高等数学(上)

考试学习资料集

信息科学与工程学院

COLLEGE OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING

高　等　数　学

（考试学习资料集）

主编：　许时

副主编：姜琦　姜思聪
王建章　苏登

参编：　姜源祥　李尚森　李晓郁
曹建阳　李家豪　佟玉冬

主审：　苏卓

策划：

东北大学信息科学与工程学院

序

寄语：

亲爱的大一同学们，在进入大学之前，相信你们也或多或少地听说过高数的名字。作为理工科最重要的基础课之一，高等数学有其固有的特点，高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。相对于高中数学，高等数学的难度加大而又缺少与高中内容的衔接过渡，这使得很多同学对高数的内容感到难以理解。此外，老师讲课的速度和方式相对高中教学也明显改变，这无疑增大了学好高数的难度。

于是，不少同学出现了上课听不懂或跟不上老师节奏的问题，在课后做练习的时候也长感疑惑，从而出现不理解的知识越来越多的恶性循环。

针对这种情况，我们做出了这本书，这本书是整本高数书内容的浓缩。对于书本上的一些重要定理和证明，本书予以收录并设置例题使同学们更好的理解。我们还整理了各章的重点难点与期末的考试真题，总结了高频考题，方便同学们预习与复习。

不过，想学好高数没有捷径可走，多做题多总结是最好的方法。课前预习好重难点，上课跟上老师的节奏，课后再进行巩固，我们希望这本书能在每个环节中都给予你帮助，使你在最后的考试中取得优异的成绩！

当然，编者们的能力毕竟有限，本书也存在诸多不足，同学们如在使用过程中发现问题或不足，恳请各位提出宝贵的建议与意见，以便我们改进。

最后，真诚地祝福你们每个人都能学好高数，在学习的过程中感受数学之美！

目录

第一章　极限与连续性

1.1 函数 -- 1

1.2 数列的极限 --- 4

1.3 函数的极限 --- 7

1.4 极限的运算法则 -- 8

1.5 极限存在法则 重要极限 --------------------------------- 9

1.6 无穷小与无穷大 -- 15

1.7 函数的连续性 -- 15

1.8 闭区间上连续函数的性质 -------------------------------- 17

第一章历年考题 -- 19

第二章 导数及微分

2.1 导数的概念 --- 21

2.2 函数与微分 --- 23

2.3 求导公式 --- 24

2.4 高阶导数 --- 29

第二章历年考题 -- 31

第三章 微分中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理 --- 32

3.2 泰勒公式 --- 41

3.3 洛必达法则 -- 48
3.4 函数的单调性与极值 --------------------------------- 54
3.5 曲线的凹凸性与拐点 --------------------------------- 58
3.6 函数图像的描绘 ------------------------------------- 61
3.7 曲率 --- 63
*3.8 牛顿迭代法 -- 65
第三章历年考题 --- 67

第四章 定积分

4.1 定积分的概念和性质------------------------------------ 70
4.2 微积分基本定理 ------------------------------------- 73
4.3 不定积分的概念和性质 ------------------------------- 75
4.4 换元法 --- 78
4.5 分部积分法 --- 82
*4.6 反常积分的审敛法 ---------------------------------- 86
*4.7 定积分的应用 -------------------------------------- 87
第四章历年考题 --- 89

第五章 无穷级数

5.1 常数项级数的概念和性质 ----------------------------- 91
5.2 正向级数的审敛法 ----------------------------------- 96
5.3 绝对收敛与条件收敛 --------------------------------- 101

5.4 幂级数 -- 105
5.5 函数展开成幂级数 --------------------------------- 114
5.6 傅里叶级数 --------------------------------------- 116
第五章历年考题 --------------------------------------- 122

第一章　极限与连续性

1.1 函数

1.1.1 函数表达方式

(1) 反函数表达式：在初等数学中，我们接触过反函数，比如 $y=e^x$ 的反函数是 $y=\ln x$, $y=\tan x$ 的反函数是 $y=\arctan x$. 我们将这种方式引入到高等数学中来. 设 $f(x)$ 是函数，用 $R(f)=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 表示函数的值域. 如果对于任意的 x_1 ,$x_2\in D, x_1\neq x_2$ 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 的对应关系是一对一的. 此时，对于任意的 $y\in R(f)$ 都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，使得 $y=f(x)$. 这样就确定了在 $R(f)$ 上定义的新函数，称其为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y), y\in R(f)$.

此时有

$$y=f(x)=f\left(f^{-1}(y)\right),$$

$$x=f^{-1}(y)=f^{-1}\left(f(x)\right).$$

例如，对于 $y=f(x)=\sin x$ ， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,其反函数为 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y$.

(2) 隐函数表达式：设 I 为一个数集， $f(x,y)$ 是两个变元的函数. 若方程 $f(x,y)=0$, 满足对于任意的 $x\in I$, $f(x,y)=0$ 有唯一的解 y,则 y 是 x 的一个函数，这个函数 $y=y(x)$ 称为由方程 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数.

例如，对于 $f(x,y)=x^2+y^2-1$, 令 $f(x,y)=0$, 且 $y\geq 0$, 则 $y=\sqrt{1-x^2}$ 称为由 $f(x,y)=0$ 决定的隐函数.

(3) 参数方程：设 x,y 都是参数 t 的函数，则 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 称为参数方程.

我们知道函数 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 描述的是平面上的一条曲线. 这样的曲线有一个特征是任意一条平行于 y 轴的直线 $x=x_0$ 与曲线至多有一个交点. 平面的任意一条曲线可由参数方程形式给出

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta].$$

当 $x=\varphi(t)$ 在局部是 1 对 1 时，$t=\varphi^{-1}(x)$ 是 x 的函数，此时 $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ 变为 x 的函数，因此参数方程在此种情况下可以确定 y 是 x 的一个函数.

例 1 如图 1.1 所示，极坐标曲线 $r=r(\theta)$ 可以表示为，

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

例如, $\begin{cases} x=\sin\theta, \\ y=\cos\theta, \end{cases}$ 即为极坐标曲线 $r=1$ 的参数方程.

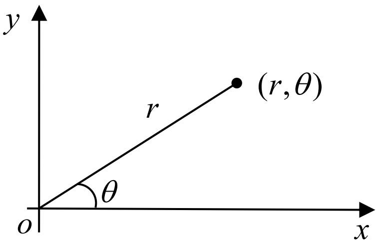


图 1.1

1.1.2 函数的基本特性

函数的基本特性主要包括有界性、奇偶性、单调性、周期性等.

（1）有界性

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I, 如果存在数 M, 对任意 $x\in I$, $f(x)\le M$ 成立，称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，M 即为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 如果存在数 m, 对任意 $x\in I$, $f(x)\ge m$ 成立，称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界，m 即为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界. 如果存在 $M>0$, 对任意 $x\in I$, $|f(x)|<M$ 成立，称函数 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果这样的数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界. 这就是说如果对于任何正数 M, 总存在 $x_M\in D$, 使得 $|f(x_M)|>M$, 那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

（2）奇偶性

定义 1.2 设数集 I 关于原点对称，即当 $x\in I$, $-x\in I$. 函数 $f(x)$ 在数集 I 上定义. 如果对于任意的 $x\in I$, $f(x)=f(-x)$ 成立，称 $f(x)$ 为偶函数, 若 $f(x)=-f(-x)$ 成立，称 $f(x)$ 为奇函数.

反映在函数的图形上，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称. 例如，函数 $f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ 是偶函数，$f(x)=\sin x$，$f(x)=x^3$ 是奇函数.

容易证明，奇函数±奇函数=奇函数；偶函数±偶函数=偶函数；奇函数×奇函数=偶函数. 此外还有这样一个结论：$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$ 是偶函数，

$h(x)=\dfrac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big)$是奇函数，且$f(x)=g(x)+h(x)$.这说明原点对称集合上定义的函数可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

（3）单调性

定义 1.3 设$f(x)$的定义域为I, 对于任意的$x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$，都有$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，称$f(x)$是$I$上的单调递增函数. 如果对于任意的$x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$,都有$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，则称$f(x)$为$I$上的单调递减函数.

例如, $f(x)=\tan x$, $f(x)=a^x\left(a>1\right)$是单调递增函数，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}\left(x>0\right)$是单调递减函数, $f(x)=x^2$不是单调函数，但当$x>0$时是单调递增函数.

（4）周期函数

定义 1.4 设函数$y=f(x)$在实直线上有定义, T是一正数. 若对任意的$x\in R$, 都有$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$, 则称$y=f(x)$是以$T$为周期的周期函数. 如果存在$T_1>0$是使$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$成立的最小正数，称$T_1$为$y=f(x)$的最小正周期.

例如， $y=\sin x$以2π为最小正周期， $y=\tan x$以π为最小正周期.

1.1.3 初等函数

下面介绍几个非常重要且以后要经常用到的非初等函数.

(1) 振荡函数$y=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0.\end{cases}$

(2) 狄利克莱函数$y=\begin{cases} 1, x\text{为有理数}, \\ 0, x\text{为无理数}.\end{cases}$

(3) 符号函数$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0.\end{cases}$

(4) 取整函数$\left[x\right]=n$, n为不超过x的最大整数.

1.2 数列的极限

1.2.1 数列

类似 $y=\sin x, a^x, \ln x$ 这样的函数通常被称为具有连续变量的函数，而数列属于具有离散变量的函数.

定义 1.5 若 $y=f(x)$ 在 N（自然数集合）上定义，则称 $y=f(n)=x_n$ 为数列.

例如, $x_n=\dfrac{1}{n}$, $x_n=(-1)^n$，$x_n=\sin\dfrac{1}{n}$, $x_n=q^n\,(q\in R)$ 均为数列.

和函数的表达式类似，数列有两种常见的表达方式：

（1）解析表达式：x_n 以 n 的代数式形式给出的表达式称为解析表达式. 例如, $x_n=\dfrac{1}{2n}$.

（2）递推公式：将 x_{n+1} 同 x_n 的关系用一种约定的形式给出，即 $x_{n+1}=f(x_n)$，其中 x_1 给定.

按这种方式可以定义一个数列. 例如, 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{1}{1+x_n}$ 是一个利用递推表达式确定的数列.

数列的基本特性有两种：有界性和单调性.

定义 1.6 对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在 $M>0$, 对于任意正整数 n，$|x_n|<M$, 称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列. 如果这样的 M 不存在，称数列 $\{x_n\}$ 为无界数列. 如果存在数 M, 对于任意正整数 n，$x_n<M$ 成立，称数列 $\{x_n\}$ 上方有界. 如果存在数 m, 对于任意正整数 n，$x_n>m$ 成立，称数列 $\{x_n\}$ 下方有界.

例如，数列 $x_n=\dfrac{n}{1+n}$，由于 $0<\dfrac{n}{1+n}<1$, 因此 $x_n=\dfrac{n}{1+n}$ 是有界数列.

例 1 证明数列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

上方无界.

证明 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 是前 n 个自然数的倒数和，这里

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$$

同理，有

$$\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{2}$$

这样随着n的增加，x_n会出现越来越多大于$\frac{1}{2}$的项，于是不存在$M>0, x_n<M$.因此它上方无界.

定义 1.7 设$\{x_n\}$是一个数列，如果对于任意的n, 都有$x_{n+1}>x_n$.则称$\{x_n\}$是一个单调递增的数列. 反之，如果对于任意的n, 都有$x_{n+1}<x_n$.则称$\{x_n\}$是一个单调递减的数列.

例如，数列$x_n=\dfrac{n}{1+n}$单调递减，数列$x_n=1+n^2$单调递增.

推论 1.1 设x_n是一个数列，则x_n单调的充要条件是

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}>0$$

对所有正整数n成立. 这时如果$x_2>x_1$, x_n单调递增；如果$x_2<x_1$, x_n单调递减.

证明 由$\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}>0$知$x_{n+1}-x_n$和$x_n-x_{n-1}$有相同的符号. 由数学归纳法可以证明$x_n$单调且$x_n-x_{n-1}$与$x_2-x_1$符号相同.

例 2 证明数列$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, $x_1=10$, 单调递减.

证明 由$x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$知，

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}, \end{aligned}$$

这样

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}>0.$$

因此，x_n是一个单调数列. 又因为$x_1=10$, $x_2=4$知$\{x_n\}$是一个单调递减数列.

定义 1.8 设$\{x_n\}$是一个数列，a为一个常数. 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N=N(\varepsilon)$, 当$n>N$时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$

则称数列$\{x_n\}$当n趋于无穷时以a为极限或称点列$\{x_n\}$收敛到a. 记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a\,(n\to\infty)$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在，我们称数列$\{x_n\}$是发散的. 这里$\varepsilon>0$表示$x_n$与$a$的接近程度，$N=N(\varepsilon)$表示$n$趋于无穷的程度.

例 3 证明 $\lim\limits_{n}\frac{1}{n}=0$.　**例 4** 证明 $\lim\limits_{n}\frac{n}{n+1}=1$.　**例 5** 证明 $\lim\limits_{n}\frac{1}{a^{n}}=0\ (a>1)$.

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

证明　设 $n^{\frac{1}{n}}-1=u_n$，$n^{\frac{1}{n}}=1+u_n$，则 $u_n>0$，且

$$n=\left(1+u_n\right)^n=1+nu_n+\frac{n(n-1)}{2}u_n^2+\cdots+u_n^n>\frac{n(n-1)}{2}u_n^2\quad(n>1),$$

因此，当 $n>1$ 时，便有 $u_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$，

于是，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{1,\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}$，当 $n>N=\max\left\{1,\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}$ 时，有 $\left|n^{\frac{1}{n}}-1\right|=u_n<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，

这样 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ 成立.

例 7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$.

1.2.2 数列极限的基本性质

（1）极限的唯一性

定理 1.1　收敛数列的极限是唯一的.

(2）数列极限的有界性

定理 1.2　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\{x_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，对任意的 n，有 $|x_n|\le M$.

(3）点列收敛和子点列收敛的关系

定理 1.3　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3}\cdots$ 为 $\{x_n\}$ 的子列，则 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

(4）收敛数列的保号性

定理 1.4　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，则存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$，有 $x_n>0$.

推论 1.2　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>b$，存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，$x_n>b$.

推论 1.3　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<b$，则存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，$x_n<b$.

(5）收敛数列的保序性

定理 1.5　设 $x_n\le y_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 存在，则有 $a\le b$.

这里要注意的是若 $x_n < y_n$, 未必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

（6）极限的夹逼定理

定理 1.6 设 $x_n \le z_n \le y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

例 9 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

证明 由不等式

$$1=\frac{1+1+\cdots+1}{n}<\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}<\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\sqrt[n]{n},$$

设 $x_n = 1, y_n = \sqrt[n]{n}$，有 $x_n < \dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} < y_n$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

例 11 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}$,

解 容易得出 $4<\left(2^n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{n}}\cdot 4$，再由 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，知

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}=4.$$

1.3 函数的极限

1.3.1 函数极限的性质

（1）极限唯一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一.

（2）局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 $\delta_0>0,\ M>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，$|f(x)|<M$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x_0-0),\ f(x_0+0)$ 存在且相等，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

例 4 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 $(x_0=0)$.

证明 容易计算 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=-1$,

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=1.$$

显然，左右极限存在但不相等，因此$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

例 5 设$f(x)=\begin{cases} x+a, & x<0, \\ 2x+1, & x>0, \end{cases}$求$a$为何值时$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在.

解 首先 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$. 当$a=1$时, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在.

（4）极限的保号性

（5）极限的保序性

1.4 极限的运算法则

1.4.1 函数极限的运算法则

注意 对于分式函数

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

其中$P(x),Q(x)$都是多项式，有下面的结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m; \\ 0, & n>m; \\ \infty, & n<m. \end{cases}$$

例 5 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^3+1}{3x^5+5x^2-6}$.

解 由上面的结论知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^3+1}{3x^5+5x^2-6}=\dfrac{4}{3}$.

下面介绍一个计算极限非常方便的公式：

定理 1.9 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$存在, 且$g(t)\neq x_0$, 这样$\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))$存在并且有

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t))=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

例 6 计算$\lim\limits_{x\to 0}\cos\sin x$.

解 已知$\lim\limits_{x\to o}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. 因此，有$\lim\limits_{x\to 0}\cos\sin x=1$.

1.5　极限存在法则 重要极限

本节介绍判定极限存在的单调有界准则和两个十分重要的极限.

1.5.1 单调有界准则

定理 1.10 如果$\{x_n\}$为单调有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

注意 如果$\{x_n\}$为单调递增且上方有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在, 极限即为上界；如果$\{x_n\}$为单调递减且下方有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，极限即为下界.

例 1 设$a>0,x_0>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证明 显然$x_n>0(n=0,1,2,\cdots)$. 又

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}=\sqrt{a}(n=0,1,2,\cdots),$$

因此有$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\leq\dfrac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{a}\right)\leq\dfrac{1}{2}\left(x_n+x_n\right)=x_n(n=0,1,2,\cdots)$,

即点列$\{x_n\}$单调递减、下方有界. 由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$存在，且$c\geq\sqrt{a}>0$. 由等式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\text{知}c=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right),$$

解此方程得$c=\sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

例 2 设$x_1=1,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$, 求$\lim\limits_{n}x_n$.

解 由于$f(x)=1+\dfrac{x}{1+x}=2-\dfrac{1}{1+x}$递增，$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})$,

这样 $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}>0$ ，因此数列单调, 再由$x_1=1,x_2=1+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

知数列单调递增，显然数列有界，因此，$\lim\limits_{n}x_n$存在. 设$\lim\limits_{n}x_n=c$，在$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$

中令n　　，有$c=1+\dfrac{c}{1+c},c>1$，解方程，得$c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.5.2 夹逼定理

设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处有极限且相等，且存在 $c>0,$ 当 $0<\left|x-x_0\right|<c$ 时，有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则函数 $h(x)$ 在 x_0 处有极限，且

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x).$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解 由于 $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$，当 $x>0$ 时，有

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1,$ 故由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

另一方面，当 $x<0$ 时，有 $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$，可得 $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

综上 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

1.5.3 两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,(x>0).$$

我们再次来讨论前面讲过的有趣的问题:

这个问题相当于

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>100$$

由上面讨论的结论知只要

$$\ln n>100, n>e^{100}$$

e^{100}是一个难以想象的无比巨大的数.

定理 1.11 设α，β计是自变量相同的变量，$\lim\alpha=1,\lim\beta=\infty$, 则

$$\lim\alpha^{\beta}=\lim e^{\beta(\alpha-1)}.$$

注意 上面两个极限同时存在或发散.

1.5.4 极限计算例题

例 9 计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

例 10 设$a_k>0(k=1,2,\cdots,m)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\limits_{1\le k\le m}\{a_k\}$

证明 由于$a_k>0(k=1,2,\cdots,m)$，所以

$$m^{\frac{1}{n}}\max_{1\le k\le m}\{a_k\}=\sqrt[n]{m\left(\max_{1\le k\le m}\{a_k\}\right)^n}\ge\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\ge\max_{1\le k\le m}\{a_k\}$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=1$可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le k\le m}\{a_k\}$$

例 11 设n是自然数，问$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$存在吗?

解 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$存在，则$\sin(n+2)-\sin n\to 0$，由

$$\sin(n+2)-\sin n=2\sin 1\cos(n+1)$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n = 2\sin n\cos n = 0$ ，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = \lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$. 这与 $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ 矛盾. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

例 12 设 $x_1 = 10$ ，$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$. 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限.

证明 $x_1 = 10 > 3 \Rightarrow x_2 = \sqrt{6+10} > \sqrt{6+3} = 3$

由归纳法易得，对于所有的自然数 $n, x_n > 3$ 成立.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - x_n = \frac{6 + x_n - x_n^2}{\sqrt{6+x_n} + x_n} = \frac{(3 - x_n)(2 + x_n)}{\sqrt{6+x_n} + x_n} < 0,$$

所以 x_n 为单调递减且下方有界的数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ 存在，且 $c \geq 3$. 于是，由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 可得 $c = \sqrt{6+c}$, 解得 $c = 3, c = -2$ 舍去，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

例 13 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$.

解 由于

$$\left|\ \sin(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi + n\pi)\right| = \left|(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi)\right| = \left|\ (-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\ \right| < \frac{\pi}{2n},$$

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi) = 0$.

例 14 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})$.

解 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{-1}}{\tan n^{-1}} = 1$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e, \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ 知

原式=

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{1}{n}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\tan\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{1/\tan\frac{1}{n}}}{\left(1-\tan\frac{1}{n}\right)^{1/\tan\frac{1}{n}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^2.$$

例 15 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[1-\cos x]{1 + x^2\mathrm{e}^x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[1-\cos x]{1+x^2\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+x^2\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x^2\mathrm{e}^x}}\right)^{\frac{x^2\mathrm{e}^x}{1-\cos x}}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\quad 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\lim\limits_{x\quad 0} e^x = 2$ ，和重要极限知

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+x^2\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x^2\mathrm{e}^x}}\right]=\mathrm{e}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[1-\cos x]{1+x^2\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+x^2\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x^2\mathrm{e}^x}}\right)^{\frac{x^2\mathrm{e}^x}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^2 .$$

例 16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)=\frac{4}{3}.$$

例 17 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\tan x\sin x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x\sin^2 x\frac{1}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

例 18 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 由于 $\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\left[\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$,

故 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{2}{x}}=\mathrm{e}.$

例 19 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+1-e^{x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}}{x^2}=-\dfrac{3}{2}.$

例 20 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(\tan x-\sin x)}{x^2\ln^2(1+x)\left(e^x-1\right)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(\tan x-\sin x)}{x^2\ln^2(1+x)\left(e^x-1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln^2(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{(e^x-1)}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

例 21 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 由于 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1$ 和

$$\lim_{n}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-1}}}=1$$

知

原式=1

例 22 计算 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{\sin x}}$， $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ 存在，所以

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{\sin x}}-\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-e^{-x}}{\sin x}}-\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{\sin x}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 0+}\frac{1-e^{-x}}{x}\frac{x}{\sin x}}-\sqrt{\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin x}}=1-0=1$$

1.6 无穷小与无穷大

1.6.1 无穷小的比较

设α，β是自变量的同一变化过程中的两个无穷小.

（1）如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；也说$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小.

（2）如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=c$（$c$是不为 0 的常数），则称$\beta$是与$\alpha$同阶的无穷小.

（3）如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\beta\sim\alpha$或$\alpha\sim\beta$.

（4）如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c$（$k>0$，$c$是不为 0 的常数），则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小.

例如, $x\to 0$时，$3x^2=o(x)$，$\sin x\sim x$，$1-\cos x$与x^2是同阶无穷小，同时$1-\cos x$也是关于x的二阶无穷小.

注意 并不是所有的无穷小都能进行比较，$x\to\infty$时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$都是无穷小. 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sin x}$和$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$都不存在，因此，$f(x)=\dfrac{1}{x}$与$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$不能进行阶的比较.

等价无穷小在极限计算等问题中经常用到，将一些常见的等价无穷小归纳如下：

当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，　$a^x-1\sim x\ln a$（$a>0$ $a\neq 1$），$(1+x)^a-1\sim ax$（$a>0$）.

1.7 函数的连续性

1.7.1 函数的间断点

定义 1.9 设$f(x)$在区间I上有定义，$x_0\in I$，若$f(x)$在$x=x_0$处不连续，则称$x=x_0$为$f(x)$的间断点.

间断点分为以下几类：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，此时称$x=x_0$为$f(x)$的可去间断点；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$，此时称$x=x_0$为$f(x)$的第一类跳跃型间断点；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$， $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$至少有一个不存在，此时称$x=x_0$为$f(x)$的第二类间断点.

例 5 求下列函数的间断点并判别类型.

（1） $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

解 $x=0$为函数$f(x)$的间断点, 又因为

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1，\quad \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1，$$

所以$x=0$为函数$f(x)$第一类跳跃间断点.

（2） $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$

解 当$x=\pm 1$时，$f(x)=0$

当$|x|>1$时，$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=-x\\ \lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x\end{cases}$

当$|x|<1$时，$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x\\ \lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=-x\end{cases}$

即$\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x)\neq f(\pm 1)$，所以$x=\pm 1$为函数$f(x)$第一类间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, & x\le 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$

解 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0+}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=-\sin 1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=0$ 所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

当 $x=1$ 时 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在，所以 $x=1$ 为第二类间断点.

当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}-\dfrac{4x+\pi}{2\sin x}=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点.

当 $x=-(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\lim\limits_{x\to -(kx+\frac{\pi}{2})}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\infty$，所以 $x=-(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 为第二类无穷间断点.

1.8 闭区间上连续函数的性质

1.8.1 最大值和最小值定理

定理 1.20 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即存在 $M>0$，对于任意 $x\in[a,b],|f(x)|<M$.

定理 1.21 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则存在 $x_0,x_1\in[a,b]$，对于任意的 $x\in[a,b]$，有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_0)$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最大值和最小值.

简言之若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且可以达到最大值和最小值. 存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使得

$$f(x_1)=\max_{x\in[a,b]}f(x),f(x_2)=\min_{x\in[a,b]}f(x)$$

定理 1.22 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $c\in(a,b)$,满足 $f(c)=0$.

该定理可以推广为以下形式.

定理 1.23 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，则对于任意的 $f(x_2)<c<f(x_1)$，存在介于 x_1,x_2 之间的 x_0，满足 $f(x_0)=c$.

此推广的定理在一些较为复杂的证明题中可以起到很重要的作用. 在后面的习题中我们会多次用到.

例 1 证明方程 $x^7-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明 函数 $f(x)=x^7-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0)=1>0, f(1)=-2<0,$$

根据介值定理，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^7-4\xi^2+1=0 \qquad (0<\xi<1).$$

这说明方程 $x^7-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ.

例 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$，满足 $f(\xi)=1-\xi$.

证明 构造 $g(x)=f(x)-(1-x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)=-1, g(1)=1$，由连续函数的介值定理知存在 $\xi\in(0,1)$，满足 $(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$，满足 $f(\xi)=\xi$.

证明 构造 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0, g(1)=-1<0$$

由连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，满足 $(\xi)=0$，这样 $f(\xi)=\xi$.

第一章历年考题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\sin x}$.

答案： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}\cdots\cdots(3分)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots(7分)$$

2. **设** $f(x)=\begin{cases}x^2, |x|>1\\ -x, |x|\le 1\end{cases}$ 研究 $f(x)$ 的连续性与可导性.

答案： $f(-1)=1\quad, f(-1-0)=1\quad, f(-1+0)=1\quad$,故$f(x)$在$x=-1$处连续,$\cdots\cdots(2分)$

$f(-1)=-1$, $f(1-0)=-1$, $f(1+0)=1$, 故$f(x)$ 在$x=1$处间断,
$x=1$为第一类(跳跃)间断点 $\cdots\cdots(5分)$

$f(x)$的连续区间为$(-\infty, 1)\bigcup(1, +\infty)\quad\cdots\cdots(6分)$

$\lambda=1$, $f(x)$不连续,故不可导. $f_-'(-1)=-2, f_+'(-1)=-1$.
$f(x)$在$x=-1$不可导.
$f(x)$可导区间$(-\infty, -1)\bigcup(-1, 1)\bigcup(1, +\infty)$ $\cdots\cdots(8分)$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^2(e^{x^2}-1)}$

答案： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x^2}\ \lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\le 0\end{cases}$，**求**$f(x)$的间断点，并说明间断点的所属类型.

答案： $x=1$ 是间断点，$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,

故 $x=1$ 是第二类间断点

$X=0$ 是间断点，$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\ln(1+x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\mathrm{e}^{-1}$.

故 $x=0$ 是跳跃间断点(或第一类间断点)

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right]$$

答案：解法一：原式 =

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \quad 令 \quad \frac{1}{x}=t$$

原式$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t\ \ )}=\frac{1}{2}$$

解法二：原式$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{\frac{-2}{x^3}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)-x^2}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$

解法三：令 $\frac{1}{x}=t$

则原式$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t-\left[t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]}{t^2}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}-o(t^2)}{t^2}=\frac{1}{2}$$

第二章　导数及微分

2.1 导数的概念

2.1.1 引例

1.直线运动的速度

设某质点沿直线运动，在直线上规定了原点，正方向和单位长度，使直线成为数轴。首先取从 t_0 到 t 这样一个时间间隔，在这段时间内，质点从位置 $s_0=f(t_0)$ 移动到 $s=f(t)$.

平均速度　$\dfrac{s-s_0}{t-t_0}=\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

（瞬时）速度　$v=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

2.切线问题

设有曲线 C 及 C 上的一点 M，在点 M 外另取 C 上的一点 N，做割线 MN，其中 α 是割线 MN 的倾角，当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，$x\to x_0$. 如果当 $x\to x_0$ 时，上式的极限存在，设为 k,即　$k=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

极限 k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率。

2.1.2 导数的定义

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该领域内）时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$.

2.1.3 基本初等函数的导数

$y=c(c\in R)$ $y'=0$

$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ $y'=a^x\ln a$

$y=\log_a x,a>0,a\neq 1(x>0)$ $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$y=\sin x$ $y'=\cos x$

$y=\cos x$ $y'=-\sin x$

$y=x^n$ $y'=nx^{n-1}$

例题 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$.

当 $h<0$ 时，$\frac{|h|}{h}=-1$，故 $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$；

当 $h>0$ 时，$\frac{|h|}{h}=1$，故 $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1$.

所以，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在，即函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

2.1.4 导数的几何意义

若 $f(x)$ 在 x=x0 处可导，其导数 $f'(x)$ 是曲线 f(x)在点(x0,f(x0))处切线的斜率，于是切线方程为

Y-f(x0)=f’(x0)(x-x0),法线方程为 y-f(x0)=-(x-x0)/f’(x0)　f’(x0)≠0,当导数为 0 时，法线方程是 x=x0

特殊情况：当 f’(x0)为无穷大时，若 f(x0)在 x=x0 处连续，则 y=f(x)在点(x0,f(x0))处切线方程为 x=x0,若不连续，则切线不存在。

例 求 y=x^2 在点（2,4）处的切线方程.

解 由于 y'=2x=4,因此在点（2,4）处的切线方程是 y-4=4(x-2).

2.1.5 左右导数的定义

设 f（x）在区间 x0 的邻域内上有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\mathrm{f}(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)\big/\Delta x=\lim_{x\to \mathrm{x}_\circ^-}\mathrm{f}(x)-f(x_\circ)\big/x-x_\circ=A$$

存在，则称 f(x)在 x=x0 有左导数，则 A 称为 f(x)在 x=x0 处的左导数记为 $\mathbf{f'}_-(x_\circ)=A$. 同理，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\mathrm{f}(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)\big/\Delta x=\lim_{x\to \mathrm{x}_\circ^+}\mathrm{f}(x)-f(x_\circ)\big/x-x_\circ=A$$

存在，则称 A 为 f(x)在 x=x0 处的右导数，记为 $\mathbf{f'}_+(x_\circ)=A$.

设 f(x)在区间 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内可导，如果 f'(x)在 x=a 的左导和 x=b 的右导存在，则称 f(x)在区间 $[a,b]$ 上可导。

定理 设 f(x)在 x0 邻域内有定义，则 f(x)在 x=x0 处可导的充要条件为 $f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$ 存在且相等，且 f'(x0)= $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

例 证明 f(x)= $|x|$ 在 x=0 处不可导.

证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \mathrm{f}(x)-f(0)/\mathrm{x} = \lim\limits_{x\to \mathrm{x}_0^+} x/x = 1$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \mathrm{f}(x)-f(0)/\mathrm{x} = \lim\limits_{x\to \mathrm{x}_0^-} -x/x = -1$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，因此 f(x)= $|x|$ 在 x=0 处不可导

2.1.6 可导和连续的关系

定理 若 f(x)在 x=x0 处可导，则 f(x)在 x=x0 处连续。

注意 如果 f(x)在 x=x0 处连续，则 f(x)在 x=x0 处不一定可导。

例 f(x)= $|x|$ 在 x=0 处连续但是不可导。

2.2 函数与微分

2.2.1 微分的定义

定义 如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$$

的形式, 其中 A 为与 Δx 无关的常数, 则称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是可微的, 把 $A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分. 记为 dy, 即 $dy=A\Delta x$

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微的充分必要条件为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是可导，且 $A=f(x_0)$.

证明 **充分性** $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$$

$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-A=\alpha$ 则 α 是无穷小量，所以有

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot(\Delta x)(\Delta x\to 0)$$

又由于 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$，故充分性成立。

必要性 略

由上知 $dy = f'(x_0)dx$，故当 $y = x$ 时，$dy = dx = \Delta x$，把Δx记作 dx，则

$$dy = f'(x)dx \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

微分的几何意义：

由于 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$，

则当 $\Delta x \to 0$， $y - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$，可得： $\Delta y \approx dy$

2.2.2 微分在近似中的计算

由微分的几何意义知： $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

这就将 $f(x_0 + \Delta x)$ 近似看成直线 $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$，这样便可近似计算 $f(x)$.

例 1 利用微分求$\sqrt{2}$的近似值。

解 $\sqrt{2} = \sqrt{1.96} + \dfrac{1}{2\sqrt{1.96}} \times 0.04 = 1.414$

2.3 求导公式

2.3.1 加减乘积和商的导数

$$h(x) = af(x) + bg(x) \to h'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

$$h(x) = f(x)g(x) \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

2.3.2 复合函数的导数

若 u =g(x)在 x=处可导，函数 y=f(u)在处可导，则复合函数 y=f(g(x))在 x=处可导，导数为$y' = f'(u)g'(x)$

例 求下列函数的导数

（1）$y=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$

（2）$y=\frac{x}{1-x^2}$

（3）$y=\tan x$

（4）$y=(2x^2-3)\sqrt{1+x^2}$

解

（1）$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

(2)$y'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

(3)$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

(4)$y'=\frac{6x^3+x}{\sqrt{1+x^3}}$

2.3.3.微分运算

和求导运算类似，微分运算也有以下性质

（1）$d(af(x)+bg(x))=adf(x)+bdg(x)$

（2）$d(f(x)g(x))=g(x)df(x)+f(x)dg(x)$

（3）$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

此外，全微分还有形式不变性:

如果函数 u=g(x), y=f(u)可导，则复合函数的导数为$\frac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x)$, 又因为

$du=g'(x)dx$可得$dy=f'(u)du$

例 求不定积分$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}cos\sqrt{1+x^2}\,dx$

解 若令$y=sin\sqrt{1+x^2}$，有一阶微分形式不变性，有

$$dy = cos\sqrt{1+x^2}\frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = cos\sqrt{1+x^2}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}cos\sqrt{1+x^2}dx$$

以上过程即积分的第一类换元法,即：

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}cos\sqrt{1+x^2}\,dx = sin\sqrt{1+x^2}+C$$

2.3.4 反函数求导法则

知识点 设 $y=f(x)$ 在（a,b）内连续且单调，$x_0\in(a,b)$，$f(x)$在x_0处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则其反函数$x=f^{-1}(y)$在$y_0=f(x_0)$处可导，且有 $x'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

例题 1.求 $y=\arcsin x$，$y=\arctan x$ 的导数.(过程略)

2.设 y=y(x)存在二阶导数，f’(x)不等于 0,x=$\varphi(y)$是 y=f(x)的反函数，求 $\varphi''(y)$.

分析 注意在套用上述公式 $x'(y)=\frac{1}{f'(x)}$，对其两边求导时，右边的 x 应看作 y 的函数.

答 $-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$

2.3.5 数求导法则

知识点 设函数 y=f(x)是由方程 F(x,y)=0 确定的可导函数，则(1)方程 F(x,y)=0 两边对自变量 x 求导，注意 y=y(x)，即将 y 看作中间变量，得到一个关于 y 的方程；(2)解该方程便可求出 y’.

注意 对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子，一般采用对数求导法.

例题 1.设函数 y=y(x)由方程 $y=1-xe^y$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 在 x=0 处的导数.

分析 基本题，两边对 x 求导，再带入 x=0,y=1,即得答案-e.(也可两边微分求解)

2.（1）已知 $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$，求它的导数. (2)已知 $y=x^x$,求 y’.

（3）已知 $y=(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b$ (a,b 大于 0).求 y’.

分析 这三个题全是用对数求导法.注意运算即可.

答案 (1) $y'=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}.\frac{1}{3-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2}{3}.\frac{1}{3+x})$

（2） $y'=x^x(Inx+1)$ (3) $y'=(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b[In\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}]$

对数求导法非常重要，考试经常出现，有时在用洛必达法则求极限时也会用到.应引起重视.

2.3.6 参数方程所确定函数的导数

知识点 若有参数方程$\begin{cases}x=g(t)\\y=h(t)\end{cases}$,那 么 $\frac{dy}{dx}=\frac{h'(t)}{g'(t)}$ （根据复合函数求导法则推出)这是很好记忆的 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 而，$\frac{d^3y}{dx^3}$ 这些，有的同学就算不对了，而这是考试的重点.对于求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 可以这样想：第一步先求出 $\frac{dy}{dx}$ ，只是一个关于 t 的函数，记为 f(t). $\frac{d^2y}{dx^2}$ 是 $\frac{dy}{dx}$ 再对 x 求一次导，而 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 显然不是 f’(t),因为 x=g(t)也是 t 的函数，那么实际上可以构造一个新的参数方程$\begin{cases}x=g(t)\\z=f(t)\end{cases}$，求 $\frac{dz}{dx}$ 即为求原来的 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ，那么 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 也类似.

例 1 写出曲线 $\begin{cases}x=2t-t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$ 在 t=0 处的切线和法线方程.

分析 这是一个简单的综合题.先套公式求出 $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}(t+1)$，再由解析几何知识并代入数据，即得 $y=\frac{3}{2}x$ $y=-\frac{2}{3}x$

例 2 求参数方程 $\begin{cases}x=In(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定函数的三阶导数.

分析 套公式。可得 $y'=\dfrac{t}{2}$，$y''=\dfrac{1}{4t}+\dfrac{t}{4}$，$y'''=\dfrac{t^4-1}{8t^3}$

例 3 设 $\begin{cases}x=t-2|t|\\ y=3t^2+4t|t|\end{cases}$ 求 $\dfrac{dz}{dx}$ 在 t=0 处的值.

分析 当 t>0, $\begin{cases}x=-t\\ y=7t^2\end{cases}$ 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\dfrac{7\Delta t^2}{-\Delta t}=0$；

当 t<0, $\begin{cases}x=2t\\ y=-t^2\end{cases}$ 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta t\to 0^-}\dfrac{-(\Delta t)^2}{2\Delta t}=0$；

综上得 答案为 0.

例 3 设 y=y(x)是由 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ y=e^y\sin t+1\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 t=0 处的值.

分析 此题既涉及参数方程导数，又涉及隐函数求导法则，是一个综合题.没有难度，按基本方法一步步算即可.答案为 $\dfrac{2e^2-3e}{4}$

上述的隐函数、参数方程相关的求导题，均可以和变限积分求导进一步综合.不管怎么综合，仍然是围绕基本的求导方法和计算展开，不会出现难题，尤其是在期末考试中.

2.3.7 相关变化率

知识点 设 x=x(t)及 y=y(t)都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，从而变化率 dx/dt 与 dy/dt 间也存在一定关系。这两个相互依赖的变化率称为相关变化率。相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率。这在期末考中出现的概率微乎其微，然而机考中会时不时的出现，所以不要忽视课本上的一点内容.

2.3.8 基本导数公式（牢记）

(1) $(C)'=0$ (2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$ (4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$ (6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$ (8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$ (10) $(e^x)'=e^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ (16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

总结 各种求导法务必熟练掌握基本方法，提高速度和准确率，切记眼高手低，避免在考试中为这种没有难度的题失分。

2.4 高阶导数

2.4.1 高阶导数的定义

设 y＝f (x)，若 y =f (x)可导，则 f’(x)是 x 的函数.若 f’(x)仍可导，则可求 f’(x)的导数.记作 (f ’(x))’=f ’’(x).称为 f (x)的二阶导数.若 f ’’(x)仍可导，则又可求 f ’’(x)的导数。

一般，设 y= f (x)的导数 y’ = f ’(x)存在且仍可导，记 f ’(x)的导数为称为 f (x)的二阶导数。

称为 f(x)的 n 阶导数。二阶以上的导数都称为高阶导数.记 Cm(I)为区间 I 上所有具有 m 阶连续导数的函数所成集合.。为统一符号，有时记 y(0)=y，y(1)=y’，y(2)=y’’。

例 1 设物体作变速运动. 在[0, t]这段时间内所走路程为 S = S(t)，指出 S’’(t)的物理意义.

解 我们知道，S’=V(t).而 S’’=V’(t)注意到，V = V (t +Δt) V(t)表示在[t, t +Δt] 这段时间内速度 V(t) 的增量(改变量). 从而

$\frac{\Delta V}{\Delta t}=\overline{a}$ 表示在Δt这段时间内的平均加速度

故 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=a(t)$.即，S’’ = V’(t) = a(t)为物体在时刻 t 的加速度.

2.4.2 隐函数的二阶导数

求隐函数的二阶导数，要先求出隐函数的一阶导数，在一阶导数表达式的两边再对 x 求导，把求出的一阶表达式代入二阶导数表达式。

例 2 求由方程 x y+siny=0 所确定的隐函数 y=y(x)的二阶导数.

解 先求 y=y(x)的一阶导数. 两边对 x 求导，y 是 x 的函数

$$1-y'+\cos y\cdot y'=0$$

解出 y’

$$y'=\frac{1}{1-\cos y}$$

再求 y’’

$$y''=(\frac{1}{1-\cos y})'_x=\frac{(-1)}{(1-\cos y)^2}\cdot(1-\cos y)'=\frac{-\sin y\cdot y'}{(1-\cos y)^2}.$$

2.4.3 有参数方程确定的函数的二阶导数

1.由参数方程所确定的函数的导数

$$\text{若函数}\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\text{二阶可导,}\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^{2}(t)}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}$$

即 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^{3}(t)}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

例 3 求由方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数 .

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

2.4.4 求导综合例题

例 4 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\ \therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1.$$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=a(\frac{\pi}{2}-1)$，$y=a.$

所求切线方程为 $y-a=x-a(\frac{\pi}{2}-1)$ 即 $y=x+a(2-\frac{\pi}{2})$

第二章历年考题

1. $y = x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$，求 y'

答案：$y' = \arcsin\frac{x}{2} + x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\cdots\cdots$(6分)

$= \arcsin\frac{x}{2}$ $\cdots\cdots$(7分)

2. 设函数$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1), \end{cases}$ 求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

答案：$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(t+1)^2}$ $\cdots\cdots$(3分)

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2(t+1)^4}$ $\cdots\cdots$(7分)

3. 设$\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x})$由**方程** $\ln\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2} = \arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$所确定（$\mathrm{x} \neq 0$，$\mathrm{y} \neq 0$），求$\mathrm{dy}$

答案：$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$， $dy = \frac{x+y}{x-y}$.

4. 设 $y = x\arctan\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$ 求 y' .

答案：$y' = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}$

5. 求参数方程$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = 1 - t \end{cases}$所确定的函数$y = y(x)$的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

答案：$y + e^y + \ln(\cos\sqrt{x}) = 0$ $\frac{dy}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{t}$，$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = (-\frac{1}{t})'_t \cdot \frac{dt}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t^3}$

第 3 章 微分中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

3.1.1 一个几何事实

设有一条曲线弧段，P 是 $\widehat{AB}$ 上的一点，且曲线在 P 点的切线平行于割线 AB，如图 3.1 所示.

$\widehat{AB}$

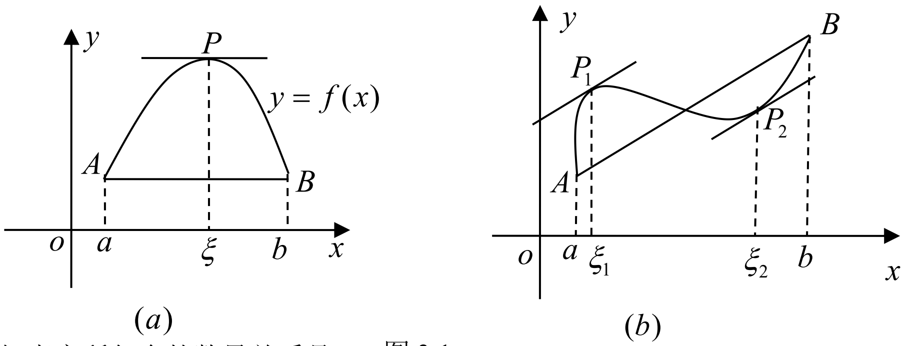


图 3.1

这一几何事实所包含的数量关系是：

设曲线弧段方程为

$y = f(x)$，$(a \le x \le b)$

定义 3.1 则曲线在 $P(\xi, f(\xi))$ 处的切线斜率为 $f'(\xi)$，割线 AB 的斜率为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

于是有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ （3,1），在图 3.1(a)下，由于割线是水平的，即 $f(a) = f(b)$，则点 P 处的切线是水平的，即 $f'(\xi) = 0$（3.2).

如果曲线弧段 AB 用参数方程表示为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \ (a \le t \le b) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，则曲线在点 $P(\varphi(\xi), \psi(\xi))$ 的

切线斜率为 $\dfrac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ 而割线 AB 的斜率为 $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ 所以有 $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$（3.3).

通过（3.1)、（3.2)、（3.3）式可以看到，式子的一端只涉及函数本身，而另一端只涉及函数在某一点的导数. ξ 是区间 (a,b) 内的一点，称为中值，通常把上述几个式子都称为中值公式. 那么这几个中值公式成立的条件又是什么呢？为此我们给出下面几个定理.

3.1.2 罗尔（Rolle）中值定理

定义 3.1 设 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义，对于任意 $x \in (x_0-\delta, x_0) \bigcup (x_0, x_0+\delta)$，都有 $f(x) < f(x_0)$（或 $f(x) > f(x_0)$）

则称 x_0 是 $f\left(x\right)$ 的一个极大（或极小）值点，$f\left(x_0\right)$ 是的一个极大（或极小）值. 极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

定义 3.2 设在区间 I 上有定义，对于任意的，有 $x \in I$

$$f(x) \le f(x_0)\ (\text{或}\ f(x) \ge f(x_0))$$

则称 x_0 是 $f(x)$ 在 $x \in I$ 上的最大（或最小）值点，$f\left(x_0\right)$ 是 $f(x)$ 的在 I 上的最大（或最小）值. 最大值点和最小值点统称为最值点，最大值和最小值统称为最值.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，如果 $x_0 \in [a,b]$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值点，当 $x_0 \in \left(a,b\right)$ 时，则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值点只能在 $f(x)$ 的所有极值点以及端点取得.

定理 3.1（费马（Fermat）定理） 设函数 $f(x)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内可微，$\xi \in \left(a,b\right)$ 是 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(\xi)=0$.

证 不失一般性，假设 $y=f(x)$ 在 $x=\xi$ 处取得极大值，所以不论 Δx 为正或为负，当 $\xi+\Delta x \in (a,b)$，总有

$$f(\xi+\Delta x) < f(\xi),$$

因此，当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} < 0,$$

根据函数极限的保序性，知

$$f_+'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \le 0.$$

同样，当 $\Delta x<0$ 时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} > 0,$$

所以

$$f_-'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \ge 0$$

又因为 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，有

$f'(\xi)=f_+'(\xi)=f_-'(\xi)$，故 $f'(\xi)=0$.

由费马定理，可以得到下面定理.

定理 3.2（罗尔中值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m. 现分两种可能来讨论.

若 $M=m$，则对任意 $x\in(a,b)$ 都有 $f(x)=m$，这时对任意的 $\xi\in(a,b)$ 都有 $f'(\xi)=0$.

若 $M>m$，由条件 $f(a)=f(b)$ 知，M 和 m 中至少有一个不等于 f (a)(或 f (b))，不妨设 $M\neq f(a)$，则在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=M$.

由费马定理可知，在点 $x=\xi$ 处有 $f'(\xi)=0$.

罗尔中值定理的几何解释如图 3.1(a)所示，如果函数 $f(x)$ 满足定理的条件，则曲线 $y=f(x)$ 必有水平切线.

罗尔中值定理有三个条件：(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，(2) $f(x)$ 在开区间 (a,b) 可导，(3) $f(a)=f(b)$. 三者缺一不可，否则罗尔中值定理的结论不一定成立，如图 3.2 所示.

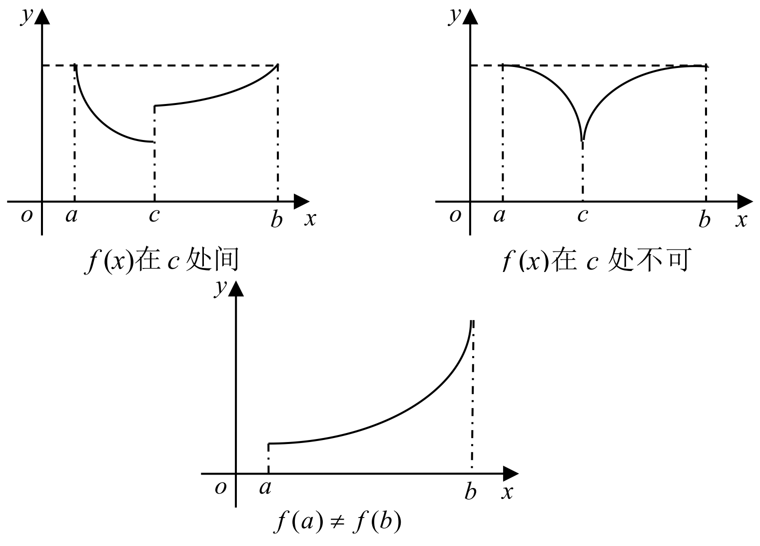


图3.2

另外，由罗尔中值定理的结论可知：对于可导函数 $f(x)$，方程 $f(x)=0$ 的任意两个相异实根之间必有方程 $f'(x)=0$ 的一个实根.

例 1 验证罗尔中值定理对函数 $f(x)=\sin^2 x$ 在 $[0,\pi]$ 上的正确性.

解 显然 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $f(0)=f(\pi)=0$. 而在 $(0,\pi)$ 内确存在一点 $\xi=\frac{\pi}{2}$，使

$$f'(\frac{\pi}{2})=2\sin x\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0.$$

这就验证了罗尔中值定理对所给函数在所给区间上的正确性.

例 2 设 a，b，c 为常数，试证方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=(a+b+c)$ 至少有一个小于 1 的正根.

证 构造函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，则 $f(x)$ 在[0, 1]上满足罗尔中值定理条件，且

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c),$$

从而存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即

$$4a\xi^3+3b\xi^2+2c\xi=(a+b+c),$$

这就证明了方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=(a+b+c)$ 至少有一个小于 1 的正根.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证 构造函数 $\varphi(x)=e^{-x}f(x)$，由于 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理的条件，且

$$\varphi'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)$$

因此存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$. 即 $e^{-\xi}f'(\xi)-e^{-\xi}f(\xi)=0$，从而有

$$f'(\xi)=f(\xi).$$

3.1.3 拉格朗日（Lagrange）中值定理

在罗尔中值定理中，需要条件 $f(a)=f(b)$，但图3.2(b)不满足此条件，这就是下面的定理.

定理3.3（拉格朗日定理） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证 构造函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，

且 $g(a)=g(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $g'(\xi)=0$，而 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

故有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

拉格朗日中值定理给出了（3.1）式成立的条件，还可以写成以下几种形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\qquad (3.4)$$

其中 ξ 在 a 与 b 之间. 如果记 $a=x$，$b=x+\Delta x$，则

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x,\qquad (3.5)$$

其中 ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间. 如果记 $\xi=x+\theta\Delta x$，$0<\theta<1$，则有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.\qquad (3.6)$$

称（3.6）式为有限增量公式.（3.5），（3.6）式准确地表达出：函数在某点的增量与函数在该点处的导数之间的关系。

推论1 若函数 f (x)在区间 I 上的导数恒为零，那么 f (x)在区间 I 上是一个常数。

证 在区间 I 上任取两点 x1, x2 (x1 <x2), 由拉格朗日中值定理得

f (x2) - f (x1) = f((() (x2 - x1) (x1 <(<x2).

由假设，f((() = 0，所以 f (x2) - f (x1) = 0，即

f (x2) = f (x1)

由 x1, x2 的任意性，所以 f (x)在区间 I 上是一个常数。

推论 1 表明：在区间 I 上导数恒为零的函数就是常数函数.这一结论以后在积分学中将会用到.由推论 3.1 可得：

推论 2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上恒有 $f'(x)=g'(x)$，则在区间 I 上 $f(x)=g(x)+C$ (C 为常数)。

由拉格朗日中值定理还可以推出：

推论 3　如果函数$f(x)$在区间 I 上恒有$f'(x)=k$（常数$k\neq 0$），则$f(x)$是一次函数。

例 4　验证拉格朗日中值定理对函数$f(x)=\arctan x$在$[0,1]$上的正确性。

解 $f(x)=\arctan x$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，故满足拉格朗日中值定理的条件，

则　$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)\quad (0<\xi<1)$

即　$\arctan 1-\arctan 0=\dfrac{1}{1+\xi^2}$

故　$\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{\pi}{4}$　从而　$\xi=\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}\in(0,1)$

这就验证了拉格朗日中值定理对所给函数在所给区间上的正确性。

例 5　证明等式：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证　设$f(x)=\arcsin x+\arccos x$，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

则在区间((1,　1)内，f　(x)　=　C　取 x　=　0，有

C = arcsin0 + arccos0 = $\dfrac{\pi}{2}$

又　$f(\pm1)=\dfrac{\pi}{2}$　所以　$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$

例 6　证明：当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证　设$f(x)=\ln(1+x)$，则$f(x)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件. 故，

$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$，$(0<\xi<x)$

又$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，从而　$\ln(1+x)=\dfrac{1}{1+\xi}$，　$(0<\xi<x)$

则　$\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，　$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，即　$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

例 7　设$f'(x)$在$[a,b]$上连续，试证存在$L>0$，使得对任何$x_1,x_2\in[a,b]$有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le L|x_2-x_1|.$$

证 由于$f'(x)$在$[a,b]$上连续，故存在$L>0$，使对任何$x\in[a,b]$，有$|f'(x)|\le L$.

于是 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$， ξ介于x_1与x_2之间

从而 $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)(x_2-x_1)|\le L|x_2-x_1|$

例 8 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，又$f(a)=f(b)=0$，且存在$c\in(a,b)$，使$f(c)>0$，试证：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$.

证 对$f(x)$在区间$[a,c]$和$[c,b]$上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0,\quad \xi_1\in(a,c);$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0,\quad \xi_2\in(c,b),$$

再对$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上分别应用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

3.1.4 柯西(Cauchy)中值定理

对于图 3.1(b)所示的曲线段，如果用参数方程来表示，则有下面的结论.

定理 3.4（柯西中值定理）设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，$g'(x)\neq 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 当$x\in(a,b)$时，$g'(x)\neq 0$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，因此$g(b)-g(a)\neq 0$，否则，若$g(b)-g(a)=0$则函数在$[a,b]$上满足罗尔中值定理的条件，存在一点$\eta\in(a,b)$，使得$g'(\eta)=0$，这与$g'(x)\neq 0$矛盾，于是

$$g(b)-g(a)\neq 0.$$

构造函数

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x),$$

由定理条件知$h(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$h(a)=h(b)=\frac{f(a)g(b)-g(a)f(b)}{g(b)-g(a)}.$$

由罗尔中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得，$h'(\xi)=0$.

又

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

故

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

（3.3）式从几何上解释了柯西中值定理.

上面三个定理可以看出：在拉格朗日中值定理中若令$f(a)=f(b)$，就得到了罗尔中值定理，所以罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特例；在柯西中值定理中令$g(x)=x$，就得到了拉格朗日中值定理，故柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

注意，如果对函数$f(x)$和$g(x)$分别使用拉格朗日中值定理有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad \xi_1\in(a,b),$$

$$g'(\xi_2)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a},\quad \xi_2\in(a,b),$$

将两式相除得到

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

这里分子和分母的中值ξ_1和ξ_2未必相等，而柯西中值定理中的分子和分母的中值是一样的，这正是柯西中值定理的独特之处.

例 9 验证柯西中值定理对函数$f(x)=x^3+1$，$g(x)=x^2$在区间$[1,2]$上的正确性.

解 函数 $f(x)=x^3+1$，$g(x)=x^2$，在区间 $[1,2]$ 上连续，在开区间 $(1,2)$ 内可导，且 $g'(x)=2x\neq 0$. 于是，$f(x),g(x)$ 满足柯西中值定理的条件，由于

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{9-2}{4-1}=\frac{7}{3},\quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{3\xi^2}{2\xi}=\frac{3}{2}\xi,$$

令 $\frac{3}{2}\xi=\frac{7}{3}$，得 $\xi=\frac{14}{9}\in(1,2)$.

这就验证了柯西中值定理对所给函数在所给区间上的正确性.

例 10 设函数 $f(t)$ 在 $[0,x](x>0)$ 上连续，在 $(0,x)$ 可导，且 $f(0)=0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)=f'(\xi)(1+\xi)\ln(1+x).$$

证 显然 $f(t),g(t)=\ln(1+t)$ 在 $[0,x](x>0)$ 上连续，在 $(0,x)$ 可导，且

$$g'(t)=\frac{1}{1+t}\neq 0,$$

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi}},$$

所以

$$f(x)=f'(\xi)(1+\xi)\ln(1+x).$$

例 11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a>0$，试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

证 要证明含有两个中值的等式，应该两次使用中值定理，然后建立关系式.

对 $f(x)$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上使用柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta};$$

再对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上使用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

两式相除得到，存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

3.2 泰勒公式

3.2.1 泰勒(Taylor)公式

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，那么

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

由函数与极限的关系，有

$$f(x)=f(x_0)+\alpha(x),\qquad (3.7)$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

（3.7）式说明：当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时，在 x_0 附近，$f(x)\approx f(x_0)$，如图 3.3 所示；

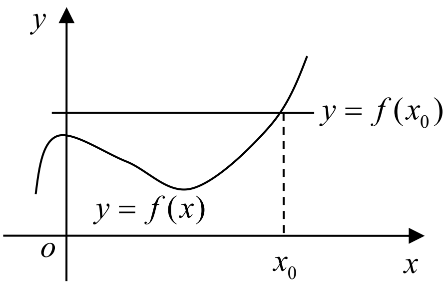


图 3.3

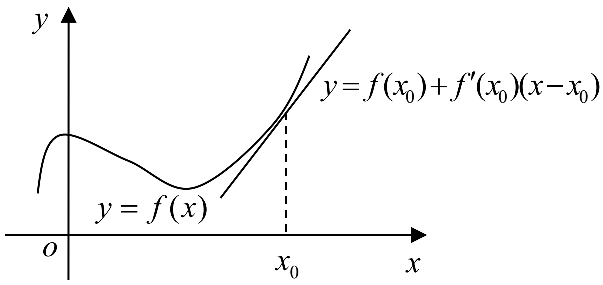


图 3.4

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续可导，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).\qquad (3.8)$$

（3.8）式说明：当 $f(x)$ 在 x_0 处可微分时，在 x_0 附近，

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{3.9}$$

实际上相当于在 x_0 附近，用切线近似代替曲线，这就是所谓的“以直代曲”，如图 3.4 所示. 同时（3.9）式就是用一次多项式来近似函数 $f(x)$，那么，是否可以用更高阶的多项式近似代替函数？

众所周知，多项式函数：

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

最明显的特点是：结构简单、具有任意阶导数、函数值容易计算. 所以在理论和实际上，对不好处理的函数，通常用好处理的多项式近似地替代它. 如（3.9）式的近似计算，当然这时的近似精度不太高，那么，要提高精度，只能提高多项式的次数. 当函数 $f(x)$ 用 n 次多项式来近似时，又需要什么条件呢？近似程度如何？若能用多项式来近似，多项式的系数又如何求呢？

对于函数 $y = f(x)$ 和 $y = P_n(x)$ 多项式函数，在 x_0 附近，如果 $P_n(x_0) = f(x_0)$，则曲线 $y = f(x)$ 和 $y = P_n(x)$ 在 x_0 处相交；如果 $P_n'(x_0) = f'(x_0)$，则曲线 $y = f(x)$ 和 $y = P_n(x)$ 在 x_0 处相切；如果 $P_n''(x_0) = f''(x_0)$，则曲线 $y = f(x)$ 和 $y = P_n(x)$ 在 x_0 处凹凸相同（凹凸性见本章 3.5 节）；由此推想，假设在点 x_0 处，$f(x)$ 和 $P_n(x)$ 的三阶导数以至更高阶的导数相等，那么，在点 x_0 附近，曲线 $y = f(x)$ 和 $y = P_n(x)$ 的靠近程度会更高. 所以对于 $f(x)$ 和 $P_n(x)$，提出要求：

$$P_n(x_0) = f(x_0),\quad P_n'(x_0) = f'(x_0),\quad \cdots,\quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

下面我们求多项式的系数：

由 $P_n(x_0) = a_0$，得 $a_0 = f(x_0)$；

又 $P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$，故 $P_n'(x_0) = a_1$，从而，

$a_1 = f'(x_0)$；

$P_n''(x) = 2!a_2 + 3\cdot 2a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$，故 $P_n''(x_0) = 2!a_2$，从而，

$a_2 = \dfrac{1}{2!}f''(x_0)$；

依次类推，可得

$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$，$(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$

这样我们得到多项式：

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

下面的问题就是，用多项式 $P_n(x)$ 来近似函数 $f(x)$，近似程度如何？误差是多少？我们有下面的泰勒定理：

定理 3.5（泰勒定理） 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有 $n+1$ 阶导数，则当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x). \quad (3.10)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 与 x 之间. $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 叫做拉格朗日余项.

证　设 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$，则 $R_n(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有 $n+1$ 阶导数，且

$R_n^{(k)}(x_0) = 0$，$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$；$R_n^{(k+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

对 $R_n(x)$ 与 $(x - x_0)^{n+1}$ 在 x_0 与 x 之间使用柯西中值定理，有

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n{}'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$，（ξ_1 介于 x_0 与 x 之间）

对 $R_n{}'(\xi_1)$ 与 $(\xi_1 - x_0)^n$ 在 x_0 与 ξ_1 之间再使用柯西中值定理，有

$$\frac{R_n{}'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} = \frac{R_n{}'(\xi_1) - R_n{}'(x_0)}{(n+1)[(\xi_1 - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n]} = \frac{R_n{}''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}}$$，（ξ_2 介于 x_0 与 ξ_1 之间）

如此继续进行，经过 $n+1$ 次后，得到

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n{}^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

从而

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，（$\xi$ 介于 x_0 与 x 之间）.

泰勒定理所给公式（3.10）称为 n 阶泰勒公式.

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad (3.11)$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒多项式.

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式（3.10）就变为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x) \quad (3.12)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 与 x 之间. 公式（3.12）称为 n 阶麦克劳林（Maclaurin）公式.

在泰勒公式（3.10）中，若用 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒多项式 $P_n(x)$ 去近似代替函数 $f(x)$ 时，所产生的误差就是 $|R_n(x)|$. 如果对于某一个 n，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，总有 $|f^{(n+1)}(x)|\le M\ (M>0)$ 时，则有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

从而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0,$$

因此，泰勒公式（3.10）的余项可表示为

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n),$$

称为皮亚诺(Peano)余项.

在公式（3.12）中皮亚诺余项为 $R_n(x)=o(x^n)$，则带有皮亚诺余项的泰勒公式和麦克劳林公式分别写成：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n);$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n).$$

值得注意的是皮亚诺余项只要求函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，不但条件宽松，而且使用方便.

例 1 写出函数 $f(x)=x^3\ln x$ 在点 $x_0=1$ 处的四阶泰勒公式.

解 $f(1)=0$，$f'(x)=3x^2\ln x+x^2$，$f'(1)=1$

$$f''(x)=6x\ln x+5x,\quad f''(1)=5,$$

$$f'''(x)=6\ln x+11,\quad f'''(1)=11,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x},\quad f^{(4)}(1)=6,$$

$$f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^2},\quad f^{(5)}(\xi)=-\frac{6}{\xi^2},$$

于是

$$x^3\ln x=(x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4-\frac{6}{5!\cdot\xi^2}(x-1)^5,$$

其中 ξ 在 1 与 x 之间.

实际上 1 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2,（\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}）\quad (3.13)$$

可以看成拉格朗日中值定理的推广，所以，在证明带有二阶导数的等式或不等式时，通常利用公式（3.13）.

例 2 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，$(a<b)$，试证存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 分别取 $x_0=a,b$，则泰勒公式为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x-a)^2,（\xi_1 \text{ 在 } a \text{ 与 } x \text{ 之间}）$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x-b)^2,（\xi_2 \text{ 在 } b \text{ 与 } x \text{ 之间}）$$

将 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 分别代入上两式，注意 $f'(a)=f'(b)=0$，得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(\frac{a+b}{2}-a)^2, \quad (\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}))$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(\frac{a+b}{2}-b)^2, \quad (\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b))$$

两式相减得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

从而

$$|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\le\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi)|+|f''(\xi)|)$$

这里$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，故存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

3.2.2 几个常见的泰勒公式

下面我们推出几个常见的泰勒公式

例 3 求出函数$f(x)=e^x$的带拉格朗日余项和皮亚诺余项的n阶麦克劳林公式.

解 由于$f^{(n)}(x)=e^x$，所以$f^{(n)}(0)=e^0=1$，于是带拉格朗日余项的麦克劳林公式为

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (\xi\text{ 在 0 与 }x\text{ 之间})$$

带皮亚诺余项的n阶麦克劳林公式为

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n).$$

例 4 求函数$f(x)=\sin x$的拉格朗日余项的麦克劳林公式.

解 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$，$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n}{2}\pi=\begin{cases}1, & n=1,5,9,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\\ -1 & n=3,7,11,\cdots\end{cases}$

于是

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{\sin(\xi + \frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$，（ξ 在 0 与 x 之间）

下面给出几个常用的公式：

(1) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$；

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$；

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$；

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$；

(5) $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.

以上这些函数的泰勒公式非常重要，下面利用这些公式求函数的极限.

例 5　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$.

解　由于 $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$，

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

例 6　计算　$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$

解　由泰勒　$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)\quad (x \to 0)$　公式知．令 $x = \frac{1}{n}$，得

$$1-n\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$n^2\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3!}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}.$$

3.3 洛必达法则

当$x\to a$ （或$x\to\infty$)时，如果两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于零或都趋于无穷大，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$可能存在，也可能不存在，通常把这种极限称为未定式，并简记为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$都是$\frac{0}{0}$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$是$\frac{\infty}{\infty}$.

3.3.1 $\frac{0}{0}$型未定式

定理 3.6（洛必达(L‘Hospital)法则） 设$f(x)$，$g(x)$在$0<|x-a|<\delta$内可导，$g'(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

证 补充定义$f(a)=g(a)=0$，则由$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，$f(x)$，$g(x)$在$0<|x-a|<\delta$内可导，知$f(x)$，$g(x)$在$|x-a|<\delta$内连续，再由$g'(x)\neq 0$，利用柯西中值定理，当$0<|x-a|<\delta$时，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$ （ξ介于x与a之间）

当$x\to a$时，$\xi\to a$，于是得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 3.6 中 $x\to a$ 也可以换成其它的极限过程.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x^2+x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}(x^3-x^2-x+1)=0$，故所求极限是 $\dfrac{0}{0}$，故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x-4}{6x-2}=\frac{1}{2}.$$

实际上，在使用一次洛必达法则后，如果还是未定式，满足定理 3.6 的条件，还可以继续使用洛必达法则，例 1 就使用了两次洛必达法则.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解 所求极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x\sin^2 x}$.

解 所求极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，但直接使用洛必达法则会很麻烦，可以先进行等价无穷小代换和有理化运算，再用洛必达法则.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

3.3.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式

定理 3.7 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $0<|x-a|<\delta$ 内可导，$g'(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为∞），则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

定理 3.7 中 $x\to a$ 也可以换成其它的极限过程.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$

解 所求极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，直接使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x\cdot\sin x}=1.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\lambda}(\lambda>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\lambda}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^\lambda)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-1}}{\lambda x^{\lambda-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda x^\lambda}=0$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}\right)^2=3.$$

虽然洛必达法则是求$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的有效方法，但也不是万能的，因为定理中要求$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为$\infty$），但当$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在也不是$\infty$时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$可能存在，看下面的例子：

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

解 注意 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$ 不存在，但

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0.$$

3.3.3 其它未定式

除了$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式外，还有$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,\infty^0,0^0$等类型未定式，他们都可化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，因此也常用洛必达法则求值.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x\ (a>0)$

解 因为当$x\to 0^+,x^a\to 0,\ln x\to -\infty$，它是$0\cdot\infty$型，由于$x^a\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^a}}$化成了$\frac{\infty}{\infty}$型，于是有

$$\lim_{x\to 0^+}x^a\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^a}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{a}{x^{a+1}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a}{-a}=0.$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$.

解　这是$\infty-\infty$型，通常的方法是通分，化成$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，于是有

$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0 .$$

例 11　求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x$

解　这是0^0型未定式，令$y=(\sin x)^x$，取对数$\ln y=x\ln(\sin x)$，由于

$$\lim_{x\to0^+}x\ln(\sin x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)}{x^{-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{\sin x}\cdot\cos x=0 .$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x=e^0=1$.

例 12　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$

解　这是1^∞型未定式，令 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$，取对数 $\ln y=\frac{1}{x\ln(1+x)}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$，

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x\ln(1+x)}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin x)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}=e^{-\frac{1}{6}} .$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

解 这是∞^0型未定式，令 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ ，取对数 $\ln y=\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^0=1.$$

例 14 求. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 有

$$\lim_{x\to +\infty}x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to +0}\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to +0}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}}{2t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to +0}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2\sin t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to +0}\frac{t\cos t-\sin t}{t^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to +0}\frac{-t\sin t}{3t^2}=-\frac{1}{6}.$$

对于数列的极限，若是未定式，也可以使用洛必达法则.

例 15 设 $a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$,

由于 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{a^t\ln a+b^t\ln b}{a^t+b^t}=\frac{\ln a+\ln b}{2}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=e^{\frac{\ln(ab)}{2}}=\sqrt{ab}$

3.4 函数的单调性与极值

3.4.1 函数的单调性

定理 3.8 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，如果在(a,b)内$f'(x)>0$ ($f'(x)<0$)，则函数$f(x)$在$[a,b]$上单调递增（递减）.

证 任取$x_1,x_2\in(a,b)$ $(x_1<x_2)$，由拉格朗日中值定理知：存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

在(a,b)内，当$f'(x)>0$时，$f(x_2)>f(x_1)$，故$f(x)$单调递增；当$f'(x)<0$时，$f(x_2)<f(x_1)$，故$f(x)$单调递减.

值得注意的是，如果函数$f(x)$在(a,b)内$f'(x)\geq 0$，且最多在有限个点处$f'(x)=0$，并不影响函数$f(x)$在$[a,b]$上的单调性. 此外，函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

例 求函数$f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3$的单调区间.

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=x^4-x^2=x^2(x-1)(x+1),$$

令$f'(x)=0$，解得$x_1=-1,x_2=0,x_3=1$，列表分析

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	递增	递减	递减	递增

所以函数$f(x)$在$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$上单调递增，在$[-1,1]$上单调递减.

总结：求函数$f(x)$的单调区间，可以先求出使$f'(x)=0$的点，以及导数不存在的点，这些点把函数的定义域分成若干个小区间，然后讨论这些小区间上函数一阶导数的符号，从而确定函数的单调区间.

3.4.2 函数的极值

定理 3.9（必要条件）设$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内可导，且x_0是$f(x)$的一个极值点，则必有$f'(x_0)=0$.

通常把函数$f(x)$的一阶导数等于零的点称为$f(x)$的驻点. 由定理 3.9 知：可导函数的极值点一定是函数的驻点，但驻点不一定是函数的极值点. 例如，$f(x)=x^3$，在$x=0$处，$f'(0)=0$，但$x=0$不是函数的极值点. 下面给出函数极值点的判断方法：

定理 3.10（第一充分条件）设函数$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域可导，

（1）若在 $(x_0-\delta,x_0)$内，$f'(x)>0$，在$(x_0,x_0+\delta)$内，$f'(x)<0$，则$x=x_0$为$f(x)$的极大值点；

（2）若在 $(x_0-\delta,x_0)$内，$f'(x)<0$，在$(x_0,x_0+\delta)$内，$f'(x)>0$，则$x=x_0$为$f(x)$的极小值点；

（3）若在$(x_0-\delta,x_0)$与$(x_0,x_0+\delta)$内，$f'(x)$同号，则$x=x_0$不是$f(x)$的极值点.

证 只证明极大值点情况，其它情况类似.

由于在 $(x_0-\delta,x_0)$内，$f'(x)>0$，知函数$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$内单调递增，故$f(x)<f(x_0)$；而在$(x_0,x_0+\delta)$内，$f'(x)<0$，知函数$f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)$内单调递减，故$f(x)<f(x_0)$. 从而，当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，都有$f(x)<f(x_0)$.故$x=x_0$为$f(x)$的极大值点.

例 求函数$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$的极值

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(1-3x),$$

故$x_1=0$，$x_2=1$是不可导点，$x_3=\dfrac{1}{3}$是函数的驻点，列表分析

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	+	0	−	不存在	+
$f(x)$	递增	非极值	递增	极大	递减	极小	递增

所以 $x=0$ 不是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$x=\dfrac{1}{3}$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，极大值是 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$，$x=1$ 是极小点，极小值是 $f\left(1\right)=0$.

总结：可以看出连续函数的驻点和导数不存在的点都可能是函数的极值点．这些点是否是极值点，都可以用第一充分条件来判定．如果可导函数在驻点处还具有不等于零的二阶导数则由下面的极值存在的第二充分条件来判定较方便.

定理 3.11（第二充分条件）设函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'\left(x_0\right)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处取得极小值.

证　只证明情形（1），情形（2）类似.

由于 $f''(x_0)<0$，根据二阶导数的定义

$$f''\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

由函数极限的保号性，必存在 $\delta>0$，当 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)\cup\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 时，有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

当 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 时，$f'(x)<0$，由第一充分条件可知 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处取得极大值.

例　求函数 $f\left(x\right)=-x^4+2x^2$ 的极值.

解　$f'\left(x\right)=-4x^3+4x=-4x(x-1)(x+1)$，

令 $f'\left(x\right)=0$，得驻点 $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$，而

$f''\left(x\right)=-12x^2+4$，

$f''\left(-1\right)=-8, f''(0)=4, f''(1)=-8$，

所以函数的极大值为 $f(-1)=f(1)=1$；极小值为 $f(0)=0$.

总结：在有些情况下，$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，第二充分条件就失效了，$f(x_0)$ 可能是极值也可能不是极值，这时须用第一充分条件判定．也可用下面定理判定：

定理 3.12 设 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内具有 n 阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

则 (1) 当 n 为偶数时，x_0 为 $f(x)$ 的极值点，且当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，x_0 为极小值点；当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，x_0 为极大值点；

(2) 当 n 为奇数时，x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

易错题（极值点概念不清致误）

已知 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 x=1 处有极值 10，则 a+b=?

正解

$\mathrm{f}'(x)=3x^2+2ax+b$，由 x=1 时，函数取得极值 10，

得 $\begin{cases}\mathrm{f}'(1)=3+2a+b=0\\ \mathrm{f}(1)=1+a+b+a^2=10\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=4\\ b=-11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3\\ b=3\end{cases}$

当 a=4, b=−11 时，$\mathrm{f}'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$

在 x=1 两侧的符号相反，符合题意，

在 a=−3, b=3 时，$\mathrm{f}'(x)=3(x-1)^2$ 在 x=1 两侧的符号相同，所以 a=−3, b=3 不符合题意，舍去。

综上所述 a=4, b=−11, 所以 a+b=−7

3.4.3 函数的最值

我们已经知道，闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值，而在区间 $[a,b]$ 上的最值只能在极值点或端点达到，所以，只要求出函数在 $[a,b]$ 上所有的驻点和不可导点的函数值，再与端点的函数值进行比较，最大的就是最大值，最小的就是最小值.

在许多实际问题中，往往所建立的目标函数只有惟一的极值点（如图 3.6 所示），若函数的最大（小）值存在，则该函数的极大（小）值点即为所求函数的最大（小）值点.

还要指出，实际问题中，往往根据问题的性质就可以断定可导函数 $f(x)$ 确有最值，而且一定在定义区间内部取得，这时如果函数 $f(x)$ 在定义区间内只有一个驻点，那么，可以断定驻点就是最值点.

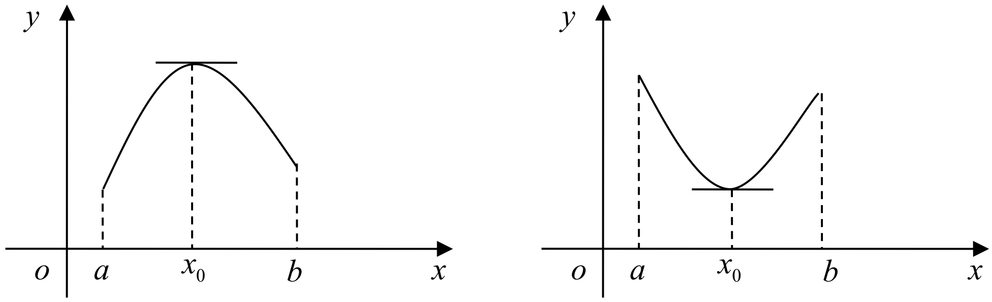


图 3.6

例 求单位球的内接正圆锥体的最大体积以及取得最大体积时锥体的高.

解 如图 3.7 所示，设球心到锥体底面垂线长为 x，则圆锥体的高为 $1+x$，锥体底半径为 $\sqrt{1-x^2}$，则圆锥体的体积为

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(\sqrt{1-x^2})^2(1+x)=\frac{\pi}{3}(1-x)(1+x)^2,$$

$(0<x<1)$，求导数， $V'(x)=\dfrac{\pi}{3}(1-3x)(1+x)$，

令 $V'(x)=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{3}$， $x=-1$（舍去），

$$V''(x)=-\frac{2\pi}{3}(1+3x)，V''(\frac{1}{3})=-\frac{4\pi}{3}<0，$$

$x=\dfrac{1}{3}$ 是函数的极大值点，从而也是最大值点，故

$$V_{\max}(\frac{1}{3})=\frac{32\pi}{81},$$

此时圆锥体的高为 $\dfrac{4}{3}$.

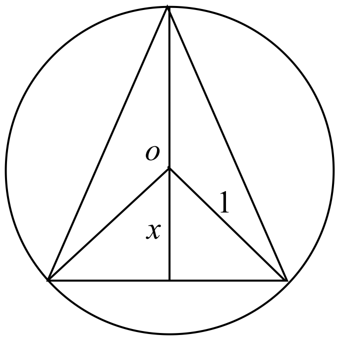


图 3.7

3.5 曲线的凹凸性与拐点

3.5.1 曲线的凹凸性

定义 3.3 设函数 $f(x)$ 在上 (a,b) 连续，如果对 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，恒有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是凸的，对应的曲线称为凸弧；反之，如果恒有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是凹的，对应的曲线称为凹弧.

定理 3.13　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，那么

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹弧；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸弧.

证　在 (a,b) 内任取两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，记 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，由拉格朗日中值定理有

$\exists\xi_1\in(x_1,x_0)$，使得 $f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x_0-x_1)$；

$\exists\xi_2\in(x_0,x_2)$，使得 $f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)(x_2-x_0)$，

上面两式相减，即

$$f(x_2)+f(x_1)-2f(x_0)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)](x_2-x_0), \tag{3.14}$$

$f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)$，代入（3.14）式，得

$$f(x_2)+f(x_1)-2f(x_0)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)(x_2-x_0), \tag{3.15}$$

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，由（3.15）式得

$$f(x_2)+f(x_1)-2f(x_0)>0,$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

由凹凸性定义，知曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹弧；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，由（3.15）式得

$$f(x_2)+f(x_1)-2f(x_0)<0,$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

由凹凸性定义，知曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹弧；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，由（3.15）式得

$$f(x_2)+f(x_1)-2f(x_0)<0,$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

由凹凸性定义，知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸弧.

例　求函数 $f\left(x\right)=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，求导数

$f'(x)=12x^3-12x^2$，

$f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$

令 $f''(x)=0$，得 $x_1=0,x_2=\dfrac{2}{3}$，列表分析

x	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	凹	凸	凹

根据上表知，凹区间是 $(-\infty,0)\cup(\frac{2}{3},+\infty)$，凸区间是 $(0,\frac{2}{3})$

例 （利用凹凸性证明不等式）

证明 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n$　(x>0,y>0,x≠y,n>1)

证　设函数，f(t)= $t^n\,(n>1)$ 则

$$f'(t)=nt^{n-1},f''(t)=n(n-1)t^{n-2}>0,(n>1,t>0)$$

所以函数 $f(t)=t^n$ 的图像在 t>0 时是凹的，由凹凸性的定义得

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f(\frac{x+y}{2}),$$

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n$$

3.5.2 曲线的拐点

定义 3.4 平面上曲线 $y=f(x)$ 的凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点.

定理 3.14 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内三阶可导，若 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的拐点.

证　不妨设 $f'''(x_0)>0$，由于

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0,$$

存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta)$ 时，有

$$\frac{f''(x)}{x-x_0}>0,$$

从而，当 $x\in(x_0-\delta_0,x_0)$

$$f''(x)<0,$$

当 $x\in(x_0,x_0+\delta_0)$ 时

$$f''(x)>0.$$

这样曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta_0,x_0)$ 内是凸弧，在 $(x_0,x_0+\delta_0)$ 内是凹弧，因此点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例 求曲线 $y=\frac{1}{4}x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，求导数

$$y'=\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},$$

$$y''=\frac{10}{9}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}(x-1),\quad x\neq 0,$$

令 $y''=0$，得 $x_1=1$；二阶导数不存在的点 $x_0=0$. 列表分析：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

因此 $(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$ 是凹区间，$(0,1)$ 是凸区间，拐点为 $(0,0)$，$(1,-\frac{3}{4})$

3.6 函数图像的描绘

3.6.1 曲线的渐近线

定义 3.5 对于函数 $y=f(x)$,

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则称直线 $y=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线；

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，则称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线. 此时

例 求曲线 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的渐近线.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty$，所以有一铅直渐近线$x=1$；

又 $$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-\frac{1}{4}x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4},$$

故曲线有斜渐近线$y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$.

例 （关于求渐近线的常规问题）

求曲线$\mathrm{y}=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$的渐近线？

正解：

从函数本身知 x=0 不是定义域中的点，

$$\lim_{x\to 0^+}y(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=+\infty$$

故 x=0 是曲线的铅直渐近线。

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{x(1-e^{-x^2})}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{e^{x^2}}}{1-\frac{1}{e^{x^2}}}=1$

故 y=1 是曲线的水平渐近线。

易错题

例 已知 y=y(x)是方程$\mathrm{y}^3-x^3+2xy=0$所确定的隐函数，设曲线 y=y(x）有渐近线 y=ax+b, 求 a, b

正解：

由斜渐近线的定义知$\mathrm{a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}$，令$\dfrac{y}{x}=u$，则 y=ux，并且当 x→+∞时，u→a 将 y=ux

代入$\mathrm{y}^3-x^3+2xy=0$，得$\mathrm{u}^3x^3-x^3+2ux^2=0$或者$\mathrm{u}^3-1+\dfrac{2u}{x}=0$.

对两边取极限得$\lim\limits_{x\to+\infty}(u^3-1+\dfrac{2u}{x})=0$，即$\mathrm{a}^3-1=0$，故 a=1

有$\mathrm{b}=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)$, 令 y−x=t， 则当 x→+∞时， t→b, 将 y=t+x 代入

$\mathrm{y}^3-x^3+2xy=0$得$(t+x)^3-x^3+2x(t+x)=0$，即$\mathrm{t}^3+3t^2x+3tx^2+2xt+2x^2=0$，

于是$\dfrac{\mathrm{t}^3}{x^2}+\dfrac{3t^2}{x}+3t+\dfrac{2t}{x}+2=0$

两边同时取极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{t^3}{x^2}+\dfrac{3t^2}{x}+3t+\dfrac{2t}{x}+2)=0$ 得 3b+2=0，所以 $b=-\dfrac{2}{3}$

3.6.2 函数作图

函数图像的描绘是函数微分知识的综合应用，描绘图像的一般步骤是：

（1）确定函数的定义域、间断点、奇偶性、周期性等性质；

（2）求一阶导数，确定函数的单调区间及函数的极值；

（3）求二阶导数，确定函数的凹凸区间及拐点；

（4）求出函数图像的渐近线及补充重要点的坐标；

（5）作表，描绘函数的图像.

3.7 曲率

3.7.1 弧微分

曲线弧长的微分称为弧微分.

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上具有连续导数，如图 3.13 所示，在区间 I 上，对曲线 $y=f(x)$ 选取固定点 $M_0(x_0,y_0)$ 作为度量弧长的基点，规定 x 增大的方向为该曲线的正向.

在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $M(x,y)$，弧 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的值 s 规定如下：以 $M_0(x_0,y_0)$ 为起点，沿 x 轴正方向的 s 为正数，沿 x 轴负方向的 s 为负数，于是曲线上任一点 $M(x,y)$ 所对应的弧段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的长度 s 就是 x 的函数，称为弧长函数，

记 $s(x)=\overset{\frown}{M_0M}$，

显然 $s(x)$ 是单调增加的函数. 下面求 $s'(x)$.

设 $x,x+\Delta x\in I$，它们在曲线上的对应点为 M 及 M_1，如图 3.13，则

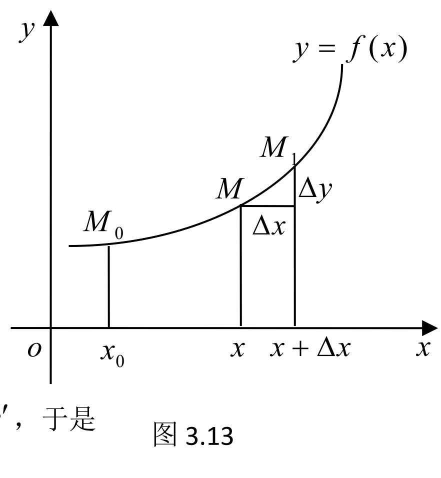
$$\Delta s=\overset{\frown}{M_0M_1}-\overset{\frown}{M_0M}=\overset{\frown}{MM_1}$$

于是

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{|MM_1|}\right)^2\cdot\left(\frac{|MM_1|}{\Delta x}\right)^2,$$

$$=\left(\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{|MM_1|}\right)^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{|MM_1|}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}$$



令 $\Delta x\to 0$，有 $\dfrac{\overset{\frown}{MM_1}}{|MM_1|}\to 1$，注意到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$，于是

图 3.13

$$\frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

由于$s(x)$是单调增函数，故$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$，

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx. \quad (3.16)$$

称（3.16）式为弧微分公式.

如果光滑曲线（1）的参数方程为$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，则弧微分可写成：

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt, \quad (3.17)$$

3.7.2 曲率

如图 3.14，当弧段$\overset{\frown}{M_1M_2}=\overset{\frown}{M_2M_3}$时，切线转角大者曲线弯曲程度就大，这就说明曲线的弯曲程度与切线的转角成正比；

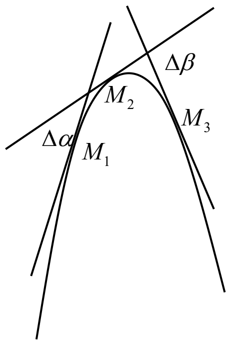


图 3.14

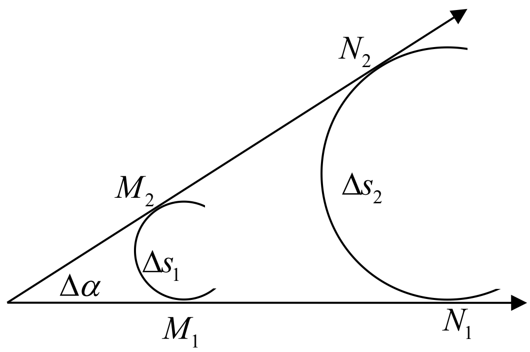


图 3.15

又由图 3.15，当两段曲线弧的切线转角相等时，弧长小的曲线弯曲程度大，这就说明曲线的弯曲程度与弧段的长度成反比.

综上所述，设曲线弧段$\overset{\frown}{M_1M_2}$的弧长为Δs，切线的转角为$\Delta\alpha$，比值$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$称为曲线弧段$\overset{\frown}{M_1M_2}$的平均曲率，记为$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

如果极限$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$存在，极限值

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

称为光滑曲线$y=f(x)$在点(x,y)处的曲率.

例　求曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 在点 $M(1,\frac{1}{3})$ 处的曲率.

解　$y'=x^2$，$y''=2x$，由曲率公式，于是点 $M(1,\frac{1}{3})$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2|x|}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}\ K=\frac{2\times 1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

易错题　例 求曲线 $y=a\ln(1-\frac{x^2}{a^2}),(a>0)$ 上的曲率半径为最小的点的坐标

解：

$$y'=-\frac{2ax}{a^2-x^2},y''=-\frac{2a(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)^2},(|x|<a)$$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)},\rho=\frac{1}{K}=\frac{(a^2+x^2)^2}{2a(a^2-x^2)},|x|<a$$

$$\frac{d\rho}{dx}=\frac{x(a^2+x^2)(3a^2-x^2)}{a(a^2-x^2)^2}$$，当−a<x<0 时，$\frac{d\rho}{dx}<0$

当 0<x<a 时，$\frac{d\rho}{dx}>0$，故当 x=0, y=0 时，ρ 最小，所求点为（0，0）

3.7.3　曲率圆

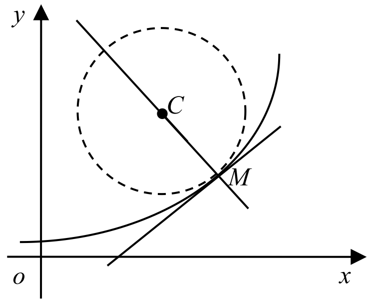


图 3.17

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$，过点 M 作曲线的法线，并在曲线凹侧的法线上取点 C，如图 3.17，

使得 $|MC|=\frac{1}{K}$，然后以点 C 为圆心，$R=\frac{1}{K}$ 为半径作圆，则称圆为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率圆，R 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处有以下关系：

（1）曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处相切；

（2）曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处有相同的凹向；

（3）曲率圆与曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处有相同的曲率.

*3.8 牛顿迭代法

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 一定存在一根 $\overline{x}$，使得 $f(\overline{x})=0$

我们还假设在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ 和 $f''(x)>0$．那么曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是递增的和凹的，如图 3.18.

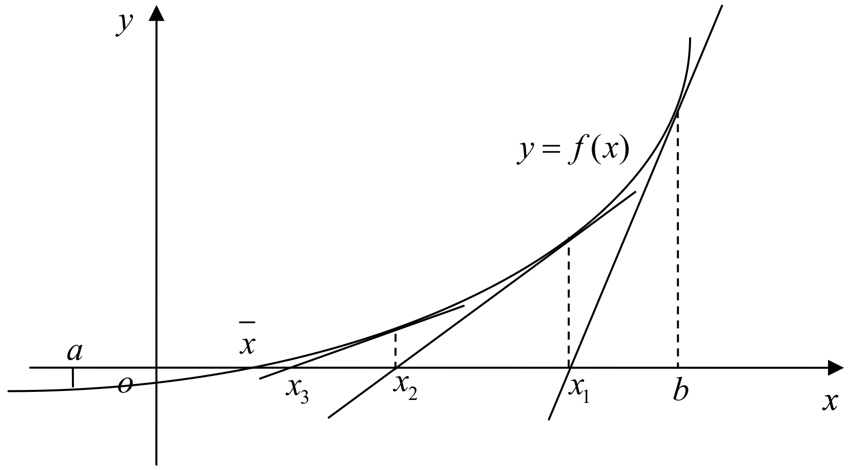


图 3.18

过点 $(b,f(b))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，

$$y=f(b)+f'(b)(x-b)$$

令 $y=0$，得与 x 轴的交点为

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)},$$

因为 $f'(x)>0$，所以 $x_1<b$；又因为 $f''(x)>0$，曲线是凹的，所以切线在曲线的下方，则

$$\bar{x}<x_1<b,$$

在过点 $(x_1,f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，

$$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$$

令 $y=0$，得与 x 轴的交点为

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

同样

$$\bar{x}<x_2<x_1,$$

重复上述作法，可以得到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \tag{3.20}$$

且

$$\bar{x}<x_n<x_{n-1}, \tag{3.21}$$

公式（3.20）称为求方程 $f(x)=0$ 的根的牛顿迭代公式，也称为切线法的迭代公式. 由（3.21）式可知，数列 $\{x_n\}$ 是单调递减且有下界，故数列 $\{x_n\}$ 收敛，且收敛到 $\bar{x}$.

第三章历年考题

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[2,4]$ 上有连续导数，且 $f(2)=f(4)=0$，

答案： 证明：$\max\limits_{2\le x\le 4}|f'(x)|\ge\left|\int_2^4 f(x)dx\right|$.

$$\text{设}x\in[2,4)$$
$$f(x)-f(2)=f'(\xi_1)(x-2),\quad \xi_1\in(2,x)$$
$$f(4)-f(x)=f'(\xi_2)(4-x),\quad \xi_2\in(x,4)$$
$$\text{令}M=\max_{2\le x\le 4}|f'(x)|,\text{则}|f(x)|\le M(x-2)$$
$$|f(x)|\le M(4-x)\qquad \cdots\cdots(3\text{分})$$
$$\left|\int_2^4 f(x)dx\right|\le\int_2^4|f(x)|dx\le\int_2^3 M(x-2)dx+\int_3^4 M(4-x)dx$$
$$=M\left.\frac{(x-2)^2}{2}\right|_2^3+M\left.\frac{-(4-x)^2}{2}\right|_3^4=\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M\quad\cdots\cdots(6\text{分})$$

2. 函数 $\boldsymbol{f(x)=2x^3-9x^2+12x-3}$ 单调递减区间.

答案： $[1,2]$;(f ′(x)=6$x^2-18x+12$; $f'(x)=0$ 时，$x=1$ 或 2；

当 $x\in(1,2)$时，$f'(x)<0$,单调递减区间为（1,2））

3. 设 f(x)在[a, b]上连续，在(a, b)内二阶可导，且 $f(a)=f(b)\ge 0$，又有

$f(c)<0\ (a<c<b)$.

试证：在内至少存在两点. ξ_1，ξ_2使$f''(\xi_1)>0$，$f''(\xi_2)>0$

答案： 因为 *f*(*x*)在$[a,b]$上连续，*f*(*x*)在$[a,b]$上取最小值，又 *f*(*a*)=*f*(*b*)≥0,

且 *f*(*c*)<0(a<c<b),(*a*<*c*<*b*),所以 *f*(*x*)必在（*a,b*）内某一点 x_0 取最大值，且 $f(x_0)<0$,

又因为 *f*(*x*)在（*a,b*）内可导，x_0 为极小值点（$a<x_0<b$）， 所以 $f'(x_0)=0$, *f*(*x*)

在$[a,x_0],[x_0,b]$上都满足 Lagrange 中值定理条件，所以有

$$f'(\eta_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<0,a<\eta_1<x_0,$$

$$f'(\eta_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0,x_0<\eta_2<b,$$

又 $f'(x)$ 在$[\eta_1,x_0],[x_0,\eta_2]$上都满足 Lagrange 中值定理条件，所以有

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(x_0)-f'(\eta_1)}{x_0-\eta_1}=\frac{-f'(\eta_1)}{x_0-\eta_1}>0.\quad \eta_1<\xi_1<x_0$$

$$f''(\xi_2)=\frac{f'(\eta_2)-f'(x_0)}{\eta\ -x_0}=\frac{f'(\eta_2)}{\eta_2-x_0}>0.\quad x_0<\xi_2<\eta_2.$$

所以 $f''(\xi_1)>0,\ f''(\xi_2)>0$. $a<\xi_1<b\ \ a<\xi_2<b$

4.证明不等式 $e^x>ex$，　$(x>1)$

答案：令 f(x)=ex－e $x(x\ge 1$)，则 $f'(x)=$ ex－e>0 (x>1),

所以 f(x)在 $x\ge 1$ 单调增加，所以当 x>1 时，f(x)> f(1)=0，即 ex>ex(x>1). 证毕

5. 设 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在（0,1）内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$

证明在（0,1）内有一点 ξ，使 $f'(\xi)=1$.

答案：设 F(x)= f(x) －x，则 F(x)在[0,1]闭区间上连续，在(0,1)内可导，

F(1)= f(1) －1<0，$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-1=\frac{1}{2}>0$，

由介定理知存在 $\xi_1\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\xi_1)=0$. 又 F(0)=0，由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$. 证毕

6.在半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱体，求此时圆柱体体积的最大值以及底半径与高的值.

答案：解法一：设圆柱体底半径为 r，高为 2h，体积为 V，则

$$h^2+r^2=R^2\qquad V=\pi r^2\cdot 2h=2\pi h(R^2-h^2)$$

$$\frac{dV}{dh}=2\pi R^2-6\pi h,\ 令\ \frac{dV}{dh}=0\ \ 得\ \ h=\frac{\sqrt{3}R}{3}$$

此时，r $=\sqrt{\frac{2}{3}}R$. 又 $\frac{d^2V}{dh^2}=-6\pi h<0,$

故 $h=\frac{\sqrt{3}R}{3}$ 为极大值点，由于驻点唯一，故该点为最大值点，$V_{\max}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

解法二：设圆柱体底半径为 r，高为 h，体积为 V，则

$$(\frac{h}{2})^2+r^2=R^2\qquad V=\pi r^2\cdot h=\pi(R^2h-\frac{h^3}{4})$$

$\frac{dV}{\mathrm{d}h}=\pi(R^2-\frac{3}{4}h^2)$，令 $\frac{dV}{\mathrm{d}h}=$ 0, 得 $h=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$，

此时，r = $\sqrt{\frac{2}{3}}R$. 又 $\frac{d^2V}{\mathrm{d}h^2}=-\frac{3}{2}\pi h<0,$

故 $h=\frac{\sqrt{3}R}{3}$ 为极大值点，由于驻点唯一，故该点为最大值点，$V_{\max}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

（不求 $\frac{d^2V}{\mathrm{d}h^2}$,用一阶导数判定,或说明”由实际问题可知,唯一驻点就是最大值点也可”）

7.设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在（0，3）内可导，且有 $\frac{1}{3}\int_0^1 xf(x)dx=f(3)$.

试证：必有 $\xi\in(-0,3)$ 使 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

答案：证明：设 $\varphi(x)$=x f(x)，则 $\varphi(x)$ 在[0,3]上连续，在(0,3)内可导，由已知条 件得

φ (3)=3f(3)=$\int_0^1 xf(x)dx$，

由积分中值定理，必有 $\eta\in$ [0,1]，(或 $\eta\in$ (0,1))，使 $\int_0^1 xf(x)dx$ $=\eta f(\eta)$，

即存在 $\eta\in$ [0,1],使 $\varphi(\eta)=\int_0^1 xf(x)dx$，于是 $\varphi(\eta)=\varphi$ (3)，所以 $\varphi(x)$ 在[0,3]上满足 Rolle 定理条件，所以有 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使 $\varphi'(\xi)=0,$ 即

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}，\ \xi\in(0,3).$$

注：对 $\varphi(x)$ 在[η ,3]使用拉格朗日定理也可得到 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

第四章　定积分

4.1 定积分的概念和性质

4.1.1 定积分存在的充分与必要条件

1.定积分存在的充分条件：

1）f(x)在[a,b]上连续。

2）f(x)在[a,b]上有界，且只有有限个间断点。

2.定积分存在的必要条件：

可积函数必有界。

注：有界不一定可积（如狄里克莱函数），函数可积是$S_n=\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$趋于某一确定值 I。

狄利克莱函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是}[0,\quad 1]\text{上的有理数}\\ 0, & x\text{是}[0,\quad 1]\text{上的无理数}\end{cases}$，在$[0,1]$上有界，但不可积.。

因为对$[0,1]$的任意划分，如果在每个小区间上取ξ_i都是有理数，ξ_i'都是无理数，则得到两个不等的黎曼和：

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1$$

$$S_n'=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

因此，当$\lambda\to 0$时，$D(x)$的黎曼和的极限不可能存在，即$D(x)$不可积.

P143 例 4 将极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln[(1+\dfrac{1}{n})\cdot(1+\dfrac{2}{n})\cdot\cdots\cdot(1+\dfrac{n}{n})]$表示成定积分.

解 $\dfrac{1}{n}\ln[(1+\dfrac{1}{n})\cdot(1+\dfrac{2}{n})\cdot\cdots\cdot(1+\dfrac{n}{n})]$

$$=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$$

因$\ln(1+x)$在$[0,1]$上连续，所以可积，因此，可以将区间$[0,1]$ n等分，则$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，同时取$\xi_i=\dfrac{1}{n}$　$(i=1,2,\cdots,n)$. 由定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{2}{n})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{n}{n})]=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[sin\frac{\pi}{n}+\cdots+sin\frac{n-1}{n}\pi]$

解：上式$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\frac{1}{n}sin\frac{n-1}{n}\pi+\frac{1}{n}sin\pi]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1 sin\pi x dx$$

4.1.2 定积分的性质

1. 求区间的长度
2. 积分的线性性质
3. 积分的可加性
4. 积分的保号性

推论 1 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\ge g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$$

可以证明$f(x)$在$[a,b]$上可积时，$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，并有下述结论：

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx \quad (a<b)$

证 因为$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$，由推论 1 和性质 1 有

$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$$

因此 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

1.估值定理

设 M，m 分别是函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

2.中值定理

（积分中值定理）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

例 1 运用定积分保号性完成下列比较：

1） $\int_0^1 e^x dx$与$\int_0^1 (1+x)\,dx$

解 ∵当 x∈[1,0]时，$e^x \geq$1+x 恒成立。

$\therefore \int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x)\,dx$

2） $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$与$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\ln x\,dx$

解 ∵当 x∈[1,0]时，$x\ln x \geq \sqrt{x}\ln x$恒成立。

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x}\ln x\,dx < \int_{\frac{1}{2}}^1 x\ln x\,dx$

例 2 已知当 a≤x≤b 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，求证：

$$(b-a)\,f(x) < \int_a^b f(x)dx < \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

证： $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，$a \leq \xi \leq b$

∵$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在定义域内单调递增

$\therefore f(\xi) > f(a)$

$\therefore (b-a)\,f(x) < \int_a^b f(x)dx$

设$g(x) = \frac{x-a}{2}[f(a)+f(b)] - \int_a^x f(x)dx$

则$g'(x) = \frac{x-a}{2}f'(x) + \frac{f(a)-f(x)}{2}$，$g'(a)$=0

$$g''(x) = \frac{x-a}{2}f''(x) > 0, x \in (a,b]$$

即$g'(x)$在$[a,b]$上单调递增。

$\therefore g'(x) > g'(a) = 0$

$\therefore$g(x)在定义域上单调递增。又$\because g(a) = 0 \therefore g(b) > 0$

$\therefore (b-a)\ f(x)\ < \int_a^b f(x)dx < \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

课后思考题：

利用柯西-施瓦兹不等式证明$(\int_a^b f(x)+g(x)^2dx)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b g^2(x)ds)^{\frac{1}{2}}$

4.2 微积分基本定理

4.2.1 变限积分

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$ 为**变上限函数**.

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$（$a \le x \le b$）

1.变限积分的性质：

（1）如果函数 f(x)在[a,b]上可积，则函数 F(x)=$\int_a^x f(t)dt$ 在[a，b]上连续。

（2）如果函数 f(x)在[a,b]上连续，则函数 F(x)=$\int_a^x f(t)dt$ 在[a，b]上可导。

2.变限积分的求导：

$$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$$

$$F'(x)=f\left[\varphi_2(x)\right]\varphi'_2(x)-f\left[\varphi_1(x)\right]\varphi'_1(x)$$

1）注：（易错点）x 为“求导变量”，t 为“积分变量”。x 只出现在上下限时才能利用公式，若出现在被积函数中，必须通过恒等变形将其移出被积函数，再求导。

例： 对$\int_a^x (x-t)f'(t)dt$ 求导

解： 首先将$\int_a^x (x-t)f'(t)dt$ 展开为

$\int_a^x xf'(t)dt - \int_t^x tf'(t) = x\int_a^x f'(t)dt - \int_t^x tf'(t)$

在进行求导：

$= \int_a^x f'(t)dt$ +xf’(x)-xf’(x)=f(x)-f(a)

***小练习：** 设 f(x)连续，则 $\frac{d}{dx}[\int_0^x tf(x^2-t^2)dt]=()$

A.xf(x^2) B.-xf(x^2) C.2xf(x^2) D.-2xf(x^2)

答案： A

2）注：此类函数求导若上限为 x，可直接将 x 换入积分函数的变量中，若为 x 的函数，则可以看作复合函数求导。

求极限：**例：** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$

求导： **例：** $y=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{-t}dt$ y’ $=-\sin xe^{-\cos x}-\cos xe^{-\sin x}$

y= $\int_{\sin x}^{\cos x}x\cos(\pi t^2)dt=x\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$$y'=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt+x(-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x))$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)}\sin t^2dt=3x^2\varphi'(x^3)\sin[\varphi(x^3)]^2-\varphi'(x\ \ )\sin[\varphi(x\ \ )]^2$$

3.若 f(x)是以 T 为周期的可积函数，则 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T}f(x)dx,$ a 为常数。

经典题： 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 内连续且 $f\left(x\right)>0.$ 证明函数

$$F\left(x\right)=\frac{\int_0^x tf\left(t\right)dt}{\int_0^x f\left(t\right)dt}\text{在}\left(0,+\infty\right)\text{内为单调增加函数.}$$

解： $F'(x)=\frac{f(x)}{(\int_0^x f(t)dt)^2}.(x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt)$,

设 $g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

$g'(x)=\int_0^x f(t)dt$ ≥0,

4.3 不定积分的概念和性质

4.3.1 不定积分的概念

设在区间 I 上，若 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的全部原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数），即 $\int f(x)dx=F(x)+C$，

例 1 求 $\int \frac{1}{x}dx$.

解 因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$；（绝对值看实际情况去掉或者保留）

从原函数的定义可以看出，求导数与求原函数是互逆的运算，前者是由原函数求 导数，后者是由导数求原函数。

（1）$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$

（2）$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$

性质 1 设函数 f（x）和 g(x)在区间 I 上的原函数都存在，则 $f(x)\pm g(x)$ 在区间 I 上的原函数也存在，且

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

性质 2 设函数 f（x)的原函数存在，k 是非零常数，则 $kf(x)$ 在区间 I 上的原函数也存在，且

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

基本积分公式特别重要

P157 **例 3.** 对于分子分母都是多项式的式子积分时，把分子凑成可以和分母约分的形式，尽量将分子都化成常数，或者凑成能够通过积分表积分的形式。

求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$.

解 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx=\int (x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})dx$

$=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

P157 例 7.

求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

解 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C$$

“1 的代换”，将式子（一般都是分子）是 1，分母含有三角函数平方项的分式，分子 1 可以换成$sin^2 x + cos^2 x$,然后化简再积分；若分子是 1，分母是三角函数平方和的分式，则在分母中提出一个$cos^2 x$再积分，例如

$$\int \frac{dx}{2sin^2 x + 3cos^2 x} = \int \frac{dx}{cos^2 (\frac{2}{3}tan^2 x + 1)} = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} d(\sqrt{\frac{2}{3}} tanx)}{(\sqrt{\frac{2}{3}} tanx)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}} tanx\right) + C$$

P157 例 8,分母是高次多项式之和可以考虑将分式裂项成分母简单的几个分式之和(差)，再积分。

计算 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + x^4} dx$.

解 因 $\frac{1}{x^2 + x^4} = \frac{1}{x^2(1 + x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2}$,

所以 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + x^4} dx = \int_1^{\sqrt{3}} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2}) dx$

$$= (-\frac{1}{x} - \arctan x)\Big|_1^{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}$$

求 $\int \frac{x^2 + sin^2 x}{x^2 + 1} sec^2 x \, dx$

解 原式=$\int \frac{x^2 + 1 - (1 - sin^2 x)}{x^2 + 1} sec^2 x dx = \int \left(sec^2 x - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx$

=tanx-arctanx+C

基本积分表

1. (1) $\int k dx = kx + C$ （k 是常数）

(2) $\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C$

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

(4) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6) $\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C$

(7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ （$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$）

(9) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ （$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arc}\cot x + C$）

(10) $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

(11) $\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

(12) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(13) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

2. 对公式进行补充：

1） $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

2） $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

3） $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

4） $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

1）注：对公式的灵活运用。（解题技巧）

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int\frac{1}{a^2[(\frac{x}{a})^2+1]}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}d\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}}d(x+\frac{1}{4})$$

4.4 换元法

4.4.1 第一类换元法（凑微分法）

设 $f(u)$ 具有原函数（$u=\varphi(x)$）可导则有换元公式

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

1. 求 $\int e^{2x}dx$. $\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$

解 $\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}(2x)'dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)$.

2. 求 $\int\sin^2 x\cos xdx$.

解 注意到，令 $u=\sin x$，则 $du=\cos xdx$.

于是，得

$$\int\sin^2 x\cos xdx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C,$$

代回原来的积分变量，得

$$\int\sin^2 x\cos xdx=\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

两个常用结论

1）求 $\int\tan xdx$.

解 $\int\tan xdx=\int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin xdx=-\int\frac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln|\cos x|+C$.

则

$$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C. \qquad (4.7)$$

类似地可以求得

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C. \tag{4.8}$$

2）求 $\int \sec x dx$.

解 $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

则 $$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{4.9}$$

类似地可以求得

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{4.10}$$

公式(4.7)-(4.10)也经常用，请大家记住。

4.4.2 不定积分第二类换元法

基础篇

1）求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ （a＞0）.

解 设 $x = a\sin t$，$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$，则 $dx = a\cos t dt$，

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t,$$

于是 $$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t\right) + C,$$

由于 $x = a\sin t$，$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$，所以 $t = \arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$

于是，有 $$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

2） 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $(a > 0)$.

解 设 $x = a\tan t$，$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx = a\sec^2 t dt$，

$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} = a\sec t$.

于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t} \cdot a\sec^2 t dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad (C = C_1 - \ln a).$$

3）求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a > 0)$.

解 $x > a$ 时，令 $x = a\sec t$，$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则

$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$，$dx = a\sec t\tan t dt$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec t \cdot \tan t}{a\tan t}dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln(\sec t + \tan t) + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \ (C = C_1 - \ln a).$$

当 $x < -a$ 时，令 $u = -x$，则 $u > a$，由上面结果可知

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = -\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}du = -\ln(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C_2$$

$$= -\ln(-x + \sqrt{x^2-a^2}) + C_2 = \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2} + C_2$$

$$= \ln(-x - \sqrt{x^2-a^2}) + C \ (C = C_2 - 2\ln a).$$

综上所述，$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \boldsymbol{=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C}$.

注：一般来说，如果被积函数中含有：$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$ 和 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，可分别做三角代换 $x=a\sin t$，$x=a\tan t$ 和 $x=a\sec t$ 将根号去掉. 但有的积分也可不用这样的代换，如 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$，利用凑微分更简单.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{d(x^2-a^2)}{2\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}+C.$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

训练部分：

求 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx$　　　　答案：$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$+c

4.4.3 定积分的换元法

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，则

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$（该结论可以直接用）

2. **定理 4**:设 $f(x)\in C[-a,a]$,

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$；

(2) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；

(3) 如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

提高篇：

1） 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^3 x-\cos^5 x}dx$.

解 因 $\sqrt{\cos^3 x-\cos^5 x}=\sqrt{\cos^3 x\sin^2 x}=\cos^{\frac{3}{2}} x|\sin x|$，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^3 x-\cos^5 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}} x|\sin x|dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}} x\sin xdx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}} xd(\cos x)$$

$$=\left[-\frac{4}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{5}.$$

2）求 $\int_{0.5}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ 令 $\sqrt{x}$ =t dx=2tdt

解 原式= $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}.2tdt=2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\arcsin td(\arcsin t)=\frac{3}{16}\pi^2$

4.5 分部积分法

4.5.1 不定积分的分部积分法

$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ 亦可写成 $\int udv=uv-\int vdu$

适用范围：v' 的积分容易求，u 的积分难求，且 $u'v$ 的积分容易求

例 1 求 $\int\arctan xdx$.

对于被积函数只有一项而非两个函数乘积的积分可以当成和函数的乘积

解 $\int\arctan xdx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)\quad=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

例 2 求 $\int e^x\sin xdx.$

在分部积分之后，新产生的不定积分仍无法积分或无论做几次分部积分都无法得出原函数时，可以观察是否可以通过做有限次的分部积分而得到原不定积分的一个等式，从而解出不定积分的原函数，此方法在含有 e^x，sinx 和 cosx 的函数应用最多。

解 $\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$

$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int e^x \sin x dx$ 是同一类型的积分，对 $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ 再做一次分部积分，

$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}e^x = e^x \cos x + \int \sin x e^x \mathrm{d}x$

代入上式，

$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$，

因此 $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$.

例 3 求 $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$.

解 令 $\sqrt[3]{x} = t$，则 $x = t^3$，$dx = 3t^2 dt$，于是

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = 3\int t^2 e^t dt = 3\int t^2 de^t$$

$$= 3t^2 e^t - 6\int te^t dt = 3t^2 e^t - 6\int tde^t$$

$$= 3t^2 e^t - 6te^t + 6\int e^t dt$$

$$= 3t^2 e^t - 6te^t + 6e^t + C$$

$$= 3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.$$

例 4 求解 $\int \frac{e^x(1+sinx)}{cosx+1} dx$

解 原式

$= \int \frac{e^x}{cosx+1} dx + \int \frac{e^x sinx}{cosx+1} dx = \int \frac{e^x}{cosx+1} dx + \frac{e^x sinx}{cosx+1} - \int e^x \frac{cosx(1+cosx)+sin^2 x}{(1+cosx)^2} dx = \frac{e^x sinx}{cosx+1} + C$

例 5 求解 $\int sec^3 x dx$

解 原式=

$\int secxdtanx = secxtanx - \int tanxdsecx = secxtanx - \int \frac{sin^2 x}{cos^3 x} dx = secxtanx - \int (secx - sec^3 x)dx$

$$\therefore \int \frac{e^x(1+sinx)}{cosx+1} dx = \frac{1}{2} secxtanx + \frac{1}{2} \ln|secx + tanx| + C$$

4.5.2 定积分的分部积分法

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx = \begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m \\ \dfrac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}, & n=2m+1\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

以下为推导过程：

计算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$，$n=1,2,\cdots$

解 $n\ge 2$ 时，由分部积分公式有，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=0+(n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx]$$

$$=(n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

因此

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

又 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$.

所以

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}=\cdots$$

$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=\cdots$$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m \\ \dfrac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}, & n=2m+1 \end{cases} \quad (m=1,2,\cdots).$$

对于积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 作代换 $t=\frac{\pi}{2}-x$，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$，因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 也有上述公式.

求 解 $\int_0^1 \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$

解 原式= $\int \frac{e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2} \mathrm{dx} = e^x \left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right)\Big|_0^1 dx$

$= \int_0^1 e^x \ln(1+x)dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx = e^x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right)\Big|_0^1 dx - e^x\ln(1+x)\Big|_0^1 dx +$

$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx$

$= \frac{e}{2} - 1$

求 $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx$（m 为正整数）

解 原式= $x(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\Big|_0^1 dx$

$= \int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}dx = m\int_0^1 (x^2-1)(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} + (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}dx = -m\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx$

$= m\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}dx$（m≥ 2

$$\therefore \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx = \frac{m}{m+1}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}dx = \begin{cases} \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot \ldots \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}(m=2k) \\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot \ldots \cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}(m=2k+1) \end{cases}$$

m=1 时 $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi}{4}$； m=2 时 $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}$。

*4.6 反常积分的审敛法

由于此节为星号节，掌握即可。（级数讲的详细）

1. 根据反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的定义，$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. 若记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

2. 定理 4.10 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0.$ 若函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,+\infty)$ 上有上界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

根据定理 4.10，对于非负函数无穷限的反常积分，我们有以下的比较审敛原理.

3.（比较审敛原理 1）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $0\leq f(x)\leq g(x)$，那么

（1）如果 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

（2）如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散.

证明 反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ (a>0)$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leq 1$ 时发散.

证 取 $b>a$，

（1）当 $p=1$ 时，$\int_a^b \frac{1}{x^p}dx=\int_a^b\frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^b=\ln b-\ln a$，

因 $\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$，所以 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散.

（2）当 $p\neq 1$ 时，

$$\int_a^b\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{1}{1-p}x^{-p+1}\right]_a^b=\frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-a^{-p+1})$$

$p>1$ 时，$\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-a^{-p+1})=\frac{a^{-p+1}}{p-1}$，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛；

$p<1$ 时，$\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-a^{-p+1})=+\infty$，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散.

综上，当$p>1$时，反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$收敛，其值为$\frac{1}{p-1}$；当$p\le 1$时，反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$发散.

*4.7 定积分的应用

4.7.1 微元法

1.微元法或元素法

若 U 符合

（1）U 是与一个变量 X 的变化区间有关的量

（2）U 对于区间具有可加性。即：若将划分为 n 个小区间，则 U 相应地分成 n 个部分量(i=1,2,…n)，而 U 等于所有部分量之积，即:U=

（3）部分量的近似值可以表示为 f().

则可用定积分表示：

(1) 确定所求量 U 和自变量及其变化区间.

(2) 在上任取一小区间,求出相应于这个小区间上的部分量的近似值.

如果(实际上)就将 f(x)dx 称为 U 的微元或元素。记为 dU 即：dU=f(x)dx

(3)以 f(x)dx 为被积表达式，在上的积分就得到所求量 U=

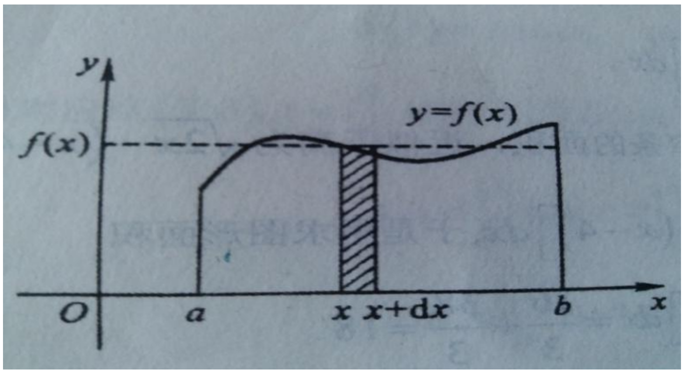
4.7.2 定积分在几何上的应用

1.平面图形的面积：

(1)直角坐标的情形：

由定积分的几何意义知，在区间上，当 f(x)≥0 时，曲线 y=f(x),直线 x=a,x=b 与 x 轴围成的曲边梯形的面积就是定积分:,

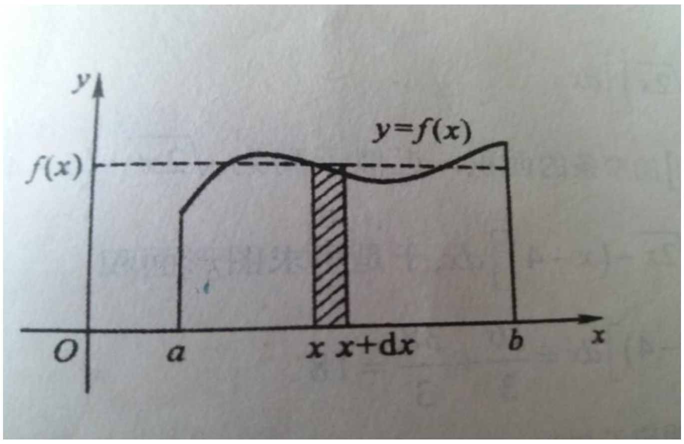
其中被积表达式就是直角坐标系下的面积元素，它表示高为，底为的小矩形的面积，如图所示：



一般地，区间上以曲线 y=f(x),y=g(x)为上下曲边的曲边四边形的面积元素为：

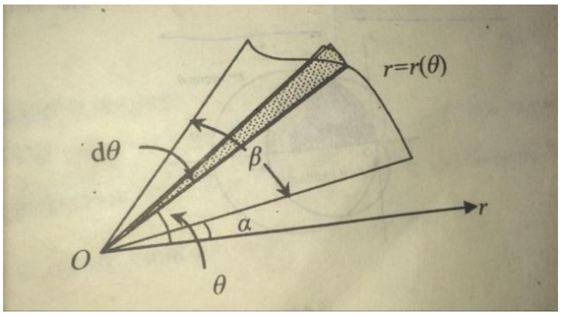
dA=［f(x)-g(x)］dx

即高为 f(x)－g(x),底为 dx 的小矩形的面积代替。这样，x=a,x=b,y= f(x)　和 y= g(x)所围图形的面积为：A=



(2)极坐标的情况：

在极坐标情况下，一平面图形由曲线 r=r()及射线围成，称之为曲边扇形。这里 r()在上连续，则下面曲边扇形面积为 S=



2.立体的体积

已知平行截面面积的立体的体积.

设一物体位于平面 X=a,X=b 之间，任意垂直于 X 轴的平面截该物体，所得截面面积为 A(X),且 A(X)在区间上连续，则立体的体积元素：dV=A(X)dx

从而立体体积为：V=旋转体的体积

由连续曲线 f(x)，直线 x=a，x=b 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积。

过内任意点 x，用垂直于 x 轴的平面截旋转体，所得截面面积 A(X)=∏f²(x)

所以旋转体的体积为：V=f²(x)dx

若由 x=Φ(y),y=c,y=d 及绕有 y 轴旋转一周 V=∏

由曲线 y= f(x)≥0,直线 x=a≥0,x=b≥0 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转所成的旋转体体积公式为：　V=

平面曲线的弧长（光滑曲线弧是可求长的）

(1)直角坐标情况：

曲线弧由 y=f(x)给出，则弧长为：S=dx

(2)参数方程情况:

曲线弧由参数方程 x=Φ(t),y=Φ(t)给出，则弧长为：S=dt

极坐标系中曲线的弧长

如果曲线方程为极坐标形式 r=r(θ), θ∈,且连续可导，则: X=r(θ),y=r(θ)

则 S=dθ=dθ

4.7.3 定积分在物理上的应用

1.变力沿直线做功

W=

2. 水压力

P=ρgh,F=PA

F=A·ρgh

3.引力

F=G·

第四章历年考题

1.求不定积分 $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

答案： 原式$\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}dt=\int\csc t dt\quad\cdots\cdots(3分)$

$$=\ln\left|\csc t-\cot t\right|+C\quad\cdots\cdots(6分)$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+C\quad\cdots\cdots(7分)$$

2. **求$\int x^2e^xdx$**

答案：原式=$x^2e^x-\int 2xe^xdx$

$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$

3. 计算不定积分$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$.

答案： $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}\ln x-2\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

令$\sqrt{x+1}$=t，有$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$=2$\sqrt{x+1}$+ln$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$

所以原式=2$\sqrt{x+1}$lnx－4$\sqrt{x+1}$−2 ln$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$+C .

4. 求$\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx$

答案：解法一：原式=$\int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)-2}{x^2+4x+5}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\int\frac{d(x+2)}{1+(x+2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\arctan(x+2)+C$$

（不加任意常数扣一分，不加绝对值符号不扣分，下同）.

解法二：设 x+2=t，则 dx=dt，

原式=$\int\frac{t-2}{t^2+1}dt$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}d(t^2+1)-2\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-2\arctan(x+2)+C$$

5. 计算不定积分$\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.

答案：$\displaystyle \int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2+1)\arctan x-\arctan x}{1+x^2}dx$

$$=\int \arctan x dx-\int \arctan x d\arctan x$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

第五章　无穷级数

无穷级数是研究函数的一个重要的工具，在许多抽象理论和应用学科中，都处于重要的地位. 无穷级数就其实质而言，是极限理论的深入，它包括常数项级数和函数项级数两部分. 利用级数不仅可表示初等函数，也可以表示很多有用的非初等函数，进而用级数来研究这些函数，例如可用幂级数来研究复杂函数的性质；还可以加深对中小学数学理论的理解，例如关于循环小数的理论，中学数学用表的制作等. 本章先讨论常数项级数，而后在函数项级数中重点介绍幂级数和三角级数.

5.1 常数项级数的概念和性质

5.1.1 常数项级数的概念

定义 5.1 设$u_1,u_2,...,u_n,...$为无穷数列，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$u_1+u_2+...+u_n+...$，（5.4）称为常数项级数或无穷级数，简称为级数，其中u_n称为常数项级数的通项或一般项. 此级数也常写作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。记　$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+...+u_n$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和，部分和构成的数列记为$\left\{s_n\right\}$

定义 5.2　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\left\{s_n\right\}$有极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$s$为其和，此时$s=u_1+u_2+...+u_n+...$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$不存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

由于级数收敛等价于其部分和数列收敛，因此，级数收敛和数列收敛有着极为密切的关系：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与数列$\left\{s_n\right\}$同时收敛或同时发散. 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$s$，则部分和$s_n\approx s$，它们之间的差$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+...+$，称为级数的余项. 显然有$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(s-s_n\right)=0$，而$\left|r_n\right|$是用$s_n$近似代替$s$所产生的误差.

例 1　判断级数的收敛性.

解　$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，$\dfrac{1}{1\bullet 2}+\dfrac{1}{2\bullet 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}+...$

$$s_n=\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，

即级数收敛，其和为 1.

例 2 证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散.

证 此数项级数的部分和数列为

$$s_n=\begin{cases}1,n=2k-1.\\0,n=2k.(k=1,2,...)\end{cases}$$

显然这个部分和数列发散，因此由级数收敛的定义知，此数项级数发散.

例 3 讨论等比级数（或称几何级数）

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+...+aq^n+...$（5.5）的收敛性，其中$a\neq 0$.

解 当$q\neq 1$时，级数的部分和为

$$s_n=a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当$|q|<1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，故数列$\{s_n\}$有极限，即级数(5.5)收敛，其和为

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{1-q}.$$

当$|q|>1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$，故$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，即数列$\{s_n\}$没有极限，所以级数(5.5)发散.

当$q=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$，数列$\{s_n\}$没有极限，所以级数(5.5)发散.

当$q=-1$时，级数为 $a-a+a-...+(-1)^n a+...$，

由例 2 知，此级数发散，即级数(5.5)发散.

由上面的讨论可知，等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$当$|q|<1$时收敛；当$|q|\geq 1$时发散.

例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是公比$q=\frac{1}{2}$的等比级数，$|q|<1$，故该级数收敛，且其和为

$$s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{2^n}$是公比$q=-\frac{3}{2}$的等比级数，$|q|>1$，则级数发散.

例 4 证明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证 $s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}n\to\infty$$

所以，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

5.1.2 级数收敛的基本性质

性质 1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于s，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$收敛于ks，其中k是常数. 也就是说，当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

证 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为s_n，级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$的部分和为σ_n，则

$$\sigma_n=ku_1+ku_2+\ldots+ku_n=ks_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}ks_n=k\lim_{n\to\infty}s_n=ks,$$

这就说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$收敛，且和为ks.

由极限的性质知道，当$k\neq0$时，极限$\lim_{n\to\infty}ks_n$与$k\lim_{n\to\infty}s_n$必同时存在或同时不存

在，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$具有相同的收敛性.

性质 2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均收敛,其和分别是s与σ,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \pm v_n\right)$也收敛，且其和为$s \pm \sigma$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \pm v_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n = s \pm \sigma$$

证 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别是s_n和σ_n,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \pm v_n\right)$部分和为

$$\delta_n=\left(u_1 \pm v_1\right)+\left(u_2 \pm v_2\right)+\ldots+\left(u_n \pm v_n\right)$$

$$=\left(u_1+u_2+\ldots+u_n\right) \pm \left(v_1+v_2+\ldots+v_n\right)$$

$$=s_n \pm \sigma_n$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=s_n \pm \sigma_n$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛。

说明：

（1）两个收敛级数可以逐项相加或逐项相减；

（2）一个收敛级数与一个发散级数相加（或相减）得到的新的级数一定发散.

例 5 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n})$是发散的.

证 用反证法．设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n})$收敛，因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，由性质 2 可知$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+\frac{1}{2^n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$也应该是收敛的，但前面已证明了调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，出现了矛盾．因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n})$是发散的.

性质 3 在级数中增加、去掉或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

证 设将级数

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n}+\ldots ,$$

的前 k 项去掉，得到级数$u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+n}+\ldots$,

该级数的部分和为$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_{k+n} = s_{k+n} - s_k$，

其中s_{n+k}是原级数的前$n+k$项的和．由于s_k是常数，所以当$n \to \infty$时，σ_n与s_{n+k}或者极限都存在，或者都不存在.

该性质也就是说，级数的收敛或发散与级数中有限多项的数值无关.但是，收敛级数的和的大小却往往由前有限项所决定，正因为如此，对于收敛级数，我们常常用前有限项的和来近似代替级数的和.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所得到的新级数也收敛，且其和不变.

证明从略.

应该注意的是，如果加括号后的级数收敛，并不能断定去括号后原来的级数也收敛.

例如，发散级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 当给它加括号后得到的新级数

$$\left[(-1)+1\right]+\left[(-1)+1\right]+\left[(-1)+1\right]+...=0$$

是收敛的且和为 0；也可得到另一级数

$$1+\left[(-1)+1\right]+\left[(-1)+1\right]+\left[(-1)+1\right]+...=1$$

它也是收敛的，其和为 1

如果加括号后的级数发散，则去括号后原来的级数也发散.

性质 5 （收敛级数的必要条件）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则必有$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 证级数的部分和为$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = s_{n-1} + u_n$，

有$u_n = s_n - s_{n-1}$，因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，即$\lim_{n\to\infty} s_n = s$，所以有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

特别要注意的是，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 仅是级数收敛的必要条件而非充分条件，即便是一个级数的一般项的极限为零，级数也不一定收敛．例如，对级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，其一般项的极限为

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

但前面已证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的．也就是说，不能由 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 来判定级数收敛.

但是若 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ ，则可据此判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 6 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+....+\frac{n}{n+1}+...$$

，的收敛性.

解 级数一般项的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{u}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0,$$

不满足级数收敛的必要条件，故该级数发散.

5.2 正向级数的审敛法

例 1 证明：如正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定收敛.

证 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，由级数收敛的必要条件有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

存在一个自然数 N ，当 $n>N$ 时，有 $0<u_n<1$，从而 $u_n^2<u_n$，

由比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

例 2 讨论 p—级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ 的收敛性，其中常数 $p>0$

证 （1）当 $0<p\leq 1$ 时，显然 $\frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}$ ，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 必发散；

（2）当 $p>1$ 时，对函数 $f(x)=\frac{1}{x^{p-1}}$ 在 $[n-1,n](n\geq 2)$ 上应用拉格朗日中值定理：

$$f(n-1)-f(n)=\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}=\frac{p-1}{\xi^p},$$

$$(n-1<\xi<n)$$

由于$1<\xi^p<n^p$，则$\dfrac{1}{(n-1)^{p-1}}-\dfrac{1}{n^{p-1}}>\dfrac{p-1}{n^p}$，从而当$n\geq 2$时

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right],$$

对于级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(n-1)^{p-1}}-\dfrac{1}{n^{p-1}}\right]$的部分和为

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

$$=1-\frac{1}{n^{p-1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)=1,$$

所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(n-1)^{p-1}}-\dfrac{1}{n^{p-1}}\right]$收敛，由比较审敛法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛.

p—级数的收敛性很重要，以后作为结论可以直接使用.

例 3 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$的收敛性.

解 由于

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}>\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1},$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$是发散的，由比较审敛法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$发散.

例 4 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$的收敛性.

解 由于$\sqrt[n]{n}<3$

所以 $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\dfrac{1}{3n}$,

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散.

在使用比较审敛法时需要正确地建立不等式关系，当级数的一般项较复杂时，这是很麻烦的，所以常使用比较审敛法的极限形式.

例 5 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 的收敛性.

解 取 $v_n = \frac{1}{n}$，那么 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$，

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法知，原级数发散.

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+1)}}$ 的收敛性.

解 因为一般项 $\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+1)}}$ 与 $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是同阶无穷小（$n\to\infty$ 时），

故取 $v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，那么 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1$，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由比较审敛法知，原级数是收敛的.

例 7 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$ 的收敛性.

解 设 $u_n = \ln(1+\frac{2}{n^2})$，

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to\infty} n^2\ln(1+\frac{2}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{2}{n^2} = 2$$

而 $p = 2 > 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$ 收敛.

例 8 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{(n+1)!}}{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1$$

，

由比值审敛法知，级数是发散的.

例 9 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (x > 0)$ 的收敛性性.

解 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} = x \cdot \frac{n+1}{n},$$

故 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x,$ 根据比值审敛法知，当 $0<x<1$ 时，级数收敛；当 $x>1$ 时，级数发散；当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n,$ 显然是发散的.

例 10 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

解 $u_n = \frac{3^n n!}{n^n},$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{\mathrm{e}} > 1,$$

因此原级数发散.

例 11 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的收敛性.

解 由于

$$\frac{n\cos^2 \dfrac{n\pi}{3}}{2^n} \le \frac{n}{2^n},$$

记 $v_n = \frac{n}{2^n}.$ 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛，再由比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 是收敛的

例 13 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{2}>1,$$ 故所给级数发散.

比值审敛法和根值审敛法结论很相似，实际上，两个审敛法是有内在联系的：若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 一定存在且相等，反之结论不真．由此可见，能用比值审敛法判别的级数，一定可用根值审敛法来判别.

例 14 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 的收敛性.

解 $u_n=2^{-n-(-1)^n}=\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}}=\frac{1}{2}<1,$$

根据根值审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛.

但是，本题若用比值审敛法是不能得到结论的，因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}=2^{-1+2(-1)^n}=\begin{cases}\frac{1}{8}, & n=2k-1,\\ 2, & n=2k,\end{cases}$$（k 为正整数），

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在.

例 15 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 的收敛性.

解 研究反常积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty,$$

所以反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ 是发散的，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

5.3 绝对收敛与条件收敛

5.3.1 交错级数及其审敛法

定义：如果一个级数的各项是正负相间交替出现的，称该级数为交错级数，其一般形式为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$或\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

其中$u_1,u_2,u_3,u_4,\ldots\ldots$都是正数. 由收敛级数的性质知，上述两种形式的级数有相同的收敛性，下面给出该级数的一个审敛法.

定理:（莱布尼兹（Leibniz）判别法） 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$满足条件：

（1）$u_{n+1}\le u_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数收敛，且其和$s\le u_1$，其余项 rn 的绝对值$|r_n|\le u_{n+1}$.

例 1 判别交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的收敛性.

解 $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

所以由莱布尼兹判别法，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛.

例 2 判别交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$的收敛性.

解 设$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<1$$

所以，$u_{n+1}<u_n$，

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

解析： 分子或分母有理化是证明级数收敛的常用方法。

由莱布尼兹判别法，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$收敛.

例 3 判别交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{10^n}$的收敛性.

解 $u_n=\frac{n}{10^n}$，设$f(x)=\frac{x}{10^x}(x\geq 1)$，由于

$$f'(x)=\frac{1-x\ln 10}{10^x}<0,$$

知$f(x)$在$x\geq 1$上单调减少，故$f(n)>f(n+1)$，

.

又$u_n>u_{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{10^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10^x\ln 10}=0,$$

由莱布尼兹判别法，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{10^n}$收敛.

分析：这里应该注意的是，对交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，当它满足莱布尼兹判别法中的条件时一定收敛，如果它不满足定理中的条件$u_{n+1}\leq u_n$，那么它不一定收敛. 例如级数$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{5^n}+\ldots$，是发散的；另一方面，要求$u_n$单调减少的条件也不是必要的，例如级数

$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$，是收敛的，但该级数的项不具有单调性.

5.3.2 绝对收敛与条件收敛

定义　如果绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；如果绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛. 由上述定义可知：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛；级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$绝对收敛；收敛的正项级数一定是绝对收敛的.

定理　如果绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛。

例 4　判别下列级数的收敛性. 若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛？

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$（a 为常数）.

解　（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$，应用根值审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$绝对收敛.

（2）由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，知原级数绝对收敛.

（3）由于$\left|\frac{\sin na}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$绝对收敛.

常用结论：定理 5.8 说明，对于一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛；如果绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，不能判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 但是，如果用正项级数的比值审敛法或根值审敛法判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则可以判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发

散．这是因为在上述两种审敛法的证明过程中（以比值审敛法为例），若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho>1$，则 $|u_{n+1}|>|u_n|$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，根据收敛的必要条件值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 5 判别级 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2n}$ 数的收敛性.

解 绝对值级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2n}$，使用比较审敛法的极限形式：

，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\pi}{2}$ 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2n}$ 发散；

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2n}$ 是交错级数，使用交 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2n}=0$ 错级数的审敛法：显然，

$\dfrac{\pi}{2n}>\dfrac{\pi}{2(n+1)}$，$\sin\dfrac{\pi}{2n}>\sin\dfrac{\pi}{2(n+1)}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2n}$ 条件收敛.

例 6 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 的收敛性

解 这是一个交错级数．令 $u_n=(-1)^n\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否收敛，采用比值审敛法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=e>1$$

所以绝对值级数发散.由于使用的是比值审敛法，所以原级数发散.

注 将收敛级数区分为绝对收敛级数和条件收敛级数是很有必要的．因为这两类收敛级数具有不同的性质，例如绝对收敛级数具有任意可交换性（即绝对收敛级数不因改变它的项的位置而改变它的和），此时无穷多项的和对加法交换律成立；而条件收敛级数则不具有这种性质，而且条件收敛级数的各项位置改变后可使其和等于任何数（包括无穷大），此时无穷多项的和对加法交换律不成立，这就是著名的黎曼（Riemann）定理.

数项级数的绝对收敛与条件收敛解题思路：

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（2）若 $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}\end{array}\right\}=l$ ，则 $l\begin{cases}<1\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{绝对收敛} \\ >1\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\end{cases}$ ；

（3）若比较法

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\begin{cases}\text{收敛，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{绝对收敛} \\ \text{发散，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{交错级数用莱式法则} \\ \lim\limits_{n\to\infty}s_{2n},\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}\text{存在？}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{条件收敛} \\ \text{发散}\end{cases}\end{cases}$$

5.4 幂级数

5.4.1 函数项级数基本概念和性质

定义 1：如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\ldots,u_n(x),\ldots$$

则由这函数列构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)\ldots \tag{5.8}$$

称为定义在区间 I 上的函数项级数，并称

$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和.

对 $x_0\in I$，如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 处收敛，并称点 x_0 为该函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一个收敛点. 如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，称点 x_0 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一个发散点. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 全体收敛点的集合称为该函数项级数的收敛域，全体发散点的集合称为发散域.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在其收敛域上的和是关于 x 的函数，记为$s(x)$，称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在其收敛域上的和函数，即

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

显然有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x).$$

我们把$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ 称为函数项级数（5.8）的余项，显然在收敛域上，有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

定理 5.9 对区间 I 上的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，若

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\rho(x)$（或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x)$），

（1）当$\rho(x)<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛；

（2）当$\rho(x)>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛；

（3）当$\rho(x)=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$可能收敛也可能发散，此时把方程$\rho(x)=1$的解代入到原级数中转化为常数项级数来判断.

例 1 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{1+x})^n$的收敛域.

解 $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{1+x})^n$，用比值审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{1}{1+x})^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{1+x})^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}.\frac{1}{|1+x|}=\frac{1}{|1+x|},$$

当$\frac{1}{|1+x|}<1$时，即$x<-2$或$x>0$时，级数收敛；

当$\frac{1}{|1+x|}=1$时，即$x=-2$或$x=0$，若$x=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛；

若$x=-2$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{1+x})^n$的收敛域为

$(-\infty,-2)\bigcup[0,+\infty)$.

5.4.2 幂级数的收敛域

定义 2 形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的函数项级数，称为$x-x_0$的幂级数，其中$a_n$为常数. 当$x_0=0$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，称为 x 的幂级数.

定理 5.10（阿贝尔（Abel）定理） 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x_0(x_0\neq 0)$处收敛，则对满足不等式$|x|<|x_0|$的任何 x，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x_0$处发散，则对于满足不等式$|x|>|x_0|$的任何 x，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

证 由$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0{}^n$收敛可得$\lim_{n\to\infty}a_nx_0{}^n=0$，

于是存在 M>0，对所有的，n 有$\left|a_nx_0{}^n\right|\leq M$.

当$|x|<|x_0|$时，$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$，因此$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛. 由

$\left|a_nx^n\right|=\left|a_nx_0{}^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leq M\bullet\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛.

定理5.10的后一部分用反证法，若幂级数当$x=x_0$时发散，而有一点x_1，满足$|x|>|x_0|$，使级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1^{\,n}$收敛，则根据定理的前一部分，级数在$x=x_0$处应该收敛，这与已知矛盾.

根据定理5.10，如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在数轴上既有收敛点（不仅只有原点），也有发散点，则从数轴的原点出发沿正向走去，最初只遇到收敛点，越过一个分界点后，就只遇到发散点，这个分界点可能是收敛点，也可能是发散点. 从原点出发沿负向走去的情形也是如此. 且两个边界点P_1与P_2关于原点对称，如图5.3所示.

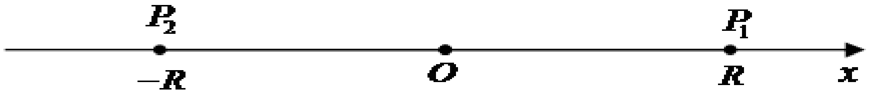


图 5.3

根据上述分析，可得到以下重要结论:

推论 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上收敛，

则必存在一个确定的正数R，使得

(1)当$|x|<R$时，级数绝对收敛；

(2)当$|x|>R$时，级数发散；

(3)当$|x|=R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

上述推论中的正数R称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径.开区间$(-R,R)$称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛区间. 若幂级数的收敛域为D，则有$(-R,R)\subseteq D\subseteq[-R,R]$.

如果幂级数只在x=0处收敛，则规定收敛半径R=0，此时收敛域只有一个点X=0；如果幂级数对一切实数x都收敛，则规定收敛半径$R=+\infty$，此时收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

关于幂级数的收敛半径，有下列求法：

定理5.11 对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ 或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ ，

则幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

证　对绝对值级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$，由比值审敛法，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\rho|x|.$$

（1）若$\rho\neq 0$，则当$\rho|x|<1$，即$|x|<\frac{1}{\rho}$时，则级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$收敛；当

$|x|>\frac{1}{\rho}$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$发散，即收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}$.

（2）若$\rho=0$，则对任何$x\neq 0$，有$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=0<1$，

故级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$收敛，即级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛，收敛半径$R=+\infty$.

（3）若$\rho=+\infty$，则对任何非零的 x，有$\rho|x|\to+\infty$. 所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$

发散. 于是 R=0.

当$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$时，也能得到同样的结论.

收敛域的求法：

（1）先求收敛半径 R，确定收敛区间为$(-R,R)$；

（2）代入$x=\pm R$，验证$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$的收敛性.（注：幂级数隔项时，需将通项看做一个整体，利用正项级数的比值判别法或根值判别法求收敛域，例如幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$和$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$。）

5.4.3 幂级数的运算

1.**（四则运算性质）**设幂级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 和 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$，收敛半径分别为 R_1，R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则 $\forall x\in(-R,R)$ 有：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)$，且在 $(-R,R)$ 内绝对收敛；

（2）$(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)$；

（3）设 $b_0\neq 0$，则在 x=0 的足够小的领域内

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots$，利用多项式除法得系数.

2．和函数

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则在（-R,R）内有：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数方 f(x)是连续的；

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可逐项求导，且

$$f'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1},\ x\in(-R,R);$$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可逐项积分，且

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-R,R).$$

注：原和函数与逐项求导或积分后的和函数收敛半径相同，收敛域不一定相同。

3.幂级数求和

步骤：1. 求出给定级数的收敛区间；2. 两种途径：

适当变形$\Rightarrow$逐项积分 $\Rightarrow$常见函数之幂级数（$e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$几何级数等）$\Rightarrow$逐项求导$\Rightarrow$得和函数

适当变形$\Rightarrow$逐项求导$\Rightarrow$常见函数之幂级数（$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$几何级数等）$\Rightarrow$逐项积分$\Rightarrow$得和函数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$

解 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$，得 R=1，进一步可确定收敛区间为：(-1, 1)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}2nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$= 2x(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt)' + \frac{1}{1-x}$$

$$= 2x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)' + \frac{1}{1-x}$$

$$= 2x(\frac{x}{1-x})' + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}(-1 < x < 1)$$

求收敛域典型例题

1）$\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；　　2）$\sum\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$；

3）$\sum\frac{3^n+(-2)^2}{n}(x+1)^n$；　　4）$\sum(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$；

5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}$.

解：1）由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)!\right]^2}{\left[2(2n+1)\right]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4},$$

因此收敛半径$R = \frac{1}{\rho} = 4$，当$x = \pm 4$时，这个级数为$\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，通项记为$u_n$，则$\left|u_n\right| = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} > \sqrt{2n+1}$，

于是$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right| = +\infty$，所以当$x = \pm 4$时级数$\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$发散，从而可知这个级数的收敛域为$(-4, 4)$.

2）令$t = x-2$，则级数$\sum\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$转化为$\sum\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$（缺陷幂级数），

下面先求$\sum\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$的收敛域，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|t|^2}{(2n+1)2n} = 0 < 1,$$

即对任意$t\in(-\infty,+\infty)$，$\sum\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$都收敛，因此$\sum\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，因此的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

3）令$t = x+1$，则级数$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$转化为$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$，下面先求

$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$的收敛域，

由$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=3$，所以收敛半径$R=\frac{1}{3}$，因而级数

$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$的收敛区间为$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，

当$x=-\frac{1}{3}$时，级数为$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n=\sum[(-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n]$收敛，

当$x=\frac{1}{3}$时，级数为$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n=\sum[\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(-\frac{2}{3})^n]$，$\sum\frac{1}{n}(-\frac{2}{3})^n$收敛（$\sum\left|\frac{1}{n}(-\frac{2}{3})^n\right|$收敛，因为$\sum\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}(-\frac{2}{3})^n\right|}=\frac{2}{3}<1$），$\sum\frac{1}{n}$发散，故$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n$发散，因此$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$的收敛域为$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，级数$\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$的收敛域为$-\frac{1}{3}\le x+1\le\frac{1}{3}$的解集，即$[-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$.

4）因为 $\sqrt[n]{n.\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{n.1}$，又 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n.1}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}}=1,$$

从而收敛半径 $R=1$，又当 $x=\pm 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\left|(1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n})(\pm 1)^n\right| \ne 0,$$

可见级数 $\sum(1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{n})x^n$ 在 $x=\pm 1$ 时发散，故这个级数的收敛域为 $(-1,1)$.

5）法 1:（将其看成不缺项的幂级数 $0.x+\frac{1}{2}x^2+0.x^3+\frac{1}{2^2}x^4+...$）

设 $a_n=\begin{cases}0, n=2k-1\\ \frac{1}{2^k}, n=2k\end{cases}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$R=\sqrt{2}$.

法 2: 令 $x^2=t$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}t^n$ 收敛半径为 2， 故 $R=\sqrt{2}$.

法 3: （将其视为以 x 为参数的数项级数或视为一般的函数项级数）

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2},$$

当 $\frac{x^2}{2}<1$ 即 $|x|<\sqrt{2}$ 时幂级数收敛， 当 $|x|>\sqrt{2}$ 时发散， 故

$R=\sqrt{2}$.

即收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，收敛区间是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}2^n=\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散，因此收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

5.5　函数展开成幂级数

定理 5.12　设 $f(x)$ 在点 x_0 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内具有任意阶导数，那么 $f(x)$ 在该邻域能够展成泰勒级数的充分必要条件是：对一切满足不等式 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\delta)(x-x_0)^{n+1}=0$$

证 必要性　设 $f(x)$ 在点 x_0 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内具有任意阶导数，那么 $f(x)$ 在该邻域能够展成泰勒级数，即

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{"}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+......+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

由泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{"}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+......+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x)$，

因为　　$\lim\limits_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=f(x)$，

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=0$，

充分性　若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则 $s_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x)$，　于是

$$\lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-R_n(x)]=f(x)$$

上述定理在实际应用上很不方便，以下给出一个函数可展成泰勒级数的充分条件：

定理 5.13　设 $f(x)$ 在点 x_0 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内具有任意阶导数，而且在该邻域内任意阶导数有界，即存在 L>0，对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有

$$|f^{(n)}(x)|0\le L(n=0,1,2,...)$$

则 $f(x)$ 必可展成泰勒级数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

证明从略.

5.5.3 Euler 公式

设有复数项级数 $(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+...+(u_n+iv_n)+...$ (5.17),其中 $u_n,v_n(n=1,2,3,...)$ 是实常数或实函数. 如果实部组成的级数 $u_1+u_2+...+u_n+...$ 收敛于和 u，虚部组成的级数 $v_1+v_2+...+v_n+...$ 收敛于和 v，则称复数项级数（5.17）收敛，且其和为 u+iv.

如果复数项级数（5.17）的各项的模所构成的级数 $\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+...+\sqrt{u_n^2+v_n^2}...$ 是收敛的，则称复数项级数（5.17）是绝对收敛的，此时，由于 $|u_n|\le\sqrt{u_n^2+v_n^2},|v_n|\le\sqrt{u_n^2+v_n^2}(n=1,2,3,...)$ 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都绝对收敛，从而复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ 收敛.

当 x 为实数时，有 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+...$，

推广到纯虚数情形：取 $x=i\theta$ （其中 θ 为实数），则

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{1}{2!}(i\theta)^2+\frac{1}{3!}(i\theta)^3+...+\frac{1}{n!}(i\theta)^n+...$$
$$=(1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-...)+i(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-...),$$

即有 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ （5.18）

这就是欧拉(Euler)公式.

由（5.18）式得，（5.19） $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

再由（5.18）、（5.19）可得

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$
（5.20）
$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

通常公式（5.18）、（5.19）、（5.20）都称为欧拉公式，它们揭示了三角函数与复变量函数之间的联系. 特别地，若在（5.18）式，令 $\theta=\pi$ ，得 $e^{i\pi}+1=0$.

这个公式被认为是数学领域中最优美的结果之一，因为它在一个简单的方程中，把算术基本常数（0 和 1）、几何基本常数（π）、分析常数（e）和复数（i）联系在一起

5.6 傅里叶级数

前面讨论了幂级数及将函数展开成幂级数问题。本节将讨论另一类在理论上与实际应用中都有着重要价值的函数项级数——三角级数。着重讨论怎样用三角级数来表示一个已知函数的问题，即函数展开为三角级数问题。

由于三角级数的通项是周期函数（正弦与余弦函数），因此三角级数是研究周期性物理现象的重要数学工具。早在 18 世纪中叶，丹尼尔•伯努利在解决弦振动问题时就提出了这样的观点：任何复杂的振动都可以分解成一系列简谐振动之和；十九世纪初，法国数学家、物理学家傅里叶（Fourier）曾大胆断言：“任意”函数都可以展开三角级数；而如今三角级数在无线电、数字信号处理等领域有重大应用。

5.6.1 周期函数与三角级数

在科学技术与与现实生活中，经常会遇到各种各样的周期现象如单摆振动、日出日落、人们呼吸时肺部的运动和心脏的搏动、交流电的电流强度与时间的关系等等，对于这类周期现象可以（或近似地）用周期函数来描述，一个十分重要的周期函数是所谓的简谐振动函数

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

就是一个以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的正弦函数，其中 y 表示动点的位置，t表示时间，A为振幅，ω为频率，φ为初相。

但是现实生活中的周期现象多种多样而且复杂，并不能用简单的正弦函数来表示。例如，电子技术中常用的周期为 2π 的的矩形波就不是正弦波，如图 5.5 所示

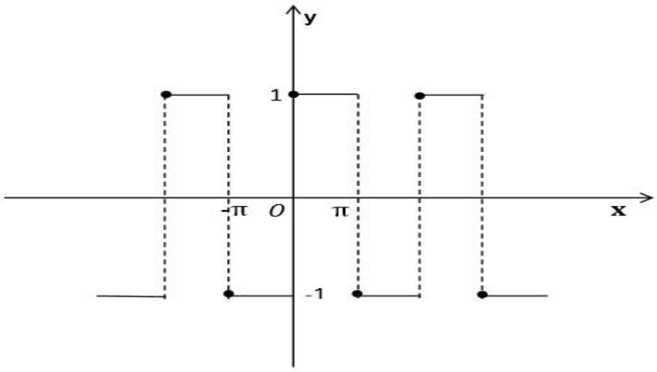


图 5.5

而根据上文丹尼尔•伯努利在 18 世纪中叶提出的观点，用数学语言来描述即为：在一定的条件下，任何周期T(= $\frac{2\pi}{\omega}$)为的函数$f(t)$ ，都可以用一系列以 T 为周期的正弦函数所组成的级数来表示,即

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_0 \sin\left(n\omega t + \varphi_n\right) \qquad (5.23)$$

其中A_0 , A_n , φ_n (n=1, 2, 3…)都是常数，由三角公式知

$$y=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\varphi_n sinn\omega t+A_n \sin\varphi_n cosn\omega t\right).$$

若记 $a_0=2A_0,\ b_n=A_n cos\varphi_n,\ a_n=A_n\sin\varphi_n,\ x=\omega t,$ 则（5.23）变成

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cosnx+b_n sinnx\right) \tag{5.24}$$

形如(5.24)式的级数称为三角级数。

与研究幂级数相似，我们需要讨论以下三个问题：

$f(x)$ 在什么条件下能展开为三角级数？

如果能做这样的表示，展开式中的系数 a_0, a_n, b_n？

三角级数是否能收敛到 $f(x)$ ？

5.6.2 三角函数的正交系

函数系 {1，cosx, sinx, cos2x, sin2x,⋯,cosnx, sinnx,⋯} (5.25)

称为基本三角函数系.

函数系(5.25)具有性质：函数系中任意两个不同函数的乘积在区间[$-\pi,\pi$]上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot cosnx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot sinnx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmx\cdot cosnx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\cos(m-n)x}{2}\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmx\cdot cosnx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \mathrm{m}\neq\mathrm{n}\\ \pi & \mathrm{m}=\mathrm{n}\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmx\cdot sinnx\,\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \mathrm{m}\neq\mathrm{n}\\ \pi & \mathrm{m}=\mathrm{n}\end{cases}$$

若同学们有兴趣，可以尝试证明。

以上积分结果说明，以2π为周期的三角函数系(5.25)是正交系，三角函数系的这个性质称为正交性。

5.6.3 收敛性定理

若你把$f(x)$以2π为周期，在区间[-π， π]上可积，通过左式计算出傅里叶系数代入右式，我们可以“形式”得做出$f(x)$的傅里叶级数，于是有两个问题:

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,sinnxdx,(n=1,2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,sinnxdx,(n=1,2,\cdots)f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n cosnx+b_n sinnx) \end{cases}$$

“形式”的$f(x)$的傅里叶级数是否一定收敛?

若收敛，它是否一定收敛于函数$f(x)$?

以上两个问题的答案都不是肯定的，一方面，$f(x)$的傅里叶级数在[-π， π]上有可能发散；另一方面，即使收敛也未必收敛于$f(x)$.下面不加证明的给出收敛性定理.

定理5.14（狄利克莱（Dirichlet）收敛性定理）设函数$f(x)$是以2π为周期的周期函数，如果

在一个周期[-π， π]内连续或只有有限个第一类间断点；

在一个周期[-π， π]内分段单调（设$f(x)$在[a,b]上有定义，如果在[a,b]内插入n-1个分点，$a=x_0<x_1<\ldots x_n=b$能使$f(x)$）在每个开区间（x_{k-1}，x_k）(k=1，2，•••）上都单调，那么称$f(x)$在[a,b]上分段单调。）

则设$f(x)$的傅里叶级数收敛，且

当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于f(x)；

当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

狄利克莱收敛定理告诉我们：只要韩式$f(x)$在区间[-π， π]上至多只有有限个第一类间断点，并且分段单调，则函数$f(x)$的傅里叶级数在连续点处收敛于改点的函数值，在间断

点处收敛于改点的函数的左极限与右极限的平均值.由此可见，函数展开成傅里叶级数的条件要比函数展开成幂级数的条件低很多，因为$f(x)$展开成幂级数时，至少要求$f(x)$有任意阶导数，而$f(x)$不连续，也可能展开成收敛的傅里叶级数。

5.6.4 正弦级数与余弦级数

1.正弦级数（只含正弦项的级数）

f(x)为奇函数，T=2π

f(x)cosnx 为奇函数

f(x)sinnx 为偶函数

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = o,\ (n=0,1,2,3\ldots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{sinnxd}x,\ (n=0,1,2,3\ldots) \end{cases}$$

所展开傅里叶级数只含正弦项： $\sum_{n=1}^{\infty} b_n sinnx$

2.余弦级数（只含余弦项的级数）

f(x)为偶函数，T=2π

f(x)cosnx 为偶函数

f(x)sinnx 为奇函数

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\ cosnx\mathrm{d}x,\ (n=0,1,2,3\ldots) \\ b_n = 0,\ (n=0,1,2,3\ldots) \end{cases}$$

所展开傅里叶级数只含正弦项： $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx$

例： f(x)在[-π， π)上表达式为 f(x)=|x|,T=2π， 将 f(x)展成傅里叶级数。

析:f(x)为偶函数，满足收敛定理，无间断点，所以所展开级数为余弦级数。

解：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcosnx\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

得 f(x)展开余弦级数为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]cosnx,\ (-\infty < x < \infty)$$

5.6.5 周期延拓、奇延拓、偶延拓

若 f（x）只在[-π， π]上有定义，而且满足收敛定理的条件，则 f（x）也可展开成傅里叶级数。

我们可以构造周期为 2π 的周期函数 F（x）,使得当 x∈[-π， π)或（-π， π]时，F（x）= f（x)；当 x 取其它值时，F（x）符合以 2π 为周期的周期函数。这种作周期为 2π 的周期函数 F(x)的方法，称为周期延拓。延拓后的 F（x）是可以展开成傅里叶级数的。在 x=±π处，级数收敛到 $x = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$。

在实际应用中，有事还需要把定义在区间[0, π]上的函数展开成正弦级数或余弦级数。根据前面的讨论，我们的通常做法是：设 f（x）定义在区间[0， π]上，且满足收敛定理的条件，在区间[-π， 0]上补充函数的定义，得到定义在区间[-π， π]上的函数 F（x)，使它在[-π， π]上成为奇函数或偶函数。[若 f（x）≠0,则定义 F（0）=0]按照这种方法延拓，若 F（x）为奇函数，则为奇延拓；若 F（x）为偶函数，则为偶延拓，然后展开成傅里叶级数，就会得到正弦级数或余弦级数。在限制 x 在[0， π]上，这样就得到 f（x）的正弦级数或余弦级数。

5.6.6 以 2l 为周期的周期函数的傅里叶级数

在实际问题中所遇到的周期函数，它的周期不一定都是 2π，所以有必要讨论周期为 2l 的周期函数的傅里叶级数，我们有如下定理：

设周期为 2l 的周期函数 f（x）满足收敛性定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

这里的傅里叶系数为：

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1，2，3\cdots\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1，2，3\cdots\cdots$$

且在[l，l]内，傅里叶级数的和函数 s（x）满足

当 x 为连续点时，

$$s(x) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

当 x 为间断点时，

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

证明：作变量代换 z=$\frac{\pi x}{l}$，于是区间-1$\le x \le l$就变成$-\pi \le x \le \pi$，设函数

f（x）=f（$\frac{lz}{\pi}$）=F（z），从而 F（z）是周期为 2π的周期函数，并且它满足收敛定理的条件，将 F（z）展开成傅里叶级数：

F（z）= $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nz + b_n \sin nz)$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F（z）cosnzdz$，$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F（z）sinnzdz$，

再由 z=$\frac{\pi x}{l}$，于是有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

而且，$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f（x）cos\frac{n\pi x}{l}dx$，n=1，2，3……

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f（x）sin\frac{n\pi x}{l}dx$，n=1，2，3……

当函数$f(x)$仅定义在[1，-1]上，且满足收敛性定理的条件时，仍然可以将函数$f(x)$进行周期延拓，把$f(x)$展开成以 21 为周期的傅里叶级数。

如果$f(x)$是以 21 为周期的奇函数，则$f(x)$的傅里叶级数是正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

如果$f(x)$是以 21 为周期的偶函数，则$f(x)$的傅里叶级数是余弦级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\right)$

第五章历年考题

判断下列级数的敛散性，若收敛，求出其和

1、 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

解： 因为

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1-\sqrt{2}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1-\sqrt{2}.$$

2、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

解： 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}}=1\neq 0$ ，所以 $\sum_{n=1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ 发散。

3、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}$

解： 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}\neq 0$ ，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}$ 发散。

4、 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

解： $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1/2}{1-1/2}+\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{3}{2}.$

注： 常用极限及公式：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ (a>0),\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f(k+1)-f(k)\right]=f(n+1)-f(1),\quad |q|<1,\ \sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}.$$

用比较判别法判断下列正项级数的敛散性

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

解： 因为 $u_n=1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\le\frac{\pi^2}{2n^2}$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛。

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdots(2n-1)}$

解： 因为 $u_n=\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdots(2n-1)}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdots(2n-1)}$ 收敛。

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$

解： 因为 $u_n=\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$ 收敛。

4、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)\cdot3^n}$

解： 因为 $u_n=\frac{2^n}{(2n-1)\cdot3^n}\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$ 收敛。

5、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$，其中 $P(n)$、$Q(n)$ 为关于 n 的最高阶系数为正的多项式，且阶分别为 α 和 β。

解： 令 $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_0n^{\alpha}+a_1n^{\alpha-1}+\cdots+a_{\alpha-1}n+a_{\alpha}}{b_0n^{\beta}+b_1n^{\beta-1}+\cdots+b_{\beta-1}n+b_{\beta}}$

则

$$u_n=\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\left(\frac{a_0+a_1\frac{1}{n}+\cdots+a_{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}+a_{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}}{b_0+b_1\frac{1}{n}+\cdots+b_{\beta-1}\frac{1}{n^{\beta-1}}+b_{\beta}\frac{1}{n^{\beta}}}\right)\triangleq\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}A_n$$，且 $\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{a_0}{b_0}>0$，

（1）$\alpha=\beta$，$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{a_0}{b_0}\neq 0$，此时级数发散；

（2）$\alpha>\beta$，$\lim_{n\to\infty}u_n=\infty\neq 0$，此时级数发散；

（3）由 $\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{a_0}{b_0}>0$ 知

对 $\varepsilon=\frac{a_0}{2b_0},\ \exists N,$ 当 $n>N$ 时， 成立 $\frac{a_0}{2b_0}<A_n<\frac{3a_0}{2b_0}$ $\left(\left|A_n-\frac{a_0}{b_0}\right|<\varepsilon\right)$

故 当 $n>N$ 时 成立 $\frac{a_0}{2b_0}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}<u_n<\frac{3a_0}{2b_0}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$

当 $\beta>\alpha+1$ 时，由右端不等式可知级数收敛，

当 $\beta=\alpha+1$ 时，由左端不等式可知级数发散。

综上：$\beta>\alpha+1$ 时，级数收敛，$\beta\leq\alpha+1$ 时，级数发散。

简化解法： 令 $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_0n^{\alpha}+a_1n^{\alpha-1}+\cdots+a_{\alpha-1}n+a_{\alpha}}{b_0n^{\beta}+b_1n^{\beta-1}+\cdots+b_{\beta-1}n+b_{\beta}}$

则

$$u_n=\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\left(\frac{a_0+a_1\frac{1}{n}+\cdots+a_{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}+a_\alpha\frac{1}{n^\alpha}}{b_0+b_1\frac{1}{n}+\cdots+b_{\beta-1}\frac{1}{n^{\beta-1}}+b_\beta\frac{1}{n^\beta}}\right)\triangleq\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}A_n$$

，且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\dfrac{a_0}{b_0}>0$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\dfrac{a_0}{b_0}$ 知　对 $\varepsilon=\dfrac{a_0}{2b_0},\ \exists N,$

当 $n>N$ 时，成立 $\dfrac{a_0}{2b_0}<A_n<\dfrac{3a_0}{2b_0}$　$\left(\left|A_n-\dfrac{a_0}{b_0}\right|<\varepsilon\right)$

故当 $n>N$ 时，成立 $\dfrac{a_0}{2b_0}\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}<u_n<\dfrac{3a_0}{2b_0}\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$

据此不等式，由正项级数的比较定理得

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ 同敛散。

故 $\beta>\alpha+1$ 时，级数收敛，$\beta\le\alpha+1$ 时，级数发散。

注：利用下面习题三的结论：直接由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{A_n}{n^{\beta-\alpha}}}{\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}}=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\dfrac{a_0}{b_0}>0$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ 同敛散。

6、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$

解：由不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n}$ 可知

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n^2}$$

左端不等式说明该级数是正项级数，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以右端不等式说明该级数收敛。

注：1. 放缩不等式常用技巧：<：放大分子缩小分母；>：缩小分子放大分母（放到最大，缩到最小）

例：$\dfrac{3n^2+1}{5n^3+2}<\dfrac{4n^2}{5n^3}=\dfrac{4}{5n}$；$\dfrac{3n^2+1}{5n^3+2}>\dfrac{3n^2}{7n^3}=\dfrac{3}{7n}$。

2. 常用不等式：$0<x<\dfrac{\pi}{2},\ \sin x<x;\ x>0,\ \dfrac{1}{\mathrm{x+1}}<\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x};\ x>\ln(1+x).$

3. 常用比较级数：几何级数和$p-$级数。

若有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k>0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\geq 0)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(v_n>0)$的敛散性有何关系？

解：由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$可知，对$\varepsilon=\dfrac{k}{2},\ \exists N,$当$n>N$时，成立

$k-\varepsilon<\dfrac{u_n}{v_n}<k+\varepsilon$，即$\dfrac{k}{2}<\dfrac{u_n}{v_n}<\dfrac{3k}{2}$，故

$$\frac{k}{2}v_n<u_n<\frac{3k}{2}v_n$$

由该不等式和正项级数的比较判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散。

注：该结论称为正项级数比较判别法的极限形式。