信息科学与工程学院
COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

线 性 代 数

考试学习资料集

线　　性　　代　　数

（考试学习资 料 集）

主编：许时

副主编：何雄男　张嘉凝　张润滨

参编：宋汐　王昭鹏　杜得生　佟孟佳　庄铭今

刁凤丹　邓昕

主审：苏卓

信息科学与工程学院出版

序言

寄语

线性代数作为考研数学科目之一，其重要性不必多说，而且线性代数在以后的学习中还会有用武之地。那么一个重要的问题来了，学好线性代数，难吗？

很多同学说，线代课简直崩溃，很多东西都听不懂。但就是在这种情况下，线性代数的平均分并不低，很多同学最后都能达到 80 分以上。所以，从成绩的角度分析，线代并不可怕。

学好线代并不难。上课听不懂？没关系。有些定理的证明就是很复杂很难懂，但是，往往定理的证明并不作为考察重点，真正做题你往往只会用到最后的结论进行计算。而计算题，我们有模版。每一章节的内容，只要把计算题的模式搞懂，其余的就是小学计算问题。证明题会考，但占的分值并不大，而且难度并不逆天，只要平时多多练习，证明题也不是问题。

刷题！刷题！刷题！重要的事情说三遍！不要管高大上的考试系统，只要把平时的题刷好，总结好做题方法，所有的机考都不成问题。线代机考成绩占了很大比例，除了选择题之外，其余的填空题和计算题题型都是相似的，掌握好几类重点题的做法，然后不断刷题进行巩固练习，线代机考绝对没问题。机考考好，及格便不是问题，再用心做一些证明题，好成绩就向你招手了！

本书汇集信息学院同学们的智慧，由信息学院学习部整理编成，有针对性的对知识点进行的总结，详细分析了考试重点的题型，总结了做题规律，提供了课外的练习题，并整理了历年线性代数考题及详解答案。可以说本书是为东北大学同学们量身打造的一本线代秘籍，比市场的书更有针对性，有效帮助同学们更好地学习线性代数。当然本书虽初步完成，但仍不完善，恳请各位同学对书中的不足之处提出意见和建议，让我们一同完善这本东大线代秘籍。

认真看书，努力刷题，勤奋的你一定会取得好成绩！

目录

第一章 行列式

本章知识点总结：

一、基本概念：

1、二阶行列式：形如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$的式子称为二阶行列式；

数学规定$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$；

（1）只有两行两列；

（2）右边的式子称为行列式；左边的式子称为行列式的展开式；

（3）行列式的展开式的结果称为行列式的值；

（4） $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素；

（5）展开式的方法称为对角线法则；

（6）右边的代数式也可视为左边二阶行列式按第一行展开的展开式；

2.二阶行列式与二元一次方程组的解的关系：

（1）求二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$的解；

（2）方程的解与行列式的关系： $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

数学中记： $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，则$\begin{cases} \mathrm{D} \cdot x = D_x \\ D \cdot y = D_y \end{cases}$

（3）方程组的判别式：当$D \neq 0$时，二元一次方程组有唯一实数解：$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$；对应两条直线相交；

（4）当$D=0$时，①D_x, D_y中至少有一个不为零，则原方程组无解；对应两条直线平行；

②$D_x = D_y = 0$，则原方程组有无数组解；对应两条直线重合；

3. 三阶行列式：形如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$的式子称为三阶行列式。

规定$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$；

（1）有三行三列；

（2）$a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$称为行列式的元素；

（3）展开式的方法称为对角线法则；

（4）余子式：将三阶行列式中元素a_{ij}所在的行和列划去后剩下的二阶行列式M_{ij}称为元素的余子式；

（5）代数余子式：$\boldsymbol{M}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{A}_{ij}$　　　　$\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$

①、$\boldsymbol{A}_{ij}$和$\boldsymbol{a}_{ij}$的大小无关；

②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；

③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为$|\boldsymbol{A}|$；

（6）三阶行列式与代数余子式关系：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

①三阶行列式可以按其中那个任意一行（或一列）展开成该行（或该列）元素与其对应的代数余子式的乘积的和；

②三阶行列式的某一行的元素与另一行的代数余子式的乘积的和为 0；

③三阶行列式的某一列的元素与另一列的代数余子式的乘积的和为 0；

（7）三阶行列式与三元一次方程组的解的关系：

①解三元一次方程组：$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$时有唯一解

②行列式解三元一次方程组：设$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，

$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，则原方程为$\begin{cases} \mathrm{D}\cdot x=D_x \\ D\cdot y=D_y \\ D\cdot z=D_z \end{cases}$

4. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$（按第i行展开）

（1）设$\boldsymbol{n}$行列式$\boldsymbol{D}$：

将$\boldsymbol{D}$上、下翻转或左右翻转，所得行列式为$\boldsymbol{D}_1$，则$\boldsymbol{D}_1=(-1)^{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}}\boldsymbol{D}$；

将$\boldsymbol{D}$顺时针或逆时针旋转90°，所得行列式为$\boldsymbol{D}_2$，则$\boldsymbol{D}_2=(-1)^{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}{2}}\boldsymbol{D}$；

将$\boldsymbol{D}$主对角线翻转后（转置），所得行列式为$\boldsymbol{D}_3$，则$\boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{D}$；

将$\boldsymbol{D}$主副角线翻转后，所得行列式为$\boldsymbol{D}_4$，则$\boldsymbol{D}_4=\boldsymbol{D}$；

二、行列式主要性质：

（1）置换行列式：$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$=D，即行列同时对应互换；

（2）交换某两行或两列，则互为相反数：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-D$

（3）提取公因式法则：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$；

（4）如果将行列式的某一行的每一个元素都写成两个数的和，那么该行列式可以等于两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行对应位置的元素，其它位置的元素与原行列式相同，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

（5）行列式某两行（或列）相等或成比例，或某一行（或列）为零，则 $D=0$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0;$$

（6）将行列式某一行的所有元素同乘以数 k 后加到另一行对应位置上行列式的值不变：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

（7）范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_n-x_1)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i);$$

补充：

1. 证明$|\boldsymbol{A}|=0$的方法：

①、$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$；

②、反证法；

③、构造齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=0$，证明其有非零解；

④、利用秩，证明$\boldsymbol{r(A)}<\boldsymbol{n}$；

⑤、证明 0 是其特征值；

2. 行列式的重要公式：

①、主对角行列式：主对角元素的乘积；

②、副对角行列式：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

③、上、下三角行列式（$|◥|=|◣|$）：主对角元素的乘积；

④、$|◤|$和$|◢|$：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$、$\begin{vmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；

⑦、特征值；

3. 对于$\boldsymbol{n}$阶行列式$|\boldsymbol{A}|$，恒有：

$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \boldsymbol{S}_k\lambda^{n-k}$，其中$\boldsymbol{S}_k$为$\boldsymbol{k}$阶主子式

总结：关于行列式的计算，我们学了三种计算方法：定义法、降阶法、性质法.当我们在计算一个行列式时，往往是这三种方法的综合运用.

1. 利用行列式展开式性质进行降阶计算时，注意将该行（或列）只留一个非零元.并且展开时注意代数余子式的符号.

2. 对有些问题的计算有时需要加行或加列变成高一阶的行列式进行计算.

3. 注意发现所给行列式的特殊规律.寻求简单解法.

4. 要灵活运用行列式性质与展开式的性质，灵活运用范德蒙行列式的计算结果.常用计算行列式的方法有：

（1）按某一行（或列）展开，降阶计算；

（2）加行加列；

（3）拆行（或拆列）；

（4）将代数余子式的和或余子式的和转化为行列式计算；

（5）找到递推关系进行运算.

（6）化为三角形计算；

第一章 机考题

一、选择题

1、Cramer 法则

第一题：若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则（ ）

A. $\mu = 0$且$\lambda = 1$　　　　B. $\lambda = 1$

C. $\mu = 0$　　　　D. $\mu = 0$或$\lambda = 1$

参考答案

D＝$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix}$＝$\mu - \mu\lambda$ 齐次线性方程组有非零解，则 D=0，即 $\mu - \mu\lambda = 0 \Rightarrow$

$\mu = 0$或$\lambda = 1$，不难验证，当$\mu = 0$或$\lambda = 1$时，该齐次线性方程组确有非零解

2.行列式的主要性质及计算

第二题:

行列式$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$的值为（）

A.-81
B.48
C.-48
D.81

参考答案注意到行列式的各列 4 个数之和都是 6，故把第 2、3、4 行同时加到第 1 行，可提公因子 6，再由各行减去第一行，化为上三角行列式 $D \underline{\underline{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$=6

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{matrix}}} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$=48

第三题 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\2&2&0&\dots&0\\3&0&3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&0&0&\dots&n\end{vmatrix}$ 的值为（ ）

A. $n!\left(2-\frac{n(n+1)}{2}\right)$

B. $n!$

C. $n!\frac{n(n+1)}{2}$

D. $n!\left(1-\frac{n(n+1)}{2}\right)$

此题为剑型行列式，考生需要掌握

参考答案

$$D_n\underline{\underline{c_1-c_2-\cdots-c_n}}\begin{vmatrix}1-2-\cdots-n&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(2-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

第四题

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2&3&\cdots&n-2&n-1\\1&x&1&2&\cdots&n-3&n-2\\1&x&x&1&\cdots&n-4&n-3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&x&x&x&\cdots&1&2\\1&x&x&x&\cdots&x&1\end{vmatrix}=（ ）$$

A. $(-1)^n x^{n-3}$

B. $(-1)^{n+1} x^{n-3}$

C. $(-1)^{n+1} x^{n-2}$

D. $(-1)^n x^{n-2}$

参考答案

$$D\ \underset{i=2,\cdots,\ n}{\overset{r_{i-1}-r_i}{=\!=}}\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1&1\\0&1-x&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1-x&1&\cdots&1&1\\0&0&0&1-x&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&1-x&1\\1&x&x&x&\cdots&x&1\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1-x&1&1&\cdots&1&1\\0&1-x&1&\cdots&1&1\\0&0&1-x&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1-x&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2...n-1}{\overset{r_{i-1}-r_i}{=\!=}}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&0\\1-x&x&0&\cdots&0&0\\0&1-x&x&\cdots&0&0\\0&0&1-x&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&1-x&1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}$$

3、余子式和代数余子式

第五题:

已知四阶行列式 D 中第 1 行的元素分别为 1,2,0，-4，第 3 行的元素的余子式依次为 6，x，19,2，则 x 的值为（ ）

A. 0

B. 1

C. 8

D. 7

参考答案

由题设知，a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{14}分别为 1,2,0，-4；M_{31}，M_{32}，M_{33}，M_{34}分别为 6，x，19,2。

从而得A_{31}，A_{32}，A_{33}，A_{34}分别为 6，-x，19，-2。由行列式按行（列）展开定理，得 $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=0$，即$1\times6+2\times(-x)+0\times19+(-4)\times(-2)=0$，所以 x=7

4、范德蒙行列式

第六题设$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&3&\cdots&n&x\\1&4&9&\cdots&n^2&x^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&2^n&3^n&\cdots&n^n&x^n\end{vmatrix}$，则导函数$f'(x)$的零点个数为（ ）

A.无法确定　　　　B.（n+1）个

C.（n-1）个　　　　D.　n 个

参考答案

对行列式按第 n+1 列展开，知$f(x)$是 x 的 n 次多项式，则$f'(x)$是 x 的 n-1 次多项式 $f(x)=0$的 n 个根，也就知道$f'(x)=0$根所在的区间。

据范德蒙行列式知$f(x)=I(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$是 x 的 n 次多项式，且 $f(1)=f(2)=\cdots=f(n)$，其中$I=\prod\limits_{1\le j\le i\le n}(i-j)\neq0$。由罗尔定理，在$(1,2),(2,3),\cdots(n-1,\ n)$区间内至少各有$f'(x)=0$的一个点，且它只有 n-1 个根，因此，上述各区间内有且仅有$f'(x)$的一个零点。

二、填空题

填空每一道题都是固定的类型，考生只需熟悉各类型的计算方式，多刷几次就能保证没有错。下面按照试卷的出题顺序举例。

第七题：简单的行列式计算，多为四阶行列式

四阶行列式$D=\begin{vmatrix}0&-2&2&1\\-2&2&1&0\\2&1&0&-2\\1&0&-2&2\end{vmatrix}$等于 $\boxed{}$

参考答案

四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&-2&2&1\\-2&2&1&0\\2&1&0&-2\\1&0&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&2&1&0\\2&1&0&-2\\1&0&-2&2\end{vmatrix}=1*\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&2&1&0\\2&1&0&-2\\1&0&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$1*\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-2&4&-1&-1\\2&-1&-1&-2\\1&-1&-2&4\end{vmatrix}=1*\begin{vmatrix}4&-1&-1\\-1&-1&-2\\-1&-2&4\end{vmatrix}=1*\begin{vmatrix}3&-3&3\\-1&-1&-2\\-1&-2&4\end{vmatrix}=(1)*(3)*\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&-1&-2\\-1&-2&4\end{vmatrix}=$$

$$(1)*(3)*\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (1)*(3)*\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (1)*(2)*((-2)*(2)-(-3)*(-3)) = -39$$

第八题：多阶行列式的计算，重在找规律

$$7\text{阶行列式}\,D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 4 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & \cdots & 4 \end{vmatrix}\text{等于}$$

参考答案

7 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 4 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 34 & 34 & 34 \\ 5 & 4 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = 34*\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 4 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = 34*\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = -34$$

第九题：六阶“X”型行列式的计算，一般情况下只需通过一步一步拆分求解即可

$$\text{六阶行列式}\,D_6 = \begin{vmatrix} 4 & & & & & 2 \\ & 2 & & & 4 & \\ & & -2 & -4 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & 3 & & & -3 & \\ -2 & & & & & 2 \end{vmatrix}\text{等于}$$

参考答案

$$D_6 = \begin{vmatrix} 4 & & & & & 2 \\ & 2 & & & 4 & \\ & & -2 & -4 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & 3 & & & -3 & \\ -2 & & & & & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & & & 4 & \\ & -2 & 2 & & \\ & 1 & 1 & & \\ 3 & & & -3 & \\ & & & & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} & & & & 2 \\ 2 & & & 4 & \\ & -2 & -4 & & \\ & 1 & 1 & & \\ 3 & & & -3 & \end{vmatrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 2 & & & 4 \\ & -2 & -4 & \\ & 1 & 1 & \\ 3 & & & -3 \end{vmatrix} = -216\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -432$$

第十题：考察余子式和代数余子式

行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -8 & 5 & 6 & -3 \\ 12 & 6 & -10 & 4 \end{vmatrix}$中代数余子式$A_{12}$等于 $\boxed{}$

参考答案

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -8 & 6 & -3 \\ 12 & -10 & 4 \end{vmatrix}=8$$

第十一题：克拉默法则

用 Cramer 法则解方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=5 \\ 16x_1+25x_2+25x_3=25 \end{cases}$，则解为：

$x_1=$　　　　　　$x_2=$　　　　　　$x_3=$

参考答案

因为$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \\ 16 & 25 & 25 \end{vmatrix}=(5-4)*(-5-4)*(-5-5)\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \\ 25 & 25 & 25 \end{vmatrix}=(5-5)*(-5-5)*(-5-5)$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \\ 16 & 25 & 25 \end{vmatrix}=(5-4)*(-5-4)*(-5-5)$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 16 & 25 & 25 \end{vmatrix}=(5-4)*(5-4)*(5-5)$$

所以$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{0}{-9}=0$　$x_2=-\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-10}=1$　$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{0}{90}=0$

第十二题：考察齐次线性方程组非零解的意义，及系数行列式为零

已知齐次线性方程组$\begin{cases} -2x_1-2x_2-x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+6x_3=0 \\ 4x_1+16x_2+(a+16)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 a=(　　　　　　　　)

参考答案

由于系数行列式$D=\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 4 & 16 & \lambda+16 \end{vmatrix}=-6(\lambda-2)$

所以，$\lambda=2$时，方程组有非零解

线性代数第一章考试题

1、$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$

分析：如果行列式的各行（列）数的和相同时，一般首先采用的是将各列（行）加到第一列（行）的公因子（简称列（行）加法）

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=160$$

2、$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2005 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2006 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2007 \end{vmatrix}$ 求 D

解此行列式刚好只有 n 个非零元素 $a_{1.n-1}a_{2.n-2},\ldots,a_{n-1.1},a_{n.n}$, 故非零项只有一项：

$(-1)^t a_{1.n-1}a_{2.n-2}\ldots a_{n-1.1}a_{n.n}$ 其中 $t=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,

因此 $D=(-1)^{\frac{(2007-1)(2007-2)}{2}}2007!=-2007!$

3、计算 $D_n\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ (x_n-x_1)y_1 & (x_n-x_1)y_2 & \cdots & (x_n-x_1)y_n\end{vmatrix}$

解：当 $n=2$ 时 $D_2=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$

当 $n\geq 3$时，$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (x_n-x_1)y_1 & (x_n-x_1)y_2 & \cdots & (x_n-x_1)y_n\end{vmatrix}=0$

4、计算 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}$

解：利用范德蒙行列式计算

$D_n=D_n{}^T=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots$

$[n-(n-1)]=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!$

5、证明

$$\begin{vmatrix}ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{vmatrix};$$

证

$$\text{左边} \xlongequal[\text{分开}]{\text{按第一列}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{分别再分}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal{\text{分别再分}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}(-1)^2 = \text{右边}$$

6、证明

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

证 n=2 时，$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1x + a_2$ 命题成立。假设对于（n-1）阶行列式命题成立即 $D_{n-1} = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}$，则 D_n 按第一列展开：

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n = \text{右边}$$

7、求 $\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上的元素都是 a，未写出的元素都是 0；

解：$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$ $\longrightarrow$ 按最后一行展开

$(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)} + (-1)^{2n} \cdot a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)}$ $\longrightarrow$ 再按第一行

展开 $(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)} + a^n = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1)$

8、求 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$

解将第一行乘（-1）分别加到其余各行，得 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a-x & x-a & 0 & \dots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$

再将各列都加到第一列上，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

9、求

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

解：从第 n+1 行开始，第 n+1 行经过 n 次相邻对换，换到第一行，第 n 行经（n−1）次对换换到第二行⋯

经 n+（n−1）+⋯+1= $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次行交换，得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

此行列式为范德蒙德行列式

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}\left[(a-i+1)-(a-j+1)\right]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}\left[-(i-j)\right]=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(-1)^{n+(n-1)+\ldots+1}\cdot\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}\left[(i-j)\right]$$

$$=\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}\left[(i-j)\right]$$

10、求

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & \ddots & & 0 & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & 0 & & \ddots & \\ c_n & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

解：原式按第一行展开得

$$a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ & a_1 & b_1 & & & \\ 0 & & & & 0 & \vdots \\ & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

都按最后一行展开得 $a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_nD_{2n-2}$

由此得递推公式： $D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}$

即 $D_{2n}=\prod_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2$ 而 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$

所以 $D_{2n}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$

第二章　矩阵

一、基本定义:

定义 2.1 由 m × n 个数 aij（i=1，2，…，m；j=1,2,…,n）排列成的 m 行、n 列的数表称为 m 行、n 列矩阵，简称为 m × n 矩阵。为表示成一个整体，总是加一括号，并用大写黑体字母表示。构成矩阵的 m×n 个数成为矩阵 A 的元素，aij（i=1，2，…，m；j=1，2，…，n）称为矩阵 A 的第 A=（aij）或 A=（aij）m×n，m × n 矩阵也记作 Am×n。

只有一行的 1×n 矩阵称为行矩阵，也称为行向量。只有一列的 m×1 矩阵称为列矩阵，也称为列向量。

行数和列数相等的 n×n 矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，n 阶矩阵 A 也记作 A=a。

两个矩阵如果行数和列数对应相同，则称为同型矩阵。

元素全是零的矩阵称为零矩阵，m×n 阶零矩阵记为 0m×n，或记作 0。注意不同型的零矩阵是不同的。

相等：矩阵相等就是两个矩阵同型且对应位置元素全相等。

加法：只有同型矩阵才能做加法，两个矩阵相加就是对应位置上的元素相加而矩阵阶数不变。矩阵加法的性质：

A+B=B+A(交换律)；

(A+B)+C=A+(B+C)(结合律)；

A+O=A;

A+(-A)=O;

数乘法：数乘就是将数乘到矩阵的每个元素上去而矩阵阶数不变。矩阵数乘法的性质：

1A=A;

(kl)A=k(LA);(k,l 为数)；

(k+l)A=kA+lA(k,l 为数)；

K（A+B）=kA+kB（k 为数)。

乘法：A 为$m \times p$的矩阵，B 为$p \times n$的矩阵，那么称$m \times n$的矩阵 C 为矩阵 A 与 B 的乘积，记作$C = AB$，其中矩阵 C 中的第i行第j列元素可以表示为：

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

如下所示：

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 & 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 & 4 \times 4 + 5 \times 5 + 6 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法注意事项

当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时，A 与 B 可以相乘。

1. 矩阵 C 的行数等于矩阵 A 的行数，C 的列数等于 B 的列数。
2. 乘积 C 的第 m 行第 n 列的元素等于矩阵 A 的第 m 行的元素与矩阵 B 的第 n 列对应元素乘积之和。

基本性质：

1. 乘法结合律： (AB)C=A(BC)
2. 乘法左分配律：(A+B)C=AC+BC
3. 乘法右分配律：C(A+B)=CA+CB
4. 对数乘的结合性 k(AB）=(kA)B=A(kB）
5. 转置 $(AB)^T=B^TA^T$
6. 矩阵乘法一般不满足交换律。即：$AB \neq BA$

主对角线之外全是零的矩阵称为对角矩阵，也常写为 diag（a1，a2,...,an)。

主对角线元素全是 1 的对角矩阵称为单位矩阵。n 阶单位矩阵，记为I_n或E_n。

设 A 为方阵，规定 A 的方幂为 $A^0=E, A^K=A=^{k-1}A$(k 为正整数)。

矩阵方幂的性质：

（i） $A^kA^l=A^{k+l}$；

（ii） $(A^k)^l=A^{kl}$；

（iii）若 AB=BA，则$(AB)^K=B^kA^k$,其中 k 与 l 都是非负整数。

注： （iii）的逆不成立。如取 A=，B=，则（AB）$^k=B^kA^k$,但 AB≠BA.

矩阵的转置：设 A 为 m×n 阶矩阵（即 m 行 n 列），第 i 行 j 列的元素是 a(i,j)，即：A=a(i,j)

定义 A 的转置为这样一个 n×m 阶矩阵 B，满足 B=a(j,i)，即 b (i,j)=a (j,i)（B 的第 i 行第 j 列元素是 A 的第 j 行第 i 列元素），

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 A 的行列式，记作|A|或 detA。

第二章 机考题

（一）选择题

一. 矩阵的概念及其基本运算

1. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&3\\2&3&-1\end{pmatrix}$，则$|A^*|=(\ )$

A. 8

B. 4

C. -18

D. -8

参考答案 $|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2$而$|A|=-2$，故$|A^*|=4$

2. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 定义 $f(A)=aA^2+bA+cE$ 又已知 $f(x)=x^2-5x+3$ 则 $f(A)=$（　　　　）

A. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}5&-1\\-3&6\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}$

参考答案

$$f(A)=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-5\\-15&15\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

3. 设 A，B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$

已知$B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$，且$|A-B|\neq 0$，则$A=(\ )$

A. $\begin{pmatrix}3&4&2\\0&-1&2\\2&6&-3\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}3&-4&-2\\0&-1&2\\-2&-6&-3\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

参考答案

由所给关系得$(A+2B)(A-B)-(A-B)=0$ 即$(A+2B-E)(A-B)=0$

由$|A-B|\neq 0$知$A=E-2B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

4.F，G 都是四阶方阵，且$|F|=2$，$|G|=-5$，则$|-3FG|=(\ )$

A.-810 B.810 C.30 D.-30

参考答案$|-3FG|=(-3)^4|F||G|=81\times 2\times(-5)=-810$

5.设 A 为 n 阶矩阵，n 为奇数，且$AA^T=E_n,|A|=1$，则$|A-E_n|=(\ )$

A.0 B.-1 C.2 D.1

参考答案

$AA^T=E_n,|A|=1$，得$|A-E_n|=|\ A-AA^T\ |$
$=|A(E_n-A^T)|=|A||E_n-A^T|=|E_n-A^T|=|E_n-A|=(-1)^n|A-E_n|$

由 n 为奇数，知$|A-E_n|=-|A-E_n|\Rightarrow|A-E_n|=0$

6. 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=A^{-1}$，则$|B|^2=(\ )$

A.0 B.$\frac{1}{144}$ C.$\frac{1}{14400}$ D.1

参考答案

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\5&0&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^4 5!=120$$

$$|B|=|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{120},|B^2|=|B|^2=\frac{1}{14400}$$

7.

$$已知n阶矩阵A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}，则|A|中所有元素的代数余子式之和为(\ )$$

A.-1 B.无法确定 C.1 D.0

参考答案

利用公式 $A^*=|A|A^{-1}$，先求出$|A|$及A^{-1}，再计算所求和，显然$|A|=1$，又

$$\langle A|B\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1&&&&\\1&1&0&\cdots&0&&1&&&\\1&1&1&\cdots&0&&&1&&\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&&&\ddots&\\1&1&1&\cdots&1&&&&&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&&&&1&&&\\&1&&&-1&1&&\\&&1&&&-1&1&\\&&&\ddots&&&\cdots&\cdots\\&&&1&&&-1&1\end{pmatrix}$$

可见，$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\cdots&\cdots&\\&&&-1&1\end{pmatrix}$

，于是 $\sum_{i，j=1}^{n}A_{ij}=n-(n-1)=1$

8. 已知矩阵方程$A^2+A+E=0$，则$(A-E)^{-1}=(\ )$

A.$-\frac{A-2E}{3}$　B.$\frac{A-2E}{3}$　C.$-\frac{A+2E}{3}$　D.$\frac{A+2E}{3}$

参考答案

$A^2+A-2E+E=0\Rightarrow(A-E)(A+2E)=-3E$，即

$(A-E)\left[-\frac{1}{3}(A+2E)\right]=E$，故$A^{-1}=-\frac{A+2E}{3}$

二、逆矩阵

1. 设$A=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$，其中$A_1$，$A_2$都是方阵。若A可逆，则下列结论中成立的有$(\ )$

A.A_1与A_2均可逆
B.A_2可逆
C.A_1与A_2的可逆性不定
D.A_1可逆

参考答案

A可逆$\Rightarrow|A|=|A_1||A_2|\neq0$，即$|A_1|\neq0$，且$|A_2|\neq0$.则$A_1$，$A_2$均可逆

三、矩阵的初等变换和初等矩阵

1. 设$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{11}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{21}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{31}\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则$(\ )$

A.$P_2A=B$
B.$P_1A=B$
C.$AP_1=B$
D.$AP_2=B$

参考答案

矩阵 B 是将矩阵 A 的第一列加到第三列，即$B=AP_1$

2. 以初等矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$左乘矩阵A，相当于对矩阵A施行$(\ )$的初等变换

A.$c_1 \leftrightarrow c_3$
B.$r_2 \leftrightarrow r_3$
C.$r_1 \leftrightarrow r_3$
D.$c_2 \leftrightarrow c_3$

参考答案

以初等矩阵左乘矩阵A相当于对A施行相应行变换，因此是第二行和第三行的互换

3. 设$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，则$A = (\ )$

A.$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ B.$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ D.$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

参考答案

注意到所给等式左端的两个矩阵是初等矩阵

$E(1,2)$及$E(1,3(1))$，把等式右端记作B，等式即为

$$E(1,2)AE(1,3(1)) = B \Rightarrow A = E(1,2)^{-1}BE(1,3(1))^{-1}$$

由$E(1,2)^{-1} = E(1,2)$，$E(1,3(1))^{-1} = E(1,3(-1)) \Rightarrow AE(1,2)BE(1,3(-1))$

根据初等矩阵与初等变换的关系，得 B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = A$$

4. 设$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则$(y_1, y_2) = (\ )$

A. (2, 1) B. (1, 2)
C. (1, -1) D. (1, 1)

解：$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则$\begin{cases} -9 + 4y_1 = -5 \\ 6 + 4y_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

五、矩阵应用实例

（二）填空题

题型一：

设$A=\begin{pmatrix}12 & 28\\ -6 & -14\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}$$

答案： 因为$A^2=\begin{pmatrix}12 & 28\\ -6 & -14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12 & 28\\ -6 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24 & -56\\ 12 & 28\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}12 & 28\\ -6 & -14\end{pmatrix}=-2A$

所以，$A^3=A^2A=-2A^2=(-2)^2A$, $A^4=(-2)^3A=(-2)^3\begin{pmatrix}12 & 28\\ -6 & -14\end{pmatrix}$

这题先通过找规律，找到 A 的二次方与 A 的关系，再算 A 的三次方，四次方……这种类型的题目都可以采用这种方式做，就像下面几个例题

题型二：

例一：

设$A=\begin{pmatrix}-8 & 28\\ -2 & 7\end{pmatrix}$， $P=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则

$$\left(P^{-1}AP\right)^5=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}$$

答案： 因为$P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，所以，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8 & 28\\ -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是，$\left(P^{-1}AP\right)^5=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

又由于，$\left(P^{-1}AP\right)^4=P^{-1}A^4P$, 所以$A^4=P\left(P^{-1}AP\right)^4P^{-1}$，即

$$A^4=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}8 & -28\\ 2 & -7\end{pmatrix}$$

先算出来 P 的逆，即通过计算，能算出来第一问的问题，牢记$\left(P^{-1}AP\right)^4=P^{-1}A^4P$，这里的 4 可以换成 n,就能解决这一类问题。按照上述答案的方式，就能算出 A 的四次方了。

例二：

$$设A=\begin{pmatrix}11 & 36\\ -2 & -6\end{pmatrix}，\quad P=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ 1 & 2\end{pmatrix}，则$$

$$\left(P^{-1}AP\right)^{3}=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix} \quad A^{5}=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}$$

$$答案：\quad 因为P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^{*}=\begin{pmatrix}2 & 9\\ -1 & -4\end{pmatrix}，所以，$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 9\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 36\\ -2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -9\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$于是,\left(P^{-1}AP\right)^{3}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 27\end{pmatrix},$$

$$又由于,\left(P^{-1}AP\right)^{5}=P^{-1}A^{5}P,所以A^{5}=P\left(P^{-1}AP\right)^{5}P^{-1},即$$

$$A^{5}=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & 0\\ 0 & 243\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 9\\ -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-128 & -2187\\ 32 & 486\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 9\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1931 & 7596\\ -422 & -1656\end{pmatrix}$$

题型三：

例一：

$$设矩阵A=\begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\\ 5 & -24 & -13\end{pmatrix}，\quad 则A的逆矩阵为$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}$$

$$解\quad 由于(A\,\vdots\,E)=\begin{pmatrix}1 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -24 & -13 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & 0 & -17 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 18 & 7 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$所以,A^{-1}=\begin{pmatrix}18 & 7 & -2\\ 7 & 2 & -1\\ -6 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

求矩阵的逆就是将 A 进行初等行变换，从（A|E）变换到（E|A-1），就能求出来 A 的逆，也可以采用 A*/|A|来计算，但是会比较麻烦。

例二：

$$设A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}，\quad 则A的逆矩阵为$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

答案：记 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，其中 $A_1=(4)$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -3 & 4 & 8 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$

又由于 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$(A_2 \vdots E)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$所以，A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 8 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$于是A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

题型四：

例一：

$$设A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\-3&3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&4\\-1&-4\\-5&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-8&3\\-29&-8\\36&7\end{pmatrix}，则$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix}\quad C-B=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix}$$

$$矩阵方程AX+B=C的解X=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix}$$

$$解\ 由于(A\vdots E)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\2&-1&-3&0&1&0\\-3&3&4&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&4&0&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&5&1&2\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$所以A^{-1}=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$C-B=\begin{pmatrix}-8&3\\-29&-8\\36&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&4\\-1&-4\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&-1\\-28&-4\\41&5\end{pmatrix}$$

$$由AX+B=C得:X=A^{-1}(C\text{-}B)$$

$$所以,X=A^{-1}(C—B)=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12&-1\\-28&-4\\41&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\\5&2\end{pmatrix}$$

A 的逆就用上一种题型的方法来做，C-B 的值也直接计算就好，而方程组的值，将方程进行变换，将 X 分离出来，就能算出来 X 的行列式。

例二：

设$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&-3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2&12\\-7&-3\\2&15\end{pmatrix}$，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix}$$

矩阵方程AXB=C的解 $X=\begin{pmatrix}\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\\\boxed{}&\boxed{}\end{pmatrix}$

解 由于$(A\,\vdots\,E)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&-4&1&2\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-3&1&2\\0&1&0&-4&1&2\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}$$

所以，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\-4&1&2\\-2&0&1\end{pmatrix}, B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^{*}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

由AXB=C 得：$X=A^{-1}CB^{-1}$

所以，$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\-4&1&2\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&12\\-7&-3\\2&15\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&3\end{pmatrix}$$

题型五：

例一：

设$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&-1&-5\\-3&-2&-4\end{pmatrix}$，矩阵B满足AB=-5A+5B，则矩阵B的行列式|B|为：$\boxed{}$

解 由于AB=-5A+5B得：(A-5E)B=-5A,所以，|A-5E||B|=|-5A|。

又由于，$|A-5E|=\begin{vmatrix}-7&0&0\\3&-6&-5\\-3&-2&-9\end{vmatrix}=-308$

$$|-5A|=-5^{3}|A|=-5^{3}\begin{vmatrix}-2&0&0\\3&-1&-5\\-3&-2&-4\end{vmatrix}=-1500$$

所以，$|B|=\frac{-1500}{-308}=\frac{-375}{-77}$

将方程化简成 XB=Y 的形式，X 跟 Y 只含行列式 A，再两边取行列式，就能求出来|X|跟|Y|，再求出 B 的行列式。

例二：

设$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ -5 & -3 & 5\\ 6 & 5 & 3\end{pmatrix}$，矩阵B满足AB=2A - B，则矩阵B的行列式|B|为：$\boxed{}$

解 由于AB=2A - B得：(A+E)B=2A,所以，|A+E||B|=|2A|。

又由于，$|A+E|=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ -5 & -2 & 5\\ 6 & 5 & 4\end{vmatrix}=99$

$|2A|=2^3|A|=2^3\begin{vmatrix}-4 & 0 & 0\\ -5 & -3 & 5\\ 6 & 5 & 3\end{vmatrix}=1088$

所以，$|B|=\frac{1088}{99}=\frac{1088}{99}$

题型六：

例一：

设A是三阶矩阵，交换A的第1行和第3行得到矩阵B，将矩阵B的第2行乘以数4得到矩阵C，则满足PA=C的矩阵P为：

$$P=\begin{pmatrix}\boxed{} & \boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{}\\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{}\end{pmatrix}$$

解 由已知可得，B=E[1,3]A,C=E[2(4)]B,所以有：C=E[2(4)]E[1,3]A

于是，$P=E[2(4)]E[1,3]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

只需要把A看作是单位矩阵，再进行初等变换，就像上述例子，

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$而A是单位阵，P就等于C，

即$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

例二：

设A是三阶矩阵，将矩阵A的第1行的-5倍加到第3行得到矩阵B，将矩阵B的第2行乘以数1得到矩阵C，则满足PA=C的矩阵P为：

$$P=\begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

解 由已知可得，B=E[3+1(-5)]A,C=E[2(1)]B,所以有：C=E[2(1)]E[3+1(-5)]A

于是，$P=E[2(1)]E[3+1(-5)]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第三章　向量

1、基本概念

定义 1：由 n 个数构成的一个有序数组$\left[a_1, a_2 \cdots\cdots, a_n\right]$称为一个 n 维向量，称这些数为它的分量。分量依次是 $a_1, a_2, \ldots, a_n$的向量可表示成：

$\alpha=\left[a_1, a_2 \cdots\cdots, a_n\right]$，称为行向量，或$\alpha^T=\left[a_1, a_2 \cdots\cdots, a_n\right]^T$称为列向量。

请注意，作为向量它们并没有区别，但是作为矩阵，它们不一样(左边是 1×n 矩阵，右边是 n×1 矩阵)。习惯上把它们分别(请注意与下面规定的矩阵的行向量和列向量概念的区别)。

一个 m×n 的矩阵的每一行是一个 n 维向量，称为它的行向量；每一列是一个 m 维向量，称为它的列向量，常常用矩阵的列向量组来写出矩阵，例如当矩阵 A 的列向量组为$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$时(它们都是表示为列的形式!)可记 A=（$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$ ）。

2、向量的线形运算

设 n 维向量　$\alpha=(a_1, a_2 \ldots a_n)^T, \beta=(b_1, b_2 \ldots b_n)^T$ 则

向量加法　$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2 \ldots a_n+b_n)^T$;

数乘向量　$k\alpha=(ka_1, ka_2 \ldots ka_n)^T$;

向量内积　$(\alpha, \beta)=\alpha^T \beta=\beta^T \alpha=a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n$

3、向量组的线形相关性

定义 2：向量组的线性组合:设$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$是一组 n 维量，$k_1, k_2 \cdots\cdots k_m$是一组数，则$k_1 \alpha_1+k_2 \alpha_2+\cdots\cdots k_m \alpha_m$为$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$的线性组合。

n 维向量组的线性组合也是 n 维向量。

定义 3：线形表出：如果 n 维向量β能表示成$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$的一个线性组合，即$\beta=k_1 \alpha_1+k_2 \alpha_2+\cdots\cdots k_m \alpha_m$，则称$\beta$可以用量组$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$线性表示。

判别β是否可以用$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$线性表示？表示方式是否唯一？就是问：向量方程$x_1 \alpha_1+x_2 \alpha_2+\cdots\cdots\cdots x_m \alpha_m=\beta$是否有解？解是否唯一？用分量写出这个向量方程,就是以　$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_m \vdots \beta)$为增广矩阵的线性方程组。反之，判别“以　$(A \vdots \beta)$为增广矩阵的线性方程组是否有解？解是否唯一？的问题又可转化为β是否可以用 A 的列向量组线性表示？表示方式是否唯一？”的问题。

定义 4：线性相关：对 m 个 n 维向量$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$，若存在一组不全为 0 的数$k_1, k_2 \cdots\cdots k_m$，使得$k_1 \alpha_1+k_2 \alpha_2+\cdots\cdots k_m \alpha_m$=0 成立，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$线性相关。

包含 0 向量的向量组肯定线性相关，有相等向量或成比例向量的向量组线性相关，单个向量是 0 向量时线性相关。

定义 5：线性无关：向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$，只有当$k_1,k_2\cdots\cdots k_m$全为 0 时，才有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_m\alpha_m$=0 成立，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性无关。

单个向量是非 0 向量时线性无关。

向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$ “线性相关还是无关”也就是向量方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_m\alpha_m$=0 有没有非零解（仅有 0 解），也就是以$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$为系数矩阵的齐次线性方程组有无非零解（仅有 0 解）.

定理 1： 向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$（$m\geq 2)$线性相关（无关）的充要条件是

向量组中至少有一个（任意一个）向量可由（均不能由）其余 m-1 个向量线性表出。

定理 2：如果向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m,\beta$

线性相关，则β可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示法唯一。

向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$线性表出$\Leftrightarrow$非齐次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$

有解$\Leftrightarrow$秩$r(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n,\beta)$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$.

若向量组组成的矩阵是方阵，

$\Leftrightarrow$ 则方阵的行列式为 0.

$\Leftrightarrow$其中至少存在一个向量可由其余 S-1 个向量线性表示

$\Leftrightarrow$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_m\alpha_m$，$k_i(i=1,2,\cdots m)$不全为 0.

4、向量组的极大无关组和向量组的秩

定义 1：设向量组的部分向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_r$满足条件：（1）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_r$线性无关（2）在向量组中任取一个向量$\alpha$，则向量组$\alpha$，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_r$线性相关，则称$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_r$是向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

由定义 1 可知：（1）一个线性无关向量组的极大无关组就是它本身。

（2）向量组中任意一个向量都可由极大无关组线性表示，从而一个向量组与它的极大无关组等价。（3）任一个含有非 0 向量的向量组总存在极大无关组（4）当一个向量组的所有向量都是 0 向量时，这个向量组没有极大无关组。

定义 2：向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$的极大无关组所含向量的个数，称为向量组的秩。

定理 1：一个向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等

定理 2：向量组的秩与该向量组所构成的矩阵的秩相等。

矩阵 A 的行向量组的秩称为行秩，列向量组的秩称为列秩，一个矩阵 A 的行向量组的秩和列向量组的秩相等,称此数为矩阵 A 的秩,记作 $r(A)$。

定理 3：任意 m 个 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件是这个向量组的秩等于它所含向量的个数。即 $r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m)=m$,或者称他们构成矩阵 A 的秩 $r(A)=m$。

定理 4：任意 m 个 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性相关的充要条件是这个向量组的秩小于它所含向量的个数。即 $r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m)<m$，或者称他们构成矩阵 A 的秩 $r(A)<m$。

推论 1：当$m\succ n$时，m 个 n 维向量必线性相关。

推论 2：任意 n 个 n 维向量组线性无关的充要条件是由他们构成的方阵 A 的行列式不等于 0。

推论 3：任意 n 个 n 维向量组线性相关的充要条件是由他们构成的方阵 A 的行列式等于 0。

推论 4：在一个向量组中，如果有一个部分向量组线性相关，则整个向量组也必定线性相关。

推论 5：一个线性无关的向量组的任何非空部分的部分向量组也必定线性无关。

推论 6：若 m 个 n 维向量组线性无关，则将期每个向量添加 r 个相应分量所组成的 n＋r 维向量组也线性无关。

推论 7：若 m 个 n 维向量组线性相关，则将其每个向量去掉 n-r 个相应分量所组成的 r 维向量组也线性相关。

第三章　例题

一、向量的行列式计算

1. 已知α_1, α_2，α_3，β，γ均为 4 维列向量，若 4 阶行列$\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \gamma\right|$=a，$\left|\beta+\gamma \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = b$，那么 4 阶行列$\left|2\beta \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1\right|$=

解：$\left|\beta+\gamma \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = \left|\beta \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| + \left|\gamma \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = b$

$-\left|\beta \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1\right| - \left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \gamma\right| = b$

$\left|\beta \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1\right| = -(b+a)$，所以$\left|2\beta \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1\right| = -2(b+a)$

2. $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$均为 4 维列向量，已知$|A| = \left|\alpha_1 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3\right| = 5,$

$|B| = \left|\beta \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3\right| = -1$，则$|A+B| =$

解：$\begin{aligned}&|A+B| = \left|\alpha+\beta \quad 2\gamma_1 \quad 2\gamma_2 \quad 2\gamma_3\right| = 8\left|\alpha+\beta \quad r_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3\right| \\ &= 8|A| + 8|B| = 8\times 5 - 8 = 32\end{aligned}$

3. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$均为 3 维列向量，记矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，

$B = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，如果$|A| = 1$，那么$|B| =$

$$\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_m\right] = \left[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}. \qquad |B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix} = 1\times 2 = 2.$$

3. 设 A 是$m\times n$矩阵，B 是$n\times m$矩阵，则

A　当 m>n 时，必有行列式$|AB| \neq 0$　B　当 m>n 时，必有行列式$|AB|$=0

C　当 n>m 时，必有行列式$|AB| \neq 0$　D　当 n>m 时，必有行列式$|AB|$=0

解：$A_{m\times n}B_{n\times m} = AB_{m\times m}$ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$当$n < m$，$r(A) < n,$ $|AB|$=0

二、向量的线性相关性

1. 设$\alpha_1 = (2,-1,0,5), \alpha_2 = (-4,-2,3,0), \alpha_3 = (-1,0,1,k), \alpha_4 = (-1,0,2,1)$，则

k = ______时，α_1，α_2，α_3，α_4线性相关。

解：考察行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & k & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -10 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$= -8-3k+20-10+16k+3 =$ $13k+5=0$。 $k=-\dfrac{5}{13}$

2. a, b, c 满足什么条件时向量组 α_1=(a, 0, c)， α_2=(b, c, 0)， α_3 = (0, a, b)线性无关

解：$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ 0 & -\dfrac{bc}{a} & b \end{vmatrix} = a\cdot(bc+bc) \neq 0$

3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 均为 n 维列向量， A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是 A

（A）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关.

（B）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

（C）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关.

（D）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2\cdots A\alpha) = r(A(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha)) \le r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha) < s$$

4. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1, α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是：

(A) $\lambda_1 \neq 0$.　　(B) $\lambda_2 \neq 0$.　(C) $\lambda_1 = 0$.　(D) $\lambda_2 = 0$.

方法一：令 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，则 $k_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$

$(k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$，由于 α_1, α_2 线性无关，于是有 $\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$

当 $\lambda_2 \neq 0$ 时，显然有 $k_1=0, k_2=0$，此时 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关；反过来，若 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2 \neq 0$ (, 否则， α_1 与 $A(\alpha_1+\alpha_2)$ = $\lambda_1\alpha_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法二： 由于 $[\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)] = [\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2]\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，

可见 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0.$

5. 设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，问常数 a，b，c 满足什么条件

$a\alpha_1-\alpha_2$，$b\alpha_2-\alpha_3$，$c\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

解：假设$k_1(a\alpha_1-\alpha_2)+k_2(b\alpha_2-\alpha_3)+k_3(c\alpha_3-\alpha_1)=0$

得$(k_1a-k_3)\alpha_1+(k_2b-k_1)\alpha_2+(k_3c-k_2)\alpha_3=0$

因为α_1，α_2，α_3线性无关，得方程组 $\begin{cases} ak_1-k_3=0 \\ -k_1+bk_2=0 \\ -k_2+ck_3=0 \end{cases}$

当行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix}=0$时，$k_1,k_2k_3$有非零解. 所以 $abc=1$时，

$a\alpha_1-\alpha_2$，$b\alpha_2-\alpha_3$，$c\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

或者：$a\alpha_1-\alpha_2$，$b\alpha_2-\alpha_3$，$c\alpha_3-\alpha_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{bmatrix}$

当行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix}=0$，$abc=1$，$a\alpha_1-\alpha_2$，$b\alpha_2-\alpha_3$，$c\alpha_3-\alpha_1$线性相关。

6. AB =0,， A、B 是两个非零矩阵，则

(A) A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

(B) A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关。

(C) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

(D) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关。

分析：A,B 的行列向量组是否线性相关，可从 A,B 是否行（或列）满秩或 Ax=0（Bx=0）是否有非零解进行分析讨论。

解一：设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times s$矩阵，则由 AB=0 知，$r(A)+r(B)<n$

又 A,B 为非零矩阵，必有 r(A)>0,r(B)>0. 可见 r(A)<n, r(B)<n, 即 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关，故应选(A).

解二：由 AB=0 知，B 的每一列均为 Ax=0 的解，而 B 为非零矩阵，即 Ax=0 存在非零解，可见 A 的列向量组线性相关。

同理，由 AB=0 知，$B^TA^T=O$，于是有B^T的列向量组，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

7. 设向量组 (I)：$\alpha_1=(a_{11},a_{21},a_{31})^T,\alpha_2=(a_{12},a_{22},a_{32})^T,\alpha_3=(a_{13},a_{23},a_{33})^T$；

(II)：$\beta_1=(a_{11},a_{21},a_{31},a_{41})^T,\beta_2=(a_{12},a_{22},a_{32},a_{42})^T,\beta_3=(a_{13},a_{23},a_{33},a_{43})^T$，B

(A) (I)相关⇒(II)相关　　　　(B) (I)无关⇒(II)无关

(C) (II)无关⇒(I)无关　　　　(D) (I)无关⇔ (II)无关

$$\text{线性相关}\begin{cases}\text{个数增加，必相关}\\ \text{个数减少，不确定}\\ \text{维数减少，必相关}\\ \text{维数增加，不确定}\end{cases}，\text{线性无关}\begin{cases}\text{个数增加，不确定}\\ \text{个数减少，必无关}\\ \text{维数增加，必无关}\\ \text{维数减少，不确定}\end{cases}$$

三、向量的线性表示

1. 当 k = ___时，向量β = (1, k, 5)能由向量$\alpha_1=(2,-3,2),\ \alpha_2=(2,-1,1),$线性表示。

解：考察行列式$\begin{vmatrix}1&2&2\\k&-3&-1\\5&2&1\end{vmatrix}=0,$ 得 k =－8. 当 k =－8 时， β可用α_1,α_2线性表示。

2. 设向量组β，α_1，α_2线性相关，向量组β，α_2，α_3线性无关，则

(A) α_1，α_2，α_3线性相关　　　　(B) α_1，α_2，α_3线性无关

(C) α_1可用β，α_2，α_3线性表示　　　　(D) β可用α_1，α_2 线性表示

解：因为β，α_1，α_2线性相关，所以β，α_1，α_2，α_3线性相关. 又因为β，α_2，α_3线性无关，所以α_1可用β，α_2，α_3线性表示. (C)是答案.

3. 设向量组α_1，α_2，α_3线性相关，向量组α_2，α_3，α_4线性无关，问

（1）α_1能否由α_2，α_3线性表出？证明你的结论；（2）α_1能否由α_2，α_3, α_4线性表出？证明你的结论；（3） α_4能否由α_1，α_2，α_3线性表出？证明你的结论

解：（1）α_1不一定能由α_2，α_3线性表出. 反例：$\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0)^T$，$\alpha_3=(2,0)^T$. 向量组α_1，α_2，α_3线性相关，但α_1不能由α_2，α_3线性表出；

（2）因为α_1，α_2，α_3 线性相关，所以α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关，又因为α_2，α_3，α_4线性无关，$r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，所以$\alpha_1$能由$\alpha_2$，$\alpha_3$, α_4线性表出。

（3）α_4不能由α_1，α_2，α_3线性表出.，因为α_1，α_2，α_3线性相关，

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3，r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3，r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

4. 设有三维向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}k\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\k\\k^2\end{bmatrix}$问 k 取何值时

（1）β可由α_1，α_2，α_3线性表示，且表达式唯一；（2）β可由α_1，α_2，α_3线性表示，但表达式不唯一；（3） β不能由α_1，α_2，α_3线性表示.

解：$\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2k^2-2k=2k(k-1)$

（1）$k \neq 0$且$k \neq 1$时，α₁，α₂，α₃线性无关，四个三维向量一定线性相关，所以β可由α₁，α₂，α₃线性表示，由克莱姆法则知表达式唯一。

（2）当 $k = 1$ 时

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩为 2. 所以所以β可由α₁，α₂，α₃线性表示，但表示不惟一。

（3）当$k = 0$时

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵的秩等于 2，增广矩阵的秩为 3，所以所以β不能由α₁，α₂，α₃线性表示.

5. 设α_1=(1+λ，1，1)，α_2=(1，1+λ，1)，α_3=(1，1，1+λ)，　β=(0，λ，λ²).

① λ为何值时，β可用α₁，α₂，α₃线性表示，并且表示方式唯一?

② λ为何值时，β可用α₁，α₂，α₃线性表示，并且表示方式不唯一?

③ λ为何值时，β不可α₁，α₂，α₃用线性表示?

解：$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta) = 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2$$

所以当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$时，β可用α₁，α₂，α₃线性表示，并且表示方式唯一。

当$\lambda = 0$时$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta) = 1$

β可用α₁，α₂，α₃线性表示，并且表示方式不唯一。

当$\lambda = -3$时$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \vdots & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \vdots & -3 \\ 0 & 3/2 & 3/3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

当$\lambda = -3$时，β不能用α₁，α₂，α₃线性表示。

6. $\alpha_1 = (1,0,1,1), \alpha_2 = (2,-1,0,1)$，$\alpha_3 = (-1,2,2,0)$，$\beta_1 = (0.1,0,1)$，$\beta_2 = (1,1,1,1)$

问c_1,c_2满足什么条件时$c_1\beta_1 + c_2\beta_2$可以用α₁，α₂，α₃　线性表示

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&C_2\\0&-1&2&C_1+C_2\\1&0&2&C_2\\1&1&0&C_1+C_2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&C_2\\0&-1&2&C_1+C_2\\0&-2&3&0\\0&-1&1&C_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&C_2\\0&-1&2&C_1+C_2\\0&0&-1&-2(C_1+C_2)\\0&0&-1&-C_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&C_2\\0&-1&2&C_1+C_2\\0&0&-1&-2(C_1+C_2)\\0&0&0&-2C_1-C_2\end{bmatrix}\quad 2C_1+C_2=0,$$

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,C_1\beta_1+C_2\beta_2)=3$$

7. $\alpha_1=(1,2,0,1)\ \alpha_2=(1,1,-1,0)\ \alpha_3=(0,1,a,1)\ \gamma_1=(1,0,1,0)\ \gamma_2=(0,1,0,2)$

问α和κ取什么值时 $\gamma_1+\kappa\gamma_2$可用α1，α2，α3 线性表示，写出表示式 。

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\2&1&1&k\\0&-1&a&1\\1&0&1&2k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&k-2\\0&0&a-1&3-k\\0&0&0&k+1\end{bmatrix}$$

解：当$a\neq1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$k+1=0\Rightarrow k=-1$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1+k\gamma_2)=3$，可以惟一线性表示。

当$a=1$时，K 取任何值都无解。

8. 设α_1=(1, 2, -3)，α_2=(3, 0, 1)，α_3=(9, 6, -7)，β_1 (0, 1, -1)，β_2=(a, 2, 1)，β_3=(b，1，0)。已知 r(α1，α2，α3)=r($\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$)，并且$\beta_3$可用α1，α2，α3线性表示，求 a, b.

解：$\begin{bmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&\vdots 1\\-3&1&-7&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&\vdots 1-2b\\0&10&20&3b\end{bmatrix}\ \dfrac{1-2b}{3b}=-\dfrac{6}{10}\Rightarrow b=5$

又因为 r(α1，α2，α3)=r($\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$)=2

$\begin{bmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&a&5\\0&3&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$，$\dfrac{a}{3}=5\Rightarrow a=15$

9. 已知向量β可由向量组$\alpha_1\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，但不可$\alpha_1\ \alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$用线性表示。证明

（1）α_s不可用$\alpha_1\ \alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示；

（2）α_s可用$\alpha_1\ \alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}\ \ \beta$线性表示。

证明：（1）若α_s可以用$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\,\alpha_{s-1}$线性表示，设

$$\alpha_s = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots\cdots l_{s-1}\alpha_{s-1}$$

由已知可得：$\beta = k_1\alpha_1 + k_2a_2 + \cdots\cdots k_s a_s$

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2a_2 + \cdots\cdots k_s(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots\cdots l_{s-1}\alpha_{s-1})$$

$$= (k_1 + k_s l_1)\alpha_1 + (k_2 + k_s l_2)\alpha_2 + \cdots\cdots(k_{s-1} + k_s l_{s-1})\alpha_{s-1}$$

β不可用$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\,\alpha_{s-1}$线性表示，同已知相矛盾，所以$\alpha_s$不可用$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\,\alpha_{s-1}$线性表示；

（2）由已知可得：$\beta = k_1\alpha_1 + k_2a_2 + \cdots\cdots k_s a_s$

$k_s \neq 0,$若$k_s = 0$，则β可以用$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\,\alpha_{s-1}$线性表示。

$$k_s\alpha_s = \beta - k_1\alpha_1 - k_2a_2 - \cdots\cdots k_{s-1}a_{s-1}$$

$$\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots\cdots\frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1} + \frac{1}{k_s}\beta$$

所以α_s可用$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\,\alpha_{s-1}\ \ \beta$线性表示。

10． 已知a_1,a_2,a_3,a_4是线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，若

$\beta_1 = a_1 + ta_2$，$\beta_2 = a_2 + ta_3$，$\beta_3 = a_3 + ta_4$，$\beta_4 = a_4 + ta_1$，讨论实数 t 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$Ax=0$的一个基础解系。

解：$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{vmatrix} = 1-t^4$

即当$t \neq \pm 1$时，向量组$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$线性无关

11. $\beta_1 = t_1a_1 + t_2a_2$，$\beta_2 = t_1a_2 + t_2a_3 \cdots \beta_s = t_1a_s + t_2a_1$，其中$t_1,t_2$为实常数，试问$t_1,t_2$满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$也是$Ax=0$的一个基础解系。

解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3\cdots\cdots\beta_s) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots\cdots\alpha_s)\begin{vmatrix}t_1&0&0\cdots&t_2\\t_2&t_1&0\cdots&0\\0&t_2&t_1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots t_2&t_1\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0\cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1 \cdot t_1^{\ s-1} + t_2(-1)^{s+1} t_2^{s-1} = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s$$

当$t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$时，$(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots\cdots \beta_s)$线性无关。

当 S 为偶数时，$t_1^s - t_2^s \neq 0 \Rightarrow t_1 \neq \pm t_2$，当 S 为奇数时，$t_1^s + t_2^s \neq 0$

12 设$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2} ... a_{in})^T (i = 1, 2 ... r, r < n)$是 n 维实向量，且$\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_r$线性无关。

已知$\beta = (b_1, b_2 ... b_n)^T$是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$
的非零解向量，试判断向量组$\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_r, \beta$的线性相关性。

解：设有一组数$k_1, k_2 ... k_r, k$使得$k_1\alpha_1 + ... + k_r\alpha_r + k\beta = 0$

因为$\beta = (b_1, b_2 ... b_n)^T$，是线性方程组的非零解向量，故有$\alpha_i^T \beta = 0 (i = 1, 2 ... r)$，于是由$k_1\beta^T\alpha_1 + ... + k_r\beta^T\alpha_r + k\beta^T\beta = 0$得$k\beta^T\beta = 0$但$\beta^T\beta \neq 0$故$k = 0$，从而$k_1\alpha_1 + ... + k_r\alpha_r = 0$由于向量组$\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_r$线性无关，所以$k_1 = k_2 = ... k_r = 0$

即$k_1 = k_2 = ... k_r = k = 0$。因此向量组$\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_r, \beta$线性无关

四、两个向量组的相互线性表示

定义：设有两个 n 维向量组（Ⅰ）$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$和（Π）$\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_t$

若向量组（Π）中每个向量都可由向量组（Ⅰ）线性表示，则称向量组（Π）可由向量组（Ⅰ）线性表示，若向量组（Ⅰ）与（Π）可以互相线性表示，则称向量组（Ⅰ）与（Π）等价。

向量组的等价关系具有下列性质：（1）自反性（2）对称性（3）传递性，即如果向量组$\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_t$可以用$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$线性表示，而$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$可以用$\gamma_1, \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_t$线性表示，则$\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_t$可以用$\gamma_1, \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_t$线性表示。

向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$是否有解；（矩阵方程）
A=（$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$），B=($\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_t$)

定理 1：矩阵方程$Ax = B$有解的充要条件是$R(A) = R(A, B)$

定理 2：向量组（Π）$\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_t$能由向量组（Ⅰ）$\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_m$线性表示的充要条件是矩阵$A = (a_1, a_2 \cdots\cdots, a_m)$的秩等于矩阵

$C=(a_1,a_2\cdots\cdots a_m,\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)$的秩，

$r(a_1,a_2\cdots\cdots,a_m)=r(a_1,a_2\cdots\cdots a_m,\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)$

推论 1：向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$和（Π）$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t$等价的充要条件是 $r(a_1,a_2\cdots\cdots,a_m)=r(\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)=r(a_1,a_2\cdots\cdots a_m,\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)$

推论 2：向量组$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性表示,且 $r(\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)=r(a_1,a_2\cdots\cdots,a_m)$,则两向量组等价。

推论 3：向量组的任意两个极大无关组等价,且这两个组所含向量的个数相等.

推论 4：若两个线性无关的向量组等价,则它们包含的向量个数相等.

推论 5：任一向量组和它的极大无关组等价.

推论 6：等价的向量组有相同的秩，但秩相同的向量组不一定等价。

定理 3：设向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$的秩为 S,向量组（Π）$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t$的秩为 r，若向量组（Π）可由向量组（Ⅰ）线性表示，则$r\le s$

证明：如果$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t$可以用$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$ 线性表示

$$\Leftrightarrow\quad r(a_1,a_2\cdots\cdots,a_m)=r(a_1,a_2\cdots\cdots a_m,\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)=S$$

$$r(\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t)\le r(a_1,a_2\cdots\cdots a_m,\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_t).\quad 即\ r\le s。$$

推论 1：设有两个 n 维向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_s$和（Π）$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_r$

若向量组（Π）线性无关，且可由向量组（Ⅰ）线性表示，则$r\le s$。

推论 2：若向量组$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_r$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_s$线性表示，且$r\succ s$，则向量$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_r$组线性相关。即如果多数向量能由少数向量线性表出，多数向量一定线性相关。

例题:设向量组 I：α_1，α_2,…，α_r可由向量组 II：β_1，β_2,…，β_s线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

以上重要知识点可简写为：

1. 向量组$\boldsymbol{A}$能由向量组$\boldsymbol{B}$线性表示 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解；
2. 向量组$\boldsymbol{A}$能由向量组$\boldsymbol{B}$线性表示 $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$
3. 向量组$\boldsymbol{A}$能由向量组$\boldsymbol{B}$线性表示，则$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})\le\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$；
4. 向量组$\boldsymbol{A}$（个数为$\boldsymbol{r}$）能由向量组$\boldsymbol{B}$（个数为$\boldsymbol{s}$）线性表示，且$\boldsymbol{A}$线性无关，则$\boldsymbol{r}\le\boldsymbol{s}$；
5. $\boldsymbol{A}$能由向量组$\boldsymbol{B}$等价$\Leftrightarrow\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$

练习题：1. 已知向量组$\alpha_1=(1,\ 2,\ -1,\ 3)^T,\alpha_2=(2,\ 5,\ a,\ 8)^T,\alpha_3=(-1,\ 0,\ 3,\ 1)^T$及向量组$\beta_1=(1,\ a,\ a^2-5,\ 7)^T,\beta_2=(3,\ 3+a,\ 3,\ 11)^T,\beta_3=(0,\ 1,\ 6,\ 2)^T$. 若$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，判断这两个向量组是否等价？并说明理由。

解：以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为列构成矩阵 A，对 A 作初等行变换，得

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \mid \beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&3&0\\2&5&0&a&3+a&1\\-1&a&3&a^2-5&3&6\\3&8&1&7&11&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&3&0\\0&1&2&a-2&a-3&1\\0&a+2&2&a^2-4&6&6\\0&2&4&4&2&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&3&0\\0&1&2&a-2&a-3&1\\0&0&-2a-2&0&12-a^2+a&4-a\\0&0&0&8-2a&8-2a&0\end{array}\right)$$

$\because \beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\therefore 8-2a=0$即$a=4$。

当$a=4$时，继续对 A 初等行变换，得$A\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&3&0\\0&1&2&2&1&1\\0&0&-10&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&-3&1&-2\\0&1&2&2&1&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&1&-2\\0&1&0&2&1&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore \beta_1=-3\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-2\alpha_1+\alpha_2,$$

即向量组β_1,β_2,β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，但$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出。这是因为秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

而秩$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关，因此这两个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不可能等价。$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出。

2. 求常数 a, 使得向量组$\alpha_1=(1, 1, a)$，$\alpha_2=(1, a, 1)$，$\alpha_3=(a, 1, 1)$可由向量$\beta_1=(1, 1, a)$，$\beta_2=(-2, a, 4)$，$\beta_3=(-2, a, a)$线性表示, 但是$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$不可用$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表示.

解：$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&-3(1+a)&-(a-1)^2\end{array}\right]$

当$a=4$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，不满足已知条件。

当$a=-2$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，不满足已知条件。

当$a=1$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，

满足已知条件。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.给定向量组(Ⅰ）α_1=(1,0,2)，α_2=(1,1,3)，α_3=(1,-1,a+2)和(Ⅱ）　β_1=(1,2,　a+3)，β_2=(　2,1　,a+6)，β_3=(2,1,a+4)．当 a 为何值时(Ⅰ)和(Ⅱ)等价？a 为何值时(Ⅰ)和(Ⅱ)不等价？ $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta_1,\beta_2,\beta_3]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & \vdots & a-1 & a+1 & a-1 \end{bmatrix}$$

当$a=-1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$

(Ⅰ)可以用(Ⅱ)线性表示，(Ⅱ)不能用(Ⅰ)线性表示。

$a\neq-1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，(Ⅰ)和(Ⅱ)可以相互线性表示，因此(Ⅰ)和(Ⅱ)等价。

4.已知 n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若$\beta_1,\beta_2,\beta_3$可用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，设

（β_1,β_2,β_3）=（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$）C，证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关的充分必要条件是$|C|\neq 0$

解：因为$B_{1\times3}=A_{1\times3}C_{3\times3}$，若已知$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关，　$r(AC)=3$

$r(Ac)\leq\min\{r(A),r(C)\}\leq r(C)$，$3\leq r(c)\leq 3$，$r(c)=3$，所以$|C|\neq 0$。

若$|C|\neq 0$，$r(c)=3$，$r(AC)=3$，所以β_1,β_2,β_3线性无关。

5.已知 n 维向量组　$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则 n 维向量组$\beta_1\,\beta_2\cdots,$　β_s也线性无关的充分必要条件为

(A)　$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可用$\beta_1\,\beta_2\cdots,$　β_s线性表示

(B)　$\beta_1\,\beta_2\cdots,$　β_s可用$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(C)　$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与　$\beta_1\,\beta_2\cdots,$　β_s等价

(D)矩阵（$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）和（$\beta_1\,\beta_2\cdots,$　β_s）等价

解：$\alpha_1\,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可用$\beta_1\,\beta_2\cdots,$　β_s线性表示，可以推出，

r（$\beta_1\beta_2\cdots$, β_s）=r（$\beta_1\beta_2\cdots$, $\beta_s\vdots$ $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$），

已知$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，r（$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）$=s$，

A r（$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）$\le$ r（$\beta_1\beta_2\cdots$, $\beta_s\vdots$ $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）$\le$ r（$\beta_1\beta_2\cdots$, β_s）=s

是充分条件，不是必要条件。

B r（$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）=r（$\beta_1\beta_2\cdots$, $\beta_s\vdots$ $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）$=s$

r（$\beta_1\beta_2\cdots$, β_s）$\le$ r（$\beta_1\beta_2\cdots$, $\beta_s\vdots$ $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）

非充分，非必要条件。

C r（$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）=r（$\beta_1\beta_2\cdots$, $\beta_s\vdots$ $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）= r（$\beta_1\beta_2\cdots$, β_s）

是充分条件，不是必要条件。

D 矩阵等价可以用初等变换相互交换，而且秩相同。

总结向量组等价和矩阵等价知识点：

$\boxed{\text{向量组等价}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$可以相互线性表示. 记作：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

$\boxed{\text{矩阵等价}}$ A经过有限次初等变换化为B. 记作：$A\cong B$

① 矩阵A与B等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，且同型。

两个$m\times n$矩阵A与B等价$\Leftrightarrow$存在 m 阶满秩矩阵 P 及 n 阶满秩矩阵 Q，

使得$A=PBQ$

矩阵A与B作为向量组等价

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=r(a_1,a_2\cdots\cdots a_n,\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_n)$

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)\ne> A,B$作为向量组等价, 即：秩相等的向量组不一定等价.

如果两个向量组等价且向量组个数与维数都相等$\Rightarrow$矩阵等价

五、求向量的秩与极大线性无关组

1. 已知$\alpha=(1,0,-1,2)^T$, $\beta=(0,1,0,2)$, 矩阵 A = α • β, 则秩(A) = ______.

解：A = α • β = $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&-1&0&-2\\0&2&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&4\end{bmatrix}$

或者：$\alpha\cdot\beta\le r\{r(a),r(\beta)\}$

2. 已知向量$\alpha_1=(1,2,3,4), \alpha_2=(2,3,4,5), \alpha_3=(3,4,5,6), \alpha_4=(4,5,6,t)$，且

秩(α1, α2, α3, α4) = 2, 则 t = ______.

解：A = (α1, α2, α3, α4) $=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&t-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&t-7\end{bmatrix}$

所以当 t = 7 时，r (A) = 2.

3. 设α_1=(1+a, 1, 1)，α_2=(1, 1+b, 1)，α_3=(1, 1, 1−b)，问 a=__, b=__ r(α1, α2, α3)=2

解：因为 r(α1, α2, α3)=2，$|A|=0$，$|A|=-b^2(a+1)=0$

$\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}$，$b=0$且$a\neq0$时，$r(A)=2$，同理$a=-1$，b 取任何数时秩为 2.

4. 已 r(α1, α2, α3)=r(α1, α2, α3, α4)=3, r(α1, α2, α3, α4α5)=4，求 r (α1, α2, α3, α4−α5)

解：因为 r((α1, α2, α3)=r(α1, α2, α3, α4)=3，所以α_4可以用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，

r(α1, α2, α3, α4α5)=4，⇒ r((α1, α2, α3, α5)=4

r (α1, α2, α3, α4−α5)= r (α1, α2, α3, −α5)=4

5. $\alpha_1=(1,-1,2,4), \alpha_2=(0,3,1,2), \alpha_3=(3,0,7,14), \alpha_4=(1,-2,2,0), \alpha_5=(2,1,5,10).$

求它们的一个极大无关组，共有几个?

5 题答案：$\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&0&0&1/3&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 因为$r(A)=3$，所以极大无关组一定包含 3 个向量，且必包含α_4，$C_4^2=6$个。

6. 求下列向量组的一个极大线性无关组，并把其余用极大线性无关组线性表示.

$\alpha_1=(1,2,1,3), \alpha_2=(4,-1,-5,-6), \alpha_3=(-1,-3,-4,-7), \alpha_4=(2,1,2,3)$.

解：$\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\2&-1&-3&1\\1&-5&-4&2\\3&-6&-7&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&-9&-1&-3\\0&-9&-3&0\\0&-18&-4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&9&1&3\\0&0&-2&3\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&9&1&3\\0&0&-2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是极大线性无关组. 由 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 得方程组

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 - k_3 = 2 \\ 9k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_3 = -3 \end{cases} \qquad 解得 \quad k_1 = k_3 = -\frac{3}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}$$

所以 $\alpha_4 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_3$

7. 设 4 维向量组 $a_1 = (1+a,1,1,1)^T$，$a_2 = (2.2+a.2.2)^T$，$a_3 = (3,3,3+a,3)^T$

$a_4 = (4,4,4,4+a)^T$，问 a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,a_4$ 线性相关，当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,a_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出

$$\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = a^3(a+10)$$，即当 $a=0$ 或 -10 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,a_4$ 线性相关。

当 $a=0$ 时，α_1 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,a_4$ 的一个极大线性无关组，此时，$\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1$,

$\alpha_4 = 4\alpha_1$

当 $a=-10$ 时

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 20 & 30 & -50 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,a_4$ 的一个极大线性无关组，$\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维非零列向量，A =（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$），已知方程组 A$x$ = β的通解是 $(-1,1,0,2)^T + k(1,-1,2,0)^T$，其中 k 为任意实数(1) 问β能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？(2) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的一个极大无关组。

解：因为齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $(1,-1,2,0)^T$，所以 A 的秩为 3.

设β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即存在 k_1,k_2,k_3，使得：$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，即 $(k_1,k_2,k_3,0)^T$ 是方程组 $Ax=\beta$ 的解，又因为

$(-1,1,0,2)^T$ 也是方程组 $Ax=\beta$ 的解，所以两解之差 $(k_1-1, k_2+1, k_{3,} -2)$ 也是方程组 $Ax=0$ 的解，但 $(k_1-1, k_2+1, k_{3,} -2)$ 与 $(1,-1,2,0)^T$ 是线性无关的，出现矛盾，所以β不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（2）因为 $Ax=\beta$ 有解，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 3$

六、向量组的正交规范化

又因为$(1,-1,2,0)^T$是$Ax=0$的解，所以$\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0$，所以向量$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，即$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示，$(-1,1,0,2)^T$是方程组$Ax=\beta$的解，即$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示，所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)$与$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$等价， $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$的一个极大无关组。

定义 1：设有 n 维向量α=（$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_n$），称数值$\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}$为向量$\alpha$的长度，记为$\|\alpha\|$，即$\|\alpha\|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}$

若$\|\alpha\|$=1，则称α为单位向量，$e_1=(1,0,\cdots0)$，$e_2=(0,1,\cdots0)$………，

$e_n=(0,\cdots,0,1)$，都是 n 维单位向量，也称它们为 n 维基本单位向量。

对于任意实数 K，可得$\|k\alpha\|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}=|k|\|\alpha\|$，由此可得，当$\alpha\neq0$时，有$\left\|\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right\|=\frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\|$=1，即$\frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\|$为一单位向量，通常以$\frac{1}{\|\alpha\|}$乘以$\alpha$称为向量$\alpha$的单位化或标准化。

定义 2：如果向量α与β的内积为 0，即(α,β)=0，则称α与β正交。

显然零向量与任何向量都正交。

定义 3：如果 m 个 n 维非零向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$两两正交，即满足$(\alpha_i,\alpha_j)$=0，$(i\neq j,i,j=1,2.\cdots\cdots m)$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$为 n 维正交向量组，简称正交组，如果一个正交向量组中的每一个向量都是单位向量，则这个正交向量组称为单位正交向量组或标准正交向量组。

定理 1：设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$是 n 维正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$线性无关。

推论：互相正交的 n 维向量的个数不会超过 n。

定理 2：矩阵 A=$(\alpha_{ij})_{n\times n}$为正交矩阵的充要条件是 A 的行（列）向量组是单位正交向量组。

补充：若 $AA^T=A^TA=E$，则称矩阵 A 是正交矩阵。 （1）A 是正交矩阵$\Leftrightarrow$ $A^T=A^{-1}$ （2）A 是正交矩阵$\Leftrightarrow$ $|A|^2$=1 （3）A 是正交矩阵，则 A^T，A^{-1}也都是正交矩阵，

若 A，B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵。（可用定义证明）

定义 4：施密特正交规范化：若$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$是正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$一定是线性无关向量组，反之则不然，但是从线性无关 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$出发，可以得到一个与之等价的正交向量组$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_m$，再将$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_m$单位化，即可得到与

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$等价的标准正交向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$，这一过程称为向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$的正交规范化。

设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$是线性无关的向量组，令

$$\beta_1=\alpha_1, \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

…………………………………………

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$$

$$\eta_1=\beta_1/[\beta_1], \quad \eta_2=\beta_2/|\beta_2|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..\ \eta_m=\beta_m/\|\beta_m\|$$

容易验证$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_m$两两正交，再将$\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_m$标准化为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$，则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$为标准正交向量组且与向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_m$等价。

练习题：1.（1） 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&1/2\end{bmatrix}$ 矩阵 A

求：（1）a, b, c, 满足什么条件时，矩阵 A 的秩为 3。

（2）a, b, c, 取何值时，A 是对称矩阵。（3）取一组 a, b, c, 使得 A 为正交矩阵。

解：（1）$r(A)=3\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow|A|=-\left(\frac{a}{2}-bc\right)\neq0\Rightarrow a\neq2bc$

（2）$a=1,b=0,c=0$

（3）$ac+\frac{b}{2}=0$，$a^2+b^2=1$，　$c^2+\frac{1}{4}=1$

$$c=\frac{\sqrt{3}}{2},a=\pm\frac{1}{2},b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c=-\frac{\sqrt{3}}{2},a=\pm\frac{1}{2},b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. 设$A=(a_{ij})_{3\times3}$是实正交矩阵，且$a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^T$线性方程组$Ax=b$的解

解：$AA^T=E\Rightarrow |A|^2=1\Rightarrow A$ 可逆，正交矩阵的向量组都是单位正交向量组。

$$Ax=b\Rightarrow x=A^{-1}b=A^Tb=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 将向量组 $\alpha_1=[1,\ \ 1,\ \ -1,\ \ 1]$，$\alpha_2=[1,\ \ -1,\ \ -1,\ \ 1]$，$\alpha_3=[2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 3]$ 单位正交化。

$$\eta_1=\frac{1}{2}[1\ \ 1\ \ -1\ \ -1]，\eta_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}[1\ \ -3\ \ -1\ \ 1]，\eta_3=\frac{1}{\sqrt{78}}[2\ \ 0\ \ 7\ \ 5]$$

4. 将向量组 $\alpha_1=[0,\ \ 1,\ \ 2]$，$\alpha_2=[1,\ \ 0,\ \ 1]$，$\alpha_3=[1,\ \ 1,\ \ 0]$ 单位正交化。

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}[0\ \ 1\ \ 2]\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{30}}[5\ \ -2\ \ 1]\quad \eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[1\ \ 2\ \ -1]$$

第四章　线性方程组

1．线性方程组的基本概念

(1)线性方程组的一般形式为
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

其中未知数的个数 n 和方程式的个数 m 不必相等. 线性方程组的解是一个 n 维向量 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$(称为解向量),它满足当每个方程中的未知数 x 用 k_i 替代时都成为等式.

线性方程组的解的情况有三种:无解,唯一解,无穷多解.

对线性方程组讨论的主要问题两个:(1)判断解的情况.(2)求解,特别是在有无穷多接时求通解.

$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ 的线性方程组称为齐次线性方程组.

n 维零向量总是齐次线性方程组的解,称为零解.因此齐次线性方程组解的情况只有两种:唯一解(即只有零解)和无穷多解(即有非零解).

把一个非齐次线性方程组的每个方程的常数项都换成 0，所得到的齐次线性方程组称为原方程组的导出齐次线性方程组，简称导出组.

(2) 线性方程组的其他形式

线性方程组除了通常的写法外,还常用两种简化形式：

齐次方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_n\alpha_n=0$

即 $\left[\mathrm{a}_1,a_2\cdots\cdots,a_n\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\beta$ 全部按列分块，其中 $a_1,a_2\cdots\cdots a_n,\beta$ 如下

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \cdots\cdots\cdots,\ \alpha_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

显然方程组有解的充要条件是向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_n$ 线性表示。

矩阵式　$AX=\beta$，(齐次方程组 $AX=0$).

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ \ \beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵，则：

① $\boldsymbol{m}$ 与方程的个数相同，即方程组 $AX=\beta$ 有 $\boldsymbol{m}$ 个方程；

② $\boldsymbol{n}$ 与方程组的未知数个数相同，方程组 $AX=\beta$ 为 $\boldsymbol{n}$ 元方程。

矩阵 A 称为方程组的系数矩阵，$\overline{A}$ =（$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_n$， β），称矩阵 $\overline{A}$ 为方程组的增广矩阵。

2. 线性方程组解的性质

(1) 齐次方程组 $AX=0$

如果 $x_1,x_2\cdots x_n$ s 是齐次方程组 $AX=0$ 的一组解,则它们的任何线性组 $c_1x_1,c_2x_2\cdots c_nx_n$ 也都是解.

(2) 非齐次方程组 $AX=\beta$

性质 1：非齐次线性方程组的两个解之差是它的导出组的解。

性质 2：非齐次线性方程组的一个解和其导出组的一个解的和仍然是非齐次线性方程组的一个解。

3.线性方程组解的情况的判别

（1）对于齐次方程组 $AX=0$,判别解的情况用两个数: n,r(A).

若有非零解$\Leftrightarrow$ r(A)<n(若矩阵 A 是 n 阶矩阵，则$|A|=0$）

只有零解$\Leftrightarrow$r(A)=n（若矩阵 A 是 n 阶矩阵，则$|A|\neq 0$）

（2）对于方程组 $AX=\beta$,判别其解的情况用三个数:未知数的个数 n,r(A),r($A|$　).

① 无解$\Leftrightarrow$r(A)<r($A|\beta$).　② 有唯一解$\Leftrightarrow$r(A)=r($A|\beta$)=n.(当 A 是方阵时,就推出克莱姆法则.）　③ 有无穷多解$\Leftrightarrow$r(A)=r($A|\beta$)<n.

方程的个数 m 虽然在判别公式中没有出现,但它是 r(A)和 r($A|\beta$)的上界,因此

当 r(A)=m 时，$AX=\beta$ 一定有解.　当 m<n 时,一定不是唯一解.

补充 1：当 A 列满秩(或 A 可逆时，A 在矩阵乘法中有左消去律

AB=0$\Rightarrow$B=0；AB=AC$\Rightarrow$B=C.

补充 2　如果 A 列满秩（或 A 可逆）,则 r(AB)=r(B).

分析：只用证明齐次方程组 $ABX=0$ 和 $BX=0$ 同解.(此时矩阵 AB 和 B 的列向量组有相同的线性关系,从而秩相等.）

第四章　例题

一．填空题

1. 设 A 为 m 阶方阵，存在非零的 $m\times n$ 矩阵 B，使 $AB=0$ 的充要条件是______.

解：$Ax=0$ 有非零解，$r(A)<m$

2. 设 A 为 n 阶矩阵，存在两个不相等的 n 阶矩阵 B，C，使 $AB=AC$ 的充要条件是

解：$A(B-C)=0$，B，C 不相等，$Ax=0$ 有非零解，$r(A)<n$

3. 若 n 元线性方程组有解，且其系数矩阵的秩为 r，则当______时，方程组有唯一解；当______时，方程组有无穷多解.

解：假设该方程组为 $A_{m\times n}x=b$，矩阵的秩 $r(A)=r$.

当 $r=n$，方程组有惟一解；　当 $r<n$，方程组有无穷多解.

4. 在齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 中，若秩(A) = k 且 η_1，η_2，…，η_r 是它的一个基础解系，则 r = _____；当 k = ______时，此方程组只有零解。

解：$r=n-k$，当 $k=n$ 时，方程组只有零解。

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ \quad kx_2+3x_3=0 \end{cases}$ 只有零解，则 k 应满足的条件是______.

解：$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} \neq 0$，　$3+2k-k-6k\neq 0,\ k\neq \dfrac{3}{5}$ 时，方程组只有零解。

6. 设 α_1，α_2，…α_s 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_s\alpha_s$ 也是 $Ax=b$ 的一个解，则 $C_1+C_2+\cdots+C_s=$ ______.

解：因为 $A\alpha_i=b$, 且 $A(C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_s\alpha_s)=b$,

所以 $(C_1+\cdots+C_s)b=b$，$C_1+\cdots+C_s=1$.

7. 设 A，B 为三阶方阵，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，且已知存在三阶方阵 X，使得 $AX=B$，则 k = ___________.

解：$r(A)=r(A\vdots B)=2$，$k=-2$

8. 设 A 为四阶方阵，且秩(A) = 2，则齐次线性方程组 $A^*x=0$（A^* 是 A 的伴随矩阵）的基础解系所包含的解向量的个数为______.

解：因为矩阵 A 的秩$r(A)=2<n-1=4-1=3$，所以$r(A^*)=0$，$A^*x = 0$ 的基础解系所含解向量的个数为 4－0 = 4.

9. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的系数矩阵记为 A，若存在非零 3 阶矩阵 B，使 $AB=0$，求$|B|=$

解：$AX=0$有非零解，所以$|A|=0\Rightarrow\lambda=1$

$AB=0\Rightarrow B^TA^T=0\Rightarrow B^Tx=0$存在非零解，所以$|B^T|=0\Rightarrow|B|=0$

10. 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，又设$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求$Ax=\beta$的通解。

解：$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3\Rightarrow\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$线性相关，$r(A)=3$

基础解系含有一个向量：$\eta=k(1,-2,1,0)^T+(1,1,1,1)^T$

11. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$都是$Ax=\beta$的解，其中$\varepsilon_1$=(1,2,3,4)，$\varepsilon_2+\varepsilon_3$=(0,1,2,3)，r($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$)=3 求通解。

解：因为 r($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$)=3，是四元方程组，所以基础解系含有 1 个向量，

$A(\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1)=0$，$\eta=k(2,3,4,5)^T+\varepsilon_1$

12. 设 A 是 n 阶矩阵，对于齐次线性方程组 Ax=0，

（1）如 A 中每行元素之和均为 0，且 r（A）=n-1，则方程组的通解为____

(2) 如果每个 n 维向量都是方程组的解，则 r（A）=____

(3) 如 r（A）=n-1，且代数余子式 $A_{11}\neq 0$，则 Ax=0 的通解是____，

$A^*x=0$ 的通解是____ $(A^*)^*x=0$ 的通解是______

解：（1）因为 r（A）=n-1，所以基础解系中含有 1 个向量。

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad \eta=k(1,1,\cdots 1)^T$$

（2）因为基础解系的向量个数为：$n-r(A)=n$，$r(A)=0$

（3）因为 r（A）=n-1，所以基础解系含有 1 个向量。 r（A）=n-1$\Rightarrow|A|=0$，

$A\cdot A^\bullet=|A|E=0$，所以$A^\bullet$的每一列都是$Ax=0$的解。

r（A）=n-1 $\Rightarrow r\left(A^{\bullet}\right)=1$，又因为 A11 $\neq 0$，所以 $A^{\bullet}$ 的第一列是 $Ax=0$ 的解，

Ax=0 的通解是 $\eta=k\left(A_{11},A_{12},A_{13}\cdots A_{1n}\right)^{T}$

因为 $r\left(A^{\bullet}\right)=1$，所以基础解系含有 $n-1$ 个向量，$A\cdot A^{\bullet}=|A|E=0$

所以要从 A 的 n 列中找出 $n-1$ 列是线性无关的。

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，因为 A11 $\neq 0$，所以 A 的后 $n-1$ 列是线性无关的，

所以 $A^{*}x=0$ 的通解是矩阵 A 的后 $n-1$ 列。

因为 $\left(A^{\bullet}\right)^{\bullet}=A\cdot|A|^{n-2}$，当 $n=2$ 时，$\left(A^{\bullet}\right)^{\bullet}=A$

$(A^{*})^{*}x=0$ 的通解是 $k\left[A_{11},A_{12}\right]^{T}$，$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $A_{11}=a_{22}$ $A_{12}=-a_{21}$

$n\geq 3$ 时，$(A^{*})^{*}=0$，$(A^{*})^{*}x=0$ 的通解含有 n 个线性无关的向量，可选 n 个单位向量。

二. 单项选择题

1. 要使 ξ_1 ＝（1，0，1）^{T}，ξ_2 ＝（－2，0，1）^{T}都是线性方程组 $Ax=0$ 的解，则系数矩阵 A 为 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   解：因为 ξ_1,ξ_2 的对应分量不成比例，所以 ξ_1,ξ_2 线性无关．所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量个数大于 2

2. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^{*}\neq 0$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

   （ A ）不存在　　（ B ）仅含一个非零解向量

   （ C ）含有二个线性无关解向量　　（ D ）含有三个线性无关解向量

   解：因为 $r(A^{*})=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$，因为 $A^{*}\neq 0$，所以 $r(A)\geq n-1$，由已知得 $Ax=b$ 的解不唯一，所以 $r(A)\leq n-1$，所以 $r(A)=n-1$．于是基础解系所含解向量个数$=n-r(A)=n-(n-1)=1$（ B ）为答案。

3. n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是

   (A) 任一行向量都是非零向量　　(B) 任一列向量都是非零向量

(C) $Ax=b$ 有解　　　　(D) 当 $x\neq 0$ 时， $Ax\neq 0$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$

(D) 是答案　当 $x\neq 0$ 时， $Ax\neq 0$，说明 $Ax=0$ 只有零解.

4. 设 A 为 n 阶实矩阵， A^T 是 A 的转置矩阵，则对于线性方程组

$(\mathrm{I}): Ax=0$ 和 $(\Pi)x^T Ax=0$，必有

(A)（Ⅱ）的解都是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）解也是（Ⅱ）的.
(B)（Ⅱ）的解都是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）解不是（Ⅱ）的.
(C)（Ⅰ）解不是（Ⅱ）的，（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解
(D)（Ⅰ）解是（Ⅱ）的，但Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

解： $Ax=0\Rightarrow x^T Ax=0\Rightarrow$ 1 的解都是 2 的解。

$x^T Ax=0\Rightarrow x^T\left(A^T A\right)x=0\Rightarrow (Ax)^T(Ax)=0\Rightarrow Ax=0$，2 的解也都是 1 的解。

证明： $Ax=0\Leftrightarrow (A^T A)x=0$，因为 $r(A)=r\left(A^T A\right)$，同解方程组。
$Ax=0\Rightarrow A^T(Ax)=0\Rightarrow (A^T A)x=0\Rightarrow x^T\left(A^T A\right)x=0\Rightarrow (Ax)^T(Ax)=0\Rightarrow Ax=0$

三、解方程组

1. 4 元方程组 Ax=b 中，系数矩阵的秩 r(A)=3， ξ_1,ξ_2,ξ_3 是方程组的 3 个解，若

ξ_1=（1，1，1，1）^{T}， $\xi_2+\xi_3$=（2，3，4，5）^{T}，则方程组的通解为_____

解：因为 r(A)=3，所以基础解系只含有 1 个向量。 $A\varepsilon_1=b$ $A\varepsilon_2=b$ $A\varepsilon_3=b$

$A(\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1)=0$，所以 $\eta=k(0,1,2,3)^T+\varepsilon_1$

2. 3 元方程组 Ax = 0 以 $\eta_1=(1,0,2)^T$, $\eta_2=(0,1,-1)^T$ 为其基础解系,则该方程的系数矩阵为_____。

解：方程组 Ax = 0 的基础解系为 $\eta_1=(1,0,2)^T$, $\eta_2=(0,1,-1)^T$， 所以， $r(A)$ = 1.

设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ k_1\alpha_1\\ k_2\alpha_2\end{bmatrix}$ 假设 $\alpha_1=(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})$.

由　$A\eta_1=0$，得 $(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=a_{11}+2a_{13}=0$

由 $A\eta_2=0$，得 $(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=a_{12}-a_{13}=0$

取 $a_{13}=0$, 得 $a_{12}=1$, $a_{11}=-2$. 所以 $\alpha_1=(-2,1,1)$,

3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0 \\ 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 9x_1+6x_2+3x_4+2x_5=0 \end{cases}$，求此齐次方程组的基础解系和通解.

解：$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$r(A)=2$，基础解系含有 3 个向量

$3x_3+x_5=0 \Rightarrow x_3=0,\quad x_5=0$

$3x_1+2x_2+x_4=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1.x_4=-2$，或者 $x_1=1, x_2=1.x_4=-5$

$x_1=1, x_2=0.x_4=-3$

4. 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$ 有解，并求出解一般形式.

解：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 \vdots & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 \vdots & 2-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ 当 $\lambda=1$时，$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=2$

基础解系有一个向量：$\eta=k(-1,2,1)^T+(0,1,1)^T$

5. 设有线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ -x_1+4x_2+mx_3=k \end{cases}$，问 m，k 为何值时，方程组有惟一解？有无穷多组解？有无穷多组解时，求出一般解。

解：$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots 0 \\ 3 & 2 & 3 & \vdots -1 \\ -1 & 4 & m & \vdots k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots 0 \\ 0 & -7 & 0 & \vdots -1 \\ 0 & 7 & m+1 & \vdots k \end{bmatrix}$ ，$m\neq -1$时，k 为任意数，

$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=3$，有唯一解。　　$m=-1,\quad k\neq 1$时，无解。

$m=-1,\quad k=1,\ r(A)=r\left(\bar{A}\right)=2$，有无穷多解。$\eta=k(1,0,-1)^T+(0,1/7,-3/7)^T$

6. $\alpha_1=(1,2,0)$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)$，$\alpha_3=(-1,b+2,a+2b)$ 及 $\beta=(1,3,-3)$.

（1）a，b 为何值时，β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

（2）a，b 为何值时，β有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的惟一线性表示，并写出该表示式.

解：假设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，求解方程组，求 x_1, x_2, x_3.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 2 & a+2 & b+2 & \vdots & 3\\ 0 & -3a & a+2b & \vdots & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & a & b+4 & \vdots & 1\\ 0 & -3a & a+2b & \vdots & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & a & b+4 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a+5b+12 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

（1）$a=0, b\neq -12/5$ 时，$r(A)=2<r(\overline{A})=3$，方程组无解，即β不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

$a=0, b=-\dfrac{12}{5}$ 时，$r(A)=2=r(\overline{A})$，方程组有无穷多解，即β有无穷多种方法可表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

（2）$a\neq 0, a+5b+12\neq 0$ 时，$r(A)=3=r(\overline{A})$，方程组有惟一解，即β能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，且表示法惟一．此时得方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ ax_2+(b+4)x_3=1\\ (a+5b+12)x_3=0\end{cases}$，

解得：$x_3=0,\ x_2=\dfrac{1}{a},\ x_1=1-\dfrac{1}{a}$，表示式为：$\beta=(1-\dfrac{1}{a})\alpha_1+\dfrac{1}{a}\alpha_2+0\alpha_3$

7. 假设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 1 & a & c & 1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \eta=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$．如果η是方程组 $Ax=b$ 的一个解，试求 $Ax=b$ 的通解。

解．将η代入 $Ax=b$，得到 $1-a+c-1=0,\ a=c$．

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1\\ 1 & a & a & 1 & \vdots & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & a-\frac{1}{2} & a-\frac{1}{2} & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

（1）$a=c=\dfrac{1}{2}$ $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$

于是 $r(A)=r(\overline{A})=2$，基础解系所含解向量个数为：$4-r(A)=2$．

齐次方程：$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\ x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$，

令 $x_3=1,\ x_4=0,$ 解得 $x_2=-3,\ x_1=1$，解向量为：$(1,-3,1,0)^T$

令 $x_3=0,\ x_4=2,$ 解得 $x_2=-2,\ x_1=-1$，解向量为：$(1,-2,0,2)^T$

所以通解为: $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$

（2）$a=c\neq\dfrac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{cccc:c}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&a&a&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&a-\frac{1}{2}&a-\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right]$

于是 $r(A)=r(\bar{A})=3$，基础解系所含解向量个数为: $4-r(A)=1$.

齐次方程: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\x_2+3x_3+x_4=0\\(a-\frac{1}{2})x_2+(a-\frac{1}{2})x_3=0\end{cases}$ ，令 $x_3=-1,\ x_2=1,$ 解得 $x_4=2\ x_1=-2$

解向量为: $(-2,1,-1,2)^T$，所以通解为: $[1\ \ -1\ \ 1\ \ 1]^T+k[-2\ \ 1\ \ -1\ \ 2]^T$

8. 线性方程组的增广矩阵为

$(A|\beta)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&a&b&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+a&4+b&4&1\end{array}\right]$ 又已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是它的一个解，求：

（1）用基础解系表示的通解.（2）写出满足 $x_2=x_3$ 的全部解。

解：$(1,-1,1,-1)^T$ 代入得：$b=a$

$\left[\begin{array}{cccc:c}1&a&a&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+a&4+a&4&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&a&a&1&0\\0&1-2a&1-2a&0&0\\0&2-2a&4-2a&1&1\end{array}\right]$

$a\neq\dfrac{1}{2}$时，$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=3$，基础解系含有一个向量，$\eta=k(-2,1,-1,2)^T+(1,-1,1,-1)^T$

$a=\dfrac{1}{2}$时，$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=2$，基础解系含有 2 个向量。

$\eta=k(1,2,0,-2)^T+k_2(1,-3,1,0)+(1,-1,1,-1)^T$

（2）$a=\dfrac{1}{2}$时 $\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+x_4=0\\x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\4x_2+x_4=0\end{cases}$

$x_2=x_3=1,\quad x_4=-4,\quad x_1=3\quad \eta=k(3,1,1,-4)^T$

$a \neq \frac{1}{2}$ $\begin{cases}(1-2a)x_2+(1-2a)x_3=0 \Rightarrow x_2=x_3=0 \\ x_4=1.x_1=-1\end{cases}$，$\eta=k(-1,0,0,1)^T$

9. 已知ε_1 (1, 1, -1, -1)^{T}和ε_2 (1, 0, -1, 0)^{T}是线性方程组

$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_2+px_3+qx_4=s \\ 2x_1+tx_2-x_3+tx_4=r\end{cases}$ 的解，$\eta=(2,-2,1,1)^T$ 是它的导出组的解, 求方程组的通解：

ε_1代入得$\begin{cases}1-p-q=s \\ 2+t+1-t=r\end{cases}$ ε_2代入得$\begin{cases}s=-p \\ r=3\end{cases}$ η代入得 $p+q=2$

$q=1,\quad r=3,\quad p=1,\quad t=3$

$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots 0\end{bmatrix}$ $r(A)=r\left(\bar{A}\right)=2$，基础解系含有 2 个向量。

$\varepsilon_1-\varepsilon_2=(0,1,0,-1)^T$，$\eta=(2,-2,1,1)^T$

10. 假设$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2\end{bmatrix}$。如果矩阵方程$AX=B$有解，但解不惟一，试确定参数 a

解：$\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & 4 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & \vdots & -2 & -2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & -6 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & -2-a & -2-4a\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & \vdots & -(a+2) & -4(2+a)\end{bmatrix}$当 $a=-2$时，对于 B 的任一列向量，都有 $r(A)=r(\bar{A})=2<3$，所以矩阵方程$AX=B$有解，但解不惟一。

11. 设$a_1=[a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T, a_2=[b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T, a_3=[c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T$，则三条直线

$a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0, a_3x+b_3y+c_3=0\left(a_i^2+b_i^2 \neq 0, i=1,2,3\right)$

交于一点的充要条件是

A $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关　　B $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

C 秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ 秩$r(\alpha_1,\alpha_2)$　D $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关

解：三条直线交于一点，意味着上述三个方程组成的非齐次线性方程组有唯一解：$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$

12. 已知平面上三条不同直线的方程分别为：

l_1： $ax+2by+3c=0$，$l_2: bx+2cy+3a=0$，$l_3: cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$.

解：必要性　设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases}$ 有唯一解，故系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$ 的秩均为 2，于是$\left|\overline{A}\right|=0.$

$$\left|\overline{A}\right|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故　$a+b+c=0.$

充分性：由$a+b+c=0$，从必要性的证明可知，$\left|\overline{A}\right|=0$，故秩$(\overline{A})<3.$由于

$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0$，故秩(A)=2. 于是，秩(A)=秩$(\overline{A})$=2。

因此方程组(*)有唯一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点.

13. 已知线性方程组(I)的一个基础解系为：

$$(b_{11},b_{12}\cdots b_{1.2n})^T,(b_{21},b_{22}\cdots b_{2.2n})^T\cdots(b_{n1},b_{n2}\cdots b_{n.2n})^T$$

（I）$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$　（II）$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1,2n}x_{2n}=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$

求线性方程组(II)的通解，并说明理由。

解：设方程组（1）和（2）的系数矩阵分别为 A，B 由已知可得（1）的基础解系含有 n 个向量，所以$r(A)=n$，即 A 的 n 个行向量线性无关，A 的基础解系的 n 个向量必线性无关，所以$r(B)=n$，说明方程组（2）$BX=0$的基础解系也含有 n 个向量，因为$BA^T=0$，$r(A)=n$，所以说明 A 的任意一行都是 B 的解。

$$y=c_1(a_{11},a_{12}...a_{1.2n})^T+c_2(a_{21},a_{22}...a_{2.2n})^T+...+c_n(a_{n1},a_{n2}...a_{n.2n})^T$$

$c_1,c_2...c_n$为任意常数

14. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$

（1）a、b、c满足何种关系时，方程组仅有零解？

（2）a、b、c满足何种关系时，方程组有无穷多解，并用基础解系表示全部解

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$

当$|A|\neq 0$时，仅有 0 解，即a,b,c任何 2 个都不相同。

（2）$|A|=0$时，有无穷多解。

1. $a=b\neq c$时，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & c \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2 \end{bmatrix}\to\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

方程组有无穷多解，全部解为$k_1(1,-1,0)^T$（k_1为任意常数）

2. $a=c\neq b$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，全部解为$k_2(1,0,-1)^T$（$k_2$为任意常数）

3. $b=c\neq a$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1=0 \end{cases}$，全部解为$k_3(0,1,-1)^T$（$k_3$为任意常数）

4. $a=b=c$，$x_1+x_2+x_3=0$，全部解为$k_4(-1,1,0)^T+k_5(-1,0,1)^T$（$k_4$ k_5为任意常数）

15. 设$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$，$\varepsilon_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

（1）求满足$A\varepsilon_2=\varepsilon_1$，$A^2\varepsilon_3=\varepsilon_1$的所有向量$\varepsilon_2,\varepsilon_3$.

（2）对（1）中的任意向量$\varepsilon_2,\varepsilon_3$.证明$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$.无关

解：$(A,\xi_1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A)=r(\overline{A})=2, x_3=-2x_2+1, x_1=-x_2$

$\varepsilon_2 = k(-1,1-2)^T + (0,0,1)^T$

$$B = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(B) = r(\overline{B}) = 1, x_1 = -x_2 - 1/2$$

$$\varepsilon_3 = k_1(-1,1,0)^T + k_2(0,0,1)^T + \left(-\frac{1}{2},0,0\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2 - \frac{1}{2} \\ 1 & -k_1 & -k_2 \\ -2 & 2k_1+1 & k_3 \end{vmatrix} = k_1k_3 + 2k_1k_2 + (2k_1+1)(k_2 - \frac{1}{2}) - 2k_1(k_2 - \frac{1}{2}) - k_2(2k_1+1) - k_1k_3$$

$= -\frac{1}{2} \neq 0$ 故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

17. 已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a,b,c), a,b,c$ 不全为零，矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$（k 为常数），且 AB=0, 求线性方程组 Ax=0 的通解。

解：AB=0, 相当于告之 B 的每一列均为 Ax=0 的解，关键问题是 Ax=0 的基础解系所含解向量的个数为多少，而这又转化为确定系数矩阵 A 的秩.

解：由 AB=0 知，B 的每一列均为 Ax=0 的解，且 $r(A) + r(B) \leq 3$.

(1) 若 k$\neq 9$, 则 r(B)=2, 于是 r(A)≤ 1, 显然 r(A)≥ 1, 故 r(A)=1. 可见此时 Ax=0 的基础解系所含解向量的个数为 3-r(A)=2, 矩阵 B 的第一、第三列线性无关，可作为其基础解系，故 Ax=0 的通解为：$x = k_1(1,2,3) + k_2(3,6,k)$，$k_1, k_2$ 为任意常数.

(2) 若 k=9，则 r(B)=1, 从而 $1 \leq r(A) \leq 2$.

若 r(A)=2，则 Ax=0 的通解为：$x = k_1(1,2,3)$，k_1 为任意常数.

若 r(A)=1，则 Ax=0 的同解方程组为：$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 不妨设 $a \neq 0$, 则其通解为 $x = k_1\left(-\frac{b}{a},1,0\right) + k_2\left(-\frac{c}{a},0,1\right)$，$k_1, k_2$ 为任意常数.

四、求线性方程组同解、公共解

1. 求方程组 $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11 \\ -3x_1+x_2-4x_3+2x_4=-5 \\ -x_1-9x_2-4x_4=17 \end{cases}$ 的通解，并求满足方程组及条件

$5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1$ 的全部解。

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A)=2$，基础解系含有 2 个向量，

$\varepsilon_1=(-1,1,0,-2)^T \quad \varepsilon_2=(-9,1,7,0)^T \quad \eta^*=(1.-2,0,0)^T$

2. 设线性方程组

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+ax_3 &=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &=0. \end{cases}$ ①与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ ②有公共解，求 a 的值及所有公共解.

解：$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$. 当 a=1 时，$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 当 a=2 时，$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. 已知方程组

(I) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+x_3=7, \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+ax_3=4, \\ 2x_1+4x_2+(a-1)x_3=b+4 \end{cases}$

(1) a, b 取什么值时这两个方程组同解?此时求解。

(2) a, b 取什么值时这两个方程组有公共解？此时求解。

解：(1) 解出(I)的特解代入(II)中，求出 $a=1,\quad b=2$

(2) 求公共解：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 2 & 4 & a-1 & b+4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b-2 \end{bmatrix}$

$a=1,\quad b=2$，$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=2$，有无穷多解，即通解。

$a\neq 1,\quad b=2$，$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=3$，有唯一解。$\eta=(-1,2,0)^T$

3. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求 a，b，c 的值。

解：因为方程组（2）未知数个数大于方程的个数，所以有无穷多解，所以方程（1）的行列式为 0，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2-a=0\Rightarrow a=2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可求出方程组（1）的通解是$k(-1,-1,1)^T$因为$(-1,-1,1)^T$应当是方程组（2）的界

$$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -2-b^2+c+1=0 \end{cases}$$ 解出$b=1,c=2$或$b=0,c=1$

当$b=1,c=2$时，对方程组（2）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ 显然此时方程组（1）（2）同解。

当$b=0,c=1$时，方程组（2）为$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \end{cases}$

因其系数矩阵的秩为 1，从而方程组（1）（2）的解不相同，故$b=0,c=1$应舍去。

所以，当$a=2,b=1,c=2$时，方程组（1）（2）同解。

5. 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组，(Ⅰ)为 $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_3-x_4=0, \end{cases}$

(Ⅱ)有一个基础解系$(0,1,1,0)^T$，$(-1,2,2,1)^T$。求(Ⅰ)和(Ⅱ)的全部公共解。

解：Ⅱ的基础解系为$\eta=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^T$

代入(Ⅰ)得：$k_1+k_2=0\Rightarrow k_1=-k_2$，所以公共解为：$\eta=k(1,-1,-1,-1)^T$

6. 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组，(Ⅰ)的系数矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(Ⅱ)的一个基础解系为$(2,-1,a+2,1)^T$，$(-1,2,4,a+8)^T$。已知(Ⅰ)和(Ⅱ)有公共非零解，求a，并求出它们的全部公共解。

解：(Ⅱ)的解为$(2k_1-k_2,2k_2-k_1,k_1(a+2)+4k_2,k_1+(a+8)k_2)$，代入(Ⅰ)中得：

$\begin{cases}(a+1)k_1=0\\(a+1)(k_1-k_2)=0\end{cases}$ 若$a+1\neq 0$时，$k_1=0$，$k_2=0$，此时公共解只有 0 解，不合题意。

$a+1=0\Rightarrow a=-1$，k_1,k_2可以取任意值。即$a=-1$时，非 0 公共解是(Ⅱ)的全部解。

7. 已知方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3+x_4=1\\2x_1+x_2+bx_3+x_4=4\\2x_1+2x_2+3x_3+cx_4=1\end{cases}$ 与方程组

（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\-x_2+2x_3-x_4=2\\x_3+2x_4=-1\end{cases}$ 同解，则 a，b，c 的值为：

解析：

对矩阵（Ⅱ）实施初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&2&-1&2\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-6&6\\0&1&0&5&-4\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix},$$

故（Ⅱ）的通解为$x=k_1\begin{pmatrix}6\\-5\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}$

将特解$\begin{pmatrix}6\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}$代入（Ⅰ）得到$\begin{cases}6-4a-1=1\\12-4-b=4\to\\12-3-8=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

令 $k_1=-1$, 将$x=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 代入（Ⅰ）得 2+3−c=1，即 c=4

所以，a=1, b=c=4

第五章　相似对角化

本章知识点总结：

一、基本定义：

设 A,B 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 p，使得 $p^{-1}AP=B$，称 B 为 A 的可逆矩阵。对 A 进行运算 $P^{-1}AP=B$ 称为对 A 进行相似变换。可逆矩阵 P 称为把矩阵 A 变成矩阵 B 的相似变换矩阵。矩阵相似具有反身性对称性传递性。

相关性质：

（1）A 与 B 相似，则 A^m 与 B^m 相似（ $m\in Z$ ）.
（2）A 与 B 相似，则 A^{-1} 与 B^{-1} 相似。

（3）A 与 B 相似，且 $f(x)=ax^n+ax^{n-1}+...+ax+a$ 则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似.

（4）A 与 B 相似，则它们具有相同的特征多项式和特征值.推论:相似矩阵具有相同的迹和行列式的值。

① A、B 有相同的特征值是 A、B 相似的必要条件.

② A 与 B 相似，他们不一定有相同的特征向量.

二、矩阵对角化的条件

定义：对 n 阶方阵 A，若可找到可逆矩阵 P，使

$P^{-1}AP$　　Λ 为对角阵,这就称为把方阵 A 对角化 .

定理：n 阶方阵 A 与对角阵 Λ 相似⇔A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论：如果 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值互不相等， 则 A 与对角阵相似.

如果方阵 A 的特征方程有重根时，特征值是几重，对应的线性无关的特征向量必须有几个，否则无法对角化.

判定矩阵可否对角化的步骤:（重点）

1.由特征多项式求出矩阵的特征值λ1，λ2...λn
2.若所有特征值互异，矩阵可以相似对角化。
3.若有重特征值λi，计算 r（λiE-A）,对每个重特征值λi 看其重数 ki 是否满足 ki=n-r（λiE-A）;
4.若满足则矩阵可以相似对角化，否则不可。
5.若可以相似对角化，求出特征值λ1，λ2...λn 所对应的线性无关特征向量 X1，X2，...Xn;
6.以λi 的特征向量为列，按特征值的顺序从左往右构造可逆矩阵 P=(X1，X2，...Xn),

与特征向量相对应，从上到下将λi 写在矩阵主对角线上构成对角矩阵Λ则$P^{-1}AP=\Lambda$

单元例题

矩阵 A=$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$则特征值为?

λ1=? λ2=? λ3=?

对应特征值的特征向量分别为?

答案 -12，-6,0

对应 0 的特征向量为$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$只要 x 不为 0;

对应-6 的特征向量为$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$，只要 y 不为 0;

对应 0 的特征向量为$\begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$，只要 z 不等于 0;

解析：由于 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+7 & -5 \\ -2 & -5 & \lambda+7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+7 & -12-\lambda \\ -2 & -5 & \lambda+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 0 \\ -4 & \lambda+2 & 0 \\ -2 & -5 & \lambda+12 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+12)(\lambda+6)$$

得出特征值。

λ为 0，解方程组（-A）x=0,得基础解系$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,所以为 k$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

为-12 时解方程组(-12E-A)x=0,得基础解系$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，所以为 k$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

为-6 时解方程组（-6E-A）x=0,得基础解系$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，所以为k$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$。

经典考题：

. 设三阶实对称矩阵 A=$\begin{pmatrix}8 & -4 & 8\\-4 & 8 & 8\\8 & 8 & -4\end{pmatrix}$求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

（1）矩阵 A 的特征值为λ1=__，λ2=__，λ3=__，

(2) 属于特征值λ1 的一个特征向量为 P1=（　　）^{T}

属于特征值λ2 的一个特征向量为 P2=（　　）^{T}

属于特征值λ3 的一个特征向量为 P3=（　　）^{T}

(3)正交矩阵 Q=【　　】

(4)对角矩阵 $Q^{-1}AQ$ =（　）

参考答案：

（1）. $|\lambda E-A|=\begin{pmatrix}\lambda-8 & 4 & -8\\4 & \lambda-8 & -8\\-8 & -8 & \lambda+4\end{pmatrix}$ $=(\lambda-12)^2(\lambda+12)$

A 的特征值为λ1=_12_，λ2=_12_，λ3=_-12_.

（2）. 对于特征值λ1=λ2=_12_，解齐次线性方程组（12E-A）x=0，由于

$$12E-A=\begin{pmatrix}4 & 4 & -8\\4 & 4 & -8\\-8 & -8 & 16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

基础解系α1=（-1 ，1， 0）^{T}，α2=（2， 0， 1）^{T}，将α1，α2 正交化，取 P1=（-1， 1 ，0）^{T}，则 P2=（1， 1 ，1）^{T}，

对于特征值λ3=-12，解齐次线性方程组（-12E-A）x=0，由于

$$-12E-A=\begin{pmatrix}-20 & 4 & -8\\4 & -20 & -8\\-8 & -8 & -8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解析 P3=α3=（-1 -1 2）^{T}，

（3）将α1，α2，α3 单位化得正交矩阵 Q=$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

（4）对角矩阵 Q-1AQ =$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 12 & \\ & & -12 \end{pmatrix}$

2.已知矩阵 A=$\begin{pmatrix} K+2 & K-2 & -2 \\ K-2 & K+2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$与 B=$\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$相似,则 K=(2.5).

解:因为 A 矩阵与 B 矩阵相似，所以 A 与 B 具有相同特征值，即 B 的特征值为 5，6，0。令=0，可推得(-λ）（6-λ）（2K-λ）=0，即=6， =0， =2K。由题意可知 2K=λ=5，即 K=2.5。

已知 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 8，向量 a=（-8，6，2）是齐次线形方程组 Ax=0 的解，且矩阵 A 的对角元素之和为-2，则：

（1） 矩阵 A 的特征值为=8， =-10。

（2） 属于特征值的一个特征向量为=(1,1,1).
属于特征值的一个特征向量为=(-8,6,2).
属于特征值的一个特征向量为=(2,5,-7).

（3） 矩阵 A= $\begin{pmatrix} 336/156 & 216/156 & 696/156 \\ 216/156 & -84/156 & 1116/156 \\ 696/156 & 1116/156 & -564/156 \end{pmatrix}$

解：

（1） 因为 a 是 Ax=0 的解，所以 r(A)<=2,所以 A 有特征值为 0。矩阵 A 的各行元素之和为 8，所以矩阵 A 有特征值为 8。矩阵 A 的对角元素之和为 A 的特征值加和，所以 A 有特征值-10。

（2） 当λ=8 时，A$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$=8$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以λ=8 所对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。当λ=0 时，Ax=0$\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$，

所以λ=0 所对应的特征向量为$\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$。因为不同特征值所对应的特征向量相互正交，

所以不妨记λ=-10 所对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$。

（3） 令矩阵 P=（），将 P 单位正交化可得正交矩阵 Q。使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$，$A=Q\Lambda Q^{-1}$ （其中

$\Lambda=\begin{pmatrix}8&&\\&0&\\&&10\end{pmatrix}$。所以可得 A=$\begin{pmatrix}336/156&216/156&696/156\\216/156&-84/156&1116/156\\696/156&1116/156&-564/156\end{pmatrix}$。

3.设三阶实对称矩阵 A=$\begin{pmatrix}-2&8&-6\\8&-2&-6\\-6&-6&12\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

（1）矩阵 A 的特征值为 λ1=__，λ2=__，λ3=__，

（2）属于特征值 λ1 的一个特征向量为 P1=（ $\qquad\qquad$ ）^{T}

属于特征值 λ2 的一个特征向量为 P2=（ $\qquad\qquad$ ）^{T}

属于特征值 λ3 的一个特征向量为 P3=（ $\qquad\qquad$ ）^{T}

(3)正交矩阵 Q=【 】

(4)对角矩阵 $Q^{-1}AQ$ =（ ）

解析： （1）. | λE-A|=$\begin{pmatrix}\lambda+2&8&6\\-8&\lambda+2&6\\6&-6&\lambda-12\end{pmatrix}$ =λ(λ+10)(λ-18)

A 的特征值为 λ1=_0_，λ2=_-10_，λ3=_18_.

（2）① 对于特征值 λ1=-10_，解齐次线性方程组（-10E-A）x=0，由于

-10E-A=$\begin{pmatrix}-8&8&6\\-8&-8&6\\6&-6&-22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解析 α1=（-1 1 0）^{T}，取 P1=（-1 1 0）^{T}

② 对于特征值 λ2=18，解齐次线性方程组（18E-A）x=0，由于

18E-A=$\begin{matrix}-20&4&-8\\4&-20&-8\\-8&-8&-8\end{matrix}\sim\begin{matrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{matrix}$

得基础解析 P2=α2=（-1 -1 2）^{T}，

③ 对于特征值 λ3=0，解齐次线性方程组（-A）x=0，由于

-A=$\begin{pmatrix}2&-8&6\\-8&2&6\\6&6&-12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

得基础解析 P3=α3=（1 1 1）^{T}

（3）将α1，α2，α3 单位化得正交矩阵 Q=$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

（4）因为特征值可构成对角矩阵，所以对角矩阵为 Q-1AQ =$\begin{pmatrix} -10 & & \\ & 0 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$

相似与相似对角化练习题

一．相似矩阵

1、下列矩阵中，A和B相似的是（　　）

（A）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　（B）$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（C）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　（D）$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

二．相似对角化的条件

2、下列矩阵中，不能相似对角化的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3、已知三阶矩阵A的特征值为$0, \pm 1$，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）矩阵A是不可逆的

（B）矩阵A的主对角元素之和为0

（C）1和-1所对应的特征向量正交

（D）$Ax=0$的基础解系由一个向量构成

4、设A、B为n阶方阵，且对$\forall\lambda$,有$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，则（　　）

（A）$|\lambda E+A|=|\lambda E+B|$　　（B）A与B相似

（C）A与B合同　　（D）A、B同时可相似对角化或不可相似对角化

5、设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^2=A$，证明：（1）$r(A-E)+r(A)=n$；（2）矩阵 A 可以相似对角化.

6、设 A 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维线性无关列向量组，且有 $A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_3+\alpha_1$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$.

（1）求 A 的全部特征值；

（2）A 是否可对角化？

7、已知三阶矩阵 A 的特征值为 0.1.2 设 $B=A^3-2A^2,$ 则 $r(B)=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）不能确定

三．相似对角化中 P 与 Λ 的计算

8、已知 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}, \alpha_1$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，α_2,α_3 $A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=6$ 的特征向量，那么矩阵 P 不能是（　　）

（A）$(\alpha_1,-\alpha_2,\alpha_3)$　　（B）$(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_3)$

（C）$(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2)$　　（D）$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)$

9、已 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似:

（1）求 x 与 y；（2）求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P

10、设矩阵. 问当 K 为何值时, 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵?　　并求出 P 和相应的对角矩阵.

11、设矩阵, 已知 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是的二重特征值. 试求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

12、设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$

.

（1）求 X 和 Y 的值；　（2）求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$.

四．A^n 的计算

13、已知 A、B 为三阶矩阵，满足 $AB+B=0$，$B=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，齐次方程组 $AX=0$ 有非零解 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，（1）求 a 的值；（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

（3）求秩 $R(\mathrm{A}+\mathrm{E})$；（4）计算行列式 $|A-E|$；（5）求 $(\mathrm{A}+\mathrm{E})^{100}$

五．对实对称矩阵性质的考查

14、设 A 为 n 阶实对称矩阵，则(　　)

（A）A 的 n 个特征向量两两正交

（B）A 的 n 个特征向量组成单位正交向量组

（C）A 的 k 重特征值 λ_0 有 $r\left(\lambda_0 E-A\right)=n-k$

（D）重特征值

15、设三阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，求．$A$。

六．实对称矩阵的正交相似对角化

16、设 A 是 n 阶矩阵，且有 n 个相互正交的特征向量，证明 A 是实对称矩阵

17、设三阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_1=-1,\lambda_1=1$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ 是 A 的属于 λ_1 特征值的特征向量，记 $B=A^3-A-2E$

（1）验证 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与其对应的特征向量;

（2）求矩阵 B

七．综合

18、A 为3阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0,\ r(A)=2$.

（1）求 A 的全部特征值.

（2）当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

19、设 A 是 n 阶幂等阵（$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$），$r(\boldsymbol{A})=r,\ 0<r\le n$，证明 A 可相似对角化，并求 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

Ⅱ参考答案

一．相似矩阵

1、**【答案】**（C）

【解析】：（A）中，$r(A)=1,r(B)=2$，故 A 和 B 不相似.

（B）中，$tr(A)=9,tr(B)=6$，故 A 和 B 不相似.

（D）中，A 的特征值为 $2,2,-3$，B 的特征值为 $1,3,-3$，故 A 和 B 不相似.

由排除法可知：只有（C）中矩阵 A 和 B 可能相似.

事实上，在（C）中，A 和 B 的特征值均为 $2,0,0$，由于 A 和 B 均可相似对角化，也即 A 和 B 均相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 A 和 B 相似.

故选（C）

二．相似对角化的条件

2、**【答案】**（D）

【解析】：（A）中矩阵为实对称矩阵，可以相似对角化.

（B）中矩阵有三个互不相同的特征值：$-1,2,1$，可以相似对角化.

（C）中矩阵特征值为 $0,0,4$，由于该矩阵秩为 1，可知其二重特征值 0 有两个线性无关的特征向量，故可以相似对角化.

（D）矩阵特征值为 $2,2,-1$，令该矩阵为 A，$A-2E=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&3\\0&0&-3\end{pmatrix}$，$r(A-2E)=2$，可知其二重特征值 2 只有一个线性无关的特征向量，故不可以相似对角化.

故选（D）.

3、**【答案】**：（C）

【分析】：注意本题是找不正确的答案. 根据特征值与行列式的关系及特征值的性质应知 A，B 正确，而 $Ax=0$ 的非零解对应的是零特征值的特征向量.

【解析】：根据 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$，$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$，知（A），（B）正确；

而 $\lambda_1=0$ 是单根，因此 $r(0E-A)=r(A)=2$，即 $Ax=0$ 的基础解系只由一个线性无关解向量构成，可知（D）也正确. 因此唯一可能不正确的选项是（C）.

事实上，由于没有限定 A 为实对称矩阵，故 A 不同特征值的特征向量不一定正交. 故选（C）.

【评注】： 特征值的重数与矩阵的秩的关系：

由于矩阵的 k 重特征值最多只能有 k 个线性无关的特征向量，故假设 λ 为矩阵 A 的 k 重特征值，则 $n-r(A-\lambda E)\le k$，也即 $r(A-\lambda E)\ge n-k$.

有两种情况可以确定 $r(A-\lambda E)$：一是当矩阵可相似对角化时，必有 $r(A-\lambda E)=n-k$；二是当 λ 为单特征值时，由于 $r(A-\lambda E)\ge n-1$，又由于矩阵 $A-\lambda E$ 不满秩，故 $r(A-\lambda E)=n-1$.

本题在确定 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数时，用到了上述结论：由于 0 是单特征值，故 $r(0E-A)x=3-1=2$

4、**【答案】**：（A）

【解析】： 由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$ 知， A、B 具有相同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

而 $\lambda E+A,\ \lambda E+B$ 的特征值为 $\lambda+\lambda_1,\lambda+\lambda_2,\cdots,\lambda+\lambda_n$，

所以 $|\lambda E+A|=|\lambda E+B|=(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)\cdots(\lambda+\lambda_n)$

故（A）是正确的.

对于（B），（C），（D），可以通过举反例予以排除.

例如 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，则 A、B 的特征多项式相同，但 A、B 不相似，否则 $P^{-1}AP=B\Rightarrow A=PBP^{-1}=PEP^{-1}=E$，矛盾，故可以排除（B）. 同时，由于矩阵 A 不可相似对角化，故可排除（D）.

最后，由于合同矩阵是在实对称矩阵的范围内讨论，可知（C）不正确.

故唯一正确的选项是（A）

5、**【证明】**：（1）由 $A^2=A$ 可得 $(A-E)A=O$，故有 $r(A-E)+r(A)\le n$.

又由于 $r(A-E)+r(A)=r(E-A)+r(A)\ge r(E-A+A)=r(E)=n$.

可知 $r(A-E)+r(A)=n$.

（2）由于 $A^2=A$，可知矩阵 A 的特征值 λ 必满足 $\lambda^2=\lambda$，也即 A 的特征值只能为 1 或 0.

由于矩阵可相似对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量，故考虑 1 和 0 的特征向量.

由于1和0的特征向量分别为$(A-E)x=0$和$Ax=0$的解，它们的基础解系中分别含有$n-r(A-E)$和$n-r(A)$个解向量. 也即特征值1有$n-r(A-E)$个线性无关的特征向量；特征值0有$n-r(A)$个线性无关的特征向量. 而$n-r(A-E)+n-r(A)=n$，可知A有n个线性无关的特征向量. 故矩阵A可以相似对角化.

6、**【解析】**：⑴ 由已知得，$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，$A(\alpha_2-\alpha_1)=-(\alpha_2-\alpha_1)$，

$A(\alpha_3-\alpha_1)=-(\alpha_3-\alpha_1)$，又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq 0$，$\alpha_2-\alpha_1\neq 0$，$\alpha_3-\alpha_1\neq 0$. 所以-1, 2 是$A$的特征值. $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是相应的特征向量. 又由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$也线性无关，所以-1 是矩阵$A$的二重特征值，即$A$的全部特征值为-1, -1，2.

⑵ 由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关可证明$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$线性无关，即矩阵$A$有三个

线性无关的特征向量，所以矩阵A可相似对角化.

【评注】：对于抽象的矩阵，经常利用定义与性质讨论其特征值与特征向量问题

7、**【答案】**：（A）

【解析】：因为矩阵A有三个不同的特征值，所以A必能相似对角化，则有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}.$$

那么
$$\begin{aligned}P^{-1}BP&=P^{-1}(A^3-2A^2)P=P^{-1}A^3P-2P^{-1}A^2P\\&=(P^{-1}AP)^3-2(P^{-1}AP)^2\\&=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&8\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即$B\sim\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$. 因此$r(B)=r\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}=1$. 故应选（A）

三．相似对角化中P与Λ的计算

8、**【答案】**：（D）

【解析】：若$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

则有$AP=P\Lambda$

即 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}$

即 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=(a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, a_3\alpha_3)$

可见α_i是矩阵A属于特征值a_i的特征向量$(i=1,2,3)$，又因矩阵P可逆，因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

若α是属于特征值λ的特征向量，则$-\alpha$仍是属于特征值λ的特征向量，故（A）正确.

若α，β是属于特征值λ的特征向量，则$2\alpha+3\beta,\cdots$仍是属于特征值λ的特征向量. 本题中，α_2,α_3是属于$\lambda=6$的线性无关的特征向量，故$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_2-2\alpha_3$仍是$\lambda=6$的特征向量，并且$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_2-2\alpha_3$线性无关，故（B）正确.

关于（C），因为α_2,α_3均是$\lambda=6$的特征向量，所以α_2与α_3谁在前谁在后均正确. 即（C）正确.

由于α_1,α_2是不同特征值的特征向量，因此$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$不再是矩阵A的特征向量，故（D）错误.

【评注】：相似对角化中，只要有Λ的对角元是矩阵A的n个特征值，P的列向量是与Λ中特征值对应的n个线性无关的特征向量，所得的Λ与A就能满足等式 $P^{-1}AP=\Lambda$

9、**【解析】**：（1）B的特征值为$2,y,-1$. 由A与B相似, 则A的特征值为$2,y,-1$. 故

$$\begin{cases} 2+y+(-1)=2+0+x \\ 2\cdot y\cdot(-1)=|A|=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

（2）分别求出A的对应于特征值$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$的线性无关的特征向量为

$$p_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, p_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

令可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=B$.

10、**【解析】**：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -2\\-k & -1-\lambda & k\\4 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\0 & -1-\lambda & k\\1-\lambda & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 0 & -1-\lambda & k\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^2(1-\lambda)$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=1$.

矩阵 A 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 属于特征值 $\lambda_{1,2}=-1$ 的线性无关的特征向量为两个 $\Leftrightarrow$ $R(A+E)=1\Rightarrow k=0$.

此时，属于特征值 $\lambda_{1,2}=-1$ 的线性无关的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$；属于特征值

$\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 令可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则

$P^{-1}AP=\Lambda=diag(-1,-1,1)$

11、**【解析】**：A 有三个线性无关的特征向量, 则 A 能对角化. 又 $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值, 则属于 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量, 故 $R(A-2E)=1$.

$$A-2E\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & x-2 & -(x+y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\\ -(x+y)=0\end{cases}\Rightarrow x=2,y=-2$$

此时 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$. 由 $2+2+\lambda_3=1+4+5\Rightarrow\lambda_3=6$ 为 A 的另一特征值.

属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的线性无关的特征向量 $p_1=(-1,1,0)^T,p_2=(1,0,1)^T$；

属于 $\lambda_3=6$ 的线性无关的特征向量 $p_3=(1,-2,3)^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=diag(2,2,6)$.

12、**【解析】**：（1）B 的特征值为 $-1,2,y$；A 有特征值 -2. A 与 B 相似, 则 A 与 B 有相同的特征值, 故 $y=-2$. 又 $(-1)+2+y=(-2)+x+1\Rightarrow x=0$.

(2) A 的对应于特征值 $-1,2,-2$ 的特征向量分别为 $p_1=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},p_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，令可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则 $P^{-1}AP=B$.

四. A^n 的计算

13、**【解析】**

$AB+B=0\Rightarrow AB=-B$，因为$B=\begin{pmatrix}1&a&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1&a&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&a&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

所以A有-1 特征值，且其重数至少是 2 重，因为$AX=0$有非零解$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，所以$A$有 0 特征值，且其重数至少是 1 重，又因为$A$为三阶矩阵，所以-1 是二重特征值，0 为 1 重特征值，由于A是对称矩阵一定可对角化，所以$A\sim\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$。

因为$(A+E)B=0$，且$\mathrm{R}(A+E)=1$，所以$R(B)\le 2\Rightarrow |B|=0\Rightarrow a=1$。

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$$

$$A+E\sim\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}\Rightarrow R(A+E)=1$$

$$A-E\sim\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&-1\end{pmatrix}\Rightarrow |A-E|=-4$$

$$\left(A+E\right)^{100}=P\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

五．对实对称矩阵性质的考查

14、**【答案】：**（C）

【解析】： 实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量正交，但未必两两正交；n个特征向量未必是单位正交向量组，故（A），（B）均不正确.

由于实对称矩阵A必可对角化，A的属于k重特征值λ_0的线性无关的特征向量必有k 个，故$r(\lambda_0E-A)=n-k$. 故本题应选（C）

15、【解析】：设对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 x , 则 ξ_1 与 x 正交, 即 $\xi_1^T x=0$, 其基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. 令可逆矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 则

$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 故

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

六．实对称矩阵的正交相似对角化

16、【分析】：n 个相互正交的特征向量必线性无关，可知 A 可对角化，并且可用正交变换化这对角矩阵.

【证明】设 n 个相互正交的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ ，其对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ，将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 单位正交化，记为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ ，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 用为 A 的特征向量，令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ ，则 Q 为正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$$

故有 $\quad A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$

所以有 $\quad A^T=(Q\Lambda Q^T)^T=Q\Lambda Q^T=A$

即 A 是实对称矩阵

17、【解析】

（1）因为三阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_1=-1,\lambda_1=1$ 且 $B=A^3-A-2E$

所以 B 的特征值为 4，-2，-2。$\alpha_1=(1\quad 1\quad 0)^T$ 是 A 属于 2 的特征向量，所以 $\alpha_1=(1\quad 1\quad 0)^T$ 也是 B 属于 4 的特征向量，因为 A 是对称矩阵，所以 B 也是对称矩阵，所以对于 B 矩阵属于-2 的特征向量与属于 4 的特征向量正交。

$(1\quad 1\quad 0)X=0\Rightarrow\alpha_2=(-1\quad 1\quad 0)^T,\alpha_3=(0\quad 0\quad 1)^T$

对于 B 属于 4 的特征向量为 $k_1\alpha_1$ ，属于-2 的特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ ，其中 k_1 为非零任意常数，k_2k_3 是不全为零的任意常数。

（2）$\alpha_1=(1\quad 1\quad 0)^T\ \alpha_2=(-1\quad 1\quad 0)^T,\alpha_3=(0\quad 0\quad 1)^T$

通过正交化单位化找到实现对角化的正交矩阵 Q，使得

$$Q^T BQ=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

七．综合

18、**【解析】**：⑴ 设 λ 是矩阵 A 的特征值，则存在非零向量 x 使 $Ax=\lambda x$，从而 $A^2x=\lambda^2x$. 由于 $A^2+2A=0$，故 $(A^2+2A)x=(\lambda^2+2\lambda)x=0$，由 $x\neq0$ 有 $\lambda^2+2\lambda=0$. 于是 A 的特征值为 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-2$. 由于 $r(A)=2$，A 有一特征值为 $\lambda_1=0$，设另外两个特征值为 λ_2,λ_3，由于 A 为3阶实对称矩阵，$A\sim diag\left\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right\}$，从而 $r(A)=r\left(diag\left\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right\}\right)=2$，故 $\lambda_2=\lambda_3=-2$.

⑵ 由⑴知实对称矩阵 $A+kE$ 的特征值为 $k,k-2,k-2$. 由于实对称矩阵为正定矩阵的

充分必要条件是特征值全部大于零，故 $A+kE$ 正定的充要条件是 $k>2$.

19. 答案：第一步：设 A 有特征值 λ，于是存在 $X\neq0$ 使得

$$AX=\lambda X$$

对上式两端左乘 A，得

$$A^2X=\lambda AX=\lambda^2X \qquad (1)$$

$$A^2X=AX=\lambda X \qquad (2)$$

由（）与（2）得 $\lambda^2X=\lambda X$

再由 $X\neq0$，有 $\lambda^2=\lambda$.

所以 A 特征值的取值范围为 0 和 1.

第二步：

由 $A^2=A$，得 $A(E-A)=0$，故有

$$r(A)+r(E-A)\le n$$

又 $r(A)+r(E-A)\ge r(A+E-A)=r(E)=n$

从而有 $r(A)+r(E-A)=n$

由已知 $r(A)=r$，故 $r(E-A)=n-r$.

第三步：

当$\lambda=0$时，由$AX=0$，因$r(A)=r$，故有$n-r$个线性无关的特征向量.

当$\lambda=1$时，由$(E-A)X=0$，因$r(E-A)=n-r$，故有r个线性无关的特征向量.

从而共有$r+(n-r)=n$个线性无关的特征向量.

因此A可相似对角化.

第四步：由A可相似对角化，故存在可逆阵P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而 $$|A-2E|=\left|P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}-2E\right|=|P|\left|\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-2E\right||P^{-1}|=(-1)^n 2^{n-r}$$

第六章　二次型

（一）　二次型的基本概念

第一节　二次型的定义及其矩阵表示

一、原理

定义 6.1　n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\cdots+\cdots+2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$ (6.1)称为一个 n 元二次型.当系数 a_{ij}均为实数时，称为n 元实二次型，否则称为n 元复二次型.　以下仅考虑 n 元实二次型.如果设
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$(6.2)称为 n 元二次型的矩阵表示.

注意到二次型 f 与对称矩阵 A 一一对应，故称 A 是二次型 f 的矩阵，f 是对称矩阵 A 的二次型，且称 A 的秩 R(A)为二次型 f 的秩.　　(定义 6.2)

由于二次型与对称矩阵是一一对应的，所以从某种意义上讲，研究二次型就是研究对称矩阵.

定义 6.2　仅含平方项的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$　(6.3)

称为标准形.系数 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$仅取-1,0,1 的标准形称为规范形.　　(定义 6.3)

标准形的矩阵是对角矩阵.

二次型有下面的结论：

定理 6.1　线性变换下，二次型仍变为二次型.可逆线性变换下，二次型的秩不变.(定理 6.1)

这是因为 $$\underset{\substack{A\leftrightarrow B=C^TAC \\ R(A)=R(B)}}{f=\vec{x}^TA\vec{x}}\ \underset{|C|\neq 0}{\overset{\bar{x}=C\bar{y}}{\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}}}\ f\overset{B=C^TAC}{=}\bar{y}^TB\bar{y}.$$

二、方阵的合同变换

在可逆线性变换下，研究变换前后的二次型等同于研究它们矩阵的关系.

定义 6.3 设 A,B 是同阶方阵，如果存在可逆矩阵 C，使 $B=C^TAC$，则称 A 与 B 是合同的，或称矩阵 B 是 A 的合同矩阵.对 A 做运算 C^TAC 称为对 A 进行合同变换，并称 C 是把 A 变为 B 的合同变换矩阵.(定义 6.4)

矩阵的合同关系具有反身性、对称性、传递性.

注意：(1)合同的矩阵(必须是方阵)必等价，但等价的矩阵(不一定是方阵)不一定合同.

$$A\text{与}B\text{合同} \Leftrightarrow \exists\text{可逆矩阵}C，\partial B=C^TAC$$

$$A\text{与}B\text{等价} \Leftrightarrow \exists\text{可逆矩阵}P,Q，\partial B=PAQ$$

(2)合同关系不一定是相似关系，相似关系不一定是合同关系，但相似的实对称矩阵一定是合同关系.

$$\text{正交矩阵}Q，\partial Q^{-1}AQ= Q^TAQ=B \Rightarrow A\text{与}B\text{既相似又合同}$$

合同变换的作用：对二次型施行可逆线性变换等价于对二次型的矩阵施行合同变换.

$$\begin{array}{ccc} f=\vec{x}^TA\vec{x} & \underset{|C|\neq 0}{\overset{\vec{x}=C\vec{y}}{=}} & \vec{y}^TC^TAC\vec{y}\overset{\Delta}{=}\vec{y}^TB\vec{y} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ A & \underset{|C|\neq 0}{\Leftrightarrow} & C^TAC=B \end{array}$$

如果 B 是对角矩阵，则称 $f=y^TBy$ 是 $f=x^TAx$ 的标准形.

第二节 用正交变换化二次型为标准形

一、原理

由第五章第三节知：对于实对称阵 A，存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵(对角线上的元素为 A 的 n 个特征值).因此，二次型 $f=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 就能化为标准形 $f=y^T(Q^TAQ)y=y^T(Q^{-1}AQ)y$.

定理 6.2 任意实二次型都可经正交变换化为标准形，且标准形中的系数为二次型矩阵的全部特征值.

推论 1 任意实对称矩阵都与对角矩阵合同.

推论 2 任意实二次型都可经可逆线性变换化为规范形.

正交变换既是相似变换又是合同变换.相似变换保证矩阵有相同的特征值，化标准形则必须经合同变换.所以，正交变换是能把二次型化为“系数为特征值”的标准形的线性变换.

二、用正交变换化二次型为标准形的步骤

用正交变换化二次型 $f=x^TAx$ 为标准形的过程与将实对称阵 A 正交相似对角化的过程几乎一致.具体步骤如下：

(1)求出 A 的全部互异特征值 λ_1, $\lambda_2\cdots$, λ_s；

(2)求齐次线性方程组(λ_iE-A)x= o (i=1,2,…,s)的基础解系(即求 A 的 n 个线性无关特征向量)；

(3)将每一个基础解系分别正交化规范化，得到 n 个正交规范的线性无关特征向量 ε_1, ε_2,…, ε_n；

(4)正交相似变换矩阵 $Q=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$，正交相似变换 x=Qy 把二次型 $f=x^TAx$ 变为标准形 $f=y^T(Q^TAQ)y$.

** Q 通常不唯一，标准形可能不同.

第三节　用配方法化二次型为标准形

除了正交变换，事实上，还存在其它的可逆线性变换能把二次型化为标准形.举例说明如下.

总结：用配方法化二次型为标准形的过程分两种情形：

(1)二次型中含有平方项

例如，若二次型中含有平方项 $a_{11}x_1^2$，则把所有含 x_1 的项集中起来配方，接下来考虑 $a_{22}x_2^2$，并类似地配方，直到所有项都配成了平方和的形式为止.

(2)二次型中不含平方项，只有混合项

例如，若二次型中不含平方项，但有混合项 $2a_{12}x_1x_2$，则令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_i = y_i, i = 3, \ldots, n. \end{cases}$$

那么关于变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的二次型中就有了平方项，然后回到(1).

第四节　正定二次型

一、惯性定理

虽然把二次型化为标准形的可逆线性变换不唯一，从而标准形也可能不唯一，但同一个二次型的所有标准形却总满足如下惯性定理.

定理 6.3(惯性定理)　设实二次型 $f=x^TAx$ 的秩为 r，且在不同的可逆线性变换 x=Cy 和 x=Dy 下的标准形分别为

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2,\qquad \lambda_i\neq 0,$$

$$f=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\cdots+\mu_ry_r^2,\qquad \mu_i\neq 0,$$

则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 与 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 中正数的个数相同. (定理 6.3)

定义 6.4　二次型 f 的标准形中的正(负)系数的个数称为 f 的正(负)惯性指数.

惯性定理指出，可逆变换不改变惯性指数.

推论　n 阶实对称阵 A 与 B 合同的充分必要条件是 A 与 B 有相同的正惯性指数和负惯性指数.

正惯性指数+负惯性指数=R(A).

正惯性指数=正特征值的个数，

负惯性指数=负特征值的个数.

二、二次型的分类

二次型(/二次型的矩阵)的分类：(定义 6.6-6.7)

$$\begin{cases} f/A\text{正定} & \Leftrightarrow & f>0,\forall \vec{x}\neq\vec{0}\ (A\text{正定记作}A>0) \\ f/A\text{半正定} & \Leftrightarrow & f\geq 0,\forall \vec{x}\neq\vec{0}\ (A\text{半正定记作}A\geq 0) \\ f/A\text{负定} & \Leftrightarrow & f<0,\forall \vec{x}\neq\vec{0}\ (A\text{负定记作}A<0) \\ f/A\text{半负定} & \Leftrightarrow & f\leq 0,\forall \vec{x}\neq\vec{0}\ (A\text{半负定记作}A\leq 0) \\ f/A\text{不定} & \Leftrightarrow & \exists\vec{x}\neq\vec{0},\partial f(\vec{x})>0\text{且}\exists\vec{y}\neq\vec{0},\partial f(\vec{y})<0 \end{cases}$$

根据惯性定理知，合同变换不改变实对称矩阵的类型

三、正定二次型(正定矩阵)的判定

定理 6.4　n 元实二次型 $f=x^TAx$ 为正定(负定)二次型的充分必要条件是 f 的正(负)惯性指数等于 n.

定理 6.5　n 元实二次型 $f=x^TAx$ 为半正定(半负定)二次型的充分必要条件是 f 的正(负)惯性指数小于 n，且负(正)惯性指数为 0.

推论 2　n 阶实对称阵 A 正定(负定)的充分必要条件是 A 的 n 个特征值全是正数(负数)；A 半正定(半负定)的充分必要条件是 A 的 n 个特征值为不全为正数(负数)的非负数(非正数).

定义 6.4　设 $A=(a_{ij})_n$，则行列式

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

定理 6.6　n 阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于零；A 负定的充分必要条件是 A 的所有顺序主子式中奇数阶的小于零而偶数阶的大于零.

（二）二次型的定理性质

一．定理

（一） 设可逆矩阵 C，使 $B=C^TAC$。若 A 是对称矩阵，且 R(B)=R(A)。

推论 1.经可逆变换 x=Cy 使二次型 f 的矩阵由 A 变成 C^TAC 且二次型的秩不变。

推论 2.相似的实对称矩阵一定合同。

（二） 已知二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$，总存在正交变换 x=Py 使

f 化为标准型：$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1, \lambda_2\cdots\lambda_n$是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$的特征值。

(三)惯性定理：设有实二次型 $f=x^TAx$，秩为 r。在不同的可逆变换 x=Cy 及 x=Dz 下使 f 化为标准型 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2$ $(\lambda_i\neq0)$,

$f=\mu_1z_1^2+\mu_2z_2^2+\cdots+\mu_rz_r^2$ $(\mu_i\neq0)$,则 $\lambda_1\cdots\lambda_r$ 与 $\mu_1\cdots\mu_r$ 的正数的个数相同。

(四)实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件是 x^TAx 与 x^TBx 有相同的正负惯性指数。

(五)n 元实二次型 $f=x^TAx$ 为正定(负定)二次型的充要条件是 f 的标准型的 n 个系数全为正(负)，即 f 的正(负)惯性指数等于 n。

推论 1.n 元二次型 $f=x^TAx$ 为半正定(半负定)二次型的充要条件是 f 的标准型的 n 个系数全非负(非正)，即 f 的负(正)惯性指数等于 0。

推论 2.n 阶实对称矩阵 A 正定(负定)的充要条件是 A 的 n 个特征值全为正(负)；A 半正定(半负定)的充要条件是 A 的 n 个特征值全为非负(非正)。

(六)n 阶实对称矩阵 A 正定(半正定)的充要条件是 A 的各阶顺序主子式都为正(非负)，即

$a_{11}>0(\geqslant0)$, $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} >0(\geqslant0)$，…，$|A|>0(\geqslant0)$。

A 负定(半负定)的充要条件是 A 的各阶顺序主子式中奇数阶的为负(非正)，偶数阶的为正(非负)。

二．性质

(一)方阵的合同变换具有：

1.反身性：A 与 A 本身合同。

2.对称性：若 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同。

3.传递性：若 A 与 B 合同，B 与 C 合同，则 A 与 C 合同。

(二)若 A 是 n 阶正定矩阵，则 $|A+E|>1$。

(三)已知 A 是正定矩阵，则 A^T、A^{-1}、A^*、$kA(k>0)$也是正定矩阵。

(四)设 A、B 均是 n 阶正定矩阵，则 $kA+lB(k>0,l>0)$是正定矩阵。

(五)$A_{m\times n}$矩阵，则 A^TA、AA^T均为半正定矩阵。

(六)若 $R(A)=n$，则 A^TA 是正定矩阵。

若 $R(A)=m$，则 AA^T是正定矩阵。

(七)若 A 是正定矩阵且又是正交矩阵，则 A 是单位矩阵。

(八)1.A 是实对称矩阵的充要条件是存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=\quad E_p$

2.实对称矩阵 A 正定的充要条件是存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=E$。

3.实对称矩阵 A 正定的充要条件是存在可逆矩阵 P，使 $A=P^TP$。

（三）定理性质的证明过程

第一节 二次型的基本概念

定理：设可逆矩阵 C，使 $B=C^TAC$，若 A 是对称矩阵，则 B 也是对称的，且 R（B）=R（A）。

推论 1：经可逆变换 $x=Cy$ 后二次型由 A 变成 C^TAC 且二次型的秩不变。

推论 2：相似的实对称矩阵一定合同。

证：A 与 B 相似，A、B 都是实对称矩阵，存在正交矩阵 P、Q，使

$$P^TAP=\Lambda=Q^TBQ$$

$$Q^{-T}P^TAPQ^{-1}=B$$

$$\therefore (PQ^{-1})^TA(PQ^{-1})=B$$

∴A 与 B 合同

第二节 用正交变换化二次型为标准形

定理：实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件是 xTAx 与 xTBx 有相同的正负惯性指数。

证：（充分性）由于 A 与 B 合同，因此存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$。

设二次型 $f=x^TBx$ 在可逆变换 x=Py 下化为标准形

$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots\cdots+\lambda_i y_i^2$

即 $P^TBP=\wedge=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}$

则 $P^TC^TACP=\wedge$　　$(CP)^TA(CP)=\wedge$

即二次型 xTAx 经可逆变换 x=CPy 化为

$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots\cdots+\lambda_i y_i^2$

即 xTAx 与 xTBx 有相同的正、负惯性指数

（必要性）xTAx 与 xTBx 有相同的正负惯性指数则它们有相同的规范形

存在可逆矩阵 P、Q

使 $P^TAP=\begin{pmatrix}E_r & & \\ & -E_{r+s} & \\ & & \end{pmatrix}=Q^TAQ$

所以 $Q^{-T}P^TAPQ^{-1}=B$

即 $(PQ^{-1})^TA(PQ^{-1})=B$

所以 A 与 B 合同

定理:n 元二次型，$f=x^TAx$ 为正定（负定）二次型的充要条件是 f 的标准型的 n 个系数全为正（负）即 f 的正（负）惯性指数等于 n

证：（充分性）反证法

设 $\lambda_i\leqslant 0$，取 $y=e_s$

则 $x=ce_s\neq 0$

所以 $f(x)=f(ce_s)=\lambda_1\cdot 0+\cdots\lambda_{s-1}\cdot 0+\lambda_s+\lambda_{s+1}\cdot 0+\cdots\lambda_n\cdot 0=\lambda_s\leqslant 0$

即与已知矛盾

（必要性）设在可逆变换 X=Cy 下 $f(x)=f(Cy)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots\cdots+\lambda_n y_n^2$

不妨设 $\lambda_i>0$（i=1,2,3……n）

对任意 $x\neq 0$ 都有 $y=C^{-1}x\neq 0$

即 f（x）＞0 则 f 正定

（四）例题

一、二次型及其标准型

基本题型 I：二次型及其矩阵

例 1　写出下列二次型的矩阵：

（1）$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$;

（2）$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$;

解析：（1）因为 $f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2-x_1x_3+\frac{1}{2}x_2x_1+3x_2^2+\frac{3}{2}x_2x_3-x_3x_1+\frac{3}{2}x_3x_2-x_3^2$, 所以

$f_1(x_1,x_2,x_3)$的矩阵是$\begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 1/2 & 3 & 3/2\\ -1 & 3/2 & -1\end{pmatrix}$

(2)$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 0\\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

例 2 已知二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -2 & -4\\ 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$，求它的相应的二次型的表达式.

解析：设二次型由 x_1,x_2,x_3 表示，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $f=x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&3&5\\3&-2&-4\\5&-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix}=x_1^2-2x_2^2-x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3-8x_2x_3$.

基本题型Ⅱ：求二次型的秩

例:二次型 $f_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为____.

解析：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$, 所以二次型对应的实对称矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$, 对 A 施以行变换得 $A\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 R（A）=2，即二次型的秩为 2.

基本题型Ⅲ：判断矩阵合同

例 证明：若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列，则下面两个矩阵合同：

$$\begin{pmatrix}\lambda 1&&&\\&\lambda 2&&\\&&\cdots\cdots&\\&&&\lambda n\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\lambda i1&&&\\&\lambda i2&&\\&&\cdots\cdots&\\&&&\lambda in\end{pmatrix}.$$

证：

记 $A=\begin{pmatrix}\lambda 1&&&\\&\lambda 2&&\\&&\cdots\cdots&\\&&&\lambda n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\lambda i1&&&\\&\lambda i2&&\\&&\cdots\cdots&\\&&&\lambda in\end{pmatrix}$. 对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TBx=$

$\lambda_{i1}x_1^2+\lambda_{i2}x_2^2+\cdots+\lambda_{in}x_n^2$, 做可逆线性变换 $x_1=y_{i1},x_2=y_{i2},\cdots,x_n=y_{in}$, 则

$f=\lambda_{i1}y_{i1}^2+\lambda_{i2}y_{i2}^2+\cdots+\lambda_{in}y_{in}^2=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=y^TAy$, 所以两矩阵合同，其中 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$， $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

基本题型Ⅳ：正交变换化二次型为标准型或规范型

化二次型为标准型主要有两种方法：（1）正交变换法；（2）配方法.

例　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $x=Qy$, 把 f（x_1, x_2, x_3）化为标准型；

（3）求方程 f（x_1, x_2, x_3）=0 的解.

解析（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. 因为 R（$A$）<3，所以 $|A|=0$，即-8a=0，所以 a=0.

(2)由（1）得 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，令 $|\lambda E-A|=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}=$

$\lambda(\lambda-2)^2=0$，解得 A 的特征值为 $\lambda_1=0$， $\lambda_2=\lambda_3=2$.

$\lambda_1=0$ 时，解（$0E-A$）$x=0$ 得特征向量 $\xi_1=(1,-1,0)^T$;

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解（$2E-A$）x=0 得特征向量 $\xi_2=(1,1,0)^T$， $\xi_3=(0,0,1)^T$.

观察可知 ξ_2，ξ_3 正交，因此只需将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 单位化即可，

$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则经过正交变换 $x=Qy$ 可得 f（x_1, x_2, x_3）$=2y_2^2+2y_3^2$.

(3) f（x_1, x_2, x_3）$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$, 即
$x_1+x_2=0, x_3=0$, 得方程解为 $k(1,-1,0)^T$.

二、用配方法化二次型成标准型

基本题型：用配方法化二次型为标准型

例 1 求二次型 f（x_1, x_2, x_3）$=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 的标准型.

解析：由题意知二次型中没有平方项，故作可逆线性变换

$x_1=y_1+y_2$,

$x_2=y_1-y_2$,

$x_3=y_3$,

代入原二次型可得

$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)-6(y_1-y_2)y_3+2(y_1+y_2)y_3$

$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$

$=2(y_1-y_3)^2-2y_2^2-2y_3^2+8y_2y_3,$

再做可逆变换 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3, \\ y_2=z_2, \\ y_3=z_3, \end{cases}$ 代入上式得

$f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2-2z_2^2-2z_3^2+8z_2z_3=2z_1^2-2(z_2-2z_3)^2+6z_3^2,$

最后做可逆变换 $\begin{cases} w_1=z_1, \\ w_2=z_2-2z_3, \\ w_3=z_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1=w_1, \\ z_2=w_2+2w_3, \\ z_3=w_3. \end{cases}$

代入上式，得 $f(x_1,x_2,x_3)=2w_1^2-2w_2^2+6w_3^2$, 即为标准型.

这三次变换相当于一次总的线性变换

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w1 \\ w2 \\ w2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{pmatrix}.$$

例 2 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3+x_2^2+6x_2x_3+8x_3^2$ 为标准型.

解析：

因为 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3+x_2^2+6x_2x_3+8x_3^2$

$=(x_1+x_2+3x_3)^2-(x_1+5x_3)^2+24x_3^2,$

因此作可逆线性变换 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+3x_3, \\ y_2=x_1+5x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_2-5y_3, \\ x_2=y_1+2y_3-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$

代入原二次型化 f 为标准型 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2+24y_3^2$.

三、正定二次型

基本题型 I：有关正定性的基本概念

例 二次型 x^TAx 正定的充要条件是（ ）.

(A)存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=E$

(B)存在 n 阶可逆矩阵 D，使得 $A=D^TD$

(C)存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda 1 & & & \\ & \lambda 2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda n\end{pmatrix}$,其中 $\lambda_i>0$(i=1,2,…， n)

(D)对任何 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，其中 $x_i\neq 0$，使得 $x^TAx>0$

解析：选项（C）正确，因为 x^TAx 正定 $\Leftrightarrow$ A 正定 $\Leftrightarrow$ $\lambda_i>0$，i=1,2,…,n.

选项（A）说明 A 相似于单位矩阵，是二次型正定的充分条件，不是必要条件；

选项（B）中 D 中可逆是正定的充要条件，一般地，只能推出 A 半正定；

选项（D）中 $x_i\neq 0$,i=1,2,…,n 与 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$ 是不同的概念，选项 D 是必要条件不是充分条件.故应选 C.

基本题型Ⅱ：正定二次型的判定

例 1 证明：实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 正定.

证明：二次型 f 的对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$，主子式

$$\left|5\right|=5>0,\quad \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1>0,$$

因此，$f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型.

例 2 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，那么 t 应满足不等式____

解析：

由题设，二次型矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，为使二次型正定，该矩阵的各阶顺序主子式应满足

$$\left|A1\right|=1>0,\ \left|A2\right|=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0,\ \begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=4-2t^2>0,$$

所以，当$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$时，二次型正定.故应填$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

例 3 当λ满足什么条件时，二次曲面$x^2+(\lambda+2)y^2+\lambda z^2+2xy=5$是一个椭球面？

解析：

设方程左边为$f=x^TAx$，$x=(x,y,z)^T$,其中

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$.因为原二次曲面是一个椭球面，因此，f 化为标准型时为正定二次型，因此，A是正定的.故有A的主子式满足

$$|1|=1>0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda+1>0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)>0.$$

解得$\lambda>0$.

基本题型Ⅲ：正定矩阵的判定

例 1 设A为 3 阶实对称阵，且满足条件$A^2+2A=0$，已知A的秩为$R(A)=2$.

（1）求A得全部特征值；

（2）当 k 为何值时，矩阵$A+kE$为正定矩阵，其中E为 3 阶单位矩阵？

解析：（1）设λ为 A 的一个特征值，对应的特征向量为α，则

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad A^2\alpha=\lambda^2\alpha,$$

于是$(A^2+2A)\alpha=(\lambda^2+2\lambda)\alpha$.由条件$A^2+2A=O$推知$(\lambda^2+2\lambda)\alpha=0$.又由于$\alpha\neq0$,故有$\lambda^2+2\lambda=0$，解得$\lambda=-2$，$\lambda=0$.因为实对称矩阵$A$必可对角化，且$R(A)=2$，所以

$A\sim\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}=\Lambda$.因此，矩阵 A 的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$.

（2）方法一：矩阵$A+kE$仍为实对称矩阵.由（1）知，$A+kE$的全部特征值为$-2+k,-2+k,k$.于是，当$k>2$时，矩阵$A+kE$的全部特征值大于零.因此，矩阵$A+kE$为正定矩阵.

方法二：实对称矩阵必不可对角化，故存在可逆矩阵P，使得$P^{1}AP=\Lambda$,即$A=P\Lambda P^{-1}$,于是$A+kE=P\Lambda P^{1}+kPP^{-1}=P(\Lambda+kE)P^{1}$,所以$A+kE\sim\Lambda+kE$.而

$$\Lambda+kE=\begin{pmatrix}k-2 & & \\ & k-2 & \\ & & k\end{pmatrix}.$$

$\Lambda+kE$为正定矩阵，只需其顺序主子式均大于零，即 k 需满足

k-2>0, $(k-2)^2>0$, $(k-2)^2k>0$.

因此，当 k>2 时，矩阵 A+kE 为正定矩阵.

例 2 设 A,B 分别为 m 阶、n 阶正定矩阵，试判定分块矩阵 C= $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵.解析：方法：验证各阶主子式法.

由于 A,B 均为正定矩阵，故 A,B 的各阶主子式均为正.由分块矩阵及行列式的知识得到 C= $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的各阶主子式或者是 A 的某一主子式，或者是 B 的某一主子式与 $|A|$ 的乘积，故 C 的各阶主子式均为正，故 C 为正定矩阵.

（五）习题

1．用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$；

(2) $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz;$

(3) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4.$

解 (1) $f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(2) $f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(3) $f = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

2．求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$；

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

解 (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

故A的特征值为$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$.

当$\lambda_1 = 2$时，解方程$(A-2E)x = 0$，由

$$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 取$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当$\lambda_2 = 5$时，解方程$(A-5E)x = 0$，由

$$A-5E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$得基础解系$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$取$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

当$\lambda_3 = 1$时，解方程$(A-E)x = 0$，由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$得基础解系$\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$取$P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$ 且有 $f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$.

(2)二次型矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

故A的特征值为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

当$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = \lambda_4 = 1$时，分别可得单位特征向量

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

于是正交变换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

且有 $f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

3．证明：二次型 $f = x^T Ax$ 在 $\|x\| = 1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证明　　A 为实对称矩阵，则有一正交矩阵 T，使得

$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = B$ 成立.

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值，不妨设 λ_1 最大，

T 为正交矩阵，则 $T^{-1} = T^T$ 且 $|T| = 1$，故 $A = T^{-1} B^T = T^T B^T$

则 $f = x^T Ax = x^T T^T BTx = y^T By = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

其中 $y = Tx$

当 $\|y\| = \|Tx\| = |T|\|x\| = \|x\| = 1$ 时，即 $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} = 1$

即 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$

$f_{最大} = (\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2)_{最大} \underset{y_1=1}{=\!=} \lambda_1$.

故得证.

4．判别下列二次型的正定性：

(1) $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$；

(2) $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4$

$\quad - 12x_3x_4$

解　(1)　$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，$a_{11} = -2 < 0$，

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0$，$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -38 < 0$，故 f 为负定.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix}$，$a_{11} = 1 > 0$，$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 > 0$，

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0$，$|A| = 24 > 0$．故 f 为正定.

5．设 U 为可逆矩阵，$A = U^T U$，证明 $f = x^T Ax$ 为正定二次型.

证明　设 $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

$$f = x^T Ax = x^T U^T Ux = (Ux)^T (Ux)$$

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \cdots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)^2$$

$$+ \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)^2 \ge 0.$$

若“$=0$”成立，则 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ 成立.

即对任意 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 使 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ 成立.

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，U 的秩小于 n，则 U 不可逆，与题意产生矛盾.

于是 $f > 0$ 成立.

故 $f = x^T Ax$ 为正定二次型.

6．设对称矩阵 A 为正定矩阵，证明：存在可逆矩阵 U，使 $A = U^T U$.

证明　　$\boldsymbol{A}$ 正定，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩，且其特征值全为正.

不妨设 $\boldsymbol{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ 为其特征值，$\boldsymbol{\lambda_i > 0 \quad i = 1,\cdots,n}$

由定理 8 知，存在一正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

又因 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，$\boldsymbol{P^{-1} = P^T}$. 所以 $\boldsymbol{A = PQQ^T P^T = PQ\cdot(PQ)^T}$.

令 $\boldsymbol{(PQ)^T = U}$，$\boldsymbol{U}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A = U^T U}$.

（六）易错题

1. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1)　$\boldsymbol{f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz}$;

(2)　$\boldsymbol{f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz;}$

(3)
$\boldsymbol{f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4.}$

解　(1)　$\boldsymbol{f = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$.

(2)　$\boldsymbol{f = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$.

(3)　$\boldsymbol{f = (x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}$.

2. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1)　$\boldsymbol{f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3}$;

(2)　$\boldsymbol{f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4}$.

解 (1) 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1$. 当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，

由 $A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 取 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=5$ 时，解方程 $(A-5E)x=0$，由 $A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 取 $P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$，由 $A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 取 $P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

于是正交变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

且有 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.

(2) 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\0&-1&1-\lambda&1\\-1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=-1$时，可得单位特征向量$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，当$\lambda_2=3$时，可得单位特征向量$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，可得单位特征向量$P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$P_4=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

于是正交变换为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$

且有$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

3．证明：二次型$f=x^TAx$在$\|x\|=1$时的最大值为矩阵A的最大特征值.

证明　A为实对称矩阵，则有一正交矩阵T，使得

$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=B$成立.

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，不妨设$\lambda_1$最大，

T为正交矩阵，则$T^{-1}=T^T$且$|T|=1$，故$A=T^{-1}B^T=T^TB^T$

则$f=x^TAx=x^TT^TBTx=y^TBy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

其中$y=Tx$

当$\|y\|=\|Tx\|=|T|\|x\|=\|x\|=1$时，即$\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=1$即$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$

$f_{最大}=(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)_{最大}\underset{y_1=1}{=}\lambda_1$.

故得证.

4．判别下列二次型的正定性：

（1）$f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

（2）$f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$

解 （1） $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$a_{11}=-2<0$，$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0$，$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0$，

故 f 为负定.

（2） $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$，$a_{11}=1>0$，$\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0$，

$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0$，$|A|=24>0$.

故 f 为正定.

5．设 U 为可逆矩阵，$A=U^TU$，证明 $f=x^TAx$ 为正定二次型.

证明 设 $U=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，

$$f=x^TAx=x^TU^TUx=(Ux)^T(Ux)$$

$$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\cdots,a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$

$$\cdot\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2+(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)^2+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)^2\geq 0.$$

若“$=\mathbf{0}$”成立，则$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$成立．即对任意$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$使

$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\mathbf{0}$成立.

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关, U的秩小于n，则U不可逆，与题意产生矛盾.

于是$f>0$成立．故$f=x^TAx$为正定二次型.

6. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$ 二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 经正交变换 $X=PY$ 化成标准形 $f=9y_3^2$，求

所作的正交变换.

解：由 f 的标准形为 $f=9y_3^2$，故A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=9$.

故 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & -a \\ -2 & -a & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$$

令$\lambda=0$，则 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -a \\ -2 & -a & -4 \end{vmatrix}=0$ 解之 $a=-4$.

由此 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$有$0E-A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可得A的两个正交的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=9$，可得A的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

将特征向量单位化得$P_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$为正交矩阵，正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 为 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$.

注：因特征向量选择的不同，正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不惟一.

7．已知二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 正定，求 k .

解：二次型的表示矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-k\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 正定，应有 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于 0．故 $\begin{cases}\begin{vmatrix}1 & k\\ k & 2\end{vmatrix}>0\\ |A|>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}k^2-2<0\\ k(k^2-k-2)>0\end{cases}$.

解之 $\quad -1<k<0$.

8．求出二次型 $f=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换.

解：将括号展开，合并同类项有

$$f=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3+x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$$

$$+x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

$$=6x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3=6(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)$$

$$=6[(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3]=6(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{9}{2}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\ y_2=x_2-x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

则可逆变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

在此可逆线性变换下 f 的标准形为 $f=6y_1^2+\frac{9}{2}y_2^2$.

9．二次型 $f_3=x_1^2+x_2^2+14x_3^2+7x_4^2+6x_1x_3+4x_1x_4-4x_2x_3$ 正定，负定还是不定

解：二次型 f_3 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&0\\3&-2&14&0\\2&0&0&7\end{pmatrix}$

A 的各阶顺序主子式 $1>0,\ \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1>0$，$\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\3&-2&14\end{vmatrix}=1>0$，$\begin{vmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&0\\3&-2&14&0\\2&0&0&7\end{vmatrix}=-33<0$.

所以二次型 f_3 是不定二次型.

10．求一可逆线性变换 $X=PY$，将二次型 f 化成二次型 g.

$$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$$

$$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

解：$f=X^{\mathrm T}AX$，$A=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}$，　$g=Y^{\mathrm T}BY$，$B=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\end{pmatrix}$

将 A,B 分别作合同变换如下：

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2-2c_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\\1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $X=C_1Z$ 下 $f=2z_1^2+z_2^2$

其中 $C_1=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}B\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2+c_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&4\\1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $Y=C_2Z$ 下 $g=2z_1^2+z_2^2$.

其中
$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{Y}$ 得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{Y}$

令
$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&-6\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下 $f=g=2z_1^2+z_2^2$.

第七章　线性空间与线性变换

第一节　线性空间的概念和性质

一、线性空间

定义：设 V 是一个非空集合,R 是实数域,如果在 V 上定义了加法和与 R 中数的乘法两种运算,即∀α,β∈V,k∈ R,都有γ=α+β,δ=kα∈V 与之对应,且满足

(1)　α+β=β+α (加法交换律);

(2)　(α+β)+γ=α+(β+γ) (加法结合律);

(3)　在 V 中存在零元素 0,　使对任何α∈V 都有 α+0=α ;

(4)　对任何α∈V,存在元素β∈V, 使 α+β=0, 称β为α的负元素，记为-α;

(5)　1α=α;

(6)　(kl)α=k(lα);

(7)　(k+l)α=kα+l α;

(8)　k(α+β)=kα+kβ;

则称 V 是(实数域上的)线性空间(或向量空间), V 中的元素(不论其本来的性质如何)称为(实)向量.

性质：

1. 向量空间的零向量是唯一的;
2. 向量空间中每个向量的负向量是唯一的;
3. 0α=0, (-1)α=-α, k0=0, ∀ k∈R;
4. 若 kα=0, 则 k=0 或α=0.

二、线性子空间

定义：设 U 是线性空间 V 的一个非空子集.如果它对于 V 中定义的加法和数乘两种运算也算构成线性空间，则称 U 是 V 的一个线性子空间，简称为子空间。

定理：设 U 是线性空间 V 的一个非空子集. 则 U 是 V 的子空间的充分必要条件是 U 对 V 的加法和乘数两种运算是封闭的. 即

（1） 如果α，$\beta\in U$，那么$\alpha+\beta\in U$；
（2） 如果$\alpha\in U$，$k\in R$，那么 $k\alpha\in U$.

第二节 维数、基与坐标

一、定理：

1. 在线性空间 V 中,如果有 n 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关,而且 V 中任意向量都可由它们线 性表示,则称 α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为 V 的一个基，n 称为 V 的维数,V 称为 n 维线性空间,记作 V_n.

2. 设 V 是 n 维线性空间,如果 V 中向量组α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,则在 V 中必有 n－m 个向量$\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$,使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$是 V 的一组基.

推论：如果 U 是 V 的子空间，则 U 的维数不大于 V 的维数,而且当 U 的维数等于 V 的维数时一定有 U=V.

3. 设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n是线性空间 V_n的一组基， 如果$\alpha\in V_n$可以表示为:

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$$

则称$(x_1,\ x_2,\cdots x_n)^T$为向量α在基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n下的坐标. 可记为$\alpha=(x_1,\ x_2,\cdots x_n)^T$.

4. 设 U 和 V 是两个线性空间，如果在它们的元素之间存在一一对应关系， 且这种对应关系保持元素之间线性运算的对应， 则称线性空间 U 与 V 同构.

同构的性质：

（1） 反身性：U 与 U 同构；
（2） 对称性：若 U 与 V 同构，则 V 与 U 同构

第三节 基变换与坐标变换

一、过渡矩阵

定义：

1. 设α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n是线性空间 V_K的两组基，则这两个向量组等价. 如果

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{1k}\\c_{2k}\\\vdots\\c_{nk}\end{pmatrix},\quad k=1,2,\ldots,n$$

则合起来就有:

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

简记为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{C}$

矩阵 C 称为由基 α_1, α_2, …, α_n 到基 β_1, β_2, …, β_n 的过渡矩阵. 过渡矩阵是可逆的.

2. 设 α_1, α_2, …, α_n 和 β_1, β_2, …, β_n 是线性空间 V_K 的两组基. 如果向量 ξ 在这两组基下的坐标分别为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 则 $x=Cy$. 其中 C 是过渡矩阵.

第四节 线性变换及其矩阵表示

一、线性变换

定义：设 T 是线性空间 V 到 V 的一个映射， 且满足 $\forall\alpha$, $\beta\in V$, $k\in R$ 都有

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$$

$$T(k\alpha)=kT(\alpha)$$

则称 T 为 V 的一个线性变换.

性质：(1) $T(0)=0$;

(2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

(3) $T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m)=x_1T(\alpha_1)+x_2T(\alpha_2)+\cdots+x_mT(\alpha_m)$

二、线性变换的矩阵

1. 定义：设 T 为线性空间 V 的一个线性变换， α_1, α_2, …, α_n 是 V 的一组基， $\xi\in V$, 如果 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$, 则

$$T(\xi)=x_1T(\alpha_1)+x_2T(\alpha_2)+\cdots+x_nT(\alpha_n)$$

即， $T(\xi)$ 是由 $T(\alpha_1)$, $T(\alpha_2)$, …, $T(\alpha_n)$ 唯一确定的.

由于 $T(\alpha_1)$, $T(\alpha_2)$, …, $T(\alpha_n)\in V$, 故可由 α_1, α_2, …, α_n 线性表示， 记

$$T(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n$$

$$T(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(\alpha_n)=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n$$

也就是

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的第 j 列为向量 $T(\alpha_j)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

矩阵 A 称为线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵.

2. 定理：设线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵是 A，向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，则 $T(\xi)$ 在这组基下的坐标是 Ax.

第五节 欧几里得空间

定义：

1. 欧几里得空间：设 V 是实数域 R 上的一个线性空间，在 V 上定义一个二元实函数 $[\alpha, \beta]$，满足：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$，$k \in R$，有

(1) 对称性：$[\alpha, \beta]=[\beta, \alpha]$

(2) 线性性：$[\alpha+\beta, \gamma]=[\alpha, \gamma]+[\beta, \gamma]$

$$[k\alpha, \beta]=k[\alpha, \beta]$$

(3) 正定性：$[\alpha, \alpha]\ge 0$，且仅当 $\alpha=0$ 时，$[\alpha, \alpha]=0$.

则称二元实函数 $[\alpha, \beta]$ 是 V 上的内积，此时的线性空间 V 称为 Euclid(欧几里得)空间.

2. 长度：设 V 是 Euclid 空间，$\alpha \in V$，非负实数 $[\alpha, \alpha]^{1/2}$ 称为向量 α 的长度(或范数，或模)，记为 $|\alpha|$(或 $\|\alpha\|$).

长度的性质：

(1) 非负性：$|\alpha|\ge 0$，且仅当 $\alpha=0$ 时，$|\alpha|=0$；

(2) 齐次性：$|k\alpha|=|k||\alpha|$；

(3) 三角不等式：$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

3. 夹角：在 Euclid 空间中， 两个非零向量α，β的夹角记为⟨α，β⟩， 规定为:

$$\langle \alpha,\beta \rangle = \arccos\frac{[\alpha,\beta]}{|\alpha||\beta|}, \quad 0 \le \langle \alpha,\beta \rangle \le \pi$$

可见， ⟨α，β⟩=π/2 当且仅当[α，β]=0.

4. 如果[α，β]=0， 则称α与β正交.

5. 在 Euclid 空间中， 一组两两正交的非零向量称为正交向量组， 由单位向量构成的正交向量组称为规范正交向量组.

6. 正交向量组必线性无关 .

7. 在 Euclid 空间中，如果向量组α_1，α_2, …，α_m线性无关， 则有规范正交向量组ε_1，ε_2, …，ε_m与之等价 .

8. 正交基：在 n 维 Euclid 空间 V 中， 含有 n 个向量的正交向量组称为 V 的正交基. 由单位向量构成的正交基称为规范正交基.

典型例题

1、设三维线性空间V上的线性变换$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1）求$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1$下的矩阵；

2）求$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, k\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵，其中$k \in P$且$k \neq 0$；

3）求$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵.

『解题提示』可以利用定义直接写出线性变换的矩阵，也可以借助同一个线性变换在两组不同基下的矩阵是相似的进行求解.

解 1）由于

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + a_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 .$$

故$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

2）由于

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{k}a_{21}k\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3 ,$$

$$\mathcal{A}k\boldsymbol{\varepsilon}_2 = ka_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + ka_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + ka_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = ka_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{22}k\boldsymbol{\varepsilon}_2 + ka_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3 ,$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3 = a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{k}a_{23}k\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3 .$$

故$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, k\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \frac{1}{k}a_{21} & a_{22} & \frac{1}{k}a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3）由于从$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故$\mathcal{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{11} + a_{22} - a_{12} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} \\ a_{31} + a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

.

『方法技巧』根据线性变换的矩阵的定义，直接给出了1）和2）所求的矩阵；3）借助了过渡矩阵，利用相似矩阵得到了所求矩阵．事实上，这三个题目都可以分别用两种方法求解．

2、求复数域上线性变换空间V的线性变换$\mathcal{A}$的特征值与特征向量．已知$\mathcal{A}$在一组基下的矩阵为：

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$； 4） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$； 5） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

解 1）设$\mathcal{A}$在给定基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$．由于$\mathcal{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-4\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-14=(\lambda-7)(\lambda+2),$$

故$\mathcal{A}$的特征值为$\lambda_1=7$，$\lambda_2=-2$.

当$\lambda_1=7$时，方程组$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即为

$$\begin{cases}4x_1-4x_2=0,\\-5x_1+5x_2=0.\end{cases}$$

解得它的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$．从而$\mathcal{A}$的属于特征值$\lambda_1=7$的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=k\boldsymbol{\varepsilon}_1+k\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

其中k为任意非零常数.

当$\lambda_2=-2$时，方程组$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即为

$$\begin{cases}-5x_1-4x_2=0,\\-5x_1-4x_2=0.\end{cases}$$

解得它的基础解系为$\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$，从而$\mathcal{A}$的属于特征值$\lambda_2=-2$的全部特征响向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=4l\boldsymbol{\varepsilon}_1-5l\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

其中l为任意非零常数.

4）设$\mathcal{A}$在给定基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，由于$\mathcal{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&3\\1&\lambda&-1\\-1&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1-\sqrt{3})(\lambda-1+\sqrt{3}),$$

故$\mathcal{A}$的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1+\sqrt{3}$，$\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

当$\lambda_1=2$时，方程组$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即为

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

求得其基础解系为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，故$\mathcal{A}$的属于特征值 2 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = -2k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + k_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$$

其中k_1为任意非零常数.

当$\lambda_2 = 1+\sqrt{3}$时，方程组$(\lambda_2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 0$，即为

$$\begin{cases} (-4+\sqrt{3})x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\sqrt{3})x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + (2+\sqrt{3})x_3 = 0. \end{cases}$$

求得其基础解系为$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$，故$\mathcal{A}$的属于特征值$1+\sqrt{3}$的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2 = 3k_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 - k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + (2-\sqrt{3})k_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

其中k_2为任意非零常数.

当$\lambda_3 = 1-\sqrt{3}$时，方程组$(\lambda_3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 0$，即为

$$\begin{cases} (-4-\sqrt{3})x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (1-\sqrt{3})x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + (2-\sqrt{3})x_3 = 0. \end{cases}$$

求得其基础解系为$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$，故$\mathcal{A}$的属于特征值$1-\sqrt{3}$的全部特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = 3k_3\boldsymbol{\varepsilon}_1 - k_3\boldsymbol{\varepsilon}_2 + (2+\sqrt{3})k_3\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

其中k_3为任意非零常数.

5）设$\mathcal{A}$在给定基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，由于$\mathcal{A}$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

故$\mathcal{A}$的特征值为$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=-1$.

当$\lambda_1=1$时，方程组$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即为

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ -x_1+x_3=0.\end{cases}$$

求得其基础解系为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，故$\mathcal{A}$的属于特征值 1 的全部特征向量为

$$\xi_1=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+k_1\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

其中k_1,k_2为任意不全为零的常数.

当$\lambda_2=-1$时，方程组$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$，即为

$$\begin{cases}-x_1-x_3=0,\\ -2x_2=0,\\ -x_1-x_3=0.\end{cases}$$

求得其基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故$\mathcal{A}$的属于特征值$-1$的全部特征向量为

$$\xi_2=-l\boldsymbol{\varepsilon}_1+l\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

其中l为任意非零常数.

『方法技巧』求解一个线性变换的特征值即求其矩阵的特征多项式的根，再对每个根求得所对应的特征向量，但一定要注意表达成基向量的线性组合形式.

3、在 Euclid 空间 R^3 中，求一个单位向量ε，使其与两个向量$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ -1)^T$ 都正交.

解　先求与α_1，α_2都正交的向量β，记$\beta=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$，则

$[\alpha_1,\ \beta]=x_1+x_2+x_3=0$，$[\alpha_2,\ \beta]=x_2-x_3=0$

解之得一个解为，$\beta=(-2,\ 1,\ 1)^T$，将β单位化得：

$$\varepsilon=\frac{1}{|\beta|}\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^T=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T.$$ 向量ε就是与两个向量α_1，α_2都正交的单位向量.

4、线性空间 R[x]$_3$中，定义内积

$$[f(x),g(x)]=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

试求 R[x]$_3$的一组规范正交基.

解　　取 R[x]$_3$的一组基，　$\alpha_1=1$，　$\alpha_2=x$，$\alpha_3=x^2$，将其正交化得：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=x-\frac{\int_{-1}^{1}x\,dx}{\int_{-1}^{1}1\,dx}\times 1=x$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2dx}{\int_{-1}^{1}1\,dx}\times 1-\frac{\int_{-1}^{1}x^3dx}{\int_{-1}^{1}x^2dx}x=x^2-1/3$$

再将β_1，β_2，β_3单位化，　取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}1dx}}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2dx}}x=\frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx}}(x^2-\frac{1}{3})=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$$

ε_1，ε_2,ε_3就是 R[x]$_3$的一组规范正交基.

易错题

1、设 A 为正交矩阵，且 $A^T=A^*$,其中 A^*是 A 的伴随矩阵，则 A 的行列式等于（）

A. -1

B. 0

C. 1

D. ±1

解析：A 为正交矩阵，则 $AA^T=E$，又 $A^T=-A^*$,则 $AA^*=-E$;由伴随矩阵的性质可知：$AA^*=|A|E$,即$|A|E=-E \Rightarrow |A|=-1$.

2、与向量α_1（1，-3,3，4）^{T}，α_2=（1，-2,4,6）^{T}，α_3=（-1,0，-6，-10）^{T}都正交的一个单位向量是α=（ ， ， ， ）^{T}

解析：先求与α_1, α_2, α_3都正交的向量，设为β=（X_1, X_2, X_3, X_4），则满足

$$\begin{aligned} 1X_1 \quad -3X_2 \quad +3X_3 \quad +4X_4 \quad &= \quad 0 \\ 1X_1 \quad -2X_2 \quad +4X_3 \quad +6X_4 \quad &= \quad 0 \\ -1X_1 \quad +6X_2 \quad -6X_3 \quad -10X_4 \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

，解之的一个解为：β=（-6，-1,1,0）^{T}，再将β单位化得：$\alpha=\dfrac{1}{|\beta|}\beta=\dfrac{1}{\sqrt{38}}$（-6，-1,1,0）^{T}.

3、求线性空间 R^{2x2} 中向量 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$在基 $B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$下的坐标.

解析：易知向量 A 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的坐标为 x=$(1,\ 2,\ 3,\ ,4)^T$，由基 E_{11}，E_{12}, E_{21}, E_{22} 基 B_1,B_2,B_3,B_4 的过渡矩阵为 $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，所以向量 A 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 下的坐标为 $y=C^{-1}x=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{pmatrix}$也就是 $A=4B_4-B_1-B_2-B_3$.

4、在线性空间 R^{2x2} 中，定义线性变换 T（X）=X^T,　　　求线性变换 T 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵.

解析：由于

$$T(E_{11})=\left(E_{11}\quad,E_{12}\quad,E_{21}\quad,E_{22}\right)(1,\ 0,\ 0,\ 0)^T,$$

$$T(E_{12})=\left(E_{11}\quad,E_{12}\quad,E_{21}\quad,E_{22}\right)(0,\ 0,\ 1,\ 0)^T,$$

$$T(E_{21})=\left(E_{11}\quad,E_{12}\quad,E_{21}\quad,E_{22}\right)(0,\ 1,\ 0,\ 0)^T,$$

$T(E_{22})=\left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right)(0, 0, 0, 1)^T$,

所以线性变换 T 在基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

5、设线性空间 V_2 中线性变换 T 在基 α_1，α_2 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\end{pmatrix}$，求线性变换 T 在基 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=2\alpha_1+5\alpha_2$ 下的矩阵.

解析：由已知可得 $\left(\beta_1, \beta_2\right)=\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix}1&2\\0&5\end{pmatrix}$,

即由基 α_1，α_2 到基 β_1，β_2 的过渡矩阵为 $C=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$,

所以线性变换 T 在基 β_1，β_2 下的矩阵为：

$$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\0&1\end{pmatrix}.$$

6、在线性空间 R^3 中，T 表示将向量投影到 xOy 面的线性变换，求线性变换 T 在基 $e_1=(1, 0, 0)^T$，$e_2=(0, 1, 0)^T$，$e_3=(0, 0, 1)^T$ 下的矩阵.

解析：由已知：

对任意 $\alpha=(x, y, z)^T \in R^3$，有 $T(\alpha)=(x, y, 0)^T$.

由于 $T(e_1)=e_1=\left(e_1\ \ e_2\ \ e_3\right)(1, 0, 0)^T$，$T(e_2)=e_2=\left(e_1\ \ e_2\ \ e_3\right)(0, 1, 0)^T$,

$T(e_3)=0=\left(e_1\ \ e_2\ \ e_3\right)(0, 0, 0)^T$,

所以线性变换 T 在基 e_1，e_2，e_3 下的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7、$B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$R^2$ 的线性变换成为 $A(\alpha)=B\alpha$，求在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

解析：因为：$A(\alpha_1)=B\alpha_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=7\alpha_1+4\alpha_2$

A（α$_2$）=Bα$_2$=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix}$=-3α$_1$-2α$_2$

所以线性变换A在基α$_1$，α$_2$下的矩阵为

A=$\begin{pmatrix}7 & -3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

附：历年考试真题及详解

东 北 大 学 考 试 试 卷（A卷）

2014 — 2015 学年 第一学期

一.（5 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求 A^* 的逆矩阵的行列式 $|(A^*)^{-1}|$. 。其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

解　由已知可得：$|A|=-10$，　2 分

所以：$|A^*|=|A|^2=100$，　4 分

于是，$|(A^*)^{-1}|=\dfrac{1}{100}$，　.　5 分

二.（5 分）设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{13} & 2a_{12}-a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & 2a_{22}-a_{23} & a_{21}\\ a_{33} & 2a_{32}-a_{33} & a_{31}\end{pmatrix}$，求矩阵 P 使满足 $A=BP$ 。

解　由已知可得，$AE(1,3)E(2(2))E(1+2(-1))=B$　3 分

所以，　$P=E^{-1}(1+2(-1))E^{-1}(2(2))E^{-1}(1,3)=E(1+2(1))E(2(1/2))E(1,3)$　4 分

即，$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&1\\0&1/2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　　5 分

三.（5 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是矩阵 A 的列向量组，齐次线性方程组

$Ax=0$ 有基础解系 $\xi_1=(1,-2,3,0,4)^T$，$\xi_2=(-2,4,0,0,1)^T$，$\xi_3=(3,-6,2,3,3)^T$，求此向量组的一个极大无关组，并将其他向量用此极大无关组线性表示.

解　由已知可得 $R(A)=2$，所以极大无关组含有两个向量.　　2 分

而且有：$\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_5=0$，$-2\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_5=0$，

$$3\alpha_1-6\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+3\alpha_5=0$$

于是有：$\alpha_3=-3\alpha_1+6\alpha_2$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=2\alpha_1-4\alpha_2$　　4 分

所以，α_1,α_2 是向量组的一个极大无关组，上式就是所求表示式.　　5 分

四.（5 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&x&y\\-2&2&4\end{pmatrix}$，3 阶矩阵 B 的秩大于 1，且满足 $BA=O$，

1. 求矩阵 A 的所有特征值；　2. 求一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解　由 $BA=O$ 可知，矩阵 A 的秩等于 1，　　1 分

所以，$\lambda=0$ 是 A 的二重特征值，且 $x=-2,\ y=-4$　　2 分

于是，矩阵 A 的三个特征值为 $0,0,3$，　　3 分

当 $\lambda=0$ 时，两个特征向量可取为：$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,0,1)^T$，

当 $\lambda=3$ 时，特征向量可取为：$\alpha_3=(1,2,-2)^T$　　4 分

所以，矩阵 P 可取为：$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$　　5 分

五.（5 分）给出所有 3 阶反对称矩阵构成的线性空间：

$$V=\{\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}\mid a,b,c\in R\}$$ 的一组基和维数.

解　$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$是线性空间$V$的一组基；　　3 分

所以，V 的维数是 3.　　5 分

六.（5 分）有下面三种食材，每单位第一种食材含蛋白质 2 克，脂肪 6 克，碳水化合物 16 克；每单位第二种食材含蛋白质 3 克，脂肪 7 克，碳水化合物 10 克；每单位第三种食材含蛋白质 1 克，脂肪 5 克，碳水化合物 18 克；问能否用这三种食材制成含蛋白质 7 克，脂肪 23 克，碳水化合物 58 克的营养食品，如能制成，需要三种食材各多少单位？

解　设分别需要三种食材x_1，x_2，x_3单位，则有

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=7\\6x_1+7x_2+5x_3=23\\16x_1+10x_2+18x_3=58\end{cases}$$

2 分

由于

$$\begin{pmatrix}2&3&1&7\\6&7&5&23\\16&10&18&58\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&1&7\\0&-2&2&2\\0&-14&10&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&4&10\\0&1&-1&-1\\0&0&-4&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$　　3 分

所以，方程组有唯一解：$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=3$

4 分

由于$x_1<0$，说明不能用这三种食材制成含脂肪 7 克，蛋白质 23 克，碳水化合物 58 克的营养食品.

5 分

东 北 大 学 考 试 试 卷（A卷）

2013 — 2014 学年 第一学期

一．（5 分）已知 3 阶矩阵 A 满足 $|2A+5E|=0$，且 $R(A-2E)=1$，其中 E 为矩阵 A 的伴随矩为 3 阶单位矩阵，求矩阵 A 的行列式 $|A|$.

解　由 $|2A+5E|=0$ 知，A 的 1 个特征值为：$\lambda_1=-\dfrac{5}{2}$，　　2 分

由 $R(A-2E)=1$ 知 A 的 2 个特征值为：$\lambda_2=\lambda_3=2$，　　4 分

所以，A 的行列式 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-10$.　　5 分

二.（5 分）问 a,b 为何值时，向量 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ 与向量组

$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$ 等价，并将 α_1,α_2 用 β_1,β_2 线性表示。

解　由于 $(\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\a&0&1&1\\1&3&-1&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-2a&1-3a&1-2a\\0&1&-4&b-2\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 11 & 6-2b\\ 0 & 1 & -4 & b-2\\ 0 & 0 & 1-11a & 1+2ab-6a\end{pmatrix}$$ 1 分

所以，$a=\dfrac{1}{11},b=-\dfrac{5}{2}$ 时，α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价. 3 分

且有 $\alpha_1=11\beta_1-4\beta_2$，$\alpha_2=11\beta_1-\dfrac{9}{2}\beta_2$. 5 分

三.（5 分）设 3 阶矩阵 A 第一行元素与对应的代数余子式分别为 $a_{11}=1$，$a_{12}=3$，$a_{13}=-2,\ A_{11}=3,\ A_{12}=1,\ A_{13}=3$，求齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

解　由已知有：$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=0$， 1 分

又由于 $A_{11}\neq 0$，所以 $R(A)=2$ 2 分

于是，$Ax=0$ 的解空间是 1 维的. 3 分

又由于 $AA^*=|A|E=O$，所以，$(3,1,3)^T$ 是 $Ax=0$ 的解， 4 分

因此，$Ax=0$ 的通解为 $x=c\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},c\in R$. 5 分

四.（5 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可经过正交变换 $x=Qy$ 化成标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$，且 Q 的第三列元素为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，0，求正交矩阵 Q 和二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解　由已知有：A 的 3 个特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$， 1 分

且属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\xi_3=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^T$.

于是，属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量与 $\xi_3=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^T$ 正交，故可取为：

$\xi_1=(0,0,1)^T$，$\xi_2=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^T$ 2 分

所求正交矩阵为 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 3 分

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为： $A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 4 分

因此， $f(x_1,x_2,x_3)=x_3^2-2x_1x_2$ 5 分

五. (5 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 是向量空间 R^3 的两组基，且满足： $\alpha_1=\beta_1$， $\alpha_2=\beta_1+\beta_2$， $\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$，若向量 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,2,3)^T$，求向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

解　由于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_2+\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ 1 分

所以，由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 3 分

因此，向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$y=C^{-1}x=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$$ 5 分

六. (5 分) 现有电工、木工、油漆工各一人，按等价交换原则达成如下工作协议，电工到木工家工作 2 天，到油漆工家工作 4 天；木工到电工家工作 3 天，到油漆工家工作 2 天；油漆工到电工家工作 4 天，到木工家工作 3 天，他们各自的总收入和总支出恰好相等，求他们的日工资各是多少？（假设他们的日工资都是介于 70~90 之间的整数，单位：元）.

解　设电工、木工、油漆工的日工资分别为 x,y,z 元，则有

$$\begin{cases}6x=3y+4z\\ 5y=2x+3z\\ 7z=4x+2y\end{cases},\quad 即 \begin{cases}6x-3y-4z=0\\ 2x-5y+3z=0\\ 4x+2y-7z=0\end{cases}$$ 2 分

由于

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 12 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{29}{24} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 3 分

所以，方程组的通解为：$\begin{cases} x = 29k \\ y = 26k \quad k \in R. \\ z = 24k \end{cases}$ 4 分

由于 x, y, z 都是介于 70~90 之间的整数，所以有 $x = 87, y = 78, z = 72$ 元. 5 分

东 北 大 学 考 试 试 卷（A 卷）

2013 — 2014 学年 第二学期

一. （5 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^{-1} = BA^* + E$，求矩阵 B 的行列式 $|B|$.。其中，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^{-1} 是 A 的逆矩阵.

解　由已知可得：$|A| = -2$，于是有：$AB = -2B + A$，即 $(A + 2E)B = A$ 2 分

所以有 $|A + 2E||B| = |A| = -2$，而 $|A + 2E| = 30$，所以 $|B| = -1/15$. 5 分

二.（5 分）设 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}$，$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$，

$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，若矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 等价，且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，求 a, b 的值。

解　由于 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$,

由β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，得$R(A)=2$且$b=0$。 2 分

又由于$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\a&-1&-2\\2&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1-a&-2-2a\\0&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-4\\0&0&2+2a\end{pmatrix}$，

由$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$与$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$等价可得$a=-1$. 5 分

三.（5 分）设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$,

1. 求齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系；

2. 求满足$AB=C$的所有矩阵B.

解　1. 由于$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，所以$R(A)=2$,

于是，$\xi=(2,1,-1)^T$是$Ax=0$的一个基础解系. 2 分

2. 由于$(A\vdots C)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2\\2&-1&3&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-2&1\\0&1&1&-3&-1\end{pmatrix}$

所以有：$A\begin{pmatrix}-2&1\\-3&-1\\0&0\end{pmatrix}=C$

所以，满足$AB=C$的所有矩阵B为：

$$B=\begin{pmatrix}-2+2k_1&1+2k_2\\-3+k_1&-1+k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in R$$ 5 分

四.（5 分）设$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&\lambda&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$，问$\lambda,\mu$取何值时$A$与$\Lambda$相似，$\lambda,\mu$满足何条件时$A$与$\Lambda$合同。

解　由于矩阵Λ的三个特征值为$3,0,\mu$

若A与Λ相似（或A与Λ合同），则 0 一定是A的特征值，于是

$|A|=3(\lambda-4)=0$, 所以，$\lambda=4$. 1 分

$\lambda=4$时，矩阵A的三个特征值为$3,0,5$，

所以，当$\lambda=4,\mu=5$时，A与Λ相似. 3 分

当$\lambda=4,\mu>0$时，A与Λ合同. 5 分

五. (5 分) 求线性空间$R[x]_3$中由基$1+2x_1$，$1+3x$，x^2到基2，$1-x$，$1+2x-x^2$的过渡矩阵. .

解 由于$(1+2x,1+3x,x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

所以有：

$$(2,1-x,1+2x-x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}=(1+2x,1+3x,x^2)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=(1+2x,1+3x,x^2)\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}=(1+2x,1+3x,x^2)\begin{pmatrix}6&4&1\\-4&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

所以，由基$1+2x_1$，$1+3x$，x^2到基2，$1-x$，$1+2x-x^2$的过渡矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix}6&4&1\\-4&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

六. (5 分) 某动物园饲养的某种动物所能达到的最大年龄为 2 岁，动物从 1 岁起开始繁殖后代，且每岁动物最多只繁殖一只动物. 经过长期统计，一岁动物有$\dfrac{3}{4}$可以繁殖一只动物，二岁动物有$\dfrac{1}{2}$可以繁殖一只动物；0 岁动物有$\dfrac{3}{4}$可以存活至一岁，一岁动物有$\dfrac{1}{2}$可以存活至二岁. 假设动物园现有 0 岁动物 8 只、一岁动物 12 只，二岁动物 4 只，问一年后和一年前动物园这三个年龄组的动物各有多少只？

解 设k年后三个年龄组的动物只数分别为x_k,y_k,z_k，由已知有

$y_k=\dfrac{3}{4}x_{k-1}$，$z_k=\dfrac{1}{2}y_{k-1}$，$x_k=\dfrac{3}{4}y_{k-1}+\dfrac{1}{2}z_{k-1}$，$k\in Z$ 1 分

即 $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3/4&1/2\\3/4&0&0\\0&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{k-1}\\y_{k-1}\\z_{k-1}\end{pmatrix}$，且$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\\4\end{pmatrix}$ 2 分

所以，
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
3 分

$$\begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \\ z_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$
5 分

即，一年后动物园有 0 岁动物 11 只，1 岁动物 6 只，2 岁动物 6 只，一年前动物园有 0 岁动物 16 只，1 岁动物 8 只，2 岁动物 4 只.

信息科学与工程学院

COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING