZ_{i-1} &= xz_{i-1} \\ YY_{i-1} &= yy_{i-1}, & YZ_{i-1} &= yz_{i-1}, & ZZ_{i-1} &= zz_{i-1} \\ MX_{i-1} &= mx_{i-1}, & MY_{i-1} &= my_{i-1}, & MZ_{i-1} &= mz_{i-1} \\ M_{i-1} &= m_{i-1} + M_i \end{aligned}$$

由上述两定理立即可得出以下推论。

**推论 2-1** 若由  $n$  个刚性杆串联构成的机器人是按本节方法修改的 D-H 参数设置杆坐标系, 则其最小惯性参数的个数

$$n_{\min} = 4n_{T1} + 3n_{T2} + n_{T3} + n_{T4} + 7n_{R1} + 3n_{R2} + n_{R3}$$

式中  $n_{T1}, \dots, n_{R3}$  分别为满足 7 种情况的关节个数。

## 2. 用 D-H 参数直接确定机器人的最小惯性参数

因定理 2-1 和 2-2 只适用于用修改的 D-H 方法设置的杆坐标系, 不能用于用 D-H 方法设置杆坐标系的情况, Niemyer 等人用 Spatial Notation 方法<sup>[17]</sup>推导出用 D-H 参数直接确定机器人一部分最小惯性参数的递推公式<sup>[28]</sup>。由于所用力学工具超出了本书范围, 故只将结果介绍如下, 对证明有兴趣的读者可参阅有关文献。

**定理 2-3**<sup>[28]</sup> 若由  $n$  个刚性杆串接而成的机器人是用 D-H 参数设置杆坐标系, 则可按  $i$  从 1 到  $n-1$  的顺序用以下公式递推地消去其中一些惯性参数 (初始值  $\{XX_1, XY_1, XZ_1, YY_1, YZ_1, ZZ_1, MX_1, MY_1, MZ_1, M_1\} = \{xx_1, xy_1, xz_1, yy_1, yz_1, zz_1, mx_1, my_1, mz_1, m_1\}$ ):

① 若关节  $i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) 是转动关节, 则杆  $i-1$  的惯性参数  $YY_{i-1}, MZ_{i-1}, M_{i-1}$  可用将其重组进  $XX_{i-1}$  和杆  $i$  惯性参数的方法消去, 其重组关系为

$$\begin{aligned} XX_{i-1} &= XX_i - YY_{i-1} \\ XX_i &= xx_i + YY_{i-1} - 2d_i MZ_{i-1} + d_i^2 M_{i-1} \\ XY_i &= xy_i + a_i s \alpha_i MZ_{i-1} - a_i d_i s \alpha_i M_{i-1} \\ XZ_i &= xz_i + a_i c \alpha_i MZ_{i-1} - a_i d_i c \alpha_i M_{i-1} \\ YY_i &= yy_i + c^2 \alpha_i YY_{i-1} - 2d_i c^2 \alpha_i MZ_{i-1} + (d_i^2 c^2 \alpha_i + a_i^2) M_{i-1} \\ YZ_i &= yz_i - c s \alpha_i YY_{i-1} + 2d_i c s \alpha_i MZ_{i-1} - d_i^2 c s \alpha_i M_{i-1} \\ ZZ_i &= zz_i + s^2 \alpha_i YY_{i-1} - 2d_i s^2 \alpha_i MZ_{i-1} + (d_i^2 s^2 \alpha_i + a_i^2) M_{i-1} \\ MX_i &= mx_i - a_i M_{i-1} \\ MY_i &= my_i + s \alpha_i MZ_{i-1} - d_i s \alpha_i M_{i-1} \end{aligned}$$

$$MZ_i = mz_i + c\alpha_i MZ_{i-1} - d_i c\alpha_i M_{i-1}$$

$$M_i = m_i + M_{i-1}$$

② 若关节  $i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) 是移动关节, 则杆  $i-1$  的惯性参数  $XX_{i-1}$ ,  $XY_{i-1}$ ,  $XZ_{i-1}$ ,  $YY_{i-1}$ ,  $YZ_{i-1}$ ,  $ZZ_{i-1}$  可用将其重组进杆  $i$  惯性参数的方法消去, 其重组关系为

$$XX_i = xx_i + c_i^2 XX_{i-1} + 2c_i s_i XY_{i-1} + s_i^2 YY_{i-1}$$

$$XY_i = xy_i - c_i c_i s_i XX_{i-1} + c_i (c_i^2 - s_i^2) XY_{i-1} + s_i c_i c_i XZ_{i-1} + c_i c_i s_i YY_{i-1} + s_i c_i s_i YZ_{i-1}$$

$$XZ_i = xz_i + s_i c_i s_i XX_{i-1} - s_i (c_i^2 - s_i^2) XY_{i-1} + c_i c_i c_i XZ_{i-1} - s_i c_i s_i YY_{i-1} + c_i s_i s_i YZ_{i-1}$$

$$YY_i = yy_i + c_i^2 s_i^2 XX_{i-1} - 2c_i^2 s_i c_i XY_{i-1} - 2c_i s_i c_i XZ_{i-1} + c_i^2 s_i^2 YY_{i-1} + 2c_i s_i c_i YZ_{i-1} + c_i s_i^2 ZZ_{i-1}$$

这里要注意的是: 尽管用定理 2-3 可消去大部分能消去的惯性参数, 但剩下的惯性参数一般不是机器人的一组最小惯性参数. 如果这时要确定机器人的一组最小惯性参数, 需要对机器人模型进行更细致的分析.

另外, 由定理 2-3 立即可得以下推论.

**推论 2-2** 若由  $n$  个刚性杆串接而成的机器人是用 D-H 参数设置和各杆固连的坐标系, 则其最小惯性参数个数

$$n_{\min} \leq 7 \sum_{i=2}^n \bar{\sigma}_i + 4 \sum_{i=2}^n \sigma_i + 10$$

将定理 2-3 与定理 2-1 (或定理 2-2) 相比较可看出: 定理 2-3 中所述的消去惯性参数的方法与定理 2-1 (或定理 2-2) 中不同. 定理 2-1 (或定理 2-2) 中是采用将杆  $i$  中惯性参数重组进杆  $i-1$  惯性参数中的方法消去惯性参数, 而在定理 2-3 中是采用将杆  $i-1$  的惯性参数重组进杆  $i$  中参数的方法消去惯性参数. 将推论 2-2 与推论 2-1 相比较可知: 用定理 2-3 消去的惯性参数要比用定理 2-1 (或定理 2-2) 消去的惯性参数少. 但是定理 2-3 中所述方法也有其优点, 因为用这种方法杆  $n$  的所有惯性参数都没有被重组到其他惯性参数中. 通常机器人手端夹持负载时, 可将负载视为与杆  $n$  成一整体, 杆  $n$  的惯性参数包括了负载的影响. 这样当负载变化时, 杆  $n$  的惯性参数也发生变化. 这时若采用 D-H 方法设置坐标系并用定理 2-3 中所述的方法确定机器人的最小惯性参数, 则最多只有杆  $n$  的 10 个惯性参数发生变化, 而其余各杆的最小惯性参数均不改变. 而若采用修改的 D-H 方法设置坐标系并用定理 2-1 (或定理 2-2) 中所述的方法确定机器人最小惯性参数, 则当负载变化时, 许多杆



的最小惯性参数都要发生变化。因此在机器人操作不同负载的情况下,采用定理 2-3 来确定其最小惯性参数也有其方便之处。

**例 2-2** 按本节所述用修改的 D-H 方法建立 Stanford 臂的杆坐标系如图 2-9 所示,其修改的 D-H 参数列于表 2-4。

表 2-4

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$ (变量)
2	0	$-90^\circ$	$d_2$	$\theta_2$ (变量)
3	0	$90^\circ$	$d_3$ (变量)	0
4	0	0	0	$\theta_4$ (变量)
5	0	$-90^\circ$	0	$\theta_5$ (变量)
6	0	$90^\circ$	0	$\theta_6$ (变量)

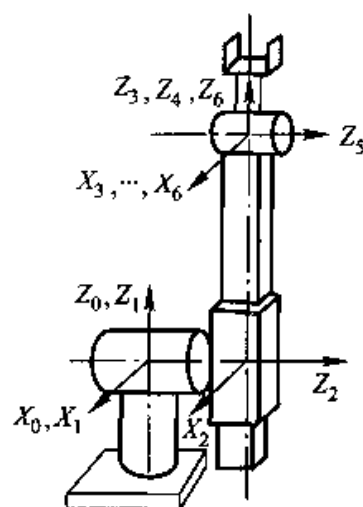


图 2-9

由图 2-9 可知其关节 6, 5, 4 和 2 均属情况 R1, 关节 3 属情况 T1, 关节 1 属情况 R3, 故由推论 2-1 知: Stanford 臂的最小惯性参数个数为

$$n_{\min} = 7 \times 4 + 4 + 1 = 33$$

应用定理 2-2 可按从杆 6~杆 1 的顺序依次确定出其最小惯性参数为

$$XX_6^* = xx_6 - yy_6, xy_6, xz_6, yz_6, zz_6, mx_6, my_6;$$

$$XX_5^* = xx_5 + yy_6 - yy_5, xy_5, xz_5, yz_5, ZZ_5 = zz_5 + yy_6, mx_5, MY_5 = my_5 - mz_6;$$

$$XX_4^* = xx_4 + yy_5 - yy_4, xy_4, xz_4, yz_4, ZZ_4 = zz_4 + yy_5, mx_4, MY_4 = my_4 + mz_5;$$

$$mx_3, my_3, MZ_3 = mz_3 + mz_4, M_3 = m_3 + m_4 + m_5 + m_6;$$

$$XX_2^* = xx_2 + xx_3 + yy_4 - yy_2 - zz_3, XY_2 = xy_2 - xz_3, XZ_2 = xz_2 + xy_3, YZ_2 = yz_2 - yz_3, ZZ_2 = zz_2 + yy_3 + yy_4, mx_2, my_2;$$

$$ZZ_1 = zz_1 + yy_2 + zz_3 + 2d_2mz_2 + d_2^2m_2$$

**例 2-3** ① 由图 0-1 知其中所示的 PUMA 机器人的关节 2~关节 6 均属情况 R1, 而关节 1 属情况 R3, 故由推论 2-1 知其最小惯性参数个数为

$$n_{\min} = 7 \times 5 + 1 = 36$$

② 由 SCARA 机器人的结构图 2-10 知, 它的关节 1 属情况 R3, 关节 2 和 4 属情况 R2, 关节 3 属情况 T3, 故由推论 2-1 知其最小惯性参数个数为

$$n_{\min} = 1 + 3 \times 2 + 1 = 8$$

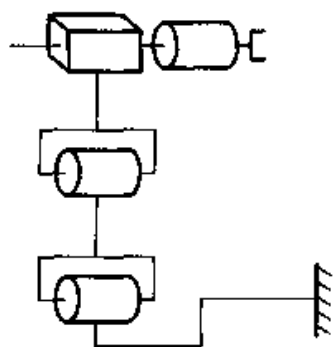


图 2-10

## 2.6 运动受限机器人模型及其他有关问题

### 一、运动受限机器人动力学方程

#### 1. 用 Newton-Euler 方程导出的运动受限机器人动力学方程

若机器人在工作时其手端与外界环境相接触, 则由于环境的约束, 机器人手端不再能不受约束地自由运动, 故称这种情况下的机器人为运动受限机器人。这时机器人手端 (即杆  $n$  端点) 作用于环境的力可向杆坐标系  $n$  的原点  $O_n$  简化为一个主矢  $f$  和一个主矩  $n$ , 因此机器人的杆  $n$  受到反作用力系  $-f$  和  $-n$ 。所以在用 Newton-Euler 方程推导运动受限机器人的动力学方程时, 不应像 2.2 节中推导自由运动机器人方程时的式 (2-58) 和 (2-60) 那样令  $f_{n+1} = n_{n+1} = 0$ , 而应该取  $f_{n+1} = f, n_{n+1} = n$ 。也就是说, 用 Newton-Euler 方程建立的运动受限机器人方程应为

$$\begin{cases} m_i(a_{C_i} - g) = f_i - f_{i-1}, & (f_{n+1} = f) \end{cases} \quad (2-205)$$

$$\begin{cases} I_{C_i} \dot{\omega}_i + \omega_i \times I_{C_i} \omega_i = n_i - n_{i+1} - (p_i^* + r_{C_i}) \times f_i + \\ r_{C_i} \times f_{i+1}, & (f_{n+1} = f, n_{n+1} = n) \end{cases} \quad (2-206)$$

$$\begin{cases} \tau_i = z_{i-1}^T (\sigma_i f_i + \sigma_i n_i) \end{cases} \quad (2-207)$$

$$i = 1, \dots, n$$

#### 2. 用 Lagrange 方程导出的运动受限机器人动力学方程

因运动受限机器人的杆  $n$  受到环境的作用力  $-f$  和  $-n$ , 因此在用第

二类 Lagrange 方程建立运动受限机器人模型时,与建立自由运动机器人方程不同的是,还要在方程的右端再加上外力  $-f$  和  $-n$  所引起的广义力. 记此广义力为  $\hat{Q} = [\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n]^T$ . 给机器人以虚位移  $\delta q_i$ , 而其他广义坐标  $q_j (j \neq i)$  均保持不变, 这时  $-f$  和  $-n$  所做的虚功为 (参见图 2-11)

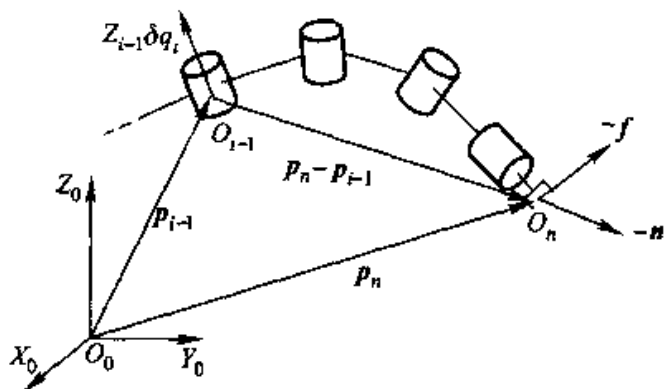


图 2-11

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \sigma_i (z_{i-1} \delta q_i)^T (-f) + \\
 &\quad \bar{\sigma}_i (z_{i-1} \delta q_i)^T [(-n) + (p_n - p_{i-1}) \times (-f)] \\
 &= \{ \sigma_i z_{i-1}^T (-f) + \bar{\sigma}_i z_{i-1}^T [(-n) + \\
 &\quad (p_n - p_{i-1}) \times (-f)] \} \delta q_i \\
 &= \{ \sigma_i z_{i-1}^T (-f) + \bar{\sigma}_i z_{i-1}^T (-n) + \\
 &\quad \bar{\sigma}_i (-f)^T [z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1})] \} \delta q_i \\
 &= \{ \sigma_i z_{i-1}^T (-f) + \bar{\sigma}_i z_{i-1}^T (-n) + \\
 &\quad \bar{\sigma}_i [z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1})]^T (-f) \} \delta q_i \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_i z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1}) + \sigma_i z_{i-1} \\ \bar{\sigma}_i z_{i-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix} \delta q_i \quad (2-208)
 \end{aligned}$$

由 1.4 节的式(1-56)~(1-59)知

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_i z_{i-1} \times (p_n - p_{i-1}) + \sigma_i z_{i-1} \\ \bar{\sigma}_i z_{i-1} \end{bmatrix}$$

是联系  $\begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix}$  与  $q$  间的雅可比矩阵  $J$  的第  $i$  列  $J_i$ , 故式(2-208)可写为

$$\delta W = J_i^T \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix} \delta q_i$$

从而由 2.1 节的式(2-8)知广义力

$$\dot{Q}_i = J_i^T \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^T \\ \vdots \\ J_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix} \\ &= [J_1, \dots, J_n]^T \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-209)$$

在许多文献中常把反映关节空间和工作空间中速度与力的两个对应关系式

$$\begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J\dot{q}, \quad \dot{Q} = J^T \begin{bmatrix} -f \\ -n \end{bmatrix}$$

称为对偶原理。

若记机器人作用于环境的力  $\begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} = F$ , 则由上所述及式(2-209)知, 用 Lagrange 方程导出的运动受限机器人方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau - J^T F \quad (2-210)$$

## 二、关于机器人动力学模型的其他有关问题

### 1. 考虑更多因素时的机器人动力学方程

当需要更精确的机器人模型时, 还要考虑到作动器动力学, 关节轴上的摩擦及所受的外部干扰等的影响, 分别简述如下:

① 当需要考虑作动器动力学时, 由于对杆  $i$  施加驱动力的作动器本身也具有一定质量, 它的影响可用作用于关节  $i$  轴上的力矩(或力)  $J_i^T \ddot{q}_i$  来表示, 这里  $J_i^T$  为作动器经传动装置折算到关节  $i$  轴上的等效转动惯量(或等效质量)。这时还应考虑到与关节速度成正比的阻尼力, 它在关节  $i$  轴上的反映为  $\hat{d}_i \dot{q}_i$ , 其中  $\hat{d}_i$  为阻尼系数。

② 当考虑摩擦力时, 关节  $i$  轴上的摩擦常用  $\mu_i \dot{q}_i + b_i \text{sgn}(\dot{q}_i)$  表示, 其中第一项  $\mu_i \dot{q}_i$  反映了关节  $i$  轴上的粘性摩擦,  $\mu_i$  为粘性摩擦系数; 第二项为库仑摩擦, 它与速度方向相反,  $b_i$  为等效的库仑摩擦系数。

③ 关节  $i$  轴上还可能受到其他干扰力矩的影响, 可用  $d_i$  表示, 一般设  $d_i$  是一个有界的未知函数, 且与机器人的质量分布情况无关。

由于上述几项均消耗作动器提供的能量, 所以当考虑这些因素时, 机器人动力学方程为

$$[H(q) + J^T] \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + R(\dot{q}) + D = \tau - J^T F$$

式中

$$J^c = \begin{bmatrix} J_1^c & & \\ & \ddots & \\ & & J_n^c \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$R(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{d}_1 + \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \dot{d}_n + \mu_n \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sgn}(\dot{q}_1) \\ \vdots \\ \text{sgn}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

由于这些因素的引入并没有造成各个杆间的耦合,而且在已知  $\dot{d}_i$ ,  $\mu_i, b_i, d_i (i = 1, \dots, n)$  的情况下,在设计机器人控制器时可用前馈将  $R(\dot{q})$  和  $D$  补偿掉,另外在传动装置减速比很小或像先进的直接驱动机器人的情况,可将  $J^c$  忽略,所以通常在控制问题研究中也常常忽略上述 3 项因素的影响。

## 2. 考虑更多因素时的机器人逆动力学算法

根据前面的分析已知,当机器人与环境接触时,应将机器人动力学算法中的反向递推初始条件

$$\tilde{f}_{n+1} = 0, \quad \tilde{n}_{n+1} = 0$$

改为

$$\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}, \quad \tilde{n}_{n+1} = \tilde{n}$$

式中  $\tilde{f}$  和  $\tilde{n}$  为  $f$  和  $n$  在与环境固连坐标系中的坐标表达式,并在算法中定义  ${}^nR_{n+1}$  为从与环境固连的坐标系到系  $n$  的坐标变换矩阵。

另外,当考虑以上所讨论的 3 个因素时,还应将机器人动力学算法中计算  $\tau_i$  的式(2-75)改为

$$\tau_i = ({}^iR_{i+1}z)^T(\sigma_i\tilde{f}_i + \bar{\sigma}_i\tilde{n}_i) + J_i^T\ddot{q}_i + (\dot{d}_i + \mu_i)\dot{q}_i + b_i\text{sgn}(\dot{q}_i) + d_i$$

## 第 3 章 机器人控制

### 3.1 概 述

#### 一、机器人控制的目的

对自由运动机器人来说,控制的目的是要控制机器人手端的位置和姿态(以后统一简称为位置),即所谓位置控制问题.这时希望机器人手端所达到的位置称为期望位置或期望轨迹.期望轨迹可以在机器人任务空间中给出,也可通过逆运动学关系转化为机器人关节空间中的期望轨迹.期望轨迹通常有两种形式:一种是一个固定位置(即固定点);另一种是一条随时间连续变化的轨迹.自由运动机器人位置控制的目的,是要使机器人手端从任意起始位置出发都能到达期望轨迹.当期望轨迹是固定点时的位置控制称为定点控制问题.从控制的角度看,这属于镇定问题.当期望轨迹是随时间连续变化轨迹时的控制问题称为轨迹跟踪问题,这属于控制理论中的跟踪问题.

对于运动受限机器人来说,其控制问题要复杂得多.由于机器人与环境接触,这时不仅要控制机器人手端位置,还要控制手端作用于环境的力.也就是说,不仅要使机器人手端位置达到期望值,还要使其作用于环境的力达到期望值.更广泛意义下的运动受限机器人还应包括多机器人协同工作的情况.这时的控制还应包括各机器人间运动的协调,负荷的分配以及所共同夹持的负载所受内力的控制等等复杂问题.

#### 二、机器人控制所采用的基本方法

对于自由运动机器人来说,其控制器设计可以按是否考虑机器人的动力学特性而分为两类.

一类是完全不考虑机器人的动力学特性,只是按照机器人实际轨迹与期望轨迹间的偏差进行负反馈控制.这类方法通常被称为“运动控制(Kinematic Control)”,其基本的控制结构框图如图 3-1 所示,其中的控制器常采用 PD 或 PID 控制.

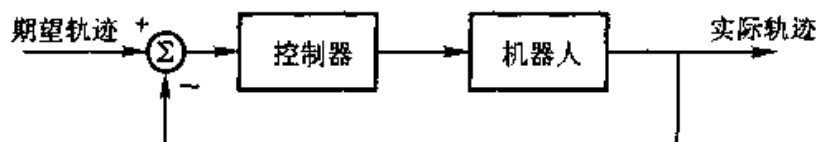


图 3-1

运动控制的主要优点是控制律简单,易于实现.但对于控制高速高精度机器人来说,这类方法有两个明显的缺点:一是难于保证受控机器人具有良好的动态和静态品质;二是需要较大的控制能量.

另一类控制器设计方法通常被称为“动态控制(Dynamic Control)”.这类方法是根据机器人动力学模型的性质设计出更精细的非线性控制律,所以又常称为“以模型为基础的控制(Model-based Control)”.用动态控制方法设计的控制器可使被控机器人具有良好的动态和静态品质,克服了运动控制方法的缺点.然而由于各种动态控制方案中都无一例外地需要实时进行某些机器人动力学计算,而机器人又是一个复杂的多变量强耦合的非线性系统,这就需要较大的在线计算量,给实时控制带来困难.

在早期的机器人控制设计中,由于与机器人的机械结构相比,其控制用计算机的价格高而运算能力有限,故只能采用控制律简单的运动控制方案.自20世纪70年代以来,随着电子技术与计算机科学的发展,计算机的运算能力大大提高而成本不断下降,这就使得人们越来越重视发展各种以完整的机器人动力学模型为基础的动态控制方法,以充分发挥出为完成复杂任务而设计得日益精密,从而也越加昂贵的机器人机械结构的潜力.本书主要介绍各种动态控制方案.

机器人动态控制方案常常采用如图3-2所示的基本结构.可以看出它与运动控制方法在结构上的差别是引入了一个内控制回路,其作用是根据机器人动力学特性进行动态补偿,使得经内控制回路作用后的机器人变为一个更易于控制的系统(例如化为一个解耦的线性定常系统等).内控制回路补偿器的设计通常是采用各种动力学补偿和反馈线性化等方法,外控制回路的设计可采用PD(或PID)控制、自适应控制、变结构控制及各种鲁棒控制设计方法等.

对于运动受限机器人来说,由前所述可知,所研究的控制问题已超出当前控制理论中通常的模型和研究范围.例如同时控制手端位置和作用于环境的力时,手端位置和作用于环境的力之间并不是独立的,而是要满

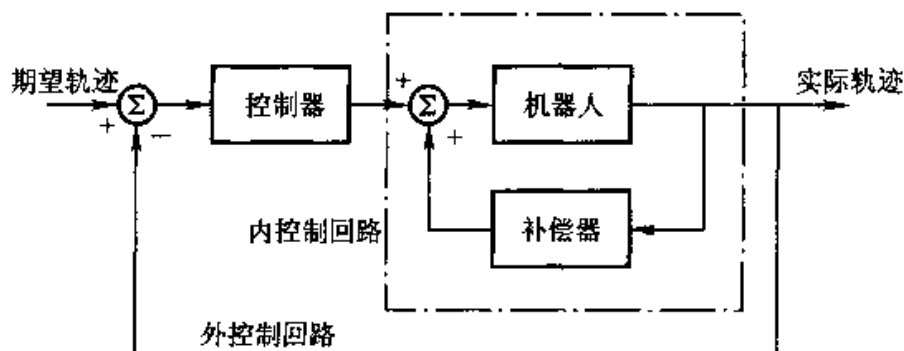


图 3-2

足一定的力学关系, 还有更复杂的多机器人协同工作情况下的运动协调、内力控制、负荷分配等, 都不是用控制理论中的现成结果所能解决的. 为此发展出各种针对机器人所要完成的任务而制定的控制方案, 有些已形成较系统的结果, 对促进控制理论的发展做出了贡献.

## 3.2 独立的 PD 控制

### 一、控制方案

#### 1. 控制目的

采用这种控制方案的目的是控制自由运动机器人手端达到一固定的期望位置  $q_d$ , 即实现定点控制.

#### 2. 控制方案的确定

确定控制方案的基本思路是, 先假设:

① 当机器人运动速度不大时, 可忽略离心力和哥氏力的影响, 即令机器人动力学方程(2-31)中的  $C(q, \dot{q})\dot{q} \equiv 0$ .

② 忽略机器人各杆之间的耦合, 即令机器人动力学方程(2-31)中的  $H(q) = \text{diag} [h_{11}(q), \dots, h_{nn}(q)]$ .

③ 忽略重力的影响, 即令机器人动力学方程(2-31)中的  $G(q) \equiv 0$ .

在上述假设下, 机器人方程化为以下  $n$  个方程

$$h_{ii}(q)\ddot{q}_i = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-1)$$

再令  $h_{ii}(q)$  取工作范围内的一个平均值或在期望位置时的值, 记为  $\bar{h}_{ii}$ , 则由  $H(q)$  的正定性知  $\bar{h}_{ii}$  为一正的常数. 这样机器人动力学方程(2-31)化为以下解耦的线性定常方程



$$\bar{h}_i \ddot{q}_i = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-2)$$

因此对式(3-2)描述系统的各关节选用彼此独立的 PD 控制

$$\tau_i = k_i^d(\dot{q}_i^d - \dot{q}_i) + k_i^p(q_i^d - q_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3-3)$$

式中  $[q_1^d, \dots, q_n^d]^T \triangleq q_d$  为期望位置,  $k_i^d$  和  $k_i^p$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 均为正数. 将控制律(3-3)代入系统方程(3-2)后得到闭环系统方程为

$$\bar{h}_i \ddot{q}_i = k_i^d(\dot{q}_i^d - \dot{q}_i) + k_i^p(q_i^d - q_i), \quad i = 1, \dots, n$$

若记偏差  $e = q_d - q = [e_1, \dots, e_n]^T$ , 并考虑到  $q_d$  为常值,  $\dot{q}_d = \ddot{q}_d \equiv 0$  后可将上式写为

$$\bar{h}_i \ddot{e}_i + k_i^d \dot{e}_i + k_i^p e_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-4)$$

因  $\bar{h}_i > 0, k_i^d > 0, k_i^p > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 故由线性定常系统的稳定性判据知, 无论从任何初始条件  $(e_0, \dot{e}_0)$  出发, 总有  $(e, \dot{e}) \rightarrow (0, 0)$ , 亦即  $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow 0$ .

从控制律(3-3)可看出: 独立的 PD 控制是一种不考虑机器人动力学的运动控制方案, 其框图如图 3-3 所示. 图中  $K_d \triangleq \text{diag}[k_1^d, \dots, k_n^d], K_p \triangleq \text{diag}[k_1^p, \dots, k_n^p]$ , 其中  $K_d$  和  $K_p$  的值可由式(3-4)得出

$$\ddot{e}_i + \frac{k_i^d}{\bar{h}_i} \dot{e}_i + \frac{k_i^p}{\bar{h}_i} e_i \triangleq \ddot{e}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{e}_i + \omega_i^2 e_i = 0 \quad (3-5)$$

后(式中  $\zeta_i$  为阻尼系数,  $\omega_i$  为自然频率), 用经典调节原理中的方法按过渡过程品质指标的要求确定.

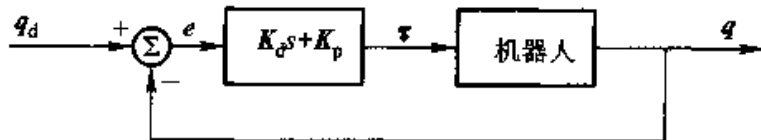


图 3-3

## 二、稳定性分析

尽管独立的 PD 控制式(3-4)是在忽略离心力、哥氏力、各杆间耦合及重力的条件下设计出的, 但可以证明<sup>[31]</sup>: 即使计入离心力、哥氏力及各杆间耦合的影响, 用独立的 PD 控制仍能满足定点控制的要求.

因为当仅忽略重力时, 采用独立 PD 控制的机器人方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau = K_d \dot{e} + K_p e$$

亦即

$$H(q)\ddot{e} + [C(q, \dot{q}) + K_d]\dot{e} + K_p e = 0 \quad (3-6)$$

取受控机器人(3-6)的李雅普诺夫函数

$$v = \frac{1}{2} \dot{e}^T H(q) \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T K_p e$$

由  $H(q)$  及  $K_p$  的正定性知  $v$  是全局正定的. 将  $v$  求导得

$$\dot{v} = \dot{e}^T H \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{H} \dot{e} + \dot{e}^T K_p e$$

利用  $\dot{H} = 2C$  的反对称性知  $\dot{e}^T \dot{H} \dot{e} = 2\dot{e}^T C \dot{e}$ . 因此沿系统(3-6)的轨迹,  $\dot{v}$  可写为

$$\dot{v} = \dot{e}^T (H \dot{e} + C \dot{e} + K_p e) = \dot{e}^T K_d \dot{e}$$

由上式知, 沿系统(3-6)的轨迹  $\dot{v}$  是半负定的, 且由  $K_d$  的正定性知, 当  $\dot{v} \equiv 0$  时有  $\dot{e} \equiv 0$ , 从而  $\ddot{e} \equiv 0$ . 代入系统方程(3-6)后知这时有  $K_p e = 0$ . 再由  $K_p$  的可逆性知  $e = 0$ . 至此, 证明了存在全局正定函数  $v$ , 使得沿系统(3-6)的轨迹  $\dot{v}$  半负定, 且在满足  $\dot{v} \equiv 0$  的  $(e, \dot{e})$  中除  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  外, 不包含系统(3-6)的任何整轨迹, 故由 LaSalle 定理<sup>[32]</sup>知  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  是受控机器人全局渐近稳定的平衡点, 即从任意初始条件  $(q_0, \dot{q}_0)$  出发, 均有  $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow 0$ .

### 3.3 具有重力补偿的 PD 控制

#### 一、具有实时重力补偿的 PD 控制

如果考虑重力的影响, 则采用 PD 控制的机器人方程应写为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau = K_d \dot{e} + K_p e \quad (3-7)$$

这时由于重力项的出现, 使得仍利用 3.2 节中的李雅普诺夫函数  $v$  不能再证明  $q \rightarrow q_d$ . 事实上, 若闭环系统(3-7)是稳定的, 则在稳态(即  $e$  为常数,  $\dot{e} = \ddot{e} \equiv 0$ ) 时方程(3-7)化为

$$G(q) = K_p e \quad (3-8)$$

故存在稳态误差

$$e = K_p^{-1} G(q) = \begin{bmatrix} (k_1^p)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (k_n^p)^{-1} \end{bmatrix} G(q) \quad (3-9)$$

式(3-8)有明显的物理解释: 在稳态时, 作动器要产生一个力  $K_p e$  来平衡重力的影响. 由稳态误差表达式(3-9)知, 增大位置反馈增益  $k_i^p (i = 1, \dots, n)$  可减小稳态误差.

从 3.2 节中的稳定性分析很容易看出, 要完全消除稳态误差, 可在 PD 控制器中引入重力补偿项, 即取控制

$$\tau = G(q) + K_d \dot{e} + K_p e$$

这样受控机器人方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = G(q) + K_d \dot{e} + K_p e$$

在上式中消去重力项后仍具有式(3-6)的形式,从而3.2节中 $(e, \dot{e}) = (0, 0)$ 是全局渐近稳定平衡点的证明仍能成立,保证了从任意初始条件 $(q_0, \dot{q}_0)$ 出发都有 $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow 0$ 。这时的控制系统框图如图3-4所示。

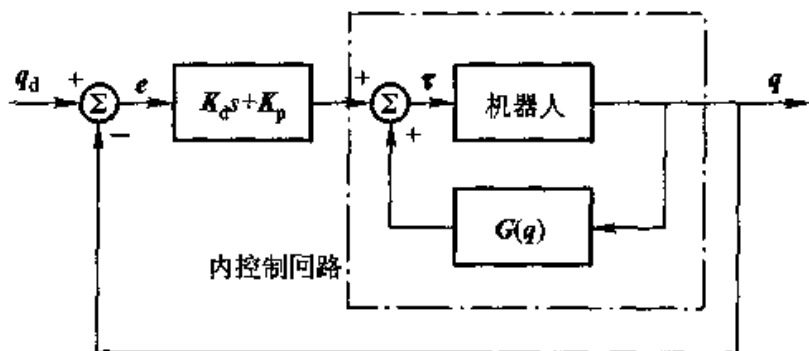


图 3-4

与独立的PD控制框图相比可知,它引入了进行实时重力补偿的内控制回路,属于考虑机器人动力学性质(尽管只考虑了机器人部分动力学性质)的动态控制方案。

## 二、具有固定重力补偿的PD控制

### 1. 动机

在PD控制中引入实时重力补偿,即取

$$\tau = G(q) + K_d \dot{e} + K_p e$$

固然可在考虑重力影响时仍能实现稳定的定点控制,但由于需要在线计算重力补偿项 $G(q)$ ,加重了机器人实时计算的负担。考虑到在前面分析中已知:当不引入重力补偿项时,可增加位置反馈增益来减小稳态误差。这就启发人们思考:是否能引入事先计算出的某个固定位置的重力项作为补偿,同时使位置增益足够大来保证系统对定点控制的稳定性。事实上,Takegaki和Arimoto早在1981年就用系统的Hamilton函数作为其李雅普诺夫函数的方法证明了这一想法的正确性<sup>[33]</sup>。

### 2. 预备知识

#### (1) 广义冲量

若系统的Lagrange函数 $L = T - V$ ,则该系统对应于广义坐标 $q_i (i = 1, \dots, n)$ 的广义冲量

$$p_i \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-10)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

具体对机器人来说,其动能  $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}$ , 按以上定义可计算出其广义冲量

$$\mathbf{p} = \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}$$

根据广义冲量的定义,第二类 Lagrange 方程可写为

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q} \quad (3-11)$$

## (2) Legendre 变换

设连续可微函数  $f = f(x, y)$ , 其中变量  $x, y$  均为标量, 则

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \triangleq u dx + v dy$$

考察函数  $g \triangleq f - vy = f - \frac{\partial f}{\partial y} y$ , 则

$$dg = df - d(vy) = u dx + v dy - y dv - v dy = u dx - y dv$$

上式表明  $g$  可视为  $x, v$  的函数  $g(x, v)$ , 且这时有

$$\frac{\partial g}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = -y$$

上述把函数  $f(x, y)$  变为  $g(x, v) = g\left(x, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$  的变换定义为 Legendre 变换。

以上为叙述清楚起见, 仅对变量  $x, y$  为标量的情况定义了 Legendre 变换. 事实上, 上述变换的定义很容易推广到  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  为矢量的情况, 这里不再赘述。

## (3) Hamilton 函数

系统的 Hamilton 函数  $H^*$  定义为系统的 Lagrange 函数  $L$  的 Legendre 变换的负值. 因  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 视  $\mathbf{q}$  为  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  为  $\mathbf{y}$ , 则按定义知系统的 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H^* &= H^*\left(\mathbf{q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = H^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T \dot{\mathbf{q}}\right] \\ &= -L + \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} = -L + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \end{aligned} \quad (3-12)$$

系统的 Hamilton 函数具有明确的力学含义. 若记机器人的动能为  $T$ , 势能为  $V$ , 则可以证明(习题 3-3); 其 Hamilton 函数

$$H^* = T + V$$

(4) Hamilton 方程

因  $H^* = H^*(q, p)$ , 故

$$dH^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial p_i} dp_i \quad (3-13)$$

但另一方面又由式(3-12)知

$$dH^* = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i$$

将式(3-11)和(3-10)代入上式知

$$\begin{aligned} dH^* &= - \sum_{i=1}^n (p_i - Q_i) dq_i - \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i \\ &= - \sum_{i=1}^n (p_i - Q_i) dq_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i \end{aligned} \quad (3-14)$$

比较式(3-13)与(3-14), 并考虑到  $q$  和  $p$  的独立性知

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = - \frac{\partial H^*}{\partial q_i} + Q_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H^*}{\partial q} + Q \end{cases} \quad (3-15)$$

式(3-15)即为 Hamilton 方程, 它和 Lagrange 方程一样是描述系统运动的微分方程。

### 3. 控制方案及其稳定性分析

利用 Hamilton 方程(3-15)可写出机器人动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H^*}{\partial q} + \tau = - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} + \tau \end{cases} \quad (3-16)$$

由于对定点控制来说,  $q_d$  为常值,  $\dot{q}_d \equiv 0$ , 故机器人的 Hamilton 函数可写为

$$\begin{aligned} H^* = T + V &= \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} + V(q) \\ &= \frac{1}{2} \dot{e}^T H(q_d - e) \dot{e} + V(q_d - e) \end{aligned}$$

因  $H(q) = H(q_d - e)$  为正定矩阵, 故若势能函数  $V(q) = V(q_d - e)$  满足

$$\begin{cases} V(q_d) = 0, \\ V(q_d - e) > 0, \forall e \neq 0, (\text{即 } V(q) > 0, \forall q \neq q_d) \end{cases} \quad (3-17)$$

则  $H^*$  是  $e$  和  $\dot{e}$  的全局正定函数, 故可取系统的 Hamilton 函数  $H^*$  作为其李雅普诺夫函数. 但对给定的机器人来说, 其势能  $V(q)$  一般并不满足式 (3-17), 因此可先对系统引入内控制回路来将其势能改为  $V^0$ , 其中  $V^0$  满足

$$V^0(q_d) = 0; \quad V^0(q) > 0, \forall q \neq q_d \quad (3-18)$$

很容易看出: 若取控制

$$\tau = \frac{\partial V(q)}{\partial q} - \frac{\partial V^0(q)}{\partial q} + \tau_1 \quad (3-19)$$

则由式 (3-16) 知机器人方程变为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial T}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V^0}{\partial q} + \tau_1 \end{cases} \quad (3-20)$$

将式 (3-20) 与 (3-16) 比较立即知: 经内控制回路 (3-19) 作用后, 系统的 Hamilton 函数已变为  $\tilde{H}^* = T + V^0$ . 因  $V^0$  满足式 (3-18), 故由前所述知  $\tilde{H}^* = T + V^0$  是  $e$  和  $\dot{e}$  的正定函数, 故可取受控系统 (3-20) 的李雅普诺夫函数  $v = \tilde{H}^*$ . 这样, 沿系统 (3-20) 的轨迹

$$\begin{aligned} \dot{v} = \dot{\tilde{H}^*} &= \left( \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial q} \right)^T \dot{q} + \left( \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial p} \right)^T \dot{p} \\ &= \left( \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial q} \right)^T \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial p} + \left( \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial p} \right)^T \left( -\frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial q} + \tau_1 \right) \\ &= \left( \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial p} \right)^T \tau_1 = \dot{q}^T \tau_1 \end{aligned}$$

显然, 只要取式 (3-20) 中的

$$\tau_1 = -K_d \dot{q} = K_d \dot{e}$$

则  $\dot{v} = -\dot{q}^T K_d \dot{q} = -\dot{e}^T K_d \dot{e}$  是半负定的. 因此, 只要能证明在  $\dot{v} = \dot{\tilde{H}^*} \equiv 0$  的集合中除  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  (即  $(q, \dot{q}) = (q_d, 0)$ ) 外不包含系统的任何整轨迹, 则由 LaSalle 定理知  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  是系统的全局渐近稳定平衡点, 从而保证了从任意初始条件  $(q_0, \dot{q}_0)$  出发, 均有  $(q, \dot{q}) \rightarrow (q_d, 0)$ . 事实上, 因受控机器人系统方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = H^{-1}(q)p \\ \dot{p} = -\frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial V^0}{\partial q} - K_d \dot{q} \end{cases} \quad (3-21)$$

故当  $\dot{v} = -\dot{e}^T K_d \dot{e} \equiv 0$  时, 有  $\dot{e} \equiv 0$ , 即  $\dot{q} \equiv 0$ . 再由式(3-21)的第1式知, 这时  $\dot{p} \equiv 0$ , 从而有  $\dot{p} \equiv 0$ . 将  $\dot{q} \equiv 0$  和  $\dot{p} \equiv 0$  代入式(3-21)中第2式知

$$\frac{\partial V^0(q)}{\partial q} = 0$$

因此如果在设计  $V^0$  时使  $q = q_d$  是  $V^0$  的唯一极值点, 则上式有唯一解  $q = q_d$ . 这就证明了在  $\dot{v} \equiv 0$  的集合中除  $(q_d, 0)$  外不含式(3-21)描述系统的任何整轨迹, 从而完成了定点控制稳定性的证明.

至此, 剩下的任务就是如何设计  $V^0$ , 使其满足式(3-18)并保证  $q = q_d$  是  $V^0(q)$  的唯一极值点. 这时可选取

$$V^0(q) = V(q) - V(q_d) + \left[ \frac{\partial V}{\partial q}(q_d) \right]^T (q_d - q) + \frac{1}{2} (q_d - q)^T K_p (q_d - q) \quad (3-22)$$

由式(3-22)可计算出

$$\frac{\partial V^0}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q}(q_d) - K_p (q_d - q) \quad (3-23)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V^0}{\partial q} \right)^T \right] = \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] + K_p \quad (3-24)$$

由式(3-24)知, 若  $\frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right]$  对所有  $q \in \mathbb{R}^n$  有界(这一条件并不苛刻, 例如当机器人所有关节均为转动关节时,  $\frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right]$  即满足此条件), 则可选取对角正定矩阵  $K_p$  使

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] + K_p > 0^{(1)}, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n \quad (3-25)$$

由式(3-22)~(3-25)知

$$V^0(q_d) = 0, \quad \frac{\partial V^0}{\partial q}(q_d) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V^0}{\partial q} \right)^T \right](q_d) > 0 \quad (3-26)$$

这表明  $q = q_d$  是  $V^0(q)$  的一个极小点. 再将  $\frac{\partial V}{\partial q}$  在  $q = q_d$  点展开知

$$\frac{\partial V}{\partial q}(q) = \frac{\partial V}{\partial q}(q_d) + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] \xi (q - q_d)$$

式中  $\xi$  为  $q$  与  $q_d$  间的某个值. 代入式(3-23)后知

$$\frac{\partial V^0}{\partial q}(q) = - \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] \xi + K_p \right\} (q_d - q)$$

因由式(3-25)知

①  $n \times n$  矩阵  $A > 0$  表示  $A$  为正定矩阵, 即任取非零  $x \in \mathbb{R}^n$  均有  $x^T A x > 0$ .

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] \xi + K_p \right\} > 0$$

故必有

$$\frac{\partial V^n}{\partial q}(q) \neq 0, \quad \text{当 } q \neq q_d \quad (3-27)$$

否则存在  $q \neq q_d$ , 使

$$(q_d - q)^T \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] \xi + K_p \right\} (q_d - q) = 0$$

与  $\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] \xi + K_p \right\} > 0$  矛盾. 式(3-27)和(3-26)表明  $q = q_d$  是  $V^0(q)$  的唯一的极值点, 因此用式(3-22)定义的  $V^0(q)$  满足式(3-18)及  $V^0(q)$  仅有唯一极值点  $q_d$  的条件.

将  $V^0(q)$  及  $\tau_i$  的定义代入式(3-19), 得出控制

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\partial V}{\partial q}(q_d) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) \\ &= G(q_d) + K_d \dot{e} + K_p e \end{aligned}$$

式中位置反馈增益矩阵  $K_p$  的选择应满足式(3-25). 这时整个控制系统结构如图 3-5 所示.

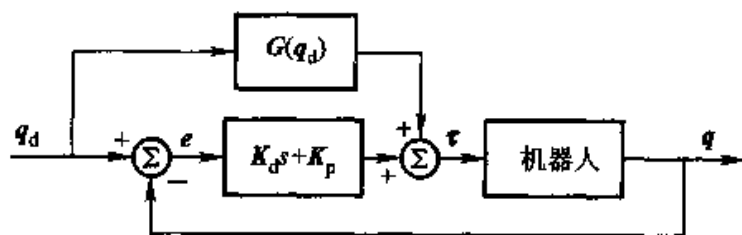


图 3-5

**例 3-1** 对美国 MIT 串连杆件 DDArm 机械臂建立与各杆固连的坐标系如图 3-6 所示, 则可用 2.1 节中所述方法导出其动力学方程为<sup>[11]</sup>

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

式中

$$H(q) = [h_{ij}]$$

$$C(q, \dot{q}) = [c_{ij}]$$

$$G(q) = [g_1, g_2, g_3]^T$$

$$h_{11} = (zx_1 + xx_2 + xx_3 + d_2^2 m_3) -$$

$$c_2^2 (xx_2 - yy_2 + xx_3) + 2cs_2 xy_2 +$$

$$2d_2 s_3 m x_3 + 2d_2 c_3 m y_3 - s_2^2 s_3^2 (xx_3 - yy_3) -$$

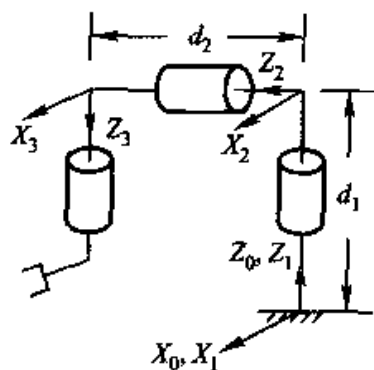


图 3-6



$$\begin{aligned}
& 2s_2^2cs_3xy_3 - 2cs_2c_3xz_3 + 2cs_2s_3yz_3 + c_2^2zz_3 \\
h_{12} = h_{21} = & s_2xz_2 + c_2(yz_2 + d_2mz_3) - d_2s_2c_3mx_3 + \\
& d_2s_2s_3my_3 + s_2cs_3(xx_3 - yy_3) + s_2(c_3^2 - s_3^2)xy_3 - \\
& c_2s_3xz_3 - c_2c_3yz_3 \\
h_{13} = h_{31} = & -d_2c_2s_3mx_3 - d_2c_2c_3my_3 + s_2c_3xz_3 - \\
& s_2s_3yz_3 - c_2zz_3 \\
h_{22} = & (zz_2 + xx_3) - c_3^2(xx_3 - yy_3) + 2cs_3xy_3 \\
h_{23} = h_{32} = & s_3xz_3 + c_3yz_3 \\
h_{33} = & zz_3 \\
c_{11} = & [cs_2(xx_2 - yy_2 + xx_3) + (c_2^2 - s_2^2)xy_2 - \\
& cs_2s_3^2(xx_3 - yy_3) - 2cs_2cs_3xy_3 - (c_2^2 - s_2^2)c_3xz_3 + \\
& (c_2^2 - s_2^2)s_3yz_3 - cs_2zz_3]\dot{q}_2 + \\
& [d_2c_3mx_3 - d_2s_3my_3 - s_2^2cs_3(xx_3 - yy_3) - \\
& s_2^2(c_3^2 - s_3^2)xy_3 + cs_2s_3xz_3 + cs_2c_3yz_3]\dot{q}_3 \\
c_{12} = & [cs_2(xx_2 - yy_2 + xx_3) + (c_2^2 - s_2^2)xy_2 - \\
& cs_2s_3^2(xx_3 - yy_3) - 2cs_2cs_3xy_3 - (c_2^2 - s_2^2)c_3xz_3 + \\
& (c_2^2 - s_2^2)s_3yz_3 - cs_2zz_3]\dot{q}_1 + \\
& [c_2xz_2 - s_2(yz_2 + d_2mz_3) - d_2c_2c_3mx_3 + \\
& d_2c_2s_3my_3 + c_2cs_3(xx_3 - yy_3) + \\
& c_2(c_3^2 - s_3^2)xy_3 + s_2s_3xz_3 + s_2c_3yz_3]\dot{q}_2 + \\
& [d_2s_2s_3mx_3 + d_2s_2c_3my_3 + \frac{1}{2}s_2(c_3^2 - s_3^2)(xx_3 - yy_3) - \\
& 2s_2cs_3xy_3 + \frac{1}{2}s_2zz_3]\dot{q}_3 \\
c_{13} = & [d_2c_3mx_3 - d_2s_3my_3 - s_2^2cs_3(xx_3 - yy_3) - \\
& s_2^2(c_3^2 - s_3^2)xy_3 + cs_2s_3xz_3 + cs_2c_3yz_3]\dot{q}_1 + \\
& [d_2s_2s_3mx_3 + d_2s_2c_3my_3 + \frac{1}{2}s_2(c_3^2 - s_3^2)(xx_3 - yy_3) - \\
& 2s_2cs_3xy_3 + \frac{1}{2}s_2zz_3]\dot{q}_2 + \\
& [-d_2c_2c_3mx_3 + d_2c_2s_3my_3 - s_2s_3xz_3 - s_2c_3yz_3]\dot{q}_3 \\
c_{21} = & -[cs_2(xx_2 - yy_2 + xx_3) + (c_2^2 - s_2^2)xy_2 - \\
& cs_2s_3^2(xx_3 - yy_3) - 2cs_2cs_3xy_3 - (c_2^2 - s_2^2)c_3xz_3 + \\
& (c_2^2 - s_2^2)s_3yz_3 - cs_2zz_3]\dot{q}_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) (xx_3 - yy_3) - 2s_2 c s_3 xy_3 - \right. \\
& \quad \left. c_2 c_3 xz_3 + c_2 s_3 yz_3 - \frac{1}{2} s_2 z z_3 \right] \dot{q}_3 \\
c_{22} &= [c s_3 (xx_3 - yy_3) + (c_3^2 - s_3^2) xy_3] \dot{q}_3 \\
c_{23} &= \left[ \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) (xx_3 - yy_3) - 2s_2 c s_3 xy_3 - \right. \\
& \quad \left. c_2 c_3 xz_3 + c_2 s_3 yz_3 - \frac{1}{2} s_2 z z_3 \right] \dot{q}_1 + \\
& \quad [c s_3 (xx_3 - yy_3) + (c_3^2 - s_3^2) xy_3] \dot{q}_2 + \\
& \quad [c_3 xz_3 - s_3 yz_3] \dot{q}_3 \\
c_{31} &= - [d_2 c_3 m x_3 - d_2 s_3 m y_3 - s_2^2 c s_3 (xx_3 - yy_3) - \\
& \quad s_2^2 (c_3^2 - s_3^2) xy_3 + c s_2 s_3 xz_3 + c s_2 c_3 yz_3] \dot{q}_1 - \\
& \quad \left[ \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) (xx_3 - yy_3) - 2s_2 c s_3 xy_3 - \right. \\
& \quad \left. c_2 c_3 xz_3 + c_2 s_3 yz_3 - \frac{1}{2} s_2 z z_3 \right] \dot{q}_2 \\
c_{32} &= - \left[ \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) (xx_3 - yy_3) - 2s_2 c s_3 xy_3 - \right. \\
& \quad \left. c_2 c_3 xz_3 + c_2 s_3 yz_3 - \frac{1}{2} s_2 z z_3 \right] \dot{q}_1 - \\
& \quad [c s_3 (xx_3 - yy_3) + (c_3^2 - s_3^2) xy_3] \dot{q}_2 \\
c_{33} &= 0 \\
g_1 &= 0 \\
g_2 &= [c_2 m x_2 - s_2 (m y_2 - m z_3) + c_2 c_3 m x_3 - c_2 s_3 m y_3] g \\
g_3 &= - (s_2 s_3 m x_3 + s_2 c_3 m y_3) g
\end{aligned}$$

式中重力加速度常数  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $d_2 = 0.462 \text{ m}$ , 惯性参数值为<sup>[11]</sup>

$$xz_1 + xx_2 + xx_3 + d_2^2 m_3 = 13.031 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$xx_2 - yy_2 + xx_3 = 0.414 7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$yz_2 + d_2 m x_3 = -1.352 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$zz_2 + xx_3 = 0.863 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m y_2 - m z_3 = 3.081 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$xx_3 - yy_3 = -0.273 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$xz_3 = -0.016 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$zz_3 = 0.390 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m x_3 = 0.310 8 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$xy_2 = xz_2 = xy_3 = yz_3 = mx_2 = my_3 = 0$$

现希望 DDArm 机械臂从起始位置  $q_0 = [-0.1, 1.5, 1.0]^T \text{ rad}$  到达期望位置  $q_d = [0.6, 1.0, -0.5]^T \text{ rad}$ . 如果忽略重力项, 用上节方法设计独立的 PD 控制, 则由式(3-5)知, 这时  $K_d$  和  $K_p$  的值满足

$$k_i^p = \omega_i^2 \bar{h}_{ii}, \quad k_i^d = 2\omega_i \zeta_i \bar{h}_{ii}, \quad i = 1, 2, 3$$

由上述 DDArm 机械臂惯性矩阵  $H(q)$  的表达式知

$$h_{11}(q_d) = 12.944\ 4, h_{22}(q_d) = 1.073\ 8, h_{33}(q_d) = 0.390\ 0$$

故可取  $\bar{h}_{11} = 15, \bar{h}_{22} = 1.5, \bar{h}_{33} = 0.5$ . 若取  $\omega_1 = 5, \zeta_1 = 0.7; \omega_2 = 7.5, \zeta_2 = 1; \omega_3 = 10, \zeta_3 = 1$ ; 可算出

$$k_1^p = 375, \quad k_2^p = 84.375, \quad k_3^p = 50$$

$$k_1^d = 105, \quad k_2^d = 20.5, \quad k_3^d = 10$$

取

$$k_1^p = 400, \quad k_2^p = 80, \quad k_3^p = 50$$

$$k_1^d = 100, \quad k_2^d = 20, \quad k_3^d = 10$$

可得到独立的 PD 控制

$$\tau = K_d \dot{e} + K_p e = - \begin{bmatrix} 100\dot{q}_1 \\ 20\dot{q}_2 \\ 10\dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400(0.6 - q_1) \\ 80(1.0 - q_2) \\ -50(0.5 + q_3) \end{bmatrix}$$

其计算机仿真结果如图 3-7 中虚线所示. 从图中可以看出: 由于没考虑重力项的影响,  $q_2$  有明显的稳态误差.

若采用本节所述的具有固定重力补偿的控制方案, 由 DDArm 机械臂动力学方程可算出

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] &= \frac{\partial}{\partial q} [G^T(q)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30.227\ 6c_2 - 3.048\ 9s_2c_3 & -3.048\ 9c_2s_3 \\ 0 & -3.048\ 9c_2s_3 & -3.048\ 9s_2c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

很容易验证这时

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^T \right] + K_p > 0, \quad \forall q \in \mathbf{R}^3$$

故可确定出控制

$$\begin{aligned} \tau &= G(q_d) + K_d \dot{e} + K_p e \\ &= \begin{bmatrix} -100\dot{q}_1 + 400(0.6 - q_1) \\ -23.989\ 9 - 20\dot{q}_2 + 80(1.0 - q_2) \\ 1.230\ 0 - 10\dot{q}_3 - 50(0.5 + q_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

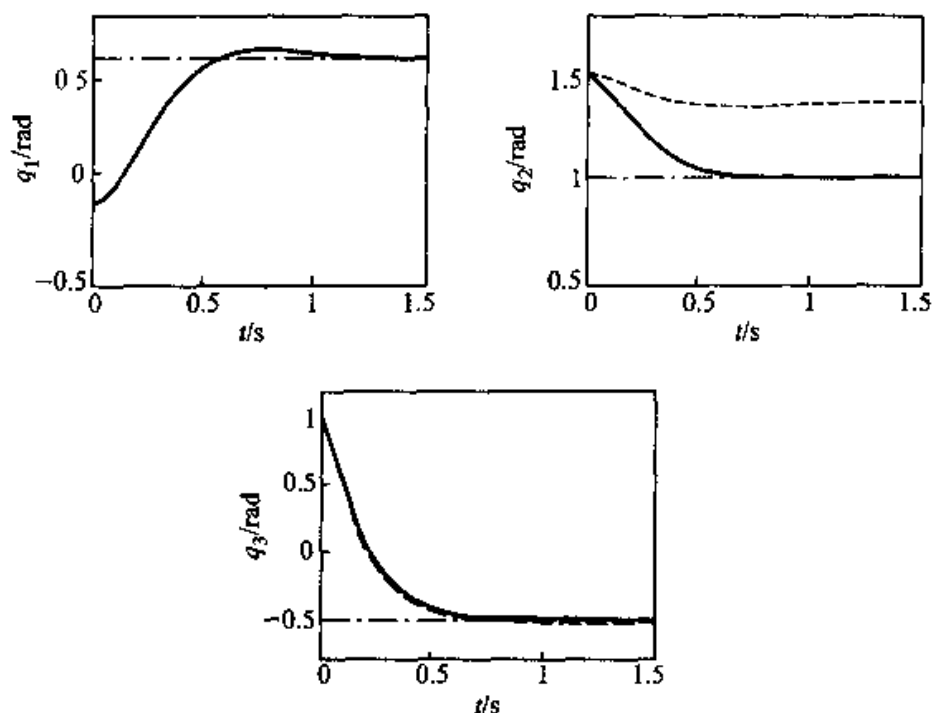


图 3-7

其仿真结果如图 3-7 中实线所示,可看出这时已没有稳态误差.

## 3.4 计算力矩法

### 一、控制任务

在 3.2 和 3.3 节中已研究了用独立的 PD 控制和具有重力补偿的 PD 控制实现稳定的定点控制.但有时期望轨迹不是一个固定点,而是一条随时间变化的连续轨迹,这时用 3.2 和 3.3 节中的 PD 控制是不能完成对连续时变轨迹的跟踪任务的.

从本节起,将研究使自由运动机器人手端从任意初始条件出发都能跟踪一条连续时变期望轨迹的各种控制方案.以下,如无特别说明,总是不失一般性地认为由设计者所确定的期望轨迹为关节空间中一条连续时变轨迹  $q_d(t)$ ,且它是二次可微的,即存在有界的  $\dot{q}_d(t)$  和  $\ddot{q}_d(t)$ .

### 二、控制方案及稳定性分析<sup>[34]</sup>

用计算力矩法设计控制方案的基本思路是:先在内控制回路中引入一非线性补偿,使机器人化为一更易于控制的线性定常系统.具体地说,先引入控制

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(q)u \quad (3-28)$$

这样受控机器人方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(q)u$$

消去非线性项后化为

$$H(q)\ddot{q} = H(q)u$$

因  $H(q)$  可逆, 故上式等价于一个解耦的线性定常系统

$$\ddot{q} = u$$

考虑到当期望轨迹  $q_d(t)$  给定后  $\dot{q}_d$  和  $\ddot{q}_d$  均已知, 可对上述线性定常系统引入具有偏置的 PD 控制

$$\begin{aligned} u &= \ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) \\ &= \ddot{q}_d + K_d\dot{e} + K_pe \end{aligned} \quad (3-29)$$

式中  $K_d$  和  $K_p$  均为正定矩阵(为计算方便可取为对角矩阵). 这样闭环系统方程为

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_pe = 0 \quad (3-30)$$

从而由  $K_d$  和  $K_p$  的正定性知  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  是全局渐近稳定的平衡点(习题 3-5), 即从任何初始条件  $(q_0, \dot{q}_0)$  出发, 总有  $(q, \dot{q}) \rightarrow (q_d, \dot{q}_d)$ , 这就实现了全局稳定的轨迹跟踪.

将式(3-29)代入式(3-28)后得出控制律的完整表达式为

$$\tau = H(q)(\ddot{q}_d + K_d\dot{e} + K_pe) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (3-31)$$

由式(3-31)可看出, 控制  $\tau$  可在机器人逆动力学算法中令  $\ddot{q} = \ddot{q}_d + K_d\dot{e} + K_pe$  后计算出. 因此这种控制方法常被称为“逆动力学方法”或“计算力矩法”. 正是由于利用计算力矩法进行实时控制的需要, 促使许多研究者至今仍在研究各种计算更有效的逆动力学算法. 计算力矩法的控制结构框图如图 3-8 所示.

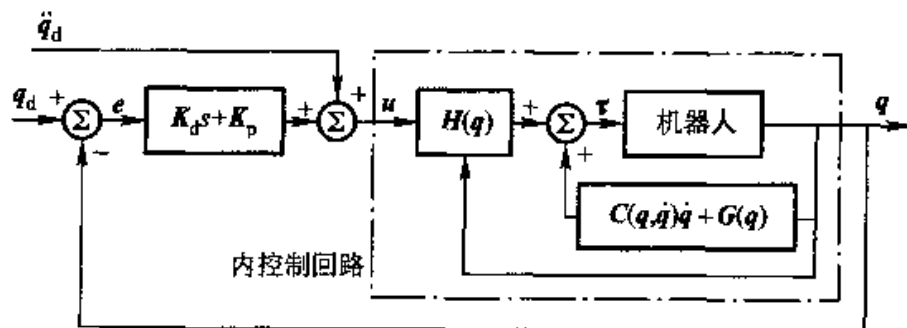


图 3-8

计算力矩法是典型的考虑机器人动力学模型的动态控制方案, 它是自由运动机器人轨迹跟踪控制中最重要的方法, 在机器人控制问题研究

中起着很重要的作用,在下面几节的讲述中将会看出,解决机器人轨迹跟踪问题的许多其他控制方法都可视为计算力矩法的推广。

另外,在前面的分析中已知,计算力矩法用一个非线性补偿使机器人这个复杂的非线性强耦合的系统实现了全局线性化且解耦,这对于现代非线性控制理论中反馈全局线性化理论的发展起了很大的启发和推动作用。

**例 3-2** 若要求例 3-1 中的 DDArm 机械臂在  $t = 0$  时从起始位置  $q = [-0.1, 1.5, 1]^T \text{ rad}$  出发, 1.5 s 后到达期望位置  $[0.6, 1, -0.5]^T \text{ rad}$ , 可通过使其跟踪以下用  $t$  的 5 次多项式表示的时变期望轨迹  $q_d(t)$  来达到此目的(习题 3-7):

$$q_d(t) = \frac{1}{1.5^3} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} t^3 + \frac{1}{1.5^3} \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} t^4 + \frac{1}{1.5^5} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} t^5$$

如果采用具有实时重力补偿的 PD 控制方案

$$\tau = G(q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)$$

式中

$$K_d = \text{diag}[100, 20, 10], \quad K_p = \text{diag}[400, 80, 50]$$

则其跟踪误差的计算机仿真结果如图 3-9 中虚线所示。从图中可看出  $e_1$  有很大误差, 这表明这种控制策略不能跟踪时变轨迹。

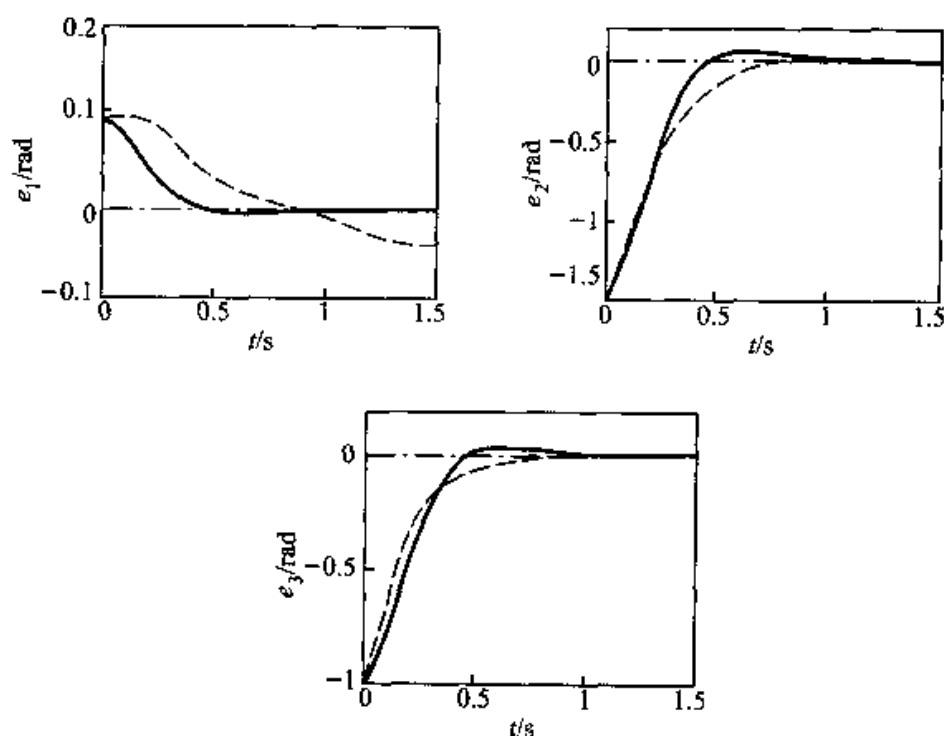


图 3-9

而若采用计算力矩法

$$\tau = H(q)[\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

式中

$$K_d = \text{diag}[10, 10, 10], \quad K_p = \text{diag}[50, 50, 50]$$

则从其仿真结果(图 3-9 中实线)可以看出:这时跟踪误差趋于零,可实现对时变期望轨迹的跟踪。

### 3.5 解出加速度控制

#### 一、概述

有时随时间连续变化的期望轨迹不是像 3.4 节中那样在关节空间中给出,而是在任务空间中给出,这时可将计算力矩法加以推广,用来解决任务空间中连续时变轨迹的跟踪问题,这就是本节将要讲述的解出加速度控制<sup>[35]</sup>。

“解出加速度控制”名称的由来可以简述如下。首先,在 3.4 节中论述的计算力矩法也可以用以下方式来解释:计算力矩法的目的是要使闭环系统方程为式(3-30),即

$$(\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) = 0$$

由上式可解出这时机器人的关节加速度应为

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)$$

当用上式确定了为达到控制目的机器人所应有的加速度后,即可用逆动力学算法计算出为达到此加速度所应施加的驱动力(即控制)为

$$\tau = H(q)[\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

由此可知,计算力矩法的关键是要计算出实现轨迹跟踪时机器人所应有的关节加速度  $\ddot{q}$ 。这就启发人们:当期望轨迹在任务空间中给出时,如果能将此期望轨迹与机器人手端实际轨迹之差用一矢量  $\bar{e}$  表示出来,则根据计算力矩法的原理知,如果能从

$$\ddot{\bar{e}} + K_d \dot{\bar{e}} + K_p \bar{e} = 0 \quad (3-32)$$

解出机器人应有的关节加速度  $\ddot{q} = \ddot{q}^*$ , 即可确定出控制为

$$\tau = H(q)\ddot{q}^* + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

因为此方法的关键是要能从任务空间中的误差方程(3-32)解出机器人应有的关节加速度,故被称为“解出加速度控制”。显然,从以上论述中可

看出:解出加速度控制法实际上是计算力矩法从关节空间向任务空间中的推广.

## 二、控制方案及稳定性分析

### 1. 任务空间中位置误差与指向误差的描述

在第1章中已知手端的位置和指向可用三维矢量  $p_n$  和  $3 \times 3$  矩阵  ${}^0R_n$  来表示,其中  $p_n$  为与杆  $n$  固连的坐标系  $n$  的原点  $O_n$  在与基座固连坐标系  $0$  中的矢径在系  $0$  中的坐标表达式,  ${}^0R_n$  为系  $n$  相对系  $0$  的方向余弦矩阵.因此在任务空间中的期望轨迹可用  $p_n^d$  和  ${}^0R_n^d$  表示,其中  $p_n^d$  刻画了手端的期望位置,  ${}^0R_n^d$  反映了手端的期望指向.显然手端的位置误差可用三维矢量  $e_p \triangleq p_n^d - p_n$  来表示,而要定义一个三维矢量反映指向误差却不那么简单.这不仅是由于在理论上已经证明不能直接用一个三维矢量来表示有限转角,而且还在于这个反映指向误差的矢量  $e_o$ .既要明确反映出期望指向与实际指向间的关系,又要便于计算出  $\dot{e}_o$  和  $\ddot{e}_o$ ,还要使得能从式(3-32)中方便地解出关节加速度  $\ddot{q}$ .所以如何定义描述指向误差的矢量  $e_o$  是解出加速度控制所要克服的主要困难.

记  ${}^0R_n = [n, o, a]$ , 期望指向用  ${}^0R_n^d = [n_d, o_d, a_d]$  表示,且由第1章中所述知存在单位矢量  $k$  和一转角  $\theta$ ,使得

$${}^0R_n^d = R_k(\theta) {}^0R_n \quad (3-33)$$

式中

$$R_k(\theta) \triangleq [\cos \theta I + (1 - \cos \theta) k k^T + \sin \theta S(k)] \quad (3-34)$$

由式(3-33)知  $R_k(\theta)$  反映了指向误差,亦即用  $k = k(t)$  和  $\theta = \theta(t)$  可以反映指向误差.但由习题1-8知,若直接由

$$R_k(\theta) = {}^0R_n^d ({}^0R_n)^{-1} = [n_d, o_d, a_d] [n, o, a]^T \quad (3-35)$$

求出  $k$  与  $\theta$ ,则  $k$  与  $\theta$  的表达式与期望指向  ${}^0R_n^d$  和实际指向  ${}^0R_n$  间的关系式将很复杂.因此Luh, Walker, Paul在文献[35]中建议用如下方法定义反映指向误差的矢量  $e_o$ .记

$$R_k(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

则由式(3-34)可知

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = k \sin \theta$$



又利用式(3-35)很容易验证

$$\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_d + \boldsymbol{o} \times \boldsymbol{o}_d + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}_d$$

因此可定义矢量

$$\boldsymbol{e}_o \triangleq k \sin \theta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_d + \boldsymbol{o} \times \boldsymbol{o}_d + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}_d) \quad (3-36)$$

来表示指向误差. 由此定义知, 当  $-\pi < \theta < \pi$  时,  $\boldsymbol{e}_o = 0$  的充要条件是  ${}^0\boldsymbol{R}_n = {}^0\boldsymbol{R}_n^d$ .

用式(3-36)所定义的  $\boldsymbol{e}_o$  来描述指向误差的优点, 不仅在于  $\boldsymbol{e}_o$  与  ${}^0\boldsymbol{R}_n^d$  和  ${}^0\boldsymbol{R}_n$  间关系很简洁, 而且更重要的是可以证明: 在一定条件下有  $\dot{\boldsymbol{e}}_o \approx \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d - \dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ . 事实上由式(3-35)和(1-35)知

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{R}}_k(\theta) &= {}^0\dot{\boldsymbol{R}}_n^d({}^0\boldsymbol{R}_n)^T + {}^0\boldsymbol{R}_n^d({}^0\dot{\boldsymbol{R}}_n)^T \\ &= \boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d) {}^0\boldsymbol{R}_n^d({}^0\boldsymbol{R}_n)^T + {}^0\boldsymbol{R}_n^d({}^0\boldsymbol{R}_n)^T [\boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_n)]^T \\ &= \boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d) \boldsymbol{R}_k(\theta) - \boldsymbol{R}_k(\theta) \boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_n) \end{aligned} \quad (3-37)$$

式中  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n$  为杆  $n$  的角速度,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d$  为杆  $n$  的期望角速度(当  ${}^0\boldsymbol{R}_n^d$  给定后, 可用式(1-35)确定出  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d$ ). 如果在初始时刻  $t_0$  使手端的指向与期望指向一致, 即使得  ${}^0\boldsymbol{R}_n(t_0) = {}^0\boldsymbol{R}_n^d(t_0)$ , 则当控制是稳定的跟踪控制时, 对每一时刻  $t$  均应有  ${}^0\boldsymbol{R}_n(t) \approx {}^0\boldsymbol{R}_n^d(t)$ . 由式(3-33)知, 这表明在任一时刻均有  $\boldsymbol{R}_k(\theta) \approx \boldsymbol{I}$ . 将其代入式(3-37)后知对任一时刻  $t$  均应有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{R}}_k(\theta) &= \begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d) - \boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_n) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_x^d + \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y^d - \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z^d - \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x^d + \dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y^d + \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_r^d - \dot{\omega}_r & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d = [\dot{\omega}_x^d, \dot{\omega}_y^d, \dot{\omega}_z^d]^T$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = [\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z]^T$ , 从而立即知

$$\dot{\boldsymbol{e}}_o = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{r}_{32} - \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{13} - \dot{r}_{31} \\ \dot{r}_{21} - \dot{r}_{12} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x^d - \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y^d - \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z^d - \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^d - \dot{\boldsymbol{\omega}}_n, \quad \ddot{\boldsymbol{e}}_o \approx \ddot{\boldsymbol{\omega}}_n^d - \ddot{\boldsymbol{\omega}}_n$$

## 2. 控制方案

由前所述知: 手端位置误差可用三维矢量  $\boldsymbol{e}_p$  表示, 指向误差可用三维矢量  $\boldsymbol{e}_o$  描述, 故整个手端的误差可用  $\boldsymbol{e} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_p \\ \boldsymbol{e}_o \end{bmatrix}$  来表示. 要使受控机器人

能跟踪任务空间中给定的期望轨迹,则希望闭环系统方程为

$$\ddot{\bar{e}} + k_d \dot{\bar{e}} + k_p \bar{e} = 0 \quad (3-38)$$

式中  $k_d$  和  $k_p$  均为正数. 考虑到当  ${}^nR_n(t_0) = {}^nR_n^d(t_0)$  且实现了稳定的轨迹跟踪时有

$$\dot{\bar{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_n^d - \dot{p}_n \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{v}_n^d - \dot{v}_n \\ \dot{\omega}_n^d - \dot{\omega}_n \end{bmatrix}, \quad \ddot{\bar{e}} \approx \begin{bmatrix} \ddot{v}_n^d - \ddot{v}_n \\ \ddot{\omega}_n^d - \ddot{\omega}_n \end{bmatrix}$$

式中  $v_n$  为杆坐标系  $n$  的原点  $O_n$  的速度,  $v_n^d$  为  $O_n$  的期望速度. 由上式知要满足式(3-38), 必须使手端加速度为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_n \\ \dot{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_n^d \\ \dot{\omega}_n^d \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} v_n^d - v_n \\ \omega_n^d - \omega_n \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

因由正向速度和加速度关系知

$$\begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}, \quad \begin{bmatrix} \dot{v}_n \\ \dot{\omega}_n \end{bmatrix} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}$$

式中  $J(q)$  为机器人的雅可比矩阵. 故对于不通过奇异位置的 6 自由度机器人, 可由式(3-39)解出机器人在关节空间中的加速度应为

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= J^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{v}_n \\ \dot{\omega}_n \end{bmatrix} - \dot{J}\dot{q} \right\} \\ &= J^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{v}_n^d \\ \dot{\omega}_n^d \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} v_n^d - v_n \\ \omega_n^d - \omega_n \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} - \dot{J}\dot{q} \right\} \\ &= J^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{v}_n^d \\ \dot{\omega}_n^d \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} v_n^d \\ \omega_n^d \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} - \dot{J}\dot{q} \right\} - k_d \dot{q} \triangleq \ddot{q}^* \end{aligned} \quad (3-40)$$

在上式的推导中可看出: 在式(3-38)中取  $k_d$  为一正数而不是一正定矩阵是为了在上面推导中能将  $k_d$  与  $J^{-1}$  交换, 从而导出更便于计算出所要求的关节加速度  $\ddot{q}^*$  的等式.

当用式(3-40)计算出所应具有的关节加速度  $\ddot{q}^*$  后, 由计算力矩法知所求的控制为

$$\tau = H(q)\ddot{q}^* + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

由上所述知, 应用解出加速度方案时要注意两点:

① 在起始位置使手端指向与期望指向一致.

② 在任务空间中给出的期望轨迹应不使机器人通过其奇异位置, 从而保证雅可比矩阵  $J$  可逆, 才能应用式(3-40)解出所需的关节空间中加速度  $\ddot{q}^*$ .

### 3.6 机器人的最优控制

#### 一、动态规划与 Hamilton-Jacobi 方程

用动态规划方法解最优控制问题是 Bellman 在 20 世纪 50 年代末提出的<sup>[36]</sup>,其基本思想是:若对一系统做出的一系列决策构成了对一性能指标的最优决策的话,则不论系统的先前决策如何,相继的决策都构成了一个以先前决策所得状态为初始状态的对同一性能指标的最优决策.用这一基本思想解最优控制问题的方法如下.

设系统方程为

$$\dot{x} = f(x, u, r, t) \quad (3-41)$$

式中  $x$  为系统状态,  $u$  为控制,  $r$  为参考输入. 给定一性能指标

$$J = x(t_f)^T P(t_f) x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, r, t) dt \quad (3-42)$$

式中  $P, L$  为已知;  $t_0, t_f$  分别为初始时间和终止时间. 最优控制问题的提法是: 给定参考输入  $r(t)$  和终止时间  $t_f$ , 要求确定控制  $u = u^*$ , 使得相应的状态  $x = x^*$  满足系统方程 (3-41) 且使性能指标 (3-42) 达到其最小值

$$J^* = x^*(t_f)^T P(t_f) x^*(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x^*, u^*, r, t) dt$$

这样的控制  $u^*$  被称为最优控制,  $J^*$  被称为最优性能指标.

为推导出最优控制应满足的必要条件, 设最优控制  $u^*$  存在, 则最优性能指标  $J^*$  只是初始状态  $x_0 = x(t_0)$  和初始时间  $t_0$  的函数, 即  $J^* = J^*(x_0, t_0)$ . 由式 (3-42) 知

$$\begin{aligned} J^*(x(t_0), t_0) &= \min_{u(t)} \{ x(t_f)^T P(t_f) x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, r, t) dt \} \\ &= \min_{u(t)} \{ \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, r, t) dt + x(t_1)^T P(t_1) x(t_1) + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_f} L(x, u, r, t) dt \} \end{aligned}$$

式中  $\min_{u(t)}$  表示对所有可能的  $u(t)$  取最小值,  $t_0 < t_1 < t_f$ . 由动态规划原理知, 由上式可得出

$$J^*(x(t_0), t_0) = \min_{u(t)} \{ \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, r, t) dt + J^*(x(t_1), t_1) \} \quad (3-43)$$

定义  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , 则

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x, u, r, t) dt = \{L(x, u, r, t)|_{t=t_0}\} \Delta t$$

式中  $t_0 \leq t_2 \leq t_1$ , 再将  $J^*(x(t_1), t_1)$  在  $(x(t_0), t_0)$  处展开, 得到

$$J^*(x(t_1), t_1) = J^*(x(t_0), t_0) + \left\{ \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T \right\}_{t_1=t_0} [x(t_1) - x(t_0)] + \left\{ \frac{\partial J^*}{\partial t_1} \right\}_{t_1=t_0} \Delta t$$

式中  $t_0 \leq t_3 \leq t_1, t_0 \leq t_4 \leq t_1$ . 将上两式代入式(3-43)后得

$$J^*(x(t_0), t_0) = \min_{u(t)} \{ [L(x, u, r, t)|_{t=t_0}] \Delta t + J^*(x(t_0), t_0) + \left[ \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T \right]_{t_1=t_0} [x(t_1) - x(t_0)] + \left[ \frac{\partial J^*}{\partial t_1} \right]_{t_1=t_0} \Delta t \}$$

因等式右端  $J^*(x(t_0), t_0)$  不是  $u(t)$  的函数, 可提出括号外, 故上式即为

$$\min_{u(t)} \{ [L(x, u, r, t)|_{t=t_0}] \Delta t + \left[ \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T \right]_{t_1=t_0} [x(t_1) - x(t_0)] + \left[ \frac{\partial J^*}{\partial t_1} \right]_{t_1=t_0} \Delta t \} = 0$$

将上式两端同除  $\Delta t$  后再令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 得到

$$\min_{u(t_0)} \{ L(x, u, r, t)|_{t=t_0} + \left[ \left( \frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T \dot{x} \right]_{t=t_0} + \frac{\partial J^*(x(t_0), t_0)}{\partial t_0} \} = 0$$

考虑到  $J^*(x(t_0), t_0)$  不是  $u(t_0)$  的函数且由系统方程知

$$\dot{x}(t_0) = f(x(t_0), u(t_0), r(t_0), t_0)$$

故上式可写为

$$\frac{\partial J^*(x(t_0), t_0)}{\partial t_0} + \min_{u(t_0)} \{ \left[ \frac{\partial J^*(x(t_0), t_0)}{\partial x} \right]^T f(x(t_0), u(t_0), r(t_0), t_0) + L(x(t_0), u(t_0), r(t_0), t_0) \} = 0$$

因起始时间  $t_0$  可以是任意时刻  $t$ , 故由上式知, 当控制  $u$  为最优控制时, 它必满足

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \min_{u(t)} \{ \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right)^T f(x, u, r, t) + L(x, u, r, t) \} = 0 \quad (3-44)$$

式(3-44)即为 Hamilton-Jacobi 方程. Hamilton-Jacobi 方程是关于性能指标  $J$  的偏微分方程, 由式(3-42)知其边界条件为

$$J(x(t_f), t_f) = \lim_{t_0 \rightarrow t_f} J(x(t_0), t_0) = x(t_f)^T P(t_f) x(t_f) \quad (3-45)$$

通常称  $p \triangleq - \frac{\partial J}{\partial x}$  为系统状态向量的伴随向量(或协态向量), 则

Hamilton-Jacobi 方程(3-44)可写为

$$\frac{\partial J}{\partial t} - \max_{u(t)} \{p^T f - L\} = 0 \quad (3-46)$$

定义  $\bar{H} = p^T f - L$ , 它与 3.3 节中定义的 Hamilton 函数具有相同的形式, 且可证明

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \end{cases}$$

故也称  $\bar{H}$  为 Hamilton 函数. 利用 Hamilton 函数的定义, 可将 Hamilton-Jacobi 方程式(3-46)写为

$$\frac{\partial J}{\partial t} - \max_{u(t)} \bar{H} = 0 \quad (3-47)$$

由 Hamilton-Jacobi 方程(3-47)知, 若最优控制  $u = u^*$  存在, 则它必使 Hamilton 函数  $\bar{H}$  取最大值. 因此当对  $u$  不存在其他约束时, 最优控制应满足

$$\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} \right)^T \right] \right|_{u=u^*} < 0$$

## 二、自由运动机器人的最优控制<sup>[37]</sup>

自由运动机器人方程

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

可写为

$$H(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau \quad (3-48)$$

式中  $N(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$ . 引入状态变量

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

可将机器人方程(3-48)写为状态方程形式

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u$$

其中

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -H^{-1}(x_1)N(x) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(x_1) \end{bmatrix}, \quad u = \tau$$

给定期望轨迹  $q_d$ , 则期望状态  $x_d = \begin{bmatrix} q_d \\ \dot{q}_d \end{bmatrix}$ . 若记状态误差  $e \triangleq x_d - x$ ,

则误差方程为

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - A(x_d - e) - B(x_d - e)u$$

取性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{P}(t_f) \mathbf{e}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{e}}] dt \} \quad (3-49)$$

其中  $\mathbf{Q}(t)$  为半正定矩阵,  $\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_0(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R}_0(t)$  和  $\mathbf{P}(t)$  分别为  $n \times n$  和  $2n \times 2n$  正定矩阵. 性能指标中第一项反映了对终点误差的要求, 积分号后第一项反映了对控制过程中误差的要求, 第二项间接反映了对能量消耗的要求. 按定义, Hamilton 函数

$$\begin{aligned} \bar{H} &= - \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \dot{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{e}} = - \mathbf{B}^T \left[ - \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} - \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}} \right] \\ &= \mathbf{B}^T \left[ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \right] \\ &= \mathbf{B}^T \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + [0, \mathbf{H}^{-1}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix} \right\} - \\ &\quad [0, \mathbf{H}^{-1}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{H}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{B}^T \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_0 (\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{N}) - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{u} \end{aligned}$$

令  $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0$ , 解出

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{H} \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{H} [\mathbf{B}^T \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_0 (\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{N})] \\ &= [0, \mathbf{H} \mathbf{R}_0^{-1}] \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{N} \triangleq \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (3-50)$$

因  $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0$  有唯一解  $\mathbf{u}^*$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \right] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[ \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \mathbf{B} + (\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{A})^T \mathbf{R} \mathbf{B} - \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{R} \mathbf{B} \right] \\ &= - \mathbf{B}^T \mathbf{R} \mathbf{B} = - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_0 \mathbf{H}^{-1} < 0 \end{aligned}$$

故  $\mathbf{u}^*$  是最优控制. 对应的最优误差方程和最优 Hamilton 函数  $H^*$  分别为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{u}^* \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{H}^{-1} \end{bmatrix} \left\{ [0, \mathbf{H} \mathbf{R}_0^{-1}] \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{N} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_d - \dot{q} \\ \ddot{q}_d - \ddot{q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_0^{-1} \end{bmatrix} \dot{\bar{e}} \\
&\triangleq Fe - T \frac{\partial J}{\partial e} \\
H^* &= - \left( \frac{\partial J}{\partial e} \right)^T \dot{e} - \frac{1}{2} e^T Q e - \frac{1}{2} \dot{e}^T R \dot{e} \\
&= - \left( \frac{\partial J}{\partial e} \right)^T F e + \left( \frac{\partial J}{\partial e} \right)^T T \frac{\partial J}{\partial e} - \frac{1}{2} e^T Q e - \\
&\quad \frac{1}{2} (Fe - T \frac{\partial J}{\partial e})^T R (Fe - T \frac{\partial J}{\partial e}) \\
&= - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial J}{\partial e} \right)^T F e + e^T F^T \frac{\partial J}{\partial e} - \left( \frac{\partial J}{\partial e} \right)^T T \frac{\partial J}{\partial e} + \right. \\
&\quad \left. e^T Q e \right] \quad (3-51)
\end{aligned}$$

由  $u^*$  的表达式(3-50)知,要完全确定出最优控制  $u^*$ , 还必须求出  $\frac{\partial J}{\partial e}$ . 由 Hamilton-Jacobi 方程的边界条件式(3-45)知

$$J(e(t_f), t_f) = \frac{1}{2} e^T(t_f) P(t_f) e(t_f)$$

故可设  $J(e(t), t)$  为二次型,即设  $J(e, t) = \frac{1}{2} e^T K(t) e$ . 这样

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2} e^T \dot{K}(t) e, \quad \frac{\partial J}{\partial e} = K(t) e$$

将上式及式(3-51)代入 Hamilton-Jacobi 方程  $\frac{\partial J}{\partial t} - H^* = 0$  后知

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} e^T \dot{K} e + \frac{1}{2} [e^T K F e + e^T F^T K e - e^T K T K e + e^T Q e] \\
&= \frac{1}{2} e^T [\dot{K} + K F + F^T K - K T K + Q] e
\end{aligned}$$

由  $e$  的独立性知  $K(t)$  应满足 Riccati 方程

$$\dot{K} = -K F - F^T K - Q + K T K \quad (3-52)$$

及边界条件

$$K(t_f) = P(t_f) \quad (3-53)$$

至此,求出了最优控制形如

$$\begin{aligned}
u^* &= [0, H R_0^{-1}] K e + H \ddot{q}_d + N \\
&= H(q) [\ddot{q}_d + R_0^{-1} K_3 (\dot{q}_d - \dot{q}) + R_0^{-1} K_2 (q_d - q)] + \\
&\quad C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad (3-54)
\end{aligned}$$

式中

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^T & K_3 \end{bmatrix}, \quad (K_1, K_2, K_3 \text{ 均为 } n \text{ 阶方阵})$$

是 Riccati 方程(3-52)和(3-53)的对称正定矩阵解。

特别地,当  $t_f = \infty$  且取性能指标中  $P = 0, Q, R$  均为常值矩阵,则由式(3-54)知最优控制

$$u^* = H(q)[\dot{q}_d + R_0^{-1}\tilde{K}_3(\dot{q}_d - \dot{q}) + R_0^{-1}\tilde{K}_2(q_d - q)] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (3-55)$$

式中对称正定矩阵

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \\ \tilde{K}_3^T & \tilde{K}_3 \end{bmatrix}, \quad (\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3 \text{ 均为 } n \text{ 阶方阵})$$

满足代数 Riccati 方程

$$\tilde{K}F + F^T\tilde{K} + Q - \tilde{K}T\tilde{K} = 0$$

由式(3-54)和(3-55)显然可知:本节求出的最优控制  $u^*$  与计算力矩法所得出的控制律(3-31)在形式上完全一样,只不过其中的速度反馈增益矩阵  $R_0^{-1}K_3$  或  $R_0^{-1}\tilde{K}_3$  和位置反馈增益矩阵  $R_0^{-1}K_2$  或  $R_0^{-1}\tilde{K}_2$  已为性能指标式(3-49)所确定,且当终止时刻  $t_f < \infty$  时,速度反馈增益矩阵  $R_0^{-1}K_3$  和位置反馈增益矩阵  $R_0^{-1}K_2$  是时变的。因此,本节中求出的最优控制律(3-54)和(3-55)均可视为计算力矩法的推广。

### 3.7 非线性解耦及任意极点方法

#### 一、实现系统解耦及任意极点的非线性控制器<sup>[38]</sup>

研究非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x, t) + B(x, t)u(t) \\ y(t) = C(x, t) + D(x, t)u(t) \end{cases} \quad (3-56)$$

式中  $x \in \mathbf{R}^n$  为系统状态;  $u, y \in \mathbf{R}^m$  分别为系统的控制和输出。

记  $C(x, t)$  的第  $i$  个分量为  $c_i(x, t)$ , 递推地定义非线性算子  $N_A^k (k = 0, 1, 2, \dots)$ , 其中

$$\begin{cases} N_A^0 c_i(x, t) = c_i(x, t) \\ N_A^k c_i(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} N_A^{k-1} c_i(x, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} N_A^{k-1} c_i(x, t) \right]^T A(x, t) \end{cases} \quad (3-57)$$

又记  $D(x, t)$  的第  $i$  行为  $D_i(x, t)$ , 再定义系统的相对阶  $d_i (i = 1, \dots, m)$  为

$$d_i = \begin{cases} 0, & D_i(x, t) \neq 0 \\ \min_{1 \leq j \leq n} \{j \mid \left[ \frac{\partial}{\partial x} N_A^{j-1} c_i(x, t) \right]^T B(x, t) \neq 0\}, & D_i(x, t) \equiv 0 \end{cases} \quad (3-58)$$

利用定义很容易证明(习题 3-9):若  $d_i > 0$ , 则当  $k < d_i$  时,  $y_i$  的  $k$  阶



导数

$$y_i^{(k)} = N_{A_i}^k c_i(x, t) \quad (3-59)$$

由式(3-56)~(3-59)可证明:若定义

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1^{(d_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(d_m)} \end{bmatrix}, C^* = \begin{bmatrix} c_1^* \\ \vdots \\ c_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{A_1}^{d_1} c_1(x, t) \\ \vdots \\ N_{A_m}^{d_m} c_m(x, t) \end{bmatrix}, D^* = \begin{bmatrix} D_1^* \\ \vdots \\ D_m^* \end{bmatrix}$$

$$D_i^* = \begin{cases} D_i(x, t), & \text{当 } d_i = 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x} N_{A_i}^{d_i-1} c_i(x, t) \right]^T B(x, t), & \text{当 } d_i > 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

则利用式(3-59)可得出直接反映输入输出关系的方程(习题3-10)

$$y^* = C^* + D^* u \quad (3-60)$$

若上式中  $m \times m$  矩阵  $D^*$  可逆,则可取控制

$$u = -(D^*)^{-1}(C^* + M^*) + (D^*)^{-1}Kv \quad (3-61)$$

式中  $v \in \mathbb{R}^m$  为新的输入;  $K = \text{diag}[k_1, \dots, k_m]$ ,  $k_i$  为常数;  $M^* = [m_1^*, \dots, m_m^*]^T \in \mathbb{R}^m$ ,

$$m_i^* = \begin{cases} 0, & \text{当 } d_i = 0, \\ \sum_{k=0}^{d_i-1} \alpha_{k,i} N_{A_i}^k c_i(x, t), & \text{当 } d_i > 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

其中  $\alpha_{k,i}$  为常数. 代入式(3-60)知闭环系统方程为

$$y^* = -M^* + Kv \quad (3-62)$$

由式(3-59)知其第  $i$  个分量为

$$y_i^{(d_i)} = - \sum_{k=0}^{d_i-1} \alpha_{k,i} N_{A_i}^k c_i(x, t) + k_i v_i = - \sum_{k=0}^{d_i-1} \alpha_{k,i} y_i^{(k)} + k_i v_i$$

亦即

$$y_i^{(d_i)} + \alpha_{d_i-1,i} y_i^{(d_i-1)} + \dots + \alpha_{0,i} y_i = k_i v_i$$

由此可知闭环系统(3-62)为完全解耦的形式,且通过适当选取  $\alpha_{k,i}$  可任置闭环极点.

由控制律(3-61)的形式可知,控制  $u$  可写为

$$u = \alpha(x, t) + \beta(x, t) v$$

其中

$$\alpha(x, t) = [-(D^*)^{-1}C^*] + [-(D^*)^{-1}M^*]$$

$$\triangleq \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t)$$

$$\beta(x, t) = (D^*)^{-1}K$$

从以上推导过程可看出,  $\alpha_1(x, t) = -(D^*)^{-1}C^*$  的作用是将闭环方程解耦为  $d_i$  阶系统,  $\alpha_2(x, t) = -(D^*)^{-1}M^*$  的作用是任置闭环系统极点.

$\beta(x, t) = (D^*)^{-1}K$  的作用是确定新输入  $v$  的增益.

## 二、非线性解耦及任意极点方法在机器人控制中的应用<sup>[39]</sup>

若令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad y = x_1 = q, \quad u = \tau$$

则机器人方程

$$H(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau \quad (3-63)$$

可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) + B(x)u \\ y = Cx \end{cases} \quad (3-64)$$

其中

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -H^{-1}N \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1} \end{bmatrix}, \quad C = [I_n, 0]$$

式(3-64)具有和式(3-56)相同的形式. 另外从机器人方程(3-63)可得到消去状态变量  $x$  的导数后的直接反映输入输出关系的方程

$$\ddot{y} = -H^{-1}N + H^{-1}u \quad (3-65)$$

将式(3-65)与式(3-60)比较后知

$$d_i = 2 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad C^* = -H^{-1}N, \quad D^* = H^{-1}$$

利用输出方程  $y = Cx$  可计算出  $M^*$ . 事实上, 因

$$c_i(x) = [e_i^T, 0]x = q_i$$

式中  $e_i$  为  $\mathbb{R}^n$  中第  $i$  个单位矢量, 故

$$\left[ \frac{\partial c_i(x)}{\partial x} \right]^T A(x) = [e_i^T, 0]A(x) = e_i^T x_2 = \dot{q}_i$$

按定义

$$M^* = \begin{bmatrix} m_1^* \\ \vdots \\ m_n^* \end{bmatrix}, \quad m_i^* = \alpha_{0,i} q_i + \alpha_{1,i} \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

因此  $M^*$  也可写为

$$M^* = \Lambda_0 q + \Lambda_1 \dot{q}$$

式中

$$\Lambda_0 \triangleq \text{diag} [\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,n}], \quad \Lambda_1 \triangleq \text{diag} [\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n}]$$

因  $D^* = H^{-1}$  可逆, 由式(3-61)知可取控制

$$u = -(D^*)^{-1}(C^* + M^*) + (D^*)^{-1}Kv$$

$$\begin{aligned}
&= -H(-H^{-1}N + \Lambda_0 \dot{q} + \Lambda_1 \ddot{q}) + HKv \\
&= N + H(Kv - \Lambda_1 \ddot{q} - \Lambda_0 \dot{q}) \\
&= C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + H(q)[Kv - \Lambda_1 \ddot{q} - \Lambda_0 \dot{q}] \quad (3-66)
\end{aligned}$$

式中  $K = \text{diag}[k_1, \dots, k_n]$ , 若取  $Kv = \ddot{q}_d + \Lambda_1 \dot{q}_d + \Lambda_0 \ddot{q}_d$ , 则控制

$$\tau = H(q)[\ddot{q}_d + \Lambda_1(\dot{q}_d - \dot{q}) + \Lambda_0(\ddot{q}_d - \ddot{q})] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

从上式立即知, 用本节方法所导出的控制律(3-66)也可视为计算力矩法的推广。

### 3.8 基于输入-输出稳定性理论设计的 机器人控制器

#### 一、概述

在本章以前各节讲述的各种自由运动机器人控制器都有两个共同的特点:

① 当加入所确定的控制律后, 闭环系统是一个线性系统(或者更准确地说, 闭环误差方程是线性方程)。

② 稳定性分析基于李雅普诺夫稳定性理论。

本节将要讲述的是另一类控制方案, 它与以前各节所讲述方案的区别在于:

① 当加入所确定的控制律后, 闭环系统不是一个线性系统, 而是一个非线性系统(即闭环误差方程是一非线性方程)。

② 稳定性分析基于输入-输出稳定性理论。

这类控制方案的最大优点是可以导出一类很好的自适应控制方案(详见下节)。

#### 二、预备知识<sup>[40]</sup>

在分析复杂的非线性控制系统时, 有时采用以泛函分析为工具的输入-输出稳定性理论将会更加方便。下面先介绍本节中要用到的有关定义、术语和引理。

众所周知, 对  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ , 可引入以下范数的定义:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\
\|x\|_\infty &= \max_{i \in n} |x_i|
\end{aligned}$$

令  $\mathbf{R}_+ \triangleq [0, \infty)$ , 研究函数  $g(t) = [g_1(t), \dots, g_n(t)]^T: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ . 若在任

一有限闭区间  $[a, b] \subset \mathbf{R}_+$  上均有

$$\int_a^b g_i(t) dt < \infty, \quad i = 1, \dots, n$$

则称  $g(t)$  是局部可积的.

以下几个集合的定义是常用的:

$$L_n \triangleq \{g(t) | g(t): \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ 是局部可积的} \}$$

$$L_n^p \triangleq \{g(t) | g(t) \in L_n \text{ 且 } \int_0^\infty \|g(t)\|^p dt < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

$$L_n^\infty \triangleq \{g(t) | g(t) \in L_n \text{ 且 } \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbf{R}_+} \|g(t)\| < \infty\}$$

注意:在上述  $L_n^p$  和  $L_n^\infty$  的定义中  $\|g(t)\|$  可以是  $g(t)$  的任何一种范数.

记以  $s$  的实系数有理函数为元的  $n \times n$  矩阵全体为  $\mathbf{R}^{n \times n}(s)$ , 则对  $W(s) \in \mathbf{R}^{n \times n}(s)$  有以下定义:

- ① 若当  $s \rightarrow \infty$  时  $W(s)$  的所有元均有界, 则称  $W(s)$  是正则的.
- ② 若当  $s \rightarrow \infty$  时  $W(s)$  的所有元都趋于零, 则称  $W(s)$  是严格正则的.
- ③ 若  $W(s)$  是正则的且其所有极点的实部均为负, 则称  $W(s)$  是指数稳定的.

**引理3-1** 若  $1 \leq p < \infty$ , 则当  $g(t) \in L_n^p$  且  $g(t)$  在  $\mathbf{R}_+$  上一致连续时有

$$g(t) \rightarrow 0, \quad \text{当 } t \rightarrow \infty$$

考虑到当  $\dot{g}(t) \in L_n^\infty$  时,  $g(t)$  在  $\mathbf{R}_+$  上一致连续, 故对引理3-1有以下推论.

**推论3-1** 若  $1 \leq p < \infty$ , 则当  $g(t) \in L_n^p$  且  $\dot{g}(t) \in L_n^\infty$  时有

$$g(t) \rightarrow 0, \quad \text{当 } t \rightarrow \infty$$

**引理3-2** 研究输入-输出系统

$$\underline{e}(s) = W(s) \underline{r}(s)$$

式中  $\underline{e}(s), \underline{r}(s)$  为  $e(t), r(t) \in L_n$  的 Laplace 变换,  $W(s) \in \mathbf{R}^{n \times n}(s)$ . 若  $W(s)$  是严格正则且指数稳定的, 则当  $r(t) \in L_n^2 \cap L_n^\infty$  时有:

- ①  $e(t) \in L_n^2 \cap L_n^\infty$ .
- ②  $\dot{e}(t) \in L_n^2 \cap L_n^\infty$ .
- ③  $e(t)$  在  $\mathbf{R}_+$  上一致连续.
- ④  $e(t) \rightarrow 0$ , 当  $t \rightarrow \infty$ .

### 三、控制方案<sup>[41]</sup>

设机器人所要完成的任务是跟踪时变期望轨迹  $q_d(t)$ . 记位置误差  $e$

$= q_d - q$ , 定义

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q) = \dot{q}_d + \Lambda e$$

式中  $\Lambda$  为一正定矩阵, 取控制

$$\tau = H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) \quad (3-67)$$

式中  $K_d$  为正定矩阵, 则闭环系统方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q})$$

即

$$H(q)(\ddot{q}_r - \ddot{q}) + C(q, \dot{q})(\dot{q}_r - \dot{q}) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) = 0 \quad (3-68)$$

考虑到

$$\dot{q}_r - \dot{q} = \dot{e} + \Lambda e, \quad \ddot{q}_r - \ddot{q} = \ddot{e} + \Lambda \dot{e}$$

故式(3-68)即为

$$H(q_d - e)(\ddot{e} + \Lambda \dot{e}) + C(q_d - e, \dot{q}_d - \dot{e})(\dot{e} + \Lambda e) + K_d(\dot{e} + \Lambda e) = 0$$

这表明: 本节的控制方案与前几节所讲述的控制方案不同, 由它所得到的闭环系统方程是一个关于误差  $e$  的非线性微分方程。

显然, 若定义

$$r = \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{e} + \Lambda e$$

则由式(3-68)知闭环系统方程也可写为更紧凑的形式

$$H(q)\dot{r} + C(q, \dot{q})r + K_d r = 0 \quad (3-69)$$

#### 四、稳定性分析

取函数

$$v(t) = \frac{1}{2} r^T H(q) r$$

由  $H(q)$  的正定性知  $v(t) \geq 0$ , 又由式(3-69)知  $v(t)$  沿闭环系统(3-69)的轨迹的导数为

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= r^T H(q) \dot{r} + \frac{1}{2} r^T \dot{H}(q) r \\ &= r^T [-C(q, \dot{q}) - K_d] r + \frac{1}{2} r^T \dot{H}(q) r \end{aligned}$$

由  $\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$  的反对称性知

$$r^T \left[ \frac{1}{2} \dot{H}(q) - C(q, \dot{q}) \right] r = 0$$

再考虑到  $K_d$  的正定性后由上式知

$$\dot{v}(t) = -r^T K_d r \leq 0 \quad (3-70)$$

这表明沿闭环系统轨迹  $v(t)$  是单调有界的, 故当  $t \rightarrow \infty$  时  $v(t)$  存在有限极限  $v(\infty)$  且有

$$0 \leq v(\infty) \leq v(t) \leq v(t_0) < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3-71)$$

由上式及  $v(t)$  的定义知

$$0 \leq \frac{1}{2} \lambda_m[H(q)] \|r\|_2^2 \leq \frac{1}{2} r^T H(q) r < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

式中  $\lambda_m[H(q)] > 0$  为  $H(q)$  的最小特征值. 故由此式知  $r(t)$  是  $\mathbf{R}_+$  上的有界函数, 即  $r \in L_\infty^n$ .

又由式(3-70)及  $K_d$  的正定性知

$$\dot{v}(t) = -r^T K_d r \leq -\lambda_m(K_d) \|r\|_2^2$$

故

$$\|r\|_2^2 \leq -\frac{1}{\lambda_m(K_d)} \dot{v}(t)$$

从而由式(3-71)知

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \|r\|_2^2 dt &\leq -\frac{1}{\lambda_m(K_d)} \int_{t_0}^{\infty} \dot{v}(t) dt = \frac{1}{\lambda_m(K_d)} [v(t_0) - v(\infty)] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m(K_d)} v(t_0) < \infty, \quad \forall t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

这就证明了  $r \in L_2^n$ .

由定义知  $r = \dot{e} + \Lambda e$  的 Laplace 变换为

$$\underline{r}(s) = s \underline{e}(s) + \Lambda \underline{e}(s) = (sI_n + \Lambda) \underline{e}(s)$$

故有

$$\underline{e}(s) = (sI_n + \Lambda)^{-1} \underline{r}(s) \triangleq W(s) \underline{r}(s)$$

因  $\Lambda$  为正定矩阵, 故  $W(s)$  是严格正则且指数稳定的. 因已证明了  $r \in L_\infty^n \cap L_2^n$ , 故由引理3-2知  $\dot{e} \in L_n^2 \cap L_n^\infty, e \in L_n^2 \cap L_n^\infty$  且  $e(t) \rightarrow 0$  (当  $t \rightarrow \infty$ ).

因期望轨迹  $q_d$  的设计使得  $q_d \in L_n^\infty, \dot{q}_d \in L_n^\infty, \ddot{q}_d \in L_n^\infty$ , 故由  $\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \in L_n^\infty$  知  $\dot{q} \in L_n^\infty$  且  $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda \dot{e} \in L_n^\infty$ ; 由  $e = q_d - q \in L_n^\infty$  知  $q \in L_n^\infty$ ,  $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda \dot{e} \in L_n^\infty$ , 因此由式(3-67)知

$$\tau = H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) \in L_n^\infty$$

又由机器人方程知

$$\ddot{q} = H(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \in L_n^\infty$$

从而  $\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \in L_n^\infty$ . 因  $\dot{e} \in L_n^2$  且  $\ddot{e} \in L_n^\infty$ , 故由引理3-1的推论知  $\dot{e} \rightarrow 0$  (当  $t \rightarrow \infty$ ). 至此证明了  $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$ , 亦即  $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ .

对于以上证明, 值得说明的有3点:

①  $v(t) = \frac{1}{2} \dot{r}^T H(q) \dot{r}$  不是  $e$  和  $\dot{e}$  的正定函数. 事实上

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} (\dot{e} + \Lambda e)^T H(q) (\dot{e} + \Lambda e) \\ &= \frac{1}{2} \dot{e}^T H \dot{e} + \dot{e}^T H \Lambda e + \frac{1}{2} e^T \Lambda H \Lambda e \\ &= \frac{1}{2} [\dot{e}^T, e^T] \begin{bmatrix} H & H \Lambda \\ \Lambda H & \Lambda H \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Lambda & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & H \Lambda \\ \Lambda H & \Lambda H \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & H \Lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故矩阵

$$\begin{bmatrix} H & H \Lambda \\ \Lambda H & \Lambda H \Lambda \end{bmatrix}$$

有零特征值, 所以它不是正定矩阵. 这表明  $v(t)$  不能作为闭环系统 (3-68) 或 (3-69) 的李雅普诺夫函数.

② 从稳定性证明中可看出, 可微函数  $v(t)$  在某些方面起到了和李雅普诺夫函数相类似的作用, 所以有些文献中将其称为拟李雅普诺夫函数 (quasi-Lyapunov function) 或似李雅普诺夫函数 (Lyapunov-like function).

③ 以上所述的稳定性证明不是唯一的, 也可以利用非线性控制系统理论中的无源性定理 (Passivity Theory)<sup>[12]</sup> 来证明上述控制方案的稳定性 (习题3-11).

**例3-3** 当要求例3-1中的 DDArm 机械臂完成例3-2中跟踪期望轨迹  $q_d(t)$  的任务时, 即  $t=0$  时从  $q = [-0.1, 1.5, 1.0]^T \text{ rad}$  出发, 跟踪用  $t$  的5次多项式表示的时变期望轨迹

$$q_d(t) = \frac{1}{1.5^3} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} t^3 + \frac{1}{1.5^3} \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} t^4 + \frac{1}{1.5^5} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} t^5$$

时, 也可不采用计算力矩法而采用本节所述的控制方案, 取

$$\tau = H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q})$$

式中  $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q)$ ,  $\Lambda = \text{diag}[4, 4, 5]$ ,  $K_d = \text{diag}[100, 20, 10]$ . 其计算机仿真结果如图3-10中实线所示 (图中点画线为期望轨迹  $q_d(t)$ ), 从图中可以看出: 本节所述的控制方案也可使机器人跟踪时变的期望轨迹.

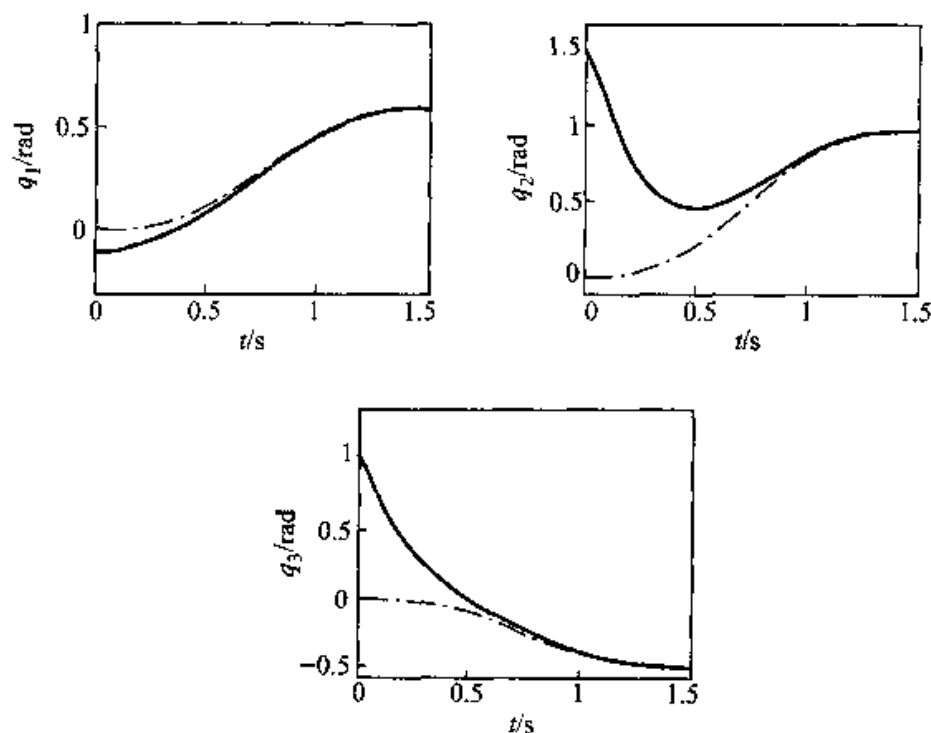


图 3-10

### 3.9 机器人的自适应控制

#### 一、概述

在前面各节中设计机器人控制器时,都认为机器人模型是精确已知的,但实际情况并非如此,通常机器人的几何参数(即 D-H 参数或修改的 D-H 参数)是已知或能精确测量出的,而机器人的许多惯性参数常是不精确知道的或是完全未知的,所以在这种情况下不能应用本章前几节中所讲的各种控制方案,这时常采用带有实时参数估计的自适应控制方案。

在20世纪80年代以前,机器人的自适应控制多是直接应用当时已发展得较为成熟的线性系统的自适应控制理论,为了使线性系统的自适应控制方案能应用于模型是非线性的机器人,通常将机器人模型线性化,或是在稳定性证明中作某些近似处理(如文献[43]等)。这类方法的最大缺点是其稳定性证明不可能是严格的证明,因此从20世纪80年代以来,人们开始从机器人本身的模型出发研究其自适应控制问题;常用的途径有两种:一种是基于计算力矩法的自适应控制方案,另一种是基于上节所讲的输入-输出稳定性理论设计的自适应控制方案。



## 二、基于计算力矩法的自适应控制方案<sup>[44]</sup>

### 1. 控制方案

本节所研究的仍是如何控制机器人跟踪一·时变期望轨迹  $q_d(t)$ , 但这时机器人的惯性参数  $p$  不是精确已知的, 而是只知其估计值  $\hat{p}$ . 这时若利用计算力矩法, 则只能利用  $\hat{p}$  计算出

$$\tau = \hat{H}(q)(\ddot{q}_d + K_d\dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (3-72)$$

式中  $\hat{H}, \hat{C}, \hat{G}$  为利用惯性参数的估计值  $\hat{p}$  计算出的  $H, C, G$  的估计值. 将式(3-72)代入机器人模型后有

$$\begin{aligned} & H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \\ & = \hat{H}(q)(\ddot{q}_d + K_d\dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \end{aligned}$$

再由机器人动态特性与其惯性参数间的线性关系知上式可写为

$$\begin{aligned} \hat{H}(q)(\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e) & = \tilde{H}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q) \\ & = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{p} \end{aligned} \quad (3-73)$$

式中  $\tilde{H} \triangleq H - \hat{H}, \tilde{C} \triangleq C - \hat{C}, \tilde{G} \triangleq G - \hat{G}, \tilde{p} \triangleq p - \hat{p}$ . 因一般  $\hat{p} \neq p$ , 故  $\tilde{H} \neq 0, \tilde{C} \neq 0, \tilde{G} \neq 0$ , 因此式(3-73)不再能化为线性定常系统

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0$$

这时, 需要设计一参数实时估计律, 使得在式(3-72)作用下产生的闭环系统能在任意初始条件下实现  $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$ .

设参数  $p$  的估计值  $\hat{p}$  能保证  $\hat{H}(q)$  始终可逆, 则闭环系统方程可写为

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = \hat{H}^{-1}(q)Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{p} \triangleq \Phi \tilde{p} \quad (3-74)$$

令  $x = [e^T, \dot{e}^T]^T$ , 则式(3-74)可写为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Phi \tilde{p} \triangleq Ax + B\Phi \tilde{p} \quad (3-75)$$

由于  $K_d$  和  $K_p$  是由设计者确定的正定矩阵, 可以证明  $A$  是稳定的(习题3-13), 故对任给的正定矩阵  $Q$ , 李雅普诺夫方程

$$A^T R + RA = -Q$$

有唯一正定矩阵解  $R$ . 这时可取参数估计律为

$$\dot{\hat{p}} = \Gamma^{-1} \Phi^T B^T R x \quad (\Gamma \text{ 为正定矩阵}) \quad (3-76)$$

此参数估计律与控制律(3-72)一起构成了机器人位置控制的一种自适应控制方案.

### 2. 稳定性证明

考虑到机器人惯性参数  $p$  为一常值矢量后可知参数估计律(3-76)也可写为

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma^{-1} \Phi^T B^T R x \quad (3-77)$$

故这时闭环系统方程由式(3-75)和(3-77)组成,其状态变量为

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}$$

取闭环系统的李雅普诺夫函数  $v = x^T R x + \tilde{p}^T \Gamma \tilde{p}$ , 则可算出它沿系统(3-75)和(3-77)的轨迹的导数

$$\dot{v} = -x^T Q x + 2\tilde{p}^T [\Phi^T B^T R x + \Gamma \dot{\tilde{p}}] = -x^T Q x \leq 0 \quad (3-78)$$

故闭环系统零点  $\begin{bmatrix} x \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = 0$  是稳定的(但不一定是渐近稳定的).

为证明  $x \rightarrow 0$  (当  $t \rightarrow \infty$ ), 还需如以下证明:

由  $v$  的定义及式(3-78)知  $v = v(t)$  满足

$$0 \leq v(\infty) \leq v(t) \leq v(t_0) < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

由  $v(t)$  定义知

$$0 \leq \lambda_m(R) \|x\|_2^2 + \lambda_m(\Gamma) \|\tilde{p}\|_2^2 \leq v(t) < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

这表明  $x \in L_{2n}^\infty, \tilde{p} \in L_{10n}^\infty$ . 又由式(3-78)知

$$\begin{aligned} \dot{v} &\leq -\lambda_m(Q) \|x\|_2^2 \\ \int_{t_0}^{\infty} \|x\|_2^2 dt &\leq -\frac{1}{\lambda_m(Q)} \int_{t_0}^{\infty} \dot{v} dt = -\frac{1}{\lambda_m(Q)} [v(t_0) - v(\infty)] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m(Q)} v(t_0) < \infty \end{aligned}$$

这表明  $x \in L_{2n}^2$ .

又由  $x \in L_{2n}^\infty, \tilde{p} \in L_{10n}^\infty, q_d \in L_n^\infty, \dot{q}_d \in L_n^\infty, \ddot{q}_d \in L_n^\infty, p \in L_{10n}^\infty$  及控制律(3-72)知  $q \in L_n^\infty, \dot{q} \in L_n^\infty, \tau \in L_n^\infty$ . 再代入机器人方程后知  $\ddot{q} \in L_n^\infty$ , 从而知  $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_d - \dot{q} \\ \dot{\tilde{q}}_d - \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in L_{2n}^\infty$ . 至此证明了  $x \in L_{2n}^2$  且  $\dot{x} \in L_{2n}^\infty$ , 故由上节的推论3-1知  $x \rightarrow 0$  (当  $t \rightarrow \infty$ ), 即  $\dot{e} \rightarrow 0, e \rightarrow 0$ , 亦即  $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ .

### 3. 说明

① 在以上证明中尽管证明了  $q \rightarrow q_d$  和  $\dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ , 但并未证明  $\tilde{p} \rightarrow 0$ . 即惯性参数的估计值不一定收敛到其真值.

② 从参数估计律(3-76)可看出

$$\dot{\hat{p}} = \Gamma^{-1} [\hat{H}^{-1}(q) Y(q, \dot{q}, \ddot{q})]^T B^T R x$$

因此这种自适应控制方案有两个极大的缺点: 一是要保证  $\hat{H}(q)$  可逆且需计算逆矩阵  $\hat{H}^{-1}(q)$ , 这需要较大的计算量; 二是需要关节加速度信号

$\ddot{q}$ , 这一般是难于做到的. 为克服这两个缺点, 许多研究者对上述自适应控制方案作了不少修改, 但始终未能同时克服掉这两个缺点.

### 三、Slotine, Li 的自适应控制方案<sup>[41]</sup>

#### 1. 控制方案

当惯性参数  $p$  不精确知道而仅知其估计值  $\hat{p}$  时, 3.8节中的控制律变为

$$\tau = \dot{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) \quad (3-79)$$

代入机器人方程后有

$$H(q)\ddot{r} + C(q, \dot{q})\dot{r} + K_d\dot{r} - \tilde{H}(q)\ddot{q}_r - \tilde{C}\dot{q}_r + \tilde{G} \\ \triangleq Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r)\tilde{p} \quad (3-80)$$

这时可取参数估计律为

$$\dot{\hat{p}} = \Gamma^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r)r \quad (\Gamma \text{ 为正定矩阵}) \quad (3-81)$$

注意到  $\ddot{q}_r = \ddot{q}_d + \Lambda(\dot{q}_d - \dot{q})$ , 故由式(3-79)和(3-81)构成的自适应控制方案中不要求  $\ddot{H}^{-1}(q)$ , 也不用测量  $\ddot{q}$ , 这就完全克服了前面所述基于计算力矩法的自适应控制方案的缺点.

#### 2. 稳定性证明

因机器人惯性参数  $p$  为一常值向量, 故参数估计律(3-81)也可写为

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r)r \quad (3-82)$$

所以闭环系统方程由式(3-80)和式(3-82)描述. 定义函数

$$v(t) = \frac{1}{2}[r^T H(q)r + \tilde{p}^T \Gamma \tilde{p}]$$

由  $H(q)$  及  $\Gamma$  的正定性知  $v(t) \geq 0$ . 由式(3-80)和(3-82)知沿闭环系统轨迹

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= r^T H(q)\dot{r} + \frac{1}{2}r^T \dot{H}(q)r + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}} \\ &= r^T [-C(q, \dot{q})\dot{r} - K_d\dot{r} + \frac{1}{2}\dot{H}(q)r + Y\tilde{p}] + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}} \\ &= -r^T K_d\dot{r} + r^T [\frac{1}{2}\dot{H}(q) - C(q, \dot{q})]\dot{r} + \tilde{p}^T (Y^T \dot{r} + \Gamma \dot{\tilde{p}}) \\ &= -r^T K_d\dot{r} \leq 0 \end{aligned} \quad (3-83)$$

这表明沿式(3-80)和(3-82)描述闭环系统的轨迹  $v(t)$  在  $\mathbf{R}_+$  上单调有界, 故存在有限极限  $v(\infty)$  且有

$$0 \leq v(\infty) \leq v(t) \leq v(t_0) < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

由上式及  $v(t)$  定义知

$$0 \leq \frac{1}{2} \lambda_m[H(q)] \|r\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_m(\Gamma) \|\tilde{p}\|_2^2$$

$$\leq v(t) < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

因  $\lambda_m[H(q)] > 0, \lambda_m(\Gamma) > 0$ , 上式表明  $r \in L_n^\infty, \tilde{p} \in L_{10n}^\infty$ .

又由式(3-83)知

$$\dot{v}(t) \leq -\lambda_m(K_d) \|r\|_2^2, \quad \|r\|_2^2 \leq -\frac{1}{\lambda_m(K_d)} \dot{v}(t)$$

故

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \|r\|_2^2 dt &\leq -\frac{1}{\lambda_m(K_d)} \int_{t_0}^{\infty} \dot{v}(t) dt = \frac{1}{\lambda_m(K_d)} [v(t_0) - v(\infty)] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m(K_d)} v(t_0) < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

这证明了  $r \in L_n^2$ .

又由定义知  $r$  和  $e$  间的 Laplace 变换为

$$\underline{e}(s) = (sI_n + \Lambda)^{-1} \underline{r}(s) \triangleq W(s) \underline{r}(s)$$

因  $W(s)$  是严格正则且指数稳定的, 并已证明了  $r \in L_n^2 \cap L_n^\infty$ , 故由上节的引理3-2知  $\dot{e} \in L_n^2 \cap L_n^\infty, e \in L_n^2 \cap L_n^\infty$  且  $e(t) \rightarrow 0$  (当  $t \rightarrow \infty$ ). 再考虑到  $q_d \in L_n^\infty, \dot{q}_d \in L_n^\infty, \ddot{q}_d \in L_n^\infty$ , 故由  $\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \in L_n^\infty$  知  $\dot{q} \in L_n^\infty, \ddot{q}_r = \ddot{q}_d + \Lambda \dot{e} \in L_n^\infty$ ; 又由  $e = q_d - q \in L_n^\infty$  知  $q \in L_n^\infty, \ddot{q}_r = \ddot{q}_d + \Lambda e \in L_n^\infty$ ; 另外又由  $\tilde{p} = p - \hat{p} \in L_{10n}^\infty$  知  $\hat{p} \in L_{10n}^\infty$ , 所以由控制律(3-79)知

$$\begin{aligned} \tau &= \hat{H}(q) \ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \hat{G}(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) \\ &= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r) \hat{p} + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) \in L_n^\infty \end{aligned}$$

将  $q \in L_n^\infty, \dot{q} \in L_n^\infty, \tau \in L_n^\infty$  代入机器人方程知  $\ddot{q} \in L_n^\infty$ , 从而  $\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \in L_n^\infty$ . 因  $\dot{e} \in L_n^2, \ddot{e} \in L_n^\infty$ , 由上节推论3-1知  $\dot{e} \rightarrow 0$ . 至此, 证明了  $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$ . 亦即  $q \rightarrow q_d$  且  $\dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ .

### 3. 说明

① 和基于计算力矩法的自适应控制方案一样, 虽然可证明  $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$ , 但只能证明  $\hat{p} \in L_{10n}^\infty$ , 而不能证明  $\hat{p} \rightarrow p$ .

② 要实现此自适应控制方案, 必须解决控制律(3-79)的计算问题, 其主要困难在于如何有效地计算与动力学有关的项  $\hat{H}(q) \ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \hat{G}(q)$ . 因为在2.3节中讲述的逆动力学算法中只在一处用到  $\dot{q}$ , 也就是说利用2.3节中的逆动力学算法只可以计算出  $\hat{H}(q) \ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q)$  (这可在算法中令  $\ddot{q} = \ddot{q}_r$  且惯性参数取其估计值  $\hat{p}$  来得到), 或者计算出  $\hat{H}(q) \ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r + \hat{G}(q)$  (这可在算法中令  $\ddot{q} = \ddot{q}_r, \dot{q} = \dot{q}_r$  且令惯性参数  $p = \hat{p}$  来得到). 因此在最初提出这种控制方案时, 不得不将控制

律(3-79)改为

$$\tau = \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q})$$

这样闭环系统方程为

$$H(q)\dot{r} + K_d r = \tilde{H}\ddot{q}_r + \tilde{C}\dot{q} + \tilde{G} = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\tilde{p}$$

仍取同样的参数估计律及  $v(t)$  后可证明沿闭环系统轨迹

$$\dot{v}(t) = -r^T(K_d - \frac{1}{2}\dot{H})r$$

这时要保证闭环系统的稳定性,必须使增益矩阵  $K_d$  满足

$$K_d > \frac{1}{2}\dot{H}(q), \quad \forall q \in \mathbb{R}^n \quad (3-84)$$

显然这一条件并不是由控制方案所要求的,而只是由于未找到合适的算法计算控制律(3-79)所引起的.

1988年 Niemeyer, Slotine 找到了递推算法来计算控制律(3-79)和参数估计律(3-81),因此对增益矩阵  $K_d$  的限制条件式(3-84)可以去掉<sup>[28]</sup>.最近,又证明了:利用满足  $\dot{H} - 2C$  是反对称矩阵的  $C$  不是唯一确定的这一性质,可以找出比 Niemeyer, Slotine 所找到的算法的计算量少得多的算法<sup>[10]</sup>.由于推导这些算法所用的工具超出本书的范围,故不再详述.

③ 与3.8节中所做的说明一样,也可用无源性定理来证明上述自适应控制方案的稳定性(习题3-14).

④ 最后,需要特别指出的是,在讲述本节的两种自适应控制方案时,为叙述方便,设所有惯性参数都是未知的.实际上,机器人的某些惯性参数是可以精确知道的,如各杆的质量等.这时上述两自适应控制方案仍是适用的,只不过是将被估计的参数由全部参数改为部分参数即可.事实上,惯性参数适当排列后可写为

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

其中  $p_1$  是不精确知道的参数,而  $p_2$  是精确已知的参数.这时机器人动态特性与惯性参数间的线性关系可写为

$$\begin{aligned} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= [Y_1(q, \dot{q}, \ddot{q}), Y_2(q, \dot{q}, \ddot{q})] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\ &= Y_1(q, \dot{q}, \ddot{q})p_1 + Y_2(q, \dot{q}, \ddot{q})p_2 \end{aligned}$$

故利用  $p_1$  的估计值  $\hat{p}_1$  所计算出的

$$\begin{aligned} \hat{H}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) &= Y_1(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{p}_1 + Y_2(q, \dot{q}, \ddot{q})p_2 \\ \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) &= Y_1(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\hat{p}_1 + Y_2(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)p_2 \end{aligned}$$

因此

$$\tilde{H}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q) = Y_1(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{p}_1 \quad (3-85)$$

$$\tilde{H}(q)\ddot{q}_r + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{G}(q) = Y_1(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\tilde{p}_1 \quad (3-86)$$

将式(3-85)和(3-86)分别代入两自适应控制方案的闭环方程(3-73)和(3-80),并作同样推导后即可知这时只要将参数估计律中的 $Y$ 换为 $Y_1$ , $\hat{p}$ 换为 $\hat{p}_1$ 后,结果仍成立.

**例3-4** 如果要求例3-1中的DDArm机械臂完成例3-2中的跟踪时变期望轨迹 $q_d(t)$ 的任务时,只知道机器人的惯性参数 $xy_2 = xz_2 = xy_3 = yz_3 = mx_2 = my_3 = 0$ ,不知道其余惯性参数 $p \triangleq [xz_1 + xx_2 + xx_3 + d_2^2 m_3, xx_2 - yy_2 + xx_3, yz_2 + d_2 m_3, xz_2 + xx_3, my_2 - mz_3, xx_3 - yy_3, xz_3, yz_3, mx_3]^T$ 的准确值,而只知道这些惯性参数的估计值 $\hat{p} = [8, 1, -1, 0.5, 5, 0, 0, 1, 1]^T$ ,则由例3-1中的机器人动力学方程知

$$\hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\hat{p}$$

式中 $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q) \triangleq [\dot{q}_1^r, \dot{q}_2^r, \dot{q}_3^r]^T$

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) = [y_{ij}] \in \mathbf{R}^{3 \times 9}$$

$$y_{11} = \ddot{q}_1^r, \quad y_{12} = -c_2^2 \ddot{q}_1^r + c_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1^r + c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^r$$

$$y_{13} = c_2 \ddot{q}_2^r - s_2 \dot{q}_2 \dot{q}_2^r, \quad y_{14} = y_{15} = 0$$

$$y_{16} = -s_2^2 s_3^2 \ddot{q}_1^r + s_2 c_3 \ddot{q}_2^r - c_2 s_3^2 \dot{q}_2 \dot{q}_1^r - s_2^2 c_3 \dot{q}_3 \dot{q}_1^r -$$

$$c_2 s_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^r + c_2 c_3 \dot{q}_2 \dot{q}_2^r + \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) \dot{q}_3 \dot{q}_2^r -$$

$$s_2^2 c_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3^r + \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) \dot{q}_2 \dot{q}_3^r$$

$$y_{17} = -2c_2 c_3 \ddot{q}_1^r - c_2 s_3 \ddot{q}_2^r + s_2 c_3 \ddot{q}_3^r - (c_2^2 - s_2^2) c_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1^r +$$

$$c_2 s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_1^r - (c_2^2 - s_2^2) c_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2^r + s_2 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_2^r + c_2 s_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3^r -$$

$$s_2 s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_3^r$$

$$y_{18} = c_2^2 \ddot{q}_1^r - c_2 \ddot{q}_3^r - c_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1^r - c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^r + \frac{1}{2} s_2 \dot{q}_3 \dot{q}_2^r + \frac{1}{2} s_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3^r$$

$$y_{19} = 0.924 s_3 \ddot{q}_1^r - 0.462 (s_2 c_3 \ddot{q}_2^r + c_2 s_3 \ddot{q}_3^r - c_3 \dot{q}_3 \dot{q}_1^r + c_2 c_3 \dot{q}_2 \dot{q}_2^r +$$

$$s_2 s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_2^r - c_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3^r - s_2 s_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3^r + c_2 c_3 \dot{q}_3 \dot{q}_3^r)$$

$$y_{21} = 0, \quad y_{22} = -c_2 \dot{q}_1 \dot{q}_1^r, \quad y_{23} = c_2 \ddot{q}_1^r$$

$$y_{24} = \ddot{q}_2^r, \quad y_{25} = -9.81 s_2$$

$$y_{26} = s_2 c_3 \ddot{q}_1^r - c_3^2 \ddot{q}_2^r + c_2 s_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_1^r + \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) \dot{q}_3 \dot{q}_1^r +$$

$$c_2 s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_2^r + \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) \dot{q}_1 \dot{q}_3^r + c_2 c_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1^r$$

$$y_{27} = -c_2 s_3 \ddot{q}_1^r + s_3 \ddot{q}_3^r + (c_2^2 - s_2^2) c_3 \dot{q}_1 \dot{q}_1^r - c_2 c_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1^r -$$

$$\begin{aligned}
& c_2 c_3 \dot{q}_1 \ddot{q}_3 + c_3 \dot{q}_3 \ddot{q}_3 \\
y_{28} &= c s_2 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} s_2 \dot{q}_3 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} s_2 \dot{q}_1 \ddot{q}_3 \\
y_{29} &= -0.462 s_2 c_3 \ddot{q}_1 + 9.81 c_2 c_3 \\
y_{31} &= y_{32} = y_{33} = y_{34} = y_{35} = 0 \\
y_{36} &= s_2^2 c s_3 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) \dot{q}_2 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} s_2 (c_3^2 - s_3^2) \dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \\
& \quad c s_3 \dot{q}_2 \ddot{q}_2 \\
y_{37} &= s_2 c_3 \ddot{q}_1 + s_3 \ddot{q}_2 - c s_2 s_3 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + c_2 c_3 \dot{q}_2 \ddot{q}_1 + c_2 c_3 \dot{q}_1 \ddot{q}_2 \\
y_{38} &= -c_2 \ddot{q}_1 + \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} s_2 \dot{q}_2 \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} s_2 \dot{q}_1 \ddot{q}_2 \\
y_{39} &= -0.462 c_2 s_3 \ddot{q}_1 - 0.462 c_3 \dot{q}_1 \ddot{q}_1 - 9.81 s_2 s_3
\end{aligned}$$

这时可按 Slotine, Li 的方案设计出以下控制律和参数估计律

$$\begin{aligned}
\tau &= \hat{H}(q) \ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \hat{G}(q) + K_d(\dot{q}_r - \dot{q}) \\
\dot{\hat{p}} &= \Gamma^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r) r
\end{aligned}$$

式中  $r = (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + \Lambda(\dot{q}_d - \dot{q})$ ; 正定矩阵  $K_d, \Lambda$  和  $\Gamma$  设计为

$$\begin{aligned}
K_d &= \text{diag}[100, 20, 10], \quad \Lambda = \text{diag}[4, 4, 5] \\
\Gamma^{-1} &= \text{diag}[10, 0.2, 0.4, 0.4, 4, 0.1, 0.01, 0.2, 1]
\end{aligned}$$

图 3-11 中实线给出了跟踪误差的计算机仿真结果(为便于与不采

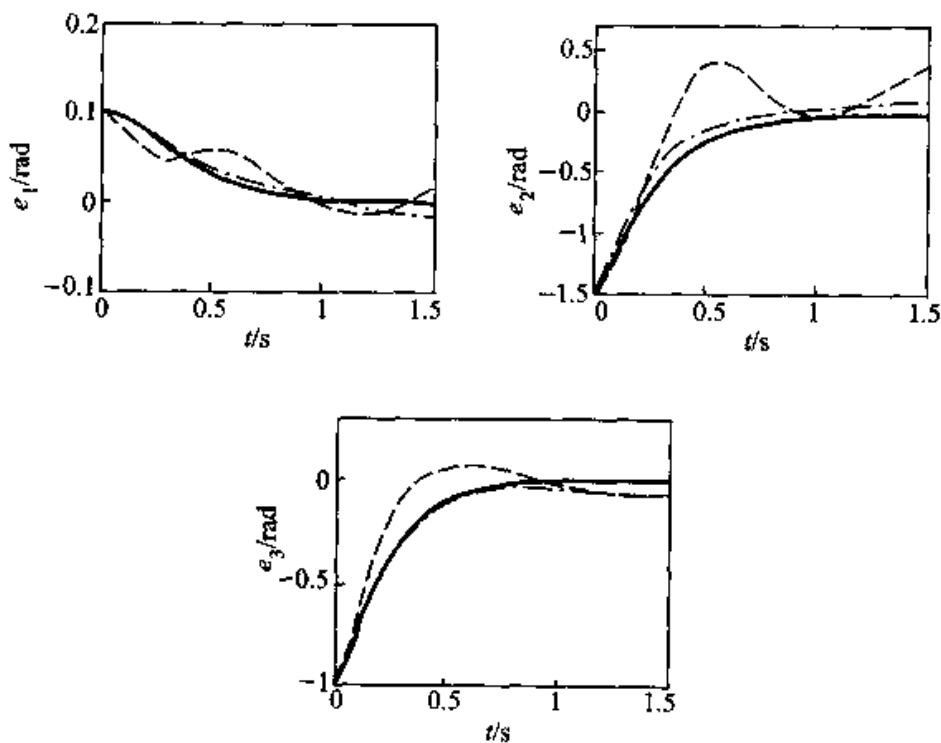


图 3-11

用自适应控制时相比较,图中还用虚线和点画线分别给出了用惯性参数估计值  $\hat{p}$  设计例 3-2 中计算力矩法和例 3-3 中控制律时的跟踪误差曲线)。从图中可以看出:自适应控制方案在机器人惯性参数未知时可以实现对时变期望轨迹的精确跟踪。

### 3.10 机器人的变结构控制

#### 一、变结构控制理论概述

研究非线性控制系统

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (3-87)$$

若确定一标量函数  $\sigma(x)$  并取控制  $u$  为

$$u = \begin{cases} u^+(x), & \text{当 } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x), & \text{当 } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (3-88)$$

则闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) + B(x)u^+(x), & \text{当 } \sigma(x) > 0 \end{cases} \quad (3-89)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) + B(x)u^-(x), & \text{当 } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (3-90)$$

式(3-89)和(3-90)描述了两个完全不同的系统,故闭环系统具有两种结构,且当  $x$  的变化使得  $\sigma(x)$  的符号改变时,产生系统两种结构间的转变。因此称式(3-87)和(3-88)这样的控制系统为变结构系统,其中  $\sigma(x)$  被称为切换函数。

例如,研究变结构系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta u, \end{cases} \quad (0 < \alpha < 1, \alpha + \beta > 1)$$

其中控制

$$u = \begin{cases} x_1, & \text{当 } x_1 x_2 > 0 \\ 0, & \text{当 } x_1 x_2 < 0 \end{cases} \quad (3-91)$$

这时闭环系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(\alpha + \beta)x_1, \end{cases} \quad \text{当 } x_1 x_2 > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1, \end{cases} \quad \text{当 } x_1 x_2 < 0$$

很容易画出系统  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(\alpha + \beta)x_1 \end{cases}$  和  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 \end{cases}$  的相平面图如图3-



12(a)和(b)所示.从图中可看出:尽管这两个系统各自作为独立的系统时  $\dot{x} \triangleq [x_1, x_2]^T = 0$  并非渐近稳定的,而按控制律(3-91)组合成变结构系统时,  $x = 0$  是渐近稳定的(图 3-13). 这表明:变结构控制可以巧妙地进行两种运动结构的切换,综合两种结构的“有利的”运动趋势,使整个闭环系统成为稳定的.

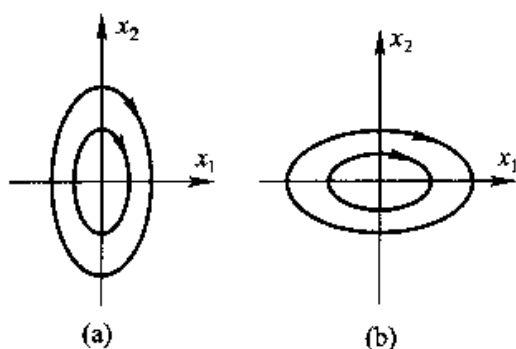


图 3-12

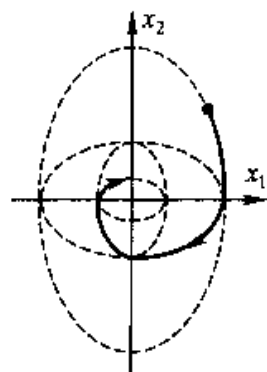


图 3-13

另外要注意的是,变结构控制律的确定不仅与切换函数有关,还与切换逻辑设计有关.例如,若将控制律(3-91)改为

$$u = \begin{cases} x_1, & \text{当 } x_1 x_2 < 0 \\ 0, & \text{当 } x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

则闭环系统零点  $x = 0$  是不稳定的(图 3-14).

所谓“变结构控制理论”所研究的,通常并不是如上例中那样的变结构系统,而是一类特殊的变结构系统——具有滑动模态的变结构系统.

例如:研究系统

$$\ddot{x} - \dot{x} + xu = 0$$

其中

$$u = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sigma(x) \triangleq x(\dot{x} + cx) > 0 \\ -1, & \text{当 } \sigma(x) = x(\dot{x} + cx) < 0 \end{cases}$$

式中常数  $c > 0$ . 易知闭环系统方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} + x = 0, & \text{当 } \sigma(x) > 0 \\ \ddot{x} - \dot{x} - x = 0, & \text{当 } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (3-92)$$

$$(3-93)$$

因  $\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$  的原点  $x = 0$  是不稳定焦点,  $\ddot{x} - \dot{x} - x = 0$  的原点是鞍点,故可分别画出式(3-92)和(3-93)描述系统的相平面图如图 3-15 (a)和(b)所示,从而知整个闭环系统的相平面图如图 3-16 所示. 从图 3-16 中可看出:不论初始状态如何,闭环系统轨迹总是进入直线  $s \triangleq \dot{x} + cx = 0$ , 并且一旦进入  $s = 0$  就会保持在其中. 从  $s = \dot{x} + cx = 0$  可知随着

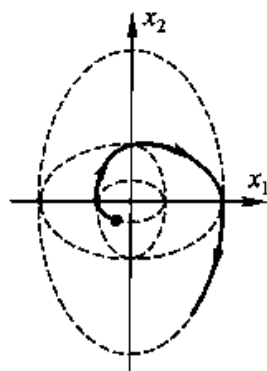


图 3-14

$t$  的增大,  $x$  在  $s=0$  上趋向原点  $x=0$ , 故系统的零点是全局渐近稳定的. 这里  $s=0$  被称为滑动面, 在滑动面上的运动称为滑动运动或滑动模态.

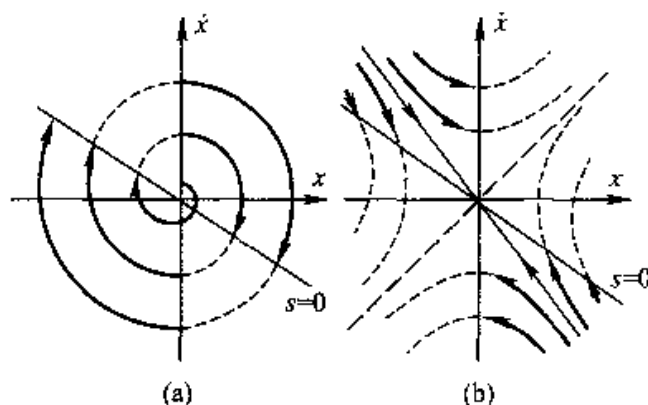


图 3-15

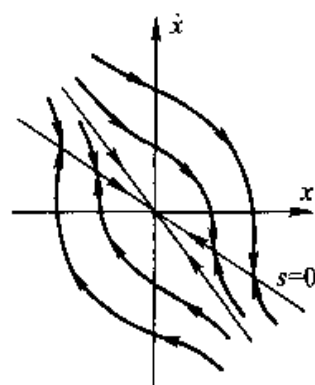


图 3-16

更一般地, 对于系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m (m < n) \quad (3-94)$$

其滑动面被设计为其相空间中  $m$  个过原点的超曲面  $s(x) = [s_1(x), \dots, s_m(x)]^T = 0$ . 用变结构控制理论设计式(3-94)描述系统控制器的任务是: 设计滑动面  $s(x) = [s_1(x), \dots, s_m(x)]^T = 0$  及控制律  $u(x) = [u_1(x), \dots, u_m(x)]^T$ , 其中

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x), & \text{当 } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x), & \text{当 } s_i(x) < 0 \end{cases}$$

使得闭环系统满足:

(1) 不论系统初始状态如何, 都要在有限时间内到达滑动面  $s(x) = 0$ , 并保持在其中.

(2) 在滑动面  $s(x) = 0$  上的滑动运动要满足性能指标(如渐近稳定等).

由上所述易知, 当变结构控制系统一旦进入滑动面后, 其滑动运动完全由滑动面方程  $s(x) = 0$  所确定, 与系统参数或外部干扰无关. 因此滑动运动有很强的鲁棒性和抗干扰能力. 这是变结构控制的主要优点之一.

不难理解, 要保证所有轨迹都进入滑动面的一个充分条件是:

$$\begin{cases} \dot{s}_i < 0, & \text{当 } s_i(x) > 0, \\ \dot{s}_i > 0, & \text{当 } s_i(x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

或写为当  $s_i \neq 0$  时

$$s_i \dot{s}_i < 0 \quad \text{或} \quad s_i \dot{s}_i < -\epsilon_i \quad (\epsilon_i > 0), \quad i = 1, \dots, m \quad (3-95)$$

式(3-95)通常被称为到达条件.

为简单起见, 常常在设计变结构控制方案时取  $s(x) = Cx$  ( $C$  为常值

矩阵), 其中  $C$  可根据对滑动运动的性能要求确定. 由

$$\dot{s}(x) = C\dot{x} = C[f(x) + g(x)u]$$

及到达条件式(3-95)确定出变结构控制律  $u^{[15, 16]}$ .

## 二、机器人的变结构控制

### 1. 基于计算力矩法的变结构控制

当不精确知道机器人惯性参数时, 可取控制律

$$\tau = \hat{H}(q)\dot{v} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (3-96)$$

式中  $\hat{H}(q), \hat{C}(q, \dot{q}), \hat{G}(q)$  为利用惯性参数  $p$  的一个估计值  $\hat{p}$  计算出的  $H, C$  和  $G$  的估计值, 则闭环系统方程为

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \hat{H}(q)\dot{v} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

即

$$\begin{aligned} \hat{H}\ddot{q} &= \hat{H}(q)\dot{v} - [\tilde{H}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q)] \\ &= \hat{H}(q)\dot{v} - Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{p} \end{aligned} \quad (3-97)$$

式中  $\tilde{H} = H - \hat{H}, \tilde{C} = C - \hat{C}, \tilde{G} = G - \hat{G}, \tilde{p} = p - \hat{p}$ . 若惯性参数的估计值  $\hat{p}$  使得  $\hat{H}(q)$  可逆, 则闭环系统方程(3-97)可写为

$$\ddot{q} = \dot{v} - [\hat{H}(q)]^{-1}Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{p} \triangleq \dot{v} - \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tilde{p})\tilde{p}$$

取滑动面

$$s = \dot{e} + \Lambda e$$

式中  $\Lambda$  为正对角矩阵, 则由上式知

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + \Lambda \dot{e} = (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + \Lambda \dot{e} \\ &= \ddot{q}_d - \dot{v} + \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tilde{p})\tilde{p} + \Lambda \dot{e} \end{aligned} \quad (3-98)$$

取

$$\dot{v} = \ddot{q}_d + \Lambda \dot{e} + d \quad (3-99)$$

式中  $d$  为待设计的向量, 代入式(3-98)后有

$$\dot{s} = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tilde{p})\tilde{p} - d \quad (3-100)$$

记  $s = [s_1, \dots, s_n]^T, \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tilde{p})\tilde{p} \triangleq \tilde{d} = [\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n]^T, d = [d_1, \dots, d_n]^T$ , 则式(3-100)可写为

$$\dot{s}_i = \tilde{d}_i - d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

又若记  $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tilde{p}) = [\Phi_{ij}], \tilde{p} = [\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{10n}]^T$ , 并能事先估计出

$$|\Phi_{ij}| \leq A_{ij}, |\tilde{p}_j| \leq a_j, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 10n$$

则有

$$|\tilde{d}_i| \leq \sum_{j=1}^{10n} A_{ij}a_j \triangleq \bar{d}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

由到达条件式(3-95)知  $d_i$  的选取应满足当  $s_i \neq 0$  时

$$\dot{s}_i s_i = (\bar{d}_i - d_i) s_i < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-101)$$

因此若选取

$$d_i = (\bar{d}_i + \eta_i) \operatorname{sgn}(s_i), \quad \eta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-102)$$

则由式(3-101)知当  $s_i \neq 0$  时

$$\begin{aligned} \dot{s}_i s_i &= (\bar{d}_i - d_i) s_i = \bar{d}_i s_i - \bar{d}_i \operatorname{sgn}(s_i) s_i - \eta_i \operatorname{sgn}(s_i) s_i \\ &= \bar{d}_i s_i - \bar{d}_i |s_i| - \eta_i |s_i| \leq -\eta_i |s_i| < 0 \end{aligned}$$

满足到达条件. 由此可知由式(3-99)和(3-102)可确定出

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{SGN}(\mathbf{s})(\bar{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\eta})$$

式中

$$\mathbf{SGN}(\mathbf{s})(\bar{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\eta}) \triangleq \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(s_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{sgn}(s_n) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \right\}$$

再代入式(3-96)后得到变结构控制律

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{SGN}(\mathbf{s})(\bar{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\eta})] + \\ &\quad \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3-103)$$

与基于计算力矩法的自适应控制方案相比可知, 控制律(3-103)不需要在线参数估计. 另外, 若参数估计值  $\hat{\mathbf{p}}$  越准确,  $\|\bar{\mathbf{d}}\|$  越小, 由式(3-103)所确定的  $\|\boldsymbol{\tau}\|$  也越小, 即所需控制能量越少.

## 2. 基于输入-输出稳定性理论的变结构控制方案

取滑动面

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} \triangleq (\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A} \mathbf{e}$$

式中  $\mathbf{A}$  为正对角矩阵. 令  $\mathbf{v}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s}$ , 则沿机器人方程

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

的轨迹

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} = \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} \\ &= \mathbf{s}^T [\mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_r - \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}})] \\ &= \mathbf{s}^T [\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}] \end{aligned} \quad (3-104)$$

取控制

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_r \quad (3-105)$$

式中  $\boldsymbol{\tau}_r$  为待设计的量. 代入式(3-104)后得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\mathbf{s}^T [\boldsymbol{\tau}_r - (\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}))] \\ &= -\mathbf{s}^T [\boldsymbol{\tau}_r - \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\ddot{\mathbf{q}}}) \hat{\mathbf{p}}] \end{aligned}$$

若能估计出

$$\tilde{p} = [\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{10n}]^T, \quad |\tilde{p}_i| \leq a_i, \quad i = 1, \dots, 10n$$

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r) = [Y_{ij}^r], |Y_{ij}^r| \leq \bar{Y}_{ij}^r, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 10n$$

则只要选取

$$\tau_i = \text{SGN}(s)k + s = \begin{bmatrix} k_1 \text{sgn}(s_1) + s_1 \\ \vdots \\ k_n \text{sgn}(s_n) + s_n \end{bmatrix} \quad (3-106)$$

其中

$$k = [k_1, \dots, k_n]^T, \quad k_i = \sum_{j=1}^{10n} \bar{Y}_{ij}^r a_j, \quad i = 1, \dots, n$$

则

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= - \left[ \sum_{i=1}^n s_i k_i \text{sgn}(s_i) + \sum_{i=1}^n s_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10n} s_i Y_{ij}^r \tilde{p}_j \right] \\ &= - \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10n} |s_i| \bar{Y}_{ij}^r a_j + \sum_{i=1}^n s_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{10n} s_i Y_{ij}^r \tilde{p}_j \right] \\ &\leq - \sum_{i=1}^n s_i^2 = - \|s\|_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

用与3.9节中完全相同方法可证明  $s \in L_n^2 \cap L_n^\infty$ , 又由

$$\underline{e} = (sI + \Lambda)^{-1}s$$

知  $e \rightarrow 0, \dot{e} \in L_n^2 \cap L_n^\infty, e \in L_n^2 \cap L_n^\infty$ . 从而可进一步证明  $\tau \in L_n^\infty, \ddot{q} \in L_n^\infty, \ddot{e} \in L_n^\infty, \dot{e} \rightarrow 0$ . 这就保证了  $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ .

将控制律(3-105)和(3-106)与3.9节中对应的控制律(3-79)相比可看出, 这种变结构控制方案不用进行参数估计.

另外, 式(3-104)可写为

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -s^T [\tau - (H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q))] \\ &= -s^T [\tau - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)p] \end{aligned}$$

若能事先估计出

$$p = [p_1, \dots, p_{10n}]^T, \quad |p_i| \leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, 10n$$

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r) = [Y_{ij}^r], |Y_{ij}^r| \leq \bar{Y}_{ij}^r, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 10n$$

则只要选取

$$\tau = \text{SGN}(s)\bar{k} + s = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \text{sgn}(s_1) + s_1 \\ \vdots \\ \bar{k}_n \text{sgn}(s_n) + s_n \end{bmatrix} \quad (3-107)$$

其中

$$\bar{k} = [\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n]^T, \quad \bar{k}_i = \sum_{j=1}^{10n} \bar{Y}_{ij}^r \bar{p}_j, \quad i = 1, \dots, n$$

则用与式(3-106)后完全相同的方法可证明  $q \rightarrow q_d, \dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$ . 从控制律(3-107)可看出, 这种控制方案的计算量大大减少且不用进行参数估计, 但它需要更大的控制能量.

### 三、抖振的消除

变结构控制的一个明显缺点是: 切换时由于惯性和时滞的影响, 使滑动运动叠加上一个高频的抖动, 称为抖振(参见图3-17). 常用的一种消除抖振的方法是在滑动面两侧增加一个边界层, 并在边界层中用饱和函数替代符号函数<sup>[47]</sup>, 亦即将变结构控制律中的符号函数  $\text{sgn}(s_i)$  换为饱和函数

$$\text{sat}\left(\frac{s_i}{\epsilon_i}\right) \triangleq \begin{cases} \text{sgn}\left(\frac{s_i}{\epsilon_i}\right), & \text{当 } \left|\frac{s_i}{\epsilon_i}\right| > 1 \\ \frac{s_i}{\epsilon_i}, & \text{当 } \left|\frac{s_i}{\epsilon_i}\right| \leq 1 \end{cases}$$

式中  $\epsilon_i > 0$  为边界层厚度, 其函数图形如图3-18所示. 要注意的是: 这时变结构控制只能保证所有轨迹都进入边界层, 而不能保证都进入滑动模态. 故若边界层过厚, 会产生较大的稳态误差.

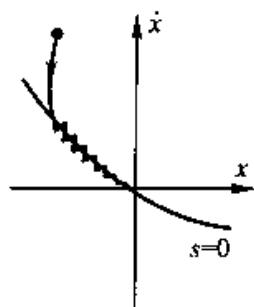


图 3-17

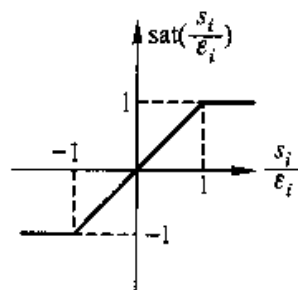


图 3-18

**例 3-5** 若已知例3-1中 DDArm 机械臂惯性参数  $p$  的准确值在  $\hat{p} \pm \alpha$  的范围内, 其中惯性参数估计值  $\hat{p} = [12, 0.4, -1.2, 0.7, 2.8, -0.3, -0.01, 0.35, 0.35]^T$ , 估计误差的上界  $\alpha = [2, 0.2, 0.4, 0.4, 0.5, 0.1, 0.01, 0.1, 0.1]^T$ . 当要机械臂从静止初始位置  $q = [-0.1, 1.5, 1.0]^T \text{ rad}$  出发跟踪例3-2中期望轨迹  $q_d(t)$ , 可采用式(3-105)和(3-106)表示的控制方案, 即取

$$\tau = \hat{H}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + \text{SGN}(s)k + s$$

式中  $\hat{H}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$  和  $\hat{G}(q)$  用惯性参数估计值  $\hat{p}$  算出.

$$k = \bar{Y}(\dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\alpha$$

$$\bar{Y}(\dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) = [\bar{Y}_i] \in \mathbf{R}^{3 \times 9}$$

$$Y_{11}^r = |\ddot{q}_1|, \quad \bar{Y}_{12}^r = |\ddot{q}_1| + |\dot{q}_2 \dot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_2|$$

$$\bar{Y}_{13}^r = |\ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_2|, \quad \bar{Y}_{14}^r = \bar{Y}_{15}^r = 0$$

$$\bar{Y}_{16}^r = |\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \dot{q}_1| + |\dot{q}_3 \dot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_3| + \frac{1}{2}(|\dot{q}_3 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_3|)$$

$$\bar{Y}_{17}^r = 2|\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_2| + |\ddot{q}_3| + |\dot{q}_2 \dot{q}_1| + |\dot{q}_3 \dot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_3| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_3|$$

$$\bar{Y}_{18}^r = |\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_3| + |\dot{q}_2 \dot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_2| + \frac{1}{2}(|\dot{q}_3 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_3|)$$

$$\bar{Y}_{19}^r = 0.924|\ddot{q}_1| + 0.462(|\ddot{q}_2| + |\ddot{q}_3| + |\dot{q}_3 \dot{q}_1| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_3| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_3| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_3|)$$

$$\bar{Y}_{21}^r = 0, \quad \bar{Y}_{22}^r = |\dot{q}_1 \ddot{q}_1|, \quad \bar{Y}_{23}^r = |\ddot{q}_1|$$

$$\bar{Y}_{24}^r = |\ddot{q}_2|, \quad \bar{Y}_{25}^r = 9.81$$

$$\bar{Y}_{26}^r = |\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_2| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_2| + \frac{1}{2}(|\dot{q}_1 \ddot{q}_3| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_1|)$$

$$\bar{Y}_{27}^r = |\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_3| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_3| + |\dot{q}_3 \ddot{q}_3|$$

$$\bar{Y}_{28}^r = |\dot{q}_1 \ddot{q}_1| + \frac{1}{2}(|\dot{q}_3 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_3|)$$

$$\bar{Y}_{29}^r = 0.462|\ddot{q}_1| + 9.81$$

$$\bar{Y}_{31}^r = \bar{Y}_{32}^r = \bar{Y}_{33}^r = \bar{Y}_{34}^r = \bar{Y}_{35}^r = 0$$

$$\bar{Y}_{36}^r = |\dot{q}_1 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_2| + \frac{1}{2}(|\dot{q}_1 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_1|)$$

$$\bar{Y}_{37}^r = |\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_2| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_2|$$

$$\bar{Y}_{38}^r = |\ddot{q}_1| + |\ddot{q}_3| + \frac{1}{2}(|\dot{q}_1 \ddot{q}_2| + |\dot{q}_2 \ddot{q}_1|)$$

$$\bar{Y}_{39}^r = 0.462(|\ddot{q}_1| + |\dot{q}_1 \ddot{q}_1|) + 9.81$$

这时也可采用式(3-107)表示的控制方案,即取

$$\tau = \text{SGN}(s)\bar{k} + s, \quad \bar{k} = \bar{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})\bar{p}$$

式中  $\bar{p} = [14, 0.6, 1.6, 1.1, 3.3, 0.4, 0.02, 0.45, 0.45]^T$ .

这两种控制方案的跟踪误差计算机仿真结果分别如图3-19中实线和虚线所示,可以看出这两种控制方案都可相当准确地跟踪时变期望轨迹.

图3-20中左右两边分别给出了这两种控制方案的控制力矩曲线,从图中可看出:在滑动面  $s=0$  附近出现了抖振.对两种控制方案分别增加厚度为0.25和0.85的边界层后,这时的跟踪误差和控制力矩的仿真结

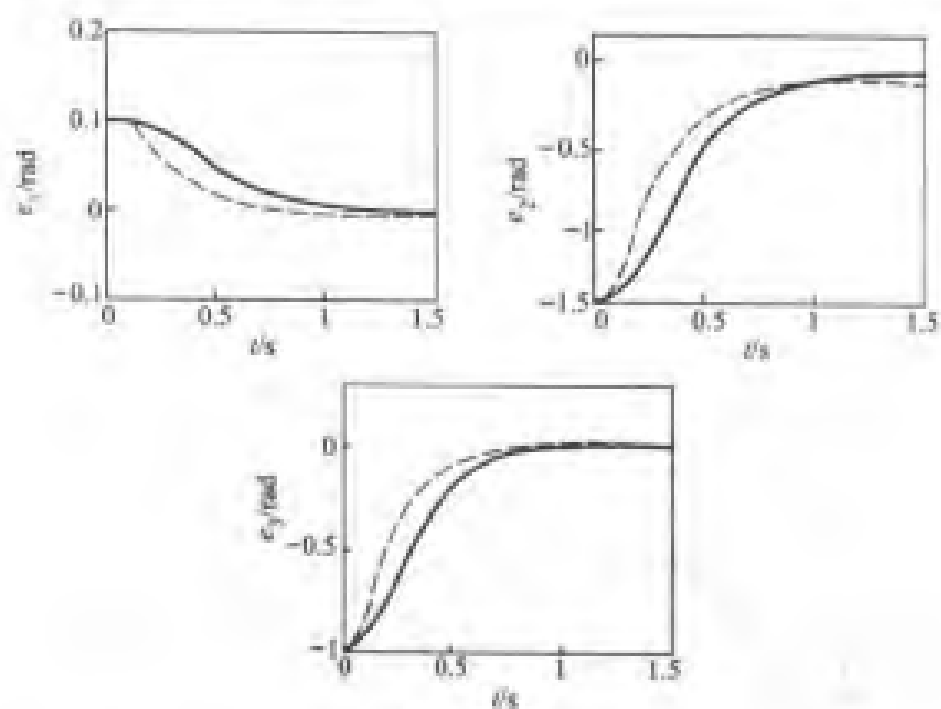


图 3-19

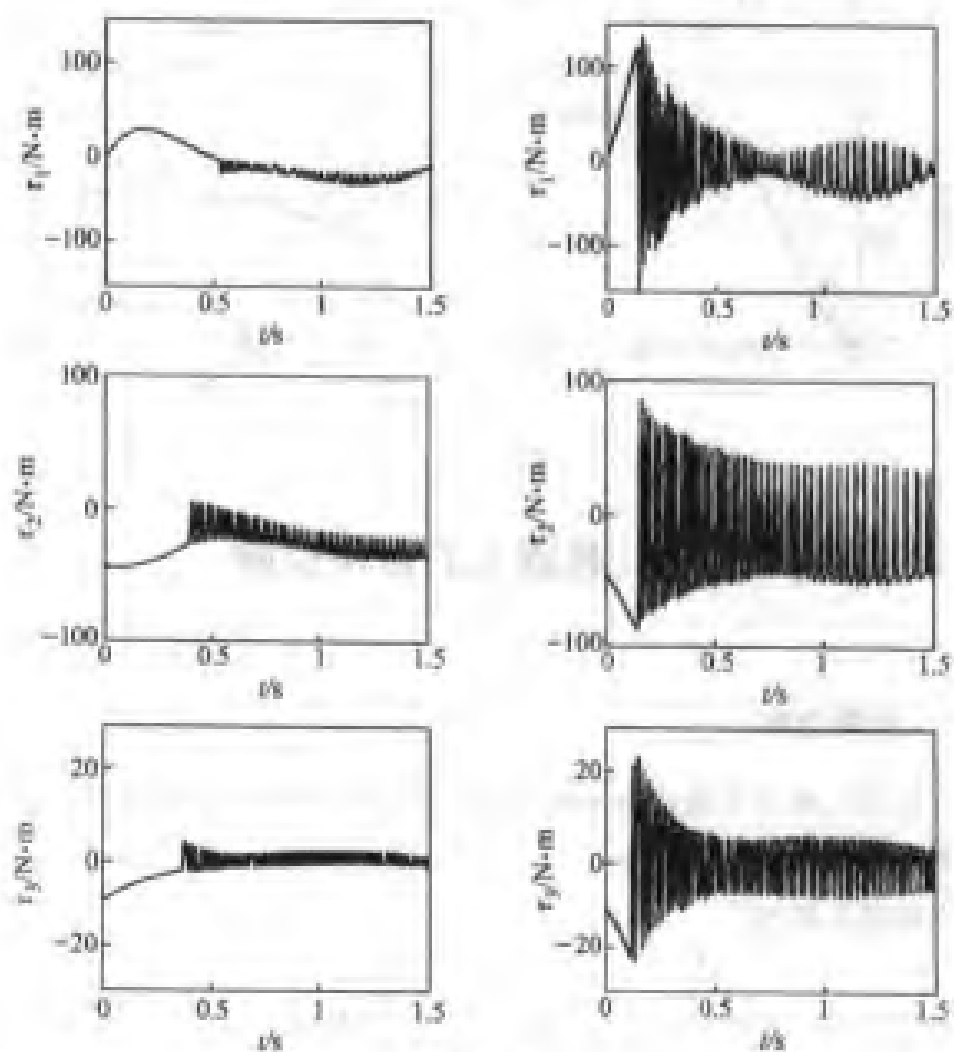


图 3-20



果分别如图3-21中的实线和虚线所示,从图中可看出这时已消除了抖振,但在第二种方案中因边界层过厚, $q_1$ 已出现明显的跟踪误差。

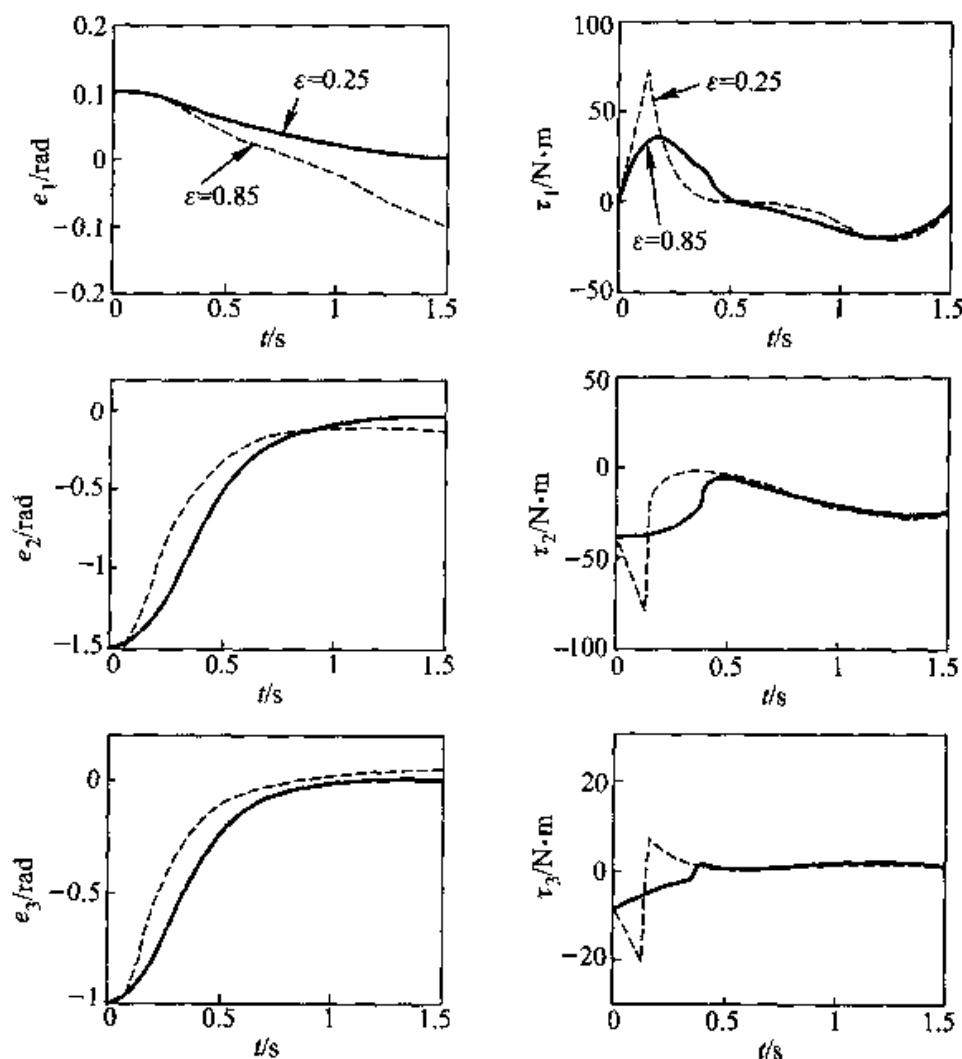


图 3-21

### 3.11 机器人的鲁棒控制

#### 一、控制方案

当机器人模型不能精确知道时,除采用自适应和变结构控制方案外,也可采用鲁棒控制方法<sup>[48]</sup>。

当机器人模型

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

不精确可知,而只知  $H, C$  和  $G$  的估计值分别为  $\hat{H}, \hat{C}$  和  $\hat{G}$  时,若采用基于计算力矩法的控制方案,即取  $\tau$  形如

$$\tau = \hat{H}(q) \mathbf{v} + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} - \hat{G}(q) \quad (3-108)$$

则受控机器人的闭环方程为

$$H\ddot{q} = \hat{H}\mathbf{v} - \tilde{C}\dot{q} - \tilde{G}$$

式中  $\tilde{C} = C - \hat{C}$ ,  $\tilde{G} = G - \hat{G}$ . 由  $H$  的可逆性知此式也可写为

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= H^{-1}\hat{H}\mathbf{v} - H^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G}) \\ &= \mathbf{v} + [(H^{-1}\hat{H} - I)\mathbf{v} - H^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G})] \\ &\triangleq \mathbf{v} + \eta(\mathbf{v}, q, \dot{q}) \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{v} - \ddot{q} + \eta(\mathbf{v}, q, \dot{q}) = 0 \quad (3-109)$$

其中  $\eta(\mathbf{v}, q, \dot{q})$  包括了模型不确定性的影响. 显然, 要使闭环方程 (3-109) 具有

$$(\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) = 0$$

(其中  $K_d$  和  $K_p$  均为正定矩阵) 的形式, 应选取  $\mathbf{v}$  满足

$$\mathbf{v} = \ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) - \eta(\mathbf{v}, q, \dot{q})$$

但因不确定项  $\eta(\mathbf{v}, q, \dot{q})$  是未知的, 故取

$$\mathbf{v} = \ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) + \Delta\mathbf{v} \quad (3-110)$$

其中  $\Delta\mathbf{v}$  是为补偿不确定项  $\eta$  的影响而待设计的项. 将上式代入式 (3-109) 得到闭环方程为

$$\begin{aligned} &(\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) + \Delta\mathbf{v} + \\ &(H^{-1}\hat{H} - I)[\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) + \Delta\mathbf{v}] - \\ &H^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G}) \\ &\triangleq (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) + \Delta\mathbf{v} + \bar{\eta} = 0 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &\triangleq (H^{-1}\hat{H} - I)[\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) + \Delta\mathbf{v}] - \\ &H^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G}) \end{aligned}$$

定义

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_d - q \\ \dot{q}_d - \dot{q} \end{bmatrix}$$

则以上闭环方程可写为状态方程形式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} (\Delta\mathbf{v} + \bar{\eta}) \\ &\triangleq A\mathbf{x} + B(\Delta\mathbf{v} + \bar{\eta}) \end{aligned} \quad (3-111)$$

以下的任务是设计  $\Delta\mathbf{v}$ , 以保证闭环系统 (3-111) 在不确定项  $\bar{\eta}$  存在时仍能使满足设计要求, 即使受控系统具有鲁棒性, 这在一定条件下是可以做

到的, 这些条件是:

- ①  $H(q)$  是一致正定的, 即存在正数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  使得

$$\lambda_1 I \leq H(q) \leq \lambda_2 I, \quad \forall q \in \mathbf{R}^n \quad (3-112)$$

- ② 存在一已知的对  $t$  有界的函数  $\Phi(x, t)$ , 使得

$$\|\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G}\|_2 < \Phi(x, t), \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbf{R}^n \quad (3-113)$$

以上这两条件并不苛刻, 例如当机器人的各关节均为转动关节时即可满足这两条件. 当这两条件成立时可证明以下引理.

**引理3-3** ① 若机器人满足式(3-112), 则存在  $H(q)$  的估计值  $\hat{H}(q)$  及一相应的常数  $\alpha$ , 使得

$$\|H^{-1}(q)\hat{H}(q) - I\|_2 \leq \alpha < 1, \quad \forall q \in \mathbf{R}^n \quad (3-114)$$

② 若机器人满足式(3-112)和式(3-113), 则可找到  $H(q)$  的估计值  $\hat{H}(q)$  和一个对  $t$  有界的连续函数  $\rho(x, t)$ , 使得所设计出的  $\Delta v$  和不确定项  $\bar{\eta}$  满足

$$\|\Delta v\|_2 \leq \rho(x, t) \quad (3-115)$$

$$\|\bar{\eta}\|_2 \leq \rho(x, t) \quad (3-116)$$

证: ① 若机器人的惯性矩阵  $H(q)$  满足式(3-112), 则立即可知存在两正数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  使得

$$\alpha_1 \leq \frac{1}{\lambda_2} \leq \|H^{-1}(q)\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \leq \alpha_2, \quad \forall q \in \mathbf{R}^n$$

即使选择  $H(q)$  的一个很粗糙的估计值

$$\hat{H} = \frac{2}{\alpha_2 + \alpha_1} I$$

也可找到这样的  $\alpha$ . 因为很容易证明(习题3-18):

$$\begin{aligned} \|H^{-1}(q)\hat{H} - I\|_2 &\leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \\ &\triangleq \alpha < 1, \quad \forall q \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (3-117)$$

② 若机器人满足式(3-112), 则由①中所证知存在估计值  $\hat{H}$  和常数  $\alpha$  满足式(3-114). 又若机器人满足式(3-113), 则在式(3-115)成立的条件下, 可知

$$\begin{aligned} \|\bar{\eta}\|_2 &= \|(H^{-1}\hat{H} - I)[\ddot{q}_d + Kx + \Delta v] - H^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G})\|_2 \\ &\leq \alpha(\ddot{q}_M^d + \|K\|_2\|x\|_2 + \rho(x, t)) + \alpha_2\Phi(x, t) \end{aligned} \quad (3-118)$$

式中  $\ddot{q}_M^d$  为  $\|\ddot{q}_d\|_2$  的最大值,  $K = [K_p, K_d]$ .

因为式(3-118)中  $0 < \alpha < 1$ , 故可令

$$\alpha\rho(x, t) + \alpha(\ddot{q}_M^d + \|K\|_2\|x\|_2) + \alpha_2\Phi(x, t) = \rho(x, t)$$

从而可解出

$$\rho(x, t) = \frac{1}{1 - \alpha} [\alpha(\ddot{q}_M^d + \|K\|_2 \|x\|_2) + \alpha_2 \Phi(x, t)] \quad (3-119)$$

这里要特别注意的是: 此式是在  $\|\Delta v\|_2$  满足式(3-115)的条件下导出的. 下面来设计  $\Delta v$ , 并证明它的确可满足式(3-115).

事实上, 因  $A$  是稳定矩阵, 故任取一正定矩阵  $Q$ , 李雅普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (3-120)$$

都存在正定矩阵解  $P$ . 设计

$$\Delta v = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{B^T P x}{\|B^T P x\|_2}, & \text{当 } \|B^T P x\|_2 \geq \epsilon \\ -\rho(x, t) \frac{B^T P x}{\epsilon}, & \text{当 } \|B^T P x\|_2 < \epsilon \end{cases} \quad (3-121)$$

式中  $\epsilon$  为一正数. 由此式可以看出:  $\Delta v$  的确满足式(3-115), 故以上推理成立.

另外要注意的是, 由式(3-108)、(3-110)和(3-121)可看出: 当  $\alpha$  值越大时, 所用的  $\|\Delta v\|_2$  也越大, 即所消耗的控制能量越多. 因此在设计时应充分利用已知的信息, 使  $H$  的估计值  $\hat{H}$  尽可能准确, 从而使式(3-114)中的  $\alpha$  尽可能小.

## 二、稳定性分析

选取

$$v(x) = x^T P x$$

其中  $P$  由式(3-120)确定, 则  $v(x)$  沿系统(3-111)解的导数

$$\begin{aligned} \dot{v} &= x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P B(\Delta v + \bar{\eta}) \\ &= -x^T Q x + 2(B^T P x)^T (\Delta v + \bar{\eta}) \end{aligned}$$

将式(3-116)代入上式可知

$$\dot{v} \leq -x^T Q x + 2(B^T P x)^T \left( \Delta v + \rho \frac{B^T P x}{\|B^T P x\|_2} \right)$$

当  $\|B^T P x\|_2 \geq \epsilon$  时, 将  $\Delta v$  的表达式代入上式得到

$$\dot{v} \leq -x^T Q x < 0, \quad \text{当 } \|B^T P x\|_2 \geq \epsilon \quad (3-122)$$

又当  $\|B^T P x\|_2 < \epsilon$  时, 用同样方法可得

$$\begin{aligned} \dot{v} &\leq -x^T Q x + 2(B^T P x)^T \left( -\frac{\rho}{\epsilon} B^T P x + \right. \\ &\quad \left. \rho \frac{B^T P x}{\|B^T P x\|_2} \right) \end{aligned} \quad (3-123)$$

可以证明(习题3-19)

$$2(B^T P x)^T \left( -\frac{\rho}{\epsilon} B^T P x + \rho \frac{B^T P x}{\|B^T P x\|_2} \right) \leq \frac{\epsilon}{2} \rho \quad (3-124)$$

代入式(3-123)中得到

$$\dot{v} \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\rho} \leq -\lambda_m(\mathbf{Q}) \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\rho}$$

式中  $\lambda_m(\mathbf{Q})$  为  $\mathbf{Q}$  的最小特征值,  $\bar{\rho}$  是在闭区域  $\|\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}\|_2 < \varepsilon$  中  $\rho(\mathbf{x}, t)$  的上界. 由上式可知

$$\dot{v} < 0, \text{ 当 } \|\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}\|_2 < \varepsilon, \|\mathbf{x}\|_2 > \sqrt{\frac{\varepsilon \bar{\rho}}{2\lambda_m(\mathbf{Q})}} \triangleq \bar{\delta} \quad (3-125)$$

结合式(3-122)和(3-125)可知

$$\dot{v} < 0, \quad \text{当 } \|\mathbf{x}\|_2 > \bar{\delta} \quad (3-126)$$

在  $\mathbf{R}^n$  中定义以 0 为圆心, 以  $\bar{\delta}$  为半径的球域

$$B_{\bar{\delta}} \triangleq \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \bar{\delta}\}$$

记椭球

$$S(k) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq k, (k \text{ 为正常数})\}$$

若令  $\underline{k} \triangleq \min\{k \mid S(k) \supset B_{\bar{\delta}}\}$ , 则  $S(\underline{k})$  为所有  $S(k)$  中包含  $B_{\bar{\delta}}$  的最小椭球且

$$\underline{k} = \lambda_M(\mathbf{P}) \bar{\delta}^2 = \frac{\lambda_M(\mathbf{P})}{2\lambda_m(\mathbf{Q})} \varepsilon \bar{\rho}$$

式中  $\lambda_M(\mathbf{P})$  为  $\mathbf{P}$  的最大特征值. 任取  $\bar{k} > \underline{k}$ , 由式(3-126)很容易证明: 若  $\mathbf{x}(t_0) \in S(\bar{k})$ , 则从  $\mathbf{x}(t_0)$  出发的  $\mathbf{x}(t) \in S(\bar{k}) (\forall t \geq t_0)$ ; 若  $\mathbf{x}(t_0) \notin S(\bar{k})$ , 则当从  $\mathbf{x}(t_0)$  出发的  $\mathbf{x}(t) \in S(\underline{k})$  时,  $v$  沿着  $\mathbf{x}(t)$  总是减小的, 且可证明会在有限时间内到达  $S(\bar{k})$  的边界  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \bar{k}$ . 具体地说, 令

$$v_0 = \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0) = k_0$$

定义

$$c_0 = \min\{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2} \rho(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in S(k_0) - S(\bar{k})\}$$

则可证明从  $\mathbf{x}(t_0)$  出发的  $\mathbf{x}(t)$  达到  $S(\bar{k})$  的边界  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \bar{k}$  的时间为(习题 3-20)

$$t_1 \leq t_0 + \frac{k_0 - \bar{k}}{c_0} \triangleq t_0 + T(\mathbf{x}(t_0), S(\bar{k})) \quad (3-127)$$

至此可知: 不论  $\mathbf{x}(t_0)$  如何, 经过时间  $T(\mathbf{x}(t_0), S(\bar{k}))$  后,  $\mathbf{x}(t)$  总会保持在  $S(k)$  内. 从而由

$$\lambda_m(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}(t)\|_2^2 \leq \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \leq \bar{k}$$

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{\bar{k}}{\lambda_m(\mathbf{P})}} \triangleq \delta$$

知

$$\begin{cases} \|q_d - q\|_2 \leq \|x(t)\|_2 \leq \delta, \\ \|\dot{q}_d - \dot{q}\|_2 \leq \|\dot{x}(t)\|_2 \leq \delta, \end{cases} \text{当 } t \geq t_0 + T(x(t_0), S(\bar{k}))$$

由  $\bar{k}$  的定义知, 如果  $\epsilon$  取得足够小, 可使  $\delta$  很小, 从而使位置误差和速度误差满足设计要求. 当然, 由式(3-121) 知:  $\epsilon$  越小, 所需的控制能量越大.

在稳定性理论中, 以  $x = 0$  为平衡点的系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

的解  $x(t)$  被称为是“对集合  $S$  最终一致有界”的, 如果存在包含原点  $x = 0$  的有界集合  $S$  和时间  $T = T(x_0, S)$ , 使得

$$x(t) \in S, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

解最终一致有界性的意义在于: 当  $S$  很小时, 它是原点  $x = 0$  的一个很小的邻域, 故在实际应用中可用它来代替原点渐近稳定性的定义. 由以上定义可知, 用式(3-108) 和(3-121) 确定的控制方案可保证闭环系统的解是最终一致有界的, 且当控制的能量允许选择  $\epsilon$  足够小, 使得位置误差和速度误差满足设计要求时, 可采用这种控制方案来克服系统模型中不确定项的影响, 所以它是一种鲁棒控制方案.

**例 3-6** 当要求例 3-5 中的 DDArm 机械臂完成跟踪时变期望轨迹  $q_d(t)$  的任务时, 也可采用本节所述的鲁棒控制方案.

这时可估计出各关节的运动范围满足

$$q_1(t) \in [-0.5, 0.7], \quad q_2(t) \in [0.5, 1.5], \quad q_3(t) \in [-0.5, 1]$$

可估算出在此范围内

$$\|H^{-1}(q)\|_2 \leq 2.7$$

$$\|H^{-1}(q)\dot{H}(q) - I\|_2 \leq 0.2$$

又易知

$$\|\tilde{C}\dot{q} + \tilde{G}\|_2 \leq \Phi(x) \triangleq \sqrt{[\bar{Y}(\dot{q}, \dot{q}, \dot{q})a]^T [\bar{Y}(\dot{q}, \dot{q}, \dot{q})a]}$$

式中  $\bar{Y}(\dot{q}, \dot{q}, \dot{q})$  和  $a$  如例 3-5 中所定义.

仍取

$$K_p = \text{diag}[400, 80, 50], \quad K_d = \text{diag}[100, 20, 10]$$

又由期望轨迹可算出

$$\|\ddot{q}_d\|_2 \leq \ddot{q}_M = 3.3$$

故可由式(3-119)得到

$$\rho = 1.25 \times [0.2 \times (3.3 + 400\|x\|_2) + 2.7\Phi(x)]$$

式中  $x = [e^1, \dot{e}^1]^T$ . 再取

$$Q = \text{diag}[0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]$$

由李雅普诺夫方程(3-120)解出正定矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \text{diag}[0.0001, 0.0006, 0.001]$$

$$P_3 = \text{diag}[0.0005, 0.0025, 0.0051]$$

取  $\varepsilon = 0.1$ , 则可由式(3-121)算出

$$\Delta v = \begin{cases} -\rho \frac{[P_2, P_3]x}{\|[P_2, P_3]x\|_2}, & \text{当 } \|[P_2, P_3]x\|_2 \geq 0.1 \\ -\rho \frac{[P_2, P_3]x}{0.1}, & \text{当 } \|[P_2, P_3]x\|_2 < 0.1 \end{cases}$$

从而最终用式(3-109)和(3-110)确定控制

$$\tau = \hat{H}(q)[\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) + \Delta v] + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

其轨迹跟踪误差的计算机仿真结果如图3-22所示。从图中可以看出:上述鲁棒控制方案只利用惯性参数的估计值仍可以很高的精度跟踪时变期望轨迹。

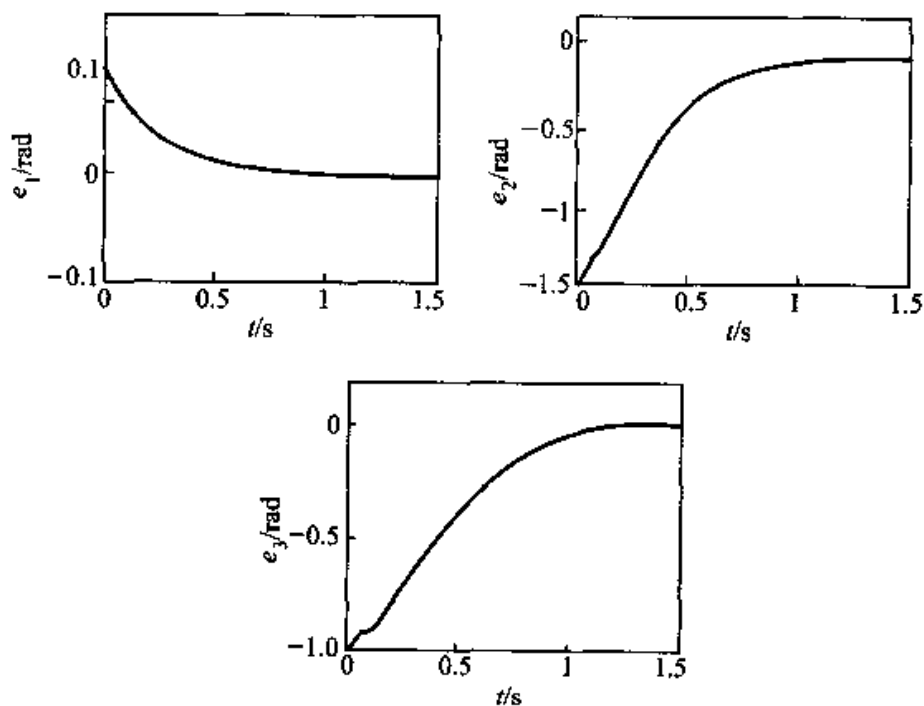


图 3-22

## 3.12 运动受限机器人的位置-力混合控制

### 一、所要研究的问题

当机器人完成所担负的任务时,通常其手端会与环境接触.这时不仅机器人的运动受到环境的约束,机器人手端与环境之间还会产生相互作用力.因此这时不仅要控制机器人的运动,还要同时控制机器人作用于环境的力.本节研究当机器人手端与光滑的刚性曲面接触时,同时控制机器人手端位置与其作用于刚性曲面上力的问题.

### 二、自然约束和人工约束

当控制机器人完成与环境有接触的任务时,机器人所受到的运动和力的约束可分为两类:一类是所谓自然约束(Natural Constraints),即环境的固有属性所导致的对机器人运动和力的约束;另一类是所谓人工约束(Artificial Constraints),这是为使机器人能完成给定任务,人为地规定机器人应满足的约束,它反映了人期望控制机器人所产生的运动和力.机器人完成两个典型任务时的自然约束和人工约束如图3-23所示.

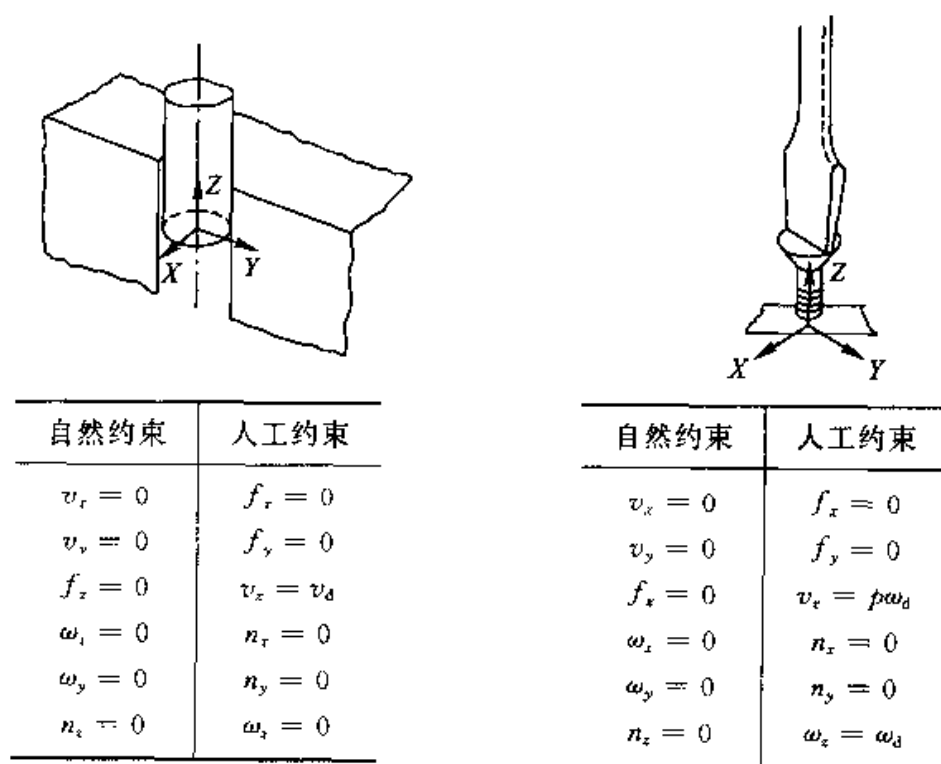


图 3-23



从图3-23中可以看出:机器人手端的6个自由度每个都受到一个自然约束和一个人工约束.当环境约束了该自由度的运动时(即该自由度运动受到自然约束时),则应对机器人在该自由度上所受的约束反力加以控制(即对该自由度的力加一人工约束);反之,若一自由度的运动未受环境约束(即该自由度上无约束反力时,亦即该自由度上约束反力受到为零的自然约束时),则应对其运动加以控制(即对其运动加一人工约束).由此可看出以下两点:

① 在每个自由度上,运动和力都受到自然约束或人工约束,且它们所受的约束有一种互补性:当运动受到自然约束时,力受到人工约束;当力受到自然约束时,运动受到人工约束.

② 在每个自由度上只能控制运动或控制力,不能同时独立地控制运动和力.

### 三、适从坐标系和适从坐标系中的机器人方程

由上面的例子不难看出,为便于描述自然约束和人工约束,需要事先建立一个适当的坐标系.因为受环境约束机器人的控制问题通常称为适从控制(Compliant Control),所以这样一个便于描述自然约束和人工约束的坐标系被称为适从坐标系(Compliant Frame).

适从坐标系的建立与任务有关.对于机器人手端与刚性光滑曲面接触的情况,可用以下方法建立适从坐标系.设机器人手端的位置和指向用

$$X = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T \in \mathbf{R}^6$$

表示,其中  $[x, y, z]^T$  表示与手端固连坐标系的原点在基坐标系中的位置,  $\varphi, \theta, \psi$  表示与手端固连坐标系相对基坐标系的欧拉角.设光滑刚性曲面对手端的约束方程(亦即该曲面的方程)为  $\Phi(X) = 0$ , 其中  $\Phi \in \mathbf{R}^m$  ( $m < 6$ ) 连续可微且其  $m$  个分量  $\Phi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 是彼此独立的.将  $\Phi(X) = 0$  求导得

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial X^T} \dot{X} = 0 \quad (3-128)$$

由于  $\Phi(X)$  的各分量是独立的,故

$$\text{rank} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X^T} = m$$

将  $\frac{\partial \Phi}{\partial X^T}$  中各行矢量  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial X^T}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 单位正交化,并记所得到的  $m$  个正交单位矢量为  $e_{6-m+1}, \dots, e_6$ , 则存在  $m \times m$  矩阵  $Q$  使得

$$E_1 \triangleq \begin{bmatrix} e_{6-m+1}^T \\ \vdots \\ e_6^T \end{bmatrix} = [e_{6-m+1}, \dots, e_6]^T = Q \frac{\partial \Phi}{\partial X^T}$$

由式(3-128)知

$$E_i \dot{X} = 0 \quad (3-129)$$

再选取  $6-m$  个六维的正交单位矢量  $e_1(X), \dots, e_{6-m}(X)$  满足

- ①  $e_i(X)$  ( $i = 1, \dots, 6-m$ ) 对  $X$  连续可微.
- ②  $e_i(X)$  ( $i = 1, \dots, 6-m$ ) 均与  $\{e_{6-m+1}, \dots, e_6\}$  正交.

记

$$E_p = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{6-m}^T \end{bmatrix} = [e_1, \dots, e_{6-m}]^T$$

则

$$E \triangleq \begin{bmatrix} E_p \\ E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_6^T \end{bmatrix} = [e_1, \dots, e_6]^T$$

为正交矩阵.

利用上述单位正交矢量组  $\{e_1(X), \dots, e_6(X)\}$ , 可以在约束方程  $\Phi(X) = 0$  上任一点  $X$  处都构造出两个相互正交的子空间

$$T(X) = \text{span}\{e_1(X), \dots, e_{6-m}(X)\}$$

$$N(X) = \text{span}\{e_{6-m+1}(X), \dots, e_6(X)\}$$

使得

$$\mathbf{R}^6 = T(X) \oplus N(X)$$

式中  $\oplus$  表示两子空间的直和. 因此当机器人手端与约束曲面  $\Phi(X) = 0$  为点接触时, 则在机器人手端沿曲面  $\Phi(X) = 0$  运动的每点上, 都可以用接触点为原点, 以  $\{e_1, \dots, e_6\}$  为基构成一六维坐标系——适从坐标系. 随着接触点的运动, 适从坐标系也随之变化.

记机器人在任务空间中速度  $\dot{X}$  在适从坐标系中的表示为  $\dot{x}_c$ , 则由定义知

$$\dot{X} = [e_1, \dots, e_6] \dot{x}_c = E^T \dot{x}_c$$

故由  $E$  的正交性知

$$\dot{x}_c = E \dot{X} = \begin{bmatrix} E_p \dot{X} \\ E_i \dot{X} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} \quad (3-130)$$

利用式(3-129)立即知  $\dot{X}$  在子空间  $N(X)$  中的投影

$$\dot{x}_i = E_i \dot{X} = 0 \quad (3-131)$$

这个式子表明:

- ① 机器人运动所受到的自然约束可在适从坐标系中很方便地表示

为:机器人手端速度在子空间  $N(X)$  中的投影(分量)为零.

② 因机器人手端速度  $\dot{X}$  在子空间  $N(X)$  中的投影  $\dot{x}_t$  为零. 又考虑到机器人手端沿刚性曲面运动时, 其速度在曲面法向的投影为零, 故可知子空间  $N(X)$  位于曲面  $\Phi(X) = 0$  的法向.

③ 由于  $m$  个约束方程的存在, 机器人手端运动自由度从6减少到  $6 - m$ , 且只有其在子空间  $T(X)$  中的运动  $\dot{x}_p$  未受自然约束, 故应加以控制(即给予人工约束), 所以称  $T(X)$  为适从坐标系中的位置受控子空间.

以下再研究机器人作用于环境的力在适从坐标系中的投影. 为方便起见, 设机器人杆数  $n = 6$ . 记机器人手端速度为  $v_6$ , 角速度为  $\omega_6$ , 由习题1-13知存在可逆矩阵  $R(q)$ , 使得

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = R(q) \omega_6$$

故

$$\begin{aligned} \dot{X} &= [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_6 \\ \omega_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R(q) \end{bmatrix} J(q) \dot{q} \triangleq \tilde{J} \dot{q} \end{aligned} \quad (3-132)$$

式中  $J(q)$  为机器人雅可比矩阵. 又记机器人施加于环境的力在任务空间  $X$  中的表示为  $f_x$ ,  $f_x$  在关节空间所对应的广义力为  $\tau_f$ , 则由

$$\dot{q}^T \tau_f = \dot{X}^T f_x = \dot{q}^T \tilde{J}^T f_x$$

知在关节空间中此运动受限机器人方程为

$$H(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau - \tilde{J}^T f_x \quad (3-133)$$

式中  $N(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)$ . 又由式(3-132)知

$$\ddot{X} = \tilde{J} \ddot{q} + \dot{\tilde{J}} \dot{q}$$

从而知

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \tilde{J}^{-1} \dot{X} \\ \ddot{q} &= \tilde{J}^{-1} (\ddot{X} - \dot{\tilde{J}} \dot{q}) \end{aligned}$$

将在关节空间中的机器人方程(3-133)左乘  $\tilde{J}^{-1}$ , 并将上两式代入后即得在任务空间  $X$  中的机器人方程

$$\underline{H}(X) \ddot{X} + \underline{N}(X, \dot{X}) = u - f_x \quad (3-134)$$

式中

$$\underline{H} \triangleq \tilde{J}^{-T} H \tilde{J}^{-1}, \quad \underline{N} \triangleq \tilde{J}^{-T} (N - H \tilde{J}^{-1} \dot{\tilde{J}} \tilde{J}^{-1} \dot{X}), \quad u \triangleq \tilde{J}^{-T} \tau$$

为求出机器人施加于环境的力  $f$ , 在适从坐标系中表达式  $f_c = E f$ , 需要将机器人方程(3-134)投影到适从坐标系中. 首先, 由式(3-130)知

$$\begin{aligned}\dot{X} &= E^T \dot{x}_c \\ \ddot{X} &= E^T \ddot{x}_c + \dot{E}^T \dot{x}_c\end{aligned}$$

将方程(3-134)左乘  $E$ , 并将上两式代入后得到用适从坐标表示的机器人方程

$$H_c(x_c) \ddot{x}_c + N_c(x_c, \dot{x}_c) = u_c - f_c \quad (3-135)$$

式中

$$H_c \triangleq E H E^T, N_c \triangleq E(N + H \dot{E}^T \dot{x}_c), u_c \triangleq E u$$

利用以适从坐标表示的机器人方程(3-135)和运动约束方程(3-131)可解出机器人施加于环境的力在适从坐标系中的投影  $f_c$ . 事实上, 式(3-131)可写为

$$[0, I] \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_f \end{bmatrix} \triangleq A \ddot{x}_c = 0$$

从而有

$$A \ddot{x}_c = 0$$

因由定义知  $H_c$  是正定矩阵, 故从方程(3-135)解出  $\ddot{x}_c$  后代入上式得

$$A H_c^{-1} (u_c - f_c - N_c) = 0$$

考虑到  $A$  为行满秩后由上式可解出

$$f_c = A^T (A H_c^{-1} A^T)^{-1} A H_c^{-1} (u_c - N_c) \quad (3-136)$$

记

$$H_c = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, H_c^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3-137)$$

式中  $H_{11}$  和  $H_{22}^*$  均为阶数与  $\ddot{x}_p$  相同的方阵. 将上式及  $A = [0, I]$  代入式(3-136)可算出

$$f_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (H_{22}^*)^{-1} H_{21}^* & I \end{bmatrix} (u_c - N_c) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ f_{c2} \end{bmatrix} \quad (3-138)$$

这个公式表明:

① 机器人手端施加于环境的力所受的自然约束可在适从坐标系中很方便地表示为: 该力在子空间  $T(X)$  中的投影(即分量)为零.

② 因机器人手端加于光滑刚性曲面  $\Phi(X) = 0$  上的力在子空间  $T(X)$  中的分量为零, 又考虑到机器人手端加于光滑刚性曲面上的力在曲面切向的分量为零, 故可知子空间  $T(X)$  位于曲面  $\Phi(X) = 0$  的切向.

③ 机器人手端加于曲面  $\Phi(X) = 0$  上的力在子空间  $N(X)$  中的分量未受到自然约束,故应加以控制(即应给予人工约束),所以子空间  $N(X)$  称为适从坐标空间中的力受控子空间。

④ 将式(3-131)代入式(3-130)知

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-139)$$

将其与式(3-138)比较可明显看出在适从坐标系中运动与力所受约束的互补性,亦即位置受控子空间与力受控子空间的互补性。

将式(3-139),(3-137)和(3-138)代入用适从坐标表示的机器人方程(3-135),得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix} + N_c &= u_c - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (H'_{22})^{-1} H'_{21} & I \end{bmatrix} (u_c - N_c) \\ &= u_c - \begin{bmatrix} 0 \\ -f_{c2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-140)$$

即

$$\begin{cases} H_{11}\dot{x}_p + N_{c1} = u_{c1} \\ H_{21}\dot{x}_p + N_{c2} = u_{c2} - f_{c2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (3-141) \\ (3-142) \end{matrix}$$

式中

$$N_c = \begin{bmatrix} N_{c1} \\ N_{c2} \end{bmatrix}, \quad u_c = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix}$$

这两式中的式(3-141)表明:当机器人方程表示在适从坐标系中时,位置控制部分可以被分解出来。而当位置控制部分的控制策略确定以后,运动  $x_p$  (即  $x_c$ ) 完全被确定,式(3-142)成为关于力  $f_{c2}$  (即  $f_c$ ) 的代数方程。总之,这两个式子表明了当机器人方程表示在适从坐标系中时,位置和力的控制呈现出某种“解耦”的形式。

#### 四、位置-力混合控制的基本思想<sup>[49]</sup>

位置-力混合控制的基本思想是:将在关节空间中的位置与力经坐标变换变到适从坐标系中,利用在适从坐标系中位置受控子空间与力受控子空间的互补关系分别设计出位置与力的控制律后,再经坐标反变换变为关节空间中控制律来实现同时控制机器人手端的位置和作用子环境的力。其基本框图如图3-24所示。图中  $6 \times m$  矩阵  $A = [0, I]$  为力选择矩阵,它从  $f_c$  中选出要控制的力  $f_{c2}$ ,  $6 \times (6-m)$  矩阵  $\bar{A} \triangleq [I, 0]$  为位置选择矩阵,它根据力受控子空间与位置受控子空间的互补性从  $x_c$  和  $\dot{x}_c$  中选出要控制的  $x_p$  和  $\dot{x}_p$ 。

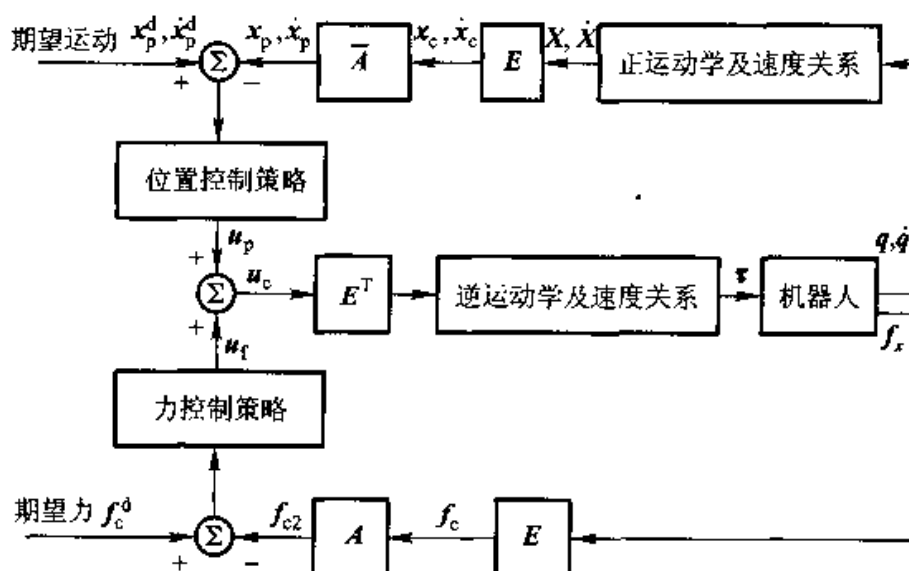


图 3-24

### 五、一种位置-力混合控制方案<sup>[50]</sup>

选取在适从坐标系中表示的控制  $u_c$  具有以下形式

$$u_c = u_p + u_f = (N_c + u_p) + u_f \quad (3-143)$$

代入适从空间中机器人方程(3-140)后,得到受控机器人方程为

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix} = \ddot{u}_p + u_f - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (H'_{22})^{-1} H'_{21} & I \end{bmatrix} (\ddot{u}_p + u_f)$$

选取

$$\begin{cases} \ddot{u}_p = \begin{bmatrix} H_{11} [\ddot{x}_p^d + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] \\ H_{21} [\ddot{x}_p^d + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] \end{bmatrix} \\ u_f = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{c2}^d \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-144)$$

式中  $x_p^d$  为  $x_p$  的期望值(即对  $x_p$  的人工约束),  $f_{c2}^d$  为  $f_{c2}$  的期望值,  $K_d$  和  $K_p$  均为正定矩阵. 代入式(3-143)后得到

$$\begin{bmatrix} H_{11} \ddot{x}_p \\ H_{21} \ddot{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} [\ddot{x}_p^d + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] \\ H_{21} [\ddot{x}_p^d + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_{c2}^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ H_2^* [\ddot{x}_p^d + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] + f_{c2}^d \end{bmatrix}$$

式中  $H_2^* \triangleq (H'_{22})^{-1} H'_{21} H_{11} + H_{21}$ . 由上式前  $6-m$  个分量得

$$H_{11} [(\ddot{x}_p^d - \ddot{x}_p) + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] = 0$$

因  $H_c$  是正定矩阵,故  $H_{11}$  也是正定矩阵,从而有

$$(\ddot{x}_p^d - \ddot{x}_p) + K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p) = 0$$

考虑到  $K_d$  和  $K_p$  均为正定矩阵后知有  $x_p \rightarrow x_p^d, \dot{x}_p \rightarrow \dot{x}_p^d$ , 即实现了稳定的位置跟踪。

将式(3-143)和(3-144)代入式(3-138)后知机器人作用于环境的力在适从坐标系中的表示

$$f_c = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2^* [\ddot{x}_p^d - K_d(\dot{x}_p^d - \dot{x}_p) + K_p(x_p^d - x_p)] + f_{c2}^d \end{bmatrix}$$

再由  $H_c^{-1} H_c = I$  可知

$$H_{2c}^* H_{1c} + H_{22}^* H_{21} = 0$$

考虑到  $H_{22}^*$  可逆后即可得到

$$H_2^* = (H_{22}^*)^{-1} H_{21}^* H_{1c} + H_{21} = 0$$

代入以上  $f_c$  的表达式后得到

$$f_c = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{c2}^d \end{bmatrix}$$

这表明机器人作用于曲面法向的力为期望值  $f_{c2}^d$ 。

对于这种位置-力混合控制方案还需要说明以下几点。

(1) 为实施控制律(3-143)和(3-144), 还应将其变换到关节空间中, 求出应施加的

$$\tau = \tilde{J}^T u = \tilde{J}^T E^T u_c$$

(2) 这种控制方案不需要力的测量信息, 但有时为了提高力控制的精度, 也引入力反馈回路。

(3) 以上介绍的这种控制方案需要知道机器人精确模型, 但这种控制方案也可推广到机器人模型不精确知道时的情况, 导出相应的自适应控制方案(习题3-22)。

(4) 从控制理论的角度看, 因为力不是系统的状态变量, 所以这种位置-力混合控制问题已经超出了以研究状态控制为目标的现代控制理论研究范畴, 是一类新型的控制问题。这类问题的提出不仅对机器人控制研究有重要意义, 也促进了现代控制理论研究的发展, 这方面的研究已成为目前控制领域的前沿课题之一。

## 六、运动受限机器人的阻抗控制

位置-力混合控制方法并非是运动受限机器人控制设计的唯一方法, 另一类常用的重要方法是所谓“阻抗控制”(Impedance Control)<sup>[51]</sup>。阻抗控制与位置-力混合控制不同, 它不像后者那样直接以跟踪期望的位置和力为目标, 而是力图调节任务空间中机器人动力学特性与其所受外力之

间的关系,即所谓“机械阻抗”(Mechanical Impedance).

仍记任务空间中机器人位置为  $X$ , 机器人所受到的环境作用力为  $-f_e$ , 若希望  $X$  和  $-f_e$  之间满足期望的阻抗关系

$$M_d \ddot{X} + B_d \dot{X} + K_d (X - X_d) = -f_e^d$$

式中  $X_d$  为期望位置,  $f_e^d$  为期望施加到环境上的力,  $M_d$  为期望惯性矩阵,  $B_d$  为期望阻尼矩阵,  $K_d$  为期望刚度矩阵; 则很容易由任务空间中的机器人动力学方程(3-134)推导出达到这一目标的一种控制律为

$$u = -\underline{H}(X)M_d^{-1}[B_d \dot{X} + K_d(X - X_d) + f_e^d] +$$

$$\underline{N}(X, \dot{X}) + f_e$$

$$\tau = \underline{J}^T u$$

从上述表达式可以看出, 阻抗控制方法需要实时进行力  $f_e$  的测量.

另外, 当机器人不与环境接触时,  $f_e$  和  $f_e^d$  均为零. 这时如果取  $M_d = I$ , 则上述阻抗控制律化为任务空间中的计算力矩法. 这表明阻抗控制可用统一的方法研究自由运动和受限运动机器人的控制问题, 这是其突出优点之一. 但从上述控制律不难看出, 阻抗控制主要是控制与位移同方向的力, 所以在当前的许多研究中将位置-力混合控制方法与阻抗控制方法结合使用进行运动受限机器人的控制器设计.

### 3.13 多机器人的位置-力混合控制

#### 一、所要研究的问题

本节研究多机器人协同工作时的位置-力混合控制, 具体地说, 是研究安装在共同基础上的  $m(>1)$  个 6 自由度机器人共同夹紧一物体, 要控制被夹持物体上一固定点  $E$  沿一刚性光滑曲面运动, 并控制物体在点  $E$  作用于此刚性光滑曲面上的力(参看图 3-25).

#### 二、多机器人系统模型的建立<sup>[52]</sup>

建立一和被夹持物体固连的坐标系  $O$ , 并建立一和基座固连的坐标系  $B$ . 用

$$X = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T \triangleq [x_1, \dots, x_6]^T$$

表示物体相对系  $B$  的位置和指向, 其中  $[x, y, z]^T$  为系  $O$  原点在系  $B$  中坐标,  $[\varphi, \theta, \psi]^T$  为系  $O$  相对系  $B$  的欧拉角. 在每个机器人各杆上均建立一个和杆固连的坐标系, 记  $q^i = [q_1^i, \dots, q_n^i]^T$  为机器人  $i(i \in \{1, \dots, m\})$  的



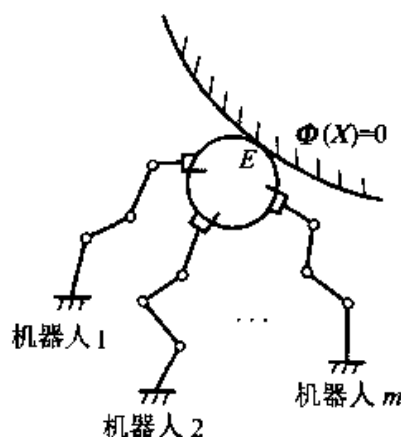


图 3-25

关节变量;用  $A_k$  表示从机器人  $i$  的系  $k$  到系  $j$  的齐次变换矩阵;用  $q' = P(X)$  表示从  $X$  到  $q'$  的逆运动学关系. 用和2.1节中类似的方法可用Lagrange方程建立用  $X$  坐标表示的机器人方程.

记机器人  $i$  的杆  $s$  中任一质点的矢径在系  $s$  中的齐次坐标为  $\bar{r}^{i,s}$ , 则它在基坐标系  $B$  中的齐次坐标

$${}^B\bar{r}^{i,s} = {}^B\mathbf{A}_s[{}^i\mathbf{I}^s(X)]\bar{r}^{i,s} \triangleq {}^B\mathbf{A}_s^i(X)\bar{r}^{i,s}$$

该点导数

$$\dot{{}^B\bar{r}^{i,s}} = \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial({}^B\mathbf{A}_s^i)}{\partial x_j} \dot{x}_j \bar{r}^{i,s}$$

该杆的动能

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} \int_{\text{杆}s} \text{tr}[(\dot{{}^B\bar{r}^{i,s}})(\dot{{}^B\bar{r}^{i,s}})^T] dm \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \text{tr} \left[ \frac{\partial({}^B\mathbf{A}_s^i)}{\partial x_j} J_s^i \frac{\partial({}^B\mathbf{A}_s^i)^T}{\partial x_k} \right] \dot{x}_j \dot{x}_k \end{aligned} \quad (3-145)$$

式中

$$J_s^i = \int_{\text{杆}s} (\bar{r}^{i,s})(\bar{r}^{i,s})^T dm$$

为机器人  $i$  杆  $s$  的伪惯性矩阵. 机器人  $i$  的动能

$$T_i = \sum_{s=1}^6 T_{is}$$

类似地可求出被夹持物体的动能

$$T^o = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \text{tr} \left[ \frac{\partial({}^B\mathbf{A}_o)}{\partial x_j} J^o \frac{\partial({}^B\mathbf{A}_o)^T}{\partial x_k} \right] \dot{x}_j \dot{x}_k \quad (3-146)$$

式中  ${}^B\mathbf{A}_o$  为从系  $O$  到系  $B$  的齐次变换矩阵,

$$J^O = \int_{\text{物体}} \tilde{r} \tilde{r}^T dm$$

为物体的伪惯性矩阵,  $\tilde{r}$  为物体上元质点  $dm$  在系  $O$  中的齐次坐标.

由  $m$  个机器人和被夹持物体组成的整个系统的动能

$$T = T^O + \sum_{i=1}^m T^i \quad (3-147)$$

为便于分析, 假想地把被机器人夹持的物体分成  $m$  份, 每份质量为  $M_i^O$ , 这样物体总质量

$$M^O = \sum_{i=1}^m M_i^O$$

而  $J^O$  可写为

$$J^O = \sum_{i=1}^m \frac{M_i^O}{M^O} J^O$$

代入式(3-146)后知

$$T^O = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \text{tr} \left[ \frac{\partial({}^B \mathbf{A}_i^O)}{\partial x_j} ({}^6 \mathbf{A}_O^i) \left( \frac{M_i^O}{M^O} J^O \right) ({}^B \mathbf{A}_O^i)^T \frac{\partial({}^B \mathbf{A}_i^O)^T}{\partial x_k} \right] \dot{x}_j \dot{x}_k$$

从而由式(3-145)~(3-147)可知, 若将每个机器人  $i$  杆 6 的伪惯性矩阵  $J_6^i$  换为

$$\tilde{J}_6^i = J_6^i + \frac{M_i^O}{M^O} ({}^6 \mathbf{A}_O^i) J^O ({}^6 \mathbf{A}_O^i)^T$$

并记由此得到的机器人  $i$  的动能为  $\tilde{T}^i$ , 则整个系统的动能可写为

$$T = \sum_{i=1}^m \tilde{T}^i \quad (3-148)$$

另外, 用与2.1节中相同的方法可知第  $i$  个机器人杆  $s$  的势能

$$V_s^i = -m_s^i \bar{\mathbf{g}}^T ({}^B \mathbf{A}_s^i) \tilde{\mathbf{r}}_{C_s}^i \quad (3-149)$$

式中  $m_s^i$  为第  $i$  个机器人杆  $s$  的质量,  $\tilde{\mathbf{r}}_{C_s}^i$  是第  $i$  个机器人杆  $s$  质心向径在该机器人系  $i$  中的齐次坐标. 由此知第  $i$  个机器人的势能

$$V^i = \sum_{s=1}^6 V_s^i = - \sum_{s=1}^6 m_s^i \bar{\mathbf{g}}^T ({}^B \mathbf{A}_s^i) \tilde{\mathbf{r}}_{C_s}^i \quad (3-150)$$

同理可知被夹持物体的势能

$$V^O = -M^O \bar{\mathbf{g}}^T ({}^B \mathbf{A}_O^O) \tilde{\mathbf{r}}_C^O \quad (3-151)$$

式中  $\tilde{\mathbf{r}}_C^O$  为物体质心向径在系  $O$  中的齐次坐标. 整个系统的势能

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^m V^i + V^O \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^6 m_s^i \bar{\mathbf{g}}^T ({}^B \mathbf{A}_s^i) \tilde{\mathbf{r}}_{C_s}^i - M^O \bar{\mathbf{g}}^T ({}^B \mathbf{A}_O^O) \tilde{\mathbf{r}}_C^O \end{aligned} \quad (3-152)$$

由于  $V^O$  可写为

$$V^0 = - \sum_{i=1}^m \frac{M_i^0}{M^0} \bar{\mathbf{g}}^T ({}^6\mathbf{A}_6^i) ({}^6\mathbf{A}_0) \bar{\mathbf{r}}_C^0 \quad (3-153)$$

故由式(3-149)~(3-153)知:若将每个机器人 $i$ 第6杆的 $m_6^i \bar{\mathbf{r}}_{c6}^i$ 改为

$$m_6^i \bar{\mathbf{r}}_{c6}^i + \frac{M_i^0}{M^0} {}^6\mathbf{A}_0^i \bar{\mathbf{r}}_C^0$$

并记这样所得到的机器人的势能为 $\tilde{V}^i$ ,则整个系统的势能可写为

$$V = \sum_{i=1}^m \tilde{V}^i \quad (3-154)$$

由式(3-148)和(3-154)知经这样处理后,相当于把形成一体的整个机器人系统分解为 $m$ 个单独的,各持有一部分物体的,其动能和势能分别为 $\tilde{T}^i$ 和 $\tilde{V}^i$ 的机器人.

记系统的Lagrange函数为

$$L(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = T(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - V(\mathbf{X})$$

则由Lagrange方程得到用任务坐标 $\mathbf{X}$ 表示的整个系统的动力学方程为

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{u} - \mathbf{f}_x \quad (3-155)$$

对于方程(3-155)需要特别指出的是:由式(3-148)和(3-154)知式(3-155)左端的 $\underline{\mathbf{H}}$ 和 $\underline{\mathbf{N}}$ 可写为

$$\underline{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{H}}^i, \quad \underline{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{N}}^i \quad (3-156)$$

其中 $\underline{\mathbf{H}}^i, \underline{\mathbf{N}}^i$ 仅与夹持一部分物体的机器人 $i$ 有关.

### 三、一种多机器人协同工作时的位置-力混合控制方案

由于方程(3-155)具有与3.11节中方程(3-111)完全相同的形式,所以用与3.11节中完全相同形式的控制律来实现此多机协同工作时的位置-力混合控制问题.即先用与3.11节中同样的方法建立适从坐标系,再将方程(3-155)变换为用适从坐标 $\mathbf{x}_c$ 表示的方程

$$\mathbf{H}_c \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{N}_c = \mathbf{u}_c - \mathbf{f}_c$$

注意:由式(3-156)知这时仍有

$$\mathbf{H}_c = \sum_{i=1}^m \mathbf{H}_c^i, \quad \mathbf{N}_c = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_c^i \quad (3-157)$$

其中 $\mathbf{H}_c^i, \mathbf{N}_c^i$ 仅与夹持部分物体的机器人 $i$ 有关.最后取控制

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c = & \mathbf{N}_c + \mathbf{H}_c [\ddot{\mathbf{x}}_c^d + \mathbf{K}_\alpha (\dot{\mathbf{x}}_c^d - \dot{\mathbf{x}}_c) + \\ & \mathbf{K}_\mu (\mathbf{x}_c^d - \mathbf{x}_c)] + \mathbf{f}_c^d \end{aligned} \quad (3-158)$$

式中

$$\ddot{x}_c^d = \begin{bmatrix} \ddot{x}_p^d \\ 0 \end{bmatrix}, K_{vc} = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_{pc} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f_c^d = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{c2}^d \end{bmatrix}$$

即可实现位置力的同时控制。

尽管控制律(3-158)在形式上与3.11节中的完全一样,但这时特别需要注意以下3点:

① 式(3-158)中施加于环境的作用力  $f_c^d$  是由  $m$  个机器人共同作用产生的,即有

$$f_c^d = \sum_{i=1}^m f_c^{d,i} \quad (3-159)$$

其中  $f_c^{d,i}$  由机器人  $i$  提供. 由于机器人个数  $m > 1$ , 故当  $f_c^d$  给定时, 上式中各  $f_c^{d,i}$  不是唯一确定的. 通常的办法是要求各  $f_c^{d,i}$  的确定使得二次型性能指标

$$Q = F^T W F$$

最小, 式中

$$F = \begin{bmatrix} f_c^{d,1} \\ \vdots \\ f_c^{d,m} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_m \end{bmatrix}$$

式中  $W_1, \dots, W_m$  均为正定矩阵. 因式(3-159)可写为

$$f_c^d = [I, \dots, I] \begin{bmatrix} f_c^{d,1} \\ \vdots \\ f_c^{d,m} \end{bmatrix} \triangleq U F \quad (3-160)$$

故可求出满足要求的

$$F = W^{-1} U^T (U W^{-1} U^T)^{-1} f_c^d \quad (3-161)$$

(习题3-23). 将  $F, W$  和  $U$  的表达式代入式(3-160)可得到

$$f_c^{d,i} = W_i^{-1} \left( \sum_{j=1}^m W_j^{-1} \right)^{-1} f_c^d, \quad i = 1, \dots, m$$

② 由式(3-157)~(3-159)知控制

$$\begin{aligned} u_c &= \sum_{i=1}^m \{ N_c^i + H_c^i [\ddot{x}_c^d + K_{vc}(\dot{x}_c^d - \dot{x}_c) + K_{pc}(x_c^d - x_c)] + f_c^{d,i} \} \\ &\triangleq \sum_{i=1}^m u_c^i \end{aligned}$$

其中

$$u_c^i = H_c^i [\ddot{x}_c^d + K_{vc}(\dot{x}_c^d - \dot{x}_c) + K_{pc}(x_c^d - x_c)] + N_c^i + f_c^{d,i}$$

由机器人  $i$  提供. 当确定了机器人  $i$  的控制  $u_c^i$  后, 还应再变换到关节空间中求出每个机器人所应施加的  $\tau$ .

③ 为确定控制 $\tau$ ,每个机器人 $i$ 都要利用自己测量到的 $q'$ 和 $\dot{q}'$ 确定出 $X$ 和 $\dot{X}$ .由于测量误差,可能使每个机器人得到不同的 $X$ 和 $\dot{X}$ .为保证控制的协调性,可先对各机器人得到的 $X, \dot{X}$ 取平均值后再用来确定各机器人的控制 $\tau$ .

显然,利用多机器人系统的动力学方程(3-161),也可以很容易地设计出多机器人协同工作时的阻抗控制方案(习题3-24),这里不再赘述.

#### 四、说明

从本节的叙述中可以看出,研究多机器人协同控制问题时会遇到在单个机器人制研究中所没有的新问题.主要有:

① 如何将由多个机器人及被夹持物体构成的复杂系统的动力学方程写为便于分析和设计的形式.

② 如何确定多个机器人间负荷和作用力的分配.

③ 如何协调多个机器人间的运动.

对这些问题的研究并非只有本节所述的方法,而是已经提出了多种多样的不同方法.例如在研究多机器人共同夹持物体时,可以不像本节那样将被夹持物体假想地分给每个机器人,而是先根据被夹持物体的受力情况求出其加速度,再求出各机器人手端的夹持力和加速度,据此进一步设计各机器人的控制律<sup>[55]</sup>.又例如在研究多机器人协同工作问题时已提出了“主-从(Master-Slave)”型<sup>[54]</sup>和“主-助(Master-Helper)”型<sup>[55]</sup>协调控制策略等.对于多机器人均含建模不确定性的情况,也提出了多种自适应控制方案<sup>[56,57]</sup>等.

尽管对多机器人协同工作时的控制问题已有多种不同的处理方法,但目前还未形成公认的成熟理论,这方面的研究目前仍是机器人控制领域有待进一步研究的难度最大的课题.

# 习 题

## 1. 1

1-1 证明由式(1-1)所定义的方向余弦矩阵 ${}^0R_1$ 是正交矩阵,即证明:

$$({}^0R_1)^{-1}=({}^0R_1)^T$$

1-2 证明:当采用右手坐标系时,方向余弦矩阵 $R$ 的行列式

$$|R|=1$$

1-3 证明欧拉公式(1-2).

1-4 证明:当 $k$ 为单位矢量时,其坐标表达式所对应的叉乘矩阵 $S(k)$ 满足

$$S^3(k)=-S(k)$$

1-5 证明:对任一方向余弦矩阵 $R$ 及任意矢量 $a$ 和 $b$ 的坐标表达式,均成立

$$R(a \times b) = R(a) \times R(b)$$

$$RS(a)R^T = S(Ra)$$

1-6\* 一个方阵 $A$ 的指数 $e^A$ 定义为

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

证明:对任意单位矢量 $k$ 和转角 $\theta$ 均成立

$$R_k(\theta) = e^{S(k)\theta}$$

1-7\* 证明:(1)对任一 $3 \times 3$ 反对称矩阵 $S$ , $e^S$ 是一个旋转矩阵,即证明

$$(e^S)^T = (e^S)^{-1}, \quad |e^S| = 1$$

(2)对任一旋转矩阵 $R$ ,都存在 $3 \times 3$ 反对称矩阵 $S$ ,使得

$$R = e^S$$

1-8 证明:对任一方向余弦矩阵 $R$ ,总可找到单位矢量 $k$ 和转角 $\theta$ ,使得

$$R_k(\theta) = R$$

1-9 设一坐标系相对坐标系0做转动后得到坐标系1,然后将系1再相对坐标系0做转动后得到坐标系2.由于这种转动每次都是相对同一坐标系0而进行的,故常称为绝对转动.证明:若记第一次转动的旋转矩阵为 $R_1$ ,第二次转动的旋转矩阵为 $R_2$ ,则从系0到系2的旋转矩阵

$${}^0R_2 = R_2 R_1$$

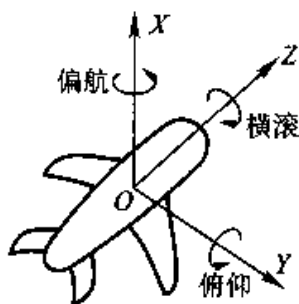
并进而证明一般结论:连续绝对转动的旋转矩阵可按绝对转动的次序连续左乘各次转动的旋转矩阵来得到.

1-10 任给一方向余弦矩阵 $R$ ,试用解析法求出相应的3个ZYZ欧拉角,使得

$$R = R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

1-11 如图 1-2 中那样给出 ZXZ 欧拉角和 ZYX 欧拉角的定义,并用欧拉角表示出相应的旋转矩阵.

1-12 在航空中,常设置参考坐标系 OXYZ 使得 Z 轴沿水平航行方向, X 轴垂直向上(参见题 1-12 图). 这时分别称绕 Z 轴的转角  $\varphi$  为横滚角,绕 Y 轴的转角  $\theta$  为俯仰角,绕 X 轴的转角  $\psi$  为偏航角(或侧滑角),证明:这 3 个角即为 ZYX 欧拉角.



题 1-12 图

1-13 (1) 对用 ZYZ 欧拉角确定的旋转矩阵  $R = R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi)$ , 证明:

$$\frac{d}{dt}R = S(\omega)R$$

式中

$$\omega = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

(2) 证明:当  $\theta \neq \pm k\pi (k=0,1,2,\dots)$  时,存在可逆矩阵  $B$ ,使得

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = B \omega$$

(3) 对用 ZXZ 和 ZYX 欧拉角确定的旋转矩阵证明与上述(1)和(2)相应的结论.

1-14 证明:连续绝对运动的齐次变换矩阵可按绝对运动的次序连续左乘各次运动的齐次变换矩阵得到.

1-15 对例 1-1 中的问题,求出其 ZXZ 和 ZYX 欧拉角.

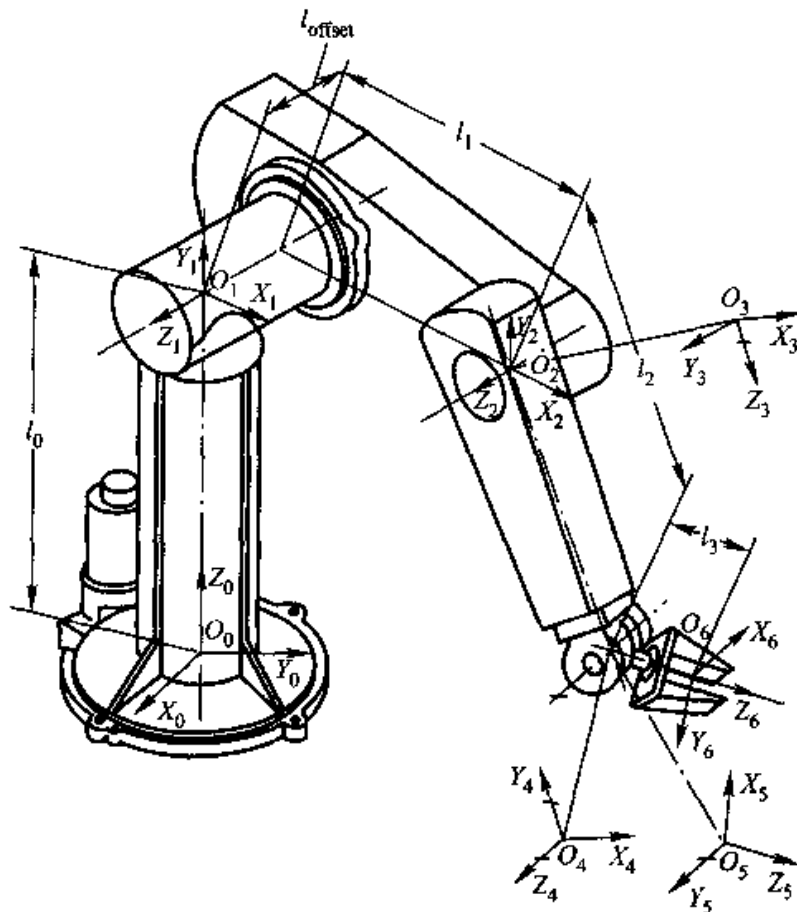
## 1.2

1-16 一般来说,两坐标系的相对位置与指向需要用 6 个独立的参数来刻画:其中 3 个参数刻画两坐标系原点间的相对位置,另 3 个参数(如欧拉角)刻画两坐标系间的相对指向.而在用 D-H 方法或修改的 D-H 方法设置杆坐标系时,两坐标系间的相对位置与指向只用 4 个独立的参数即可确定,试说出其中的原因.

1-17 当用 D-H 参数所对应的基本运动矩阵来确定齐次变换矩阵时,其表达式并非只有式(1-8)中第一个等式一种.试写出其余所有的形式,并说出从中可得出什么一般结论.

1-18 求出当杆坐标系分别用 D-H 方法和修改的 D-H 方法设置时,  $({}^{i-1}A_i)^{-1}$  的表达式,从而证明它们都仅是变量  $q_i$  的函数.

1-19 求出 PUMA 600 型机器人的 D-H 参数(参看题 1-19 图).



题 1-19 图

1-20 对习题 1-19 中的机器人,用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系,并确定出其修改的 D-H 参数.

### 1.3

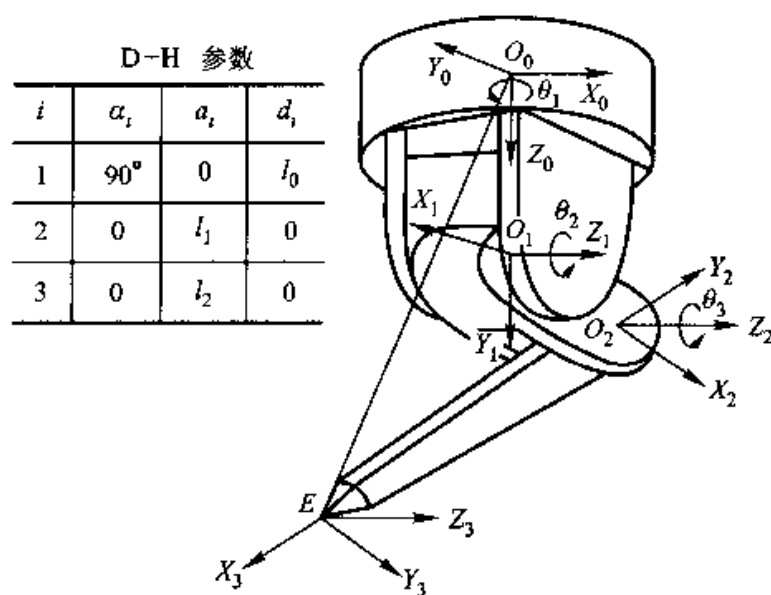
1-21 证明恒等式(1-17)~(1-20).

1-22 证明三角方程(1-21)的解为式(1-22).

1-23 求解习题 1-19 中 PUMA 600 型机器人的逆运动学问题.

1-24 题 1-24 图中 3 自由度机器人的 D-H 参数如表中所示,求解其逆运动学问题.





题 1-24 图

1-25 求解 1.3 节中 5 种基本结构机器人的逆运动学问题。

## 1.4

1-26 证明:由 3 个欧拉角组成的  $[\varphi, \theta, \psi]^T$  不能作为角位置的三维矢量坐标表达式。

1-27 利用欧拉公式(1-2)证明式(1-33)。

1-28 推导适用于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的用齐次变换矩阵表示的正速度公式。

1-29 推导适用于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的用三维矢量形式表示的正速度公式。

1-30 (1) 用  $4 \times 4$  齐次变换矩阵表示法求出 Stanford 臂各杆的速度和角速度表达式。

(2) 用三维矢量表示法求出 PUMA 600 型机器人各杆的速度和角速度表达式。

1-31 求出习题 1-19 中 PUMA 600 型机器人的雅可比矩阵。

1-32 推导适用于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的雅可比矩阵表达式。

1-33 证明式(1-61)~(1-63)。

1-34 确定 1.3 节中所述 5 种基本结构机器人的臂奇异点。

1-35 求出习题 1-24 中 3 自由度机器人的雅可比矩阵,并确定其奇异位置。

## 1.5

1-36 推导适用于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的用齐次变换矩

阵表示的正加速度公式.

1-37 从用齐次变换矩阵表示的正加速度公式(1-67)中导出式(1-70)和(1-73).

1-38 推导适用于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的用三维矢量形式表示的正加速度公式.

1-39 用三维矢量表示法求出 Stanford 臂各杆的加速度和角加速度表达式.

1-40 推导适用于用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的  $J$  表达式.

1-41 求出题 1-19 中 PUMA 600 型机器人的  $J$  表达式.

## 2.1

2-1 试说明:广义坐标不同于现代控制理论的状态空间方法中所使用的状态向量.

2-2 证明式(2-2)和(2-3).

2-3 证明: $n \times n$  矩阵  $A$  是反对称矩阵的充要条件是

$$x^T A x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2-4 对例 2-1 中的 DDArm 机械臂

(1) 利用  $H$  的解析表达式验证它是一个正定矩阵.

(2) 利用  $H$  和  $C$  的表达式验证  $H - 2C$  是反对称矩阵.

(3)\* 写出  $C$  的另一种表达式  $C^*$ , 使得  $H - 2C^*$  是反对称矩阵.

2-5 对例 2-1 中的 DDArm 机械臂,用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系后再导出其动力学方程,并对这一方程验证习题 2-4 中所要验证的结果.

2-6 推导习题 1-24 中 3 自由度机器人的动力学方程.

2-7 推导例 1-4 中 Stanford 臂的动力学方程.

## 2.2

2-8 证明惯性张量阵是正定的.

2-9 证明式(2-51).

2-10 证明式(2-53).

## 2.3

2-11 推导用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的用齐次变换矩阵表示的逆动力学算法.

2-12 推导用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的用三维矢量表示的逆动力学算法.

2-13 修改本节中用齐次变换矩阵表示的逆动力学算法,使其也能像用三维矢量表示的逆动力学算法一样,省去关于重力项的计算。

2-14 用逆动力学算法求出的 DDArm 机械臂的  $\tau$  的表达式,验证例 2-1 中的结果。

2-15 编写一般  $n$  自由度机器人逆动力学算法的计算机程序。

## 2.4

2-16 证明惯性张量阵的性质(2-95)和(2-96)。

2-17 推导用修改的 D-H 方法建立驱动轴坐标系时的正动力学算法。

2-18 编写一般  $n$  自由度机器人正动力学算法的计算机程序。

## 2.5

2-19 修改组合体惯量法,使其能利用最小惯性参数的概念来简化正动力学计算。

2-20 证明式(2-151)~(2-156)。

2-21 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且关节  $n$  为移动关节时,  $m_n$  是  $\tau_n$  可辨识的。

2-22 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且移动关节  $n$  属情况 T1 时,惯性参数  $mx_n, my_n, mz_n$  都是  $\tau_n$  可辨识的。

2-23 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且转动关节  $n$  属情况 R1 时,惯性参数  $XX_n = xx_n - yy_n, xy_n, xz_n, yz_n, mx_n, my_n$  都是  $\tau_n$  可辨识的。

2-24 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且转动关节  $n$  属情况 R2 时,惯性参数  $mx_n$  和  $my_n$  是  $\tau_n$  可辨识的。

2-25 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且转动关节  $n$  属情况 R3 时,  $\hat{a}_n$  的前两个分量  $a_x, a_y = 0$ 。

2-26 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且转动关节  $n$  属情况 R1 时,式(2-199)和(2-200)成立。

2-27 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且转动关节  $n$  属情况 R2 时,式(2-201)和(2-202)成立,且式(2-202)中的  $d_{n-1}$  对  $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$  均无影响。

2-28 证明:当用修改的 D-H 参数建立驱动轴坐标系且转动关节  $n$  属情况 R3 时,式(2-203)和(2-204)成立,且令其中的  $\hat{e}_{n-1} = e_{n-1} \equiv 0$  后,对  $\tau_i (1 \leq i \leq n-1)$  无影响。

2-29 求出例 2-1 中 DDArm 机械臂的一组最小惯性参数。

2-30 求出例 2-3 中两个机器人的各一组最小惯性参数。

## 3.2

3-1 采用独立的 PID 控制是否能使机器人实现定点控制? 能否跟踪时变的期望轨迹?

## 3.3

3-2 具有实时重力补偿的 PID 控制是否能使机器人跟踪时变的期望轨迹?

3-3 若一力学系统的动能为  $T$ , 势能为  $V$ , 证明系统的 Hamilton 函数  $H^*$  满足

$$H^* = T + V$$

3-4 具有固定重力补偿的 PID 控制是否能使机器人跟踪时变的期望轨迹?

## 3.4

3-5 证明: 当  $K_d$  和  $K_p$  为任意正定矩阵时, 由式(3-30)所描述的系统的原点  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  是全局渐近稳定的。

3-6 编写一般  $n$  自由度机器人计算力矩法的递推形式的计算程序。

3-7 当在关节空间中规划机器人期望轨迹时, 常将期望轨迹设计为连续可微的多项式轨迹。

(1) 证明: 若给定期望轨迹在起始时刻  $t_0 = 0$  时的位置  $q_0$ , 速度  $\dot{q}_0$  和加速度  $\ddot{q}_0$ , 以及终止时刻  $t_f$  时的位置  $q_f$ , 速度  $\dot{q}_f$  和加速度  $\ddot{q}_f$ , 则可设计出满足起点和终点要求的 5 阶多项式轨迹

$$q_d(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

式中

$$a_0 = q_0, \quad a_1 = \dot{q}_0, \quad a_2 = \frac{1}{2} \ddot{q}_0,$$

$$a_3 = \frac{1}{2t_f^3} [20(q_f - q_0) - (8\dot{q}_f + 12\dot{q}_0)t_f + (\ddot{q}_f - 3\ddot{q}_0)t_f^2]$$

$$a_4 = \frac{1}{2t_f^4} [-30(q_f - q_0) + (14\dot{q}_f + 16\dot{q}_0)t_f - (2\ddot{q}_f - 3\ddot{q}_0)t_f^2]$$

$$a_5 = \frac{1}{2t_f^5} [12(q_f - q_0) - 6(\dot{q}_f + \dot{q}_0)t_f + (\ddot{q}_f - \ddot{q}_0)t_f^2]$$

(2) 验证: 例 3-2 中的轨迹  $q_d(t)$  即为用上述方法设计出的轨迹。

## 3.6

3-8 用本节所述的最优控制方法设计能完成例 3-2 中任务的控制方案。

### 3.7

3-9 证明式(3-59).

3-10 证明式(3-60).

### 3.8

3-11\* 用无源性定理证明本节控制方案的稳定性.

3-12\* 推导实现式(3-67)的递推形式的控制算法.

### 3.9

3-13 证明当  $K_d$  和  $K_p$  为正定矩阵时, 方阵

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}$$

是稳定的(即其特征值实部均为负).

3-14\* 用无源性定理证明自适应控制方案(3-79)和(3-81)的稳定性.

3-15\* 用李雅普诺夫方法证明自适应控制方案(3-79)和(3-81)的稳定性.

3-16\* 推导实现自适应控制律(3-79)和(3-81)的递推形式的控制算法.

### 3.10

3-17 用文献[46]中的“趋近律方法”设计机器人的变结构控制方案.

### 3.11

3-18 证明式(3-117).

3-19 证明式(3-124).

3-20 证明式(3-127).

### 3.12

3-21 当机器人夹持一粉笔在光滑黑板上写字时, 写出机器人手端所受的自然约束和人工约束.

3-22\* 当机器人惯性参数未知时, 设计一种机器人自适应位置-力混合控制方案.

### 3. 13

3-23 证明式(3-161).

3-24 利用多机器人系统的动力学方程(3-161),设计一种多机器人协同工作时的阻抗控制方案.

3-25\* 当机器人惯性参数未知时,设计一种多机器人协同工作时的自适应位置-力混合控制方案.

## 参 考 文 献

- 1 Craig C C. Adaptive Control of Mechanical Manipulators. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1988
- 2 Spong M W, Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control. New York: John Wiley & Sons Press, 1989
- 3 Yoshikawa T. Foundations of Robotics: Analysis and Control. Cambridge, USA: MIT Press, 1990
- 4 Asada H, Slotine J J E. Robot Analysis and Control. New York: John Wiley & Sons Press, 1987
- 5 Danevit J, Hartenberg R S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, Trans. ASME J. of Applied Mechanics, 1995, 22: 215~221
- 6 Khalil W, Kleinfinger J F. A new geometric notation for open and closed loop robot. In Proceedings of the 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1174~1179.
- 7 Pieper D L. The Kinematics of Manipulations under Computer Control, Ph. D. Thesis, Stanford University, 1968
- 8 Orin D E, Schrader W W. Efficient computation of the Jacobian for robot manipulators. Int. J. Robotics Research, 1984, 3: 66~75
- 9 Ortega R, Spong M W. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. In Proceedings of the 24th Conf. on Decision and Control, 1988. 1575~1584
- 10 霍伟, 高为炳, 程勉. 一个新的机器人模型及其控制算法. 自动化学报, 1994, 20: 278~285
- 11 An C H, Atkeson C G, Hollerbach J M. Model-Based Control of a robot manipulator. London: MIT Press, 1988
- 12 Hollerbach J M. A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation coomplexity. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1980, 10: 730~736
- 13 Luh J Y S, Walker M W, Paul R P C. Online computational scheme for mechanical manipulators. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1980, 102: 69~76
- 14 Silver W M. On the equivalence of Lagrangian and Newton-Euler dynamics for manipulators, Int. J. of Robotics Research, 1982, 1: 60~70
- 15 Armstrong W W. Recursive solution to the equations of motion of an N-link manipulator. Proc. 5th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms,

1979. 1343~1346

16 Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *Int. J. of Robotics Research*, 1983, 2: 13~30

17 Featherstone R. *Robot Dynamics Algorithms*. Norwell, USA: Kluwer Academic Publisher, 1987

18 霍伟. Spatial Notation 理论及机器人动力学与控制:[学位论文]. 北京:北京航空航天大学, 1990

19 Walker M W, Orin D E. Efficient dynamic computer simulation of robotics mechanism. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1982, 104: 205~211

20 Nobel B. *Applied Linear Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, 1969

21 Ito K. (ed.) *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. Cambridge, USA: MIT Press, 1986

22 Khalil W, Kleinfinger J F, Gautier M. Reducing the computational burden of the dynamic model of robots. In *Proceedings of the 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 525~531

23 Mayeda H, Yoshida K, Osuka K. Base parameters of manipulator dynamic models. In *Proceedings of the 1988 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1367~1372.

24 Mayeda H, Yoshida K, Osuka K. Base parameters of dynamic models for manipulators with rotational and translational joints. In *Proceedings of the 1989 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1523~1528

25 Gautier M, Khalil W. A direct determination of minimum inertial parameters of robots. In *Proceedings of the 1988 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1682~1687

26 Khalil W, Bennis F, Gautier M. The use of generalized links to determine the minimum inertial parameters of robots. *J. of Robotic Systems*, 1990, 7: 225~242

27 Huo W, Cheng M, Gao W B. A new recursive formula for direct determining of the robot minimum inertial parameters. In *Proceedings of the IFIP Int. Conf. : Modelling and Innovation: Communications, Automation and Information Systems*, Roma, Italy, 1990

28 Niemeyer G, Slotine J J E. Performance in adaptive manipulator control. In *Proceedings of the 27th Conf. on Decision and Control*, 1988. 1585~1591

29 Kawasaki H, Kanazaki K. Minimum dynamics parameters of robot models. In *Proceedings of the IFAC/IFIP/IMACS Symp. on Robot Control*, Vienna, Austria, 1991

30 Huo W. New formula for complete determining the base parameters of robots. In *Proceedings of the 1995 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*,



3021~3026

31 Arimoto S, Miyazaki F. Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulator of sensory capability. In Proceedings of The First Int. Symposium, Robotics Research, 1983. 783~799

32 LaSalle J, Lefschetz S. Stability by Lyapunov's Direct Method. New York: Academic Press, 1961

33 Takeyaki M, Arimoto S. A new feedback method for dynamic control of manipulators. ASME J. of Dynamic Systems. Measurement and Control, 1981, 102: 119~125

34 Paul R P. Modeling, trajectory calculation and servoing of a computer controlled arm. Stanford Artificial Intelligence Laboratory memo AIM177, 1972

35 Luh J Y S, Walker M, Paul R P. Resolved acceleration control of mechanical manipulators. IEEE Trans. on Automatic Control, 1980, 25: 474~486

36 Bellman R E. Dynamic Programming. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957

37 Lou G L, Saridis G N. Optimal/PID formulation for control of robotic manipulators. In Proceedings of the 1985 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 621~626

38 Freund E. Decoupling and pole assignment in nonlinear systems, Electronic Letters, 1973, 4: 373~374

39 Freund E. Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators. Int. J. Robotics Research, 1982, 1: 65~78

40 Desoer C A, Vidyasager M. Feedback Systems: Input-Output Properties. New York: Academic Press, 1975

41 Slotine J J E, Li W P. On the adaptive control of robot manipulators. Int. J. Robotics Research, 1987, 6: 49~59

42 Slotine J J E, Li W P. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, Inc., 1991

43 Dubowsky S, Desforges D T. The Application of the model-referenced adaptive control to robotic manipulators. ASME Trans. on Dynamic Systems, Measurement, Control, 1979, 101

44 Craig J, Hsu P, Sasry S. Adaptive control of mechanical manipulators, Int. J. Robotics Research, 1987, 6: 16~28

45 Utkin V I. Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems. Moscow: MIR Publishers, 1978

46 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 中国科学技术出版社, 1990

47 Slotine J J E, Sastry S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with applications to robot manipulators, Int. J. Control, 1983, 38: 465~492

- 48 Spong M W, Vidyasager M. Robust linear compensator design for nonlinear robot control. *IEEE J. on Robotics and Automation*, 1987,3: 345~351
- 49 Raibert M, Craig J. Hybrid position/force control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1981,102: 126~133
- 50 Yoshikawa T, Sugie T, Tanaka M. Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators; controller design and experiment. *IEEE J. on Robotics and Automation*, 1988,4: 699~705
- 51 Hogan N. Impedance control; an approach to manipulation, Part 1 ~ 3. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1985,107: 1~24
- 52 Hayati S. Hybrid position/force control of multi-arm cooperating robots. In *Proceedings of the 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 82~89
- 53 Schneider S A, Cannon R H Jr. Object impedance control for cooperative manipulators: theory and experimental results. In *Proceedings of the 1989 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1076~1083.
- 54 Zheng Y F, Luh J Y S. Joint torques for control of two coordinated moving robots. In *Proceedings of the 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1375~1380
- 55 Gao W B, Cheng M. A new control strategy for robot systems in tracking tasks. *Mechatronics*, 1991,1: 353~366
- 56 Slotine J J E, Li W. On the adaptive control of robot manipulators. *Int. J. of Robotics Research*, 1987,6: 49~59
- 57 Hu Y R, Goldenberg A A. An adaptive approach to motion and force control of multiple coordinated robot arms. In *Proceedings of the 1989 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1091~1096

