DO NOWEJ PODSTAWY PROGRAMOWEJ

LICEUM I TECHNIKUM

zakres **podstawowy**

Podręcznik i ćwiczenia także w wersji online

Oferta: sklep.wsip.pl

Matematyka

poznać, zrozumieć

1

WSiP

Podręcznik, klasa

Autorzy: **Alina Przychoda, Zygmunt Łaszczyk**

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: **dr Marii Borowskiej**, **dr. hab. Edwarda Tutaja**, **dr. Tomasza Karpowicza**.
Zakres kształcenia: podstawowy
Etap edukacyjny: IV
Typ szkoły: szkoły ponadgimnazjalne
Rok dopuszczenia: 2012

Numer ewidencyjny w wykazie wspólny dla tradycyjnej i elektronicznej formy podręcznika:
540/1/2012

Wydanie I

ISBN 978-83-02-13349-7

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Aneta Juchimiuk** (redaktor koordynator, redaktor merytoryczny), **Agnieszka Trzpil-Gajek** (redaktor merytoryczny), **Ewa Kowalik** (współpraca redakcyjna)
Konsultacje naukowe: **Leon Gulgowski**
Redakcja językowa: **Milena Schefs**
Redakcja techniczna: **Janina Soboń**
Projekt okładki: **Paweł Rafa, Marta Jedlińska**
Projekt stron działowych: **Joanna Plakiewicz**
Projekt graficzny: **Katarzyna Trzeszczkowska**
Opracowanie graficzne: **Joanna Plakiewicz**
Opracowanie kartograficzne: **Jerzy Domosud**
Fotoedycja: **Ignacy Składowski**
Skład i łamanie, rysunki: **MathMaster Studio**

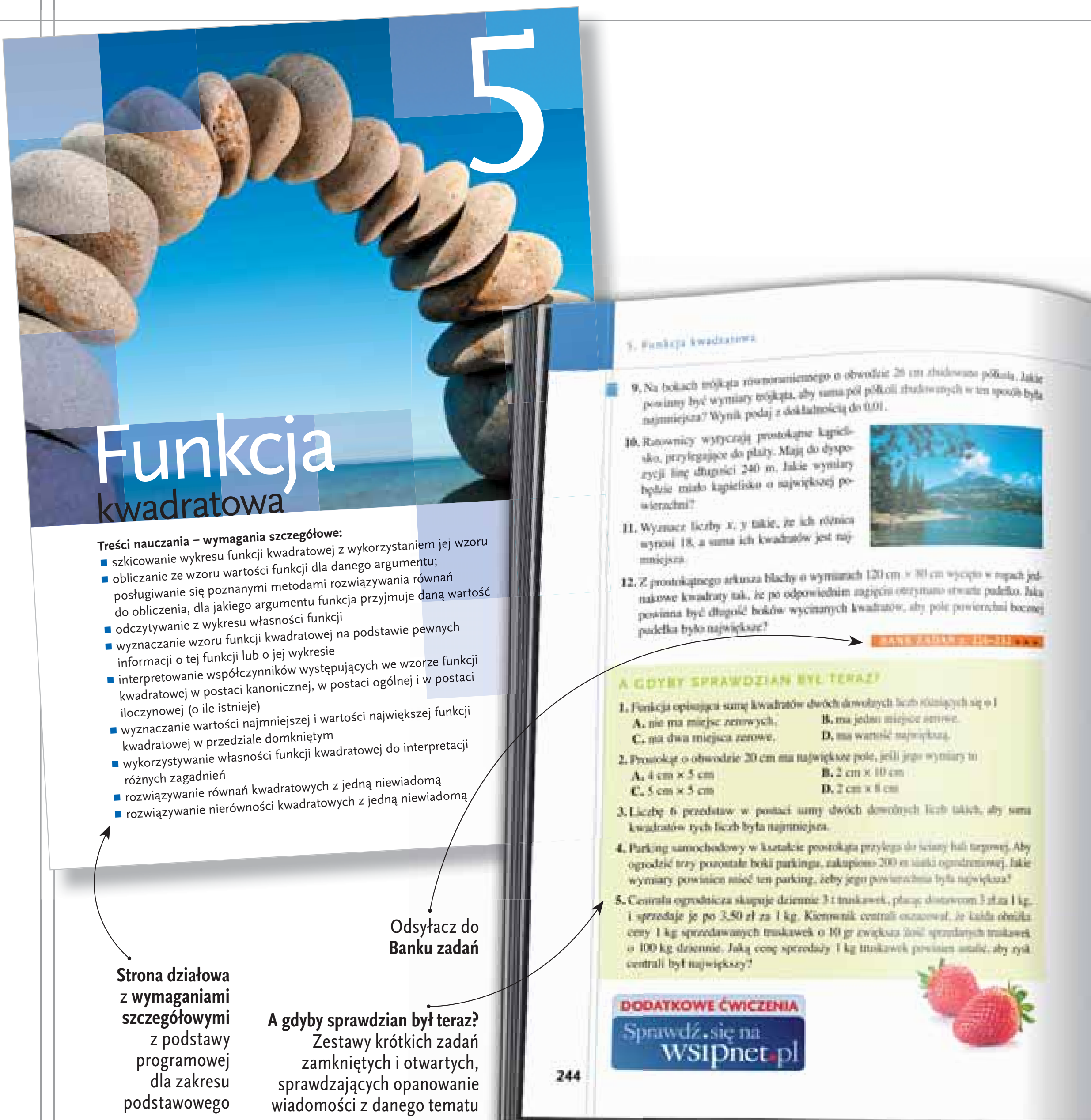
Zalecane wymagania systemowe i sprzętowe
Podręcznik elektroniczny w formacie PDF otwierany na komputerach PC i MAC wymaga zainstalowania bezpłatnego programu Adobe Reader (http://get.adobe.com/reader/); otwierany na tabletach i telefonach z systemem Apple iOS wymaga zainstalowania bezpłatnego programu iBooks (do pobrania ze sklepu App Store); otwierany na tabletach i telefonach z systemem Android wymaga zainstalowania bezpłatnego programu Adobe Reader (do pobrania z Google Play).

Pomoc techniczna: epomoc@wsip.com.pl

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne spółka z ograniczoną odpowiedzialnością
00-807 Warszawa, Al. Jerozolimskie 96
Tel.: 22 576 25 00
Infolinia: 801 220 555
www.wsip.pl

O podręczniku

Podręcznik został podzielony na sześć rozdziałów tematycznych. Na jego końcu zamieszczono odpowiedzi do większości znajdujących się w nim zadań.



Strona działowa z **wymaganiami szczegółowymi** z podstawy programowej dla zakresu podstawowego

Odsyłacz do **Banku zadań**

A gdyby sprawdzian był teraz? Zestawy krótkich zadań zamkniętych i otwartych, sprawdzających opanowanie wiadomości z danego tematu

A gdyby matura była teraz?
Zestawy zadań skonstruowanych na wzór zadań maturalnych, oparte na materiale danego działu

A GDYBY MATURA BYŁA TERAZ?

ZESTAW – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)
Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + x - 12$. Wówczas
A. funkcja nie ma miejsc zerowych.
B. funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 1;\ +\infty)$.
C. zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\langle -12;\ +\infty)$.
D. funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(-4;\ 3)$.

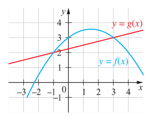
Zadanie 2. (1 p.)
Do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 3x + 1$ należy punkt
A. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ **B.** $(-3, 1)$ **C.** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **D.** $(1, 2)$

Zadanie 3. (1 p.)
Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -2(x + 1)^2 + 1$ jest zbiór
A. $\langle 1;\ +\infty)$ **B.** $(-\infty;\ -2\rangle$ **C.** $(-\infty;\ 1\rangle$ **D.** $\langle -2;\ 1\rangle$

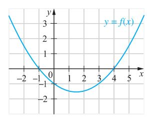
Zadanie 4. (1 p.)
Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: $x = -3$ oraz $x = 2$. Funkcję f możemy zapisać za pomocą wzoru
A. $f(x) = x^2 + x - 6$ **B.** $f(x) = x^2 - x + 6$
C. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **D.** $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Zadanie 5. (1 p.)
Równanie $x^2 - 7x + 12 = 0$
A. ma jedno rozwiązanie. **B.** nie ma rozwiązań.
C. ma dwa rozwiązania dodatnie. **D.** ma dwa rozwiązania różnych znaków.

)
[...]dstawiono wykres funkcji kwadratowej f
[...]cji liniowej g. Podaj:
[...]unktów wspólnych wykresów funkcji f i g,
[...]ierówności $g(x) \leqslant 3$,
[...]ierówności $g(x) \geqslant f(x)$.



[...]edstawiono wykres funkcji kwadratowej [...]j współrzędne punktów przecięcia wykresu [...]kładu współrzędnych. Zapisz wzór tej funk[...]nej.



Temat lekcji

5.8 Równania kwadratowe

Funkcja kwadratowa może mieć jedno miejsce zerowe, dwa miejsca zerowe albo nie mieć ich wcale. Liczba miejsc zerowych zależy od znaku wyróżnika Δ. Wyznaczając miejsca zerowe funkcji kwadratowej, wyznaczamy tym samym rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Definicja
Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym**.
Liczba p jest **rozwiązaniem** równania kwadratowego, jeśli spełnia to równanie, tzn. jeśli $ap^2 + bp + c = 0$. Rozwiązanie równania kwadratowego nazywamy również **pierwiastkiem** równania kwadratowego.

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

PRZYKŁAD 1.
Rozwiążmy równanie.
a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 - 6x = 0$ c) $x^2 + 3x = 3(x - 2) + 1$

a) Gdy $b = 0$, rozwiązanie równania ułatwi nam przedstawienie trójmianu kwadratowego w postaci iloczynowej.
$x^2 - 16 = 0$
$(x - 4)(x + 4) = 0$
$x - 4 = 0$ lub $x + 4 = 0$
$x = 4$ lub $x = -4$
Pierwiastkami równania są liczby -4 i 4.

b) Gdy $c = 0$, trójmian kwadratowy przedstawiamy w postaci iloczynowej.
$x(x - 6) = 0$
$x = 0$ lub $x - 6 = 0$, stąd $x = 6$
Pierwiastkami równania są liczby 0 i 6.

c) Przekształćmy równanie na równanie równoważne.
$x^2 + 3x = 3x - 6 + 1$, stąd $x^2 = -5$
Równanie to jest sprzeczne, ponieważ wyrażenie x^2 jest nieujemne dla każdej liczby $x \in R$. Równanie nie ma pierwiastków.

Definicje, które trzeba znać

Rozwiązane **przykłady**

W podręczniku wprowadzono następujące wyróżnienia:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe – przed każdym rozdziałem podręcznika zamieszczamy wykaz umiejętności zgodny z nową podstawą programową.

Definicja – definicje.

Twierdzenie – twierdzenia.

– ważne informacje do zapamiętania.

– treści rozszerzające zakres podstawowy. O ich realizacji decyduje nauczyciel.

– wskazane użycie kalkulatora.

CIEKAWOSTKA – interesujące wiadomości.

ZADANIA – zestaw zadań do każdego tematu.

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ? – zestaw krótkich zadań sprawdzających opanowanie wiadomości z danego tematu.

PROJEKT – praca długoterminowa.

BANK ZADAŃ z. 273–278 » » » – odsyłacz do **Banku zadań**.

A GDYBY MATURA BYŁA TERAZ? – zadania skonstruowane na wzór zadań maturalnych, oparte na materiale danego działu.

BANK ZADAŃ – zbiór dodatkowych zadań, umożliwiających utrwalenie zdobytych wiadomości i umiejętności.

DODATKOWE ĆWICZENIA Sprawdź się na wsipnet.pl – odesłanie do **elektronicznego zeszytu ćwiczeń** na wsipnet.pl.

Matematyka jest królową wszystkich nauk,
jej ulubieńcem jest prawda,
a prostość i oczywistość jej strojem.
Jędrzej Śniadecki

Mamy nadzieję, że nasz podręcznik pomoże Wam odkryć piękno matematyki. Staraliśmy się tak go napisać, abyście mogli dokonywać samodzielnych odkryć. Chcielibyśmy, abyście chętnie poznawali nowe treści i korzystali z tego podręcznika bez ciągłego przypominania wiadomości poznanych wcześniej.

Każdy temat z podręcznika zawiera wiele przykładów, ćwiczeń i zadań do samodzielnego rozwiązania. Dodatkową porcję zadań zamieściliśmy w blokach *A gdyby sprawdzian był teraz?*, umieszczonych na końcu każdego tematu, oraz w *Banku zadań* na końcu podręcznika. Dla uczniów bardziej zainteresowanych matematyką przygotowaliśmy projekty, czyli propozycje prac długoterminowych.

Każdy rozdział kończą zestawy zadań *A gdyby matura była teraz?*, przygotowujące do obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki. Zadania te są skonstruowane na wzór zadań maturalnych, a treściowo odnoszą się bezpośrednio do poprzedzającego je rozdziału. Odpowiedzi do większości zadań znajdziecie na końcu podręcznika.

Autorzy

UKŁAD GALAKTYK
KWINTET STEFANA

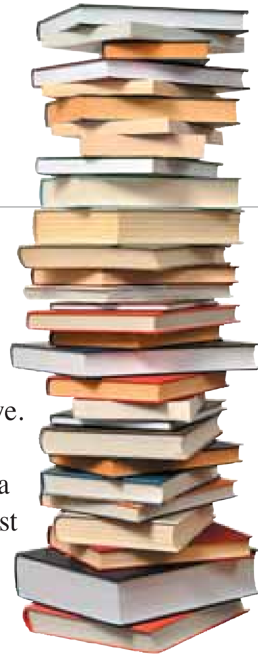
1

Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

- przedstawianie liczb rzeczywistych w różnych postaciach
- obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych)
- posługiwanie się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosowanie praw działań na pierwiastkach
- obliczanie potęg o wykładnikach wymiernych i stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych
- wykorzystywanie podstawowych własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy)
- wykorzystywanie definicji logarytmu i stosowanie w obliczeniach wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym
- obliczanie błędu bezwzględnego i błędu względnego przybliżenia
- posługiwanie się pojęciem przedziału liczbowego, zaznaczanie przedziałów na osi liczbowej
- wykonywanie obliczeń procentowych, obliczanie podatków
- używanie wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$

1.1 Język matematyki



I. Pan Kowalski ma ponad tysiąc książek w swojej bibliotece.
II. Pan Kowalski ma tysiąc książek w swojej bibliotece.
III. Pan Kowalski ma mniej niż tysiąc książek w swojej bibliotece.
IV. Pan Kowalski ma co najmniej jedną książkę w swojej bibliotece.

Osoba, która wypowiedziała zdania, wie, że tylko jedno z nich jest prawdziwe. Czy wiesz, ile książek ma w swojej bibliotece pan Kowalski?
Tego typu zadania wymagają od rozwiązujących umiejętności rozpoznawania i eliminowania sprzecznych informacji. Jeśli przyjęlibyśmy, że prawdziwe jest zdanie IV, to musielibyśmy uznać prawdziwość jednego ze zdań I, II lub III. Zdanie IV jest zatem zdaniem fałszywym. Z tego zdania wynika, że pan Kowalski ma zero książek. A więc zdanie III jest zdaniem prawdziwym.

Na lekcjach matematyki porozumiewamy się podobnie jak na zajęciach z innych przedmiotów. Powinniśmy jednak wiedzieć, że zdania, którymi się posługujemy, są zdaniami w sensie logiki matematycznej tylko wtedy, jeśli można przyporządkować im jedną z wartości logicznych: **prawdę** albo **fałsz**.

PRZYKŁAD 1.

a) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.
Jest to zdanie w sensie logiki matematycznej, ponieważ można rozstrzygnąć, czy jest ono prawdziwe, czy – fałszywe. Jest to przykład zdania prawdziwego.

b) W Polsce panuje klimat tropikalny.
Jest to zdanie w sensie logiki matematycznej, ponieważ można przyporządkować mu wartość logiczną, w tym przypadku – fałsz.

c) $7 < 3$
Jest to przykład zdania fałszywego.

d) Jaka będzie jutro pogoda? Wyrzuć śmieci! Znalezienie rozwiązania.
Żadne zdania pytające czy rozkazujące ani równoważniki zdań nie są zdaniami w sensie logiki. Nie można stwierdzić, czy powyższe zdania są prawdziwe, czy – fałszywe.

e) $3x + 1 > 0$
Warunek ten nie jest zdaniem w sensie logiki. Jeśli podstawimy w miejsce litery x liczbę 0, otrzymamy zdanie prawdziwe, natomiast jeśli wstawimy za x liczbę -2, otrzymamy zdanie fałszywe. Tak skonstruowane wyrażenie jest **formą zdaniową**.
Zdania w punktach a, b i c są **zdaniami prostymi**.

ĆWICZENIE 1.

Oceń wartość logiczną zdania.

a) $\pi > 3{,}14$ b) $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$ c) $\frac{1}{3} = 0{,}3$

d) $2 \leqslant 3$ e) Romb jest czworokątem.

Do każdego zdania możemy sformułować jego **negację**, czyli **zaprzeczenie**. Negacją zdania: „Każdy kwadrat jest prostokątem” jest zdanie: „Nieprawda, że każdy kwadrat jest prostokątem”. Jeśli pierwsze zdanie oznaczymy jako a, to jego negację zapiszemy jako $\neg\, a$. Z dwóch zdań a i $\neg\, a$ dokładnie jedno jest prawdziwe.

PRZYKŁAD 2.

Zaprzeczeniem zdania:

a) $2 < 4$ jest zdanie $2 \geqslant 4$,

b) $2 \neq 3$ jest zdanie $2 = 3$,

c) $2^2 = 4$ jest zdanie $2^2 \neq 4$,

d) $2^2 \geqslant 0$ jest zdanie $2^2 < 0$,

e) $-4 > 0$ jest zdanie $-4 \leqslant 0$.

PRZYKŁAD 3.

Oceńmy wartość logiczną zdania.

a) Nieprawda, że kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

b) Nieprawda, że $2 < 4$.

c) Nieprawda, że w Polsce panuje klimat tropikalny.

Zdania a i b są zdaniami fałszywymi. Zdanie c jest prawdziwe.

ĆWICZENIE 2.

Utwórz zaprzeczenie zdania i oceń jego wartość logiczną.

a) Liczba 6 jest liczbą parzystą.

b) Liczba 17 jest podzielna przez 3.

c) $5 > 7$

d) $0 \leqslant 3$

e) $13 - 9 = 5$

f) $\pi < 3$

g) $\frac{7}{17} \neq 1$

h) $\frac{14}{16} = \frac{2}{3}$

Formułowane przez nas zdania są najczęściej **zdaniami złożonymi**. W logice matematycznej budujemy zdania złożone, używając spójników logicznych. Dwa zdania połączone spójnikiem „i” tworzą **koniunkcję zdań**. Koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym tylko wtedy, gdy obydwa zdania są prawdziwe.

PRZYKŁAD 4.

Dwa zdania $-1 < 0$ oraz $0 < 1$ połączone spójnikiem „i” tworzą koniunkcję zdań; zapisujemy to jako $-1 < 0$ i $0 < 1$. Każde ze zdań $-1 < 0$, $0 < 1$ jest prawdziwe, więc koniunkcja tych zdań jest zdaniem prawdziwym.

ĆWICZENIE 3.

Wskaż zdania w koniunkcji i oceń jej wartość logiczną.

a) Liczba 8 jest parzysta i liczba 8 dzieli się przez 3.

b) $2 < 1$ i $0 \neq 1$

c) Prostokąt jest kwadratem i romb jest prostokątem.

d) Liczba 2 jest liczbą dodatnią i $3 > 0$.

Dwa zdania połączone spójnikiem „lub" tworzą **alternatywę zdań**. Alternatywa dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko wtedy, gdy oba zdania są fałszywe. Alternatywa dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym wtedy, gdy co najmniej jedno zdanie jest prawdziwe.

PRZYKŁAD 5.

Dwa zdania $0 < 1$ oraz $0 = 1$ połączone spójnikiem „lub" tworzą alternatywę zdań; zapisujemy to jako $0 < 1$ lub $0 = 1$ albo krócej: $0 \leqslant 1$. Alternatywa tych zdań jest prawdziwa, ponieważ jedno z nich jest prawdziwe.

ĆWICZENIE 4.

Wskaż zdania w alternatywie i oceń jej wartość logiczną.

a) Liczba 8 jest parzysta lub liczba 8 dzieli się przez 3.

b) $2 > 0$ lub $3 > 0$

c) Kwadrat jest prostokątem lub romb jest prostokątem.

d) $2 < 1$ lub $0 \leqslant 1$

Spójników „i" oraz „lub" używamy również do łączenia form zdaniowych. Na przykład „$x < 1$ i $x > 1$" jest koniunkcją, a „$x < 1$ lub $x > 1$" jest alternatywą form zdaniowych „$x < 1$" oraz „$x > 1$".

W naszych rozważaniach będziemy posługiwali się równoważnością.
Równoważnością zdań a i b nazywamy zdanie o postaci „a wtedy i tylko wtedy, gdy b" i zapisujemy je symbolicznie: $a \Leftrightarrow b$. Symbol $a \Leftrightarrow b$ czytamy: „a równoważne b" lub „a wtedy i tylko wtedy, gdy b". Równoważność zdań a i b jest zdaniem prawdziwym, gdy zdania a i b mają taką samą wartość logiczną.

PRZYKŁAD 6.

Zachodzą równoważności:

a) $2^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$,

b) $\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8$,

c) $-1 < x < 1 \Leftrightarrow x > -1$ i $x < 1$,

d) $x \geqslant 2 \Leftrightarrow x > 2$ lub $x = 2$,

e) $x \neq 2 \Leftrightarrow x < 2$ lub $x > 2$,

f) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $y = 0$,

g) $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ i $x \neq -1$.

ĆWICZENIE 5.

Uzupełnij równoważność, aby ona zachodziła.

a) .... $\Leftrightarrow x \neq 4$

b) $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow$ ....

c) $x^2 = 1 \Leftrightarrow$ ....

d) $x \cdot y \neq 0 \Leftrightarrow$ ....

e) .... $\Leftrightarrow x = -3$ lub $x = 3$

f) $x \neq -5$ i $x \neq 5 \Leftrightarrow$ ....

g) .... $\Leftrightarrow (-3)^3 = -27$

W trakcie uczenia się matematyki często spotykamy zdania o postaci: „Jeżeli a, to b". W ten sposób zbudowana jest większość twierdzeń matematycznych. Na przykład:

1. Jeżeli liczby a, b, c, takie że $a \leqslant b < c$, są długościami boków trójkąta prostokątnego, to $a^2 + b^2 = c^2$.
2. Jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to $a + b > c$.

Zdanie „Jeżeli a, to b" jest **implikacją**, w której człon a nazywamy **poprzednikiem**, a człon b – **następnikiem**. Jeśli implikacja „Jeżeli a, to b" jest twierdzeniem matematycznym, to a nazywamy **założeniem**, a b – **tezą** twierdzenia.

PRZYKŁAD 7.

W każdej z podanych implikacji wskażmy poprzednik i następnik. Oceńmy jej wartość logiczną.

a) Jeżeli liczba jest podzielna przez 4, to liczba ta jest podzielna przez 2.

b) Jeżeli suma cyfr liczby jest podzielna przez 3, to liczba dzieli się przez 3.

c) Jeżeli $a > 0$, to $\sqrt{a} < 0$.

a) Poprzednik (założenie): „liczba jest podzielna przez 4".
Następnik (teza): „liczba jest podzielna przez 2".
Implikacja jest prawdziwa.

b) Poprzednik (założenie): „suma cyfr liczby jest podzielna przez 3".
Następnik (teza): „liczba dzieli się przez 3".
Implikacja jest prawdziwa.

c) Poprzednik: „$a > 0$".
Następnik: „$\sqrt{a} < 0$".
Implikacja jest fałszywa.

PRZYKŁAD 8.

Twierdzenie sformułowane w postaci implikacji:
Jeśli w trójkącie dwa kąty mają miarę 60°, to trójkąt ten jest trójkątem równobocznym.
Założenie twierdzenia: „w trójkącie dwa kąty mają miarę 60°".
Teza twierdzenia: „trójkąt jest trójkątem równobocznym".
Spełnienie warunku „w trójkącie dwa kąty mają miarę 60°" wystarcza, aby trójkąt był równoboczny.

ĆWICZENIE 6.

Wskaż założenie i tezę w twierdzeniu.

a) Jeśli długości trzech boków jednego trójkąta są równe długościom odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

b) Jeśli a i b są dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, to $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Jeżeli człony a i b implikacji „Jeżeli a, to b" są zdaniami prawdziwymi, to implikacja ta jest zdaniem prawdziwym.
Implikacja „Jeżeli a, to b" jest zdaniem fałszywym tylko w jednym przypadku: gdy poprzednik a jest zdaniem prawdziwym, a następnik b – zdaniem fałszywym.

PRZYKŁAD 9.

Mikołaj Kopernik stworzył teorię budowy Układu Słonecznego odmienną od wówczas obowiązującej. Jej uzasadnienie wymagało wielu obserwacji Słońca, Księżyca i planet oraz przeprowadzenia wielu obliczeń. W matematyce obserwacje i obliczenia to zazwyczaj za mało, aby jednoznacznie ocenić prawdziwość danego twierdzenia.

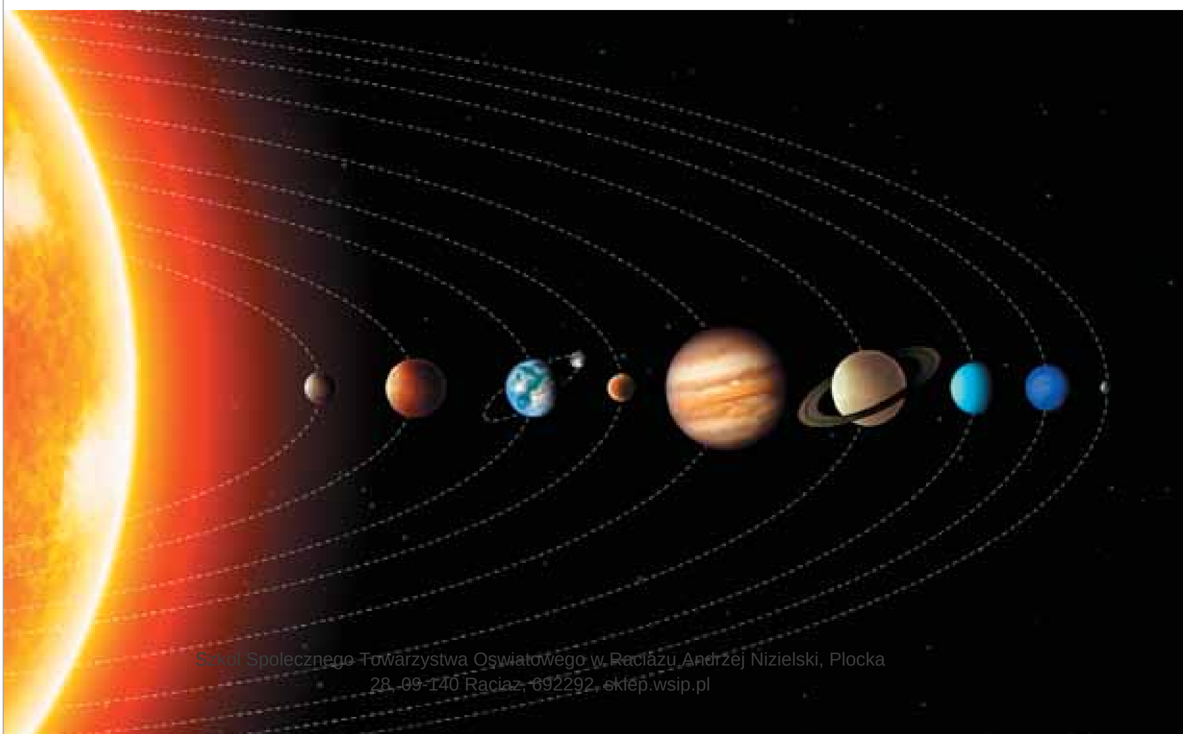
Przykładowo: mogłoby się wydawać, że formuła $n^2 + n + 41$, w której n oznacza liczbę naturalną, pozwala wyznaczać liczby pierwsze.

Dla $n = 1$ mamy $1^2 + 1 + 41 = 43$ – liczba pierwsza.

Dla $n = 2$ mamy $2^2 + 2 + 41 = 47$ – liczba pierwsza.

Podstawmy jeszcze $n = 10$ – wówczas otrzymujemy liczbę 151, też pierwszą.
Przeprowadzone obliczenia nie są jednak wystarczające, aby uznać tę formułę za opisującą liczby pierwsze. Wystarczy wskazać jeden przykład, zwany **kontrprzykładem**, aby zakwestionować jej prawdziwość.

Dla $n = 41$ mamy $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43 = 1763$ – liczba złożona.



Teorie naukowe powstałe w wyniku obserwacji i obliczeń często okazują się błędne lub są z biegiem lat korygowane, natomiast twierdzenia matematyczne są niezmienne. W matematyce, aby uznać postawioną hipotezę za prawdziwą, trzeba ją udowodnić, odwołując się do definicji, twierdzeń, wzorów i praw logiki.

PRZYKŁAD 10.

Udowodnijmy, że $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ dla dowolnej liczby a, gdy n, m to liczby naturalne większe od 0.

Odwołajmy się do definicji potęgi.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n \text{ czynników}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{m \text{ czynników}}}_{n\,+\,m \text{ czynników}} = a^{n+m}$$

W ten sposób uzasadniliśmy, że zachodzi równość $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ dla dowolnej liczby a i liczb naturalnych n, m większych od 0.

Ciekawostka

Od 1992 roku Polacy biorą udział w Międzynarodowych Mistrzostwach w Grach Matematycznych i Logicznych. Reprezentacja Polski jest wyłaniana w eliminacjach organizowanych przez Politechnikę Wrocławską i Oddział Wrocławski Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Zawodnicy startują w ośmiu kategoriach. W jednej z nich rywalizują ze sobą uczniowie szkół ponadgimnazjalnych. Finał jest rozgrywany w Paryżu. Do finału, który odbył się w sierpniu w 2011 roku, zakwalifikowało się dwudziestu pięciu reprezentantów Polski. Zdobyli oni pięć złotych medali, cztery srebrne i trzy brązowe.
Przykład zadania z finału z 2010 roku:
W krainie LogicLand są dwa rodzaje ludzi: Tak-Tak, którzy mówią zawsze prawdę, i Nie-Nie, którzy nigdy nie mówią prawdy. Każda z czterech osób, wśród których są dwie osoby Tak-Tak i dwie osoby Nie-Nie, wypowiada się o jednej z pozostałych trzech osób.
Alice: … jest Tak-Tak.
Bob: Daniel jest Tak-Tak.
Camille: … jest Tak-Tak.
Daniel: … jest Tak-Tak.
Uzupełnij trzy brakujące imiona.

Źródło: www.grymat.im.pwr.wroc.pl

ZADANIA

1. Oceń wartość logiczną zdania.

a) $17^0 = 1$ b) $4\frac{1}{4} - \frac{17}{4} < 0$ c) $3^2 - 2^3 \geqslant 0$ d) $\frac{5}{7} + \frac{7}{5} = 1$

2. Utwórz zaprzeczenie zdania i oceń jego wartość logiczną.

a) $-3 \leqslant 0$ b) $5^0 = 5$ c) $\sqrt{17} \geqslant 4$

d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} \neq 2$ e) $\sqrt{4+9} = 5$ f) $\frac{5}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} < 1$

3. Wskaż zdania, z których zbudowana jest koniunkcja/alternatywa zdań. Oceń jej wartość logiczną.

a) $\sqrt{2} < 1{,}4$ i $\sqrt{2} > 1{,}4$ b) $\sqrt{2} < 1{,}4$ lub $\sqrt{2} > 1{,}4$

c) $4^2 \neq 17$ i $4^2 \neq 16$ d) $4^2 \neq 17$ lub $4^2 \neq 16$

e) $5 - 3^0 = 4$ i $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ f) $5 - 3^0 = 4$ lub $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

g) $-3 \geqslant 3$ i $\sqrt{8} > 4$ h) $-3 \geqslant 3$ lub $\sqrt{8} > 4$

4. Wskaż założenie i tezę w twierdzeniu.

a) Jeśli liczba k jest podzielna przez 3 i 7, to jest podzielna przez 21.

b) Jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$.

c) Jeśli suma cyfr liczby parzystej dzieli się przez 3, to liczba ta dzieli się przez 6.

d) Jeśli kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości pozostałych dwóch boków, to trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym.

e) Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, i n jest dowolną liczbą naturalną, to $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

5. Asia, Karolina, Beata i Ola lubią słuchać muzyki. Jedna z nich słucha muzyki poważnej. Wskaż dziewczynkę, która słucha muzyki poważnej, jeśli wiesz, że:

- jedna z trzech dziewczynek – Ola, Karolina lub Asia – słucha muzyki poważnej;
- Asia na pewno nie słucha muzyki poważnej;
- wśród trzech dziewczynek – Asi, Beaty i Karoliny – jest taka, która słucha muzyki poważnej.

6. Na zjeździe koleżeńskim spotkała się trójka przyjaciół. Z ich opowiadań wynika, że każdy ma dorosłego syna. Wśród sześciorga dzieci, jakie mają koledzy, jest jedna córka. Malinowski ma o jedno dziecko mniej niż Michał. Karol ma tyle dzieci, ile łącznie mają Jan i Michał. Zieliński ma tylu synów, ilu ma ich Malinowski. Jak ma na imię Kowalski i ilu ma synów?

BANK ZADAŃ z. 1–3 » » »

1.2 Zbiory i działania na zbiorach

Jednym z ważnych pojęć w matematyce jest pojęcie zbioru. Zbiór wyznaczamy, wypisując, jeśli jest to możliwe, wszystkie jego elementy, np. $A = \{*, \triangle, \bigcirc, \square\}$, lub opisując własności elementów należących do tego zbioru, np. B – zbiór uczniów w twojej klasie. Zbiory oznacza się dużymi literami, a elementy należące do zbioru – małymi. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\boldsymbol{N}$. Umawiamy się, że $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$. Literą $\boldsymbol{C}$ oznaczamy zbiór liczb całkowitych, czyli $\boldsymbol{C} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Litera $\boldsymbol{W}$ oznacza zbiór liczb wymiernych, a litera $\boldsymbol{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych.
Jeżeli element a należy do zbioru A, to fakt ten będziemy symbolicznie zapisywać $a \in A$. Symbol $\in$ czytamy jako „należy do". Jeśli element b nie jest elementem zbioru A, to napiszemy $b \notin A$. Symbol $\notin$ czytamy jako „nie należy do".

PRZYKŁAD 1.

Niech A będzie zbiorem naturalnych potęg liczby 2. Zatem $A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...\}$. Liczby 1 i 2 są elementami zbioru A, ale liczba 3 nie jest elementem zbioru A. Możemy napisać: $1 \in A$, $2 \in A$, ale $3 \notin A$. Zbiór A jest zbiorem nieskończonym.

ĆWICZENIE 1.

Zbiór A jest zbiorem liczb jednocyfrowych. Używając symboli $\in$ i $\notin$, zapisz przynależność liczby do zbioru A.

a) 1 b) 13 c) 7 d) 10 e) 0

PRZYKŁAD 2.

Określmy symbolicznie zbiór A, jeśli wiemy, że do tego zbioru należą liczby całkowite, których:

a) trzecia potęga jest równa –8,
b) kwadrat jest równy 4.

a) Jest jedna liczba całkowita, której trzecia potęga jest równa –8. Jest nią –2. Możemy zapisać: $A = \{-2\}$. Jest to przykład zbioru skończonego jednoelementowego.
b) Są dwie liczby całkowite, których kwadrat jest równy 4: –2 i 2, stąd $A = \{-2, 2\}$. Jest to przykład zbioru skończonego dwuelementowego.

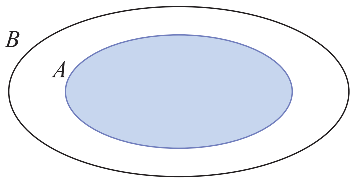
ĆWICZENIE 2.

Zbiór A to zbiór naturalnych potęg liczby 3. Wypisz co najmniej pięć jego elementów.

Zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb rzeczywistych to przykłady zbiorów nieskończonych. Zbiór, do którego nie należy żaden element, to **zbiór pusty**. Przykładem zbioru pustego jest zbiór rzeczywistych rozwiązań równania $x^2 + 1 = 0$. Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\varnothing$ i zaliczamy go do zbiorów skończonych.

Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B, jeśli każdy element zbioru A należy do zbioru B. O zbiorze A mówimy wówczas, że zawiera się w zbiorze B. Symbolicznie zapisujemy to jako $A \subset B$.
Przyjmujemy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.



$A \subset B$

Zbiory A i B są równe, gdy mają takie same elementy. Piszemy wtedy, że $A = B$. Wówczas zbiór A zawiera się w zbiorze B i zbiór B zawiera się w zbiorze A.

PRZYKŁAD 3.

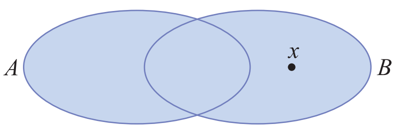
Dane są zbiory $A = \{-1, 0, 1\}$ i $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B, zatem $A \subset B$. Natomiast zbiór B nie jest podzbiorem zbioru A. Symbolicznie zapiszemy $B \not\subset A$.

ĆWICZENIE 3.

Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Czy zbiór A jest podzbiorem zbioru $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? Odpowiedź uzasadnij.

Definicja

Sumą zbiorów A i B jest zbiór elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B. Symbolicznie sumę zbiorów A i B zapisujemy jako $A \cup B$.



$A \cup B$

Element x należy do sumy zbiorów A i B, jeśli należy do co najmniej jednego z tych zbiorów.

PRZYKŁAD 4.

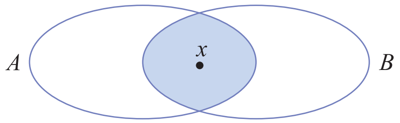
Niech $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Wtedy $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Takich samych elementów nie wpisujemy dwukrotnie do zbioru.

ĆWICZENIE 4.

Dane są zbiory $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ i $B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$. Wyznacz $A \cup B$.

Definicja

Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B jest zbiór elementów, które równocześnie należą do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn zbiorów A i B zapisujemy jako $A \cap B$.



$A \cap B$

Element x należy do iloczynu zbiorów A i B, jeśli należy do każdego z tych zbiorów.

PRZYKŁAD 5.

Wyznaczmy iloczyn zbiorów $A = \{-1, 0, 1\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
$A \cap B = \{0, 1\}$

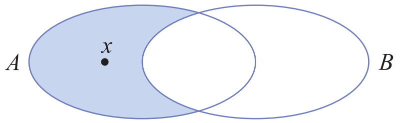
ĆWICZENIE 5.

Wyznacz $A \cap B$, gdy $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ i $B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$.

Jeśli iloczyn zbiorów jest zbiorem pustym (zapisujemy to jako $A \cap B = \varnothing$), to o zbiorach A i B mówimy, że są **zbiorami rozłącznymi**.

Definicja

Różnicą zbiorów A i B jest zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Różnicę zbiorów A i B zapisujemy jako $A \setminus B$.



$A \setminus B$

Element x należy do różnicy zbiorów A i B, jeśli jest elementem zbioru A i nie jest elementem zbioru B.

PRZYKŁAD 6.

Dane są zbiory $A = \{-1, 0, 1\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Wtedy:
$A \setminus B = \{-1\}$, a $B \setminus A = \{2, 3, 4, 5\}$.

ĆWICZENIE 6.

Dane są zbiory $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ i $B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$. Wyznacz $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

ZADANIA

1. Zbiór A jest zbiorem liczb naturalnych, przez które dzieli się 18, B jest zbiorem liczb naturalnych, przez które dzieli się 14. Wyznacz elementy zbiorów: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

2. Wśród opisanych zbiorów wskaż zbiory równe.
A – zbiór liczb rzeczywistych, których kwadrat jest równy 9;
B – zbiór, do którego należy tylko liczba 3;
C – zbiór, którego elementami są liczby całkowite większe od –3 i mniejsze od 3;
D – dwuelementowy zbiór, do którego należą liczby –3 i 3.

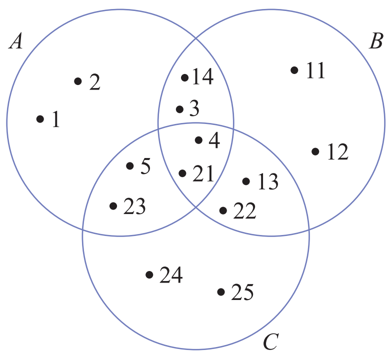
3. Dane są trzy zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$ i $D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Wyznacz:
a) $A \cup B \cup D$, b) $(A \cap B) \cup D$, c) $D \setminus (A \cup B)$, d) $(A \setminus B) \cap D$.

4. Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $A = \{-1, 0, 1\}$.

5. Zbiór A ma 6 elementów, zbiór B ma 4 elementy. Ile elementów może mieć zbiór $A \cap B$? Każdą odpowiedź potwierdź odpowiednim przykładem.

6. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Na tych zbiorach wykonano pewne działanie, w wyniku którego otrzymano zbiór $\{1, 2\}$. Jakie to działanie?

7. Zbiory A, B i C są określone za pomocą grafu. Wyznacz zbiory:
a) $A \cap B$,
b) $B \cap C$,
c) $A \cap B \cap C$,
d) $A \cup B$,
e) $A \setminus B$,
f) $B \setminus (A \cup C)$.



8. W klasie liczącej 27 uczniów wszyscy dojeżdżają do szkoły, korzystając z różnych środków transportu. Dwudziestu z nich czasami przyjeżdża do szkoły samochodem, 12 od czasu do czasu dojeżdża rowerem, 16 okazjonalnie korzysta z autobusu. Czterech uczniów wybiera te trzy możliwości dotarcia do szkoły, 6 przyjeżdża samochodem lub rowerem, 10 korzysta z autobusu lub roweru, a 9 dojeżdża samochodem, jeśli nie zdążą na autobus. Ilu uczniów korzysta tylko z jednego środka transportu?

9. Sześćdziesięciu dwóch uczniów klas maturalnych zapytano o to, jakie przedmioty dodatkowe będą zdawać na maturze. Uzyskano następujące dane: historię wybrało 37 uczniów, biologię – 40 uczniów, a geografię – 21 uczniów. Historię i geografię wybrało 14 uczniów, historię i biologię – 20 uczniów, biologię i geografię – 10 uczniów. Wszystkie trzy przedmioty wybrało 8 uczniów. Ilu uczniów nie wybrało przedmiotu dodatkowego?

10. Pewna firma produkuje trzy rodzaje szamponów: do włosów łamliwych i suchych (S1), do włosów farbowanych (S2) i do włosów normalnych (S3). Teleankieterzy zadzwonili do 1000 rodzin korzystających z tych szamponów i zadali pytanie: „Jakiego rodzaju szamponu używa rodzina?”. Odpowiadający mogli wymienić kilka rodzajów szamponu. Okazało się, że 842 rodziny używają szamponu S1, 673 rodziny – szamponu S2, a 585 rodzin stosuje szampon S3. W 600 rodzinach używa się szamponów S1 i S2, w 423 – S1 i S3, w 322 – S2 i S3, a w 265 rodzinach używa się szamponów wszystkich trzech rodzajów. Przedstaw graficznie wyniki badań teleankieterów. Sprawdź, czy badania zostały przeprowadzone rzetelnie.

BANK ZADAŃ z. 4–7 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Zbiór A jest zbiorem naturalnych potęg liczby 5 nie większych od 125, zbiór B – zbiorem naturalnych wielokrotności liczby 5 mniejszych od 25. Zbiór $A \cup B$ ma

A. 9 elementów. **B.** 7 elementów. **C.** 6 elementów. **D.** 8 elementów.

2. Dane są zbiory $A = \{-3, 0, b, 2\}$, $B = \{-4, 0, 1, a\}$ i $A \cup B = \{-4, -3, 0, 1, 2\}$. Wówczas

A. a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. **B.** $a = -3$ i $b = -4$.
C. $a \in \{-3, 2\}$ i $b \in \{-4, 1\}$. **D.** $a = 2$ i $b = 1$.

3. Wypisz elementy zbiorów opisanych słownie: A – zbiór liczb naturalnych, przez które dzieli się liczba 36, B – zbiór naturalnych wielokrotności liczby 3 nie większych niż 42. Wyznacz sumę, część wspólną i obie różnice tych zbiorów.

4. Dane są zbiory $A = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ i $B = \{1, 3, 5\}$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

5. W zbiorze A jest 7 elementów, w zbiorze B są 2 elementy. Podaj, ile elementów może mieć iloczyn tych zbiorów. Odpowiedź uzasadnij.

6. W klasie liczącej 32 uczniów 17 uczniów uczęszcza na dodatkowe lekcje języka angielskiego, 8 – francuskiego, a 13 – niemieckiego. Trzech uczniów doucza się języka niemieckiego i francuskiego, 5 – angielskiego i francuskiego, a 8 – angielskiego i niemieckiego. Jeden uczeń korzysta z dodatkowych lekcji z trzech języków. Ilu uczniów w klasie nie korzysta z dodatkowych lekcji języków obcych?

1.3 Liczby naturalne i liczby całkowite

Pojęcie liczby naturalnej jest jednym z najstarszych pojęć matematycznych. Liczby naturalne były potrzebne do określenia liczebności i ustalenia kolejności. **Zbiór liczb naturalnych** N jest zbiorem nieskończonym, o którego elementach możemy napisać, że jeśli $n \in N$, to również $n + 1 \in N$. W zbiorze N istnieje element najmniejszy. Jest to liczba zero. Liczba ta określa także liczebność zbioru pustego. Wynik dodawania i mnożenia dowolnych dwóch liczb naturalnych jest zawsze liczbą naturalną. Mówimy, że dodawanie i mnożenie są wykonalne w zbiorze N.

PRZYKŁAD 1.

Czasami znajdujemy się w sytuacjach, w których powinniśmy umieć oszacować wynik działania. Warto wówczas pamiętać o prawach działań: łączności i przemienności mnożenia oraz dodawania, rozdzielności mnożenia względem dodawania i odejmowania, które ułatwiają wykonywanie skomplikowanych działań bez pomocy kalkulatora.

a) $8 \cdot 245 = 8 \cdot (200 + 40 + 5) = 8 \cdot 200 + 8 \cdot 40 + 8 \cdot 5 = 1600 + 320 + 40 = 1960$
b) $7 \cdot 198 = 7 \cdot (200 - 2) = 7 \cdot 200 - 7 \cdot 2 = 1400 - 14 = 1386$
c) $482 \cdot 5 = 241 \cdot 2 \cdot 5 = 241 \cdot 10 = 2410$
d) $25 \cdot 52 = 25 \cdot 4 \cdot 13 = 100 \cdot 13 = 1300$

ĆWICZENIE 1.

Wykonaj działanie bez używania kalkulatora.

a) $9 \cdot 43$ b) $4 \cdot 625$ c) $7 \cdot 498$ d) $25 \cdot 284$ e) $648 \cdot 5$

Definicja

Liczbę naturalną k, $k \neq 0$, nazywamy **dzielnikiem** liczby naturalnej n, gdy wynik dzielenia liczby n przez liczbę k jest liczbą naturalną. Liczbę n można zapisać w postaci iloczynu $n = k \cdot m$ i $m \in N$.

Każda liczba naturalna większa od 1 ma co najmniej dwa dzielniki: 1 i samą siebie.

PRZYKŁAD 2.

Liczbę 14 możemy przedstawić w postaci iloczynu $14 = 1 \cdot 14$ lub $14 = 2 \cdot 7$. Liczby: 1, 2, 7, 14 są dzielnikami liczby 14.

ĆWICZENIE 2.

Wyznacz wszystkie dzielniki liczby.

a) 38 b) 24 c) 35 d) 107 e) 19

Znajomość **cech podzielności** ułatwia szukanie dzielników liczb naturalnych.

Liczba naturalna n jest podzielna przez:
2, gdy ostatnią cyfrą tej liczby jest 0, 2, 4, 6 lub 8.
3, gdy suma cyfr tej liczby dzieli się przez 3.
4, gdy dwie ostatnie jej cyfry są zerami albo przedstawiają liczbę podzielną przez 4.
5, gdy ostatnią cyfrą tej liczby jest 0 lub 5.
6, gdy liczba jest podzielna przez 2 i przez 3.
8, gdy trzy ostatnie jej cyfry są zerami albo przedstawiają liczbę podzielną przez 8.
9, gdy suma cyfr tej liczby dzieli się przez 9.
10, gdy ostatnią cyfrą tej liczby jest 0.
Liczby podzielne przez 3 nazywa się wielokrotnościami liczby 3, analogicznie liczby podzielne przez 4 są wielokrotnościami liczby 4 itd.

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy cyfry x i y tak, aby liczba $2578x123y$ była podzielna przez:

a) 2, b) 8, c) 18.

Korzystamy z podanych cech podzielności.

a) Liczba podzielna przez 2 to liczba parzysta. Zatem x może być dowolną cyfrą, a y – jedną z cyfr ze zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) Badamy liczbę utworzoną przez trzy ostatnie cyfry. Liczba postaci $23y$ jest podzielna przez 8 tylko wtedy, gdy $y = 2$. Zatem $y = 2$ i x jest dowolną cyfrą.

c) $18 = 2 \cdot 9$, stąd liczba $2578x123y$ musi być parzysta i podzielna przez 9. Zatem $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $2 + 5 + 7 + 8 + x + 1 + 2 + 3 + y = 9 \cdot k$, czyli $28 + x + y = 9k$, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$. Wypisujemy wszystkie pary x i y spełniające powyższe warunki:
$y = 0$ i $x = 8$, $y = 2$ i $x = 6$, $y = 4$ i $x = 4$, $y = 6$ i $x = 2$, $y = 8$ i $x = 0$.

ĆWICZENIE 3.

Wyznacz wszystkie cyfry x i y tak, aby liczba:

a) $23582x12$ była podzielna przez 3,
b) $9x82y$ była podzielna przez 6,
c) $1369y2$ była podzielna przez 9,
d) $4x54y$ była podzielna przez 30.

Definicja

Liczbę naturalną n większą od 1, której jedynymi dzielnikami są liczby 1 i n, nazywamy **liczbą pierwszą**. Liczbę naturalną n większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**. Liczba złożona ma więcej niż dwa dzielniki.

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Są nimi np. 2, 3, 5, 7, 11, 13. Wśród nich jest tylko jedna liczba parzysta: 2. Największa odkryta liczba pierwsza ma 12 978 189 cyfr w zapisie pozycyjnym (informacja z 2008 r.) i jest to liczba $2^{43\,112\,609} - 1$.

Definicja

Rozkładem liczby naturalnej na czynniki pierwsze nazywamy przedstawienie tej liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych.

PRZYKŁAD 4.

Rozłóżmy liczbę 180 na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Liczbę 180 można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Możemy zapisać to krócej jako $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

ĆWICZENIE 4.

Rozłóż liczbę na czynniki pierwsze.

a) 80 b) 660 c) 1512 d) 378

ĆWICZENIE 5.

Rozłóż liczby na czynniki pierwsze.

a) 10 i 10^2 b) 18 i 18^2 c) 45 i 45^2 d) 27 i 27^3

Liczby naturalne n i m, których jedynym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1, nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**. Są nimi np. 3 i 7, 14 i 15, 12 i 35.

Dzielenie nie jest wykonalne w zbiorze liczb naturalnych. Oto przykład: przy dzieleniu liczby 34 przez 5 otrzymamy 6 i zostanie reszta równa 4. Zapiszemy więc, że $34 = 6 \cdot 5 + 4$.

Definicja

Liczbę $r \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ nazywamy **resztą z dzielenia** liczby całkowitej m przez liczbę naturalną n wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $m = k \cdot n + r$.

PRZYKŁAD 5.

Zapiszmy symbolicznie postać liczby naturalnej:

a) nieparzystej: $2n + 1$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$.
b) parzystej: $2n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$.
c) takiej, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1: $4n + 1$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$.

Zbiór liczb naturalnych nieparzystych, zbiór liczb naturalnych parzystych, zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1, to nieskończone podzbiory liczb naturalnych.

ĆWICZENIE 6.

Zapisz symbolicznie liczby naturalne:
a) podzielne przez 3,
b) takie, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 4.

PRZYKŁAD 6.

Udowodnijmy, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

Pierwszą liczbę oznaczmy literą n, a drugą: $n + 1$. Zapiszmy sumę kwadratów tych liczb, a następnie przekształćmy ją tak, by przedstawiała liczbę nieparzystą.

$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + (n + 1)(n + 1) = n^2 + n^2 + n + n + 1 =$

$= 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1 = 2k + 1$, gdzie $k = n^2 + n$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Otrzymaliśmy $2k + 1$, a liczby takiej postaci są nieparzyste. Udowodniliśmy w ten sposób, że suma kwadratów kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

PRZYKŁAD 7.

Udowodnijmy, że suma liczby dwucyfrowej i liczby dwucyfrowej, którą otrzymamy w wyniku przestawienia jej cyfr, jest liczbą podzielną przez 11.

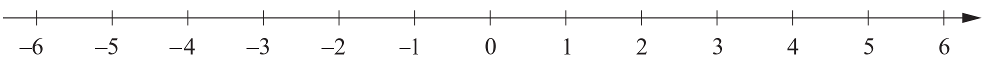
Dowolną liczbę dwucyfrową zapiszmy w postaci $a \cdot 10 + b$, gdzie a i b są cyframi i $a \neq 0$. Liczba o przestawionych cyfrach to $b \cdot 10 + a$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$ (założenie $a \neq 0$ i $b \neq 0$ jest konieczne, żeby obie liczby były liczbami dwucyfrowymi).

Dodajmy te liczby.

$(a \cdot 10 + b) + (b \cdot 10 + a) = a \cdot 10 + b + b \cdot 10 + a = 11 \cdot a + 11 \cdot b = 11(a + b)$.

Otrzymaną sumę dwóch liczb przedstawiliśmy jako wielokrotność liczby 11. To oznacza, że jest ona podzielna przez 11.

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie, liczby przeciwne do nich i liczba zero. $\boldsymbol{C} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$



Po raz pierwszy liczb ujemnych użyli w VI i VII w. matematycy indyjscy w rachunkach. W Europie jako „pełnoprawne” liczby ujemne pojawiły się dopiero w XV w. Wynik dodawania, mnożenia i odejmowania liczb całkowitych jest zawsze liczbą całkowitą. Działania te są wykonalne w zbiorze $\boldsymbol{C}$. W zbiorze liczb całkowitych możemy wyróżnić m.in. podzbiór liczb całkowitych dodatnich ($\boldsymbol{C}_+$) i podzbiór liczb całkowitych ujemnych ($\boldsymbol{C}_-$).

ĆWICZENIE 7.

Oblicz:
a) $17 + (-10) - (-3) - 9$,
b) $(-5) \cdot [3 \cdot (-2) - (-8) \cdot (-1)]$,
c) $(-6)^2 - (-7)^2$,
d) $(-3) \cdot \left[(-7)^2 - 8^2\right] + 5\left[(-3)^3 + 4^2\right]$.

ĆWICZENIE 8.

Niech $x = -3$, $y = -1$ i $z = -2$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $3x^3yz^2$ b) $5xy^3z^4$ c) $2x(y - 3z) - 3z(x + y^3)$ d) $xy^2 - x^2z - xyz$

ĆWICZENIE 9.

Wypisz kilka podzbiorów zbioru liczb całkowitych:

a) skończonych, b) nieskończonych.

ZADANIA

1. Dane są liczby 243 500 618, 352 010 481, 540 420 138, 134 560 026.
Przez 18 dzielą się
A. 243 500 618, 352 010 481 **B.** 352 010 481, 540 420 138
C. 243 500 618, 134 560 026, 540 420 138 **D.** 540 420 138, 134 560 026

2. Największy dzielnik liczby 357, który jest liczbą pierwszą, to
A. 14 **B.** 7 **C.** 21 **D.** 17

3. Suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest równa 35. Wśród tych liczb
A. nie ma liczb pierwszych. **B.** jest jedna liczba pierwsza.
C. są dwie liczby pierwsze. **D.** są trzy liczby pierwsze.

4. Wśród liczb 352, 448, 666, 810, 1456, 1728 wskaż te, które są podzielne przez:
a) 3, b) 4, c) 6, d) 18.

5. Przedstaw liczbę w postaci iloczynu liczb pierwszych i podaj jej wszystkie dzielniki.
a) 98 b) 124 c) 966 d) 1344

6. Bez wykonywania mnożenia wypisz wszystkie liczby jednocyfrowe, przez które dzieli się liczba:
a) $24 \cdot 18 \cdot 35$, b) $25 \cdot 12 \cdot 19$, c) $125 \cdot 36 \cdot 16$, d) $10 \cdot 17 \cdot 25$.

7. Spośród liczb 572, 816, 1488, 2268 wybierz te, które są wielokrotnościami liczby 36.

8. Wyznacz wszystkie cyfry x i y tak, aby liczba:
a) $3542x2$ była podzielna przez 3 i nie była podzielna przez 9,
b) $231xy4$ była podzielna przez 2 i nie była podzielna przez 4,
c) $1243x$ była podzielna przez 2 i nie była podzielna przez 5,
d) $7456y$ była podzielna przez 4 i nie była podzielna przez 3.

9. Liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{101}$ są kolejnymi liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że wśród tych liczb jest liczba podzielna przez 99.

10. W XVIII w. została postawiona hipoteza (tzw. hipoteza Goldbacha), iż dowolna liczba parzysta nie mniejsza od 4 może być przedstawiona jako suma dwóch liczb pierwszych. Na przykład $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $48 = 29 + 19$, $100 = 97 + 3$ itd. Do dzisiaj hipotezy tej nie udowodniono.
Podaną liczbę przedstaw jako sumę dwóch liczb pierwszych.
a) 98 b) 184 c) 300 d) 480

11. W czasie jednego skurczu komory serca do odpowiednich naczyń krwionośnych zostaje wtłoczone 70 ml krwi.

a) Podczas ilu uderzeń serca zostanie przepompowana cała krew, jeśli dorosły człowiek ma około 7 l krwi?

b) Jak długo będzie trwało całkowite przepompowanie krwi, jeśli serce uderza przeciętnie 75 razy na minutę?

12. Znajdź liczbę pierwszą najbliższą podanej liczbie.

a) 175 b) 646 c) 1548 d) 2222

13. Znajdź wszystkie liczby większe od 711 i mniejsze od 721 podzielne przez 48. Czy wśród liczb większych od 721 i mniejszych od 731 jest liczba podzielna przez 48?

14. Wyznacz sumę, część wspólną i obie różnice zbiorów A i B, jeśli:

A – zbiór wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, których resztą z dzielenia przez 3 jest liczba 1,

B – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 99.

15. Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

BANK ZADAŃ z. 8–17 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczba $3x2581$ jest podzielna przez 3. Cyfra x to

A. 2 lub 5. **B.** 5 lub 8. **C.** 2 lub 8. **D.** 2 lub 5 lub 8.

2. Niech A będzie zbiorem liczb pierwszych, a B – zbiorem liczb naturalnych parzystych. Wyznacz część wspólną i obie różnice tych zbiorów.

3. Wyznacz wszystkie dzielniki liczby 759.

4. Ile znaków użyto do ponumerowania 546-stronicowej książki, jeśli numerację rozpoczęto od strony piątej?

5. Liczba n przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, liczba m przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Jaką resztę przy dzieleniu przez 5 daje liczba $n + m$? Odpowiedź uzasadnij.

PROJEKT

1. Liczbę 12 możemy przedstawić w postaci iloczynu: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Liczba 12 dzieli się przez $1,\ 2,\ 3,\ 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 2 \cdot 3$, czyli ma 6 dzielników. Rozłóż na czynniki pierwsze kilka liczb naturalnych. Ile dzielników ma każda z nich?

2. Podnieś do kwadratu liczbę dwucyfrową kończącą się cyfrą 5.

$15^2 = 225$ $25^2 = 625$ $35^2 = 1225$ …

Przyjrzyj się uważnie liczbom, które otrzymujesz. Postaw hipotezę i ją uzasadnij. A co z liczbami trzycyfrowymi kończącymi się cyfrą 5 oraz z liczbami czterocyfrowymi? Przeprowadź badania i opisz swoje spostrzeżenia.

1.4 Liczby wymierne i liczby niewymierne

Definicja

Liczby, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi i $n \neq 0$, nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór liczb wymiernych będziemy oznaczać literą $\boldsymbol{W}$. Analogicznie jak dla zbioru liczb całkowitych, stosujemy tu oznaczenia: $\boldsymbol{W}_+$ – zbiór liczb wymiernych dodatnich, $\boldsymbol{W}_-$ – zbiór liczb wymiernych ujemnych.

PRZYKŁAD 1.

Wypiszmy kilka liczb wymiernych: $\frac{2}{3}, \frac{7}{13}, \frac{-2}{-3}, \frac{8}{12}$. Zauważmy, że $\frac{2}{3}, \frac{-2}{-3}$ i $\frac{8}{12}$ to ta sama liczba.

ĆWICZENIE 1.

Uzasadnij, że liczby $2, 0, 3\frac{7}{8}$ to liczby wymierne. Przedstaw każdą z nich w postaci ułamka $\frac{m}{n}$.

CIEKAWOSTKA

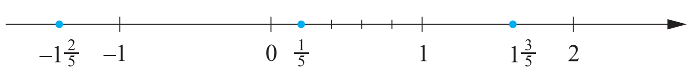
Współczesny sposób zapisu ułamków pochodzi od matematyków hinduskich, chociaż nie używali oni kreski ułamkowej do oddzielania licznika od mianownika. Kreskę ułamkową zawdzięczamy Arabom tłumaczącym dzieła Hindusów. Używane dzisiaj oznaczenie ułamków w Europie wprowadził włoski matematyk Fibonacci.

Ułamek, w którym licznik i mianownik są liczbami dodatnimi oraz licznik
- jest mniejszy od mianownika, nazywamy **ułamkiem właściwym**.
- jest nie mniejszy od mianownika, nazywamy **ułamkiem niewłaściwym**.

Ułamki niewłaściwe dodatnie są nie mniejsze od 1. Zwykle przedstawiamy je w postaci liczby naturalnej i ułamka właściwego (czyli liczby mieszanej), np.
$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}, \quad \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$.

PRZYKŁAD 2.

Zaznaczmy na osi liczbowej: $\frac{1}{5}, -1\frac{2}{5}, 1\frac{3}{5}$.



PRZYKŁAD 3.

a) Zapiszmy ułamek $\frac{72}{84}$ w postaci nieskracalnej.

b) Sprowadźmy ułamki $\frac{5}{72}$ i $\frac{11}{84}$ do najmniejszego wspólnego mianownika.

a) Wykonamy operację skracania ułamka. Wyznaczymy największy wspólny dzielnik liczb 72 i 84, a następnie w jednym kroku skrócimy ułamek przez ten dzielnik.
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
Wspólne czynniki w rozkładach liczb 72 i 84 to: 2, 2 i 3. Zatem największym wspólnym dzielnikiem tych liczb jest $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, co symbolicznie zapisujemy jako
$\mathrm{NWD}(72, 84) = 12$. Stąd $\frac{72}{84} = \frac{6}{7}$.

b) Wyznaczymy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb występujących w mianownikach ułamków. Najmniejszą wielokrotnością liczb 72 i 84 jest iloczyn czynników, na które rozłożyliśmy liczbę 72 i tych czynników występujących w rozkładzie na czynniki liczby 84, które nie występują w rozkładzie liczby 72. Zatem najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 72 i 84 jest liczba: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$, co symbolicznie zapisujemy jako
$\mathrm{NWW}(72, 84) = 504$. Stąd $\frac{5}{72} = \frac{35}{504}$ i $\frac{11}{84} = \frac{66}{504}$.

ĆWICZENIE 2.

Skróć ułamki.

a) $\frac{12}{22}$ b) $\frac{24}{112}$ c) $\frac{35}{135}$ d) $\frac{36}{45}$

ĆWICZENIE 3.

Rozszerz ułamki.

a) $\frac{12}{22} = \frac{48}{\quad}$ b) $\frac{24}{112} = \frac{\quad}{336}$ c) $\frac{35}{135} = \frac{175}{\quad}$ d) $\frac{36}{45} = \frac{\quad}{180}$

Rozszerzając lub skracając ułamek, zapisujemy liczbę wymierną w różnych postaciach. Operacje rozszerzania i skracania ułamka wykorzystujemy do porównywania liczb wymiernych oraz wykonywania na nich działań: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$b \neq 0$ i $d \neq 0$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$	$b \neq 0$ i $d \neq 0$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$b \neq 0$ i $d \neq 0$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$b \neq 0$, $d \neq 0$ i $c \neq 0$

ĆWICZENIE 4.

Oblicz:

a) $-2\frac{4}{7} - 7\frac{1}{2}$, b) $4\frac{2}{3} + \left(-7\frac{1}{4}\right)$, c) $-\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right)$, d) $1\frac{5}{9} : \left(-2\frac{1}{3}\right)$.

ĆWICZENIE 5.

Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{3}{4}$ i $y = \frac{1}{3}$.

a) $\frac{2x^2 - 4y}{15xy}$ b) $\frac{15xy - 2x^2}{3y^2}$ c) $\frac{2x + 7y - xy}{8x^2}$

Liczbę wymierną możemy przedstawić również w postaci dziesiętnej. **Rozwinięcie dziesiętne** liczby wymiernej jest skończone lub nieskończone okresowe. W rozwinięciu nieskończonym okresowym powtarza się od pewnego miejsca ta sama cyfra lub grupa cyfr. Tę cyfrę lub grupę cyfr nazywamy **okresem rozwinięcia dziesiętnego**.

PRZYKŁAD 4.

$\frac{11}{400} = 0{,}0275$ $3\frac{5}{12} = \frac{41}{12} = 3{,}41666... = 3{,}41(6)$ $\frac{3}{22} = 0{,}136363636... = 0{,}1(36)$

ĆWICZENIE 6.

Znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby. Wskaż okres tego rozwinięcia.

a) $\frac{7}{23}$ b) $5\frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{41}$

ĆWICZENIE 7.

Podaj dwudziestą trzecią cyfrę po przecinku liczby 1,2345(6789) oraz liczby 25,179(65).

PRZYKŁAD 5.

Przedstawmy liczbę 1,2(6) w postaci ułamka zwykłego.

Niech $a = 1{,}2(6) = 1{,}2666\ldots$

Liczbę a pomnożymy przez 100 i przez 10 po to, aby cyfry występujące po przecinku w liczbach $100a$ i $10a$ były takie same.

$$100a = 126{,}666...$$

$$10a = \ \ 12{,}666...$$ Odejmujemy równania stronami.

$$100a - 10a = 114$$

$90a = 114$, stąd $a = \frac{114}{90} = \frac{19}{15}$

$1{,}2(6) = \frac{19}{15}$

Każdą liczbę zapisaną w postaci rozwinięcia dziesiętnego okresowego możemy zapisać w postaci ułamka zwykłego.

ĆWICZENIE 8.

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) 0,(17) b) 0,23(5) c) 12,(251)

PRZYKŁAD 6.

Porównajmy liczby $\frac{3}{23}$ i $\frac{4}{33}$.

I sposób

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

$\frac{3}{23} = \frac{3 \cdot 33}{23 \cdot 33} = \frac{99}{759}$ i $\frac{4}{33} = \frac{4 \cdot 23}{33 \cdot 23} = \frac{92}{759}$

Porównujemy liczniki i stwierdzamy, że $\frac{3}{23} > \frac{4}{33}$.

II sposób

Sprowadzamy ułamki do wspólnego licznika.

$\frac{3}{23} = \frac{3 \cdot 4}{23 \cdot 4} = \frac{12}{92}$ i $\frac{4}{33} = \frac{4 \cdot 3}{33 \cdot 3} = \frac{12}{99}$.

Porównujemy mianowniki i stwierdzamy, że $\frac{3}{23} > \frac{4}{33}$.

III sposób

Wyznaczamy rozwinięcie dziesiętne każdego ułamka.

$\frac{3}{23} = 0{,}1304...$ i $\frac{4}{33} = 0{,}1212...$

Już na drugim miejscu po przecinku w obu liczbach występują inne cyfry, porównujemy je i stwierdzamy, że $\frac{3}{23} > \frac{4}{33}$.

ĆWICZENIE 9.

Porównaj liczby.

a) $\frac{2}{17}$ i $\frac{3}{25}$ b) $-\frac{11}{39}$ i $-\frac{17}{60}$ c) $\frac{15}{28}$ i $0{,}5(35)$

Definicja

Liczby, których nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Istnienie liczb niewymiernych to stary problem. Już starożytni Grecy zauważyli, że długości przekątnej kwadratu o boku 1 nie można wyrazić za pomocą żadnego ułamka.

Liczby niewymierne mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.
Zbiór liczb niewymiernych oznaczać będziemy symbolicznie jako różnicę zbiorów $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}$.
Przykłady liczb niewymiernych: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{10}$, $2{,}1121231234\ldots$.

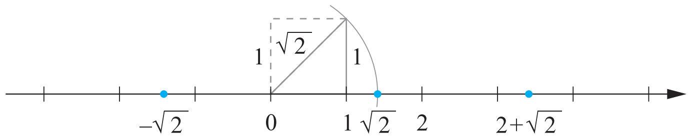
ĆWICZENIE 10.

Podaj przykłady liczb niewymiernych, których:

a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

PRZYKŁAD 7.

Przedstawmy na osi liczbowej liczby: $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.



ĆWICZENIE 11.

Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $0,\ \frac{3}{4},\ 1-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\pi,\ -\frac{2}{5},\ \sqrt{3}$

b) $-2+\sqrt{5},\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{4},\ -\sqrt{3}-1,\ \sqrt{1{,}21},\ -2\frac{7}{9}$

ĆWICZENIE 12.

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa:

a) $2\sqrt{3}$ czy $3\sqrt{2}$,

b) $5\sqrt{6}$ czy $6\sqrt{5}$,

c) $-8\sqrt{7}$ czy $-7\sqrt{8}$.

ZADANIA

1. Istnieje liczba niewymierna, która w rozwinięciu dziesiętnym ma tylko cyfry

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 i 1 **D.** 7

2. Suma $-8\frac{11}{16}+5\frac{7}{8}$ jest równa

A. $-3\frac{3}{16}$ **B.** $-14\frac{9}{16}$ **C.** $-3\frac{4}{8}$ **D.** $-2\frac{13}{16}$

3. Wyrażenie $3a^2b-2ab^2$ dla $a=-\frac{2}{3}$ i $b=-\frac{3}{2}$ przyjmuje wartość

A. -15 **B.** -12 **C.** 1 **D.** 0

4. Suma 182 cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{35}{12}$ jest równa

A. 1090 **B.** 972 **C.** 1092 **D.** 974

5. Wykonaj działania.

a) $5\frac{17}{24}-\left(-2\frac{3}{8}\right)$

b) $3\frac{1}{4}\cdot(-0{,}4)+3\frac{1}{4}\cdot(-15{,}6)$

c) $\left(5\frac{4}{15}-3\frac{7}{24}\right):0{,}8$

d) $\left(\dfrac{\left(1{,}2+2\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{5}{2}-2}-\dfrac{\left(7\frac{3}{4}-6\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{10{,}15-2\frac{9}{20}}\right)\cdot\frac{2}{67}$

6. Oceń, czy zależności są prawdziwe.

a) $\frac{7}{8}>\frac{17}{18}$

b) $-3^2=(-3)^2$

c) $\frac{27}{39}>\frac{23}{37}$

d) $\sqrt{289+25}=\sqrt{289}+\sqrt{25}$

7. Uporządkuj rosnąco podane liczby.

a) $\frac{2}{15}, \frac{3}{20}, \frac{4}{29}$ b) $-\frac{6}{53}, -\frac{3}{13}, -\frac{4}{19}$

8. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{3}{4}$ i $y = -\frac{1}{3}$.

a) $12x^2y - 7xy$ b) $3x^2 - 2y^2$ c) $4xy + 2x^2 - 3y^2$ d) $-\frac{1}{2}(xy^2)$

9. Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) 1,(1) b) 1,347 c) 0,(9) d) 4,1(32)

10. Wyznacz wszystkie liczby całkowite m, które spełniają podany warunek.

a) $-3\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}\sqrt{7} < m < \frac{5}{3}\sqrt{7}$ c) $-3\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

BANK ZADAŃ z. 18–24 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wyrażenie $3xy - x^2y + xy^2$ dla $x = -\frac{1}{2}$ i $y = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość

A. $-\frac{17}{18}$ **B.** $\frac{8}{9}$ **C.** $\frac{17}{18}$ **D.** $\frac{25}{18}$

2. Oblicz:

a) $9\frac{1}{11} + 3\frac{5}{22}$, b) $10\frac{3}{14} - 7\frac{1}{7}$, c) $4\frac{2}{7} \cdot 1\frac{2}{5}$, d) $4\frac{2}{3} : 1\frac{5}{9}$.

3. Wzór $m = \frac{25(h - 100)}{26}$ opisuje zależność między prawidłową wagą m, wyrażoną w kg, a wzrostem h, wyrażonym w cm, dla dorosłego mężczyzny. Jaki wzrost powinien mieć mężczyzna o wadze 75 kg?

4. Porównaj liczby $3\frac{2}{13}$ i $3\frac{11}{57}$.

5. Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n oznacza liczbę naturalną nieparzystą, można przedstawić jako sumę $\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, gdzie $x = \frac{n+1}{2}$ i $y = \frac{n(n+1)}{2}$.

Przedstaw w takiej postaci ułamek $\frac{2}{37}$.

1.5 Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych to zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych. Zbiór ten oznaczany jest literą ***R*** i wykonalne są w nim działania: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, z wyjątkiem dzielenia przez 0.

Prawa działań:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	prawo łączności dodawania
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	prawo łączności mnożenia
$a + b = b + a$	prawo przemienności dodawania
$a \cdot b = b \cdot a$	prawo przemienności mnożenia
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania

PRZYKŁAD 1.

Obliczmy:

a) $7\frac{5}{12} + 6\frac{4}{11} - 5\frac{5}{12} + 4\frac{7}{11}$, b) $\frac{4}{25} \cdot 2{,}7 \cdot 100 \cdot 6\frac{1}{4}$, c) $3{,}34 \cdot 1\frac{3}{4} + 0{,}66 \cdot 1{,}75$.

a) Zastosujemy prawo przemienności, a następnie prawo łączności dodawania.

$$7\frac{5}{12} + 6\frac{4}{11} - 5\frac{5}{12} + 4\frac{7}{11} = \left(7\frac{5}{12} - 5\frac{5}{12}\right) + \left(6\frac{4}{11} + 4\frac{7}{11}\right) = 2 + 11 = 13$$

b) Zastosujemy prawo przemienności, a następnie prawo łączności mnożenia.

$$\frac{4}{25} \cdot 2{,}7 \cdot 100 \cdot 6\frac{1}{4} = \frac{4}{25} \cdot \frac{27}{10} \cdot 100 \cdot \frac{25}{4} = \left(\frac{4}{25} \cdot \frac{25}{4}\right) \cdot \left(\frac{27}{10} \cdot 100\right) = 270$$

c) Zastosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

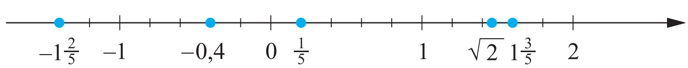
$$3{,}34 \cdot 1\frac{3}{4} + 0{,}66 \cdot 1{,}75 = 3{,}34 \cdot 1\frac{3}{4} + 0{,}66 \cdot 1\frac{3}{4} = (3{,}34 + 0{,}66) \cdot 1\frac{3}{4} = 4 \cdot \frac{7}{4} = 7$$

ĆWICZENIE 1.

Oblicz:

a) $-36 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{7}{12}\right)$, b) $66 \cdot \left(\frac{5}{11} + \frac{7}{33}\right)$, c) $4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{3} + \frac{14}{3} \cdot (-2)$.

Liczby rzeczywiste utożsamiamy z punktami na osi liczbowej. Każdemu punktowi osi odpowiada jedna i tylko jedna liczba rzeczywista, a każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowany jest dokładnie jeden punkt na osi.

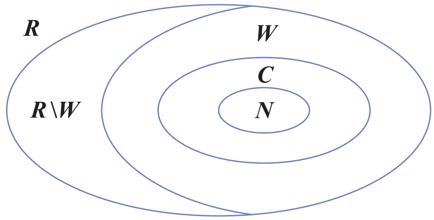


PRZYKŁAD 2.

Przedstawmy graficznie relacje między zbiorami liczbowymi i zapiszmy te relacje symbolicznie.

Między zbiorami liczbowymi zachodzą relacje:

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{W}$
$\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{R}$



ĆWICZENIE 2.

Wykonaj działania na zbiorach.

a) $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{C}$ b) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{W}$ c) $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{W}$
d) $\boldsymbol{N} \cap (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W})$ e) $(\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}) \cup \boldsymbol{W}$ f) $(\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}) \cap \boldsymbol{W}$

ZADANIA

1. Liczba $\sqrt{144 + 256}$ jest
A. równa 28. **B.** mniejsza od 20. **C.** równa 20. **D.** równa 26.

2. Liczby $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ i $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ to liczby
A. wzajemnie odwrotne. **B.** przeciwne. **C.** wymierne. **D.** równe.

3. Jeśli $a = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{7} - 3}$, $c = \frac{2}{3 - \sqrt{7}}$, to
A. $a < b < c$ **B.** $a < c < b$ **C.** $b < a < c$ **D.** $b < c < a$

4. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a < b$ i $c < d$. Zatem
A. $a + c < b + d$ **B.** $ad < bc$ **C.** $a - c < d - b$ **D.** $ac < bc$

5. Wykonaj działania.

a) $5\frac{1}{4} : \left(-3\frac{1}{2}\right) + 1{,}5$

b) $\dfrac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}125 + 4{,}5}{\frac{7}{9} - 0{,}35}$

c) $\left(\frac{5}{6} + 1\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{7} - 1\frac{2}{5}\right)$

d) $1\frac{2}{5} \cdot 12\frac{1}{7} - 3\frac{1}{3} \cdot \left(4\frac{2}{11} - 3\frac{1}{2}\right)$

6. Ze zbioru $A = \left\{0, -3, \frac{1}{3}, \sqrt{9}, \left(-\frac{1}{3}\right)^2, \sqrt{7}, -2\frac{1}{2}\right\}$ wybierz liczby:
a) naturalne, b) całkowite, c) wymierne, d) niewymierne.

7. Ze zbioru $B = \left\{ \sqrt{169} + \frac{2}{3}\sqrt{27},\ \frac{1}{5}\sqrt{144} - \frac{1}{3}\sqrt{121},\ \frac{3}{4}\sqrt{64} + \frac{2}{5}\sqrt{125},\ 6\sqrt{9} + 3\sqrt{81},\ -2\sqrt{256} + 4\sqrt{16} \right\}$ wybierz liczby niewymierne.

8. Wyznacz zbiory.

a) $(\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{R}$ b) $\boldsymbol{N} \cap (\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{W})$ c) $\boldsymbol{C} \cap (\boldsymbol{W} \setminus \boldsymbol{N})$ d) $\big(\boldsymbol{N} \cap (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W})\big) \cup \boldsymbol{R}$

9. Podaj przykład trzech liczb x spełniających podane warunki.

a) $x \in \boldsymbol{N}$ i $x \in \boldsymbol{W}_+$ b) $x \in \boldsymbol{C}$ lub $x \in \boldsymbol{W}$ c) $x \in \boldsymbol{W} \setminus \boldsymbol{C}$

10. Jeśli x i y oznaczają odległość przedmiotu i jego obrazu od wklęsłego lustra o ogniskowej f, to związek między tymi wielkościami opisuje wzór $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$. Wyznacz brakującą wielkość, jeśli:

a) $x = 40$ cm i $f = 20$ cm, b) $y = 80$ cm i $f = 20$ cm.

11. Prędkość, jaką trzeba nadać ciału, by znalazło się na orbicie okołoplanetarnej, opisuje wzór $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, gdzie G oznacza stałą grawitacji na planecie, M – masę planety, r – promień planety. Oblicz, jaką prędkość trzeba nadać ciału na Ziemi, a jaką – na Marsie, żeby mogło ono orbitować wokół planety. Skorzystaj z wzoru określającego przyspieszenie na planecie $g = G\frac{M}{r^2}$ oraz danych z poniższej tabeli.

	Średnica [km]	Masa [kg]	Przyspieszenie $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
Ziemia	12 756	$5974 \cdot 10^{21}$	9,81
Mars	6800	$644 \cdot 10^{21}$	3,69

12. Koszt eksploatacji pewnego samolotu w złotych na godzinę opisuje wzór $K = 2850 + \frac{h}{150} + \frac{67\,500\,000}{h}$, gdzie h oznacza wysokość, na jaką wznosi się samolot. Wyznacz koszt godzinnego lotu na wysokości 7500 m.

13. Znajdź długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, o którym wiadomo, że przyprostokątne mają długości:

a) 8 i 4, b) 4 i $\sqrt{11}$, c) $\sqrt{13}$ i $\sqrt{23}$.

BANK ZADAŃ z. 25–27 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczby $a = \frac{5}{7} - 1\frac{2}{5}$, $b = -1\frac{3}{4} + \frac{8}{11}$, $c = 3\frac{1}{2} : \left(-5\frac{1}{8}\right)$ oraz $d = 7\frac{2}{5} - 8\frac{5}{7}$ uporządkowano rosnąco. Wskaż poprawne uporządkowanie.

A. $a < b < c < d$ **B.** $b < d < c < a$
C. $d < b < c < a$ **D.** $d < b < a < c$

2. Wykonaj działania.

a) $\left(\frac{7}{9} \cdot \frac{63}{36}\right) \cdot \frac{72}{14}$ b) $\frac{77}{34} : \frac{11}{17} - 1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{7}$ c) $\dfrac{4\frac{2}{7} : 1\frac{1}{14} - 3\frac{2}{5} \cdot 1{,}25}{\frac{2}{3} - 1}$

3. Samochód osobowy zużywa 7,5 l benzyny na 100 km. Litr benzyny kosztuje 5,30 zł. Jaki jest koszt przejazdu 480 km tym samochodem?

4. Całkowity koszt (w zł) wypożyczenia samochodu można obliczyć ze wzoru $P = 84d + 0{,}45k$, gdzie d oznacza liczbę dni, a k – liczbę przejechanych kilometrów. Ile kilometrów przejechał kierowca, który zapłacił 600 zł, a samochód użytkował przez 3 dni?

PROJEKT

W pola prostokątnej tablicy wpisujemy kolejne liczby naturalne, tak jak na rysunku. Wyznacz liczbę, którą należy wpisać w zaznaczonym polu.

	1	2	3	4	5	6	...	k	...
1	1	2	4	7					
2	3	5	8						
3	6	9							
4	10								
5									
⋮									
w									
⋮									

1.6 Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza

Użycie potęgi pozwala na skrócenie zapisu mnożenia takich samych liczb. Ułatwia również zapis bardzo dużych lub bardzo małych liczb.

Definicja

Dla każdej liczby $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$ i $n > 1$ $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$.

Przyjmujemy, że $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$ oraz $a^1 = a$ dla $a \in \boldsymbol{R}$.

Wyrażenie 0^0 nie określa żadnej liczby, nie ma sensu liczbowego.

ĆWICZENIE 1.

Zapisz wyrażenie w postaci potęgi.

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ b) $\frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y}$ c) $\frac{1}{x \cdot x \cdot x}$

Definicja

Dla każdej liczby $a \neq 0$ i $n \in \boldsymbol{N}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

PRZYKŁAD 1.

Obliczmy potęgę.

a) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ b) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343}$

ĆWICZENIE 2.

Oblicz:

a) $2^4, (1{,}2)^2, \left(2\frac{1}{3}\right)^3, \left(4\frac{7}{9}\right)^0$, b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}, (0{,}15)^{-1}, \left(-3\frac{1}{5}\right)^{-2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$.

ĆWICZENIE 3.

Liczbę p przedstaw w postaci potęgi o podstawie a.

a) $p = 64, a = 4$ b) $p = \frac{1}{9}, a = 3$ c) $p = -\frac{1}{32}, a = -2$ d) $p = 0{,}001, a = 10$

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz wartość wyrażenia dla $x = -5$ i $y = 2$.

a) $x^{-2} + y^2$ b) $(-xy^2)^2$ c) $(x - 2y^{-2})^2$ d) $(3x^{-2}y)^2$

ĆWICZENIE 5.

Każdą liczbę zapisz jako potęgę o wykładniku

a) dodatnim: $\frac{25}{64}$, $\frac{1}{2^{-6}}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$, b) ujemnym: $\frac{1}{36}$, $0{,}0001$, $\frac{27}{8}$.

PRZYKŁAD 2.

Szacuje się, że we Wszechświecie jest 10^{11} galaktyk. Typowa galaktyka zawiera około 10^{11} gwiazd. Obliczmy, ile gwiazd jest we Wszechświecie.

$$10^{11} \cdot 10^{11} = \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10)}_{11 \text{ razy}} \cdot \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10)}_{11 \text{ razy}} = 10^{22}$$

Twierdzenie

Dla liczb $a, b \in \boldsymbol{R}$ takich, że $a \neq 0$, $b \neq 0$, oraz $n, m \in \boldsymbol{C}$ prawdziwe są wzory:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

PRZYKŁAD 3.

Wykonajmy działania na potęgach.

a) $(x^2y^{-3})^{-2} \cdot (x^{-3}y^{-2})^3 = x^{-4}y^6 \cdot x^{-9}y^{-6} = x^{-4+(-9)} \cdot y^{6+(-6)} = x^{-13}y^0 = x^{-13}$, gdzie $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

b) $\frac{a^{-2}b}{a^{-4}b^{-3}} = \frac{a^{-2}}{a^{-4}} \cdot \frac{b}{b^{-3}} = a^{-2-(-4)} \cdot b^{1-(-3)} = a^2 \cdot b^4 = a^2b^4$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

ĆWICZENIE 6.

Zapisz wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\left(a^{-5}b^3\right)^2$ b) $\frac{x^{-3}y^{-2}z^5}{x^{-2}y^{-3}z^6}$ c) $\left(\frac{x^{-2}y}{z^3}\right)^{-3} : \left(\frac{x^5y^{-2}}{z^3}\right)^{-1}$

Definicja

Każdą liczbę dodatnią a możemy zapisać w postaci iloczynu $a = x \cdot 10^n$, gdzie $1 \leqslant x < 10$, a n jest liczbą całkowitą.
Taki zapis liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

PRZYKŁAD 4.

Kostkę Rubika można ułożyć na 43 252 003 274 489 856 000 różnych sposobów (ponad 43 tryliony). Tak dużą liczbę zapiszemy w przybliżeniu, a następnie w notacji wykładniczej: $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 43\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \approx 4{,}3 \cdot 10^{19}$.
Przesunęliśmy przecinek o 19 miejsc w lewo, dlatego wykładnikiem potęgi jest liczba 19.
Podobnie zrobimy z liczbami bardzo małymi. Tablice fizyczne podają, że stała zwana promieniem Bohra ma 0,00000000005291 m. Używając notacji wykładniczej, zapiszemy:
$0{,}00000000005291 \text{ m} = 5{,}291 \cdot 10^{-11}$ m.

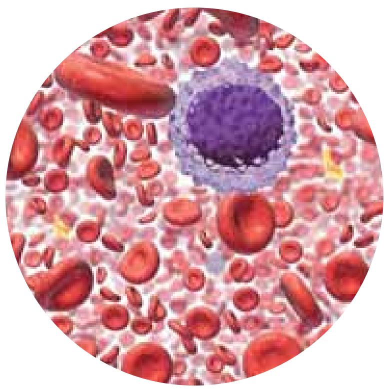
PRZYKŁAD 5.

Wykonajmy działanie na kalkulatorze.
a) $275\,000 \cdot 410\,000$ b) $0{,}000003234 : 123\,450\,000$

a) W okienku kalkulatora pojawił się wynik 1,1275E+11 (w różnych typach kalkulatorów zapis ten może wyglądać nieco inaczej). Oznacza to, że wynikiem mnożenia jest liczba $1{,}1275 \cdot 10^{11}$. Litera E to skrót od angielskiego słowa *exponent*, czyli wykładnik.
b) Wynik w okienku kalkulatora to 2,61968E–14. Oznacza to, że wynikiem dzielenia jest liczba $2{,}61968 \cdot 10^{-14}$.

ĆWICZENIE 7.

Zapisz w notacji wykładniczej:
a) odległość Ziemi od Słońca, około 150 000 000 km,
b) przybliżoną liczbę czerwonych krwinek u dorosłego mężczyzny – 30 000 000 000 000,
c) rozmiar pewnej bakterii – 0,000002 m.



ĆWICZENIE 8.

Zapisz w postaci liczby dziesiętnej:
a) liczbę nerwów w ramieniu człowieka – $5 \cdot 10^{10}$,
b) masę elektronu – $9{,}1 \cdot 10^{-28}$ g,
c) masę startową samolotu Jumbo Jet – $3{,}5 \cdot 10^{5}$ kg.

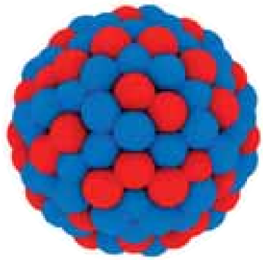
W obliczeniach chemicznych używa się jednostki masy atomowej, którą oznacza się symbolem u (ang. *unit*):
$1 \text{ u} = \frac{1}{12}$ masy atomu izotopu węgla ^{12}C, $1 \text{ u} \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

PRZYKŁAD 6.

Obliczmy masę atomu helu, wiedząc, że jest ona około trzy razy mniejsza od masy atomu węgla. Wyraźmy ją w jednostce SI, czyli w kilogramach.
Masa atomu helu to w przybliżeniu: $\frac{1}{3} \cdot 12 \text{ u} = 4 \text{ u}$, czyli około $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg.

ĆWICZENIE 9.

Oblicz masę atomu kryptonu, wiedząc, że jest ona w przybliżeniu siedem razy większa od masy atomu węgla. Wyraź tę masę w kilogramach.



W chemii notacji wykładniczej używa się również w odniesieniu do liczby Avogadra, która określa liczbę drobin (cząsteczek, jonów, atomów) stanowiących 1 mol:
1 mol to zbiór zawierający $6{,}02 \cdot 10^{23}$ drobin.

PRZYKŁAD 7.

Obliczmy, ile cząsteczek znajduje się w 4 molach cząsteczek wody.
Jeśli 1 mol zawiera $6{,}02 \cdot 10^{23}$ cząsteczek, to 4 mole cząsteczek wody będą zawierały $4 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 2{,}408 \cdot 10^{24}$ cząsteczek wody.

ZADANIA

1. Dane są liczby: $x = 2^7 \cdot 4^{-5}$, $y = 16^3 : 8^2$ i $z = \left(2^{-5}\right)^2 : 16^{-2}$. Wtedy

A. $x = y = z$ **B.** $x < y < z$ **C.** $x < z < y$ **D.** $z < x < y$

2. Liczba $12^2 \cdot \frac{1}{6^{-3}} \cdot 18^{-2} \cdot \frac{1}{32}$ jest równa

A. $\frac{9}{4}$ **B.** 3 **C.** $\frac{9}{8}$ **D.** 1

3. Liczbę $\frac{17 \cdot 10^{21} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-13}}{2{,}56 \cdot 10^{35} \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-14}}$ można zapisać w postaci

A. $318 \cdot 10^{-13}$ **B.** $3{,}1875 \cdot 10^{-11}$ **C.** $318{,}75 \cdot 10^{-11}$ **D.** $3{,}18 \cdot 10^{-13}$

4. Dane są liczby $a = 6 \cdot 3^{12}$ oraz $b = 3 \cdot 6^{10}$. Wtedy

A. $a + b = 9 \cdot 3^{12}$ **B.** $ab = 18 \cdot 6^{11}$

C. $a - b = -3^{11}\left(2^{10} - 18\right)$ **D.** $\frac{b}{a} = 9 \cdot 2^9$

5. Ostatnia cyfra w zapisie dziesiątkowym liczby 3563^6 jest taka sama jak ostatnia cyfra liczby

A. 2435^3 **B.** 2134^7 **C.** $34\,211^6$ **D.** 1329^5

6. Jeśli $a = 5^{40}$ i $b = 7^{30}$, to

A. $a - b = 2^{10}$ **B.** $ab = 35^{70}$ **C.** $a + b = 12^{70}$ **D.** $a > b$

7. Uporządkuj rosnąco liczby: $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot 27^{-2}$, $b = \left(3^2\right)^{-6} \cdot 9^5$ i $c = 81^{-2} \cdot 27^3 \cdot \frac{1}{9^2}$.

8. Wykonaj działania.

a) $\frac{3^{-2}}{2^5} \cdot \frac{2^4}{3^{-1}}$ b) $7^{-1}\left(7^2 + 7^0\right)$ c) $\frac{1^{-2} + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + (-4)^{-1} \cdot 5 + 2^{-2}}$

9. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = -1$ i $b = 2$.

a) $\frac{4a^{-3}b^{-2}}{a^5}$ b) $\left(3a^4b^{-2}\right)^{-2}$ c) $\frac{2a^{-5}b^{-2}}{a^{-2}b^{-1}}$

10. Zapisz wyrażenie za pomocą potęgi o podstawie a.

a) $\frac{3^5 \cdot 27}{81}$, $a = 3$ b) $4^3 \cdot 32 \cdot 8^{-5}$, $a = 2$ c) $\frac{2^{-6} \cdot 16^2 : 32}{8^3 \cdot 64^{-2}}$, $a = 2$

11. Iloczyn oraz iloraz liczb a i b zapisz w postaci wykładniczej.

a) $a = 4488$ i $b = 0{,}0000561$ b) $a = 450\,000$ i $b = 750\,000\,000$
c) $a = 920\,000$ i $b = 27\,000\,000$ d) $a = 20\,750\,000$ i $b = 0{,}0000083$

12. W każdej sekundzie Słońce zużywa 4 mln ton wodoru. Wodór stanowi 50% całej masy Słońca, czyli około $1{,}0 \cdot 10^{27}$ ton. Określ przybliżoną liczbę lat, podczas których Słońce zużyje wodór w nim zawarty.

13. W astronomii używa się jednostek takich, jak parsek oraz rok świetlny:
1 parsek = $3{,}086 \cdot 10^{13}$ km, a 1 rok świetlny = $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km.

a) Najbliższa Słońcu gwiazda Proxima Centauri jest oddalona od Układu Słonecznego o 42 200 000 000 000 km. Wyraź tę wielkość w parsekach.
b) Odległość Galaktyki Andromedy od Ziemi wynosi 2,52 mln lat świetlnych. Podaj tę odległość w kilometrach.

Wyniki zapisz, używając notacji wykładniczej.

14. Oblicz i wyraź w kilogramach masę podanych atomów, wiedząc, że masa atomu:

a) litu jest około dwa razy mniejsza od masy atomu węgla ^{12}C,

b) jodu jest około 10,5 razy większa od masy atomu węgla ^{12}C.

Wyniki zapisz, używając notacji wykładniczej.

15. W naczyniu znajduje się $18{,}06 \cdot 10^{23}$ cząsteczek wody. Oblicz, ile to moli.

16. Oblicz, ile drobin znajduje się w 12 molach pewnego gazu. Wynik zapisz, używając notacji wykładniczej.

BANK ZADAŃ z. 28–35 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczbę $\frac{5^2 \cdot \frac{1}{5^{-3}} \cdot 125}{625^{-1} \cdot 25^3}$ można zapisać w postaci

A. 5^0 **B.** 5^4 **C.** 5^6 **D.** 5^{-8}

2. Uporządkuj rosnąco liczby: $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(-1\frac{2}{3}\right)^4$, $(3{,}97)^0$, $\left(-\frac{3}{11}\right)^{-2}$, $\left(3\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

3. Która z liczb jest większa: $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$ czy $\frac{10^{12}+1}{10^{13}+1}$?

4. Wykonaj działania.

a) $\frac{1}{\left(3^2+2^{-2}\right)^{-1}}$ b) $\frac{4^{-1}+3^{-2}}{3^{-2}+2^{-3}}$ c) $\frac{48^5 \cdot 2^{-8}}{72^{-7} \cdot 24^{16} \cdot 16^{-4} \cdot 2^{-2}}$

5. Wyznacz liczbę x spełniającą równanie $3^x = \frac{6^{-2} \cdot 81}{2^{-2} \cdot 3^{-3}}$.

6. Wykonaj działania. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $\frac{5 \cdot 10^{31} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{12}}{0{,}05 \cdot 10^{27} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{17}}$ b) $\frac{4{,}7 \cdot 10^{-18} \cdot 3{,}4 \cdot 10^{21}}{8{,}5 \cdot 10^{31} \cdot 0{,}16 \cdot 10^{-42}}$ c) $\frac{35\,200\,000 \cdot 0{,}000075}{39\,300\,000 \cdot 0{,}002088}$

1.7 Wzory skróconego mnożenia

PRZYKŁAD 1.

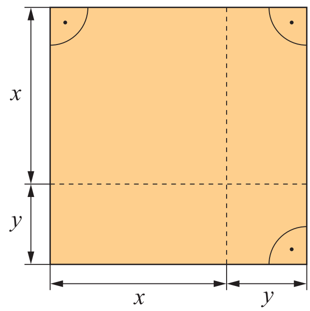
Przekształćmy wyrażenie $(x + y)^2$.

$(x + y)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z definicji potęgi}}}{=} (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Zatem $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy pole kwadratu przedstawionego na rysunku.



Pole (P) kwadratu możemy zapisać dwoma sposobami:
$P = (x + y)^2$ – pole kwadratu o boku długości $x + y$, oraz
$P = x^2 + y^2 + 2xy$ – suma pól dwóch kwadratów (jednego o boku długości x, drugiego o boku długości y) oraz dwóch prostokątów (o bokach długości x i y).
Zatem $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Twierdzenie

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy kwadratowi pierwszego wyrażenia plus podwojony iloczyn tych wyrażeń plus kwadrat drugiego wyrażenia.

$\boldsymbol{(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$

ĆWICZENIE 1.

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń przedstaw w postaci sumy.

a) $(x + 5)^2$ b) $(3x + 1)^2$ c) $(2x + 3y)^2$ d) $\left(2\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}\right)^2$

ĆWICZENIE 2.

Przekształć wyrażenie $(x - y)^2$, korzystając z definicji potęgi.

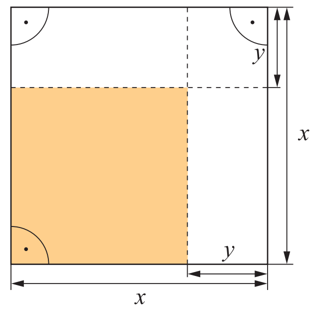
Twierdzenie

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy kwadratowi pierwszego wyrażenia minus podwojony iloczyn tych wyrażeń plus kwadrat drugiego wyrażenia.

$\boldsymbol{(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$

ĆWICZENIE 3.

Na rysunku wskaż interpretację wyrażeń $(x-y)^2$, x^2, xy, yx, y^2. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w przykładzie 2. i uzasadnij geometrycznie wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.



ĆWICZENIE 4.

Przekształć wyrażenie, korzystając z wzoru na kwadrat różnicy.

a) $(x-7)^2$ b) $(3-2x)^2$ c) $(4x-5y)^2$ d) $\left(\frac{1}{3}a-1\frac{4}{5}b\right)^2$

PRZYKŁAD 3.

Wykonajmy mnożenie $(x+y)(x-y)$.

$(x+y)(x-y)=x^2-xy+yx-y^2=x^2-y^2$

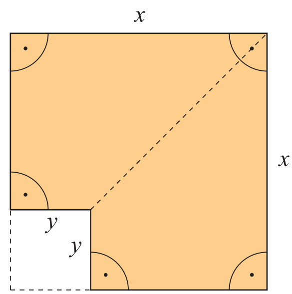
Twierdzenie

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$\boldsymbol{(x+y)(x-y)=x^2-y^2}$

ĆWICZENIE 5.

Jakie wymiary ma prostokąt o polu takim, jak pole figury przedstawionej na rysunku? Przeprowadź analogiczne rozumowanie jak w przykładzie 2. i uzasadnij geometrycznie wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.



ĆWICZENIE 6.

Przekształć wyrażenie, korzystając z wzoru na różnicę kwadratów.

a) $(a+2)(a-2)$ b) $(3a-4)(3a+4)$

c) $(-2a+3b)(3b+2a)$ d) $\left(1\frac{2}{3}a+2\frac{2}{3}b\right)\left(1\frac{2}{3}a-2\frac{2}{3}b\right)$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwe są równości:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Równości te nazywamy **wzorami skróconego mnożenia**.

PRZYKŁAD 4.

Zastosujmy poznane wzory do obliczenia 51^2, 49^2 i $49 \cdot 51$.

$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$

$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

$49 \cdot 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$

ĆWICZENIE 7.

Oblicz, korzystając z odpowiednich wzorów:

a) 76^2, b) 101^2, c) $99 \cdot 101$, d) $27 \cdot 33$.

PRZYKŁAD 5.

Uzasadnijmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyrażenie $a^2 + b^2 - 8a + 6b + 25$ przyjmuje wartości nieujemne.

Przekształcamy wyrażenie i korzystamy z wzorów skróconego mnożenia.

$a^2 + b^2 - 8a + 6b + 25 = a^2 - 8a + 16 + b^2 + 6b + 9 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$

$(a - 4)^2 \geqslant 0$ i $(b + 3)^2 \geqslant 0$, zatem suma tych wyrażeń dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b jest liczbą nieujemną.

ZADANIA

1. Wyrażenie $\frac{n^4 - 16}{n^2 + 4}$ można zapisać w postaci

A. $n^2 - 4$ **B.** $n^2 + 4$ **C.** $(n - 2)^2$ **D.** $(n + 2)^2$

2. Wyrażenie $(3x - 4)^2 - (4x - 3)^2$ jest równe

A. $-7x^2 - 7$ **B.** $-7x^2 + 7$ **C.** 0 **D.** $-7x^2 - 25$

3. Wyrażenie $2x^2 - px + 8$ można zapisać w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy wyrażeń algebraicznych, gdy literę p zastąpimy liczbą

A. 4 **B.** 0 **C.** 8 lub –8 **D.** 4 lub –4

4. Przekształć wyrażenia, korzystając z wzorów skróconego mnożenia.

a) $\left(a - \frac{2}{3}\right)\left(a + \frac{2}{3}\right)$, $(xy + 2)(xy - 2)$, $(3a^2 - b^3)(3a^2 + b^3)$

b) $(2x^2 - 5y)^2$, $(ab + 3c)^2$, $(3k^3 + 2k^2)^2$

5. Zapisz wyrażenia w postaci iloczynów.

a) $25a^2 - 16b^2$, $16x^4 - 36y^2$, $8a^6 - 25$

b) $(x - y)^2 - 9$, $121x^2y^2 - (2a + 3b)^2$, $\frac{(x + y)^2}{16} - \frac{(x - y)^2}{81}$

6. Którą z podanych sum algebraicznych można przedstawić w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy dwóch wyrażeń?

a) $\frac{1}{4}a^2 - 3ab + 9b^2$ b) $0{,}01x^2 + 2x + 100$ c) $4a^2b^2 - 28a^2b + 49a^2$

d) $16y^2 - 40y + 24$ e) $4b^2 + 12ab + 8a^2$ f) $x^2 - 22x + 121$

7. Wyznacz liczbę p tak, aby wyrażenie można było zapisać w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy wyrażeń algebraicznych.

a) $4x^2 + px + 9$ b) $px^2 - 12x + 9$ c) $64 - 48x + px^2$

8. Pogrupuj składniki i zapisz wyrażenie w postaci różnicy kwadratów wyrażeń.

a) $4a^2 - 12a + 9 - 9x^2$ b) $49y^2 - 1 + 6a - 9a^2$

c) $16x^2 - 4 - 12y - 9y^2$ d) $9x^2 + 6x + 1 - 49a^2 + 28ab - 4b^2$

9. Uzasadnij, że dla wszystkich $x \in \boldsymbol{R}$ i $y \in \boldsymbol{R}$ wyrażenie przyjmuje wartości nieujemne.

a) $x^2 + 6x + y^2 + 4y + 13$ b) $x^4 + 5x^2 + y^4 - 2xy^2 + 4$

10. Uzasadnij, że dla wszystkich różnych od siebie liczb rzeczywistych x, y i z wyrażenie $(x + y + z)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2)$ przyjmuje wartości ujemne.

11. Wskaż liczby całkowite.

$\frac{2345^2 - 1987^2}{358}$ $\frac{57^4 - 39^4}{57^2 + 39^2}$ $\frac{345^6 + 275^6}{345^{12} - 275^{12}}$ $\frac{19^{20} - 1}{19^{10} + 1}$

BANK ZADAŃ z. 36–39 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wyrażenie $\frac{1}{25}x^2 - px + \frac{4}{9}$ można zapisać w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy wyrażeń algebraicznych, gdy literę p zastąpimy liczbą

A. $\frac{4}{15}$ **B.** $-\frac{4}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ lub $-\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{2}{15}$ lub $-\frac{2}{15}$

2. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(5x - 7y)^2$ b) $(3a + 5b)^2$ c) $(2a - 3)(2a + 3)$

d) $(0{,}5a + 4b)^2$ e) $(2a - 3b)^2$ f) $(x^2 - 3)^2$

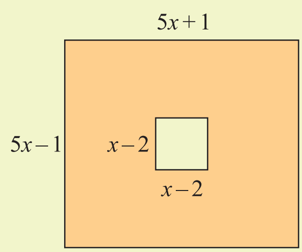
3. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu wyrażeń.

a) $12x^2 - 24y^2$ b) $2x^2 - 5y^2$ c) $x^2 - 14x + 49$

d) $1{,}25x^2 - 81$ e) $12x^2 - \frac{1}{49}y^2$ f) $2\frac{2}{9}a^2 - 4\frac{4}{9}b^2$

4. Doprowadź wyrażenie $(3k + 1)^2 - (2k - 1)^2$ do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $k = 2\sqrt{3}$.

5. Z prostokątnej kartki o bokach długości $5x - 1$ i $5x + 1$ wycięto kwadrat o boku długości $x - 2$. Wyznacz pole otrzymanej figury.



1.8 Pierwiastek dowolnego stopnia

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby a, $a \geqslant 0$, nazywamy taką liczbę b, $b \geqslant 0$, która podniesiona do kwadratu równa jest liczbie a.

Zapisujemy to symbolicznie jako $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a,\ b \geqslant 0$.

Mówimy, że a jest liczbą podpierwiastkową, natomiast b – wartością pierwiastka z liczby a.

W powyższej definicji zakładamy, że wartość pierwiastka kwadratowego jest liczbą nieujemną. Założenie to gwarantuje, że pierwiastek kwadratowy jest określony jednoznacznie. I tak np. $\sqrt{9} = 3$, chociaż $(-3)^2 = 9$ i $3^2 = 9$.

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy pierwiastek kwadratowy z liczby.

a) $\sqrt{49} = 7$, bo $7^2 = 49$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, bo $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

c) $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$, bo $1{,}3^2 = 1{,}69$

Czasami, żeby wyznaczyć pierwiastek kwadratowy, korzystamy z kalkulatora. Na przykład $\sqrt{33} \approx 5{,}745$ z dokładnością do 0,001.

ĆWICZENIE 1.

Oblicz:

a) $\sqrt{144}$, $\sqrt{1600}$,

b) $\sqrt{\frac{16}{9}}$, $\sqrt{3\frac{1}{16}}$,

c) $\sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{1{,}1881}$.

Definicja

Pierwiastkiem sześciennym z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę rzeczywistą b, która podniesiona do trzeciej potęgi równa jest liczbie a.

Zapisujemy to symbolicznie jako $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$.

Pierwiastek sześcienny z liczby:
- dodatniej jest liczbą dodatnią,
- ujemnej jest liczbą ujemną,
- 0 wynosi 0.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy pierwiastki sześcienne z liczb.

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, bo $5^3 = 125$

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, bo $(-4)^3 = -64$

c) $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$, bo $0{,}2^3 = 0{,}008$

d) $\sqrt[3]{-343} = -7$, bo $(-7)^3 = -343$

ĆWICZENIE 2.

Oblicz:

a) $\sqrt[3]{216},\ \sqrt[3]{512},\ \sqrt[3]{2197},\ \sqrt[3]{-1{,}331},$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}},\ \sqrt[3]{1\frac{61}{64}},\ \sqrt[3]{-\frac{1728}{125}},\ \sqrt[3]{-1}.$

ĆWICZENIE 3.

Oblicz:

a) $\sqrt{16+9},\ \sqrt{4+9+36},\ \sqrt{6-\sqrt{4}},$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}},\ 5\sqrt{9-4\sqrt[3]{-8}},\ \sqrt{64}+\sqrt[3]{64},$

c) $\sqrt{11\frac{9}{17}} \cdot \sqrt{\frac{17}{64}},\ \sqrt[3]{8\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{1\frac{4}{5}},\ \sqrt{\frac{25}{64}} : \sqrt[3]{-\frac{125}{64}}.$

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz długość boku kwadratu o danym polu.

a) $1{,}44\ \text{cm}^2$

b) $9{,}61\ \text{m}^2$

c) $25{,}7049\ \text{dm}^2$

Twierdzenie

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b},\ a \in \boldsymbol{R},\ b \in \boldsymbol{R}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ a \geqslant 0,\ b > 0$

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}},\ a \in \boldsymbol{R},\ b \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$

PRZYKŁAD 3.

Wykonajmy działania, stosując odpowiednie wzory.

a) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{2 \cdot 5} = 3\sqrt{10}$

b) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12} = 8\sqrt{36} = 8 \cdot 6 = 48$

c) $2\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{15}$

d) $0{,}5 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-2} = 0{,}5\sqrt[3]{-8} = 0{,}5 \cdot (-2) = -1$

ĆWICZENIE 5.

Oblicz:

a) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{18},\ 2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3},\ \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3},$

b) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}},\ \frac{3\sqrt[3]{80}}{2\sqrt[3]{10}},\ \frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{6}}.$

PRZYKŁAD 4.

Wyłączmy czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[3]{-0{,}005} = \sqrt[3]{-0{,}001 \cdot 5} = \sqrt[3]{-0{,}001} \cdot \sqrt[3]{5} = -0{,}1 \cdot \sqrt[3]{5} = -\frac{\sqrt[3]{5}}{10}$

ĆWICZENIE 6.

Wyłącz czynnik przed pierwiastek i wykonaj działania.

a) $5\sqrt{12} - 2\sqrt{48} - 7\sqrt{75}$ b) $4\sqrt{18} - 2\sqrt{63} + \sqrt{175} + 5\sqrt{108}$

c) $2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{256}$ d) $\sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500}$

Definicja

Pierwiastkiem *n*-tego stopnia, $n \geqslant 2$, z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, która podniesiona do potęgi n równa jest liczbie a.
Zapisujemy to symbolicznie jako $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
O liczbie b mówimy, że jest pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby a.

Pierwiastek stopnia nieparzystego ma sens (określa jednoznacznie liczbę) również w przypadku, gdy liczba podpierwiastkowa jest ujemna, np. $\sqrt[5]{-32} = -2$.

PRZYKŁAD 5.

Obliczmy:

a) $\sqrt[4]{81} = 3$, bo $3^4 = 81$, b) $\sqrt[5]{a^{10}} = a^2$, bo $\left(a^2\right)^5 = a^{10}$,

c) $\sqrt[7]{128} = 2$, bo $2^7 = 128$, d) $\sqrt[8]{0{,}00000001} = 0{,}1$, bo $(0{,}1)^8 = 0{,}00000001$.

ĆWICZENIE 7.

Oblicz:

a) $\sqrt[9]{512}$, b) $\sqrt[5]{3125}$, c) $\sqrt[4]{0{,}0016}$,

d) $\sqrt[6]{4096}$, e) $\sqrt[8]{\frac{1}{256}}$, f) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

ĆWICZENIE 8.

Zastanów się, kiedy $\sqrt[n]{a^n} = a$.

ĆWICZENIE 9.

Oblicz, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)^2$, b) $\left(3\sqrt{2} - 2\right)^2$, c) $\left(2 + 4\sqrt{5}\right)\left(2 - 4\sqrt{5}\right)$.

PRZYKŁAD 6.

Usuńmy niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Usuwanie niewymierności z mianownika polega na takim rozszerzeniu lub uproszczeniu ułamka, aby mianownik stał się liczbą wymierną.

b) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})}{3-2} = 3\left(\sqrt{6}+2\right)$

c) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)$

ĆWICZENIE 10.

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{5}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-1}$ f) $\frac{7-2\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}}$

ĆWICZENIE 11.

Usuń niewymierność z mianownika. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ b) $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ c) $\frac{x}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}$

ZADANIA

1. Liczba $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)^2$ jest równa

A. 27 **B.** 15 **C.** 24 **D.** $15+4\sqrt{3}$

2. Dane są liczby $a = \sqrt[7]{\sqrt[6]{64}-\sqrt[8]{1}}$ i $b = \sqrt[6]{\sqrt[4]{81}-\sqrt[5]{32}}$. Wówczas

A. $a > b$. **B.** $a < b$. **C.** $a = b$. **D.** a i b są liczbami niewymiernymi.

3. Liczba $\sqrt{3}\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt[3]{-64}+\sqrt[5]{-1}\right)$ jest równa

A. 0 **B.** $9\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt[8]{3}$ **D.** $5\sqrt{3}$

4. Które z podanych liczb nie należą do zbioru liczb całkowitych?

$\sqrt[3]{-216}$, $\sqrt{\sqrt{16}-4}$, $\sqrt[5]{12}$, $\sqrt[4]{256}$

5. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{27+64+125}$, b) $\sqrt{25}-\sqrt{16}+\sqrt[3]{27}$,

c) $\sqrt[3]{-343}+\sqrt{1{,}96}-\sqrt[3]{2{,}744}$, d) $\sqrt{144}+\sqrt[3]{72+144}$.

6. Oblicz:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{8}}$, b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{27}+\sqrt[6]{64}-\sqrt[3]{125}}$,

c) $2\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}+\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$, d) $\sqrt[3]{-\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{-216}}$.

7. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $3\sqrt{12}+3\sqrt{50}-5\sqrt{32}+2\sqrt{75}$

b) $2\sqrt{175}-3\sqrt{98}+3\sqrt{18}-2\sqrt{112}$

c) $\frac{2}{5}\sqrt{125}-\frac{2}{3}\sqrt{243}-\frac{1}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$

d) $\sqrt[3]{432}+3\sqrt{121}+2\sqrt[3]{54}$

8. Wykonaj działania.

a) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})$ b) $(3\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{6}+2\sqrt{3})^2$ d) $(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{2})^2$

9. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{8-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{3\sqrt{13}}$

d) $\frac{3}{4-\sqrt{3}}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ f) $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

10. Dane są liczby $x=3-2\sqrt{5}$ i $y=2+3\sqrt{5}$. Wyznacz: $x+y$, $x-y$, $x\cdot y$ i $\frac{x}{y}$.
Wyniki przedstaw w postaci $a+b\sqrt{5}$, gdzie $a\in \boldsymbol{W}$ i $b\in \boldsymbol{W}$.

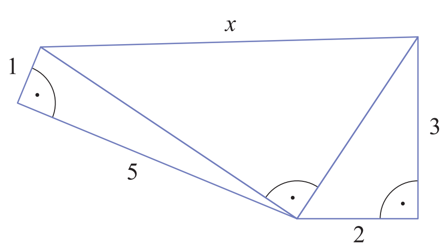
11. Wśród elementów zbioru A wskaż liczby całkowite.

$$A=\left\{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ 6\sqrt{3}-3\sqrt{12},\ \sqrt[3]{216},\ 3+\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-2\sqrt{6},\ \sqrt{\sqrt[3]{64}}\right\}$$

12. Porównaj liczby $\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}$ i $-\sqrt{3}-1{,}992$, nie posługując się kalkulatorem.

13. Znajdź długość przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość $5+\sqrt{2}$, a przeciwprostokątna ma długość $5\sqrt{2}+1$.

14. Wyznacz długość odcinka x – potrzebne informacje odczytaj z rysunku.



15. Kwadrat i koło mają równe pola. Jaka jest długość:
a) boku kwadratu wyrażona za pomocą długości promienia koła,
b) przekątnej kwadratu wyrażona za pomocą długości promienia koła?

BANK ZADAŃ z. 40–48 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczba $\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$ jest równa

A. 1 **B.** $5+2\sqrt{6}$ **C.** $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{1}{3\sqrt{6}}$

2. Liczbę $2\sqrt{288}-3\sqrt{98}+2\sqrt{125}$ można zapisać w postaci

A. $13\sqrt{10}$ **B.** $3\sqrt{2}+10\sqrt{5}$ **C.** $-2\sqrt{2}+10\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{511}$

3. Oblicz:

a) $\sqrt{24}+3\sqrt{48}-2\sqrt{75}$, b) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{10})^2$,

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$, d) $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\right)^2-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

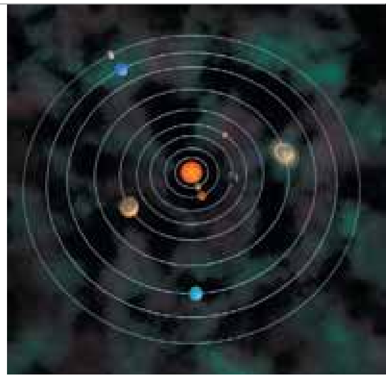
4. Wskaż najmniejszą liczbę całkowitą n spełniającą warunek $n > -2\sqrt[5]{64}+\sqrt[4]{243}$. Przyjmij, że $\sqrt[5]{2}\approx 1{,}149$ i $\sqrt[4]{3}\approx 1{,}316$.

5. Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$. Otrzymaną liczbę zapisz w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a\in\boldsymbol{W}$, $b\in\boldsymbol{W}$ i $c\in\boldsymbol{N}$.

6. Oblicz wartość wyrażenia dla $x=\sqrt{3}$. Czy wynik jest liczbą wymierną?

a) x^2+3x-9 b) $2x^3-x^2-6x-1$ c) x^2-9 d) x^4-x

1.9 Potęga o wykładniku wymiernym



Ułamek jako wykładnik potęgi zaczęto stosować już w XVII w. Johannes Kepler odkrył wzór $N = 0{,}2R^{\frac{3}{2}}$, opisujący czas (N, wyrażony w dniach), w którym planeta okrąża Słońce, w zależności od odległości (R) tej planety od Słońca (wyrażonej w milionach kilometrów).

PRZYKŁAD 1.

Zauważmy, że:

$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^1$ przy założeniu, że wzór $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ jest prawdziwy dla wykładników wymiernych. Równocześnie $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 3$ i jednocześnie $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3$.

Jeśli dodatkowo założymy, że symbole $5^{\frac{1}{2}}$ i $3^{\frac{1}{3}}$ przedstawiają liczby dodatnie, to możemy przyjąć, że $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, a $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$.

Definicja

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla dowolnej nieujemnej liczby a i liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

ĆWICZENIE 1.

Oblicz:

a) $225^{\frac{1}{2}}$, $(1{,}69)^{\frac{1}{2}}$, $81^{\frac{1}{4}}$,

b) $-27^{\frac{1}{3}}$, $-64^{\frac{1}{6}}$, $-10\,000^{\frac{1}{4}}$.

PRZYKŁAD 2.

Przekształćmy potęgę i obliczmy:

a) $\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{81}\right)^3 = 9^3 = 729$,

b) $\left(125^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{125}\right)^3 = 5^3 = 125$,

c) $\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = \left(\sqrt{16}\right)^{-3} = 4^{-3} = \frac{1}{64}$,

d) $\left(-32^{\frac{1}{5}}\right)^3 = \left(-\sqrt[5]{32}\right)^3 = (-2)^3 = -8$.

Definicja

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ dla nieujemnej liczby a oraz liczb $m \in \mathbf{N}_+, n \in \mathbf{N}_+$ i $n \geqslant 2$.

$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ dla dodatniej liczby a oraz liczb $m \in \mathbf{N}_+, n \in \mathbf{N}_+$ i $n \geqslant 2$.

PRZYKŁAD 3.

Obliczmy:

a) $\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^1 = 5$, b) $\sqrt[3]{4^3} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{3}} = 4$, c) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 7$.

Dla każdej nieujemnej liczby a i dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ prawdziwy jest wzór $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Zauważ, że $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$, dlatego obliczenia możemy wykonywać na dwa sposoby.

$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ lub $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

PRZYKŁAD 4.

Obliczmy $81^{\frac{3}{2}}$ dwoma sposobami.

$81^{\frac{3}{2}} = 81^{3 \cdot \frac{1}{2}} = \left(81^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81^3} = \sqrt{81 \cdot 81 \cdot 81} = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$

lub

$81^{\frac{3}{2}} = 81^{\frac{1}{2} \cdot 3} = \left(81^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{81}\right)^3 = 9^3 = 729$

ĆWICZENIE 2.

Oblicz:

a) $8^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$, b) $9^{\frac{3}{2}}, 27^{\frac{4}{3}}, 16^{\frac{3}{4}}$, c) $(0{,}25)^{\frac{3}{2}}, (0{,}216)^{\frac{2}{3}}, (0{,}00032)^{\frac{3}{5}}$.

ĆWICZENIE 3.

Oblicz:

a) $8^{-\frac{1}{3}}, 27^{-\frac{4}{3}}, 64^{-\frac{1}{3}}$, b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{16}{625}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

ĆWICZENIE 4.

Przedstaw liczbę rzeczywistą w postaci potęgi.

a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[3]{13^3}$ c) $-\sqrt{85}$ d) $-\sqrt[3]{31}$

ĆWICZENIE 5.

Przedstaw liczbę rzeczywistą w postaci potęgi o podstawie a.

a) $\sqrt[3]{100}$, $a = 10$ b) $\sqrt[3]{25}$, $a = 5$ c) $\sqrt[3]{144}$, $a = 12$ d) $\sqrt[5]{32}$, $a = \frac{1}{2}$

ĆWICZENIE 6.

Skorzystaj z wzoru $N = 0{,}2R^{\frac{3}{2}}$, odkrytego przez Keplera, i oblicz na podstawie tabeli, w ciągu ilu ziemskich dni każda z planet okrąża Słońce.

Planeta	Odległość od Słońca w mln km
Merkury	58
Wenus	108
Ziemia	150
Mars	228
Jowisz	778
Saturn	1427
Uran	2870
Neptun	4497
Pluton (od 2006 r. planeta karłowata)	5878

ĆWICZENIE 7.

Czy zachodzi równość? Uzasadnij odpowiedź.

a) $2^2 \cdot 2^3 = 2^6$ b) $3^4 \cdot 3^2 = 9^6$

c) $8^6 : 4^2 = 2^4$ d) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{8}}$

e) $8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 32^{\frac{5}{6}}$ f) $8^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}$

PRZYKŁAD 5.

Uporządkujmy rosnąco liczby.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4$ b) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(1\frac{1}{2}\right)^3, \left(1\frac{1}{2}\right)^4$

Wykonajmy potęgowania.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$. Zatem $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

b) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$.

Zatem $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1\frac{1}{2}\right)^3 < \left(1\frac{1}{2}\right)^4$.

- Z dwóch potęg o takiej samej dodatniej podstawie $a < 1$ większa jest ta, której wykładnik jest mniejszy.
- Z dwóch potęg o takiej samej dodatniej podstawie $a > 1$ większa jest ta, której wykładnik jest większy.

ĆWICZENIE 8.

Uporządkuj rosnąco liczby.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^4, \left(\frac{2}{3}\right)^5$ b) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2, \left(2\frac{1}{2}\right)^3, \left(2\frac{1}{2}\right)^4, \left(2\frac{1}{2}\right)^5$

PRZYKŁAD 6.

Uporządkujmy rosnąco liczby.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Wykonajmy potęgowania.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Zatem $\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$. Zatem $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

- Z dwóch potęg o podstawach dodatnich i takim samym wykładniku $n > 0$ większa jest ta, której podstawa jest większa.
- Z dwóch potęg o podstawach dodatnich i takim samym wykładniku $n < 0$ większa jest ta, której podstawa jest mniejsza.

ĆWICZENIE 9.

Uporządkuj rosnąco liczby.

a) $3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ b) $3^{-2}, 4^{-2}, 5^{-2}, 6^{-2}$

Poznane wcześniej prawa działań na potęgach obowiązują również dla potęg o wykładniku wymiernym.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a > 0$, $b > 0$ oraz $x \in \mathbf{W}$, $y \in \mathbf{W}$ prawdziwe są wzory:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x : a^y = a^{x-y}$ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

PRZYKŁAD 7.

Porównajmy liczby.

a) 2^{36} i $\left(4\sqrt{2}\right)^{14}$ b) 3^{106} i 25^{53}

a) Drugą liczbę przedstawimy w postaci potęgi liczby 2.

$\left(4\sqrt{2}\right)^{14} = \left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{14} = \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{14} = 2^{35}$, stąd $\left(4\sqrt{2}\right)^{14} < 2^{36}$.

b) Liczby zapiszemy tak, aby miały takie same wykładniki.

$25^{53} = \left(5^2\right)^{53} = 5^{106}$, stąd $3^{106} < 25^{53}$.

ĆWICZENIE 10.

Porównaj liczby.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{17}$ i $32^{\frac{3}{2}}$ b) $\left(9\sqrt[3]{3}\right)^{18}$ i $81^{\frac{21}{2}}$

c) 3^{500} i 5^{300} d) 81^{20} i 1024^8

Zadania

1. Dane są liczby: $a = 125^{-\frac{2}{3}}$, $b = 81^{-\frac{3}{4}}$, $c = 256^{-\frac{5}{8}}$. Wtedy

A. $a < b < c$ **B.** $b < a < c$ **C.** $c < a < b$ **D.** $c < b < a$

2. Liczba $\sqrt[5]{2^2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ jest równa

A. $8^{\frac{1}{3}}$ **B.** $2^{\frac{1}{2}}$ **C.** $2^{\frac{1}{10}}$ **D.** $2^{\frac{15}{2}}$

3. Dane są liczby $a = \left(\sqrt[4]{8}\right)^{200}$ i $b = \left(\sqrt[5]{64}\right)^{100}$. Wtedy

A. $a = b$. **B.** $a < b$.
C. $a \geqslant b$. **D.** a i b są liczbami niewymiernymi.

4. Liczba $\left(\sqrt{7} - 3\right)^2$ i liczba a są wzajemnymi odwrotnościami, jeśli

A. $a = -16 + 6\sqrt{3}$ **B.** $a = \dfrac{2}{\sqrt{7} - 3}$

C. $a = 4 + \sqrt{7}$ **D.** $a = \dfrac{8 + 3\sqrt{7}}{2}$

5. Oblicz:

a) $49^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{4}}$, $27^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{1}{4}}$, $32^{-\frac{3}{5}} - 32^{\frac{3}{5}}$,

b) $81^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{8} - 32^{\frac{3}{5}} + 32^{-\frac{1}{5}}$, $16^{\frac{3}{4}} + 16^{\frac{1}{4}} - 81^{-\frac{3}{4}}$,

c) $9^{\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{16} + 81^{\frac{1}{4}} - 3^{-2}$, $\left(\dfrac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + \left(\sqrt{16}\right)^{-1} - \left(27^{\frac{1}{2}}\right)^0$.

6. Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $\dfrac{81^{\frac{1}{4}} + 81^{\frac{3}{4}}}{81^{\frac{3}{4}} - 81^{\frac{1}{4}}}$ b) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{2}{3}}}$ c) $\dfrac{4^{-\frac{1}{2}} + 9^{-\frac{1}{2}}}{27^{-\frac{2}{3}}}$

7. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt{a}}\right)^{10}$ b) $\left(\dfrac{a^3}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\dfrac{81^{\frac{3}{4}}}{a}\right)$ c) $\left(\dfrac{a^5b^{-2}}{a^{-2}b^3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\dfrac{a^3}{b^{-1}}}\right)^3$

8. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = 2$ i $k = -1$.

a) $\dfrac{a^k}{a^{k-2}}$ b) $\dfrac{a^{-2k}a^{-k+2}}{\left(a^{-2}\right)^k}$ c) $\dfrac{\left(a^k\right)^{-3} a^{-(1-2k)}}{\left(a^{-k}\right)^3}$

9. Uporządkuj malejąco liczby.

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}}, 32^{\frac{3}{5}}, 8^{\frac{2}{3}}$

b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(1\frac{4}{5}\right)^{-2}, \left(1\frac{7}{8}\right)^{-2}$

c) $2^{-9}, 2^{-12}, 2^{-15}$

d) $(8\sqrt{2})^3, 16^{\frac{5}{2}}, (32\sqrt{2})^2$

e) $2^{40}, 5^{20}, 15^{10}$

f) $2^{500}, 3^{300}, 5^{200}$

10. „Obywatele pisarze, poeci (…) i w ogóle pracownicy pióra! Oto dwie formuły matematyczne” – oto cytat z *Cicer cum caule, czyli groch z kapustą* Juliana Tuwima. Podajemy tylko jedną z formuł, które Tuwim tam umieścił. Zapisz ją prościej.

$$\sqrt[97]{\frac{98\,765}{197\,530} : \frac{299\,874\,366}{599\,748\,732}} + \left(\sqrt[3]{54\,439\,939} - \sqrt{142\,884}\right)^{999\,018} = \sqrt[17]{131\,072}$$

BANK ZADAŃ z. 49–52 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczba $27^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$ jest równa

A. $30^{\frac{1}{2}} + 20^{\frac{1}{3}}$ **B.** $\sqrt[6]{50}$ **C.** 13 **D.** 50

2. Liczba $\left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(3^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^2$ jest równa

A. 1 **B.** 625 **C.** 725 **D.** 100

3. Oblicz:

a) $81^{\frac{3}{4}}$, b) $2^{-\frac{3}{5}}$, c) $-\sqrt{49} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 8^{-\frac{2}{3}}$.

4. Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie p, podaj potrzebne założenia.

a) $\sqrt[4]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{7^3}} \cdot 49, p = 7$

b) $a^{-k} \sqrt[4]{\frac{1}{a}} \left(\frac{a^{3k}}{a^0}\right)^{-2}, p = a$

DODATKOWE ĆWICZENIA

Sprawdź.się na wsipnet.pl

1.10 Procenty

W życiu codziennym często posługujemy się procentami. Czytamy o zmianach kursów akcji na giełdzie, o oprocentowaniu kredytów i oszczędności, o podwyżkach i obniżkach cen towarów i usług. Informacje te podawane są w procentach lub punktach procentowych, często przedstawiane są graficznie.

Definicja

Jeden procent pewnej wielkości to jedna setna tej wielkości.

$p\%$ wielkości K to $\frac{p}{100} \cdot K$.

PRZYKŁAD 1.

Powierzchnia Europy stanowi 7% powierzchni lądów na Ziemi. Ile kilometrów kwadratowych zajmuje powierzchnia Europy, jeśli powierzchnia lądów to około 149 mln km^2?

Powierzchnia Europy stanowi 7% powierzchni lądów. Obliczmy więc 7% z 149.

$0{,}07 \cdot 149 = 10{,}43$

Powierzchnia Europy wynosi około 10,43 mln km^2.

ĆWICZENIE 1.

W 2006 roku zarejestrowano w Polsce 10 027 osób będących przewodnikami turystycznymi. Wśród nich:

- ok. 47,28% ma uprawnienia do prowadzenia turystyki górskiej,
- ok. 21,45% zadeklarowało znajomość co najmniej jednego języka obcego,
- ok. 31,1% przewodników znających języki obce ma uprawnienia do bycia pilotami wycieczek.

Ilu przewodników ma uprawnienia do prowadzenia turystyki górskiej, ilu zna co najmniej jeden język obcy, a ilu przewodników znających języki obce może być pilotami wycieczek?

PRZYKŁAD 2.

Pewna firma reklamowała w grudniu swój najnowszy model nart w cenie 1799 zł. Pod koniec stycznia cenę tych nart obniżyła o 10%, a na początku marca ponownie o 20%. Jaka była cena nart po dwukrotnej obniżce? Jaka byłaby cena tych nart, gdyby firma zdecydowała się na jednorazową obniżkę o 30%? Sformułujmy odpowiedni wniosek.

Cenę grudniową nart obniżono o 10%. Oznacza to, że narty pod koniec stycznia kosztowały 90% poprzedniej ceny, czyli $0{,}9 \cdot 1799$ zł. Ponowna 20-procentowa obniżka dotyczyła ceny styczniowej. Na początku marca narty kosztowały 80% ceny styczniowej, czyli
$0{,}8 \cdot (0{,}9 \cdot 1799 \text{ zł}) = 0{,}72 \cdot 1799 \text{ zł} = 1295{,}28$ zł.
Gdyby cenę nart obniżono jednorazowo o 30%, narty kosztowałyby 70% początkowej ceny, czyli $0{,}70 \cdot 1799 \text{ zł} = 1259{,}3$ zł.

Kolejne obniżki procentowe nie oznaczają, że całkowita obniżka procentowa jest sumą kolejnych obniżek.

ĆWICZENIE 2.

Cenę towaru wynoszącą 640 zł podwyższono o 15%, a następnie obniżono o 20%.

a) Jaka była cena tego towaru po dwukrotnej zmianie ceny?

b) Czy korzystniejsza dla klienta jest ta dwukrotna zmiana ceny, czy jednorazowa obniżka ceny o 5%?

PRZYKŁAD 3.

W 2006 roku 58 220 uczniów uczestniczyło w wycieczkach górskich. Stanowili oni około 44,7% wszystkich turystów odwiedzających góry. Ilu turystów wędrowało po górach w 2006 roku?

Niech x oznacza liczbę wszystkich turystów w górach. Wówczas $0{,}447x$ będzie oznaczać liczbę młodzieży biorącej udział w wycieczkach górskich. Mamy więc równanie $0{,}447x = 58\ 220$, stąd $x = 130\ 246{,}085$.
Odpowiedź musimy podać w liczbach całkowitych. W 2006 roku wędrowało po górach 130 246 turystów.

ĆWICZENIE 3.

Po podsumowaniu wyników sprawdzianów w szkołach podstawowych i egzaminów gimnazjalnych w roku 2006 okazało się, że maksymalne wyniki uzyskało 1596 absolwentów obu typów szkół. Stanowiło to 4% wszystkich zdających. Ilu uczniów przystąpiło do sprawdzianów i egzaminów w 2006 roku?

ĆWICZENIE 4.

Z danych GUS z 30.06.2007 roku wynikało, że Warszawa miała 1 704 717 mieszkańców. W województwie mazowieckim mieszkało w tym czasie 5 178 500 ludzi. Oblicz, jaki procent liczby ludności województwa mazowieckiego stanowiła liczba ludności zamieszkującej Warszawę.

PRZYKŁAD 4.

Co roku każdy pracujący Polak ma obowiązek rozliczyć się z Urzędem Skarbowym z podatku od uzyskanego dochodu. W 2011 roku obowiązywała skala podatkowa opisana w tabeli.

Podstawa obliczenia podatku w złotych	Podatek wynosi
do 85 528	18% minus kwota zmniejszająca podatek 556 zł 02 gr
ponad 85 528	14 839 zł 02 gr + 32% nadwyżki ponad 85 528 zł

Źródło: www.rp.pl

Obliczmy podatek dochodowy osoby rozliczającej się z Urzędem Skarbowym indywidualnie, której roczny dochód w 2011 roku wynosił 45 932 zł.
Kwota 45 932 zł mieści się w pierwszym przedziale (ponieważ 45 932 zł < 85 528 zł). Zatem należny podatek to:
$18\% \cdot 45\,932 - 556{,}02 = 0{,}18 \cdot 45\,932 - 556{,}02 = 7711{,}74$ [zł].

ĆWICZENIE 5.

Oblicz podatek dochodowy osoby rozliczającej się z Urzędem Skarbowym indywidualnie, która uzyskała w 2011 roku roczny dochód w wysokości 109 544,19 zł.

„Bezrobocie spadło o 3 punkty procentowe, bank podniósł stopę oprocentowania lokat o 1 punkt procentowy" – takie informacje możemy przeczytać lub usłyszeć w mediach.

Punkty procentowe to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości, podanymi w procentach. Używane są do opisywania zmian typu: stopy procentowe, oprocentowanie obligacji i kredytów, inflacja itp. Jeśli spotkamy się z informacją, że bank podniósł stopę oprocentowania obligacji z 5% do 6%, oznacza to, że stopa oprocentowania wzrosła o 1 punkt procentowy.

PRZYKŁAD 5.

W pewnym technikum przeprowadzono ankietę dotyczącą pracy samorządu szkolnego. W pierwszym semestrze roku szkolnego 34% ankietowanych dobrze oceniło pracę samorządu. W drugim semestrze przeprowadzono ankietę wśród tych samych osób i okazało się, że dobrą ocenę wystawiło samorządowi 40% ankietowanych. O ile procent wzrosła liczba ankietowanych, którzy dobrze ocenili pracę samorządu szkolnego?

Z tego tekstu dowiadujemy się, że o 6 punktów procentowych wzrosła liczba ankietowanych, którzy dobrze ocenili pracę samorządu.
Jeśli oznaczymy literą K liczbę ankietowanych, to $0{,}34 \cdot K$ jest liczbą ankietowanych, którzy w pierwszym semestrze dobrze ocenili pracę samorządu, a $0{,}4 \cdot K$ – liczbą ankietowanych, którzy dobrze ocenili pracę samorządu w drugim semestrze.

$$\frac{0{,}4 \cdot K - 0{,}34 \cdot K}{0{,}34 \cdot K} \cdot 100\% \approx 17{,}6\%$$

Liczba ankietowanych, którzy dobrze ocenili pracę samorządu, wzrosła o 17,6%.

ĆWICZENIE 6.

W powietrzu jest około 78% azotu i 21% tlenu.

a) O ile punktów procentowych mniej jest w powietrzu tlenu niż azotu?

b) O ile procent mniej jest w powietrzu tlenu niż azotu?

ZADANIA

1. Zeszyt i długopis kosztowały tyle samo. Cenę zeszytu podniesiono o 3%, a cenę długopisu – o 5%. Za zestaw złożony z 5 zeszytów i 5 długopisów trzeba teraz zapłacić więcej niż przed podwyżką

A. o 4% **B.** o 8% **C.** o 5% **D.** o 15%

2. Liczba a jest o 30% większa od liczby b. Oznacza to, że liczba b jest mniejsza od liczby a

A. o 30% **B.** o $23\frac{1}{13}\%$ **C.** o 25% **D.** o 70%

3. W 2006 roku w Polsce mieszkało 38,125 mln ludzi. W województwie mazowieckim mieszkało 13,66% ludności Polski, a w województwie śląskim – 4,56 mln ludzi.

a) Ile osób mieszkało w województwie mazowieckim?

b) Jaki procent ludności Polski stanowili mieszkańcy województwa śląskiego?

4. Terytorium Polski to obszar 322 577 km^2, w tym 8682 km^2 to obszar morza terytorialnego, a 1991 km^2 – obszar zajmowany przez morskie wody wewnętrzne. Oblicz, jaki procent obszaru Polski stanowi obszar morza terytorialnego, a jaki – obszar morskich wód wewnętrznych.

5. Całkowita granica Polski wynosi 3511 km. Najdłuższa linia graniczna łączy nas z Czechami i wynosi 796 km, a najkrótsza z Litwą – 104 km. Granica morska to 440 km. Jaki procent całkowitej granicy Polski stanowi każda z linii granicznych?

6. Kalkulator z 7-procentowym podatkiem VAT kosztował 37,45 zł. Podatek VAT wzrósł do 23%. Wyznacz nową cenę kalkulatora.

7. Pan Malinowski otrzymał 140 zł podwyżki, co stanowiło 7% jego dotychczasowej pensji. Ile zarabiał pan Malinowski przed podwyżką?

8. Cenę pewnego produktu podnoszono dwukrotnie, za pierwszym razem o 20%, za drugim – o 30%. Obecna cena wynosi 252 zł. Ten sam produkt w drugim sklepie najpierw podrożał o 15%, a następnie jego cenę obniżono o 20%. Nowa cena to 276 zł. Który sklep sprzedawał ten produkt taniej przed zmianami cen i o ile procent?

9. Liczba uczniów w klasie na koniec roku była mniejsza o 5% od liczby uczniów na początku roku. Natomiast liczba dziewcząt w klasie wzrosła z 40% na początku roku do 50% wszystkich uczniów na koniec roku. Jak zmieniła się liczba dziewcząt na koniec roku w stosunku do liczby dziewcząt na początku roku szkolnego?

10. Cenę pewnego towaru obniżano dwukrotnie, raz o 10%, drugi raz o 15%. O ile procent należy podnieść cenę towaru, aby wróciła ona do wielkości sprzed obniżek?

11. Sprawdź, czy prawdziwe jest stwierdzenie: „W 2011 roku osoba, która uzyskała trzykrotnie większy dochód od osoby, której dochód wyniósł 30 000 zł, powinna odprowadzić do Urzędu Skarbowego trzykrotnie większy podatek”.

12. Oblicz podatek rodziny Kowalskich, którzy w 2011 roku uzyskali dochód w wysokości 55 000 zł, ale odliczyli od dochodu kwotę 648 zł (z tytułu użytkowania internetu) oraz odliczyli od podatku kwotę 2224,08 zł (z tytułu ulgi na dzieci).

13. Obwodowa Komisja Wyborcza w pewnym okręgu ogłosiła wyniki wyborów. Głosowało 913 045 osób. Na partię A oddano 623 045 głosów, a na partię B – 215 500 głosów. Ile procent głosów uzyskała partia A, a ile – partia B? O ile punktów procentowych wynik partii A jest lepszy od wyniku partii B? O ile procent głosów więcej uzyskała partia A niż partia B?

BANK ZADAŃ z. 53–63 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Po 15-procentowej obniżce namiot kosztuje 340 zł. Przed obniżką kosztował
A. 400 zł **B.** 391 zł **C.** 381 zł **D.** 401 zł

2. Jagoda i Ola zbierają pocztówki. Jagoda ma 80 pocztówek, a Ola – 116. O ile procent mniej pocztówek ma Jagoda w stosunku do Oli?
A. O ok. 21%. **B.** O ok. 31%. **C.** O 45%. **D.** O 36%.

3. Liczba ludności zamieszkującej aglomerację Paryża wynosiła w 1999 roku 10 930 244, a w 2007 roku – 12 067 000. Oblicz procentowy wzrost liczby ludności aglomeracji Paryża.

4. Cenę towaru podwyższono o 20%, a następnie obniżono o 20%. Po tych zmianach towar kosztuje o 24 zł mniej niż na początku. Wyznacz cenę początkową tego towaru.

5. Cenę towaru obniżono o 25%, a następnie podniesiono o 25%. Jakiej zmiany należy dokonać, żeby cena wróciła do wielkości sprzed zmian?

6. Firma X przeprowadziła badania oglądalności programów telewizyjnych. Z tych badań wynika, że oglądalność programów stacji S1 jest o 3 punkty procentowe większa niż oglądalność stacji S2. Programy stacji S2 oglądało 17% ankietowanych. O ile procent więcej ankietowanych oglądało programy emitowane przez stację S1?

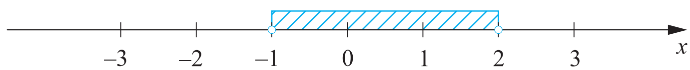
1.11 Przedziały liczbowe

W zbiorze liczb rzeczywistych możemy wskazać podzbiory: liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i niewymiernych, a także wiele innych. Wśród nich możemy wyróżnić także podzbiory, które nazywamy przedziałami liczbowymi. Będziemy je ilustrować na osi liczbowej.

PRZYKŁAD 1.

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste, które są większe od -1 i równocześnie mniejsze od 2.

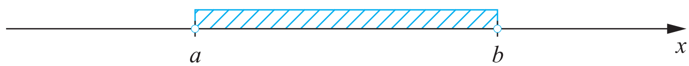
Szukamy liczb rzeczywistych x opisanych warunkami $x > -1$ i $x < 2$. Możemy to zapisać w postaci $-1 < x < 2$. Zaznaczmy rozwiązanie na osi liczbowej.



Definicja

Przedziałem otwartym o końcach a i b, $a < b$, nazywamy zbiór tych liczb rzeczywistych x, które spełniają warunek $a < x < b$.
Symbolicznie zapisujemy to jako $(a; b)$.

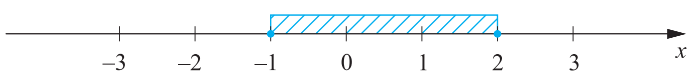
Przedział otwarty $(a; b)$ tak przedstawiamy graficznie na osi liczbowej (końce a i b nie należą do przedziału):



PRZYKŁAD 2.

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste, które są nie mniejsze od -1 i równocześnie nie większe od 2.

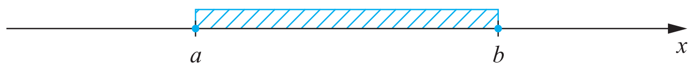
Szukamy liczb rzeczywistych x opisanych warunkami $x \geqslant -1$ i $x \leqslant 2$. Możemy zapisać to w postaci $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Zaznaczmy rozwiązanie na osi liczbowej.



Definicja

Przedziałem domkniętym o końcach a i b, $a < b$, nazywamy zbiór tych liczb rzeczywistych x, które spełniają warunek $a \leqslant x \leqslant b$.
Symbolicznie zapisujemy to jako $\langle a; b\rangle$.

Przedział domknięty $\langle a; b\rangle$ tak przedstawiamy graficznie na osi liczbowej (końce a i b należą do przedziału):



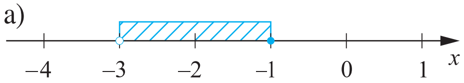
ĆWICZENIE 1.

Przez analogię do definicji przedziału otwartego i domkniętego zdefiniuj przedziały jednostronnie otwarte lub jednostronnie domknięte.

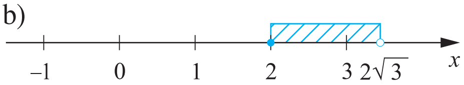
ĆWICZENIE 2.

Zapisz symbolicznie przedział przedstawiony na osi liczbowej.

a)



b)



PRZYKŁAD 3.

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste większe od 2, czyli zbiór liczb spełniających warunek $x > 2$.

Definicja

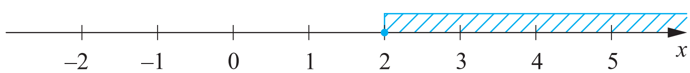
Przedziałem otwartym nieograniczonym $(a; +\infty)$ nazywamy zbiór tych liczb rzeczywistych x, które spełniają warunek $x > a$.

ĆWICZENIE 3.

Przez analogię do definicji przedziału otwartego nieograniczonego zdefiniuj przedział otwarty nieograniczony $(-\infty; a)$.

PRZYKŁAD 4.

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste nie mniejsze od 2, czyli zbiór liczb spełniających warunek $x \geqslant 2$.



Definicja

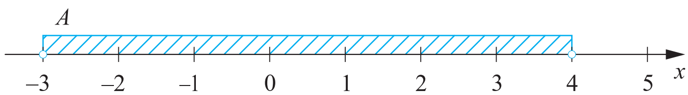
Przedziałem domkniętym nieograniczonym $\langle a; +\infty)$ nazywamy zbiór tych liczb rzeczywistych x, które spełniają warunek $x \geqslant a$.

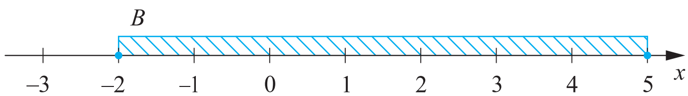
Zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R} = (-\infty; +\infty)$.
Na przedziałach możemy wykonywać takie działania, jakie wykonujemy na zbiorach.

PRZYKŁAD 5.

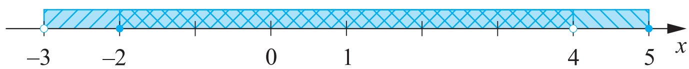
Niech $A = (-3; 4)$ i $B = \langle -2; 5\rangle$. Wyznaczmy:
a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \setminus B$, d) $B \setminus A$.

Przedstawmy przedziały na osi liczbowej. Ułatwi nam to podanie odpowiedzi.

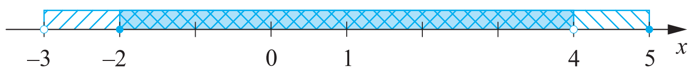




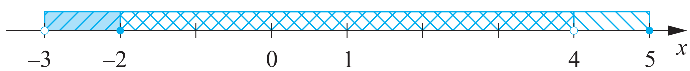
a) $A \cup B = (-3; 5\rangle$, każda liczba z tego przedziału należy do co najmniej jednego z przedziałów A i B.



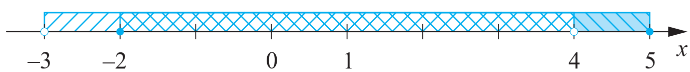
b) $A \cap B = \langle -2; 4)$, każda liczba z tego przedziału należy równocześnie do przedziału A i do przedziału B.



c) $A \setminus B = (-3; -2)$, każda liczba z tego przedziału należy do przedziału A i nie należy do przedziału B.



d) $B \setminus A = \langle 4; 5\rangle$, każda liczba z tego przedziału należy do przedziału B i nie należy do przedziału A.



ĆWICZENIE 4.

Dla danych zbiorów A, B wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

a) $A = \langle -3; -1)$, $B = \langle -1; 3)$ b) $A = (1; +\infty)$, $B = (-\infty; 2\rangle$

ZADANIA

1. Dane są zbiory $A = (-\infty; 5)$, $B = \langle a; 9)$. Jeśli $A \cap B = \langle -5; 5)$, to

A. $a = \frac{5}{9}$ **B.** $a = -14$ **C.** $a = -5$ **D.** $a = -9$

2. Jeśli $A = \langle -4; 17\rangle$ i $A \cap B = (-4; 11\rangle$, to możliwe jest, że

A. $B = (-\infty; 11\rangle$ **B.** $B = (-4; 11)$ **C.** $B = \langle -4; 11\rangle$ **D.** $B = (-4; 11\rangle$

3. Dane są zbiory $A = (-\infty; 4\rangle \cup (6; 8\rangle$ i $B = (0; 7)$. Wówczas

A. $A \cap B = \langle 0; 7\rangle$ **B.** $A \setminus B = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 7; 8)$

C. $A \setminus B = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 7; 8\rangle$ **D.** $A \cup B = (-\infty; 8)$

4. Zaznacz przedział na osi liczbowej.

a) $(-\infty; \sqrt{2})$ b) $\langle \sqrt{3}; +\infty)$ c) $(-2\sqrt{2}; 7)$

d) $\langle 5; 3\sqrt{3}\rangle$ e) $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle$ f) $\langle -2\sqrt{3}; 3\sqrt{2})$

5. Dla danych zbiorów A i B wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-5; 4)$, $B = (-3; 6)$ b) $A = \langle 4; 6\rangle$, $B = (0; 3)$

c) $A = (-\infty; -2\rangle$, $B = (-4; 2\rangle$ d) $A = (3; 5\rangle$, $B = (-2; 6)$

6. Zaznacz zbiór na osi liczbowej i zapisz go w postaci sumy przedziałów.

a) $\boldsymbol{R} \setminus (-5; 4)$ b) $\boldsymbol{R} \setminus \langle 4; 6\rangle$ c) $\boldsymbol{R} \setminus (-3; -2\rangle$ d) $\boldsymbol{R} \setminus \langle 1; 4)$

7. Podany zbiór zapisz w najprostszej postaci.

a) $\boldsymbol{N} \cap (-\infty; \sqrt{2})$ b) $\boldsymbol{R}_+ \cap (-\infty; 2\rangle$ c) $\langle -2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}) \cap \boldsymbol{C}$

8. Dane są przedziały $A = (-3; 7\rangle$, $B = \langle 4; 10)$, $C = (-\infty; 3\rangle$, $D = (-2; 5)$. Zapisz poniższy zbiór jako wynik działania na przedziałach A, B, C i D.

a) $(-2; 3\rangle$ b) $(3; 4)$ c) $(-\infty; -3\rangle \cup (7; 10)$ d) $(-2; 4)$

BANK ZADAŃ z. 64–67 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Dane są zbiory $A = (-\infty; 5)$, $B = \langle a; 9)$ i $A \setminus B = (-\infty; -1)$. Wtedy

A. $a = -0{,}9$ **B.** $a = 1$ **C.** $a = -1$ **D.** $a = 0$

2. Dane są zbiory $A = (-4; 7\rangle$ i $B = (-7; 0\rangle \cup (6; 10\rangle$. Zatem

A. $A \cap B = \langle 0; 6)$ **B.** $A \setminus B = \langle 0; 6\rangle$

C. $B \setminus A = (-7; -4\rangle$ **D.** $A \cup B = (-7; 10\rangle$

3. Wykonaj działania na zbiorach.

a) $(-3; 7\rangle \cap (6; 8)$ b) $(-\infty; 3\rangle \cup (3; 5)$ c) $\big((-2; 6) \setminus \langle 4; 9)\big) \cap \boldsymbol{N}$

4. Zaznacz zbiór na osi liczbowej.

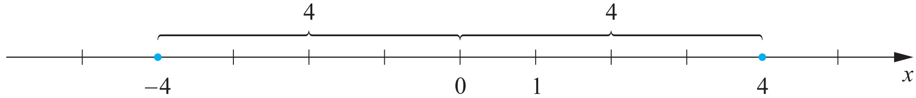
a) $(-6; 4) \setminus \boldsymbol{N}$ b) $\langle 0; 6\rangle \cup (6; 8\rangle$ c) $(-3; 5\rangle \cup \langle 5; 7)$

5. Podany zbiór zapisz w najprostszej postaci.

a) $\left(\left(-\pi; 3\sqrt{3}\right\rangle \setminus \boldsymbol{C}\right) \cap (-2; 0\rangle$ b) $\left(\left(-2\sqrt{7}; 10\right\rangle \setminus (1; \pi\rangle\right) \cap \boldsymbol{N}$

1.12 Wartość bezwzględna

Na osi liczbowej liczby 4 i -4 znajdują się w jednakowej odległości od liczby 0. Zapiszemy to jako $|4| = 4$ i $|-4| = 4$, a odczytamy jako „wartość bezwzględna liczby 4 jest równa 4 i wartość bezwzględna liczby -4 jest równa 4”.



Definicja

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej to odległość tej liczby od liczby 0 na osi liczbowej.
Wartość bezwzględna liczby a, oznaczana symbolem $|a|$, jest równa liczbie a, gdy jest to liczba nieujemna, i liczbie do niej przeciwnej $-a$, gdy a jest liczbą ujemną.
Zapisujemy to w następujący sposób:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy wartości bezwzględne liczb: $128, -17, 1-\sqrt{2}$.

$|128| = 128$. Liczba 128 jest dodatnia, więc jej wartość bezwzględna jest tą samą liczbą.
$|-17| = 17$. Liczba $-17 < 0$, więc jej wartość bezwzględna jest liczbą przeciwną do niej.
$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$. Liczba $1-\sqrt{2}$ jest liczbą ujemną, bo $\sqrt{2} > 1$, zatem wartość bezwzględna tej liczby jest liczbą do niej przeciwną.

Wartość bezwzględna liczby:
- dodatniej jest liczbą dodatnią,
- ujemnej jest liczbą dodatnią,
- 0 jest równa zero.

ĆWICZENIE 1.

Wyznacz wartość bezwzględną liczby.

a) $|\pi - 3|$ b) $|5 - 2\pi|$ c) $|\sqrt{3} - 2|$
d) $|1 - \sqrt[3]{2}|$ e) $|-23 - (-32)|$ f) $|-7 - 12| - |5 - 13|$

ĆWICZENIE 2.

Oblicz:

a) $|-7 \cdot 3|$ i $|-7| \cdot |3|$,   b) $|-12 \cdot (-2)|$ i $|-12| \cdot |-2|$,   c) $\frac{|-16|}{|2|}$ i $\left|\frac{-16}{2}\right|$.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$ prawdziwe są zależności:

$|a| \geqslant 0$ $|a-b| = |b-a|$ $|ab| = |a| \cdot |b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, gdy $b \neq 0$ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ $\sqrt{a^2} = |a|$

ĆWICZENIE 3.

Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b spełniona jest równość? Podaj odpowiednie przykłady.

a) $|a+b| = |a| + |b|$ b) $\sqrt{a^2} = a$

PRZYKŁAD 2.

Wykorzystajmy własności wartości bezwzględnej i zapiszmy w prostszej postaci wyrażenie $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}$.

$\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = \left|2-\sqrt{7}\right|$

Ponieważ $2-\sqrt{7} < 0$, więc na podstawie definicji wartości bezwzględnej mamy

$\left|2-\sqrt{7}\right| = -2+\sqrt{7}$.

ĆWICZENIE 4.

Podane wyrażenia zapisz w prostszej postaci.

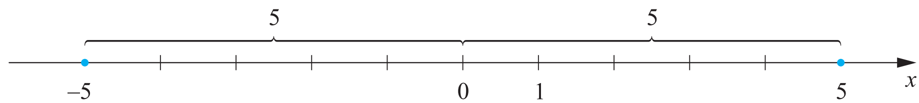
a) $\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}$ b) $\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}$ c) $\sqrt{\left(2-3\sqrt{2}\right)^2}$ d) $\sqrt{(3{,}14-\pi)^2}$

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające podany warunek.

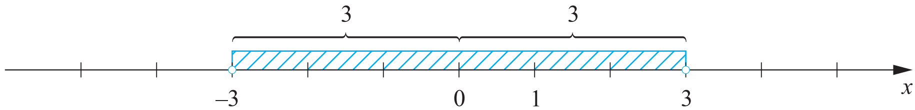
a) $|x| = 5$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \geqslant 2$

a) Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej musimy znaleźć liczby rzeczywiste x, których odległość od zera wynosi 5. Na osi liczbowej są dwie takie liczby: 5 i -5.



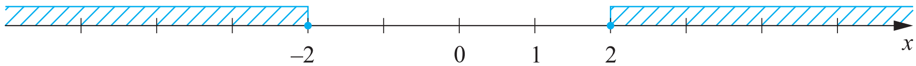
$x \in \{-5, 5\}$

b) W tym przypadku szukamy liczb, których odległość od zera jest mniejsza od 3. Na osi liczbowej są to liczby x spełniające warunek $-3 < x < 3$. Wynik naszych poszukiwań to zbiór liczb należących do przedziału otwartego $(-3; 3)$.



$x \in (-3; 3)$

c) Szukamy liczb, których odległość od zera jest równa co najmniej 2. Na osi liczbowej są to liczby x spełniające warunek $x \leqslant -2$ lub $x \geqslant 2$. Wynik naszych poszukiwań to zbiór liczb należących do sumy przedziałów nieograniczonych $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; +\infty)$.



$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; +\infty)$

ĆWICZENIE 5.

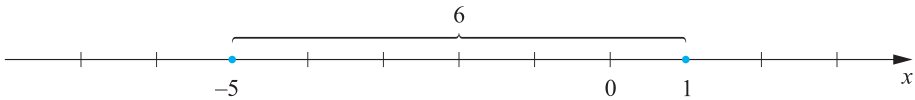
Wyznacz wszystkie liczby x spełniające podany warunek.

a) $|x| = 2\sqrt{3}$ b) $|x| \leqslant 7$ c) $|x| > 5$

PRZYKŁAD 4.

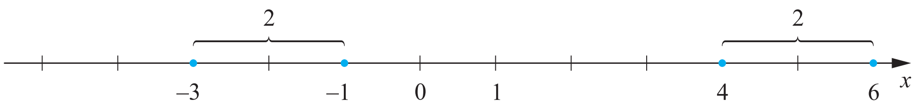
Przeanalizujmy położenie dwóch liczb na osi liczbowej.

a)



Odległość między liczbami -5 i 1 na osi jest równa 6, a wartość bezwzględna różnicy tych liczb to $|-5 - 1| = 6$.

b)



Odległość między liczbami -3 i -1 wynosi 2, a wartość bezwzględna ich różnicy jest równa: $|-3 - (-1)| = 2$.

Odległość między liczbami 4 i 6 jest równa 2, a wartość bezwzględna ich różnicy wynosi $|4 - 6| = 2$.

Twierdzenie

Wartość bezwzględna różnicy liczb a i b, czyli $|a - b|$, jest równa odległości liczby a od liczby b na osi liczbowej.

PRZYKŁAD 5.

Na osi liczbowej dane są punkty: $A = (-5)$, $B = (0)$, $C = (-12)$, $D = (23)$. Wyznaczmy odległości: $|AB|$, $|BA|$, $|BD|$, $|DB|$, $|AC|$, $|CA|$.

$|AB| = |0 - (-5)| = |0 + 5| = 5$ $\quad$ $|BA| = |-5 - 0| = |-5| = 5$

$|BD| = |23 - 0| = 23$ $\quad$ $|DB| = |0 - 23| = |-23| = 23$

$|AC| = |-12 - (-5)| = |-12 + 5| = |-7| = 7$ $\quad$ $|CA| = |-5 - (-12)| = |-5 + 12| = 7$

ĆWICZENIE 6.

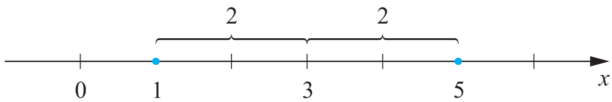
Na osi liczbowej dane są punkty: $A = (-12)$, $B = (-5)$, $C = (12)$, $D = (23)$. Porównaj odległości: $|AB|$ i $|BC|$, $|BD|$ i $|DB|$, $|AC|$ i $|AD|$.

PRZYKŁAD 6.

Wyznaczmy wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające podany warunek.

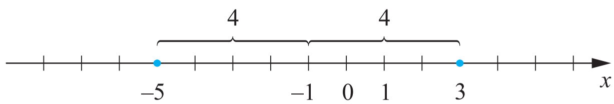
a) $|x - 3| = 2$ $\quad$ b) $|x + 1| = 4$

a) Szukamy liczb x takich, że ich odległość od liczby 3 jest równa 2. Zilustrujmy sytuację na osi liczbowej.



Znaleźliśmy dwie liczby oddalone od liczby 3 o 2 jednostki. Zatem rozwiązaniami równania są liczby ze zbioru $\{1, 5\}$.

b) Sumę $x + 1$ możemy zapisać jako różnicę $x - (-1)$. Zatem równanie przyjmuje postać $|x - (-1)| = 4$. Szukamy liczb rzeczywistych x, które oddalone są od liczby -1 o 4.



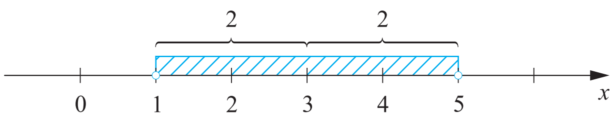
Zbiór rozwiązań równania odczytujemy z rysunku, jest to $\{-5, 3\}$.

PRZYKŁAD 7.

Wyznaczmy wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające podany warunek.

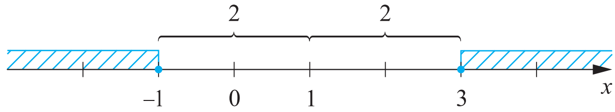
a) $|x - 3| < 2$ $\quad$ b) $|x - 1| \geqslant 2$

a) Szukamy liczb rzeczywistych, których odległość od liczby 3 jest mniejsza od 2.



Wszystkie liczby, które na osi leżą między liczbami 1 i 5, spełniają podany warunek. Zatem liczby rzeczywiste x spełniające warunek $|x - 3| < 2$ należą do przedziału $(1; 5)$.

b) Szukamy liczb rzeczywistych, które są oddalone od liczby 1 o co najmniej 2.



Liczby spełniające warunek $|x - 1| \geqslant 2$ należą do sumy przedziałów $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 3; +\infty)$.

ĆWICZENIE 7.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające podany warunek.

a) $|x + 2| = 3$ b) $|x - 3| \leqslant 2$ c) $|x + 3| > 1$

ZADANIA

1. Liczba $\left|1{,}4 - \sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{2} - 1{,}4\right|$ jest równa

A. 0 **B.** $-2\sqrt{2}$ **C.** $2{,}8 - 2\sqrt{2}$ **D.** $-2{,}8$

2. Liczba $|3^{-2} - 2^{-3}| - \left|27^{-\frac{1}{3}} - 32^{-\frac{1}{5}}\right|$ jest równa

A. -5 **B.** 0 **C.** $-\frac{11}{72}$ **D.** $\frac{11}{72}$

3. Oblicz:

a) $|(-3)^{-3}|$, $\left|2 - 4^{\frac{1}{2}}\right|$, $|\sqrt{5} - 2|$, b) $|2 - \sqrt{5}|$, $\left|27^{\frac{1}{3}} - \sqrt{3}\right|$, $|2^{-3} - 3^2|$.

4. Zapisz liczbę bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(2 + 3\pi)^2}$ b) $\sqrt{\left(3 - \sqrt{2}\right)^2}$ c) $\sqrt{\left(7 - \sqrt{144}\right)^2}$

5. Sprawdź, czy dla podanej pary liczb spełniony jest warunek $|x + y| = |x| + |y|$.

a) $x = 5{,}8$ i $y = -3{,}2$ b) $x = -0{,}17$ i $y = -1{,}33$ c) $x = -0{,}15$ i $y = -2{,}65$

d) $x = -8{,}2$ i $y = 1{,}2$ e) $x = 12{,}24$ i $y = 3{,}16$ f) $x = 15{,}8$ i $y = 3{,}2$

6. Dla jakich wartości x prawdziwa jest równość?

a) $|x| = x$ b) $|-x| = -|x|$ c) $|x| = -x$

7. Rozwiąż równanie.

a) $|x| = \sqrt{2}$ b) $|x| = 0$ c) $|5x| = 0{,}4$

8. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| = 0$ b) $|x - 2| = 5$ c) $|x + 2| = \sqrt{2}$

9. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające podany warunek.

a) $|x| \leqslant \frac{2}{3}$ b) $|x| < 2{,}5$ c) $|x| \geqslant 3{,}7$ d) $|x| > 1\frac{2}{5}$

10. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające podany warunek.

a) $|x+3| \geqslant 5$ b) $|x-2| < 1$ c) $|x+1| > -2$

11. Podaj, dla jakich wartości a i n prawdziwy jest wzór $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$.

BANK ZADAŃ z. 68–74 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Na osi liczbowej dane są punkty: $A = (-117)$, $B = (-451)$, $C = (-57)$, $D = (341)$, $E = (501)$. Wtedy spełniony jest warunek

A. $|AB| < |CD| < |BC|$ **B.** $|AB| < |CD| < |CE|$
C. $|AC| < |BC| < |DE|$ **D.** $|BC| < |CD| < |DE|$

2. Liczby rzeczywiste x z przedziału $(-9; 9)$ spełniają warunek

A. $|x| < 5$ **B.** $|x| < 9$
C. $|x| > 9$ **D.** $|x| \geqslant 9$

3. Zapisz bez użycia wartości bezwzględnej $|3\sqrt{2} - \pi| + |3^{-2} - 2^{-2}| - |\pi - \sqrt{11}|$.

4. Która z liczb $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$, $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$ jest liczbą całkowitą?

5. Dane są liczby $x = -3$ i $y = 2$. Oblicz:

a) $|3x - y|$, b) $2|x| - 3|y|$, c) $\big|4|x| - 7|y|\big|$, d) $|x| \cdot |y|$.

6. Wyznacz wszystkie liczby x spełniające podany warunek.

a) $|x+31| = 0$ b) $|x+11| = 1$ c) $|x+31| > 0$

1.13 Błąd przybliżenia

PRZYKŁAD 1.

Rozwinięcia liczb wymiernych i niewymiernych z reguły podajemy w zaokrągleniu.
Liczba 125,45678 w zaokrągleniu do

- dziesiątek to 130: $125{,}45678 \approx 130$ – przybliżenie z nadmiarem
- jedności to 125: $125{,}45678 \approx 125$ – przybliżenie z niedomiarem
- części dziesiątych to 125,5: $125{,}45678 \approx 125{,}5$ – przybliżenie z nadmiarem
- części setnych to 125,46: $125{,}45678 \approx 125{,}46$ – przybliżenie z nadmiarem

Definicja

Błąd bezwzględny przybliżenia liczby to wartość bezwzględna różnicy tej liczby i jej wartości przybliżonej.
x – liczba, a – przybliżenie liczby x, $|x - a|$ – błąd bezwzględny
Błąd względny przybliżenia liczby to stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej tej liczby. Błąd względny jest wyrażany najczęściej w procentach.
$\frac{|x-a|}{|x|}$ – błąd względny

PRZYKŁAD 2.

Dla liczby $\frac{2}{3}$ dane są trzy przybliżenia dziesiętne: 0,66, 0,7 i 0,67. Które z tych przybliżeń jest najbardziej dokładne, a które – najmniej?

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$, zatem przybliżenie 0,66 jest z niedomiarem, a przybliżenia 0,7 i 0,67 są z nadmiarem.
Obliczmy błędy bezwzględne i błędy względne podanych przybliżeń.

Przybliżenie	Błąd bezwzględny	Błąd względny
0,66	$\left\|\frac{2}{3} - 0{,}66\right\| = \left\|\frac{200-198}{300}\right\| = \frac{2}{300}$	$\frac{\frac{2}{300}}{\frac{2}{3}} \cdot 100\% = 1\%$
0,7	$\left\|\frac{2}{3} - 0{,}7\right\| = \left\|\frac{20-21}{30}\right\| = \frac{1}{30}$	$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{3}} \cdot 100\% = 5\%$
0,67	$\left\|\frac{2}{3} - 0{,}67\right\| = \left\|\frac{200-201}{300}\right\| = \frac{1}{300}$	$\frac{\frac{1}{300}}{\frac{2}{3}} \cdot 100\% = 0{,}5\%$

W celu wybrania najdokładniejszego przybliżenia spośród podanych należy porównać błędy względne tych przybliżeń. Ponieważ najmniejszy błąd względny jest dla 0,67, więc przybliżenie to jest najbardziej dokładne. Największy błąd względny jest dla 0,7, więc to przybliżenie jest najmniej dokładne.

ĆWICZENIE 1.

Oblicz, jaki jest błąd względny podanych przybliżeń liczby $\frac{17}{21}$.

a) 0,81 b) 0,8 c) 0,8096

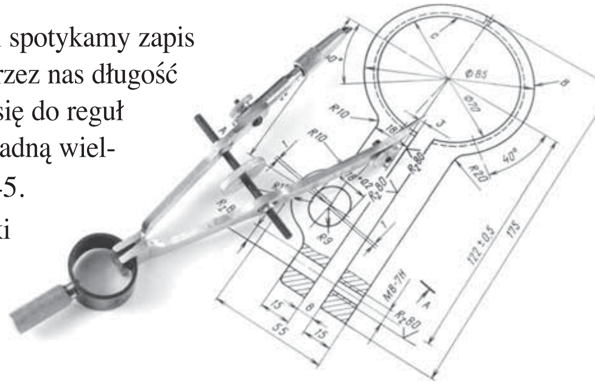
ĆWICZENIE 2.

Wyrażenia arytmetyczne $\sqrt{170} - 13$ i $\frac{1}{\sqrt{170} + 13}$ oznaczają tę samą liczbę (upewnij się, usuwając niewymierność z mianownika). Oblicz przybliżone wartości tych wyrażeń, przyjmując, że $\sqrt{170} \approx 13{,}04$. Dlaczego otrzymałeś różne przybliżenia, gdy korzystałeś z różnych zapisów liczby? Porównaj błędy względne przybliżeń. Które z nich jest dokładniejsze?

PRZYKŁAD 3.

Na planach oraz rysunkach technicznych czasami spotykamy zapis $0{,}124\ \text{m} \pm 0{,}0005\ \text{m}$. Oznacza on, że podana przez nas długość 0,124 m jest wielkością przybliżoną. Odwołując się do reguł zaokrąglania, wiemy, że liczba x wyrażająca dokładną wielkość musi spełniać warunek $0{,}1235 \leqslant x \leqslant 0{,}1245$.

To znaczy, że maksymalny błąd bezwzględny, jaki popełnimy, podając takie przybliżenie, wynosi 0,0005 m. Podobne zapisy stosujemy także przy notacji wykładniczej, na przykład $m = (2{,}18 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-8}$ kg.



ZADANIA

1. Przybliżenie pewnej liczby, podane przez Olę, jest równe 12,201, a błąd względny tego przybliżenia to 2%. Natomiast przybliżenie tej samej liczby, podane przez Huberta, to 12,699 z 2-procentowym błędem względnym.
W takim razie
A. nie istnieje taka liczba.
B. liczba ta jest równa 12,24.
C. liczba ta jest równa 12,49.
D. liczba ta jest równa 12,45.

2. Jaki błąd bezwzględny popełnimy, jeżeli za przybliżenie liczby x przyjmiemy liczbę a.

a) $x = \sqrt{17},\ a = 4{,}1$

b) $x = 2 - \sqrt{2},\ a = 0{,}6$

c) $x = 3\sqrt{5},\ a = 6{,}71$

3. Magda dostała akwarium o wymiarach 53 cm długości, 28,5 cm szerokości oraz 36,5 cm wysokości. Oszacowała, że należy wlać do niego 51 l wody, a brat uznał, że powinno to być 50,5 l. Kto z nich oszacował dokładniej, jeśli powierzchnia wody powinna znajdować się 3 cm poniżej górnej krawędzi akwarium?

4. Przybliżona wartość pewnej wielkości, podana z 10-procentowym błędem względnym, wynosi 0,2. Wyznacz dokładną wartość tej wielkości, jeśli przybliżenie to podane jest:

a) z nadmiarem,

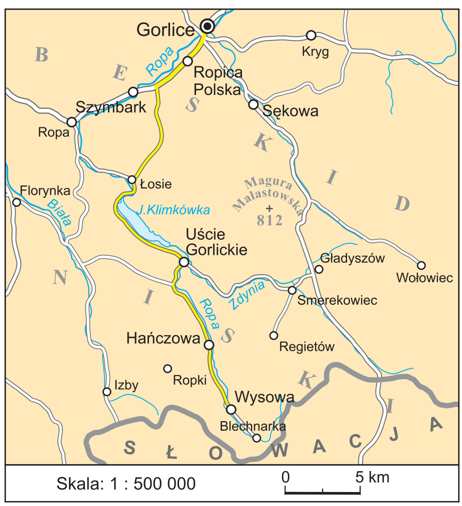
b) z niedomiarem.

5. Liczbę $\frac{11}{17}$ podano z przybliżeniem, którego błąd względny wynosi 5%. Wyznacz to przybliżenie.

6. Oblicz 15% liczby 2,7 i podaj z dokładnością do 0,1. Oblicz błąd względny tego przybliżenia.

7. Opisz, w jakich przedziałach mieszczą się rzeczywiste wymiary śruby o średnicy 18 mm i długości 26 mm, jeśli maszyna produkuje śruby z dokładnością do 0,01 mm dla średnicy i 0,02 mm dla długości.

8. Korzystając z mapy zamieszczonej obok, oblicz przybliżoną odległość drogową między Gorlicami a Wysową (droga zaznaczona kolorem żółtym). Skoro rzeczywista odległość między tymi miejscowościami wynosi 35,5 km, podaj błąd względny przybliżenia.



BANK ZADAŃ z. 75–77 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Hubert przy obliczaniu sumy liczb $\frac{1}{7}$ i $\frac{2}{9}$ skorzystał z przybliżenia tych liczb z dokładnością do 0,01. Błąd względny, jaki popełnił, jest równy

A. ok. 2% **B.** ok. 0,1% **C.** ok. 1,4% **D.** ok. 0,5%

2. Przybliżenie pewnej liczby to 24,99. Błąd względny podanego przybliżenia wynosi 2%. Liczba ta jest równa

A. 25,3 lub 24,6 **B.** 25,6 **C.** 24,4 **D.** 24,5 lub 25,5

3. Wyznacz liczbę a, jeśli jej przybliżenie z niedomiarem wynosi 17,5, a błąd bezwzględny przybliżenia jest równy 0,37.

4. Wyznacz błąd względny przybliżenia liczby, jeśli jej przybliżenie z nadmiarem wynosi 275, a błąd bezwzględny jest równy 15,25.

5. Zaokrąglij każdą z podanych liczb $a = 251$, $b = 67$, $c = 1245$ do pełnych dziesiątek. Porównaj popełnione błędy bezwzględne.

PROJEKT

Wielkość x podajemy z dokładnością do 0,5, a wielkość y – z dokładnością do 0,8, tzn. $x = a \pm 0{,}5$ i $y = b \pm 0{,}8$. Określ, z jaką dokładnością podajemy $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ i $\frac{x}{y}$. Uogólnij ten problem. Niech $x = a \pm h_1$ i $y = b \pm h_2$. Określ, z jaką dokładnością podajemy $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ i $\frac{x}{y}$.

1.14 Pojęcie logarytmu

Morska alga brunatna rośnie bardzo szybko. Każdego tygodnia podwaja swoją wysokość. Jeśli przyjmiemy, że alga ma 1 metr w momencie, w którym zaczynamy ją obserwować ($t = 0$), to po tygodniu ($t = 1$) będzie miała 2 metry, a po 3 tygodniach ($t = 3$) będzie miała już 8 metrów. Tempo wzrostu algi możemy zapisać jako $h = 2^t$, gdzie h oznacza wysokość algi w metrach, a t – czas wzrastania wyrażony w tygodniach.

Jeżeli interesuje nas, po jakim czasie alga osiągnie 3 metry, to musimy znaleźć takie t, aby $2^t = 3$. Za pomocą kalkulatora znajdziemy $t \approx 1{,}6$. Po 2,6 tygodnia alga osiągnie 6 metrów, a po kolejnym tygodniu, czyli 3,6 tygodnia – 12 metrów. Jeśli interesuje nas, kiedy alga urośnie do 25 metrów, musimy znów skorzystać z kalkulatora i metodą prób znaleźć taką liczbę t, aby $2^t = 25$.

Zastanówmy się, co się działo z algą przed czasem, w którym zaczęliśmy ją obserwować. Przyjmujemy, że tempo wzrostu było cały czas takie samo. Otóż jeśli alga w czasie, który oznaczyliśmy jako $t = 0$, miała 1 metr wysokości, to tydzień wcześniej (oznaczmy ten czas $t = -1$) miała tylko $\frac{1}{2}$ metra, a dwa tygodnie wcześniej, dla $t = -2$, miała $\frac{1}{4}$ metra.

Szukanie wartości wykładnika, przy którym znana jest wartość potęgi o danej podstawie, nazywamy **logarytmowaniem**. Opiszmy czas wzrostu algi symbolicznie.

$\log_2 h = t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^t = h$, gdzie h oznacza wysokość (jest więc liczbą dodatnią), natomiast t jest dowolną liczbą rzeczywistą.

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy:

a) $\log_2 16$, b) $\log_2 \frac{1}{4}$.

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$ b) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, ponieważ $2^{-2} = \frac{1}{4}$

ĆWICZENIE 1.

Wyznacz:

a) $\log_2 32$, b) $\log_2 1$, c) $\log_2 2$, d) $\log_2 \frac{1}{16}$, e) $\log_2 \sqrt{2}$.

PRZYKŁAD 2.

Przeanalizujmy inne tempo wzrostu algi rozważanej na początku tematu. Co oznacza $\log_3 27 = 3$?

Możemy zinterpretować tę równość następująco. Jeśli alga potraja swoją wysokość w ciągu tygodnia, to potrzebuje trzech tygodni na to, aby osiągnąć wysokość 27 m (przy założeniu, że w chwili rozpoczęcia obserwacji miała 1 m wysokości).

Definicja

Logarytmem przy podstawie a, $a > 0$ i $a \neq 1$, z liczby dodatniej b nazywamy taką liczbę c, że $a^c = b$.

Symbolicznie zapisujemy to jako $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Logarytmu przy podstawie 1 nie określamy. Próba określenia logarytmu przy podstawie 1 z liczby dodatniej b prowadzi do sprzeczności $1^c = b$.

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy:

a) $\log_3 3$, b) $\log_3 \frac{1}{3}$, c) $\log_{\frac{1}{2}} 2$, d) $\log_{\sqrt{2}} 1$.

a) $\log_3 3 = 1$, ponieważ $3^1 = 3$. b) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, ponieważ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$. d) $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$, ponieważ $\sqrt{2}^{\,0} = 1$.

ĆWICZENIE 2.

Wyznacz:

a) $\log_3 81$, $\log_5 125$, b) $\log_4 64$, $\log_{\frac{1}{3}} 9$,

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$, $\log_7 \sqrt{7}$, d) $\log_2 2\sqrt{2}$, $\log_{\sqrt{2}} 2$.

ĆWICZENIE 3.

Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$\log_2 \frac{1}{2}$, $\log_5 \sqrt{5}$, $\log_{64} 1$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$, $\log_3 3$

ĆWICZENIE 4.

Oblicz:

a) $\log_2 (16 \cdot 32)$ i $\log_2 16 + \log_2 32$,

b) $\log_5 (125 \cdot 25)$ i $\log_5 125 + \log_5 25$,

c) $\log_4 \frac{4}{64}$ i $\log_4 4 - \log_4 64$,

d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{8}{2}$ i $\log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{\sqrt{2}} 2$,

e) $\log_3 9^2$ i $2 \log_3 9$,

f) $\log_{\frac{1}{2}} 8^3$ i $3 \log_{\frac{1}{2}} 8$.

Twierdzenie

Podstawowe własności logarytmu

Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$, $c > 0$ i $n \in \boldsymbol{N}$, to:

1) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, 2) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, 3) $\log_a b^n = n \log_a b$.

Dowody podstawowych własności logarytmów

Wprowadźmy oznaczenia $\log_a b = x$ i $\log_a c = y$. Z definicji logarytmu: $b = a^x$ i $c = a^y$.

1) Pomnóżmy b przez c.

$b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, czyli $bc = a^{x+y}$

Zgodnie z definicją logarytmu mamy $\log_a bc = x + y$.

Po podstawieniu za x i y przyjętych oznaczeń mamy $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

2) Podzielmy b przez c.

$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, czyli $\frac{b}{c} = a^{x-y}$

Z definicji logarytmu $\log_a \frac{b}{c} = x - y$.

Zgodnie z oznaczeniami początkowymi otrzymujemy $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

3) $\log_a b^n = \log_a (\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ czynników}}) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \ldots + \log_a b}_{n \text{ składników}} = n \log_a b$

Zauważ, że jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $n \in \boldsymbol{N}$, to $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a^n = n$.

PRZYKŁAD 4.

Niech $\log_5 7 = a$. Wyznaczmy $\log_5 35,\ \log_5 49,\ \log_5 \frac{49}{25}$.

Zadanie to rozwiążemy, stosując poznane twierdzenia.

$\log_5 35 = \log_5(5 \cdot 7) = \log_5 5 + \log_5 7 = 1 + a$

$\log_5 49 = \log_5 7^2 = 2\log_5 7 = 2a$

$\log_5 \frac{49}{25} = \log_5 49 - \log_5 25 = 2a - 2$

ĆWICZENIE 5.

Przyjmując, że $\log_9 2 = a$, wyznacz: $\log_9 16,\ \log_9 36,\ \log_9 \frac{27}{8},\ \log_9 162$.

- Logarytmujemy tylko liczby dodatnie.
- Podstawa logarytmu musi być dodatnia.
- Podstawa logarytmu musi być różna od 1.

Zanim zaczniemy rozwiązywać zadanie, powinniśmy zapisać warunki, jakie muszą zostać spełnione przez niewiadome. Po zakończeniu rozwiązania trzeba sprawdzić, czy wyznaczona liczba spełnia warunki określone początkowo.

PRZYKŁAD 5.

Wyznaczmy x, korzystając z definicji logarytmu i poznanych twierdzeń.

a) $\log_5 x = -3$ b) $\log_x 20 = 1$ c) $\log_{10}(x-3) = 2$ d) $\log_3 x - \log_3 2 = 3$

a) $x > 0$

$\log_5 x = -3 \Leftrightarrow 5^{-3} = x$, stąd $x = \frac{1}{125}$

b) $x > 0,\ x \neq 1$

$\log_x 20 = 1 \Leftrightarrow x^1 = 20$, stąd $x = 20$

c) $x - 3 > 0$, stąd $x > 3$

$\log_{10}(x-3) = 2 \Leftrightarrow 10^2 = x - 3$, czyli $x = 103$

d) $x > 0$

Skorzystamy z twierdzenia o różnicy logarytmów przy tej samej podstawie.

$\log_3 x - \log_3 2 = \log_3 \frac{x}{2}$, $\log_3 \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = \frac{x}{2}$, czyli $x = 54$

Definicja

Logarytm o podstawie 10 nazywamy **logarytmem dziesiętnym**.
Zapisujemy go jako $\log a$, w symbolu nie występuje podstawa.

ZADANIA

1. Liczba $\log_{\frac{1}{7}} 343$ jest równa

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** 7 **D.** -3

2. Jeśli $\log_8 k = \frac{5}{3}$, to

A. $k = 8\frac{5}{3}$ **B.** $k = 32$ **C.** $k = \frac{40}{3}$ **D.** $k = 64$

3. Suma $\log_5 125 + \log_4 16^2$ jest równa

A. 5 **B.** $\log_9 381$ **C.** 9 **D.** 7

4. Sprawdź, czy poprawnie obliczono logarytmy.

$\log_6 6 = 1$, $\log 0{,}001 = -3$, $\log_{12} 1 = 0$, $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$

5. Oblicz:

a) $\log_{49} 7$, $\log_{17} 1$, $\log 100\,000$,

b) $\log_{0,2} 625$, $\log_{\sqrt{3}} 27$, $\log_{16} 2$.

6. Wyznacz x. Podaj odpowiednie założenia.

a) $\log_2 x = 3$, $\log_{32} x = \frac{2}{5}$, $\log_{16} x = 2$, $\log x = \frac{2}{3}$, $\log x = -0{,}5$

b) $\log_x 27 = 3$, $\log_x \frac{1}{8} = -3$, $\log_x 16 = 4$, $\log_x 3 = \frac{1}{3}$, $\log_x 81 = \frac{4}{3}$

c) $\log_2 8\sqrt{2} = x$, $\log_x x^5 = 5$, $\log_x x^{-3} = -3$, $\log_x x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

7. Wykonaj działanie.

a) $\log_3 54 + \log_3 1{,}5$

b) $\log_2 5 + \log_2 25{,}6$

c) $\log_2 144 - \log_2 9$

d) $\log_3 33 - \log_3 11$

8. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $\log_3 27^2$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$, $\log_4 16^4$, $\log_5 125^3$

b) $\log_3 \sqrt[4]{27}$, $\log \sqrt[3]{10\,000}$, $\log_2 \sqrt[7]{8}$, $\log_3 81^7$

9. Wysokość nad poziomem morza możemy w przybliżeniu określić, korzystając z wzoru $h = \frac{500(\log P - 2)}{27}$, gdzie h – wysokość w kilometrach, P – ciśnienie atmosferyczne w kilopaskalach. Określ w przybliżeniu wartość ciśnienia panującego na szczycie Mount Everest, którego wysokość wynosi 8848 m n.p.m.

10. Korzystając z definicji logarytmu i poznanych wzorów dotyczących logarytmowania, rozwiąż równanie. Sprawdź, czy otrzymana liczba spełnia podane równanie.

a) $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 2$ b) $\log_{\frac{1}{4}}(x-3) = -2$ c) $\log x + 2 = 1$

d) $\log_4 x + 3 = 5$ e) $\log x + \log 10 = 2$ f) $\log_{3x} 3 + \log_{3x} 9 = 1$

BANK ZADAŃ z. 78–81 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczba $\log_2 4^3 - \log_3 27^2$ jest równa

A. 1 **B.** –1 **C.** 0 **D.** –2

2. Liczby: $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$, $\log_4 2^{12}$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{3}} 9$ uporządkowano rosnąco. Wskaż poprawne uporządkowanie.

A. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_4 2^{12} < \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

B. $\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_4 2^{12} < \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

C. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} < \log_4 2^{12}$

D. $\log_4 2^{12} < \log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

3. Oblicz:

a) $\log_7 \frac{1}{343}$, b) $\log 0{,}0001$, c) $\log_{\sqrt{5}} 125$, d) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2}$.

4. Niech $\log_4 a = 3$. Oblicz wartość wyrażenia $\log_4 16a^2$.

5. Zapisz w prostszej postaci wyrażenie $\frac{1}{4}\left(2(\log_2 a + 3\log_2 b) - 3\log_2 c\right)$.

6. Wyznacz x, wiedząc, że $\log_5(3x+1) = 2$.

ZESTAW ZADAŃ – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)

Liczba $\frac{9^3 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{27}}$ jest równa

A. 3^6 **B.** $\frac{3^3}{\sqrt{3}}$ **C.** 9^2 **D.** 27^3

Zadanie 2. (1 p.)

Liczba $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ jest równa

A. -5 **B.** -11 **C.** $-3(2\sqrt{6} + 3)$ **D.** $-5 + 2\sqrt{6}$

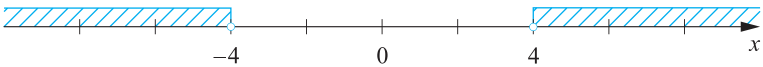
Zadanie 3. (1 p.)

Liczbę a zwiększono o 17%, otrzymano zatem

A. $a + 17$ **B.** $0{,}17a$ **C.** $1{,}17a$ **D.** $170a$

Zadanie 4. (1 p.)

Wskaż warunek, który spełniają liczby rzeczywiste x zaznaczone na osi liczbowej.



A. $|x| \geqslant 4$ **B.** $|x| < 4$ **C.** $|x| > 4$ **D.** $|x| > 8$

Zadanie 5. (1 p.)

Liczba $\log_2 16 + \log_3 27$ to

A. $\log_5 43$ **B.** 7 **C.** 5 **D.** $\log_6 432$

Zadanie 6. (2 p.)

Dane są przedziały $(-\infty; 5\rangle$ i $(a; 11\rangle$. Wyznacz a, wiedząc, że do części wspólnej tych przedziałów należą dokładnie trzy liczby naturalne.

Zadanie 7. (3 p.)

Podaj liczby całkowite, które należą do zbioru

a) $(-\infty; 2\rangle \cap (1; 5)$ b) $\langle -2; 3) \cup (3; 5\rangle$ c) $(-5; 7) \setminus \langle 0; +\infty)$

Zadanie 8. (3 p.)

Oblicz $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} : (-1{,}2)^2$.

Zadanie 9. (3 p.)

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{x^4 - y^2}{10}$ dla $x = 3\sqrt{2} - 1$, $y = \sqrt{2} + 1$.

Zadanie 10. (3 p.)

W prasie hydraulicznej z 250 kg nasion oleistych można wycisnąć około 85 kg oleju. Pozostałe odpady zawierają jeszcze 6% tłuszczu. Oblicz, ile kilogramów tłuszczu pozostaje w odpadach.

Zadanie 11. **(3 p.)**
Oblicz wartość wyrażenia $|4 - \sqrt{7}| - |1 - 3\sqrt{7}|$.

Zadanie 12. **(3 p.)**
Przedstaw wartość wyrażenia $\frac{(0{,}02 \cdot 10^8) \cdot (3 \cdot 10^{-6})}{0{,}6 \cdot 10^{10}}$ w notacji wykładniczej.

Zadanie 13. **(4 p.)**
Która z podanych liczb jest najlepszym przybliżeniem ułamka $\frac{3}{7}$?

a) 0,4 b) 0,43 c) 0,429

Zadanie 14. **(4 p.)**
Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek $|x| > 1$ oraz zbiór liczb spełniających warunek $|x| \leqslant 2$. Wyznacz sumę i część wspólną zaznaczonych zbiorów.

Zadanie 15. **(4 p.)**
Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

$A = \log_6(\log_2 64)$, $B = \log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$, $C = \log_{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{4} - \log_{\frac{1}{2}} 1\frac{1}{8}$, $D = \log_3 3\frac{6}{7} + \log_3 2\frac{1}{3}$

Zadanie 16. **(3 p.)**
W regatach American's Cup, popularnie zwanych regatami 12-metrowców, startowały jachty zbudowane tak, aby ich wymiary spełniały warunek

$\frac{L + 2D - F + \sqrt{A}}{2{,}37} = 12$, gdzie

L – długość jachtu w metrach,
D – różnica między obwodem zewnętrznym a wewnętrznym kadłuba jachtu w metrach,
F – wysokość pokładu nad powierzchnią wody w metrach,
A – powierzchnia żagla w metrach kwadratowych.

Jaka powinna być powierzchnia żagla, jeśli pozostałe wielkości wynoszą $L = 16{,}6$ m, $D = 0{,}2$ m i $F = 1{,}26$ m?

Zadanie 17. **(5 p.)**
Przybliżoną drogę hamowania h samochodu osobowego na suchej nawierzchni, wyrażoną w metrach, można obliczyć ze wzoru $h = 0{,}0052v^2$, gdzie v oznacza prędkość w km/h.

a) Oblicz drogę hamowania samochodu jadącego z prędkością 70 km/h.
b) O ile procent zmieni się droga hamowania, gdy samochód będzie poruszał się z prędkością o 20 km/h większą?

2

Funkcja
i jej własności

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

- określanie funkcji za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego
- obliczanie ze wzoru wartości funkcji dla danego argumentu; posługiwanie się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość
- odczytywanie z wykresu własności funkcji (dziedziny, zbioru wartości, miejsc zerowych, maksymalnych przedziałów, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punktów, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą)

2.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji

W różnych obszarach życia obserwujemy wielkości, które opisujemy pewnymi zależnościami. Wielkości te nazywamy **zmiennymi**.

PRZYKŁAD 1.

W rozdziale 1., definiując pojęcie logarytmu, analizowaliśmy tempo wzrostu algi morskiej.

Wymiary, a tym samym masa, tej rośliny morskiej zmieniają się z upływem czasu. Tempo jej wzrostu bywa bardzo różne. Są algi, które w ciągu doby powiększają się nawet czterdziestokrotnie. Zmiany te zależą między innymi od zasolenia i temperatury wody oraz ilości światła. Pewien gatunek algi hodowany i obserwowany w idealnych warunkach laboratoryjnych podwajał swoją wysokość co tydzień. W tym przypadku, jeśli czas uznamy za **zmienną niezależną**, a wysokość algi – za **zmienną zależną**, to związek między tymi zmiennymi można opisać wzorem $h = 2^t$, gdzie t oznacza czas podany w tygodniach, a h – wysokość algi osiągniętą po tym czasie.

PRZYKŁAD 2.

W Urzędzie Pocztowym Osiedle I pracuje 4 doręczycieli. Informacje o tym, który z nich dostarcza przesyłki na daną ulicę, zamieszczono w tabeli.

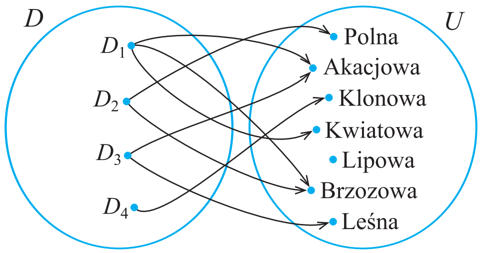
	Klonowa	Akacjowa	Polna	Lipowa	Brzozowa	Leśna	Kwiatowa
Doręczyciel 1 (D_1)		×			×		×
Doręczyciel 2 (D_2)			×		×		
Doręczyciel 3 (D_3)		×				×	
Doręczyciel 4 (D_4)	×						

Zabudowa przy ul. Lipowej jest na etapie prac projektowych zagospodarowania przestrzennego.

W tabeli przedstawiono pewne przyporządkowanie. Zilustrujmy je w inny sposób niż w tabeli – za pomocą grafu. Przyjmijmy oznaczenia:

$D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ – zbiór doręczycieli przesyłek,

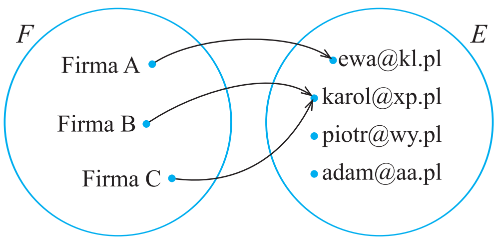
$U = \{$Klonowa, Akacjowa, Polna, Lipowa, Brzozowa, Leśna, Kwiatowa$\}$ – zbiór ulic, na które są dostarczane przesyłki.



Takie przyporządkowanie nazywać będziemy **niejednoznacznym**, ponieważ nie każdy doręczyciel dostarcza przesyłki wyłącznie na jedną ulicę, np. doręczyciel D_1 dostarcza je na ulice: Akacjową, Brzozową i Kwiatową. Mówimy, że jest to przyporządkowanie ze zbioru doręczycieli D do zbioru ulic U.

PRZYKŁAD 3.

Trzy firmy: A, B, C niezależnie od siebie prowadzą działalność na rynku komputerowym. Każda z nich zatrudnia stałych pracowników, a dodatkowo współpracuje za pośrednictwem internetu z doradcami: Ewą, Karolem, Piotrem i Adamem. Firmy przesyłają zadania do wykonania na ich adresy e-mailowe. W tym miesiącu firma A zleciła pracę Ewie, firmy B i C zleciły prace Karolowi, natomiast Piotr i Adam nie otrzymali żadnych zleceń. Oznaczmy zbiory: F – zbiór firm, E – zbiór adresów e-mailowych doradców. Zilustrujmy to przyporządkowanie na grafie.



Każda firma zleciła zadanie dokładnie jednemu pracownikowi. Takie przyporządkowanie nazywamy **jednoznacznym.**

Definicja

Przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru A odpowiada dokładnie jeden element zbioru B, nazywamy **funkcją** ze zbioru A do zbioru B.
Symbolicznie zapisujemy to jako $f\colon A \to B$.
Zbiór A nazywamy **dziedziną** funkcji, a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**.
Elementy zbioru B, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

W przyporządkowaniu $f\colon A \to B$, będącym funkcją, argumenty należące do dziedziny A nazywamy zmiennymi niezależnymi. Wartości funkcji należące do zbioru B, nazywanego **przeciwdziedziną**, to zmienne zależne od argumentów. Jednak nie wszystkie elementy przeciwdziedziny są wartościami argumentów. Zmienne zależne, które odpowiadają argumentom dziedziny funkcji, tworzą **zbiór wartości funkcji**. Zbiór ten będziemy oznaczać Z_w.

W przykładzie 3. dziedziną funkcji jest zbiór F = {Firma A, Firma B, Firma C}, przeciwdziedziną – zbiór E = {ewa@kl.pl, karol@xp.pl, piotr@wy.pl, adam@aa.pl}, a zbiorem wartości funkcji – zbiór Z_w = {ewa@kl.pl, karol@xp.pl}.

ĆWICZENIE 1.

Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

b) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

c) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

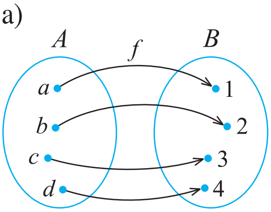
f) Każdej liczbie całkowitej przyporządkowana jest odwrotność tej liczby.

PRZYKŁAD 4.

Przyjrzyjmy się grafom opisującym przyporządkowania – niektóre z nich są funkcjami, inne nie.

- Przyporządkowania, które są funkcjami:

a)



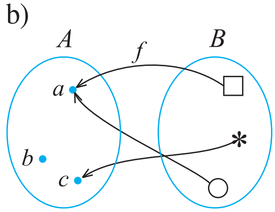
$f\colon A \to B$

Dziedzina:

$A = \{a, b, c, d\}$

$Z_w = \{1, 2, 3, 4\}$

b)



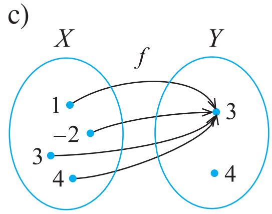
$f\colon B \to A$

Dziedzina:

$B = \{\square, *, \bigcirc\}$

$Z_w = \{a, c\}$

c)



$f\colon X \to Y$

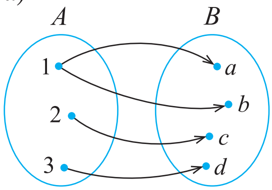
Dziedzina:

$X = \{-2, 1, 3, 4\}$

$Z_w = \{3\}$

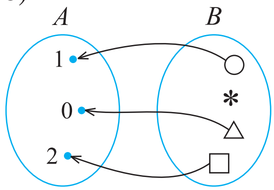
- Przyporządkowania, które nie są funkcjami:

a)



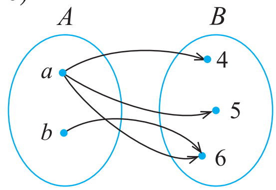
Argumentowi 1 przyporządkowano dwie wartości: a i b.

b)



Argumentowi $*$ nie przyporządkowano żadnej wartości.

c)



Argumentowi a przyporządkowano trzy wartości: 4, 5 i 6.

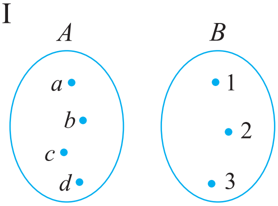
ĆWICZENIE 2.

Przerysuj i uzupełnij grafy, dorysowując strzałki tak, aby otrzymać funkcję ze zbioru:

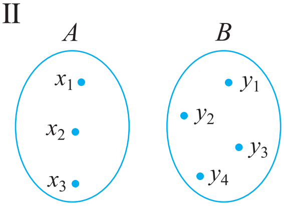
a) A do zbioru B, b) B do zbioru A.

Czy zawsze jest to możliwe?

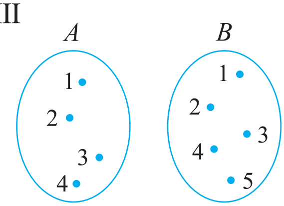
I



II



III



Definicja

Funkcję, której dziedzina i zbiór wartości są zbiorami liczbowymi, nazywamy **funkcją liczbową** (funkcją liczbowo-liczbową).

Zapis $f\colon x \to y = f(x)$ oznaczać będzie, że funkcja f argumentowi x przyporządkowuje wartość $y = f(x)$.

ĆWICZENIE 3.

Funkcja h przedstawiona jest za pomocą tabelki. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu. Zapisz jej dziedzinę oraz zbiór wartości.

x	–3	–2	0	1	4	5
$h(x)$	–1	0	3	–1	0	2

Nie zawsze dziedzina oraz zbiór wartości funkcji są zbiorami skończonymi, np.

- $f\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ – funkcja określona na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich $\boldsymbol{R}_+$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$. Przykładowo: przyporządkowanie $x \to \frac{1}{x}$, które liczbie rzeczywistej dodatniej przyporządkowuje odwrotność tej liczby.

- $g: \boldsymbol{N}_+ \rightarrow \boldsymbol{R}$ – funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych dodatnich $\boldsymbol{N}_+$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$. Przykładowo: przyporządkowanie $n \rightarrow \frac{1}{5}n$, które liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje piątą część tej liczby.

Funkcję możemy określić za pomocą:
- grafu,
- tabelki,
- zbioru uporządkowanych par,
- wzoru, podając jednocześnie dziedzinę funkcji,
- wykresu,
- opisu słownego.

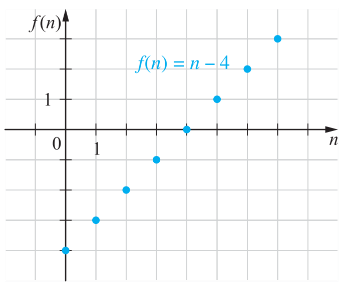
W uporządkowanej parze elementów (x, y) jest określona kolejność występowania elementów x i y. Pary (x, y) i (y, x) to dwie różne pary uporządkowane. Zauważmy, że zbiory $\{x, y\}$ i $\{y, x\}$ to zbiory równe.
Graf, tabelka, zbiór uporządkowanych par elementów, wykres to sposoby określania funkcji, których dziedziną jest zbiór skończony. Funkcje, których dziedziną jest zbiór nieskończony, określamy wzorem, słownie, za pomocą fragmentu wykresu (jeśli na podstawie fragmentu wykresu można przewidzieć cały wykres).

PRZYKŁAD 5.

Funkcję f, opisaną słownie w następujący sposób:„dowolnej liczbie naturalnej $n < 8$ przyporządkowujemy liczbę o 4 mniejszą”, możemy przedstawić również za pomocą:
- wzoru $f(n) = n - 4$, dla $n \in \boldsymbol{N}$ i $n < 8$,
- tabelki

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n) = n - 4$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3

- zbioru uporządkowanych par liczb $\{(0, -4), (1, -3), (2, -2), (3, -1), (4, 0), (5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$,
- wykresu



Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a wartościami są liczby ze zbioru $Z_w = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

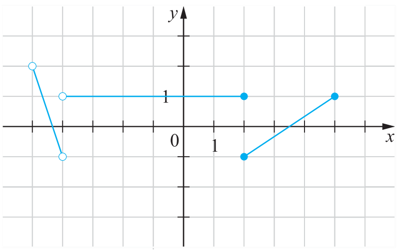
Definicja

Wykres funkcji liczbowej $f: X \rightarrow Y$ to zbiór punktów płaszczyzny postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$.

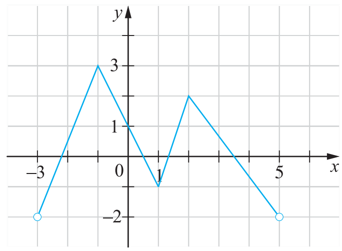
PRZYKŁAD 6.

Przyjrzyjmy się rysunkom. Jeśli na rysunku przedstawiono wykres funkcji, to podamy jej dziedzinę i zbiór wartości.

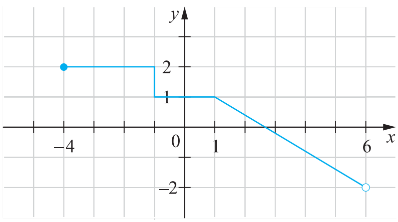
a)



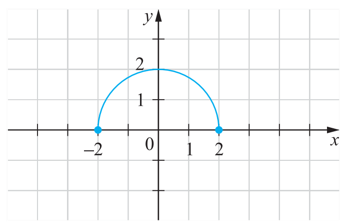
b)



c)



d)



a) To nie jest wykres funkcji, ponieważ argumentowi $x = 2$ przyporządkowane są dwie wartości: $y = 1$ i $y = -1$.

b) To jest wykres funkcji. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D = (-3;\ 5)$, a zbiorem wartości – zbiór $Z_w = (-2;\ 3\rangle$.

c) To nie jest wykres funkcji, ponieważ argumentowi $x = -1$ przyporządkowano nieskończenie wiele liczb z przedziału $\langle 1;\ 2\rangle$.

d) To jest wykres funkcji. Dziedziną jest zbiór $D = \langle -2;\ 2\rangle$, a zbiorem wartości – zbiór $Z_w = \langle 0;\ 2\rangle$.

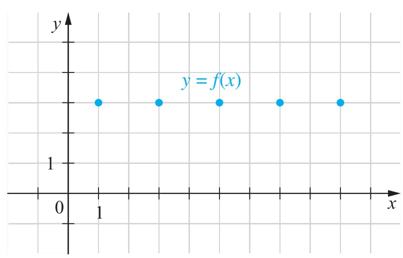
ZADANIA

1. Wskaż zdanie, które opisuje funkcję.

A. Każdej liczbie naturalnej większej od 0 przyporządkowano liczbę jej dzielników.
B. Liczbę całkowitą przyporządkowano jej wartości bezwzględnej.
C. Każdej liczbie naturalnej przyporządkowano jej potęgę o wykładniku naturalnym.
D. Liczbę rzeczywistą przyporządkowano kwadratowi tej liczby.

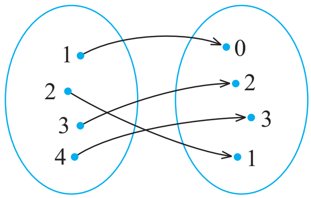
2. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji opisanej wzorem

A. $f(x) = \log_3 3^x$, $x \in \boldsymbol{N}_+$.
B. $f(x) = 3$, $x \in \boldsymbol{N}_+$.
C. $f(x) = 3$, x jest liczbą naturalną nieparzystą.
D. $f(x) = \log_x x^3$, $x \in \boldsymbol{N}_+$ i $x \neq 1$.

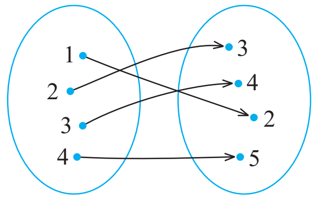


3. Funkcja f liczbie naturalnej dodatniej mniejszej od 5 przyporządkowuje liczbę o jeden większą. Wskaż graf, który opisuje tę funkcję.

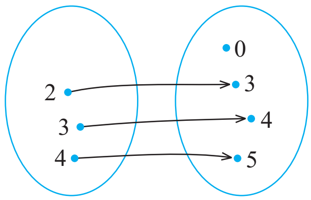
A.



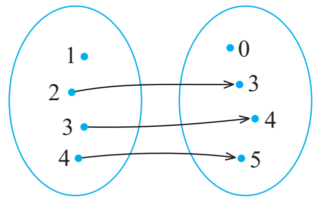
B.



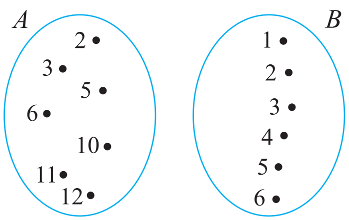
C.



D.



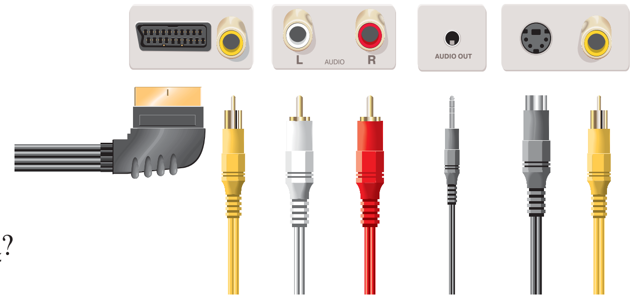
4. Uzupełnij graf tak, aby opisywał funkcję f, która danej liczbie ze zbioru A przyporządkowuje liczbę jej dzielników.



a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.
b) Przedstaw funkcję f w tabelce, za pomocą zbioru uporządkowanych par liczb oraz za pomocą wykresu.

5. Które z podanych przyporządkowań jest funkcją? Dla tych przyporządkowań, które opisują funkcję, określ dziedzinę i zbiór wartości. Podaj trzy dowolne argumenty oraz przyporządkowane im wartości funkcji.
a) Uczniowi twojej klasy przyporządkowany jest numer na liście w dzienniku.
b) Wielokątowi przyporządkowana jest suma miar jego kątów wewnętrznych.
c) Długości promienia okręgu przyporządkowana jest długość obwodu tego okręgu.
d) Liczbie parzystej przyporządkowujemy liczbę o 3 mniejszą.

6. Podaj przykład przyporządkowania, które będzie związane:
a) z korzystaniem z internetu,
b) z lekcją matematyki,
c) z zakupami w sklepie,
d) z zawodami szkolnymi.
Które przyporządkowanie jest funkcją?

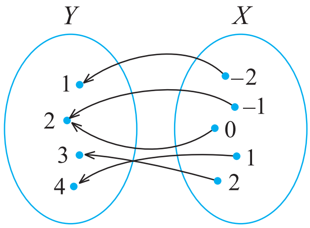


7. Przedstaw w inny sposób każdą z opisanych funkcji.

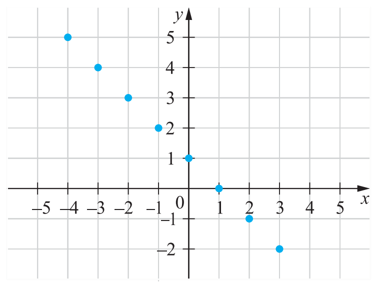
a) $\{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (1, -1), (2, -2)\}$

b) $y = 2x + 3,\ x \in \boldsymbol{C}$

c)

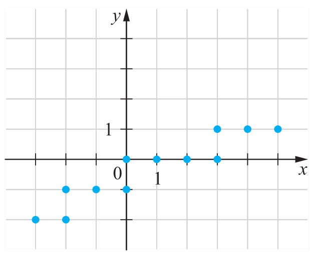


d)

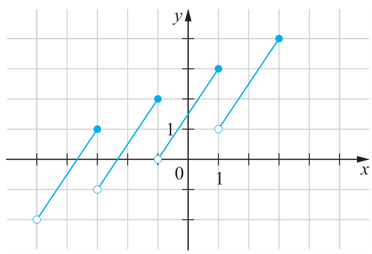


8. Na których rysunkach przedstawione są wykresy funkcji? Dla każdej funkcji podaj dziedzinę i zbiór wartości.

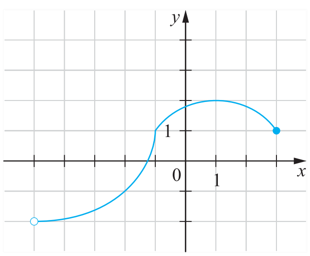
a)



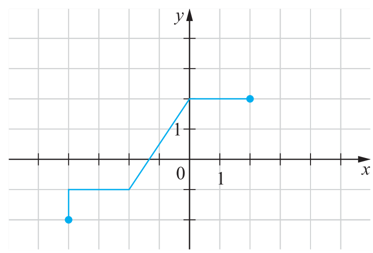
b)



c)



d)



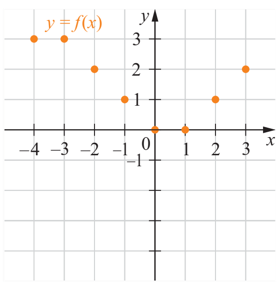
9. Dane są wykresy funkcji f, g i h. Dla każdej z nich:

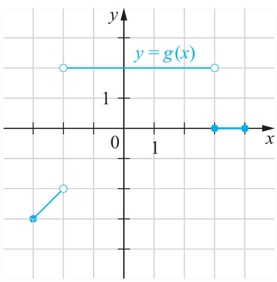
a) określ dziedzinę oraz zbiór wartości,

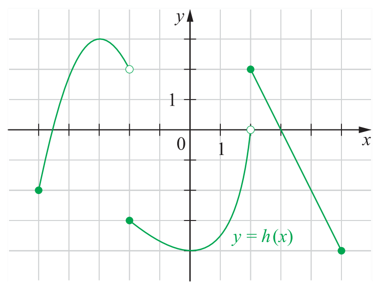
b) podaj cztery argumenty oraz wartości funkcji dla tych argumentów,

c) sprawdź, czy liczby -2, 3, 5 są argumentami tej funkcji,

d) podaj argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 0.



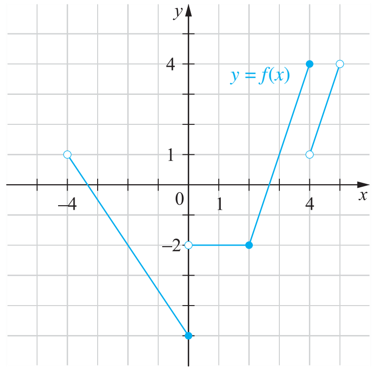




10. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

a) Podaj argumenty, dla których funkcja ma wartość równą 1, oraz argumenty, dla których funkcja ma wartość równą –2.

b) Jaką wartość ma funkcja f dla argumentów $x = 4$ oraz $x = 5$?



11. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -3x + 0{,}5$, $x \in \boldsymbol{R}$.

a) Oblicz wartości funkcji dla argumentów: $6, -3, \frac{3}{7}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

b) Dla jakich argumentów x wartości funkcji są równe odpowiednio: $9, -\frac{2}{5}, \sqrt{3}+2$?

BANK ZADAŃ z. 82–84 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Które z podanych przyporządkowań jest funkcją?

A. Każdej spółce na giełdzie przyporządkowana jest wartość jej akcji w danym dniu w momencie zamknięcia notowań.

B. Każdej liczbie całkowitej przyporządkowany jest jej dzielnik.

C. Każdej liczbie dodatniej przyporządkowany jest wielokąt o polu równym tej liczbie.

D. Każdemu aktorowi przyporządkowany jest tytuł spektaklu, w którym gra główną rolę.

2. Funkcja f każdej liczbie naturalnej mniejszej od 10 przyporządkowuje połowę kwadratu tej liczby. Przedstaw funkcję na trzy wybrane sposoby.

3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -2x + 1$, $x \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{-1{,}5x+3}{2}$, $|x| < 5$ i $x \in \boldsymbol{C}$.

5. Opisz słownie trzy funkcje, których dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{N}_+$.

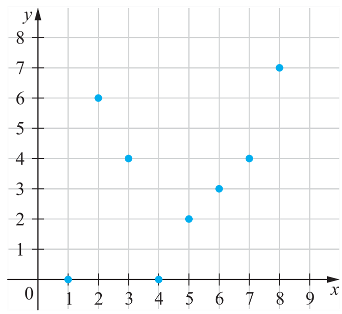
2.2 Wykres funkcji. Dziedzina i zbiór wartości funkcji

Przyporządkowanie będące funkcją możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

PRZYKŁAD 1.

Biuro turystyczne jest czynne w godzinach $9^{00}-17^{00}$. Niech x oznacza kolejne godziny urzędowania biura pewnego dnia, a y – liczbę osób odwiedzających biuro w kolejnych godzinach urzędowania. Rysunek przedstawia wykres funkcji, której dziedziną są kolejne godziny urzędowania biura, zatem $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, a zbiorem wartości – liczba osób odwiedzających biuro $Z_w = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}$.

Z wykresu możemy odczytać, że:
- w pierwszej i czwartej godzinie urzędowania biura nie odwiedził żaden klient,
- w ostatniej godzinie urzędowania biuro odwiedziło najwięcej klientów,
- w drugiej połowie dnia do biura przyszło więcej interesantów niż w pierwszej,
- tego dnia biuro odwiedziło 26 klientów.



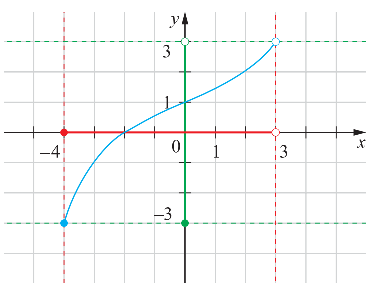
ĆWICZENIE 1.

Przedstaw opisane w przykładzie 1. przyporządkowanie za pomocą zbioru uporządkowanych par liczb. Wymień argumenty, dla których wartości tego przyporządkowania są równe.

PRZYKŁAD 2.

Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji liczbowej. Na podstawie wykresu określmy dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

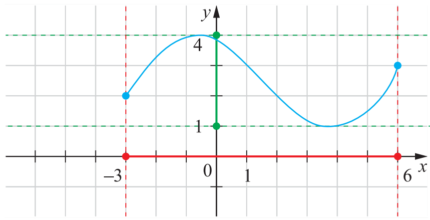
a)



Wykresem funkcji jest linia ciągła. Pomocnicze linie pionowe i poziome poprowadzone przez końce wykresu danej funkcji wyznaczają na osiach układu współrzędnych odpowiednio dziedzinę i zbiór wartości funkcji. Zauważmy, że punkt o współrzędnych (3, 3) nie należy do wykresu funkcji. Mamy zatem:

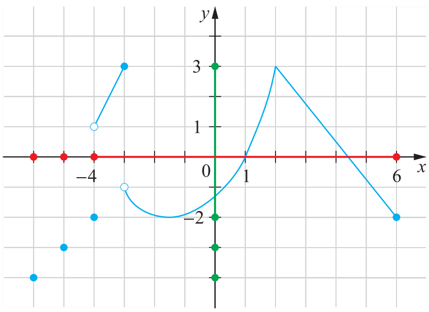
$D = \langle -4; 3)$, $\quad Z_w = \langle -3; 3)$

b)



Poprowadźmy proste pionowe i poziome przez punkty wyznaczające minimalny obszar, w którym zawarty jest wykres funkcji. Ponieważ wykresem funkcji jest linia ciągła, więc:
$D = \langle -3;\ 6\rangle$, $Z_w = \langle 1;\ 4\rangle$

c)

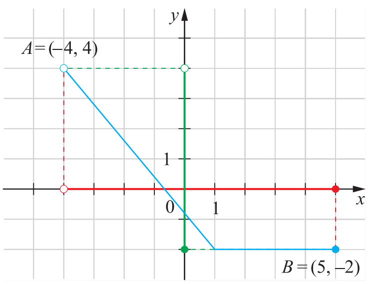


$D = \{-6, -5\} \cup \langle -4;\ 6\rangle$
$Z_w = \{-4, -3\} \cup \langle -2;\ 3\rangle$

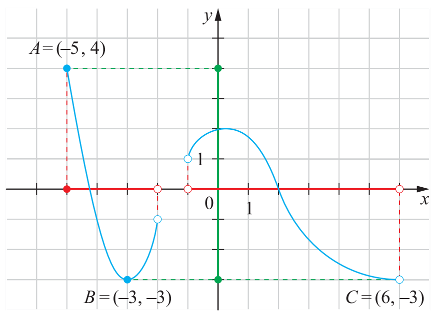
ĆWICZENIE 2.

Na podstawie wykresu funkcji podaj jej dziedzinę oraz zbiór wartości.

a)



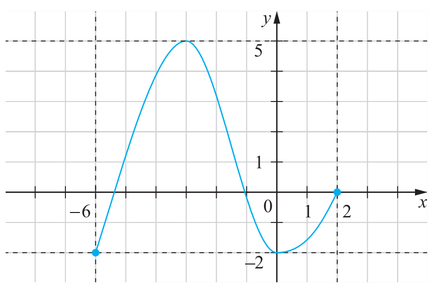
b)



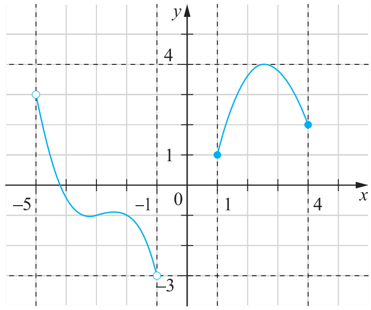
PRZYKŁAD 3.

Naszkicujmy przykładowy wykres funkcji g, której dziedzina i zbiór wartości są równe:
a) $D_g = \langle -6;\ 2\rangle$, $Z_w = \langle -2;\ 5\rangle$,
b) $D_g = (-5;\ -1) \cup \langle 1;\ 4\rangle$, $Z_w = (-3;\ 4\rangle$.

a) Rysujemy proste pionowe przechodzące przez punkty $(-6,\ 0)$ i $(2,\ 0)$ oraz proste poziome przechodzące przez punkty $(0,\ -2)$ i $(0,\ 5)$. Proste te wyznaczają obszar, w którym szkicujemy przykładowy wykres funkcji g spełniającej warunki zadania.



b) Rysujemy proste pionowe przechodzące przez punkty $(-5, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ i $(4, 0)$ oraz proste poziome przechodzące przez punkty $(0, -3)$ i $(0, 4)$. Proste te wyznaczają dwa obszary, w których szkicujemy przykładowy wykres funkcji g spełniającej warunki zadania.



ĆWICZENIE 3.

Naszkicuj wykres funkcji f, mając podaną jej dziedzinę oraz zbiór wartości.

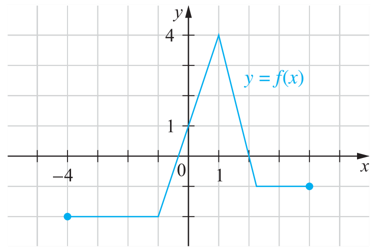
a) $D_f = (-5; 4)$, $Z_w = \langle -3; 6\rangle$

b) $D_f = \{1, 2, 3\} \cup \langle 5; 8\rangle$, $Z_w = (-5; -1) \cup (0; 4\rangle$

PRZYKŁAD 4.

Odczytajmy na podstawie wykresu funkcji jej wartości dla argumentów: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

$f(-1) = -2, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 0$



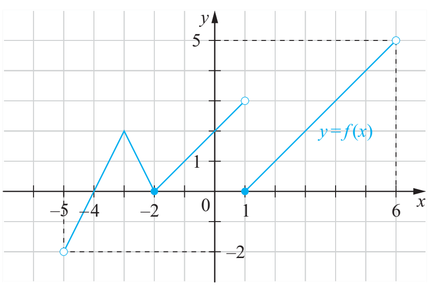
Definicja

Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy taki argument $x \in D_f$, dla którego $f(x) = 0$.

PRZYKŁAD 5.

Z danego wykresu funkcji f odczytajmy jej dziedzinę, zbiór wartości oraz, jeśli istnieją, miejsca zerowe.

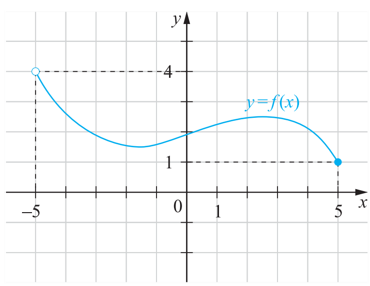
a)



$D_f = (-5; 6)$, $Z_w = (-2; 5)$

Miejsca zerowe: $x = -4$, $x = -2$, $x = 1$.

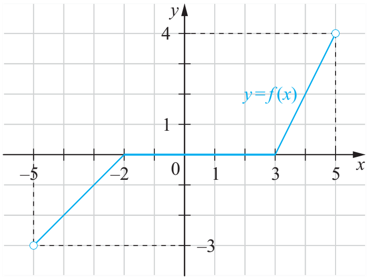
b)



$D_f = (-5; 5\rangle$, $Z_w = \langle 1; 4)$

Funkcja nie ma miejsc zerowych.

c)



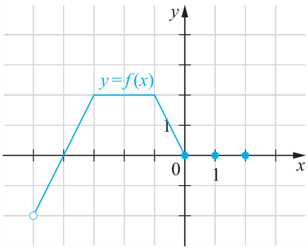
$D_f = (-5;\ 5)$, $Z_w = (-3;\ 4)$

Dla argumentów $x \in \langle -2;\ 3 \rangle$ wykres pokrywa się z osią x, zatem dla każdego argumentu z tego przedziału $f(x) = 0$. Zgodnie z definicją miejscami zerowymi tej funkcji są wszystkie liczby $x \in \langle -2;\ 3 \rangle$.

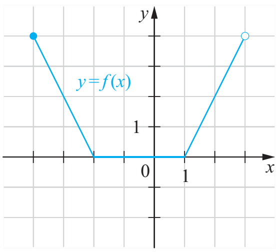
ĆWICZENIE 4.

Odczytaj dziedzinę, zbiór wartości oraz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji f przedstawionej za pomocą wykresu.

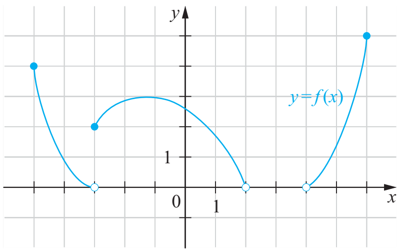
a)



b)



c)



ZADANIA

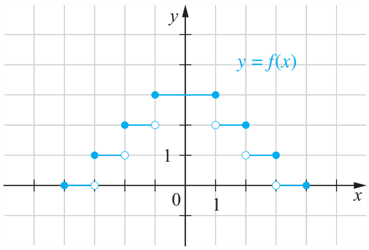
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór

A. $\{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

B. $\{0, 1, 2, 3\}$

C. $\langle -4;\ 4 \rangle$

D. $\langle 0;\ 3 \rangle$



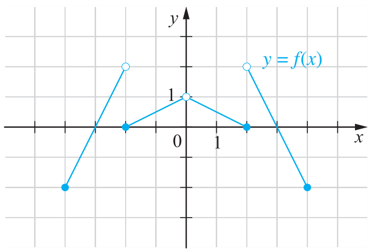
2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Wobec tego

A. $D_f = \langle -2;\ 2 \rangle$, $Z_w = \langle -4;\ 4 \rangle$

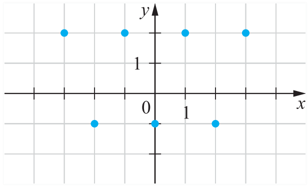
B. $D_f = \langle -4;\ 4 \rangle$, $Z_w = \langle -2;\ 2)$

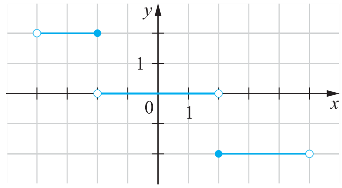
C. $D_f = \langle -2;\ 2)$, $Z_w = \langle -4;\ 0) \cup (0;\ 4 \rangle$

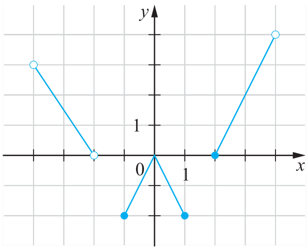
D. $D_f = \langle -4;\ 0) \cup (0;\ 4 \rangle$, $Z_w = \langle -2;\ 2)$

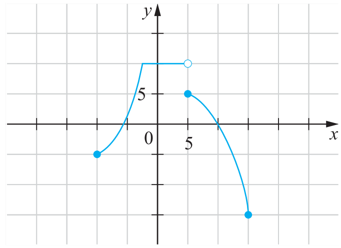


3. Z podanego wykresu funkcji odczytaj jej dziedzinę oraz zbiór wartości. Podaj wartości funkcji dla argumentów: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

a) 

b) 

c) 

d) 

4. Narysuj wykres funkcji, jeśli:

a) dziedziną tej funkcji jest przedział $(-3;\ 5)$, zbiorem wartości – przedział $\langle -2;\ 4\rangle$ i funkcja ma dwa miejsca zerowe,

b) dziedziną tej funkcji jest zbiór $(-1;\ 2) \cup (3;\ 5)$, zbiorem wartości – zbiór $\{-1,\ 0,\ 1\}$ i funkcja ma trzy miejsca zerowe.

Czy w każdym przypadku jest tylko jedna taka funkcja?

5. Naszkicuj wykres funkcji f spełniającej następujące warunki:

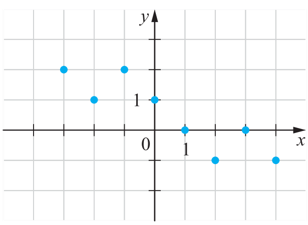
a) $D_f = (-3;\ 6)$, $Z_w = (-1;\ 5)$, miejsca zerowe: $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$,

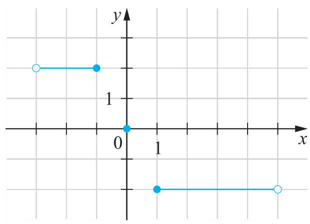
b) $D_f = \langle -4;\ -1) \cup (2;\ 8\rangle$, $Z_w = (-4;\ 3\rangle$, miejsca zerowe: $x = -2$, $x = 5$,

c) $D_f = \{-1,\ 3\} \cup \langle 4;\ 7\rangle$, $Z_w = \langle -2;\ -1\rangle \cup \langle 0;\ 6\rangle$, miejsce zerowe $x = -1$,

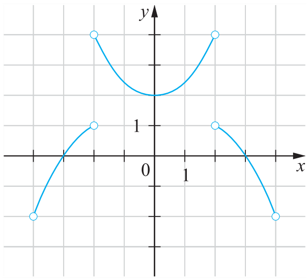
d) $D_f = \langle -5;\ 2\rangle$, $Z_w = (0;\ 6\rangle$, brak miejsc zerowych.

6. Na podstawie wykresu funkcji określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji. Odczytaj jej miejsca zerowe.

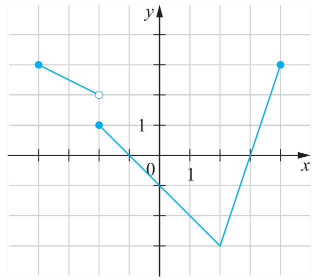
a) 

b) 

c)

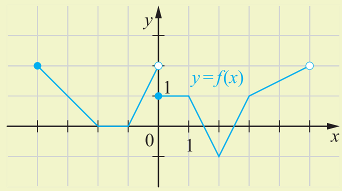


d)



BANK ZADAŃ z. 85–89 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?



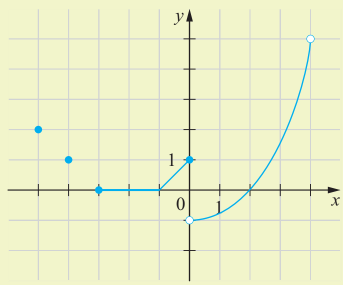
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Wobec tego

A. $Z_w = \langle -1;\ 2)$.

B. funkcja f ma cztery miejsca zerowe.

C. funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

D. $f(0) = 1$ oraz $f(0) = 2$.



2. Odczytaj dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku.

3. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji:

a) która ma trzy miejsca zerowe: $x = -4$, $x = 1$, $x = 3$,

b) której dziedziną jest zbiór $D = (-4;\ 1) \cup (3;\ 7)$,

c) której zbiorem wartości jest zbiór $Z_w = (1;\ 3)$,

d) której $D = (-2;\ 2) \cup (3;\ 5)$, $Z_w = (-3;\ 3)$ oraz funkcja ma dwa miejsca zerowe $x = -1$ i $x = 4$.

4. Narysuj wykres funkcji, której $D = (-4;\ 5)$, a $Z_w = \{1,\ 2,\ 3\}$.

2.3 Wzór funkcji. Dziedzina i zbiór wartości funkcji

Teraz zajmiemy się funkcjami opisanymi za pomocą wzoru. Bezpośrednio z niego będziemy wyznaczali dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe funkcji.

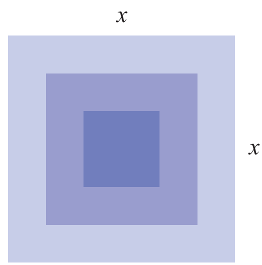
PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Wyrażenie opisujące funkcję f ma sens liczbowy, gdy mianownik ułamka jest różny od 0, czyli $x - 1 \neq 0$, zatem $x \neq 1$. Dziedzinę funkcji f możemy zapisać w postaci sumy przedziałów $D_f = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

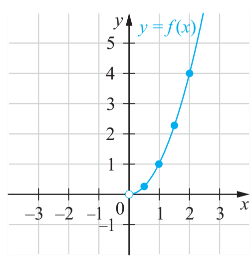
PRZYKŁAD 2.

Pole kwadratu P zmienia się w zależności od długości boku x. Zdanie to opisuje funkcję f, której argumentami są liczby wyrażające długości boku kwadratu. Możemy ją opisać wzorem $f(x) = x^2$. Wzór ten ma sens liczbowy dla każdej liczby rzeczywistej, ale długość boku kwadratu jest liczbą dodatnią, zatem $D_f = \boldsymbol{R}_+$. W celu sporządzenia wykresu tej funkcji znajdujemy punkty, których współrzędne spełniają równość $y = x^2$.



x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = x^2$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Zaznaczamy te punkty w układzie współrzędnych, a następnie je łączymy. Otrzymana krzywa jest wykresem funkcji $y = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}_+$.



Na podstawie wykresu funkcji stwierdzamy, że:
- im większy argument (długość boku), tym większa wartość funkcji (pole kwadratu),
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $Z_w = \boldsymbol{R}_+$.

ĆWICZENIE 1.

Napisz wzór funkcji opisującej obwód kwadratu w zależności od długości boku x. Naszkicuj wykres funkcji, podaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Czy funkcja ma miejsce zerowe?

PRZYKŁAD 3.

Określmy dziedzinę funkcji opisanej wzorem:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \sqrt{2-x}$, c) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, d) $f(x) = 5$.

a) Do dziedziny funkcji f należą wszystkie liczby rzeczywiste, dla których wyrażenie opisujące funkcję ma sens liczbowy, więc $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ i $x \neq -1$. Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Wzór funkcji f możemy zapisać inaczej, wykorzystując wzór skróconego mnożenia: $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$. Jednak dziedzinę funkcji zawsze określamy dla jej pierwotnej postaci.

b) Wzór funkcji f ma sens liczbowy, jeżeli zgodnie z definicją pierwiastka kwadratowego spełniony jest warunek $2 - x \geqslant 0$, zatem $x \leqslant 2$, $D_f = (-\infty;\ 2\rangle$.

c) Warunek $x^2 + 3 \geqslant 0$ jest spełniony dla dowolnej liczby rzeczywistej, stąd $D_f = \boldsymbol{R}$.

d) Funkcja f jest funkcją stałą, która dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ przyjmuje tę samą wartość. Stąd $D_f = \boldsymbol{R}$.

PRZYKŁAD 4.

Obliczmy wartości funkcji $f(x) = \frac{2}{x-2}$ dla liczb ze zbioru $\left\{-3,\ -\frac{3}{4},\ \sqrt{3},\ 2\right\}$.

Na początku określamy dziedzinę funkcji: $D_f = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Liczba 2 nie należy do dziedziny funkcji, ponieważ dla $x = 2$ wyrażenie $\frac{2}{x-2}$ nie ma sensu liczbowego.

Obliczamy wartości funkcji f dla pozostałych liczb z podanego zbioru.

$f(-3) = \frac{2}{-3-2} = -\frac{2}{5}$ $\qquad f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{-\frac{3}{4}-2} = \frac{2}{-\frac{11}{4}} = -\frac{8}{11}$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4} = -2\left(\sqrt{3}+2\right)$$

ĆWICZENIE 2.

Oblicz wartość funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ dla liczb ze zbioru $\left\{-4,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \sqrt{2},\ 2\frac{1}{3}\right\}$,

b) $f(x) = x^2 - 1$ dla liczb ze zbioru $\left\{-2,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0{,}(3),\ \sqrt{2}-1,\ 3\frac{1}{2}\right\}$.

PRZYKŁAD 5.

Wyznaczmy argumenty, dla których funkcja $f(x) = x^2 - 1$ przyjmuje wartość równą $\frac{1}{2}$.

Dziedziną funkcji jest $D_f = \boldsymbol{R}$.

Funkcja f przyjmuje wartość równą $\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 - 1 = \frac{1}{2}$.

Zatem $x^2 = \frac{3}{2}$, skąd $x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

ĆWICZENIE 3.

Wyznacz argumenty, dla których funkcja:

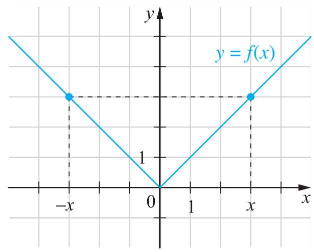
a) $f(x) = -x^2 + 2$ przyjmuje wartość równą -3,

b) $f(x) = \frac{3}{5}|x|$ przyjmuje wartość równą 15,

c) $f(x) = \sqrt{2x}$ przyjmuje wartość równą $\frac{1}{2}$.

PRZYKŁAD 6.

Wyznaczmy zbiór wartości funkcji $f(x) = |x|, x \in \boldsymbol{R}$.



Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej liczby $|x| \geqslant 0$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $Z_w = \langle 0; +\infty)$.

Przed wyznaczeniem miejsc zerowych funkcji należy określić jej dziedzinę.
Jeżeli funkcja opisana jest tylko wzorem, to należy określić zbiór, dla którego ten wzór ma sens liczbowy.

PRZYKŁAD 7.

Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{2 - x^2}{\sqrt{x - 1}}$

a) $D_f = \boldsymbol{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$ Iloczyn jest równy 0, jeżeli jeden z czynników jest równy 0.

$x - 1 = 0$ lub $x + 1 = 0$

zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Miejsca zerowe funkcji f to $x = 1$ oraz $x = -1$.

b) $D_f = (1; +\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - x^2}{\sqrt{x - 1}} = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right) = 0$

$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$

$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in D_f$, $-\sqrt{2} \notin D_f$

Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2}$.

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$ b) $f(x) = |x| + 3$

ZADANIA

1. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{3x}$, gdzie x jest liczbą nieujemną. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb dodatnich.

B. Funkcja nie ma miejsca zerowego.

C. Punkt $A = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ należy do wykresu funkcji.

D. $f(4) = 3\sqrt{2}$.

2. Funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ jest określona w zbiorze

A. N **B.** $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ **C.** $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ **D.** R

3. Funkcja $f(x) = \frac{3x}{2x^2 - 6x}$

A. ma miejsce zerowe $x = 3$.

B. ma miejsce zerowe $x = -3$.

C. ma miejsce zerowe $x = 0$.

D. nie ma miejsc zerowych.

4. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = 4x - \frac{2}{3}$

b) $f(x) = (6 - x)(x + 2)$

c) $f(x) = \sqrt{4x + 1}$

d) $f(x) = \frac{-4}{|x| + 1}$

5. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^3}$ d) $f(x) = \frac{\log_2 8}{x}$

6. Oblicz a, jeśli wiadomo, że punkt $A = (a, 3)$ należy do wykresu funkcji f.

a) $f(x) = 3x - 2$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = x^3 - 5$

7. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2 - 3x$ jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Wyznacz D_f.

8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

b) $f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{|x + 3|}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 + \sqrt{3}}{x - 0{,}5}$

9. Podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = 3 - 4x,\ D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $f(x) = -x^2 + 3x,\ D_f = \{-3, -1, \sqrt{2} - 1, 2, \sqrt{5}\}$

c) $f(x) = 2\sqrt{1 + x},\ D_f = \langle 0; 2 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 2,\ D_f = (0; +\infty)$

e) $f(x) = \sqrt[3]{-3x},\ D_f = \{-9, -3, 0, 3, 9\}$

10. Podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x)$ jest resztą z dzielenia liczby naturalnej x przez 5.

b) Liczbie naturalnej n przyporządkowana jest liczba $5n - 1$.

c) $f: a \rightarrow 3a - 4, a \in \boldsymbol{C}_{-}$

11. Obwód prostokąta jest równy 100. Podaj wzór funkcji $y = P(x)$ opisującej pole prostokąta w zależności od długości jego boku x. Określ dziedzinę tej funkcji.

12. W baku samochodu znajduje się 48 l benzyny. Średnie zużycie paliwa na 100 km wynosi 6 l.

a) Sporządź tabelkę i narysuj wykres funkcji opisującej ilość benzyny w baku w zależności od liczby przejechanych kilometrów.

b) Podaj dziedzinę funkcji.

c) Ile benzyny pozostanie w baku po przejechaniu 300 km?

d) Wskaźnik rezerwy paliwa zapala się, jeżeli w baku pozostało 5 l paliwa. Po przejechaniu ilu kilometrów bez tankowania zapali się lampka wskaźnika?

e) Czy tym samochodem można przejechać 675 km bez tankowania?

BANK ZADAŃ z. 90–94 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4}$ jest zbiór

A. $D_f = \{-2, 2\}$

B. $D_f = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

C. $D_f = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

D. $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$. W takim razie

A. $x = -3$ i $x = 3$ to miejsca zerowe funkcji.

B. $x = -3$ jest miejscem zerowym funkcji.

C. $x = 3$ jest miejscem zerowym funkcji.

D. funkcja nie ma miejsc zerowych.

3. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = -5x - 1$ b) $g(x) = \sqrt{x + 9}$ c) $h(x) = \frac{x^2}{2x + 4}$

4. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

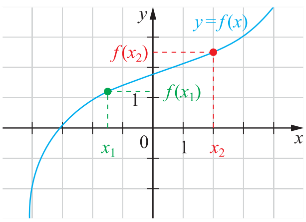
a) $y = 2(x - 3) - 2$ b) $y = \sqrt{4 + x}$ c) $y = \frac{x - 3}{x + 1}$

5. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = -\sqrt{2}x + 1, x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

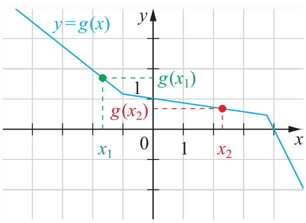
6. Zaproponuj wzór funkcji, która ma dwa miejsca zerowe $x = 2$ i $x = 4$. Określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

2.4 Monotoniczność funkcji

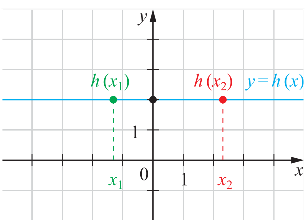
PRZYKŁAD 1.

a) 

Na wykresie przedstawiono przyporządkowanie, w którym równocześnie ze wzrostem wartości argumentów rosną wartości funkcji f. Mówimy wtedy, że funkcja f jest rosnąca.
Jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

b) 

Na wykresie zilustrowano przyporządkowanie g, w którym w miarę wzrostu wartości argumentów maleją wartości funkcji. Mówimy wtedy, że funkcja g jest malejąca.
Jeśli $x_1 < x_2$, to $g(x_1) > g(x_2)$.

c) 

Na wykresie zilustrowano przyporządkowanie h, w którym wartości funkcji są stałe i wynoszą 2. Mówimy wtedy, że funkcja h jest stała.
Jeśli $x_1 < x_2$, to $h(x_1) = h(x_2)$.

Definicja

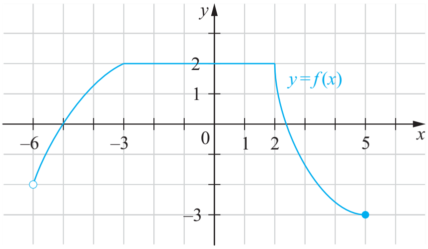
Funkcję f nazywamy:

- **rosnącą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in D_f$ spełniony jest warunek $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- **malejącą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in D_f$ spełniony jest warunek $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- **stałą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in D_f$ spełniony jest warunek $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcje rosnące, malejące lub stałe w całej dziedzinie nazywamy **funkcjami monotonicznymi**.

PRZYKŁAD 2.

Przyjrzyjmy się wykresowi funkcji f przedstawionej na rysunku.



Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = (-6; 5\rangle$.

Funkcja jest:

- rosnąca w przedziale $(-6; -3\rangle$,
- stała w przedziale $\langle -3; 2\rangle$,
- malejąca w przedziale $\langle 2; 5\rangle$.

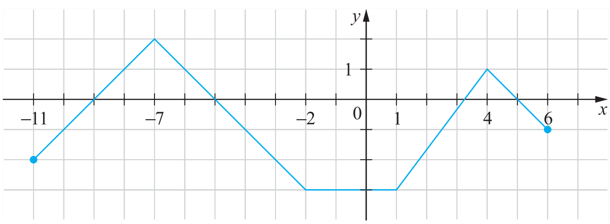
Funkcja ta nie jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie – o takiej funkcji mówimy, że jest **monotoniczna przedziałami**. Przedziały, w których funkcja jest odpowiednio malejąca, rosnąca lub stała, nazywamy **przedziałami monotoniczności** funkcji.

Do funkcji monotonicznych zaliczamy także funkcje **niemalejące**, tzn. spełniające warunek: dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$, oraz **nierosnące**, tzn. spełniające warunek: dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

W przypadku funkcji monotonicznych przedziałami istotne jest, aby monotoniczność określać oddzielnie w każdym przedziale.

PRZYKŁAD 3.

Określmy przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.



Funkcja jest:

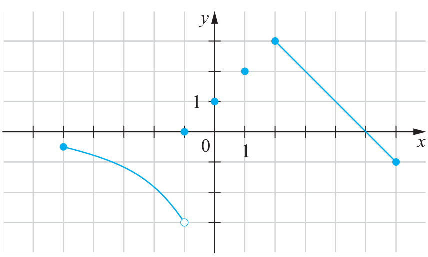
- rosnąca w przedziałach $\langle -11; -7\rangle$ oraz $\langle 1; 4\rangle$,
- malejąca w przedziałach $\langle -7; -2\rangle$ oraz $\langle 4; 6\rangle$,
- stała w przedziale $\langle -2; 1\rangle$.

Określając monotoniczność funkcji, podajemy **maksymalne** przedziały monotoniczności, tzn. przedziały domknięte, jeżeli dla argumentów będących końcami przedziału istnieje wartość funkcji.

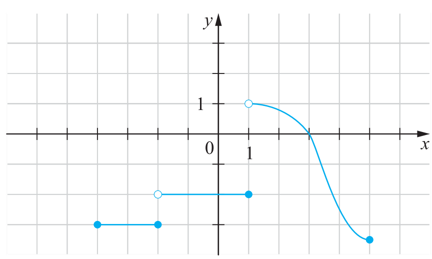
ĆWICZENIE 1.

Podaj zbiory argumentów, dla których funkcja przedstawiona na wykresie jest monotoniczna.

a)



b)



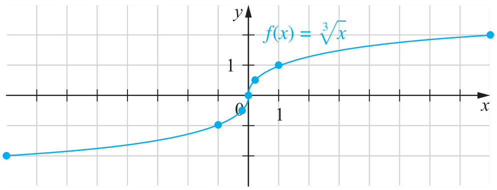
PRZYKŁAD 4.

Naszkicujmy wykres funkcji oraz określmy jej podstawowe własności.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $x \in \boldsymbol{R}$

a) Sporządźmy pomocniczą tabelkę.

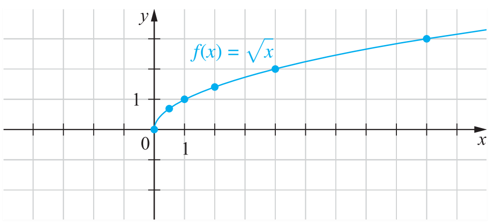
x	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2



- Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \boldsymbol{R}$.
- Zbiorem wartości jest zbiór $Z_w = \boldsymbol{R}$.
- Funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = 0$.
- Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.
- Funkcja jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

b)

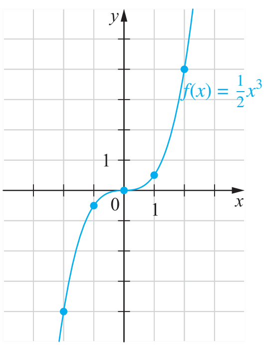
x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4	9
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	3



- $D_f = \langle 0; +\infty)$
- $Z_w = \langle 0; +\infty)$
- $x = 0$ jest miejscem zerowym funkcji.
- Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$.

c)

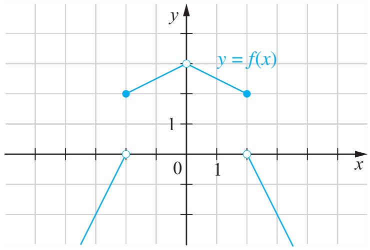
x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = \frac{1}{2}x^3$	-4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4



- $D_f = \boldsymbol{R}$
- $Z_w = \boldsymbol{R}$
- $x = 0$ jest miejscem zerowym funkcji.
- Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.
- Funkcja jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

ZADANIA

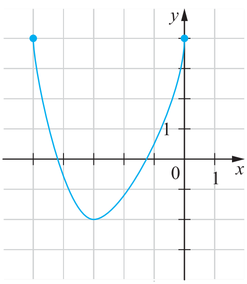
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej dla $x \neq 0$. Wówczas

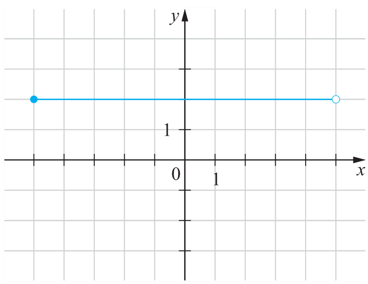


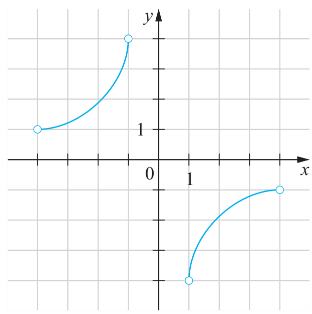
A. funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty;\ 0)$ oraz $(0;\ +\infty)$.
B. funkcja f jest malejąca w przedziale $(0;\ +\infty)$.
C. funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -2;\ 2\rangle$.
D. funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty;\ -2)$ oraz $(2;\ +\infty)$.

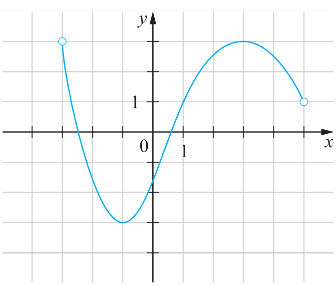
2. Funkcja określona za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{8}$, gdzie $x \in N_+$,
A. jest malejąca.
B. jest rosnąca.
C. jest stała.
D. dla argumentów parzystych ma wartości większe od wartości dla argumentów nieparzystych.

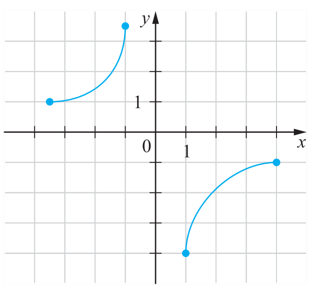
3. Wskaż, która funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała w całej dziedzinie, a która jest monotoniczna przedziałami. Podaj te przedziały.

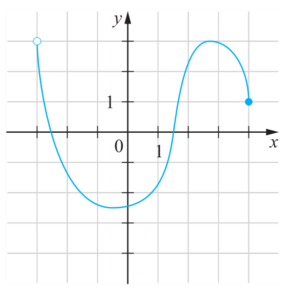
a)


b)


c)


d)


e)


f)


4. Naszkicuj wykres funkcji i określ, czy jest ona monotoniczna. Jeśli nie, to zbadaj, czy jest monotoniczna przedziałami. Podaj te przedziały.

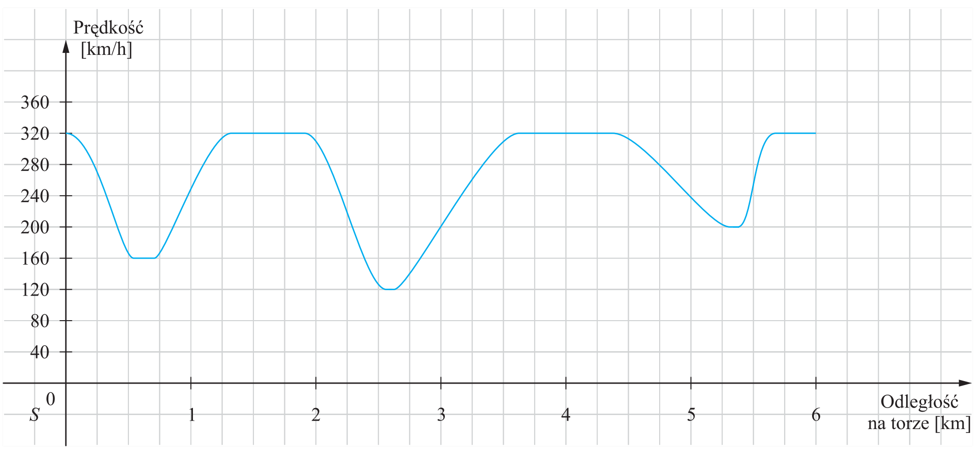
a) $f(x) = x^2 - 4,\ x \in (0; +\infty)$
b) $f(x) = x^2 - 4,\ x \in (-\infty; 0\rangle$
c) $f(x) = x^2 - 4,\ x \in \boldsymbol{R}$
d) $f(x) = |x|,\ x \in (0; +\infty)$
e) $f(x) = |x|,\ x \in (-\infty; 0\rangle$
f) $f(x) = |x|,\ x \in \boldsymbol{R}$

5. Naszkicuj wykres funkcji spełniającej poniższe warunki.

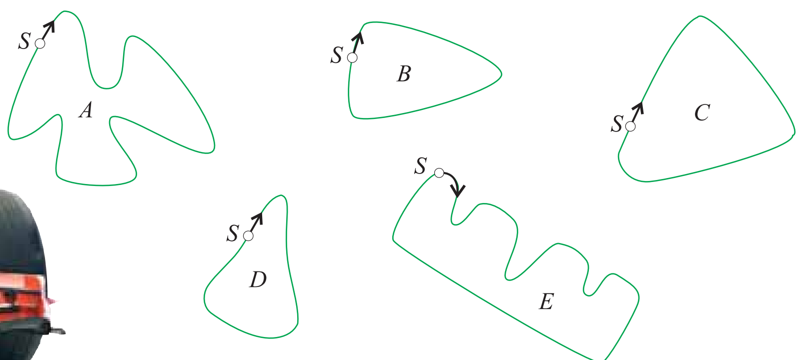
a) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -10; 10\rangle$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -10; -3\rangle$ oraz w przedziale $\langle 1; 5\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -3; 1\rangle$ oraz w przedziale $\langle 5; 10\rangle$, zbiorem miejsc zerowych funkcji jest $\{-4, -1, 3, 7\}$.

b) Dziedziną funkcji jest zbiór $(-3; 2) \cup (4; 8)$, funkcja jest rosnąca w przedziale $(-3; 2)$ oraz w przedziale $(4; 6\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 6; 8)$.

6. Na wykresie przedstawiono zmianę prędkości bolidu wyścigowego Formuły 1 podczas czwartego pełnego okrążenia na płaskim 6-kilometrowym torze wyścigowym.



Oto rysunki pięciu torów wyścigowych.

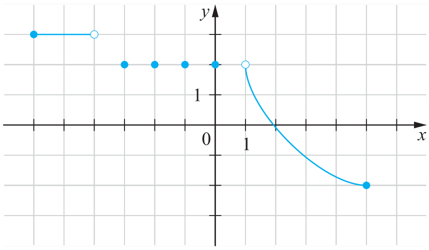


S – punkt startu

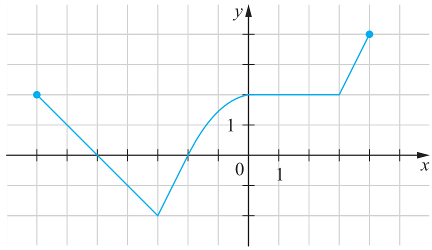
Po którym z nich najprawdopodobniej jechał samochód, skoro jego prędkość zmieniała się tak jak na wykresie? Odpowiedź uzasadnij.

7. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.

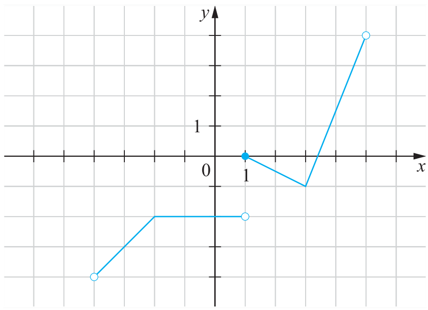
a)



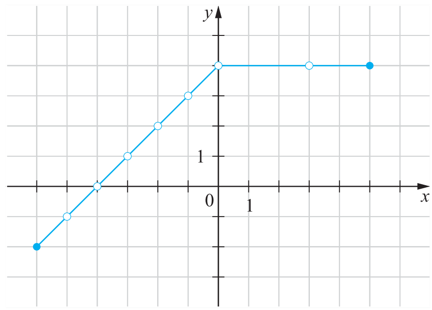
b)



c)



d)

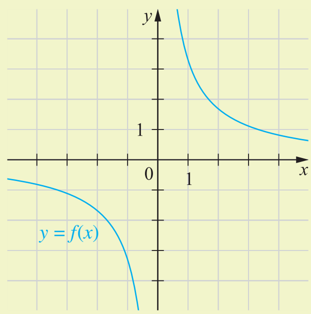


BANK ZADAŃ z. 95–99 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Funkcja ta jest

A. malejąca.
B. malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$ oraz rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$.
C. rosnąca w przedziałach $(-\infty; 0)$ oraz $(0; +\infty)$.
D. malejąca w przedziałach $(-\infty; 0)$ oraz $(0; +\infty)$.



2. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 3$ określona w przedziale $(-2; 4)$ jest

A. malejąca. **B.** rosnąca.
C. malejąca w zbiorze argumentów ujemnych i rosnąca w zbiorze argumentów dodatnich.
D. rosnąca w zbiorze argumentów ujemnych i malejąca w zbiorze argumentów dodatnich.

3. Naszkicuj przykładowe wykresy funkcji rosnącej, malejącej oraz stałej określonych w zbiorze:

a) $\boldsymbol{R}_-$, b) $(-3; +\infty)$, c) $\langle -4; 4\rangle$.

4. Narysuj wykres funkcji f rosnącej w przedziałach $(-9; -4\rangle$, $\langle 1; 3\rangle$ oraz $\langle 6; 9)$, a malejącej w przedziałach $\langle -4; 1\rangle$ oraz $\langle 3; 6\rangle$.

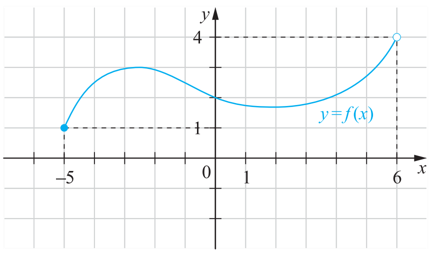
5. Narysuj wykres funkcji mającej trzy miejsca zerowe. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji.

2.5 Odczytywanie własności funkcji z wykresu

PRZYKŁAD 1.

Na podstawie wykresów funkcji liczbowych przeanalizujmy zbiory ich wartości.

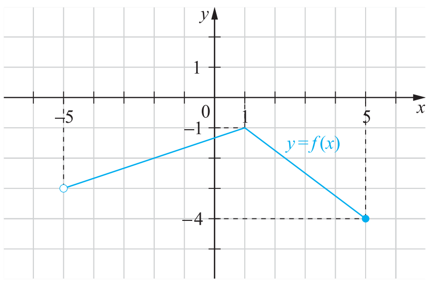
a)



Jeżeli funkcja f dla każdego argumentu $x \in D_f$ przyjmuje wartość dodatnią, to mówimy, że funkcja ma **znak dodatni**, tzn. dla każdego $x \in D_f$ $f(x) > 0$.

$D_f = \langle -5;\ 6),\ Z_w = \langle 1;\ 4)$

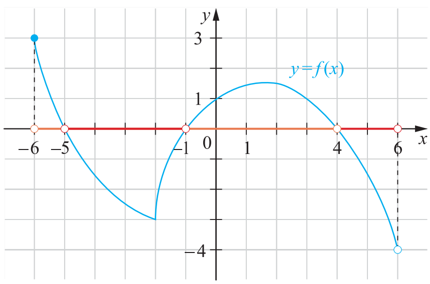
b)



Jeżeli funkcja f dla każdego argumentu $x \in D_f$ przyjmuje wartość ujemną, to mówimy, że funkcja ma **znak ujemny**, tzn. dla każdego $x \in D_f$ $f(x) < 0$.

$D_f = (-5;\ 5\rangle,\ Z_w = \langle -4;\ -1\rangle$

c)



Znak funkcji określamy również w przedziałach zawartych w dziedzinie funkcji.

- $D_f = \langle -6;\ 6\rangle,\ Z_w = (-4;\ 3\rangle$
- Dla $x \in \langle -6; -5)$ oraz $x \in (-1;\ 4)$ $f(x) > 0$, zatem w tych przedziałach funkcja ma znak dodatni.
- Dla $x \in (-5;\ -1)$ oraz $x \in (4;\ 6)$ $f(x) < 0$, zatem w przedziałach $(-5;\ -1)$ i $(4;\ 6)$ funkcja ma znak ujemny.

ĆWICZENIE 1.

Naszkicuj wykres funkcji f spełniającej jednocześnie trzy warunki:

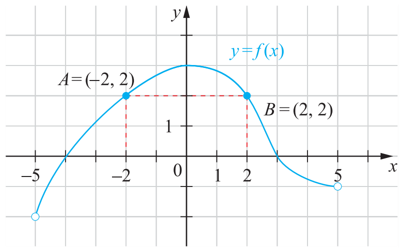
- $D_f = \langle -8;\ 7\rangle$,
- $Z_w = (-2;\ 4)$,
- w przedziale $\langle -8;\ -1)$ funkcja ma znak ujemny, a w przedziale $(-1;\ 7\rangle$ ma znak dodatni.

Czy ta funkcja ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to podaj je.

PRZYKŁAD 2.

Przeanalizujmy wartości funkcji liczbowej w określonych przedziałach, zawartych w dziedzinie funkcji.

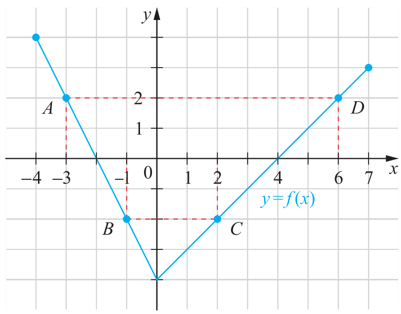
a)



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $(-5;\ 5)$.

- $f(x) \geqslant 2$ dla $x \in \langle -2;\ 2\rangle$
- $0 < f(x) < 2$ dla $x \in (-4;\ -2) \cup (2;\ 3)$

b)



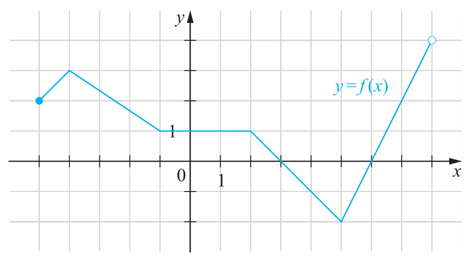
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -4;\ 7\rangle$.

- $f(x) > 2$ dla $x \in \langle -4;\ -3) \cup (6;\ 7\rangle$
- $f(x) < -2$ dla $x \in (-1;\ 2)$
- $-2 < f(x) < 2$ dla $x \in (-3;\ -1) \cup (2;\ 6)$

ĆWICZENIE 2.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Dla jakich argumentów x:

a) $f(x) \geqslant 0$,
b) $f(x) < 0$,
c) $f(x) > 1$,
d) $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$?



Definicja

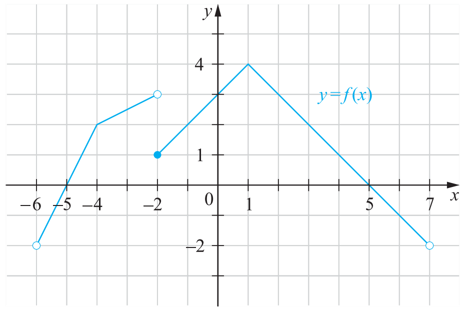
Funkcja liczbowa f przyjmuje dla $x_0 \in D_f$ **wartość największą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D_f$ $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Definicja

Funkcja liczbowa f przyjmuje dla $x_0 \in D_f$ **wartość najmniejszą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D_f$ $f(x) \geqslant f(x_0)$.

PRZYKŁAD 3.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytajmy z wykresu własności tej funkcji.



- $D_f = (-6;\ 7)$
- $Z_w = (-2;\ 4\rangle$
- Miejscami zerowymi są $x = -5$ oraz $x = 5$.
- Funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-6;\ -2)$ oraz $\langle -2;\ 1\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle 1;\ 7)$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-5;\ 5)$ oraz wartości ujemne dla $x \in (-6;\ -5) \cup (5;\ 7)$.
- Funkcja dla $x = 1$ ma wartość największą $y = 4$, nie ma natomiast wartości najmniejszej.

1) Rozważmy przedział $\langle -4;\ -2)$.
W tym przedziale funkcja f jest rosnąca. Najmniejszą wartość $y = 2$ przyjmuje dla $x = -4$. Funkcja nie ma wartości największej w tym przedziale, ponieważ argument $x = -2$ nie należy do rozważanego przedziału.
2) Rozważmy przedział $\langle 1;\ 5\rangle$.
W tym przedziale funkcja f jest malejąca. Największą wartość $y = 4$ przyjmuje dla $x = 1$, a najmniejszą $y = 0$ dla $x = 5$.

ĆWICZENIE 3.

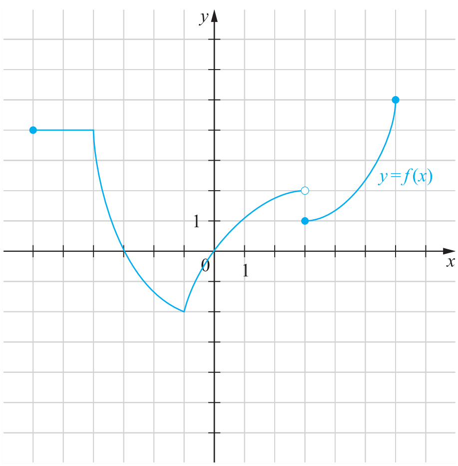
Dla funkcji określonej za pomocą wykresu w przykładzie 3 określ wartości najmniejszą i największą w podanym przedziale.

a) $(-5;\ -4\rangle$ b) $\langle -2;\ 3)$ c) $\langle -4;\ 0\rangle$ d) $(0;\ 5)$

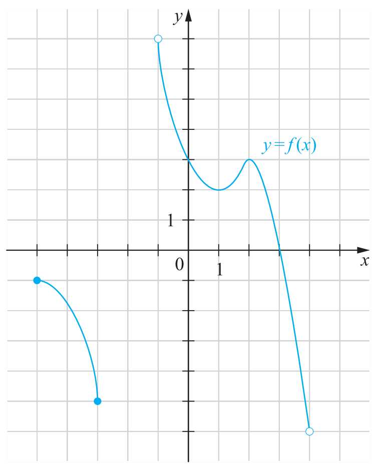
ĆWICZENIE 4.

Odczytaj z wykresu własności funkcji f.

a)

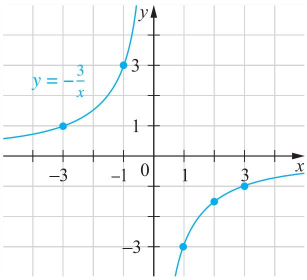


b)



PRZYKŁAD 4.

Naszkicujmy wykres funkcji $y = -\frac{3}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, a następnie przeanalizujmy własności tej funkcji w określonych przedziałach liczbowych.



x	-3	-1	1	2	3
$y=-\frac{3}{x}$	1	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1

- $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- $Z_W = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- Funkcja nie ma wartości najmniejszej ani największej.

1) Rozważmy przedział $(-\infty;\ -1\rangle$. W przedziale tym funkcja $y = -\frac{3}{x}$:
- jest rosnąca,
- nie ma wartości najmniejszej,
- dla $x = -1$ ma wartość największą $y = 3$,
- dla $x < -1$ zachodzi $0 < f(x) < 3$.

2) Rozważmy zbiór $\langle -1;\ 0) \cup (0;\ 1\rangle$. W zbiorze tym funkcja $y = -\frac{3}{x}$:
- jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -1;\ 0)$ oraz $(0; 1\rangle$,
- nie ma wartości najmniejszej ani największej,
- dla $x \in \langle -1; 0)$ $f(x) \in \langle 3;\ +\infty)$, dla $x \in (0;\ 1\rangle$ $f(x) \in (-\infty;\ -3\rangle$.

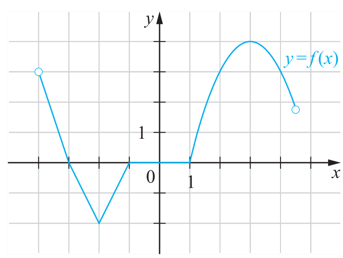
ĆWICZENIE 5.

Na podstawie wykresu funkcji określonej w przykładzie 4. znajdź wartości najmniejszą i największą w podanym przedziale.

a) $(-\infty;\ -3\rangle$ b) $(-\infty;\ -2\rangle$ c) $\langle 1;\ 3\rangle$ d) $(5;\ +\infty)$

ZADANIA

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



a) Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór

A. $\langle -2;\ 4\rangle$ **B.** $(-2;\ 4)$

C. $\langle -4;\ 4{,}5\rangle$ **D.** $(-4;\ 4{,}5)$

b) Największą wartością funkcji f jest

A. $y = -2$ **B.** $y = -4$

C. $y = 3$ **D.** $y = 4$

c) Funkcja f ma

A. dwa miejsca zerowe. **B.** trzy miejsca zerowe.

C. cztery miejsca zerowe. **D.** nieskończenie wiele miejsc zerowych.

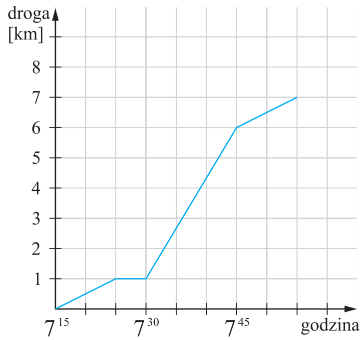
d) Funkcja przyjmuje wartości niedodatnie dla argumentów z przedziału

A. $(-4;\ -3) \cup (1;\ 3{,}5)$ **B.** $(-3;\ -1)$ **C.** $\langle -3;\ 1\rangle$ **D.** $\langle -1;\ 1\rangle$

2. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x)$, określonej dla $x \in (-2;\ 2)$, jest zbiór $Z_w = (-4;\ 3)$. Wówczas funkcja f

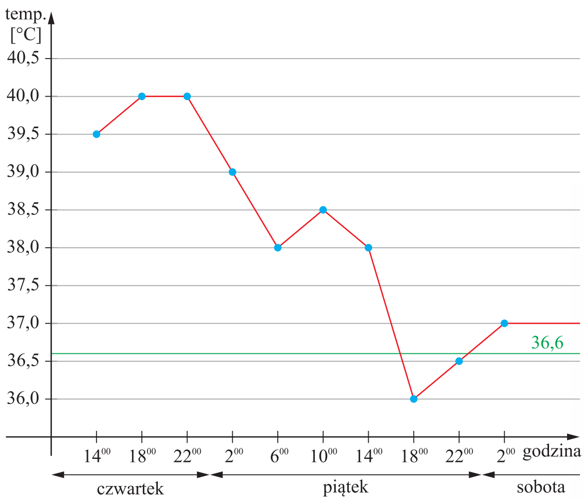
A. ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
B. ma wartość największą równą $y = 3$.
C. nie może być funkcją monotoniczną.
D. nie ma wartości najmniejszej ani wartości największej.

3. W drodze do pracy Ewa musi pokonać kilka etapów. Najpierw idzie pieszo z domu na przystanek autobusowy, potem jedzie autobusem, a następnie ponownie idzie pieszo do miejsca pracy. Na rysunku znajduje się wykres przedstawiający jej drogę w zależności od czasu.



a) Jaką odległość Ewa pokonuje autobusem?
b) Jaką odległość Ewa pokonuje pieszo?
c) Ile czasu zajmuje jej droga do pracy?
d) Z jaką prędkością jedzie autobus?
e) Ile czasu Ewa czeka na autobus?

4. Gorączkującego pacjenta przyjęto na oddział szpitalny o godzinie 14^{00}. Natychmiast podano mu odpowiednie leki. Temperaturę mierzono co 4 godziny. Na karcie chorego notowano wyniki pomiaru temperatury i sporządzono wykres.



a) Po jakim czasie zaobserwowano, że leki obniżają gorączkę?
b) O której godzinie zaobserwowano ponowny wzrost temperatury?
c) Jaką najniższą temperaturę miał pacjent?
d) Między którymi kolejnymi pomiarami nastąpił największy spadek temperatury u pacjenta?

5. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. W tabelce podano wartości funkcji dla kilku wybranych argumentów. Naszkicuj jeden z możliwych wykresów funkcji f, a następnie odczytaj podstawowe własności zaproponowanej funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	6	0	-2	5	7

6. Oblicz wartości funkcji dla kilku argumentów z podanego przedziału i naszkicuj wykres danej funkcji. Z wykresu odczytaj najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.

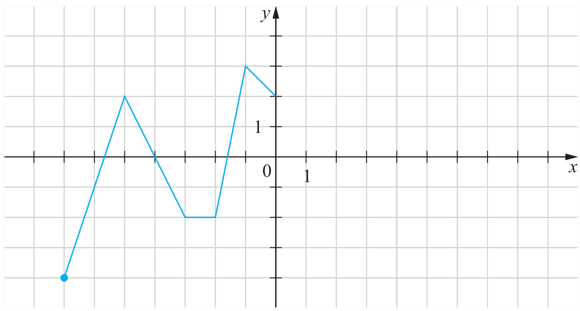
a) $f(x) = -2x + 1$ dla $x \in \langle -3; 4 \rangle$

b) $g(x) = 2 + x^2$ dla $x \in (-\infty; 3\rangle$

c) $h(x) = -3$ dla $x \in (-2; 2)$

d) $s(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in (-\infty; -4\rangle$

7. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej w przedziale $\langle -7; 5 \rangle$.



Dorysuj swoją propozycję brakującej części wykresu, a następnie:

a) podaj zbiór wartości funkcji,

b) wypisz miejsca zerowe funkcji,

c) odczytaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości największą i najmniejszą,

d) odczytaj przedziały monotoniczności funkcji,

e) podaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

8. Podaj argumenty, jeśli takie istnieją, dla których funkcja f przyjmuje wartości największą oraz najmniejszą.

a) Funkcja f jest określona i malejąca w przedziale $\langle -5; 12 \rangle$.

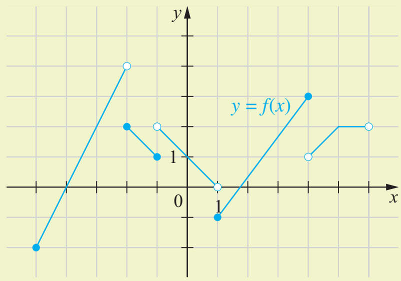
b) Funkcja f jest określona i rosnąca w przedziale $\langle 2; +\infty)$.

c) Funkcja f jest określona w przedziale $\langle -5; +\infty)$ i rosnąca w przedziale $\langle -5; -1 \rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; +\infty)$.

d) Funkcja f jest określona i stała w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$.

BANK ZADAŃ z. 100–105 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?



1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Zbiorem wartości funkcji jest $Z_w = \langle -2; 4 \rangle$.
B. Największą wartością funkcji jest $y = 3$.
C. Miejscem zerowym funkcji jest $x = 1$.
D. Funkcja nie ma wartości największej.

2. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x)$, określonej dla $x \in \langle -3; 5 \rangle$, jest zbiór $Z_w = \{-3, 1, 4\}$.
Funkcja ta

A. ma co najmniej jedno miejsce zerowe.
B. ma wartość najmniejszą $y = -3$.
C. jest rosnąca.
D. jest stała w całej dziedzinie.

3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2x + 4$ w przedziale $\langle -7; 10 \rangle$.

4. Dla jakiego argumentu funkcja malejąca i określona w przedziale $(-3; 5\rangle$ przyjmuje wartość najmniejszą, a dla jakiego – największą?

2.6 Rysowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach

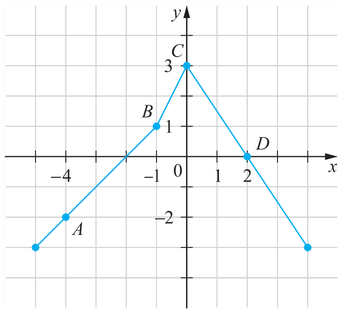
Na podstawie podanych własności funkcji możemy naszkicować jej wykres. Im więcej informacji znamy, tym nasz wykres będzie dokładniejszy.

PRZYKŁAD 1.

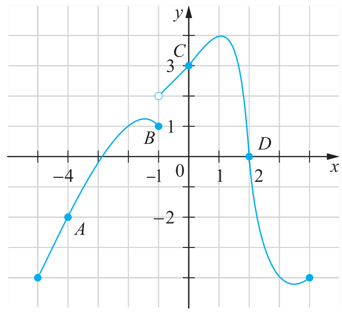
Narysujmy wykres funkcji określonej dla $x \in \langle -5;\ 4 \rangle$, do którego należą punkty: $A = (-4,\ -2)$, $B = (-1,\ 1)$, $C = (0,\ 3)$ i $D = (2,\ 0)$.

Na podstawie tych informacji narysujemy kilka wykresów funkcji i każdy z nich jest zgodny z warunkami zadania.

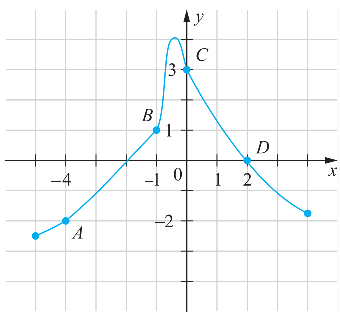
I



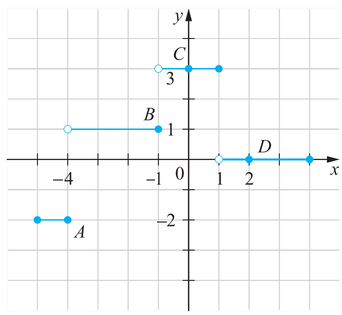
II



III



IV



ĆWICZENIE 1.

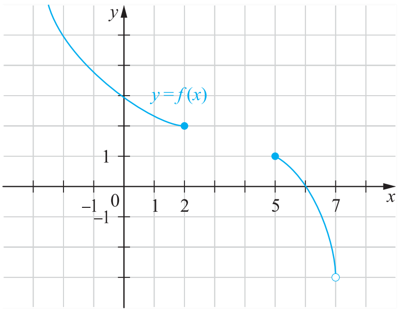
Z wykresów funkcji przedstawionych w przykładzie 1. odczytaj: zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, najmniejszą i największą wartość funkcji (o ile istnieją), zbiory argumentów, dla których wartości funkcji są dodatnie, oraz zbiory argumentów, dla których wartości funkcji są ujemne.

PRZYKŁAD 2.

Naszkicujmy wykres funkcji f, której dziedziną jest $D_f = (-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 5;\ 7)$, malejącej w każdym z przedziałów $(-\infty;\ 2\rangle$ i $\langle 5;\ 7)$. Podajmy inne jej własności.

W tym przypadku opis funkcji f również nie pozwala na jednoznaczne naszkicowanie jej wykresu. Możemy go wykonać na kilka sposobów i otrzymać funkcje o różnych własnościach.

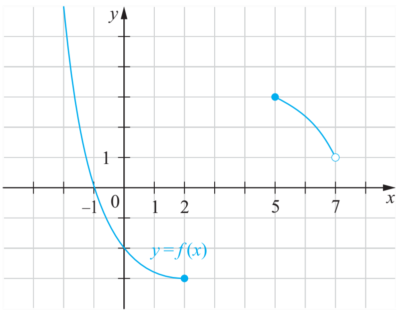
I



Własności funkcji f:

- $Z_w = (-3;\ 1\rangle \cup \langle 2;\ +\infty)$,
- miejsce zerowe funkcji to $x = 6$,
- funkcja jest monotoniczna, malejąca w całej dziedzinie,
- dla $x \in (-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 5;\ 6)$ wartości funkcji są dodatnie,
- dla $x \in (6;\ 7)$ wartości funkcji są ujemne.

II



Własności funkcji f:

- $Z_w = \langle -3;\ +\infty)$,
- miejsce zerowe funkcji to $x = -1$,
- funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, jest monotoniczna przedziałami,
- dla $x \in (-\infty;\ -1) \cup \langle 5;\ 7)$ wartości funkcji są dodatnie,
- dla $x \in (-1;\ 2\rangle$ wartości funkcji są ujemne.

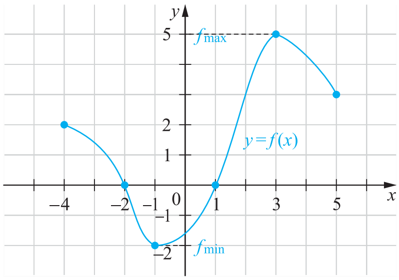
ĆWICZENIE 2.

Dziedziną funkcji jest zbiór $(-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 1;\ 6)$. Narysuj dwa różne wykresy funkcji o podanej dziedzinie, wiedząc, że funkcja ta jest rosnąca w całej dziedzinie.

PRZYKŁAD 3.

Naszkicujmy wykres funkcji f spełniającej następujące warunki:

- $D_f = \langle -4;\ 5\rangle$,
- $f(-4) = 2$, $f(5) = 3$,
- funkcja ma dwa miejsca zerowe $x = -2$ oraz $x = 1$,
- funkcja jest malejąca w przedziałach $\langle -4;\ -1\rangle$ oraz $\langle 3;\ 5\rangle$, a rosnąca – w przedziale $\langle -1;\ 3\rangle$,
- najmniejszą wartością funkcji jest $y = -2$, a największą jest $y = 5$.



Zaznaczmy w układzie współrzędnych charakterystyczne punkty należące do sporządzanego wykresu, a następnie połączmy je np. krzywą.
Stosujemy oznaczenia:
f_{max} – największa wartość funkcji w przedziale,
f_{min} – najmniejsza wartość funkcji w przedziale.

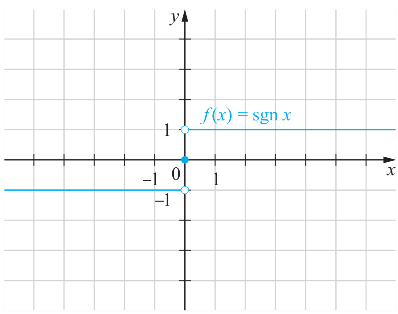
ĆWICZENIE 3.

Naszkicuj wykres innej funkcji spełniającej te same warunki co funkcja w przykładzie 3. Porównaj własności w określonych przedziałach naszkicowanej funkcji z własnościami funkcji podanej w przykładzie 3.

PRZYKŁAD 4.

Przeanalizujmy wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $D_f = \boldsymbol{R}$.
Funkcja f nazywana „znak” (łac. *signum* – znak) argumentom ujemnym przypisuje wartość -1, argumentom dodatnim wartość 1, a liczbie 0 wartość 0.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty;\ 0) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x \in (0;\ +\infty) \end{cases}$$

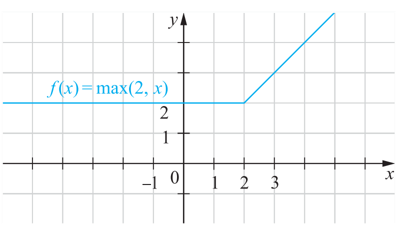


- $Z_w = \{-1,\ 0,\ 1\}$
- Miejscem zerowym jest $x = 0$.
- Dla $x < 0$ funkcja ma znak ujemny, dla $x > 0$ funkcja ma znak dodatni.

PRZYKŁAD 5.

Naszkicujmy wykres funkcji $f(x) = \max(2,\ x)$, $D_f = \boldsymbol{R}$.

Funkcję definiujemy następująco: $\max(2,\ x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$.



Np. $\max(2,\ 1) = 2$, $\max(2,\ 5) = 5$, wówczas $Z_w = \langle 2;\ +\infty)$. Analogicznie możemy zdefiniować funkcję $\min(2,\ x)$.

$$\min(2,\ x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \geqslant 2 \\ x & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

ĆWICZENIE 4.

Sporządź wykres funkcji $f(x) = 2\,\mathrm{sgn}\,x$, $D_f = \boldsymbol{R}$.

ĆWICZENIE 5.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \min(4,\ x)$. Podaj jej zbiór wartości.

ZADANIA

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-4;\ 4)$, zbiorem wartości przedział $\langle 1;\ 5)$, a ponadto $f(-3) = f(3) = 1$, $f(-1) = f(1) = 2$. Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-4;\ -3\rangle$ oraz $\langle 0;\ 3\rangle$ i rosnąca w przedziałach $\langle -3;\ 0\rangle$ oraz $\langle 3;\ 4)$. Wówczas funkcja f

A. ma wartość największą $y = 5$.
B. nie ma wartości najmniejszej.
C. ma dwa miejsca zerowe.
D. nie ma miejsc zerowych.

2. Zbiorem wartości funkcji f, określonej dla $x \in \boldsymbol{R}_+$, jest zbiór $Z_w = \boldsymbol{R}_-$. Wówczas

A. funkcja jest malejąca.
B. funkcja jest rosnąca.
C. funkcja nie ma wartości najmniejszej ani największej.
D. $f(n) > 0$ dla $n \in \boldsymbol{N}_+$.

3. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli masz daną jej dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Z_w. Czy jest jedna taka funkcja?

a) $D_f = \langle 3;\ 6\rangle,\ Z_w = \langle -3;\ 5\rangle$
b) $D_f = (-4;\ 2),\ Z_w = \langle 3;\ 7\rangle$
c) $D_f = (-\infty;\ 1\rangle,\ Z_w = (-1;\ 1)$
d) $D_f = \langle -3;\ +\infty),\ Z_w = (-2;\ 5\rangle$

4. Narysuj wykres funkcji f spełniającej podane warunki:

a) $D_f = \langle -6;\ 4\rangle$, $f(-6) = -3$, $f(4) = 5$, miejscem zerowym jest $x = 2$, wartością największą jest $y = 5$, a najmniejszą jest $y = -3$,
b) $D_f = \langle 2;\ 7\rangle$, $f(2) = -3$, $f(7) = -5$, funkcja nie ma miejsc zerowych, wartością największą jest $y = -1$, wartością najmniejszą jest $y = -5$,
c) $D_f = \langle -4;\ -1\rangle \cup \langle 1;\ 4\rangle$, funkcja jest rosnąca w obu przedziałach określoności, $f(-1) = 2$, $f(4) = -3$,
d) $Z_w = \langle -2;\ 1\rangle \cup \langle 4;\ +\infty)$, $f(2) = -1$, funkcja jest rosnąca w całej dziedzinie.

5. Zaznacz w układzie współrzędnych figurę ograniczoną osią y i wykresami funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \boldsymbol{R}_+$, $g(x) = 1$, $h(x) = 3$,
b) $f(x) = -\frac{3}{x}$ dla $x \in R_+$, $g(x) = -0{,}5$, $h(x) = -3$.

6. Tomek drogę do szkoły pokonuje pieszo oraz autobusem. Rano wychodzi z domu o godz. 7^{20}. Na przystanek autobusowy idzie 10 minut ze średnią prędkością 5 km/h i tam czeka 5 minut na autobus. Autobus trasę do szkoły pokonuje w czasie 10 minut ze średnią prędkością 50 km/h. Pozostałą część drogi do szkoły Tomek pokonuje pieszo w czasie 5 minut z prędkością 5 km/h. Przedstaw na wykresie funkcję odległości Tomka od domu w czasie:

a) drogi do szkoły,

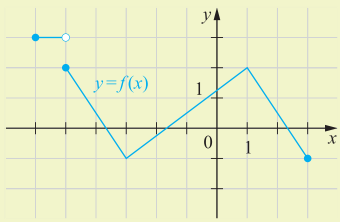
b) drogi powrotnej, jeżeli ze szkoły wychodzi o godz. 14^{30} i wraca tą samą trasą, a na przystanku koło szkoły czeka 10 minut na autobus.

BANK ZADAŃ z. 106–110 » » »

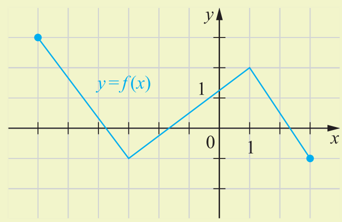
A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -6;\ 3\rangle$, a zbiorem wartości – przedział $\langle -1;\ 3\rangle$. Dodatkowo: $f(-5) = f(1) = 2$, $f(-3) = f(3) = -1$. Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\langle -6;\ -3\rangle$ oraz $\langle 1;\ 3\rangle$, a rosnąca w przedziale $\langle -3;\ 1\rangle$. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku

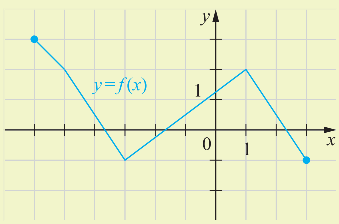
A.



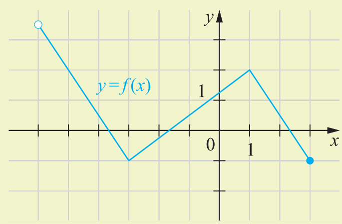
B.



C.



D.



2. Narysuj wykres funkcji f, która:

- jest określona dla $x \in \langle -6;\ 6\rangle$,
- ma dwa miejsca zerowe $x = -3$ oraz $x = 2$,
- maleje w przedziałach $\langle -6;\ -4\rangle$ oraz $\langle 1;\ 6\rangle$,
- osiąga wartość największą $y = 4$ oraz najmniejszą dla $x = 6$, $f(6) = -5$.

3. Na podstawie wykresu sporządzonego w zadaniu 2. podaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.

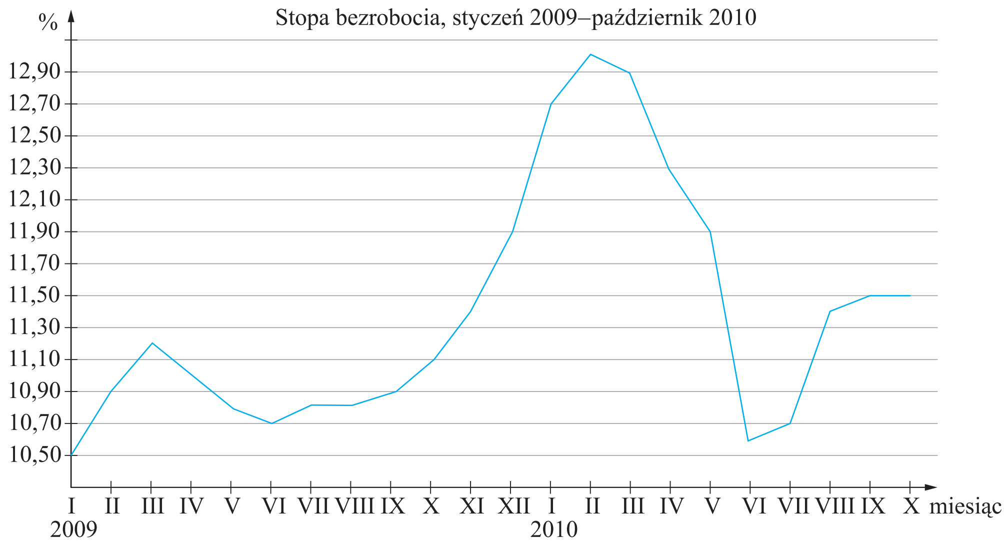
4. Sporządź wykres funkcji, która każdej dodatniej liczbie całkowitej mniejszej od 10 przyporządkowuje liczbę o 4 mniejszą. Podaj najmniejszą oraz największą wartość tej funkcji.

2.7 Zastosowanie wiadomości o funkcjach w zadaniach praktycznych

Dane statystyczne dotyczące zmiany kursów walut, notowań giełdowych, inflacji, bezrobocia itp. są często przedstawiane na wykresach. Zazwyczaj są to wykresy funkcji w postaci łamanych lub innych krzywych. Na takich wykresach dobrze widać zmiany zachodzące w określonym czasie. Często wykres na osi poziomej nie zaczyna się od zera, ale od pewnej ustalonej wielkości, istotnej dla opisywanego zjawiska.

PRZYKŁAD 1.

Przeanalizujmy wykres zamieszczony przez polski portal finansowy, przedstawiający stopę bezrobocia[1] w Polsce w okresie od stycznia 2009 r. do października 2010 r.



Źródło: www.money.pl

Najwyższa stopa bezrobocia była w lutym 2010 r. i wynosiła 13%, a najniższa w styczniu 2009 r. i wynosiła 10,5%. Różnica między najwyższą a najniższą stopą bezrobocia to 2,5 punktu procentowego. W okresach jesienno-zimowych bezrobocie miało tendencję wzrostową, a w okresach wiosennych – spadkową. (Dlaczego? Spróbuj uzasadnić). Najbardziej dynamiczny wzrost bezrobocia obserwujemy w okresie od sierpnia 2009 r. do lutego 2010 r., a spadek – od lutego 2010 r. do czerwca 2010 r.

[1] Stopa bezrobocia to wielkość statystyczna opisująca stosunek liczby osób bezrobotnych do liczby ludności aktywnej ekonomicznie (czynnej zawodowo).

ĆWICZENIE 1.

Na podstawie wykresu z przykładu 1. odpowiedz na poniższe pytania.

a) O ile punktów procentowych wzrosło bezrobocie od sierpnia 2009 r. do lutego 2010 r.? O ile procent wzrosło bezrobocie w tym okresie?

b) O ile punktów procentowych zmniejszyło się bezrobocie od lutego 2010 r. do czerwca 2010 r.? O ile procent zmniejszyło się bezrobocie w tym okresie?

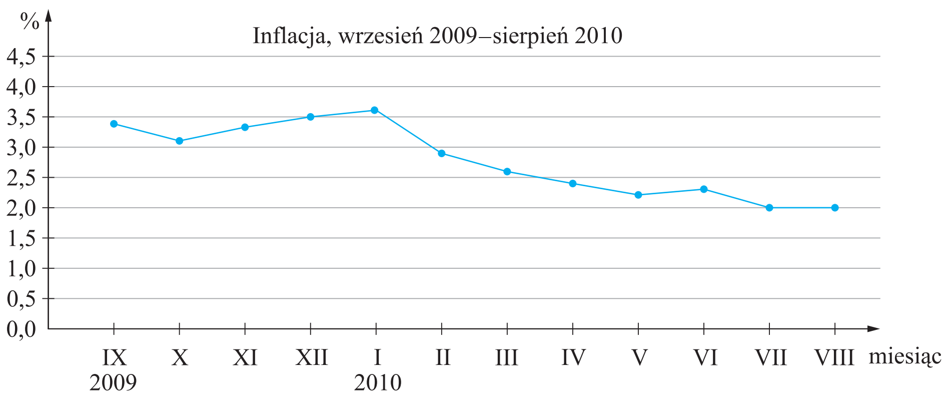
PRZYKŁAD 2.

Przeanalizujmy wysokość inflacji[2] w Polsce od września 2009 r. do sierpnia 2010 r. W tabeli przedstawiono wskaźniki inflacji (względem analogicznego miesiąca roku poprzedniego).

Rok	2009				2010							
Miesiąc	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Inflacja [%]	3,4	3,1	3,3	3,5	3,6	2,9	2,6	2,4	2,2	2,3	2,0	2,0

Źródło: www.money.pl

Zaznaczmy dane z tabeli w układzie współrzędnych. Otrzymane punkty połączymy, aby lepiej zobrazować tendencję wzrostową lub spadkową inflacji. Taki sposób przedstawiania danych często obserwujemy w prasie, telewizji, internecie.



Analizując wykres, zauważamy, że:

- od października 2009 r. do stycznia 2010 r. inflacja wzrosła z 3,1% do 3,6%,
- w lipcu i sierpniu 2010 r. inflacja była na tym samym poziomie,
- od stycznia 2010 r. do maja 2010 r. inflacja zmalała z 3,6% do 2,2%,
- inflacja na końcu rozpatrywanego okresu (w sierpniu 2010 r.) była o 1,4 punktu procentowego niższa niż na początku rozpatrywanego okresu (we wrześniu 2009 r.),
- najwyższy wskaźnik inflacji był w styczniu 2010 r. (3,6%), a najniższy – w lipcu i sierpniu 2010 r. (2%),
- największy wzrost wskaźnika inflacji nastąpił w okresie od października 2009 r. do stycznia 2010 r.

[2] Inflacja to obniżanie się siły nabywczej pieniądza. To zjawisko jest wywołane szybszym przyrostem ilości pieniądza niż przyrostem produkcji.

ĆWICZENIE 2.

Na podstawie wykresu z przykładu 2. oblicz, o ile procent inflacja:
a) spadła w maju w stosunku do stycznia 2010 r.,
b) była niższa w sierpniu 2010 r. w stosunku do września 2009 r.,
c) wzrosła w styczniu 2010 r. w stosunku do października 2009 r.

PRZYKŁAD 3.

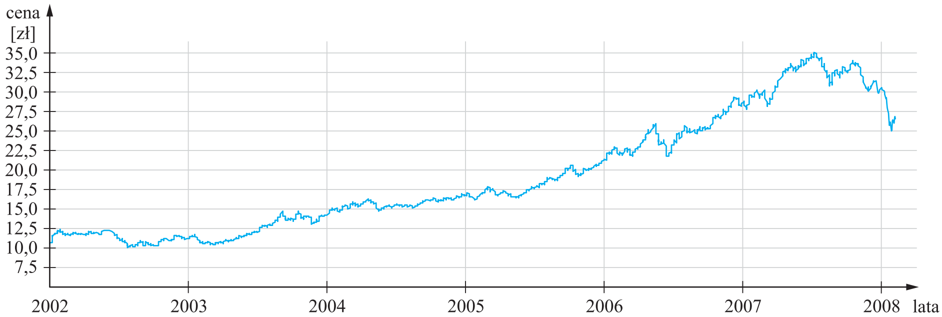
a) Przeanalizujmy wykres opisujący zmiany wartości jednostki uczestnictwa pewnego funduszu inwestycyjnego[3] w okresie od 1 lutego 2007 r. do 31 stycznia 2008 r.

Miesiąc	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I
Wartość jednostki w zł (na koniec miesiąca)	28,1	30,8	32,8	33,5	34,2	32,8	32,4	32,2	33,0	30,4	29,9	26,5

Wartość jednostki uczestnictwa jest funkcją czasu. Notowania są ciągłe, tzn. wartość jednostki jest ustalana na koniec każdego dnia. Dla takiej funkcji dziedziną jest okres od uruchomienia funduszu do jego zamknięcia. Często jest to przedział kilku lub kilkunastu lat. Przeanalizujmy funkcję w przedziale jednego roku, tj. od 1 lutego 2007 r. do 31 stycznia 2008 r. W tym okresie wartość jednostki uczestnictwa zmieniała się bardzo dynamicznie. Największą wartość jednostka osiągnęła na początku lipca 2007 r. Wynosiła ona około 34,9 zł. Najniższą wartość zanotowano w styczniu 2008 r. i było to 25 zł. Nastąpił spadek o około 9,9 zł, czyli o około 28% wartości jednostki z lipca 2007 r. Osoby, które zainwestowały swoje oszczędności w ten fundusz, miały podstawy do obaw o swój kapitał.

[3] Fundusz inwestycyjny – instytucja finansowa, która ma osobowość prawną i której wyłącznym przedmiotem działalności jest lokowanie publicznie zebranych środków pieniężnych w papiery wartościowe i inne prawa majątkowe.

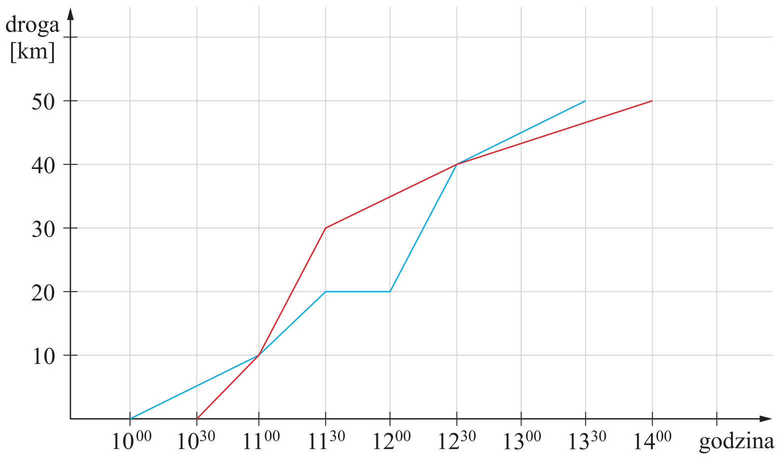
b) Przeanalizujmy wartość jednostki uczestnictwa tego samego funduszu w dłuższym okresie, tj. od momentu jego otwarcia w 2002 r. do 31 stycznia 2008 r.



Widzimy, że wartość jednostki 25 zł nie jest najniższa w analizowanym okresie. Co więcej, do 2008 r. przeważała tendencja wzrostu wartości jednostki. Trudno przewidzieć, czy jest to spadek przejściowy, czy – długoterminowy.

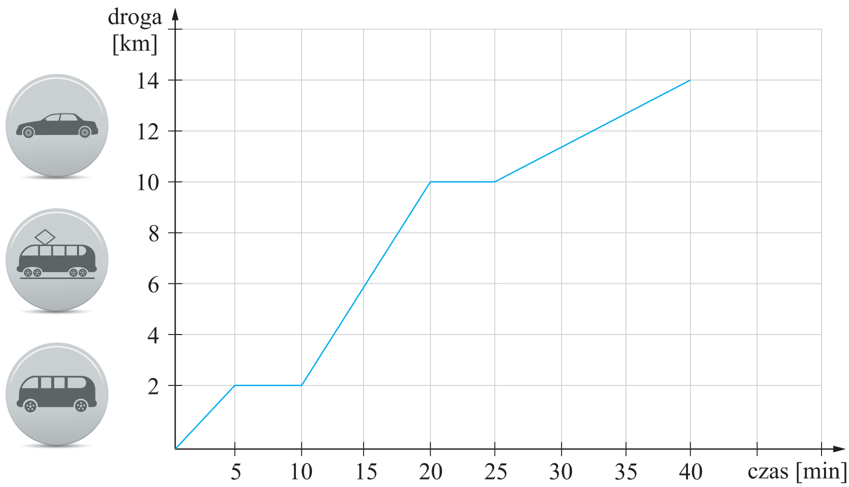
ZADANIA

1. Adam i Marek pokonali rowerami trasę 50 km. Marek wyruszył na trasę pół godziny później. Na wykresie przedstawiono zależność drogi przebytej przez każdego z rowerzystów od czasu jazdy. Oceń prawdziwość zdania.



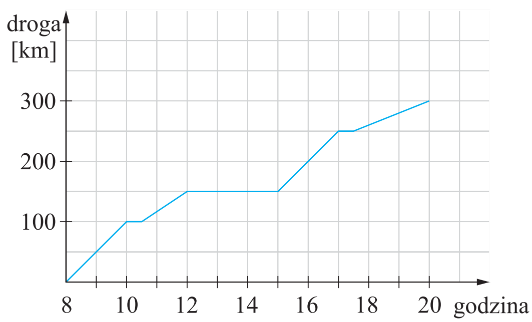
a) Od 11^{00} do 12^{30} obaj pokonali taką samą drogę.
b) O 12^{00} bliżej celu był Adam.
c) Od 11^{30} do 12^{00} Adam jechał ze stałą prędkością 20 km/h.
d) Obaj pokonali trasę z taką samą prędkością średnią.

2. Drogę do pracy Paweł pokonuje samochodem, tramwajem oraz autobusem. Na wykresie pokazano zależność przebytej drogi od czasu. Pierwszy odcinek drogi Paweł przejeżdża samochodem, następnie jedzie tramwajem i ostatni odcinek drogi pokonuje autobusem. Oceń prawdziwość zdania.



a) Paweł pokonuje tramwajem odcinek dwukrotnie dłuższy niż autobusem.
b) Paweł na tramwaj oczekuje tak samo długo, jak na autobus.
c) Przez $\frac{1}{3}$ czasu podróży Paweł czeka na przystankach.
d) Prędkość średnia samochodu jest mniejsza od prędkości średniej tramwaju oraz większa od prędkości średniej autobusu.

3. O godz. 8^{00} uczniowie wyruszyli autokarem na wycieczkę. Jej harmonogram przewidywał dwa postoje oraz zwiedzanie skansenu. Na podstawie wykresu przedstawiającego zależność przebytej drogi od czasu odpowiedz na pytania.



a) Jak długo trwała wycieczka?
b) Ile kilometrów liczyła trasa wycieczki?
c) Ile łącznie trwały postoje?
d) O ile procent dłużej trwało zwiedzanie skansenu w stosunku do czasu przeznaczonego na postoje?
e) Jaka była prędkość średnia autokaru?

4. W tabeli podano przeciętne miesięczne wynagrodzenie nominalne brutto w poszczególnych miesiącach 2009 r. Sporządź wykres ilustrujący zmianę wysokości wynagrodzenia w zależności od czasu. Na jego podstawie odpowiedz na pytania.
a) Ile wynosi różnica między najwyższym a najniższym wynagrodzeniem?

b) O ile procent wzrosło najwyższe wynagrodzenie w stosunku do najniższego?
c) W których okresach nastąpił wzrost wysokości wynagrodzenia, a w których – spadek?

Miesiące w 2009 r.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Kwota w zł	3216	3196	3333	3295	3194	3288	3362	3269	3283	3312	3404	3652

Źródło: www.money.pl

5. W tabeli podano średni kurs dolara oraz euro (w złotych) w poszczególnych miesiącach 2009 r. Sporządź wykresy zmian kursów dolara i euro w poszczególnych miesiącach.
a) W którym miesiącu kurs dolara był najwyższy, a w którym – kurs euro?
b) Scharakteryzuj zmiany stosunku wartości kursu dolara do wartości kursu euro.
c) W którym okresie kurs dolara spadał? Jak zachowywał się wtedy kurs euro?

Miesiące w 2009 r.	100 \$	100 €	Miesiące w 2009 r.	100 \$	100 €	Miesiące w 2009 r.	100 \$	100 €
I	317,17	421,81	V	323,37	441,93	IX	285,95	413,11
II	363,14	464,42	VI	321,46	441,05	X	284,69	416,35
III	354,12	462,37	VII	305,96	450,81	XI	279,90	421,73
IV	335,92	443,15	VIII	289,56	430,53	XII	283,52	417,34

Źródło: www.money.pl

6. Na wykresie przedstawiono notowania giełdowe akcji jednej ze spółek wchodzących w skład indeksu WIG20[4] w okresie od 19.11.2007 r. do 18.02.2008 r. Notowania mają charakter ciągły w trakcie dnia. Wartość ostateczna jednostki ustalana jest na koniec każdego roboczego dnia tygodnia, w momencie zamknięcia giełdy.
a) Spójrz na wykres i ustal w przybliżeniu, ile można było maksymalnie zyskać, a ile maksymalnie stracić, inwestując 19.11.2007 r. kwotę 20 000 zł w zakup akcji tej spółki.
b) Wyobraź sobie, że jesteś maklerem giełdowym. Zaproponuj kilka transakcji, dzięki którym można było zyskać. Jak osiągnąć maksymalny zysk?

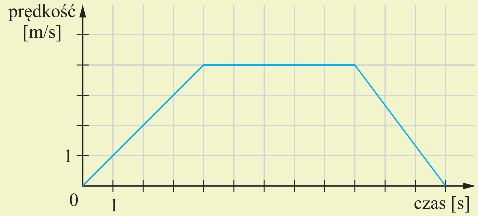
BANK ZADAŃ z. 111–113 » » »

[4] WIG20 to indeks giełdowy dwudziestu największych spółek notowanych na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych.

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Na wykresie przedstawiono zależność prędkości biegu pewnego sportowca od czasu. Sportowiec ten

A. w ciągu pierwszych 4 s poruszał się z przyspieszeniem 4 m/s.
B. w czasie 12 s pokonał drogę 34 m.
C. po 4 s biegu zatrzymał się na 5 s.
D. w czasie 12 s pokonał drogę 48 m.



2. Grupa osób wyruszyła na wycieczkę rowerową o godz. 9^{00}. Naszkicuj wykres opisujący zależność przebytej drogi od czasu, jeżeli wiesz, że: przez pierwszą godzinę rowerzyści jechali z prędkością 20 km/h, następnie był 30-minutowy postój, przez kolejną godzinę jechali z prędkością 15 km/h, a po 2-godzinnym wypoczynku wrócili do miejsca zamieszkania, jadąc z prędkością 12 km/h. O której godzinie byli na miejscu? Z jaką prędkością średnią jechali na trasie, jeśli nie liczyć postojów?

3. W tabeli podano przeciętne miesięczne wynagrodzenie nominalne brutto w sektorze przedsiębiorstw i w sferze budżetowej w latach 2009–2010.

Okres	03.2009	06.2009	09.2009	12.2009	03.2010	06.2010	09.2010
Wynagrodzenie w sektorze przedsiębiorstw w zł	3332,65	3287,88	3283,18	3652,4	3493,42	3403,65	3403,68
Wynagrodzenie w sferze budżetowej w zł	3712,90	3110,27	3113,54	3304,14	4051,75	3181,83	3219,49

Źródło: www.money.pl

a) Na jednym rysunku sporządź wykresy opisujące zmiany przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia nominalnego w sektorze przedsiębiorstw i w sferze budżetowej.

b) Na podstawie wykresów scharakteryzuj zmiany przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia w sferze budżetowej w stosunku do zmian wysokości wynagrodzenia w sektorze przedsiębiorstw.

W rozwiązaniu zaokrąglij dane do pełnego złotego.

PROJEKT

Tabela zawiera cennik opłat pobieranych za przesyłki listowe przez urząd pocztowy.

Przesyłka listowa nierejestrowana	Gabaryt A	Gabaryt B
do 50 g	1,45	1,45
ponad 50 g do 100 g	1,65	1,90
ponad 100 g do 350 g	1,80	2,10
ponad 350 g do 500 g	2,40	2,60
ponad 500 g do 1000 g	4,80	5,30
ponad 1000 g do 2000 g	6,30	7,30

Gabaryt A to przesyłki o wymiarach:

minimum – wymiary strony adresowej nie mogą być mniejsze niż 90 mm $\times$ 140 mm,

maksimum – żaden z wymiarów nie może przekroczyć wysokości 20 mm, długości 325 mm, szerokości 230 mm.

Gabaryt B to przesyłki o wymiarach:

minimum – jeśli choć jeden z wymiarów przekracza wysokość 20 mm lub długość 325 mm, lub szerokość 230 mm,

maksimum – suma długości, szerokości i wysokości to 900 mm, przy czym największy z tych wymiarów (długość) nie może przekroczyć 600 mm.

Do jednego adresata należy wysłać 900 teczek z dokumentami w formie przesyłek listowych: 500 teczek o wymiarach 0,5 cm $\times$ 31 cm $\times$ 20 cm i wadze 230 g każda, 400 teczek o wymiarach 6 cm $\times$ 34 cm $\times$ 22 cm i wadze 370 g każda.

Zaproponuj sposób wysyłki przesyłek listowych tak, aby opłaty za nie były jak najmniejsze. (W jednej przesyłce listowej można wysyłać kilka teczek).

W rozwiązaniu mogą pomóc ci wykresy pewnych funkcji.

ZESTAW ZADAŃ – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)

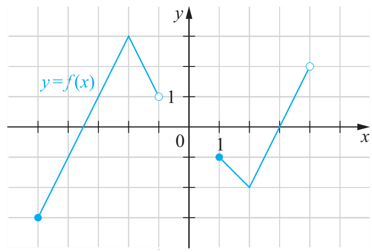
Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$. W takim razie

A. dziedziną funkcji jest zbiór $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.
B. miejscem zerowym funkcji jest liczba -4.
C. funkcja nie ma miejsca zerowego.
D. punkt $(0, -4)$ należy do wykresu funkcji.

Zadanie 2. (1 p.)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór

A. $\langle -3; 1\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$
B. $\langle -5; -1) \cup \langle 1; 4)$
C. $\langle -3; 3\rangle$
D. $\langle -3; -1\rangle \cup (1; 2)$



Zadanie 3. (1 p.)

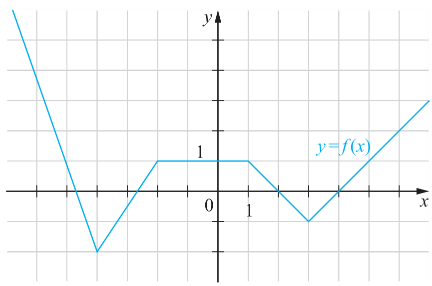
Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$ jest

A. $x = 1$ **B.** $x = -1$ i $x = 1$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = -1$

Zadanie 4. (1 p.)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$. W przedziale $(1; 4)$ funkcja f

A. jest malejąca.
B. ma znak ujemny.
C. ma dwa miejsca zerowe.
D. ma wartość najmniejszą.



Zadanie 5. (1 p.)

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ jest zbiór

A. $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
C. $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ **D.** $\{-2, 2\}$

Zadanie 6. (4 p.)

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x} + 2$. Sporządź tabelę dla kilku wybranych argumentów, a następnie naszkicuj wykres funkcji f. Ustal zbiór wartości funkcji oraz podaj argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

Zadanie 7. (3 p.)

Sprawdź, czy wartość wyrażenia $\dfrac{5^{\frac{1}{3}} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 125^{-\frac{5}{18}}}{\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}}$ może być wartością funkcji $f(x) = x^2$ dla argumentu będącego liczbą całkowitą. Jeżeli tak, to wyznacz ten argument.

Zadanie 8. (5 p.)

Dana jest funkcja f określona w zbiorze $\langle -5;\ 7\rangle$. Wiedząc, że: $f(-3) = 2$, $f(1) = -4$, w przedziałach $\langle -5;\ -3\rangle$ oraz $\langle 1;\ 7\rangle$ funkcja jest rosnąca, a w przedziale $\langle -3;\ 1\rangle$ – malejąca, podaj, ile miejsc zerowych może mieć funkcja f. Naszkicuj wykres funkcji spełniającej powyższe warunki. Na jego podstawie podaj, dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich – ujemne.

Zadanie 9. (4 p.)

Narysuj wykres funkcji mającej trzy miejsca zerowe, której dziedziną jest zbiór $(-3;\ 1) \cup \langle 2;\ 5\rangle$, a zbiorem wartości zbiór $\{-2,\ 0,\ 1\}$.

Zadanie 10. (4 p.)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Przekształć wzór funkcji: zapisz go w najprostszej postaci. Naszkicuj wykres funkcji i podaj jej zbiór wartości.

Zadanie 11. (3 p.)

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = 3(2 - x)$, $x \in (-7;\ 1\rangle$. Wyznacz, jeśli istnieje, najmniejszą i największą wartość funkcji.

Zadanie 12. (4 p.)

W tabeli zawarte są wartości jednostki uczestnictwa funduszu inwestycyjnego „Dobra lokata".

Data notowania	10 IX	25 IX	10 X	25 X	10 XI	25 XI	10 XII	27 XII
Wartość jednostki uczestnictwa [zł]	122,07	127,10	135,21	147,80	149,19	133,98	134,00	134,50

Przedstaw notowania na wykresie.

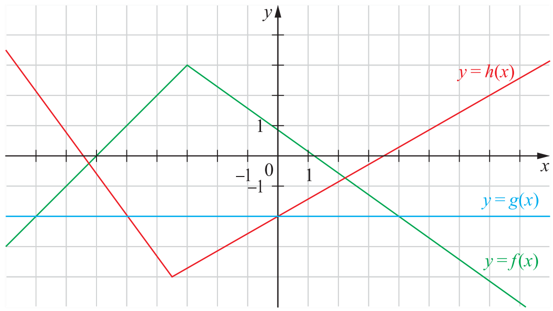
a) Kiedy jednostka uczestnictwa osiągnęła największą wartość?
b) O ile procent wzrosła największa wartość jednostki w stosunku do wartości z 10 IX?
c) Którego dnia zanotowano największy spadek wartości jednostki?
d) O ile procent spadła wartość jednostki w stosunku do wartości maksymalnej w badanym okresie?

Zadanie 13. **(4 p.)**

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej z przedziału $\langle -2; 5 \rangle$ jej kwadrat pomniejszony o czterokrotność tej liczby. Określ funkcję za pomocą wzoru i sporządź jej wykres.

Zadanie 14. **(4 p.)**

Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji f, g, h. Wyznacz zbiór A tych argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g, oraz zbiór B tych argumentów, dla których wartości funkcji h są większe od wartości funkcji g. Podaj argumenty, które należą jednocześnie do zbiorów A i B.



3 Funkcja liniowa

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

- rysowanie wykresu funkcji liniowej z wykorzystaniem jej wzoru
- wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie
- interpretowanie współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej
- wykorzystywanie własności funkcji liniowej do interpretacji różnych zagadnień
- wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty
- badanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych
- wyznaczanie równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt
- sprawdzanie, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności
- wykorzystywanie interpretacji geometrycznej układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- obliczanie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych

3.1 Proporcjonalność prosta

PRZYKŁAD 1.

Piotrek, obserwując zbliżającą się burzę, mierzył i zapisywał czas upływający od momentu błysku do momentu usłyszenia grzmotu. Tata Piotrka uzupełniał tabelę – wpisywał na podstawie pomiarów syna odległość, w jakiej doszło do wyładowania (odległość „burzy od domu”). Przeanalizujmy dane z tabeli i zastanówmy się, według jakiej zasady tata Piotrka ją uzupełnił.

Czas – t [s]	15	12	8	6
Odległość – d [km]	5,1	4,08	2,72	2,04

Piotr popatrzył na te wyniki i odkrył, że jeśli podzieli liczbę określającą odległość d przez liczbę wyrażającą czas t, to za każdym razem otrzyma tę samą liczbę 0,34. Oznacza to, że tata Piotra mnożył liczbę wyrażającą czas, jaki upływał od błysku do grzmotu, przez 0,34 i tymi wartościami uzupełniał tabelę. W temperaturze 15°C i przy normalnym ciśnieniu prędkość rozchodzenia się dźwięku jest równa 340 m/s.

Definicja

O dwóch zmiennych wielkościach x i y powiemy, że są **wprost proporcjonalne** wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloraz jest stały, czyli $\frac{y}{x} = a$, gdzie $a \neq 0$.

Zależność między zmiennymi wielkościami x i y, które są wprost proporcjonalne, zapisujemy w postaci wzoru $y = ax$, gdzie $a \neq 0$. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**. Dla wielkości wprost proporcjonalnych wzrost jednej powoduje taki wzrost drugiej, że iloraz tych wielkości pozostaje stały.

ĆWICZENIE 1.

Wiedząc, że wielkości m i n są wprost proporcjonalne, uzupełnij tabelę.

m	1,5		8		12	
n	2,7	7,2		18		27

PRZYKŁAD 2.

Przyjrzyjmy się niektórym sytuacjom opisanym przez wielkości wprost proporcjonalne.

a) Sytuacja z przykładu 1. Wielkości d i t są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Im dłuższy czas pomiędzy błyskiem a grzmotem, tym większa odległość od burzy.
b) Sytuacja na drodze. Samochód jedzie ze stałą prędkością (v). Wielkościami wprost proporcjonalnymi są droga samochodu (s) i czas (t), w którym samochód przejeżdża drogę ($s = vt$). Współczynnik proporcjonalności jest równy v.
c) Kupowanie jabłek w sklepie. Wielkości wprost proporcjonalne to wartość zakupów i waga kupionych jabłek. Współczynnik proporcjonalności to cena za jeden kilogram jabłek.
d) Obliczanie ustalonej stawki podatku. Wielkości wprost proporcjonalne to kwota, która podlega opodatkowaniu, i wartość naliczonego podatku. Współczynnik proporcjonalności to stopa podatkowa.

PRZYKŁAD 3.

Świstak żyjący na terenie Tatr na kilka miesięcy zapada w sen zimowy, podczas którego jego serce uderza 15 razy na minutę.

a) Ile razy serce śpiącego świstaka uderzy w ciągu 24 minut?
b) Ile czasu upłynęło, jeśli serce uderzyło 6 razy?

a) Oznaczmy literą x liczbę uderzeń serca świstaka w ciągu 24 minut. Ponieważ liczba uderzeń serca i czas są wielkościami wprost proporcjonalnymi, ich iloraz jest stały.

Mamy zatem proporcję: $\frac{15}{1} = \frac{x}{24}$, stąd $x = 15 \cdot 24$, $x = 360$.

W ciągu 24 minut serce śpiącego świstaka wykona 360 uderzeń.

b) Oznaczmy literą y czas, w którym serce uderzyło 6 razy.

Mamy $\frac{15}{1} = \frac{6}{y}$, czyli $15y = 6$, $y = \frac{6}{15}$ minuty.

Po zamianie minut na sekundy otrzymujemy $\frac{6}{15} \cdot 60\ \text{s} = 24\ \text{s}$.

Serce świstaka uderzyło 6 razy w ciągu 24 sekund.

ĆWICZENIE 2.

Zużycie preparatu do chlorowania wody w basenie jest wprost proporcjonalne do ilości wody wypełniającej basen. W 150 hektolitrach wody rozpuszcza się 27 g tego środka. Jaką ilość preparatu trzeba rozpuścić w basenie, w którym jest 250 hektolitrów wody?

ĆWICZENIE 3.

Badania przeprowadzone przez specjalistów dowodzą, że przy prędkości 50 km/h droga hamowania dla samochodu osobowego wynosi 13 m. W tych samych warunkach samochód jadący z prędkością 72 km/h zatrzymuje się dopiero po przejechaniu 27 m. Zbadaj, czy prędkość pojazdu i droga hamowania są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

ZADANIA

1. Wielkościami wprost proporcjonalnymi są

A. $\frac{2}{7}$ i 7 oraz $\frac{3}{5}$ i 5. **B.** 12,2 i 6,1 oraz 3,1 i 1,6.

C. $\sqrt{3}$ i 3 oraz $5 - 2\sqrt{3}$ i $5\sqrt{3} - 6$. **D.** 12,3 i 8,1 oraz 8,4 i 5,4.

2. Liczby $12\frac{2}{3}$ i $3m$ oraz $7\frac{1}{9}$ i $2\frac{10}{19}$ są wprost proporcjonalne, jeśli

A. $m = 4\frac{1}{3}$ **B.** $m = \frac{3}{8}$ **C.** $m = \frac{76}{27}$ **D.** $m = \frac{3}{2}$

3. Wiedząc, że $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, wyznacz wielkości:

a) $\frac{y}{x}$, b) $\frac{x}{m}$, c) my.

4. Pompa dostarcza 4,5 hl wody w ciągu 5 minut. Jak długo musi pracować ta pompa, aby zapełnić basen o pojemności 126 hl?

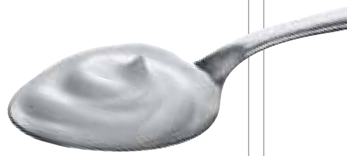
5. Z ilu kilogramów mleka można otrzymać 31,5 kg śmietany, jeśli z 20 kg takiego mleka uzyskuje się 7 kg śmietany?

6. Z 3 kwintali nasion lnu otrzymuje się 145 kg oleju lnianego.

a) Ile kilogramów oleju można wytłoczyć z 18 kg nasion lnu?

b) Ile kwintali nasion lnu trzeba przerobić, żeby uzyskać 464 kg oleju?

7. Jedna łyżka śmietany kremówki, czyli 15 g, to około 43,5 kcal. Ile co najmniej kilokalorii ma deser, do którego użyto 10 łyżek takiej śmietany?



8. Uzasadnij, że następujące wielkości są wielkościami wprost proporcjonalnymi.
a) Obwód rombu i długość jego boku.
b) Długość promienia okręgu i długość tego okręgu.

BANK ZADAŃ z. 114–117 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wielkości wprost proporcjonalne to
A. 1,4 i 5,6 oraz 2,2 i 7,6.
B. 5,2 i 2,6 oraz 10,2 i 5,3.
C. 8 i 18 oraz 4 i 10.
D. 2,5 i 7,5 oraz 3 i 9.

2. Pociąg pokonał 275 km w 2,5 godziny. Ile kilometrów pokonał w ciągu 1,5 godziny, jeżeli jechał z tą samą prędkością średnią?

3. Koszt wycieczki motokrosowej jest wprost proporcjonalny do liczby przejechanych kilometrów. Trasa 400 km kosztuje 610 zł.
a) Jaki jest koszt wycieczki, której trasa ma długość 150 km?
b) Ile kilometrów przejechał turysta, jeśli zapłacił 600 zł?

4. W piasku stosunek zawartości krzemu do tlenu wynosi 7 : 8. Oblicz, ile jest krzemu, a ile – tlenu w 45 g piasku.

3.2 Funkcja liniowa i jej własności

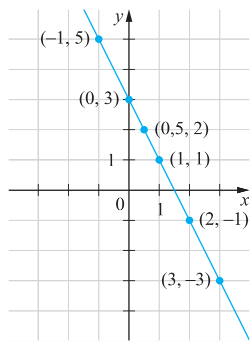
PRZYKŁAD 1.

W układzie współrzędnych przedstawmy wszystkie pary liczb rzeczywistych takich, że suma podwojonej pierwszej liczby i liczby drugiej jest równa 3.

Pierwszą z liczb oznaczmy jako x, drugą zaś jako y. Wówczas $2x + y = 3$ i $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$. Zależność tę możemy zapisać w postaci $y = -2x + 3$ i $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$. Wypiszmy kilka par liczb (x, y) spełniających podany warunek i zaznaczmy je w układzie współrzędnych.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	2	3
$y = -2x + 3$	5	4	3	2	1	–1	–3

Nie wypiszemy wszystkich par liczb, które spełniają podane równanie, bo jest ich nieskończenie wiele. Podobnie nie zaznaczymy wszystkich tych par w układzie współrzędnych. O parach liczb np. –1 i 5, 1 i 1, 2 i –1, 3 i –3 możemy powiedzieć, że spełniają zależność liniową. Wykresem zależności liniowej $y = -2x + 3$ jest prosta.



Definicja

Funkcję $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$ i $b \in \boldsymbol{R}$, nazywamy **funkcją liniową**.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$. Liczbę b nazywamy **wyrazem wolnym**.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

W przykładzie 1. pierwszą liczbę w rozpatrywanej parze potraktowaliśmy jako **zmienną niezależną** x, a drugą – jako **zmienną zależną** y. Wzór opisujący zależność funkcyjną między zmiennymi zapiszemy jako $y = f(x) = -2x + 3$, $x \in \boldsymbol{R}$.

ĆWICZENIE 1.

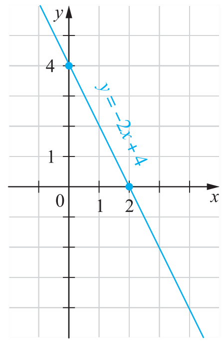
W układzie współrzędnych przedstaw wszystkie pary liczb rzeczywistych takich, że:
a) różnica pierwszej liczby i potrojonej drugiej jest równa 2.
b) suma pierwszej liczby i drugiej liczby jest równa podwojonej pierwszej liczbie.

PRZYKŁAD 2.

Sporządźmy wykres funkcji liniowej określonej wzorem $y = -2x + 4$ i opiszmy jej własności.

Przez dwa różne punkty przechodzi jedna prosta, wobec tego wystarczy, że wyznaczymy dwa różne punkty należące do wykresu i poprowadzimy przez nie prostą. Mogą to być na przykład punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

x	0	2
$y = -2x + 4$	4	0



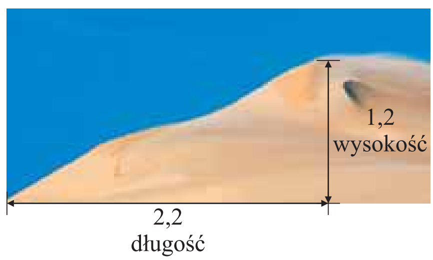
- Dziedziną oraz zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}$.
- Funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = 2$.
- Funkcja jest malejąca w $\boldsymbol{R}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; 2)$, a wartości ujemne dla $x \in (2; +\infty)$.
- Funkcja nie przyjmuje wartości największej ani najmniejszej.

ĆWICZENIE 2.

Narysuj wykres funkcji liniowej f. Na podstawie wykresu określ zbiór wartości, miejsce zerowe i monotoniczność funkcji.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 3$ c) $f(x) = -2$

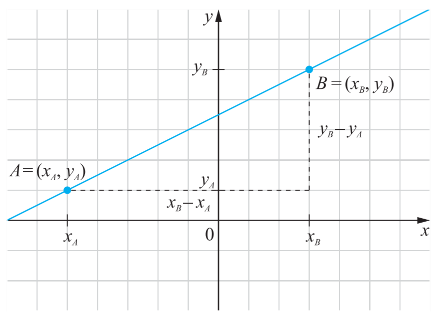
PRZYKŁAD 3.



Aby obliczyć nachylenie stoku przedstawionego na rysunku do poziomu, należy wyznaczyć iloraz $\frac{1,2}{2,2}$.

$$\frac{1,2}{2,2} = \frac{6}{11}$$

Im większy iloraz, tym większe jest nachylenie stoku.
W ten sposób opisuje się stromość góry, pochyłość drogi. Podobnie określamy nachylenie prostej w układzie współrzędnych względem osi x. Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, wyznaczamy jej **nachylenie do osi *x*** jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Iloraz ten nie zawsze jest liczbą dodatnią, w odróżnieniu od nachylenia usypanego pagórka.



ĆWICZENIE 3.

Narysuj prostą przechodzącą przez podane punkty. Oblicz jej nachylenie do osi x. Czy w każdym przypadku jest to możliwe? Jeśli nie, napisz dlaczego. Jaka to prosta?

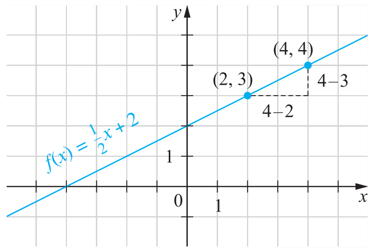
a) $A = (1, 3), B = (3, 5)$ b) $C = (-2, 4), D = (1, 2)$

c) $E = (-2, 4), F = (3, 4)$ d) $G = (1, -3), H = (1, 3)$

PRZYKŁAD 4.

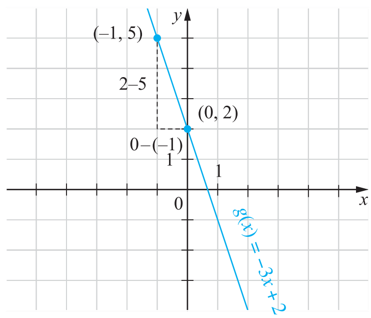
Narysujmy wykresy funkcji f, g i h danych wzorami $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g(x) = -3x + 2$ i $h(x) = 2x - 3$. Wyznaczmy nachylenie prostych będących wykresami funkcji f, g i h do osi x.

x	2	4
$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$	3	4



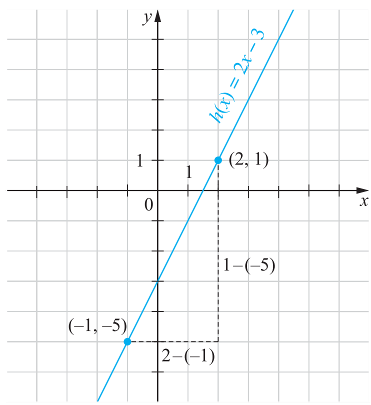
Nachylenie prostej będącej wykresem funkcji f wynosi $\frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2}$.

x	–1	0
$g(x) = -3x + 2$	5	2



Nachylenie prostej będącej wykresem funkcji g jest równe $\frac{2-5}{0-(-1)} = \frac{-3}{1} = -3$.

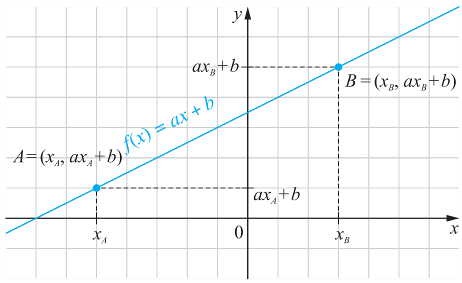
x	–1	2
$h(x) = 2x - 3$	–5	1



Nachylenie prostej będącej wykresem funkcji h wynosi $\frac{1-(-5)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$.

Dla funkcji f, g i h współczynnik kierunkowy jest równy nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji do osi x.

Zastanówmy się, czy tak samo będzie dla dowolnej prostej będącej wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = ax + b$.



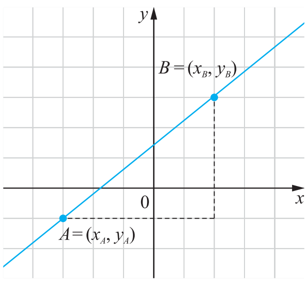
Niech dwa różne punkty A i B należą do prostej będącej wykresem funkcji $f(x) = ax + b$. Wobec tego $A = (x_A, ax_A + b)$ i $B = (x_B, ax_B + b)$, gdzie $x_A \neq x_B$.

Nachylenie prostej AB do osi x wynosi

$$\frac{ax_B + b - (ax_A + b)}{x_B - x_A} = \frac{ax_B + b - ax_A - b}{x_B - x_A} = \frac{a(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = a.$$

Współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ opisuje nachylenie prostej będącej wykresem funkcji do osi x.

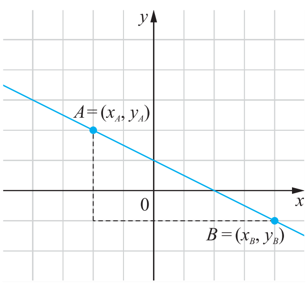
Na podstawie znaku współczynnika kierunkowego, czyli nachylenia prostej do osi x, możemy określić monotoniczność funkcji liniowej bez sporządzania jej wykresu.



$y_B - y_A > 0$ i $x_B - x_A > 0$,

czyli $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} > 0$, stąd $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$.

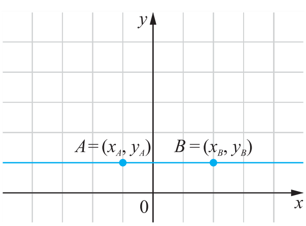
Funkcja rosnąca.



$y_B - y_A < 0$ i $x_B - x_A > 0$,

czyli $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} < 0$, stąd $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$.

Funkcja malejąca.



$y_B - y_A = 0$ i $x_B - x_A \neq 0$,

czyli $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0$, stąd $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Funkcja stała.

Twierdzenie

Funkcja liniowa f dana wzorem $f(x) = ax + b$ jest:
- rosnąca w $\mathbf{R}$, jeśli współczynnik kierunkowy a jest liczbą dodatnią;
- malejąca w $\mathbf{R}$, jeśli współczynnik kierunkowy a jest liczbą ujemną;
- stała w $\mathbf{R}$, jeśli współczynnik kierunkowy a jest równy 0.

ĆWICZENIE 4.

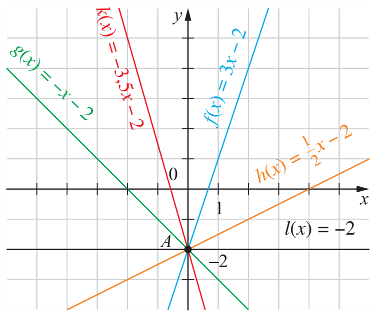
Określ, bez sporządzania wykresu, monotoniczność funkcji danej wzorem.

a) $f(x) = 2(-x + 5)$ b) $g(x) = 3x - \frac{1}{2}(6x + 4)$ c) $h(x) = -3x - \sqrt{2}\left(2 - 3\sqrt{2}x\right)$

PRZYKŁAD 5.

W jednym układzie współrzędnych narysujmy wykresy funkcji opisanych wzorami:

$f(x) = 3x - 2,\ g(x) = -x - 2,\ h(x) = \frac{1}{2}x - 2,\ k(x) = -3{,}5x - 2,\ l(x) = -2.$



Otrzymaliśmy **pęk prostych** przecinających oś y w punkcie $A = (0, -2)$. Zauważmy, że we wzorze każdej funkcji wyraz wolny b jest równy –2.

Wyznaczmy punkt przecięcia wykresu dowolnej funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = ax + b$ z osią y:
$f(0) = a \cdot 0 + b$, stąd $f(0) = b$.

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

ĆWICZENIE 5.

Do wykresu funkcji liniowej należy punkt $A = \left(0, 2\sqrt{2}\right)$. Który współczynnik we wzorze $y = ax + b$ można określić na podstawie tej informacji? Ile funkcji liniowych spełniających podany warunek istnieje? Wykres której z tych funkcji jest równoległy do osi x?

ĆWICZENIE 6.

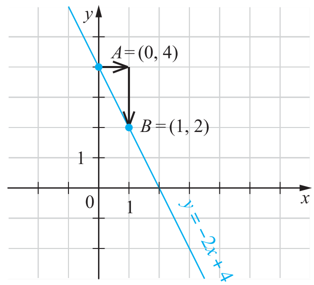
Napisz wzór funkcji liniowej, do której wykresu
a) należą punkty $A = (0, 1)$ i $B = (-3, 2)$,
b) należy punkt $A = (9, 2)$, a współczynnik kierunkowy jest równy 0,
c) należą punkty $A = (-3, 2)$ i $B = \left(\sqrt{2}, 0\right)$.

PRZYKŁAD 6.

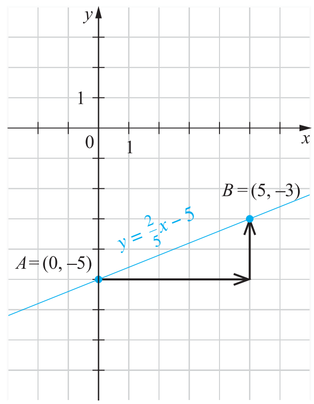
Narysujmy wykres funkcji f bez sporządzania tabelki.

a) $f(x) = -2x + 4$ b) $f(x) = \frac{2}{5}x - 5$

a) Z wzoru funkcji odczytujemy współczynnik kierunkowy $a = -2$ oraz punkt przecięcia prostej, będącej wykresem funkcji f, z osią y: $A = (0,\ 4)$. Następnie, wykorzystując współczynnik kierunkowy, możemy wyznaczyć drugi punkt należący do szukanej prostej. Współczynnik kierunkowy we wzorze $y = ax + b$ wskazuje, o ile zmieni się wartość y, jeśli argument x zwiększymy o 1. W naszym przypadku $a = -2$, więc $B = (1,\ 2)$.

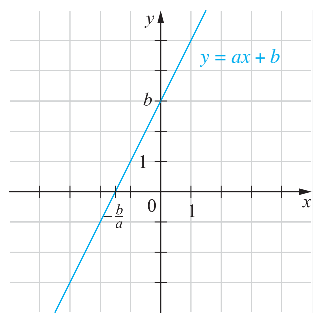


b) Z wzoru funkcji odczytujemy współczynnik kierunkowy $a = \frac{2}{5}$ oraz punkt przecięcia prostej $f(x) = \frac{2}{5}x - 5$ z osią y: $A = (0,\ -5)$. Z interpretacji współczynnika a wynika, że wzrostowi argumentu x o 1 odpowiada zmiana y o $\frac{2}{5}$ lub wzrostowi argumentu x o 5 odpowiada wzrost y o 2. Drugim punktem należącym do prostej jest więc np. $B = (5,\ -3)$.



PRZYKŁAD 7.

Opiszmy własności funkcji f danej wzorem $f(x) = ax + b$, gdy $a > 0$.



- $D_f = \boldsymbol{R}$
- $Z_w = \boldsymbol{R}$
- Miejsce zerowe wyznaczymy, gdy rozwiążemy równanie $ax + b = 0$, stąd $ax = -b$. Po podzieleniu stronami (co jest możliwe, bo $a \neq 0$) otrzymujemy $x = -\frac{b}{a}$.

Zatem funkcja ma jedno **miejsce zerowe**: $x = -\frac{b}{a}$.

- Ponieważ współczynnik kierunkowy jest liczbą dodatnią, więc funkcja jest rosnąca w $\boldsymbol{R}$.
- Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$, a wartości dodatnie – dla $x \in \left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$.
- Funkcja nie osiąga wartości największej ani wartości najmniejszej.

ĆWICZENIE 7.

Opisz własności funkcji liniowej f danej wzorem $f(x) = ax + b$, gdy:

a) $a < 0$, b) $a = 0$.

ĆWICZENIE 8.

Podaj przykład funkcji liniowej $y = ax + b$:

a) której zbiór wartości jest zbiorem jednoelementowym,
b) która ma nieskończenie wiele miejsc zerowych,
c) która nie ma miejsc zerowych,
d) która ma jedno miejsce zerowe i jest funkcją malejącą,
e) która jest funkcją stałą.

ZADANIA

1. Punkt $A = (-2, -\sqrt{3})$ należy do wykresu funkcji liniowej f danej wzorem $f(x) = ax + 2 - \sqrt{3}$, jeśli

A. $a = 1$ **B.** $a = -1$ **C.** $a = -2$ **D.** $a = 2 - \sqrt{3}$

2. Prosta przechodząca przez punkty $A = (-4, 0)$ i $B = (4, 8)$ przecina oś y w punkcie

A. $P = (0, 0)$ **B.** $P = (0, 4)$ **C.** $P = (2, 1)$ **D.** $P = (0, 6)$

3. Funkcję liniową, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty $A = (-3, 0)$ i $B = (0, -5)$, opisuje wzór

A. $f(x) = -3x - 5$ **B.** $f(x) = 3x - 5$ **C.** $f(x) = -1\frac{2}{3}x - 5$ **D.** $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

4. Początek układu współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej opisanej wzorem

A. $f(x) = \left(2\sqrt{2} - 3\right)x$ **B.** $f(x) = 2\sqrt{2}x - 1 - \sqrt{2}$

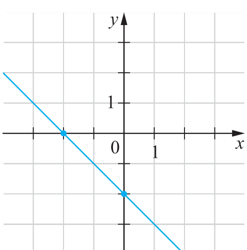
C. $f(x) = -x - 1$ **D.** $f(x) = 3x - 3$

5. Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należy punkt $M = (-4, 3)$.

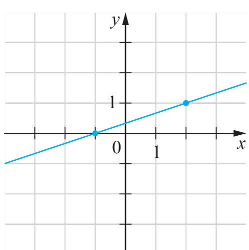
a) $f(x) = -x - 2$ b) $f(x) = x + 7$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = 0{,}4x + \frac{7}{5}$

6. Napisz wzór funkcji liniowej na podstawie jej wykresu.

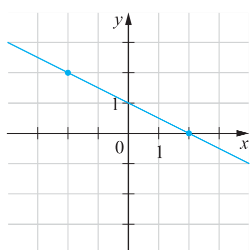
a)



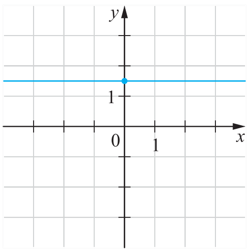
b)



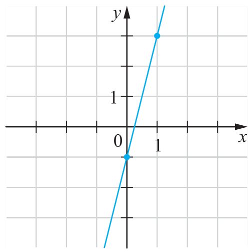
c)



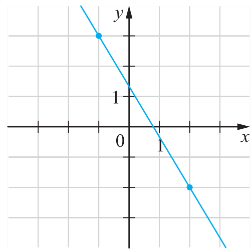
d)



e)



f)



7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = 10x - 2\sqrt{2}$. Oblicz: $f(1)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$, $f\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

8. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + b$. Wiedząc, że $f(1) = 2$ i współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem tej funkcji jest równy -2, oblicz: $f(2)$, $f\left(\sqrt{3} - 1\right)$, $f(\pi + 2)$.

9. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = -\sqrt{3}x + 2$. Wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości: 2, -3, $2\left(1 - \sqrt{3}\right)$.

10. Narysuj wykres funkcji liniowej. Wyznacz punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

a) $y = 0{,}4x + 3$ b) $y = -0{,}25x - 2$ c) $y = -x + 3$ d) $y = -4$

11. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A = (-2, 3)$ i $B = (4, 2)$
b) $A = (-3, 4)$ i $B = (-1, 7)$
c) $A = (-12, -13)$ i $B = (13, -13)$
d) $A = (0, 0)$ i $B = (-3, -1)$

12. Napisz wzór funkcji liniowej, jeśli znasz współczynnik kierunkowy prostej będącej jej wykresem oraz współrzędne punktu, który należy do tej prostej.

a) $-\frac{5}{4}$ i $A = (3, 2)$
b) 0 i $A = (3, -1)$
c) $0{,}7$ i $A = (2, 10)$
d) $-1{,}2$ i $A = (-1, 1)$

13. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeżeli jej wykres przechodzi przez punkty A i B.

a) $A = (4, -2)$ i $B = (1, 4)$
b) $A = (-1, -3)$ i $B = (2, 6)$
c) $A = (-3, 4)$ i $B = (7, 4)$
d) $A = (-1, -1)$ i $B = (9, 1)$

14. Wyznacz współczynnik kierunkowy a z wzoru $y = ax + \frac{5}{2}$ tak, aby do prostej opisanej tym równaniem należał dany punkt.

a) $(2, -1)$ b) $(-4, 3)$ c) $(5, 2)$ d) $(0, 3)$ e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

15. Wyznacz wyraz wolny b z wzoru $y = -\frac{1}{3}x + b$ tak, aby do prostej opisanej tym równaniem należał dany punkt.

a) $(3, 0)$ b) $(-1, 4)$ c) $(-7, -2)$ d) $(-2, 0)$ e) $(3, 5)$

16. Wyznacz wszystkie liczby m tak, aby funkcja liniowa f była funkcją stałą.

a) $f(x) = mx + 2$

b) $f(x) = \left(3m - \sqrt{3}\right)x - 2$

c) $f(x) = |5m + 2|x - 3$

d) $f(x) = (m^2 - 4)x + 1$

BANK ZADAŃ z. 118–134 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + b$ należy punkt $A = \left(-2 - \sqrt{3},\ 3\right)$. Wówczas

A. $b = 3$ **B.** $b = 1 + \sqrt{3}$ **C.** $b = 4$ **D.** $b = -1 - 5\sqrt{3}$

2. Współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem funkcji liniowej przechodzącej przez punkty $A = (-5,\ 7)$ i $B = (-4,\ -6)$ jest równy

A. $-\frac{1}{13}$ **B.** -13 **C.** 11 **D.** $\frac{1}{13}$

3. Opisz własności funkcji liniowej.

a) $f(x) = \frac{3}{7}x - 3$ b) $g(x) = -11x + 1$ c) $h(x) = -2$

4. Napisz wzór funkcji liniowej, o której wiesz, że:

a) jej wykres przechodzi przez punkty $A = (0,\ -4)$ i $B = (3,\ -1)$,

b) prosta będąca jej wykresem ma współczynnik kierunkowy $\frac{3}{5}$ i przechodzi przez punkt $A = (-2,\ -6)$.

5. Spośród funkcji liniowych wybierz te, które są funkcjami rosnącymi.

$f(x) = \left(3 - \sqrt{11}\right)x + 1$ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3} - 2}x + 10$

$h(x) = \left|-4 + 2\sqrt{2}\right|x - 7$ $k(x) = \sqrt[3]{-27}x + 3$

6. Dla jakich wartości m funkcja liniowa f dana wzorem $f(x) = \left(3m - 2\sqrt{3}\right)x + 2m - 1$ jest funkcją stałą?

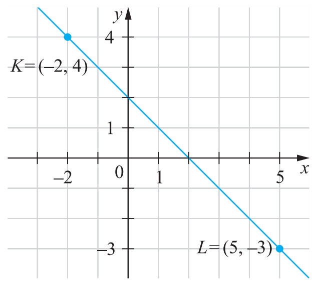
3.3 Równoległość i prostopadłość prostych

Wiemy już, że wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta. Jednak nie każda prosta jest wykresem funkcji liniowej. Proste, które są równoległe do osi y (prostopadłe do osi x), nie są wykresami funkcji.

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

PRZYKŁAD 1.

Napiszmy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty $K = (-2, 4)$ i $L = (5, -3)$.



Prosta przechodząca przez punkty K i L jest wykresem pewnej funkcji liniowej, stąd współrzędne tych punktów muszą spełniać warunek $y = ax + b$.

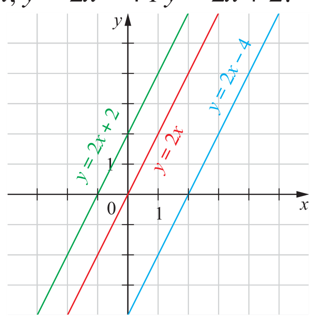
Wyznaczenie współczynników a i b sprowadza się do rozwiązania układu równań $\begin{cases} -2a + b = 4 \\ 5a + b = -3 \end{cases}$ równoważnego układowi $\begin{cases} 2a - b = -4 \\ 5a + b = -3 \end{cases}$.

Po zastosowaniu metody przeciwnych współczynników otrzymujemy $7a = -7$, czyli $a = -1$, więc $b = 2$. Zatem prosta wyznaczona przez punkty K i L opisana jest wzorem $y = -x + 2$.

PRZYKŁAD 2.

Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy $y = 2x$, $y = 2x - 4$ i $y = 2x + 2$.

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 2x$	0	2
$y = 2x - 4$	-4	-2
$y = 2x + 2$	2	4



Zauważmy, że wykresy funkcji liniowych, które mają taki sam współczynnik kierunkowy, są prostymi równoległymi.

ĆWICZENIE 1.

Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy podanych funkcji.

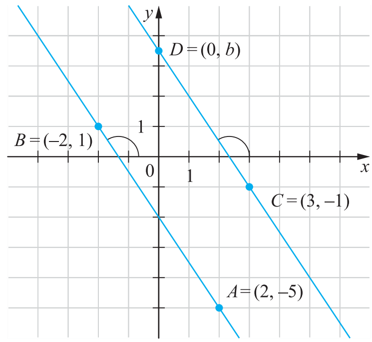
$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$ $\quad g(x) = \frac{3}{4}x + 3$ $\quad h(x) = \frac{3}{4}x + 1$ $\quad k(x) = \frac{3}{4}x + 2$

Twierdzenie

Wykresy funkcji liniowych, które mają taki sam współczynnik kierunkowy, są **prostymi równoległymi**.

PRZYKŁAD 3.

Dane są trzy punkty $A = (2, -5)$, $B = (-2, 1)$ i $C = (3, -1)$. Znajdźmy takie współrzędne punktu D leżącego na osi y, aby proste wyznaczone przez punkty A i B oraz punkty C i D były równoległe.



Proste wyznaczone przez punkty A i B oraz punkty C i D będą równoległe, jeśli ich współczynniki kierunkowe będą równe.
Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $\frac{1-(-5)}{-2-2} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$.
Szukany punkt D ma współrzędne $D = (0, b)$.
Współczynnik kierunkowy prostej CD wynosi $\frac{b-(-1)}{0-3} = \frac{b+1}{-3}$.
Porównajmy współczynniki kierunkowe prostych AB i CD.
$\frac{b+1}{-3} = -\frac{3}{2}$, czyli $2(b+1) = 9$, stąd $b = 3\frac{1}{2}$.
Punkt D ma współrzędne $\left(0,\ 3\frac{1}{2}\right)$.

ĆWICZENIE 2.

Proste są wyznaczone przez punkty A i B oraz C i D. Czy te proste są równoległe?
a) $A = (-2, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (2, -1)$, $D = (4, 3)$
b) $A = (-3, 2)$, $B = (5, 5)$, $C = (0, 0)$, $D = (5, 2)$

ĆWICZENIE 3.

Dana jest prosta k o równaniu $y = 3x - 5$ i punkt $A = (3, 2)$. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej k.

PRZYKŁAD 4.

Wśród funkcji opisanych wzorem $y = 2x + m$, $m \in \boldsymbol{R}$, znajdźmy te, których wykresami są proste wyznaczające wraz z osiami x i y trójkąt o polu równym 100.

Równanie $y = 2x + m$, $m \in \boldsymbol{R}$, opisuje rodzinę prostych równoległych. Wszystkie proste będące wykresami funkcji tej postaci mają taki sam współczynnik kierunkowy równy 2 i przecinają oś x w punkcie $A = \left(-\frac{m}{2}, 0\right)$ oraz oś y w punkcie $B = (0, m)$.

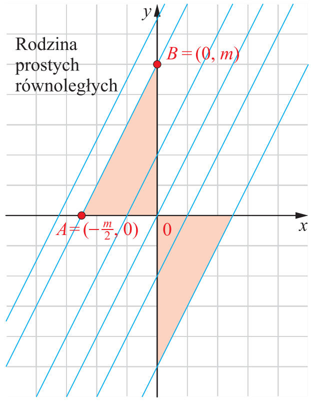
Wykonajmy rysunek pomocniczy.
Trójkąt, o którym mowa w zadaniu, jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych długości $\left|-\frac{m}{2}\right|$ i $|m|$. Jego pole wynosi:

$P = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{m}{2}\right| \cdot |m| = 100$

$\frac{m^2}{4} = 100, m^2 = 400$

$m = 20$ lub $m = -20$

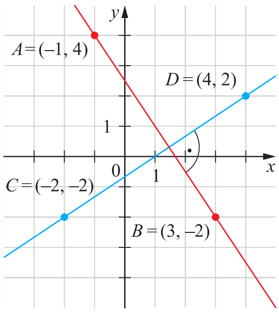
Zadanie ma dwa rozwiązania. Jeden trójkąt wyznaczają osie x i y oraz prosta o równaniu $y = 2x + 20$, a drugi – osie x i y oraz prosta o równaniu $y = 2x - 20$.



PRZYKŁAD 5.

Pary prostych na poniższych rysunkach to pary prostych prostopadłych. Obliczmy współczynnik kierunkowy każdej prostej. Zastanówmy się, jaki związek zachodzi między współczynnikami kierunkowymi każdej z tych par.

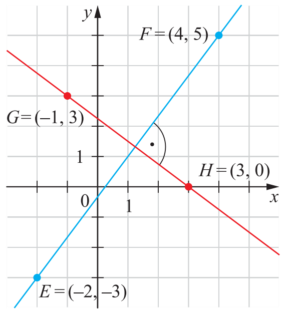
a)



Współczynnik kierunkowy prostej:

$AB\colon \frac{-2-4}{3-(-1)} = -\frac{3}{2}$, $CD\colon \frac{2-(-2)}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$.

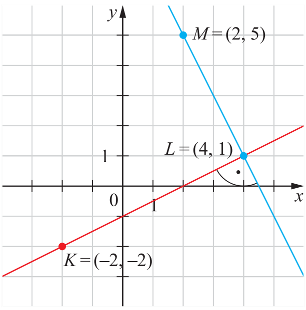
b)



Współczynnik kierunkowy prostej:

$EF\colon \frac{5-(-3)}{4-(-2)} = \frac{4}{3}$, $GH\colon \frac{0-3}{3-(-1)} = -\frac{3}{4}$.

c)



Współczynnik kierunkowy prostej:

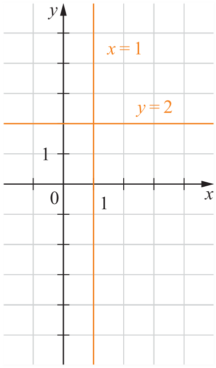
$KL\colon \frac{1-(-2)}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$, $ML\colon \frac{1-5}{4-2} = -2$.

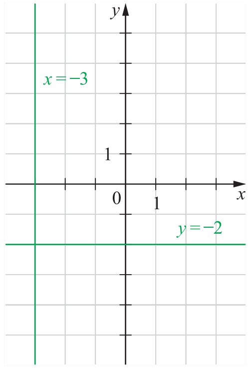
$-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$ $\qquad$ $\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

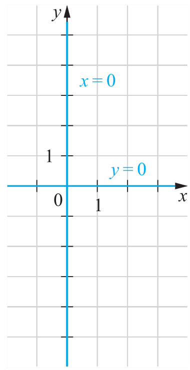
Iloczyn współczynników kierunkowych dla każdej pary tych prostych jest równy -1.

PRZYKŁAD 6.

Pary prostych przedstawione na poniższych rysunkach są prostopadłe.







Zauważmy, że jedna prosta z każdej pary ma współczynnik kierunkowy równy 0, a drugiej prostej nie zapiszemy w postaci kierunkowej.

Twierdzenie

Na płaszczyźnie dwie proste o niezerowych współczynnikach kierunkowych są **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1.

Proste $x = a$ i $y = b$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, są zawsze prostopadłe.

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej danej równaniem.

a) $y = -\frac{5}{6}x + 3$ b) $y = -4x - 2$ c) $y = x + 8$

d) $y = 0{,}7x + c$ e) $y = -\sqrt{3}x + b$ f) $y = \left(2 + \sqrt{2}\right)x - m$

ĆWICZENIE 5.

Sprawdź, czy proste przechodzące przez punkty A i B oraz C i D są prostopadłe.

a) $A = (5, -3)$, $B = (6, 4)$, $C = (5, -1)$, $D = (1, 5)$

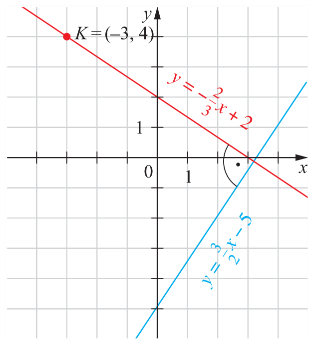
b) $A = (-3, 1)$, $B = (6, 4)$, $C = (2, 0)$, $D = (0, 6)$

PRZYKŁAD 7.

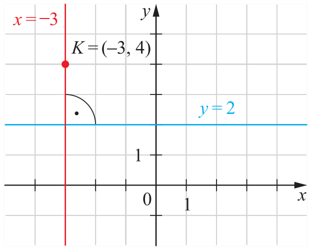
Napiszmy równanie prostej przechodzącej przez punkt $K = (-3, 4)$ i prostopadłej do danej prostej.

a) $y = \frac{3}{2}x - 5$ b) $y = 2$ c) $x = -4$

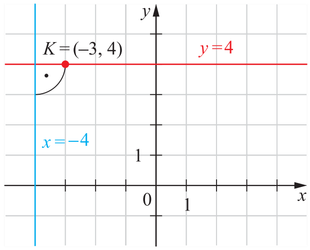
a) Współczynnik kierunkowy prostej wynosi $\frac{3}{2}$. Prosta prostopadła musi mieć współczynnik kierunkowy równy $-\frac{2}{3}$, stąd równanie kierunkowe szukanej prostej to $y = -\frac{2}{3}x + b$.
Skorzystajmy z warunku, że punkt $K = (-3, 4)$ należy do tej prostej i wyznaczmy wyraz wolny b.
$4 = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + b$, stąd $b = 2$.
Równanie prostej prostopadłej to $y = -\frac{2}{3}x + 2$.



b) W tym przypadku mamy sytuację wyjątkową. Nie badamy iloczynu współczynników kierunkowych. Prosta prostopadła do prostej $y = 2$ przechodząca przez punkt K to prosta o równaniu $x = -3$.



c) W tym przypadku również nie badamy iloczynu współczynników kierunkowych. Równanie prostej prostopadłej do prostej $x = -4$ przechodzącej przez punkt K zapiszemy w postaci $y = 4$.



ĆWICZENIE 6.

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $M = (2, 0)$ i prostopadłej do danej prostej.

a) $y = -\frac{2}{5}x + 11$ b) $x = 0$ c) $y = 0$

Proste: $x = -3$, $x = -4$, $x = 0$, które wystąpiły w przykładzie 7. i ćwiczeniu 6., nie są wykresami funkcji liniowej.

PRZYKŁAD 8.

Wyznaczmy m tak, aby proste $y = mx - 3$ i $y = -2x - 1$ były prostopadłe.

Dwie proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1, czyli $m \cdot (-2) = -1$, stąd $m = \frac{1}{2}$.

ĆWICZENIE 7.

Zbadaj, dla jakich wartości m proste $y = (2 + m)x - 1$ i $y = -x + 3$ są prostopadłe.

Definicja

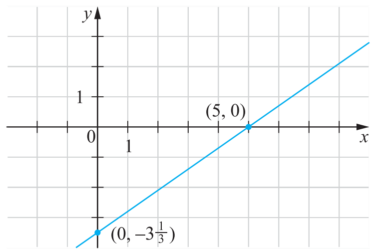
Równanie $Ax + By + C = 0$ nazywamy **równaniem ogólnym prostej** o współczynnikach A, B i C. Zakładamy, że A i B równocześnie nie przyjmują wartości 0, co zapisujemy symbolicznie jako $A^2 + B^2 > 0$.

PRZYKŁAD 9.

Narysujmy prostą określoną równaniem $2x - 3y - 10 = 0$.

I sposób

Znajdźmy dwa punkty potrzebne do narysowania prostej, wyznaczając punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych.



Dla $y = 0$: $2x - 3 \cdot 0 - 10 = 0$, $x = 5$. Prosta przechodzi przez punkt $(5, 0)$.

Dla $x = 0$: $2 \cdot 0 - 3y - 10 = 0$, $y = -3\frac{1}{3}$. Prosta przechodzi przez punkt $\left(0, -3\frac{1}{3}\right)$.

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty i prowadzimy przez nie prostą.

II sposób

Równanie ogólne prostej możemy przekształcić do postaci kierunkowej.

$2x - 3y - 10 = 0$

$-3y = -2x + 10 \mid : (-3)$

$y = \frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3}$

Dalej postępujemy jak przy rysowaniu wykresu funkcji liniowej.

Jeśli $B \neq 0$, to równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$ możemy przekształcić do postaci kierunkowej $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Jeśli $B = 0$ i $A \neq 0$, to równanie ogólne prostej możemy zapisać w postaci $Ax + C = 0$, czyli $x = -\frac{C}{A}$. Jest to równanie prostej prostopadłej do osi x.

ĆWICZENIE 8.

Naszkicuj prostą opisaną równaniem. Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej? Jeśli to możliwe, przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.

a) $x - 3y = 0$ b) $2y + 4 = 0$ c) $3x - 12 = 0$

ĆWICZENIE 9.

Które równania opisują tę samą prostą?

$y = 2x - 3$, $4x + 2y - 6 = 0$, $4x - 2y - 6 = 0$, $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$

ĆWICZENIE 10.

Wiedząc, że do prostej należą podane punkty, napisz jej równanie w postaci ogólnej.

a) $A = (5, 4)$ i $B = (-2, -5)$ b) $C = (2, 0)$ i $D = (0, -1)$

c) $E = (3, 5)$ i $F = (-2, 5)$ d) $G = (-3, 1)$ i $H = (-3, -1)$

ZADANIA

1. Prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = -\frac{2}{3}x + 5$, przechodzącą przez punkt $A = (6, 5)$, opisuje równanie

A. $y = -\frac{2}{3}x + 9$ **B.** $3x - 2y = -8$ **C.** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 8$ **D.** $y = \frac{3}{2}x - 4$

2. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $2x - y - 5 = 0$ jest równy

A. 2 **B.** –1 **C.** –5 **D.** –2

3. Napisz równanie prostej i przedstaw je w postaci ogólnej, jeśli wiadomo, że prosta ta przechodzi przez punkt $K = (0, 4)$ i ma współczynnik kierunkowy równy:

a) 3, b) $\frac{1}{2}$, c) $-\frac{1}{4}$, d) –3.

4. Napisz równanie prostej równoległej do prostej o współczynniku kierunkowym m, przechodzącej przez punkt A.

a) $m = -\frac{2}{3}$, $A = (3, 5)$ b) $m = 1$, $A = (-2, -1)$ c) $m = 3$, $A = (3, 1)$

5. Napisz równanie prostej w postaci ogólnej, przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A = (-2, 1)$ i $B = (1, -3)$ b) $A = (-2, -3)$ i $B = (3, 2)$

c) $A = (0, 0)$ i $B = (11, -2)$ d) $A = (0, -2)$ i $B = (11, -4)$

6. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej o współczynniku kierunkowym m, przechodzącej przez punkt A.

a) $m = -\frac{2}{3}$, $A = (3, 5)$ b) $m = 1$, $A = (-2, -1)$ c) $m = 3$, $A = (3, 1)$

7. Punkty $A = (-3, -3)$, $B = (9, 1)$ i $C = (6, 10)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D. Napisz równania prostych BD i AD.

8. Czy trójkąt, którego wierzchołkami są punkty A, B i C, jest trójkątem prostokątnym?

a) $A = (-2, 2)$, $B = (-6, 2)$ i $C = (-6, -1)$

b) $A = (3, 2)$, $B = (-5, -1)$ i $C = (-2, -8)$

c) $A = (5, 1)$, $B = (-4, 4)$ i $C = (-6, -2)$

9. Oblicz pole trójkąta, którego boki są zawarte w osiach x, y i prostej $5x - 3y - 15 = 0$.

BANK ZADAŃ z. 135–143 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Prostą równoległą do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 5$ i przechodzącą przez punkt $A = (6,\ 5)$ opisuje równanie

A. $y = -\frac{2}{3}x + 9$ **B.** $y = -\frac{2}{3}x + 5$ **C.** $y = -\frac{2}{3}x - 6$ **D.** $y = \frac{3}{2}x + 9$

2. Bok kwadratu AB zawiera się w prostej o równaniu $y = 2x - 5$. Kolejny bok BC tego kwadratu może zawierać się w prostej o równaniu

A. $y = 2x + 5$ **B.** $y = 5x - 2$ **C.** $y = -5x + 2$ **D.** $y = -\frac{1}{2}x + 5$

3. Wyznacz współrzędne punktów, w których prosta o równaniu $x + 2y + 3 = 0$ przecina osie x i y.

4. Wyznacz i zapisz w postaci ogólnej równanie prostej:
a) przechodzącej przez punkty $M = (-2,\ 3)$ i $N = (3,\ 2)$,
b) o nachyleniu $-\frac{2}{3}$, przecinającej oś y w punkcie $L = (0,\ -2)$,
c) równoległej do prostej $2x - 5y + 3 = 0$, przechodzącej przez punkt $A = (0,\ 3)$,
d) prostopadłej do prostej $-2x - 3y + 12 = 0$, przechodzącej przez punkt $B = (-2,\ 0)$.

5. Wśród podanych prostych znajdź pary prostych:
a) równoległych, b) prostopadłych.

k: $x - y + 7 = 0$ l: $-x + y + 11 = 0$ m: $2x - 3y + 1 = 0$
n: $3x - 2y - 7 = 0$ p: $-4x + 6y - 17 = 0$ t: $2x + 2y - 1 = 0$

3.4 Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego

PRZYKŁAD 1.

Mieszkańcy pewnej spółdzielni mieszkaniowej płacą za zużycie wody miesięczny abonament w wysokości 4,28 zł oraz za każdy zużyty metr sześcienny 2,86 zł.

a) Przygotujmy tabelkę opłat za wodę.

b) Przedstawmy graficznie zależność między wysokością opłaty a zużyciem wody.

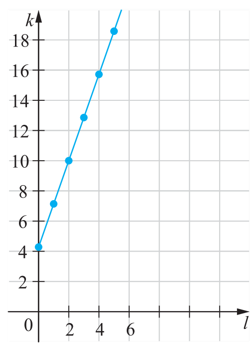
c) Napiszmy wzór, za pomocą którego można obliczyć opłatę za zużytą wodę.

d) Obliczmy, ile wody zużyto, jeśli zapłacono 84,36 zł za miesiąc.

a) Przygotujmy tabelkę, w której przedstawimy opłaty za zużycie określonej liczby metrów sześciennych wody.

Zużycie wody – l [m^3]	1	2	3	4	5
Opłata – k [zł]	$1 \cdot 2{,}86 + 4{,}28$	$2 \cdot 2{,}86 + 4{,}28$	$3 \cdot 2{,}86 + 4{,}28$	$4 \cdot 2{,}86 + 4{,}28$	$5 \cdot 2{,}86 + 4{,}28$

b) Zależność między wysokością opłaty a zużyciem wody przedstawimy teraz graficznie w układzie współrzędnych. Osie układu nazwijmy l i k. Na osi l zaznaczmy liczbę metrów sześciennych zużytej wody, na osi k – opłatę, jaką wnoszą mieszkańcy spółdzielni. W układzie współrzędnych zaznaczmy dane z tabelki. Zużycie wody można wyrazić każdą liczbą rzeczywistą nieujemną, dlatego przez punkty zaznaczone w układzie możemy poprowadzić półprostą.



c) Opłatę za wodę możemy obliczyć z wzoru $k = 2{,}86l + 4{,}28$ i $l \geqslant 0$.

d) $k = 84{,}36$, czyli $2{,}86l + 4{,}28 = 84{,}36$. Z tego równania otrzymujemy $l = 28$ [m^3].

ĆWICZENIE 1.

Za kanalizację lokatorzy pewnego osiedla płacą 3,53 zł za metr sześcienny ścieków i stałą miesięczną opłatę w wysokości 5,35 zł.

a) Przygotuj tabelkę ponoszonych kosztów.

b) Napisz wzór, za pomocą którego można obliczyć koszty odprowadzonych ścieków.

c) Ile ścieków odprowadzono, jeśli w pewnym miesiącu zapłacono 30,06 zł?

ĆWICZENIE 2.

Samochód zużywa 7 l paliwa na 100 km. Kierowca zatankował 72 l paliwa i wyruszył w podróż.

a) Przedstaw za pomocą wzoru zawartość paliwa w baku w zależności od przejechanych kilometrów.

b) Przedstaw graficznie spadek zawartości paliwa w baku w zależności od liczby przejechanych kilometrów.

c) Ile litrów paliwa pozostanie w baku po przejechaniu 560 km?

d) Ile kilometrów przejechał kierowca, jeśli zostało mu w baku 14 l paliwa?

ĆWICZENIE 3.

Ilość wyrzucanych śmieci jest proporcjonalna do liczby ludności. Z danych statystycznych wynika, że w dwustutysięcznym mieście codziennie gromadzi się 125 t śmieci.

a) Ile śmieci zgromadzi jednego dnia 60 000 ludzi, a ile – 3 600 000?

b) Podaj wzór, który pozwoli obliczyć ilość wyrzuconych śmieci jednego dnia w zależności od liczby mieszkańców.

ZADANIA

1. W trakcie doświadczenia uczniowie obserwowali wzrost temperatury cieczy w zależności od czasu trwania doświadczenia. Swoje spostrzeżenia zapisali w tabelce.

Czas trwania doświadczenia w minutach	0	5	15	20
Temperatura cieczy w °C	15	21	33	39

Temperaturę cieczy w zależności od czasu opisuje funkcja liniowa o wzorze

A. $f(x) = \frac{21}{5}x + 15$ **B.** $f(x) = \frac{11}{10}x + 15$ **C.** $f(x) = \frac{6}{5}x + 15$ **D.** $f(x) = \frac{5}{6}x + 23$

2. Temperatura w głąb Ziemi wzrasta o prawie 10°C co 1 km. Przyjmij, że temperatura na powierzchni Ziemi wynosi 20°C.

a) Opisz za pomocą wzoru temperaturę w zależności od głębokości pod powierzchnią Ziemi.

b) Przedstaw w układzie współrzędnych wykres temperatury w zależności od głębokości.

c) Jaka temperatura panuje na głębokości 2,8 km?

d) Na jakiej głębokości temperatura wynosi 60°C?

3. Firma drukuje ulotki formatu B5 w partiach po 100 sztuk. Wydrukowanie 100 sztuk kosztuje 25 zł plus opłata stała, niezależna od liczby ulotek, w wysokości 200 zł.
a) Przygotuj tabelkę opłat za wydrukowanie ulotek.
b) Przedstaw wykres wysokości opłat w zależności od liczby wydrukowanych ulotek.
c) Ile kosztuje wydrukowanie 2500 sztuk ulotek?
d) Ile ulotek wydrukowano, jeśli zapłacono 500 zł?

4. Trasa rajdu samochodowego miała długość 546 km, a prędkość średnia samochodu pewnego zawodnika wynosiła 135 km/h.
a) Opisz za pomocą wzoru dystans zawodnika do mety w zależności od czasu przejazdu.
b) Przedstaw wykres tej zależności.
c) Ile kilometrów miał do przejechania zawodnik po 75 minutach jazdy?

BANK ZADAŃ z. 144–150 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Obwód P trójkąta równobocznego o wysokości równej x opisuje wzór

A. $P(x) = 3x$ **B.** $P(x) = 3\sqrt{3}x$
C. $P(x) = 2\sqrt{3}x$ **D.** $P(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$

2. Zależność między skalą Fahrenheita i skalą Celsjusza jest wyrażona wzorem $y = \frac{9}{5}x + 32$, gdzie x oznacza temperaturę w skali Celsjusza, a y – w skali Fahrenheita. W skali Fahrenheita woda wrze w temperaturze

A. 100°F **B.** 180°F
C. 202°F **D.** 212°F

3. Koszt rocznej eksploatacji samochodu zależy od liczby przejechanych kilometrów. Dla samochodu, którym przejechano 10 000 km, koszt ten wynosi 10 360 zł. Koszt eksploatacji rośnie liniowo i dla samochodu, który przejechał 25 000 km, wynosi 20 860 zł.
a) Przedstaw graficznie zależność między liczbą przejechanych kilometrów a kosztem eksploatacji samochodu.
b) Znajdź wzór opisujący tę zależność.
c) Wyznacz koszt eksploatacji samochodu, który przejechał 15 000 km.

4. W układzie SI jednostką temperatury jest kelwin (K). Zależność między stopniami Celsjusza (T_C) a kelwinami (T_K) opisuje wzór $T_K = T_C + 273{,}15$. Wyraź temperaturę 100°C w kelwinach oraz 100 K w stopniach Celsjusza.

3.5 Równania liniowe

PRZYKŁAD 1.

Koszt wyprodukowania n sztuk rakiet tenisowych (w zł) można policzyć z wzoru $K = 14\,000 + 56n$. Ile rakiet tenisowych można wyprodukować za 84 000 zł?

Aby to obliczyć, należy rozwiązać równanie $84\,000 = 14\,000 + 56n$.

$56n = 84\,000 - 14\,000$

$56n = 70\,000 \quad | : 56$

$n = 1250$

Za 84 000 zł można wyprodukować 1250 rakiet do tenisa.

PRZYKŁAD 2.

Piotr jest o 6 lat starszy od swego brata Janka. Cztery lata temu Piotr miał dwa razy więcej lat niż Janek. Ile lat ma teraz każdy z braci?

Przeprowadźmy analizę treści zadania.

Wiek braci	Janek	Piotr
Teraz	x	$x + 6$
Cztery lata temu	$x - 4$	$(x + 6) - 4$

Opiszmy za pomocą równania sytuację sprzed czterech lat.

$(x + 6) - 4 = 2(x - 4)$

$x + 2 = 2x - 8, \ \ x - 2x = -8 - 2,$ stąd $x = 10$

Janek ma teraz 10 lat, a Piotr – 16.

Definicja

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy **zbiorem rozwiązań tego równania**.

Metodę, jaką najczęściej stosujemy, rozwiązując równania, zastosowaliśmy również w powyższych przykładach. Nazywamy ją **metodą równań równoważnych**.

Jeśli:
- do obu stron równania dodamy lub od obu stron równania odejmiemy tę samą liczbę rzeczywistą (lub wyrażenie algebraiczne),
- obie strony równania pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę rzeczywistą różną od 0,

to otrzymamy równanie równoważne.

ĆWICZENIE 1.

Koszt K w zł wynajęcia na jeden dzień samochodu zależy od liczby przejechanych kilometrów d i wyraża się wzorem $K = 210 + 1{,}26d$. Ile zapłaci klient, który przejechał w ciągu jednego dnia 720 km?

ĆWICZENIE 2.

Znajdź dwie kolejne liczby naturalne takie, że suma podwojonej mniejszej liczby i potrojonej większej jest równa 113.

PRZYKŁAD 3.

Rozwiążmy równanie.

a) $5(x-1)^2 + 10(x-1) = 5(x-1)(x+1)$ b) $3(x-2)(x+2) + 5x = 3x^2 + 5(x+1)$

Przekształcamy równania.

a) $5(x^2 - 2x + 1) + 10x - 10 = 5(x^2 - 1)$

$5x^2 - 10x + 5 + 10x - 10 = 5x^2 - 5$

$0x - 5 = -5$

$0x = 0$

Otrzymaliśmy zdanie prawdziwe. Każda liczba x spełnia to równanie. Zatem zbiorem rozwiązań równania jest zbiór liczb rzeczywistych. O takim równaniu mówimy, że jest równaniem tożsamościowym.

b) $3(x^2 - 4) + 5x = 3x^2 + 5x + 5$

$3x^2 - 12 + 5x = 3x^2 + 5x + 5$

$0x - 12 = 5$

$-12 = 5$

Otrzymaliśmy zdanie fałszywe. Równanie nie ma rozwiązania, czyli jego zbiorem rozwiązań jest zbiór pusty. O takim równaniu mówimy, że jest równaniem sprzecznym.

Równanie, którego zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych, nazywamy **równaniem tożsamościowym**.
Równanie, którego zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

ĆWICZENIE 3.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x-5}{3} - \frac{x}{6} = \frac{2x-1}{2} + 1$ b) $\frac{7}{5} - \frac{3x+2}{2} = \frac{3-x}{2} - x$

c) $\frac{4+x}{3} - \frac{2-3x}{4} = \frac{1}{4}\left(3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3}x\right)$ d) $\frac{5+x}{3} - \frac{1-x}{2} = \frac{2}{5}\left(2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{3}\right)$

PRZYKŁAD 4.

Rozwiążmy równanie $a(x-2) = 2a - 2x$ z niewiadomą x, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

$ax - 2a = 2a - 2x$ $ax + 2x = 4a$ $x(a+2) = 4a$

Kolejny krok w rozwiązywaniu tego równania wymaga rozważenia dwóch możliwości: $a + 2 \neq 0$ i $a + 2 = 0$.

1) Jeśli założymy, że $a \neq -2$, to równanie możemy podzielić stronami przez $a + 2$ i otrzymamy rozwiązanie $x = \frac{4a}{a+2}$.

2) Jeśli $a = -2$, to równanie ma postać $0x = 4 \cdot (-2)$, czyli $0 = -8$. Otrzymaliśmy zdanie fałszywe. Równanie to nie ma rozwiązania, czyli jest równaniem sprzecznym.

Liczbę a nazywamy **parametrem równania**.

ĆWICZENIE 4.

Znajdź wszystkie wartości rzeczywiste parametru k tak, aby liczba 5 była rozwiązaniem równania:

a) $2(x-3) + k(1+2x) = k - x - 1$, b) $kx - 6 = 2x + k$.

PRZYKŁAD 5.

Rozwiążmy równanie $\frac{x}{5} = \frac{2}{x} + \frac{x+3}{5}$, gdy $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

Ponieważ założyliśmy, że $x \neq 0$, więc równanie możemy pomnożyć stronami przez $5x$.

$$5x \cdot \frac{x}{5} = 5x \cdot \frac{2}{x} + 5x \cdot \frac{x+3}{5}$$

$$x^2 = 10 + x^2 + 3x$$

$$3x = -10\text{, stąd } x = -3\frac{1}{3}$$

Sprawdzenie:

$$\mathrm{L} = \frac{-3\frac{1}{3}}{5} = -\frac{10}{3} : \frac{5}{1} = -\frac{^{2}\cancel{10}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{5}_1} = -\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P} = \frac{2}{-3\frac{1}{3}} + \frac{-3\frac{1}{3} + 3}{5} = 2 : \left(-\frac{10}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) : \frac{5}{1} = \frac{^{1}\cancel{2}}{1} \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{10}_5}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{15} =$$

$$= -\frac{9}{15} - \frac{1}{15} = -\frac{2}{3}$$

$\mathrm{L} = \mathrm{P}$

PRZYKŁAD 6.

Rozwiążmy równanie $\frac{5}{x-2} = \frac{4}{3x-6}$.

Mianowniki równania muszą być różne od zera, czyli $x - 2 \neq 0$ i $3x - 6 \neq 0$, stąd $x \neq 2$. Zatem równanie możemy rozwiązywać w zbiorze liczb rzeczywistych różnych od 2. Skorzystajmy z własności proporcji. Wówczas równanie przyjmuje postać równania liniowego.

$5(3x - 6) = 4(x - 2)$

$15x - 30 = 4x - 8$

$11x = 22$, stąd $x = 2$

Równanie nie ma rozwiązania, bo założyliśmy, że $x \neq 2$.

ĆWICZENIE 5.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{3} = \frac{2x-1}{x} + \frac{x-3}{3}$ b) $\frac{5}{4x+3} = \frac{2}{x}$ c) $\frac{x}{x-1} = \frac{5x+1}{5x+3}$

ZADANIA

1. Rozwiązaniem równania $(2x + 1)^2 - 2ax + 1 = 4x^2 - 2(x - 1)$ jest zbiór liczb rzeczywistych dla

A. $a = 1$ **B.** $a = 3$ **C.** $a = -1$ **D.** $a = 0$

2. Równanie $\frac{x}{1-\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ ma takie samo rozwiązanie jak

A. $\left(1 + \sqrt{2}\right)x = 1$ **B.** $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 x = 3 - 2\sqrt{2}$

C. $\frac{3x}{1-\sqrt{2}} = 3\left(1 + \sqrt{2}\right)$ **D.** $3x - 5 = 2x + 5$

3. Sprawdź, czy liczba 3 jest rozwiązaniem równania.

a) $3(2 - x) + x = 2(3 - x)$ b) $2 + 5(x - 1) = 3(9 + 5x)$

c) $2(3x - 1) + x = 10 - 3(5 - 2x)$ d) $(x - 3)^2 + 5x^2 = (2x + 1)^2 - x - 1$

4. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $3x(x - 5) - 3x(x + 7) = 72$ b) $(x - 2)^2 - 3x(2 - x) = 4x(x - 3) + 10$

c) $\frac{x}{5} + 3 = \frac{2}{3} + \frac{x+1}{5}$ d) $\frac{2x-1}{2} - 1\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} - \frac{x+1}{3}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{2x-1} = \frac{8}{x+5}$ b) $-\frac{4}{x} = \frac{2}{x+1}$ c) $-\frac{7}{x} = \frac{5}{2x}$

6. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\frac{3x-2}{2}+4=\frac{13}{x}-\frac{1-6x}{4}$ b) $\frac{2x}{x+3}=\frac{6x+5}{3x-1}$

7. Olga jest o 4 lata starsza od brata. Cztery lata temu była dwa razy starsza od niego. Oblicz, ile lat ma Olga, a ile – jej brat.

BANK ZADAŃ z. 151–157 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Rozwiązaniem równania $3(2x-1)-2x-a=0$ jest liczba -5. Wówczas

A. $a=-5$ **B.** $a=-43$ **C.** $a=-23$ **D.** $a=43$

2. Hubert jest o 8 lat młodszy od swego brata Michała. Za trzy lata Michał będzie trzy razy starszy od Huberta. Bracia mają teraz

A. 2 lata i 10 lat. **B.** 3 lata i 11 lat. **C.** 1 rok i 9 lat. **D.** 8 lat i 17 lat.

3. W pewnym banku do codziennej kapitalizacji odsetek od kapitału stosuje się wzór $I=\frac{Prt}{365}$, w którym P oznacza kapitał w złotówkach, r – stopę procentową wyrażoną w postaci ułamka dziesiętnego, t – liczbę dni. Pan Kowalski wpłacił do tego banku kwotę 1400 zł, a stopa oprocentowania wynosiła 7%.

a) Oblicz, ile procent odsetek naliczono panu Kowalskiemu po 23 dniach.

b) Po ilu dniach bank naliczy panu Kowalskiemu odsetki w wysokości 10 zł?

4. Rozwiąż równanie $\frac{5x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2x-3}{4}-2$.

5. Sprawdź, czy liczba będąca rozwiązaniem równania $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+5}{8}=\frac{x-1}{2}$ spełnia równanie $(2+x)^2+4(x-3)=(x-2)^2-6(-9-x)$.

3.6 Nierówności liniowe

W temacie 1.11, w którym zajmowaliśmy się przedziałami liczbowymi, zaznaczaliśmy na osi liczbowej liczby rzeczywiste spełniające warunki typu: $x > -1$, $x \geqslant -1$, $x < 2$, $x \leqslant 2$. Warunki te będziemy nazywać nierównościami.

Definicja

Nierównością liniową z jedną niewiadomą nazywamy każdą nierówność, którą można zapisać w postaci $ax + b < 0$ lub $ax + b \leqslant 0$ lub $ax + b > 0$ lub $ax + b \geqslant 0$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, a x jest niewiadomą.

Nierównościami liniowymi są:
$2x - 3 \leqslant 0$ – nierówność liniowa z niewiadomą x,
$2 + 3y > 1$ – nierówność liniowa z niewiadomą y,
$2m + 3 < m + 1$ – nierówność liniowa z niewiadomą m.

ĆWICZENIE 1.

Wskaż nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

a) $2x - 4 \geqslant 0$
b) $a + 2b < a - 7$
c) $\frac{3}{4}(m - 3) + 7 > 2$
d) $2 + x^3 \leqslant 0$

Definicja

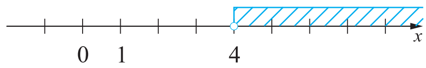
Rozwiązać nierówność oznacza znaleźć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają nierówność, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność nazywamy **zbiorem rozwiązań nierówności**.

Rozwiązanie nierówności często przedstawia się na osi liczbowej.

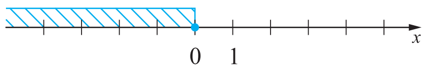
PRZYKŁAD 1.

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste spełniające podane nierówności.

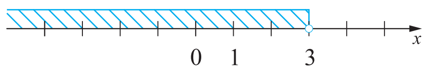
a) $x > 4$
b) $x \leqslant 0$
c) $x < 3$
d) $x \geqslant -2$

a)


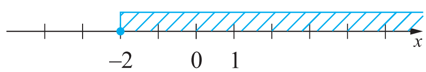
Nierówność spełniają liczby rzeczywiste większe od 4, np. $4\frac{2}{5}$, 11, 37. Zbiorem rozwiązań nierówności $x > 4$ jest przedział $(4; +\infty)$.

b)


Nierówność spełniają liczby rzeczywiste mniejsze od 0 lub równe 0, np. 0, –3, $-12\frac{1}{8}$. Zbiorem rozwiązań nierówności $x \leqslant 0$ jest przedział $(-\infty; 0\rangle$.

c)


Nierówność spełniają liczby rzeczywiste mniejsze od 3, np. $2\frac{9}{10}$, 0, $-1\frac{2}{7}$. Zbiorem rozwiązań nierówności $x < 3$ jest przedział $(-\infty; 3)$.

d)


Nierówność spełniają liczby rzeczywiste większe od –2 lub równe –2, np. –2, $\frac{1}{2}$, 3, 5, 7. Zbiorem rozwiązań nierówności $x \geqslant -2$ jest przedział $\langle -2; +\infty)$.

PRZYKŁAD 2.

Wśród liczb: $-\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{7}$, 10 wskażmy te, które spełniają nierówność $\frac{x-4}{2} \leqslant \frac{x-3}{3}$.

Lewa strona nierówności jest wyrażeniem $\frac{x-4}{2}$, a prawa to $\frac{x-3}{3}$. Podstawmy podane liczby w miejsce niewiadomej x i sprawdźmy, czy nierówność jest prawdziwa.

Dla $x = -\frac{1}{2}$ mamy: $L = \frac{-\frac{1}{2}-4}{2} = -2\frac{1}{4}$, $P = \frac{-\frac{1}{2}-3}{3} = -1\frac{1}{6}$. Zatem $L \leqslant P$, czyli nierówność jest prawdziwa.

Dla $x = 1\frac{1}{3}$ mamy: $L = \frac{1\frac{1}{3}-4}{2} = -1\frac{1}{3}$, $P = \frac{1\frac{1}{3}-3}{3} = -\frac{5}{9}$. Zatem $L \leqslant P$, czyli nierówność jest prawdziwa.

Dla $x = 2\frac{2}{7}$ mamy: $L = \frac{2\frac{2}{7}-4}{2} = -\frac{18}{21}$, $P = \frac{2\frac{2}{7}-3}{3} = -\frac{5}{21}$. Zatem $L \leqslant P$, czyli nierówność jest prawdziwa.

Dla $x = 10$ mamy: $L = \frac{10-4}{2} = 3$, $P = \frac{10-3}{3} = 2\frac{1}{3}$. Zatem $L \nleqslant P$, czyli nierówność jest fałszywa.

Liczby: $-\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{7}$ spełniają podaną nierówność. Liczba 10 nie spełnia tej nierówności.

ĆWICZENIE 2.

Wśród liczb: $-2\frac{1}{2}$, $-0{,}3$, 2, $3\frac{1}{10}$ wskaż te, które spełniają nierówność $\frac{x}{2} - 2 \leqslant 5\frac{1}{2} - 3x$.

Nierówności liniowe rozwiązujemy podobnie jak równania liniowe. Sprowadzamy je do coraz prostszych **nierówności równoważnych**, czyli nierówności, które mają ten sam zbiór rozwiązań. W procesie rozwiązywania często pojawiają się nierówności o przeciwnych zwrotach. Wzajemnie przeciwne zwroty nierówności to: $<$ i $>$ oraz $\leqslant$ i $\geqslant$.

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} 3 &< 5 \quad | \cdot 2 \\ 6 &< 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3 &< 5 \quad | \cdot (-2) \\ -6 &> -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &< 3 \quad | \cdot (-3) \\ 3 &> -9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5 &> -7 \quad | \cdot (-2) \\ -10 &< 14 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3.

Rozwiążmy nierówność.

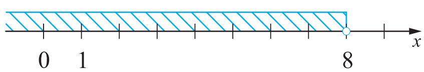
a) $x - 5 < 3$ b) $\frac{x}{6} - 2 > 0$ c) $4x < 2x - 5$

a) $x - 5 < 3 \quad | + 5$ Do obu stron nierówności dodajemy 5.

$x - 5 + 5 < 3 + 5$

$x < 8$

Nierówność spełniają liczby rzeczywiste mniejsze od 8. Zbiór rozwiązań nierówności możemy zilustrować na osi liczbowej i zapisać z użyciem symbolu przedziału.



$x \in (-\infty;\ 8)$

b) $\frac{x}{6} - 2 > 0 \quad | + 2$ Do obu stron nierówności dodajemy 2.

$\frac{x}{6} - 2 + 2 > 0 + 2$

$\frac{x}{6} > 2 \quad | \cdot 6$ Obie strony nierówności mnożymy przez 6.

$\frac{x}{{}_1\cancel{6}} \cdot \cancel{6}^1 > 2 \cdot 6$

$x > 12$

Nierówność spełniają liczby rzeczywiste większe od 12. Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(12;\ +\infty)$.

c) $4x < 2x - 5 \quad | - 2x$ Od obu stron nierówności odejmujemy $2x$.

$4x - 2x < 2x - 5 - 2x$

$2x < -5 \quad | : 2$ Obie strony nierówności dzielimy przez 2.

$x < -\frac{5}{2}$

Nierówność spełniają liczby rzeczywiste z przedziału $\left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right)$.

ĆWICZENIE 3.

Rozwiąż nierówność.

a) $-5 + x \leqslant 0{,}5$ b) $2\frac{1}{2}x < 6$ c) $2(x - 4) \geqslant 10$ d) $5 - 3x \leqslant 8 - 7x$

PRZYKŁAD 4.

Rozwiążmy nierówność.

a) $12 - x \geqslant 10$ b) $2(3x - 1) - 2x \leqslant 7x + 6$

a) $12 - x \geqslant 10 \quad | - 12$ Od obu stron nierówności odejmujemy 12.

$12 - x - 12 \geqslant 10 - 12$

$-x \geqslant -2 \quad | \cdot (-1)$ Obie strony nierówności mnożymy przez –1 i zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

!

$x \leqslant 2$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty; 2\rangle$.

b) $2(3x - 1) - 2x \leqslant 7x + 6$ Wykonujemy mnożenie $2(3x - 1)$.

$6x - 2 - 2x \leqslant 7x + 6$ Przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych po lewej stronie nierówności.

$4x - 2 \leqslant 7x + 6 \quad | - 7x$ Od obu stron nierówności odejmujemy $7x$.

$4x - 2 - 7x \leqslant 7x + 6 - 7x$

$-3x - 2 \leqslant 6 \quad | + 2$ Do obu stron nierówności dodajemy 2.

$-3x - 2 + 2 \leqslant 6 + 2$

$-3x \leqslant 8 \quad | : (-3)$ Obie strony nierówności dzielimy przez –3 i zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

!

$x \geqslant -\frac{8}{3}$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left\langle -\frac{8}{3}; +\infty \right)$.

ĆWICZENIE 4.

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2 - x}{3} \leqslant 3x + 4$ b) $2(x + 3) - 5x < x - 9$

c) $\frac{3 - x}{2} + \frac{2x}{3} > x - 1$ d) $(x - 3)^2 + 3x \geqslant x^2 - 2x$

Jeśli:

- do obu stron nierówności dodamy lub od obu stron nierówności odejmiemy tę samą liczbę rzeczywistą (lub wyrażenie),
- obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę rzeczywistą dodatnią,
- obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę rzeczywistą ujemną i zmienimy zwrot nierówności na przeciwny,

to otrzymamy nierówność równoważną.

PRZYKŁAD 5.

Które z liczb całkowitych większych od –5 spełniają nierówność
$(\sqrt{2}+1)x > 2\sqrt{2}x - 1$?

Rozwiążmy tę nierówność.

$(\sqrt{2}+1)x > 2\sqrt{2}x - 1$ Od obu stron nierówności odejmujemy $2\sqrt{2}x$.

$(\sqrt{2}+1)x - 2\sqrt{2}x > -1$

$(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2})x > -1$

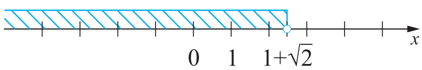
$(1-\sqrt{2})x > -1$ Obie strony nierówności dzielimy przez $(1-\sqrt{2})$ i zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny, ponieważ $(1-\sqrt{2}) < 0$.

$x < \frac{-1}{1-\sqrt{2}}$

$x < \frac{-1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ Usuwamy niewymierność z mianownika ułamka.

$x < 1+\sqrt{2}$

Zaznaczmy rozwiązanie nierówności na osi liczbowej i wskażmy wszystkie liczby całkowite większe od –5, które spełniają nierówność.



Do zbioru rozwiązań nierówności należą liczby całkowite: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2.

ĆWICZENIE 5.

a) Czy wszystkie liczby naturalne nie większe od 4 spełniają nierówność
$x - (2x-3)(2x+3) > x(5-4x)$?

b) Które z liczb całkowitych ujemnych nie mniejszych od –2 spełniają nierówność
$(\sqrt{3}-1)x > \sqrt{3}x + 2$?

ĆWICZENIE 6.

Wyznacz a tak, aby podana liczba spełniała nierówność.

a) $5(x+2) - 3 < 4x + a$, -5

b) $6x - x^2 + a \geqslant x(5-x)$, 11

PRZYKŁAD 6.

Ola miała w swojej kolekcji 27 widokówek z Włoch. Pewną liczbę tych widokówek wymieniła z Julką na widokówki z Francji. Ile widokówek Ola oddała Julce, jeśli zostało jej w kolekcji co najmniej 11 widokówek z Włoch?

Niech x oznacza liczbę widokówek, które Ola wymieniła z Julką. Zatem $27 - x$ to liczba widokówek z Włoch, które zostały w kolekcji Oli. Z treści zadania wynika, że $27 - x \geqslant 11$.

Rozwiążmy otrzymaną nierówność.

$$27 - x \geqslant 11 \quad | -27$$
$$-x \geqslant -16 \quad | \cdot (-1)$$
$$x \leqslant 16$$

Ola wymieniła z Julką najwyżej 16 widokówek.

ĆWICZENIE 7.

Podczas wycieczki szkolnej Hubert kupił 7 widokówek po 1,20 zł oraz napoje i słodycze za 15 zł. W schronisku dokupił jeszcze 7 kopert. Na te zakupy wydał prawie 24,50 zł. Ile mogła kosztować jedna koperta?

PRZYKŁAD 7.

Wróćmy do wzoru $K = 14\,000 + 56n$ opisującego koszt wyprodukowania n rakiet tenisowych (patrz przykład 1., temat 3.5). Ile rakiet tenisowych można wyprodukować za kwotę nie większą niż 100 000 zł?

To pytanie prowadzi do nierówności $14\,000 + 56n \leqslant 100\,000$. Rozwiążmy ją.

$$14\,000 + 56n \leqslant 100\,000$$
$$56n \leqslant 100\,000 - 14\,000$$
$$56n \leqslant 86\,000 \quad | : 56$$
$$n \leqslant 1535{,}714286...$$

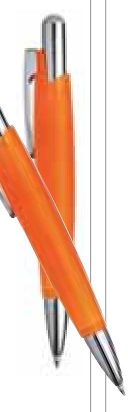
Za kwotę nie większą niż 100 000 zł można wyprodukować co najwyżej 1535 rakiet tenisowych.

ĆWICZENIE 8.

Jeśli koszt wynajęcia samochodu na jeden dzień wyraża się wzorem $K = 210 + 1{,}26d$, gdzie d oznacza liczbę przejechanych kilometrów, to ile kilometrów może przejechać klient, który chce wydać mniej niż 500 zł?

PRZYKŁAD 8.

Dziewięć długopisów kosztuje ponad 11 zł, a trzynaście tych samych długopisów – mniej niż 16 zł. Ile dokładnie kosztuje jeden długopis?



Niech x oznacza cenę jednego długopisu. Z treści zadania wynikają następujące warunki: $9x > 11$ i $13x < 16$. Rozwiążmy obie nierówności.

$$9x > 11 \quad | : 9$$
$$x > 1{,}222222222...$$

$$13x < 16 \quad | : 13$$
$$x < 1{,}230769231...$$

Cena długopisu jest większa od 1,222222... zł i mniejsza od 1,230769231... zł. Uwzględniając, że 100 gr to 1 zł, a monet drobniejszych niż 1 gr nie używamy, przyjmujemy, że długopis kosztuje 1,23 zł.

PRZYKŁAD 9.

Rozwiążmy nierówność.

a) $0x > -2$ b) $0x \leqslant -2{,}5$ c) $11 - 2x \geqslant -7(x - 1) + 5x$

a) Lewa strona nierówności $0x = 0$. Każda liczba rzeczywista spełnia tę nierówność, ponieważ $0 > -2$. Mówimy wtedy, że nierówność jest nierównością tożsamościową.

b) Lewa strona nierówności $0x = 0$. Żadna liczba rzeczywista nie spełnia tej nierówności, ponieważ nie jest prawdą, że $0 \leqslant -2{,}5$. Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór pusty. Mówimy wtedy, że nierówność jest nierównością sprzeczną.

c) Rozwiązujemy nierówność.

$$11 - 2x \geqslant -7(x - 1) + 5x$$
$$11 - 2x \geqslant -7x + 7 + 5x \quad | - 11$$
$$-2x \geqslant -2x - 4 \quad | + 2x$$
$$0x \geqslant -4, \text{ czyli } 0 \geqslant -4$$

Nierówność spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, czyli jest ona nierównością tożsamościową.

Nierówność, której zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych, nazywamy **nierównością tożsamościową**.
Nierówność, której zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym, nazywamy **nierównością sprzeczną**.

ĆWICZENIE 9.

Rozwiąż nierówność.

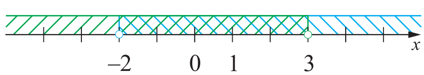
a) $3x + 4 > 7 + 3x$ b) $5 - 11x \leqslant -11x + 12$ c) $\frac{x-2}{3} \leqslant 1 + \frac{2x-3}{6}$

PRZYKŁAD 10.

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste spełniające podany warunek.

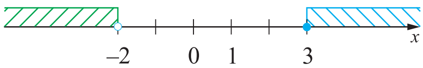
a) $x < 3$ i $x > -2$ b) $x < -2$ lub $x \geqslant 3$

c) $2x + 1 \geqslant -3$ i $-3x - 2 < 0$ d) $-2x + 1 \leqslant 0$ lub $3x - 3 < 0$

a) 

Nierówności $x < 3$ i $x > -2$, które są połączone spójnikiem „i”, można zapisać w postaci: $-2 < x < 3$. Warunek ten spełnia każda liczba rzeczywista większa od –2 i mniejsza od 3, np. $-1\frac{2}{7}$, 0, $2\frac{9}{10}$.

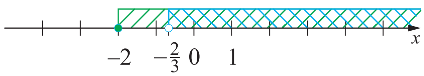
Warunek $x < 3$ i $x > -2$ spełniają liczby rzeczywiste z przedziału $(-2; 3)$.

b) 

Nierówności $x < -2$, $x \geqslant 3$ są połączone spójnikiem „lub”. Taki warunek spełniają liczby mniejsze od –2 lub nie mniejsze od 3, np. –10, –3, 3, 5, 7.

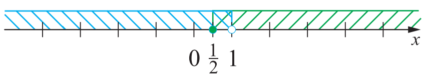
Warunek $x < -2$ lub $x \geqslant 3$ spełniają liczby rzeczywiste należące do sumy przedziałów $(-\infty;\ -2) \cup \langle 3;\ +\infty)$.

c) Rozwiązujemy każdą nierówność i otrzymujemy: $x \geqslant -2$ i $x > -\frac{2}{3}$. Zaznaczmy rozwiązania na osi liczbowej i wskażmy część wspólną zaznaczonych przedziałów.



Warunek $2x + 1 \geqslant -3$ i $-3x - 2 < 0$ spełniają liczby rzeczywiste z przedziału $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

d) Po rozwiązaniu obu nierówności otrzymujemy warunek: $x \geqslant \frac{1}{2}$ lub $x < 1$. Zaznaczmy rozwiązania obu nierówności na osi liczbowej i wskażmy sumę zaznaczonych przedziałów.



Warunek $-2x + 1 \leqslant 0$ lub $3x - 3 < 0$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, czyli liczby z przedziału $(-\infty;\ +\infty)$.

ĆWICZENIE 10.

Wyznacz liczby rzeczywiste spełniające podany warunek.

a) $2x - 10 > -7x + 8$ i $\frac{x}{6} - \frac{2x}{9} + \frac{1}{2} \geqslant 0$

b) $2(4x - 2) < 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ i $-(2 - 5x) \geqslant -2(5 - 2x)$

c) $-1{,}4x - 3{,}6 > -2{,}4x + 6$ lub $\frac{2x}{5} - \frac{7x}{10} \leqslant 1{,}5$

d) $\frac{-5x}{8} + 2\frac{3}{5} < \frac{3}{8} + x$ lub $\frac{x-2}{5} - \frac{2}{5} \leqslant -1 - \frac{x}{5}$

ZADANIA

1. Zbiorem rozwiązań nierówności $3x - 3(x + 5) < 0$ jest przedział

A. $(-\infty;\ -15)$
B. $(-\infty;\ +\infty)$
C. $(-\infty;\ 0)$
D. $(15;\ +\infty)$

2. Liczby z przedziału $(-\infty;\ 7\rangle$ spełniają nierówność

A. $-2x \geqslant -3x + 7$ **B.** $2(x-3) - 3(x-5) > 7$

C. $5(7-x) \geqslant 0$ **D.** $2(4-x) \leqslant 0$

3. Połącz w pary nierówność ze zbiorem jej rozwiązań.

A. $\frac{3x-1}{2} + \frac{5}{3}x < 3x + 2$ I. $\left\langle \frac{35}{22}; +\infty\right)$

B. $\frac{2-x}{3} - \frac{2}{5}x \geqslant \frac{3-2x}{5}$ II. $(-\infty;\ 2)$

C. $(x-3)^2 + \frac{5}{3}x > x^2 + \frac{3-x}{3}$ III. $\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right\rangle$

D. $\frac{(5-x)^2}{2} + x^2 \leqslant \frac{3}{2}(x+1)^2 - \frac{2(x+1)}{3}$ IV. $(-\infty;\ 15)$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $4x - 12 > -7x + 9$ b) $0{,}5(4x-2) < 12\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}$

c) $7(x-3) \leqslant 5(3+2x)$ d) $\frac{x}{6} - \frac{2x}{9} + \frac{1}{2} \geqslant 0$

e) $2{,}5x \geqslant 5\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{5}\right)$ f) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{2} \leqslant -1 - \frac{x}{6}$

5. Rozwiąż nierówność. Zbiór rozwiązań zilustruj na osi liczbowej.

a) $13x - (3x+12) - 5x > 7x - (5x-3)$ b) $\frac{x+3}{3} \leqslant \frac{3x-5}{2}$

c) $(x-1)^2 - (x-3)(x+3) \geqslant 2(1-x)$ d) $-0{,}7 < \frac{x+4}{3} - 0{,}1(x-3)$

6. Rozwiąż nierówność. Wśród liczb spełniających tę nierówność wskaż największą liczbę całkowitą, jeśli taka istnieje, lub najmniejszą, jeśli taka istnieje.

a) $9\left(x - \frac{1}{3}\right) + 0{,}2 > 8\left(x - \frac{1}{8}\right) - \frac{4}{5}$ b) $\frac{-3x}{7} + 1 < \frac{2}{7} - x$

c) $x - \big(5 - (3x+4)\big) \leqslant 8$ d) $\frac{5x}{2} - \left(3x + \frac{1}{4}\right) \geqslant \frac{x-3}{4} - \frac{1-x}{3}$

7. Wyznacz wszystkie liczby naturalne, które jednocześnie spełniają nierówności.

a) $5x - 3 < 2\left(\frac{7}{2}x - 1\right) - 2x$ i $\frac{4x}{5} - \frac{3x}{10} \leqslant 1$ b) $\frac{3-x}{2} \leqslant -4$ i $\frac{x}{2} - \frac{x+6}{12} \leqslant 5$

8. Wyznacz a, wiedząc, że do zbioru rozwiązań nierówności należy liczba 4.

a) $-\frac{3}{2}x + \frac{5}{6} < ax + \frac{1}{6}$ b) $5(2x-3) > ax$

9. Wyznacz a, wiedząc, że do zbioru rozwiązań nierówności należy liczba -6.

a) $-\frac{3}{2}x - \frac{5}{6} < ax + \frac{1}{6}$ b) $5(2x+3) > ax$

10. Drużyna startująca w konkursie matematycznym, złożona z Huberta, Kuby i Mikołaja, mogła zdobyć maksymalnie 35 punktów. Hubert zdobył 6 punktów, Kuba zdobył 75% punktów zdobytych przez Mikołaja i Huberta. Ile punktów co najwyżej mógł uzyskać Mikołaj?

11. Prosta przecina oś x w punkcie $(3, 0)$, a oś y w punkcie $(0, -6)$. Wyznacz punkty należące do tej prostej, których rzędna jest większa od -3 i mniejsza od 40% odciętej.

12. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa f jest funkcją rosnącą.

a) $f(x) = (m - 1)x + 3$
b) $f(x) = -3mx - 2$
c) $f(x) = \left(2m - \sqrt{3}\right)x - 2$
d) $f(x) = \left(2 - 3\sqrt{2}\right)mx - 1$

13. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa f jest funkcją malejącą.

a) $f(x) = \frac{1}{5}mx - 3$
b) $f(x) = \left(2m + 3\sqrt{3}\right)x$
c) $f(x) = (3m + 2)x - 4$
d) $f(x) = \frac{3m - 3\sqrt{2}}{4}x + 2$

BANK ZADAŃ z. 158–164 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Liczby z przedziału $\langle 3; +\infty)$ spełniają nierówność

A. $2(x - 1) > 4$
B. $2(x - 3) - 3(x - 5) > 6$
C. $5(3 - x) \geqslant 0$
D. $2(4 - x) \leqslant 2$

2. Rozwiąż nierówność. Rozwiązanie przedstaw na osi liczbowej.

a) $-1\frac{4}{5}x - 3{,}9 > -1{,}5x + 6$
b) $2x - 3 < -2(x + 3)$
c) $0{,}75(x - 8) \leqslant 1\frac{3}{4}x - 5$
d) $(2x - 1)^2 - x(x + 4) < 3x(x - 2) + 1$

3. Rozwiąż nierówność. Wskaż wszystkie liczby naturalne spełniające tę nierówność.

a) $\frac{2x - 3}{2} < \frac{4 - x}{6}$
b) $2(x - 4) < -(x - 11)$
c) $1 - (x + 3)^2 \geqslant (1 - x)(1 + x) - 21$
d) $(2x - 1)^2 - 2x^2 \geqslant \left(\sqrt{2}x - 1\right)^2 - 2$

4. Znajdź wszystkie liczby pierwsze spełniające jednocześnie nierówności:

$3(2 - x)^2 - 2x^2 < x(x - 4)$ oraz $\frac{2 - x}{2} - \frac{x + 3}{3} \geqslant \frac{-4 - x}{2}$.

5. Jeden bok prostokąta ma 7 cm. Jaką długość powinien mieć jego drugi bok, żeby obwód tego prostokąta był nie większy niż 27 cm?

3.7 Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Piotr i Karol wymyślali i rozwiązywali zagadki matematyczne. Piotr miał odgadnąć, o jakich dwóch liczbach pomyślał Karol, jeśli suma pierwszej z nich i potrojonej drugiej jest równa 3. Natomiast Karol powinien odgadnąć, o jakich dwóch liczbach pomyślał Piotr, jeśli różnica pierwszej i podwojonej drugiej jest równa -2. Każdy z chłopców potrafił wskazać po kilka par liczb, które spełniały opisane warunki. Piotr wymienił pary liczb $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(-3, 2)$. Natomiast Karol podał pary $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$. Para liczb $(0, 1)$ spełniała warunki obu zagadek.

Wprowadźmy oznaczenia: x – pierwsza liczba, y – druga liczba.

Warunki, jakie miały spełniać te liczby, to $x + 3y = 3$ i $x - 2y = -2$. Każde z równań spełnione jest przez nieskończoną liczbę par liczb. Para $(0, 1)$ spełnia obydwa równania. Jest więc rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$.

PRZYKŁAD 1.

Rozwiążmy układ równań $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ **metodą podstawiania**.

Ten układ zastąpimy układem równań równoważnych, czyli takim, który ma taki sam zbiór rozwiązań.

$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$ Z drugiego równania wyznaczamy x.

$\begin{cases} 3(3y + 6) + 2y = 7 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$ W pierwszym równaniu w miejsce x podstawiamy $3y + 6$.

$$\begin{cases} 9y + 18 + 2y = 7 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11y = -11 \quad | : 11 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \cdot (-1) + 6 \end{cases}$ Wartość y obliczoną w pierwszym równaniu podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Otrzymujemy parę liczb $(3, -1)$, która jest rozwiązaniem układu równań.

Sprawdzenie:

$$\begin{cases} 3\cdot 3+2\cdot(-1)\stackrel{?}{=}7 \\ 3-3\cdot(-1)\stackrel{?}{=}6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7=7 \\ 6=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{L}=\mathrm{P} \\ \mathrm{L}=\mathrm{P} \end{cases}$$

ĆWICZENIE 1.

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 6x+y=13 \\ 4x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x-2y=9 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+y=3 \\ 7x-3y=10 \end{cases}$

PRZYKŁAD 2.

Rozwiążmy układ równań $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$ **metodą przeciwnych współczynników**.

$\begin{cases} 3x+2y=5 \;|\cdot 3 \\ 2x-3y=-1 \;|\cdot 2 \end{cases}$ Obie strony każdego równania mnożymy przez takie liczby, aby przy niewiadomej y otrzymać przeciwne współczynniki.

$\begin{cases} 9x+6y=15 \\ 4x-6y=-2 \end{cases}$ Dodajemy równania stronami i wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

$(9x+6y)+(4x-6y)=15+(-2)$

$\begin{cases} 13x=13 \;|:13 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ Jako drugie równanie wpisujemy dowolne równanie z wyjściowego układu.

$\begin{cases} x=1 \\ 3\cdot 1+2y=5 \end{cases}$ Otrzymaną wartość podstawiamy do drugiego równania.

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(1, 1)$.

ĆWICZENIE 2.

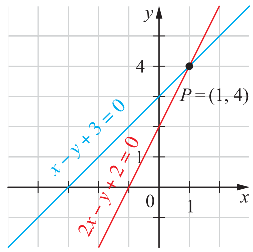
Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 13x-2y=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=8 \\ 7x-2y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$

PRZYKŁAD 3.

Przedstawmy interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$.

W tym celu narysujmy proste $x-y+3=0$ i $2x-y+2=0$ w układzie współrzędnych.
Proste przecięły się w punkcie $P=(1, 4)$. Współrzędne punktu P spełniają oba równania, zatem para liczb $(1, 4)$ jest rozwiązaniem układu równań.



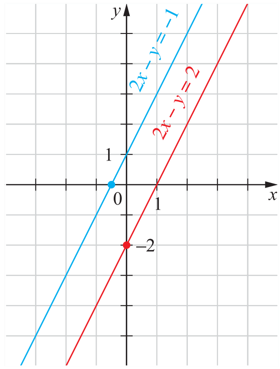
Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem równań niezależnych** lub **układem oznaczonym**. Interpretacją geometryczną układu równań oznaczonych są dwie proste przecinające się, a współrzędne punktu przecięcia są parą liczb spełniających układ równań.

PRZYKŁAD 4.

Rozwiążmy układ równań $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$.

Zacznijmy od ilustracji graficznej. Dwie proste, które narysowaliśmy, są prostymi równoległymi, więc nie mają punktu wspólnego. Algebraiczne rozwiązanie układu równań dowolną metodą (podstawiania lub przeciwnych współczynników) doprowadzi nas do układu $\begin{cases} 0 = -3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$.

Pierwsze równanie jest równaniem sprzecznym.

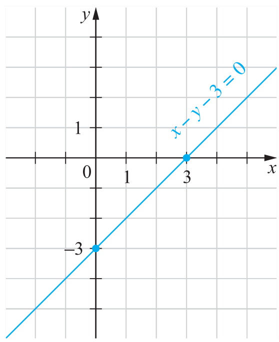


Układ równań, który nie ma rozwiązań, nazywamy **układem sprzecznym**. Geometryczną interpretacją układu sprzecznego są dwie różne proste równoległe.

PRZYKŁAD 5.

Rozwiążmy układ równań $\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$.

Zacznijmy od ilustracji graficznej. Każde z równań opisuje tę samą prostą. Taki układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rozwiązaniem jest każda para liczb będąca współrzędnymi punktu należącego do prostej. Rozwiązanie układu dowolną metodą algebraiczną doprowadzi nas do układu $\begin{cases} 0 = 0 \\ y = x - 3 \end{cases}$.



Każdą parę liczb, która jest rozwiązaniem tego układu równań, możemy zapisać jako $(x, x - 3)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem równań zależnych** lub **układem nieoznaczonym**. Geometryczną interpretacją układu równań zależnych są dwie proste, które się pokrywają.

ĆWICZENIE 3.

Czy układ równań liniowych jest układem oznaczonym, nieoznaczonym czy sprzecznym?

a) $\begin{cases} 6x - 15y = 45 \\ 2x - 5y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y = -3 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$

ĆWICZENIE 4.

Rozwiąż układ równań. Liczby x i y podaj z dokładnością do 0,01.

$$\begin{cases} 7x - 11y = -22 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

Wstaw otrzymane liczby do równania pierwszego i drugiego. Skomentuj rezultat.

PRZYKŁAD 6.

Wyznaczmy wszystkie liczby rzeczywiste m, dla których układ równań $\begin{cases} mx + y = 8 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$:

- ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- nie ma rozwiązań.

Przedstawmy równania prostych opisanych w tym układzie w postaci kierunkowej.

$$\begin{cases} y = -mx + 8 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$$

Jeśli współczynniki kierunkowe prostych są różne, to proste przecinają się i układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wobec tego układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli $m \neq 3$. Rozwiązanie to możemy wyznaczyć za pomocą jednej z poznanych metod. Zastosujmy metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} mx + y = 8 \quad | \cdot (-1) \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mx - y = -8 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\begin{cases} -mx + 3x = -8 + 4 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(-m + 3) = -4 \quad | : (-m + 3) \\ y = -3x + 4 \end{cases}$$

Dzielenie jest możliwe, ponieważ założyliśmy, że $m \neq 3$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-4}{-m + 3} \\ y = -3 \cdot \dfrac{-4}{-m + 3} + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-4}{-m + 3} \\ y = \dfrac{12 + 4(-m + 3)}{-m + 3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-4}{-m + 3} \\ y = \dfrac{-4m + 24}{-m + 3} \end{cases}$$

- Jeśli $m \neq 3$, to układ ma jedno rozwiązanie, którym jest para liczb $\left(\frac{-4}{-m+3}, \frac{-4m+24}{-m+3}\right)$.

  Tę parę liczb możemy przedstawić w postaci $\left(\frac{4}{m-3}, \frac{4m-24}{m-3}\right)$.

- Jeśli $m = 3$, to układ równań ma postać $\begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$. Układ jest sprzeczny. Proste $y = -3x + 8$ i $y = -3x + 4$ są równoległe i nie mają punktów wspólnych.
- Nie istnieje takie m, aby układ równań miał nieskończenie wiele rozwiązań.

ĆWICZENIE 5.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste m, dla których układ równań:
- ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- nie ma rozwiązań.

a) $\begin{cases} mx - 6y = 8 \\ x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + my = 5 \\ x = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = m \end{cases}$

ZADANIA

1. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ y = 5 - 7x \end{cases}$ jest

A. $x = -2$ i $y = 1$ **B.** $x = 0$ i $y = -3$ **C.** $x = 1$ i $y = -2$ **D.** $x = 1$ i $y = 2$

2. Układ równań, w którym jedno z równań ma postać $3x - y = 15$, spełnia nieskończenie wiele par liczb. Wówczas drugim równaniem może być

A. $5y - 3x = 0$ **B.** $\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y = -3$ **C.** $2x - \frac{2}{3}y - 10 = 0$ **D.** $-\frac{1}{3}x + y = 5$

3. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x + my = 1 \\ kx - 5y = 7 \end{cases}$ jest $x = -2$ i $y = 1$. Wówczas

A. $k = -6$ i $m = 7$ **B.** $k = 3$ i $m = 5$ **C.** $k = 7$ i $m = 1$ **D.** $k = -3$ i $m = 5$

4. Podaj interpretację geometryczną danego układu równań.

a) $\begin{cases} 6x - y - 3 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 8 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań dowolną metodą.

a) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ 8x - 2y = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x - 5y = -5 \\ 5x + 6y = 6 \end{cases}$

6. Znajdź wartości m i n, jeśli rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(5,\ -3)$.

a) $\begin{cases} mx - y = 23 \\ nx + y = 12 \end{cases}$
b) $\begin{cases} mx + ny = 12 \\ mx - ny = 18 \end{cases}$
c) $\begin{cases} mx + ny = -11 \\ 2mx - 3ny = 8 \end{cases}$
d) $\begin{cases} mx + ny = -39 \\ mx - ny = 9 \end{cases}$

7. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste m, dla których układ równań:
- ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- nie ma rozwiązania.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ mx + y = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x - 4y = m \\ 4x + my = 9 \end{cases}$
c) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + 3my = -2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} \frac{8}{3}x + my = 1 \\ 4mx + 6y = 3 \end{cases}$

BANK ZADAŃ z. 165–170 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x = 3 - 4y \\ 4x - y + 3 = 0 \end{cases}$ jest para liczb

A. $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ **C.** $\left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{3}\right)$ **D.** $(0,\ 3)$

2. Układ równań, w którym jedno z równań ma postać $3x - y = 5$, nie ma rozwiązania. Wówczas drugie równanie może mieć postać

A. $5x - y = 5$ **B.** $\frac{1}{3}x - y = 5$ **C.** $y = 3x + 5$ **D.** $-\frac{1}{3}x + y = 5$

3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 7x - 11y = -22 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$.

4. Wśród układów równań wskaż ten, który ma dokładnie jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań, nie ma rozwiązań. Nie rozwiązuj układu – wykonaj tylko konieczne przekształcenia. Odpowiedź uzasadnij.

a) $\begin{cases} -4x + 6y = -20 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$
b) $\begin{cases} -4x + 6y = -30 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ -4x + 5y = -10 \end{cases}$

5. Przeprowadź analizę liczby rozwiązań układu równań $\begin{cases} 2x - 5y = 2m \\ 3x + 4my = 3 \end{cases}$ w zależności od wartości parametru m.

PROJEKT

Wyznacz rozwiązania układów równań.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}y = \frac{7}{6} \\ \frac{3}{2}x + \frac{11}{6}y = \frac{13}{6} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -3x - 5y = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2002x + 2004y = 2006 \\ 2008x + 2010y = 2012 \end{cases}$

Wyjaśnij, dlaczego para liczb $(-1,\ 2)$ jest rozwiązaniem każdego układu równań. Ułóż inne układy równań, których rozwiązaniem będzie również $(-1,\ 2)$.

3.8 Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem układów równań liniowych

PRZYKŁAD 1.

W dwóch kasach prowadzono sprzedaż biletów na mecz piłki nożnej. W kasie nr 1 sprzedano 6 biletów normalnych i 15 biletów szkolnych za 480 zł, natomiast w kasie nr 2 w tym samym czasie sprzedano 8 biletów normalnych i 7 biletów szkolnych za 380 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile – szkolny?

Wprowadźmy oznaczenia:
x – cena biletu normalnego,
y – cena biletu szkolnego.
Kwotę, która wpłynęła do kasy nr 1, zapiszemy jako $6x + 15y$. Z treści zadania wiemy, że kwota ta jest równa 480 zł. Możemy zatem zapisać $6x + 15y = 480$.
Podobnie po analizie drugiej części zadania otrzymamy równanie $8x + 7y = 380$.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu równań $\begin{cases} 6x + 15y = 480 \\ 8x + 7y = 380 \end{cases}$.

Zastosujmy metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 6x + 15y = 480 & | \cdot 8 \\ 8x + 7y = 380 & | \cdot (-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48x + 120y = 3840 \\ -48x - 42y = -2280 \end{cases}$$ Dodajemy równania stronami.

$$\begin{cases} 78y = 1560 \\ 6x + 15y = 480 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{cases} 6 \cdot 30 + 15 \cdot 20 \stackrel{?}{=} 480 \\ 8 \cdot 30 + 7 \cdot 20 \stackrel{?}{=} 380 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = P \\ L = P \end{cases}$$

Bilet normalny kosztował 30 zł, a bilet szkolny – 20 zł.

ĆWICZENIE 1.

Różnica dwóch liczb wynosi 45. Suma piątej części odjemnej i odjemnika powiększona o 10 jest równa 67. Znajdź te liczby.

PRZYKŁAD 2.

Do przygotowania 3-procentowej zalewy octowej mama Huberta musiała użyć octu 5-procentowego. Obliczmy, ile wody i ile octu mama Huberta musi wykorzystać do sporządzenia 2 l tej zalewy.

Wprowadźmy oznaczenia:
x – ilość użytej wody,
y – ilość użytego octu 5-procentowego.
$x + y$ to ilość zalewy, jaką chcemy uzyskać, czyli $x + y = 2$ [l].
$0{,}05y$ to ilość czystego octu w occie 5-procentowym.
$0{,}03(x + y)$ to ilość czystego octu w zalewie, czyli $0{,}03 \cdot 2 = 0{,}06$.
Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0{,}05y = 0{,}06 \end{cases}.$$

Zastosujemy metodę podstawiania.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0{,}05y = 0{,}06 \quad | : 0{,}05 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0{,}8 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$$

Aby otrzymać odpowiednią zalewę, mama Huberta musi zmieszać 0,8 l wody z 1,2 l octu 5-procentowego.

ĆWICZENIE 2.

Roztwór 4-procentowy wymieszano z roztworem 14-procentowym i otrzymano 5 l roztworu 10-procentowego. Oblicz, ile litrów każdego roztworu użyto do sporządzenia 10-procentowej mieszaniny.

ZADANIA

1. Ola za 2 kanapki i 3 soki zapłaciła 20,25 zł. Jej koleżanka za takie same 3 kanapki i 2 soki zapłaciła 21 zł. Cena soku i cena kanapki to odpowiednio
A. 3,15 zł i 4,05 zł. **B.** 3,75 zł i 4 zł. **C.** 3,50 zł i 5 zł. **D.** 3,75 zł i 4,50 zł.

2. Za 6 lat Wojtek będzie cztery razy starszy od Aleksandry, natomiast 4 lata temu był starszy od niej czternaście razy. Aleksandra i Wojtek mają obecnie odpowiednio
A. 3 lata i 42 lata. **B.** 13 lat i 52 lata. **C.** 7 lat i 46 lat. **D.** 8 lat i 50 lat.

3. Za 4 l oleju silnikowego i 50 l etyliny 95-oktanowej zapłacimy 340 zł. Koszt 3 l takiego samego oleju i 35 l takiej samej etyliny jest równy 242,40 zł. Wyznacz cenę 1 l oleju i 1 l etyliny.

4. Obwód prostokąta jest równy 64 cm. Podwojona długość jednego z boków prostokąta jest o 4 cm większa od długości drugiego boku tego prostokąta. Wyznacz wymiary prostokąta.

5. Jeśli do pierwszej liczby dodamy podwojoną drugą liczbę, to otrzymamy 29. Natomiast jeśli do podwojonej pierwszej liczby dodamy drugą, to otrzymamy 17. Wyznacz te liczby.

6. Opiekun zapłacił 13 zł za jednorazowe bilety komunikacji miejskiej dla siebie i 8 dzieci. Kilka dni później za bilety dla siebie, 3 osób dorosłych i 4 dzieci zapłacił 17 zł. Jaka jest cena biletu dla osoby dorosłej, a jaka – dla dziecka, jeżeli ceny biletów nie uległy zmianie?

7. Profesor pracował 6 dni nad pewnym projektem, a jego asystent – 5 dni. Łącznie otrzymali honorarium w wysokości 1560 zł. Na kolejny projekt, za który otrzymali 1000 zł, profesor przeznaczył 4 dni, a asystent – 3. Jakie były stawki dzienne, jeżeli podzielili się honorarium tak samo jak przy pierwszym projekcie?

8. Operator koparki zarabia 160 zł za dzień pracy, a pracownik fizyczny – 80 zł. Pierwszego dnia na budowie było trzy razy więcej pracowników fizycznych niż operatorów koparek i razem wszyscy zarobili 2800 zł. Następnego dnia zarobili również 2800 zł, a pracowało ich 32. Ilu operatorów koparek pracowało każdego dnia?

BANK ZADAŃ z. 171–175 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 12. Różnica potrojonej jednej z liczb i podwojonej drugiej liczby jest równa 11. Szukane liczby to
A. 4 i 8 **B.** 9 i 3 **C.** 5 i 7 **D.** 12 i 0

2. Za wypożyczenie samochodu na 3 dni i przejechanie nim 160 km klient zapłacił 372 zł. Gdyby wypożyczył go na 5 dni i przejechał nim 400 km, to zapłaciłby 720 zł. Ile wynosi stała opłata za jeden dzień, a ile – za przejechanie 1 km?

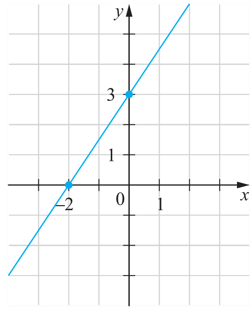
3. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 7. Jeśli w tej liczbie przestawimy cyfry, to otrzymana liczba będzie o 2 większa od podwojonej pierwszej liczby. Jaka to liczba?

4. Za korzystanie z siłowni pobierana jest jednorazowa opłata wpisowa i opłata miesięczna. Karol za 5 miesięcy zapłacił 510 zł, a Piotr za 10 miesięcy – 885 zł. Oblicz wysokość opłaty wpisowej.

ZESTAW ZADAŃ – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej opisanej wzorem



A. $3x - 2y = 6$ **B.** $y = 3x - 2$

C. $y = -2x + 3$ **D.** $y = \frac{3}{2}x + 3$

Zadanie 2. (1 p.)

Do wykresu funkcji $f(x) = (2\sqrt{2} - 3)x + 1$ nie należy punkt

A. $(2\sqrt{2} + 3,\ 0)$ **B.** $(0,\ 1)$ **C.** $(\sqrt{2},\ 5 - 3\sqrt{2})$ **D.** $(1,\ 4 - 2\sqrt{2})$

Zadanie 3. (1 p.)

Rozwiązaniem równania $(x - 3)^2 + 2x = x^2 - 6x + 3$ jest liczba

A. -3 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** 6 **D.** $\frac{3}{2}$

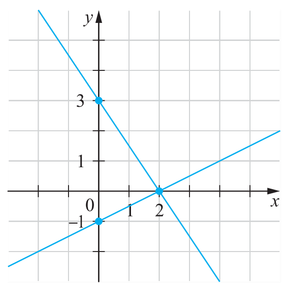
Zadanie 4. (1 p.)

Do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{2x + 4}{3} < 3x - 1$ nie należy liczba

A. 2 **B.** $2\frac{1}{3}$ **C.** 7 **D.** 1

Zadanie 5. (1 p.)

Wskaż układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.

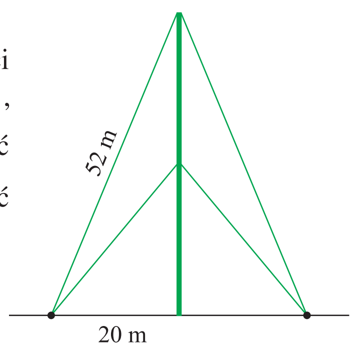


A. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

Zadanie 6. (4 p.)

Liny mocujące wieżę nadawczą zaczepiono w odległości 20 m od podstawy wieży. Nachylenie wewnętrznej, krótszej liny jest równe $\frac{7}{5}$. Lina zewnętrzna ma długość 52 m. Wyznacz długość wewnętrznej liny i wysokość wieży.



Zadanie 7. (2 p.)

Nawóz do kwiatów zawiera azot, kwas fosforowy i potas w stosunku 7 : 7 : 6. Ile kilogramów każdego składnika jest w 21 kg tego nawozu?

Zadanie 8. (3 p.)
Narysuj wykres funkcji liniowej, do której należy punkt $A = (0, -3)$ i która dla argumentów z przedziału $(-\infty; -2)$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla argumentów z przedziału $(-2; +\infty)$ – wartości ujemne. Napisz wzór tej funkcji.

Zadanie 9. (3 p.)
Asia ma 79 zł w monetach dwu- i pięciozłotowych. W sumie ma 26 wszystkich monet. Ile monet każdego rodzaju ma Asia?

Zadanie 10. (3 p.)
Piotr wybrał się z kolegą na wycieczkę rowerową. Przy rowerze kolegi zamontowany był licznik. Chłopcy od czasu do czasu zapisywali stan licznika. Popatrz na informacje zebrane w tabelce.

Czas	15 min	35 min	50 min	1 h i 15 min
Droga	4,5 km	10,5 km	15 km	22,5 km

a) Przedstaw graficznie dane z tabelki, zakładając, że chłopcy jechali bez zatrzymywania się i nie zmieniali tempa jazdy.
b) Podaj wzór opisujący drogę pokonaną przez chłopców w zależności od czasu wyrażonego w godzinach.
c) Jaką drogę pokonali chłopcy, jeśli wycieczka skończyła się po 2 godzinach?

Zadanie 11. (3 p.)
Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wysokości trójkąta ABC, jeśli $A = (-2, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (3, 5)$.

Zadanie 12. (3 p.)
Właściciel kortu tenisowego pobiera stałą opłatę roczną, tak zwane wpisowe, i opłatę godzinową za bieżące korzystanie z kortu. W poprzednim roku Tomek grał 39 godzin i zapłacił 384 zł, a Tamara za 51 godzin zapłaciła 456 zł. Oblicz wysokość wpisowego i stawkę za 1 godzinę.

Zadanie 13. (3 p.)
Znajdź wartości m i n, jeśli para liczb $(5, -3)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 4mx + 10ny = -20 \\ mx - 4ny = 73 \end{cases}.$$

MOST BROOKLIŃSKI, NOWY JORK

4

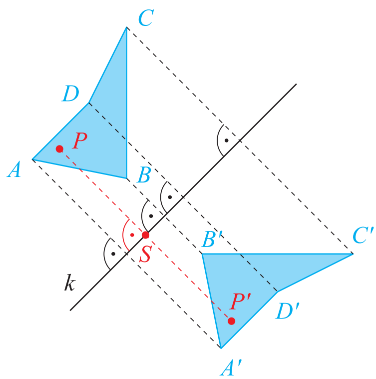
Przekształcanie wykresów funkcji

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

- szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$

4.1 Symetria względem osi układu współrzędnych

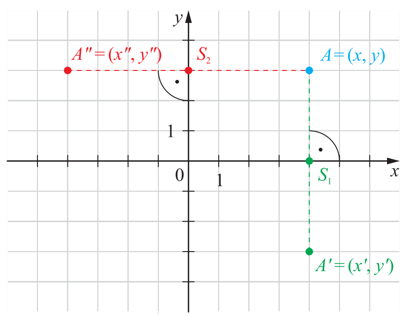
Figury pokazane na rysunku to **figury symetryczne względem prostej *k***. Każdemu punktowi P figury $ABCD$ odpowiada punkt P' należący do figury $A'B'C'D'$ taki, że $|PS| = |SP'|$, $S \in k$ oraz odcinek PP' jest prostopadły do prostej k.



PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy współrzędne punktu symetrycznego do punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi x oraz w symetrii względem osi y układu współrzędnych.

Punkt $A' = (x', y')$ jest obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi x, co zapisujemy jako $A' = S_x(A)$. Ponieważ odcinek AA' jest prostopadły do osi x oraz $|AS_1| = |S_1A'|$, więc $x' = x$, $y' = -y$. Pierwsze współrzędne punktów A i A' są równe, a drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi.



Punkt $A'' = (x'', y'')$ jest obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi y, co zapisujemy jako $A'' = S_y(A)$. Ponieważ odcinek AA'' jest prostopadły do osi y oraz $|AS_2| = |S_2A''|$, więc $x'' = -x$, $y'' = y$. Pierwsze współrzędne punktów A i A'' są liczbami przeciwnymi, a drugie współrzędne są takie same.

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi x jest punkt $A' = (x, -y)$.
Zapisujemy to jako $S_x(A) = A'$.
Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi y jest punkt $A'' = (-x, y)$.
Zapisujemy to jako $S_y(A) = A''$.

ĆWICZENIE 1.

Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danego względem osi x oraz osi y.

a) $A = (2,\ 0)$ b) $B = (-4,\ 0)$ c) $C = (0,\ -2)$ d) $D = (0,\ 0)$

ĆWICZENIE 2.

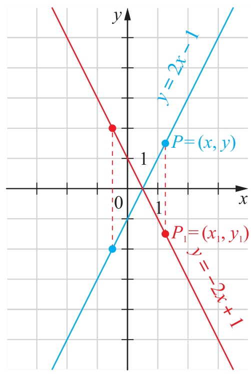
Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danego względem osi x oraz osi y.

a) $A = (-7,\ 1)$ b) $B = (4,\ -4)$ c) $C = \left(\sqrt{2},\ \sqrt{3}\right)$ d) $D = \left(\pi,\ \frac{1}{2}\right)$

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy wzór funkcji, której wykres jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji $y = 2x - 1$.

Punkt $P = (x,\ y)$ należący do wykresu funkcji $y = 2x - 1$ przekształćmy w symetrii względem osi x na punkt $P_1 = (x_1,\ y_1)$. Między współrzędnymi punktów P i P_1 zachodzą następujące zależności: $x_1 = x$ oraz $y_1 = -y$, stąd $y = -y_1$.



Po podstawieniu tych zależności do wzoru funkcji $y = 2x - 1$ otrzymujemy $-y_1 = 2x_1 - 1$, czyli $y_1 = -2x_1 + 1$. Aby wykresy obu funkcji można było narysować w jednym układzie współrzędnych, ostatni wzór zapisujemy w postaci $y = -2x + 1$.

Otrzymaliśmy więc wzór funkcji $y = -2x + 1$, której wykres powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = 2x - 1$ w symetrii względem osi x.

Jeżeli $f(x) = 2x - 1$, a $g(x) = -2x + 1$, to $g(x) = -f(x)$. Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy z wykresu $y = f(x)$ w wyniku odbicia symetrycznego względem osi x.

ĆWICZENIE 3.

Przekształć w symetrii względem osi x wykres funkcji f. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ b) $f(x) = x^2$

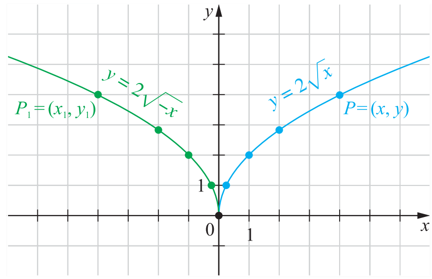
PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy wzór funkcji, której wykres jest symetryczny względem osi y do wykresu funkcji $y = 2\sqrt{x}$.

Dziedziną funkcji $y = 2\sqrt{x}$ jest zbiór $\langle 0;\ +\infty)$. Punkt $P = (x,\ y)$ należący do jej wykresu przekształcamy w symetrii względem osi y na punkt $P_1 = \left(x_1,\ y_1\right)$. Między współrzędnymi punktów P i P_1 zachodzą następujące zależności: $x_1 = -x$, stąd $x = -x_1$, oraz $y_1 = y$. Po podstawieniu tych zależności do wzoru funkcji otrzymujemy $y_1 = 2\sqrt{-x_1}$. Aby wykresy obu funkcji można było narysować w jednym układzie współrzędnych, ostatni wzór zapisujemy w postaci $y = 2\sqrt{-x}$. Dziedziną otrzymanej funkcji jest zbiór $D_1 = (-\infty;\ 0\rangle$. W naszkicowaniu wykresów funkcji pomogą nam tabelki wartości funkcji.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$y=2\sqrt{x}$	0	1	2	$2\sqrt{2}$	4

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{4}$	0
$y=2\sqrt{-x}$	4	$2\sqrt{2}$	2	1	0



Jeżeli $f(x)=2\sqrt{x}$, a $g(x)=2\sqrt{-x}$, to $g(x)=f(-x)$. Wykres funkcji $y=f(-x)$ otrzymujemy z wykresu $y=f(x)$ w wyniku odbicia symetrycznego względem osi y.

ĆWICZENIE 4.

Przekształć w symetrii względem osi y wykres funkcji f. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^3$

1. Wykresy funkcji $y=f(x)$ i $y=-f(x)$ są wzajemnie symetryczne względem osi x. Jeżeli znamy wykres funkcji $y=f(x)$, możemy naszkicować wykres funkcji $y=-f(x)$.
2. Wykresy funkcji $y=f(x)$ i $y=f(-x)$ są wzajemnie symetryczne względem osi y. Jeżeli znamy wykres funkcji $y=f(x)$, możemy naszkicować wykres funkcji $y=f(-x)$.

ZADANIA

1. Wykres funkcji $f(x)=3x^2-1$ przekształcono symetrycznie względem osi x i otrzymano wykres funkcji

A. $g(x)=3x^2+1$ **B.** $g(x)=-3x^2-1$ **C.** $g(x)=-3x^2+1$ **D.** $g(x)=-3x^2$

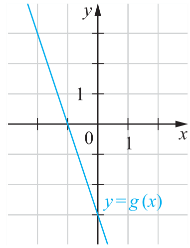
2. Po przekształceniu wykresu funkcji $f(x)=-\frac{1}{3}x-2$ symetrycznie względem osi y otrzymano wykres funkcji

A. $g(x)=-\frac{1}{3}x+2$ **B.** $g(x)=\frac{1}{3}x+2$ **C.** $g(x)=\frac{1}{3}x$ **D.** $g(x)=\frac{1}{3}x-2$

3. Dana jest funkcja $f(x)=x^2-9$. Po przekształceniu jej wykresu w symetrii względem osi x otrzymano wykres funkcji g. Natomiast po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem osi y otrzymano wykres funkcji h. Połącz w pary podane informacje tak, aby zdania były prawdziwe.

A. Funkcję g opisuje wzór	I. $(-3;\ 3)$
B. Funkcję h opisuje wzór	II. x^2-9
C. Funkcja g jest malejąca w przedziale	III. $(-\infty;\ 0\rangle$
D. Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do przedziału	IV. $\langle 0;\ +\infty)$
E. Funkcja h jest malejąca w przedziale	V. $-x^2+9$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = g(x)$, który otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii względem osi x. Funkcję f opisuje wzór



A. $f(x) = -x - 3$ **B.** $f(x) = 3x - 3$

C. $f(x) = 3x + 3$ **D.** $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$

5. Sporządź wykres funkcji i odbij go symetrycznie względem osi x. Napisz wzór otrzymanej funkcji.

a) $y = -3x - 5$ b) $y = -2x^2$ c) $y = -\frac{2}{x}$ d) $y = -x^3$

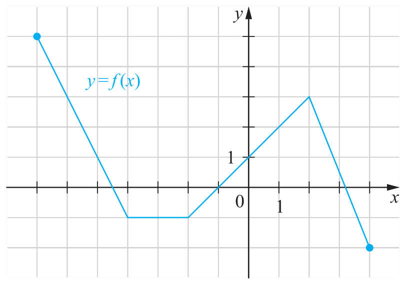
6. Wykres danej funkcji przekształć symetrycznie względem osi y. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

a) $y = \pi x - 1{,}5$ b) $y = 3x^2 + 2$ c) $y = \frac{1}{2}x^2$ d) $y = -x^3 + x$

7. Wykres funkcji f przedstawiony na rysunku przekształć w symetrii względem:

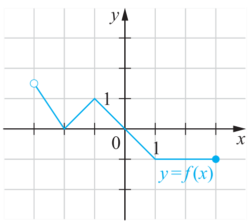
a) osi x, b) osi y.

Podaj przedziały monotoniczności funkcji f oraz funkcji, której wykres otrzymasz po wykonaniu przekształcenia.

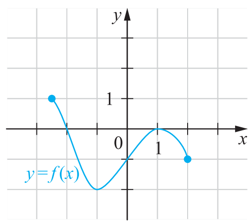


8. Dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(-x)$ i $y = -f(x)$.

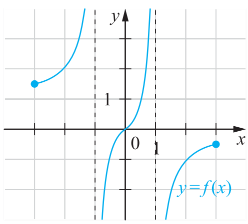
a)



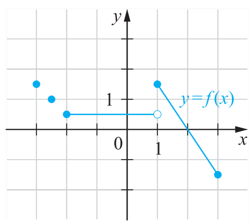
b)



c)



d)



9. Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 6$. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $g(x) = -f(x)$. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f, g i osią y.

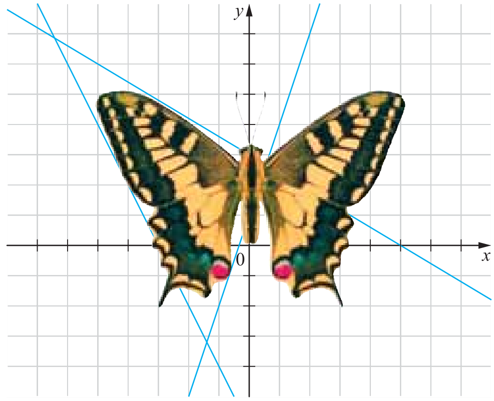
b) $h(x) = f(-x)$. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f, h i osią x.

10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3\sqrt{x}$ i na jego podstawie wykonaj wykres funkcji:

a) $g(x) = -3\sqrt{x}$, b) $h(x) = 3\sqrt{-x}$.

11. Lewe skrzydło motyla ograniczają proste będące wykresami funkcji $y = -\frac{3}{5}x + 3$, $y = 3x + 1$ oraz $y = -2x - 6$.

Przyjmij, że rysunek motyla jest figurą symetryczną względem osi y, i wyznacz równania prostych ograniczających prawe skrzydło motyla.



BANK ZADAŃ z. 176–179 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wykres funkcji $f(x) = -2x^2 + 3$ przekształcono symetrycznie względem osi x i otrzymano wykres funkcji

A. $g(x) = 2x^2 - 3$ **B.** $g(x) = -2x^2 - 3$ **C.** $g(x) = 2x^2 + 3$ **D.** $g(x) = 2x^2$

2. Wykres funkcji $f(x) = 4x - 5$ przekształcono symetrycznie względem osi y i otrzymano wykres funkcji

A. $g(x) = 4x + 5$ **B.** $g(x) = -4x - 5$ **C.** $g(x) = 4x$ **D.** $g(x) = -4x + 5$

3. Dane są punkty $A = (-2, -2)$, $B = (3, 6)$, $C = (-5, 0)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem osi x oraz osi y.

4. Wyznacz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = -10x + 4$ względem

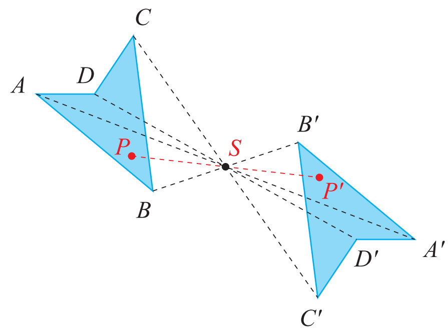
a) osi x, b) osi y.

5. Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$, naszkicuj wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

6. Wykres funkcji $y = 2x + 9$ jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji $y = f(x)$ oraz symetryczny względem osi y do wykresu funkcji $y = g(x)$. Podaj wzory funkcji f i g.

4.2 Symetria względem początku układu współrzędnych

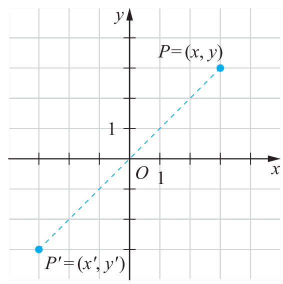
Figury przedstawione na rysunku są figurami **symetrycznymi względem punktu S**. Każdemu punktowi P należącemu do figury $ABCD$ odpowiada punkt P' należący do figury $A'B'C'D'$ taki, że $|PS| = |SP'|$ oraz punkty P, S, P' są współliniowe (tzn. leżą na jednej prostej).



PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy współrzędne punktu $P' = (x', y')$ położonego symetrycznie do punktu $P = (x, y)$ względem początku układu współrzędnych, czyli względem punktu $O = (0, 0)$.

Ponieważ punkty P, O, P' są współliniowe oraz $|PO| = |OP'|$, więc $x' = -x$, $y' = -y$.



Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem punktu $(0, 0)$ jest punkt $P' = (-x, -y)$. Zapisujemy to jako $S_{(0,0)}(P) = P'$.

ĆWICZENIE 1.

Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem początku układu współrzędnych.

a) $A = (-5, -3)$

b) $B = (-4, 0)$

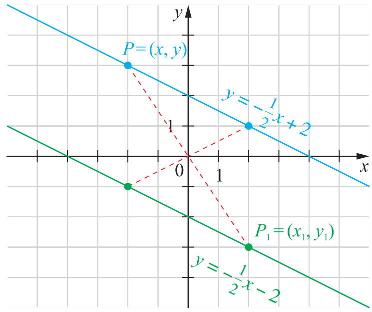
c) $C = \left(\sqrt{7}, \sqrt{2}\right)$

d) $D = \left(-\sqrt[3]{4}, \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy wzór funkcji g, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f o wzorze $y = -\frac{1}{2}x + 2$ względem punktu $(0, 0)$.

Punkt $P = (x,\ y)$ należący do wykresu funkcji $y = f(x)$ przekształcamy w symetrii względem punktu $(0,\ 0)$ na punkt $P_1 = (x_1,\ y_1)$. Między współrzędnymi punktów P i P_1 zachodzą zależności: $x_1 = -x$ i $y_1 = -y$, czyli $x = -x_1$ i $y = -y_1$.



Po podstawieniu ich do wzoru funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 2$ otrzymujemy $-y_1 = -\frac{1}{2}(-x_1) + 2$. Funkcja g określona jest więc wzorem $y_1 = -\frac{1}{2}x_1 - 2$. Aby wykresy obu funkcji można było narysować w jednym układzie współrzędnych, ostatni wzór zapisujemy w postaci $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ względem początku układu współrzędnych otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(-x)$.

ĆWICZENIE 2.

Wykres funkcji f przekształć w symetrii względem punktu $(0, 0)$, a następnie napisz wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = -x - 4$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = \frac{4}{x}$

ĆWICZENIE 3.

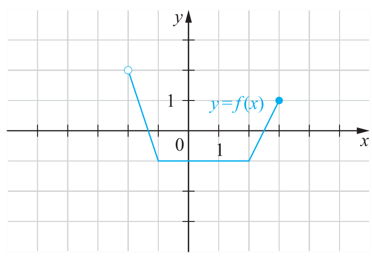
Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$ przekształć:

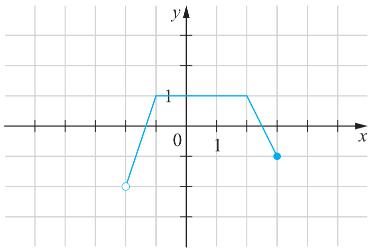
a) w symetrii względem osi x, a następnie otrzymany obraz wykresu przekształć w symetrii względem osi y,
b) w symetrii względem punktu $(0, 0)$.

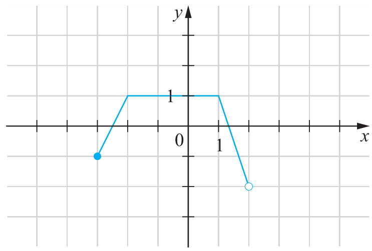
Co zauważasz?

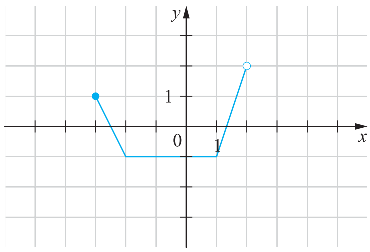
ZADANIA

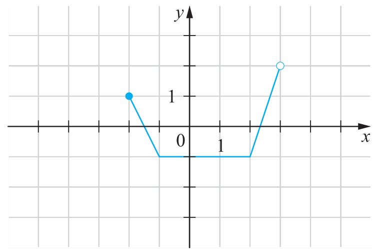
1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Wykres ten przekształcono w symetrii względem początku układu współrzędnych i otrzymano wykres funkcji $y = g(x)$ przedstawionej na rysunku



A.


B.


C.


D.


2. W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = -(x^2 + 2) - 3$ w symetrii względem początku układu współrzędnych otrzymano wykres funkcji

A. $g(x) = x^2 - 1$ **B.** $g(x) = -(x^2 + 2) + 3$

C. $g(x) = x^2 + 5$ **D.** $g(x) = (x^2 - 2) + 3$

3. Dane są funkcje: $f(x) = \frac{3}{2-x}$ oraz $g(x) = \frac{3}{2+x}$. Wykres funkcji g można otrzymać w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f w symetrii względem

A. osi x. **B.** osi y.

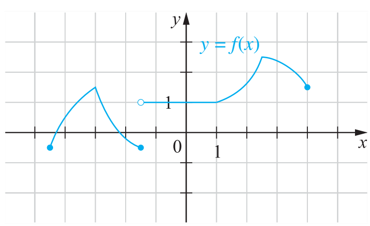
C. początku układu współrzędnych. **D.** osi x, a następnie osi y.

4. Dane są punkty: $A = (3, -4)$, $B = (0, 16)$, $C = \left(\sqrt[3]{5}, -\sqrt{7}\right)$, $D = \left(1{,}(5), -\sqrt{2}\right)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem początku układu współrzędnych.

5. Sporządź wykres funkcji i przekształć go w symetrii względem punktu $(0, 0)$. Napisz wzór otrzymanej funkcji.

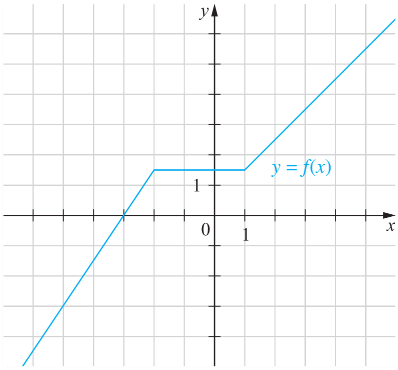
a) $y = 6x - 2$ b) $y = -x^2$ c) $y = 2\sqrt{x}$ d) $y = -x^3$

6. Wykres funkcji f przekształć w symetrii względem punktu $(0, 0)$. Porównaj własności funkcji f oraz funkcji, której wykres otrzymasz po przekształceniu.

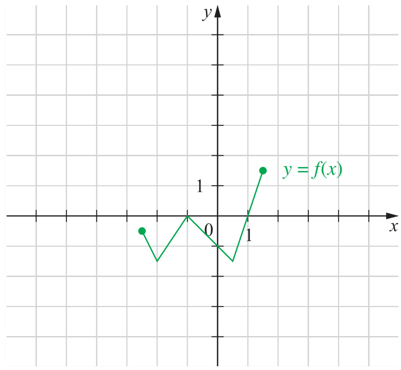


7. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji $y = -f(-x)$.

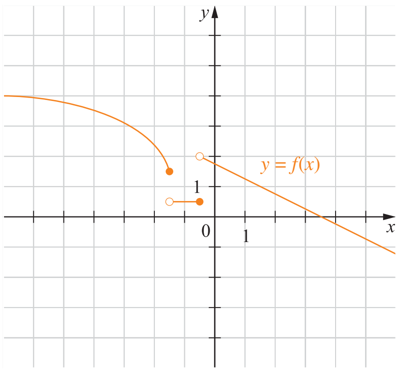
a)



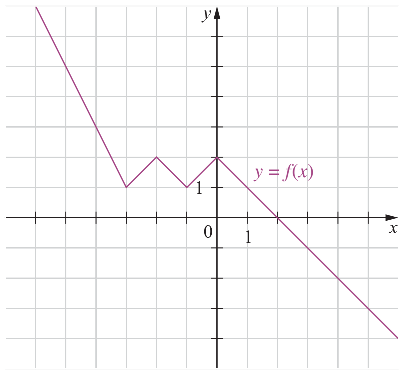
b)



c)



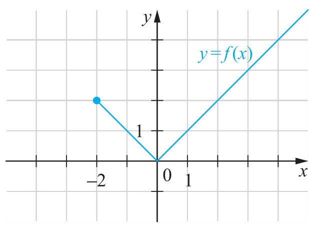
d)



8. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(-x)$. Podaj zbiór argumentów, dla których wartości funkcji f są dodatnie, oraz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są ujemne.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = -x^4$ d) $f(x) = \frac{1}{2x}$

9. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ dla $x \in \langle -2; +\infty)$. Przekształć ten wykres w symetrii względem osi x, a następnie otrzymany obraz wykresu przekształć w symetrii względem osi y. Jakim jednym przekształceniem można zastąpić podane przekształcenia? Uzasadnij odpowiedź.



10. Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$ b) $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ c) $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-x}$

11. Narysuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x}$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = -f(-x)$. Opisz wykonane przekształcenia.

BANK ZADAŃ z. 180–185 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wykres funkcji $f(x) = 8 - x^3$ przekształcono symetrycznie względem początku układu współrzędnych i otrzymano wykres funkcji

A. $g(x) = x^3 - 8$ **B.** $g(x) = x^3 + 8$ **C.** $g(x) = 8 - x^3$ **D.** $g(x) = -x^3 - 8$

2. Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x + 3}$ oraz $g(x) = \sqrt{3 - x}$. Wykres funkcji g można otrzymać po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem

A. osi x.
B. początku układu współrzędnych.
C. osi y.
D. osi x, a następnie osi y.

3. Dane są punkty $A = (7, -9)$, $B = (-4, -10)$, $C = (17, 0)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem początku układu współrzędnych.

4. Narysuj wykres dowolnej funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -5; 4 \rangle$, a zbiorem wartości – przedział $\langle -3; 4 \rangle$. Przekształć ten wykres w symetrii względem punktu $(0, 0)$.

5. Wyznacz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 12x - 2{,}3$ względem punktu $(0, 0)$.

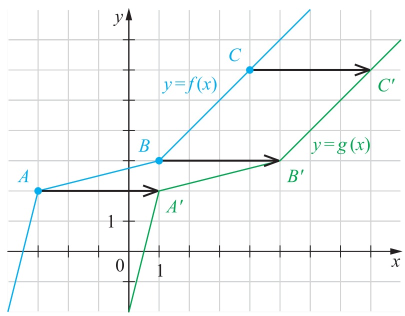
6. Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, naszkicuj wykres funkcji $y = -f(-x)$.

4.3 Przesunięcia wykresu funkcji równolegle do osi x i do osi y

Wykres funkcji to zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają zależność $y = f(x)$. Aby przesunąć wykres funkcji np. w prawo o daną liczbę jednostek, należy przesunąć każdy punkt wykresu w prawo o tyle samo jednostek.

ĆWICZENIE 1.

Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Wykres funkcji g jest wynikiem przesunięcia wykresu funkcji f równolegle do osi x o 4 jednostki w prawo. Odczytaj współrzędne punktów A', B', C' należących do wykresu funkcji g. Porównaj współrzędne punktów A i A', B i B' oraz C i C'.



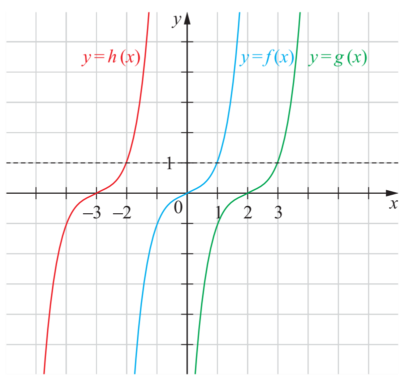
ĆWICZENIE 2.

Wyznacz współrzędne punktów A', B', C', D', E' będących obrazami punktów $A = (-5, 6)$, $B = (2, -5)$, $C = (7, 10)$, $D = (0, 3)$, $E = (4, 0)$ w przesunięciu równoległym do osi x o:

a) 3 jednostki w prawo, b) 4 jednostki w lewo, c) $\frac{2}{3}$ jednostki w lewo.

PRZYKŁAD 1.

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f, g oraz h. Wyznaczmy zależności między wzorami funkcji f i g oraz f i h.



Z rysunku odczytujemy, że:

$g(2) = f(0)$ oraz $h(-3) = f(0)$

$g(3) = f(1)$ $h(-2) = f(1)$

ogólnie $g(x) = f(x - 2)$ ogólnie $h(x) = f(x + 3)$

Zauważmy, że:

- wykres funkcji g możemy otrzymać po przesunięciu wykresu funkcji f równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo, a wartości funkcji g są równe odpowiednio wartościom funkcji f dla argumentów o 2 mniejszych, zatem
  $g(x) = f(x - 2)$;

- wykres funkcji h możemy otrzymać po przesunięciu wykresu funkcji f równolegle do osi x o 3 jednostki w lewo, a wartości funkcji h są równe odpowiednio wartościom funkcji f dla argumentów o 3 większych, zatem $h(x) = f(x + 3)$;
- wykres funkcji g możemy otrzymać po przesunięciu wykresu funkcji h równolegle do osi x o 5 jednostek w prawo, stąd $g(x) = h(x - 5)$.

Po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ równolegle do osi x o p jednostek otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - p)$. Jeżeli $p > 0$, to przesunięcie będzie w prawo, jeżeli $p < 0$, to w lewo.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy wzór funkcji $y = g(x)$, której wykres powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $f(x) = \sqrt{x}$ równolegle do osi x o:

a) 2 jednostki w lewo,

b) 4 jednostki w prawo.

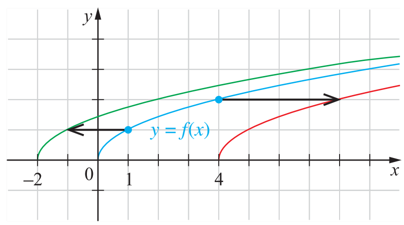
W obu punktach skorzystamy ze wzoru $y = f(x - p)$.

a) Ponieważ $p = -2$, więc

$y = g(x) = f\big(x - (-2)\big) = f(x + 2) = \sqrt{x + 2}$.

b) Ponieważ $p = 4$, więc

$y = g(x) = f(x - 4) = \sqrt{x - 4}$.



ĆWICZENIE 3.

Wyznacz wzór funkcji g, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji f równolegle do osi x o podaną liczbę jednostek.

a) $f(x) = x + 2$, o 4 jednostki w lewo

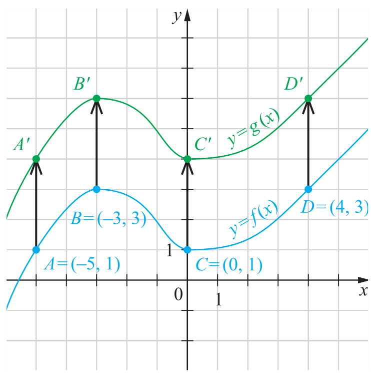
b) $f(x) = \frac{4}{3}x^2$, o 3 jednostki w prawo

c) $f(x) = x^3$, o 5 jednostek w prawo

d) $f(x) = 2\sqrt{x}$, o 1,5 jednostki w lewo

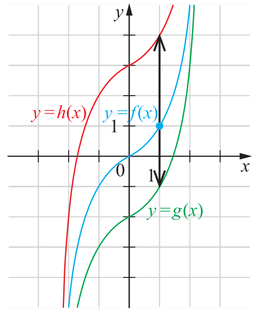
ĆWICZENIE 4.

Na rysunku przedstawiono wykresy dwóch funkcji. Wykres funkcji g powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f równolegle do osi y o 3 jednostki w górę. Odczytaj współrzędne punktów A', B', C', D' należących do wykresu funkcji g, będącej obrazem funkcji f w tym przesunięciu.



PRZYKŁAD 3.

Przeanalizujmy funkcje f, g, h przedstawione na rysunku.



Zauważmy, że po przesunięciu wykresu funkcji f równolegle do osi y:

- o 2 jednostki w dół możemy otrzymać wykres funkcji g,
- o 3 jednostki w górę możemy otrzymać wykres funkcji h.

Zapiszmy zależności między wartościami tych funkcji:

$g(1) = f(1) - 2$ oraz $h(1) = f(1) + 3$

$g(0) = f(0) - 2$ $h(0) = f(0) + 3$

ogólnie $g(x) = f(x) - 2$ ogólnie $h(x) = f(x) + 3$

Po przesunięciu wykresu funkcji f o 2 jednostki w dół otrzymujemy wykres funkcji $g(x) = f(x) - 2$.

Po przesunięciu wykresu funkcji f o 3 jednostki w górę otrzymujemy wykres funkcji $h(x) = f(x) + 3$.

Po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ równolegle do osi y o q jednostek otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x) + q$. Jeżeli $q > 0$, to przesunięcie będzie w górę, a jeżeli $q < 0$, to w dół.

ĆWICZENIE 5.

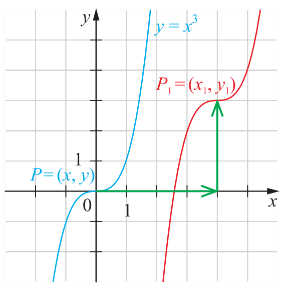
Wykres funkcji danej wzorem przesunięto równolegle do osi y o podaną liczbę jednostek. Wyznacz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

a) $f(x) = 3x$, o 5 jednostek w dół
b) $f(x) = -0{,}5x + 2$, o 2 jednostki w górę
c) $f(x) = 3x^2$, o 2,5 jednostki w górę

PRZYKŁAD 4.

Wyznaczmy wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = x^3$ równolegle do osi x o 4 jednostki w prawo i równolegle do osi y o 3 jednostki w górę.

Przesuńmy punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji $y = x^3$. Otrzymamy punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ taki, że $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + 3$, czyli $x = x_1 - 4$, $y = y_1 - 3$.



Po wstawieniu zależności do wzoru $y = x^3$ otrzymujemy: $y_1 - 3 = (x_1 - 4)^3$, stąd $y_1 = (x_1 - 4)^3 + 3$. Zatem wzór funkcji otrzymanej w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = x^3$ równolegle do osi x o 4 jednostki w prawo i równolegle do osi y o 3 jednostki w górę ma postać $y = (x - 4)^3 + 3$.

Po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ równolegle do osi x o p jednostek i równolegle do osi y o q jednostek otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.

ĆWICZENIE 6.

Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$ równolegle do osi x o 3 jednostki w prawo oraz równolegle do osi y o 5 jednostek w dół,

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ równolegle do osi x o $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jednostek w prawo oraz równolegle do osi y o $\frac{3}{5}$ jednostki w górę.

ĆWICZENIE 7.

O ile jednostek i jak należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = -x^3$ równolegle do:

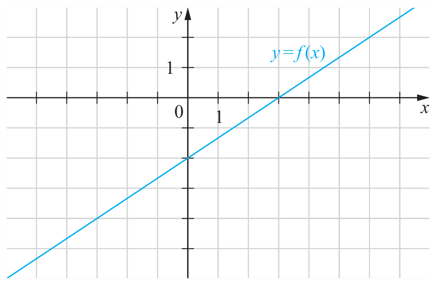
a) osi x, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = -(x-2)^3$,

b) osi y, aby otrzymać wykres funkcji $h(x) = -x^3 + 3$.

Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz f i h oraz zaznacz przesunięcie.

ZADANIA

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$, który otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = g(x)$ równolegle do osi x o 3 jednostki w prawo. Funkcję g opisuje wzór



A. $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$ **B.** $g(x) = \frac{2}{3}x$

C. $g(x) = \frac{3}{2}x + 2$ **D.** $g(x) = 3x - 2$

2. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3x-1}$ równolegle do osi y o 3 jednostki w dół otrzymano wykres funkcji g określonej wzorem

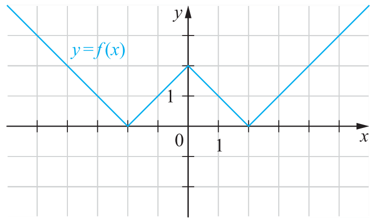
A. $g(x) = \sqrt{3x-4}$ **B.** $g(x) = \sqrt{3x-1} - 3$

C. $g(x) = \sqrt{3x-1} + 3$ **D.** $g(x) = \sqrt{3x+2}$

3. Wykres funkcji $g(x) = \frac{4}{x-4} + 4$ otrzymano po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x-2} + 2$ równolegle do osi x

A. o 2 jednostki w lewo i równolegle do osi y o 2 jednostki w górę.
B. o 2 jednostki w lewo i równolegle do osi y o 2 jednostki w dół.
C. o 2 jednostki w prawo i równolegle do osi y o 2 jednostki w górę.
D. o 4 jednostki w lewo i równolegle do osi y o 2 jednostki w górę.

4. Wykres funkcji przedstawiony na rysunku przesuń równolegle do:
a) osi x o 3 jednostki w lewo,
b) osi y o 2 jednostki w górę,
c) osi x o 4 jednostki w prawo, a następnie równolegle do osi y o 2 jednostki w dół.



5. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji:
a) $y = -2x$ równolegle do osi x o 1 jednostkę w lewo,
b) $y = x^2$ równolegle do osi x o 3 jednostki w prawo,
c) $y = \frac{4}{x}$ równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo, a następnie równolegle do osi y o 2 jednostki w dół,
d) $y = \sqrt{x}$ równolegle do osi x o 4 jednostki w lewo, a następnie równolegle do osi y o 3 jednostki w górę.

6. Sporządź wykres funkcji f, a następnie przesuń go równolegle do osi układu współrzędnych o daną liczbę jednostek. Podaj dziedzinę i zbiór wartości danej funkcji oraz funkcji, której wykres otrzymasz po przesunięciu.
a) $f(x) = -3x$, równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo
b) $f(x) = 2x - 3$, równolegle do osi y o 4 jednostki w górę
c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, równolegle do osi x o 3 jednostki w lewo i równolegle do osi y o 2 jednostki w dół

7. Korzystając z wykresu funkcji f, naszkicuj wykres funkcji g. Opisz wykonane przekształcenie. Porównaj przedziały monotoniczności obu funkcji.
a) $f(x) = -x, \quad g(x) = -x + 4$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$
c) $f(x) = x + 3, \quad g(x) = x - 1$
d) $f(x) = -\sqrt{x} + 2, \quad g(x) = -\sqrt{x - 1} + 2$

8. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f równolegle do osi układu współrzędnych o pewną liczbę jednostek. Zaproponuj wzór funkcji f oraz liczbę jednostek przesunięcia.
a) $g(x) = 3(x - 4)$
b) $g(x) = x^5 - \sqrt{2}$
c) $g(x) = 3(x - 2) + 1$
d) $g(x) = \sqrt{5(x + 2)} + 12$

BANK ZADAŃ z. 186–188 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x} - 2$ równolegle do osi x o 3 jednostki w prawo otrzymano wykres funkcji g określonej wzorem

A. $g(x) = \frac{3}{x+3} - 2$ **B.** $g(x) = \frac{3}{x} + 1$

C. $g(x) = \frac{3}{x-3} - 2$ **D.** $g(x) = \frac{3}{x} - 5$

2. Wykres funkcji $g(x) = (x-4)^3 - 1$ otrzymasz w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = (x-4)^3 + 2$

A. równolegle do osi x o 3 jednostki w prawo.
B. równolegle do osi x o 3 jednostki w lewo.
C. równolegle do osi y o 3 jednostki w dół.
D. równolegle do osi y o 3 jednostki w górę.

3. Wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, $x \in \boldsymbol{R}$, przesuń równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo, a następnie równolegle do osi y o 3 jednostki w górę. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

4. Wykres funkcji $f(x) = (x-6)^2 - 3$, $x \in \boldsymbol{R}$, otrzymano po przesunięciu wykresu funkcji g równolegle do osi x, a następnie po przesunięciu jego obrazu równolegle do osi y. Podaj przykład wzoru funkcji g oraz opisz te przesunięcia. Naszkicuj wykresy funkcji g i funkcji f. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności obu funkcji. Czy jest tylko jedna taka funkcja g?

5. Podaj przykład funkcji, której obrazy wykresu w symetrii względem osi y oraz w przesunięciu równoległym do osi układu współrzędnych o pewną liczbę jednostek będą tą samą figurą.

PROJEKT

Rozważ rodzinę wykresów funkcji $f(x) = x + a$, $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1. Przekształć kolejno wykres każdej funkcji f w symetrii względem prostej $x = 2$.

2. Odgadnij wzory funkcji, których wykresy otrzymałeś w wyniku symetrycznego odbicia rodziny wykresów funkcji f względem prostej $x = 2$.

3. Zastanów się, w wyniku jakiego innego przekształcenia otrzymasz te wykresy.

4. Podaj wzór ogólny funkcji g, której wykres otrzymasz w wyniku symetrycznego odbicia wykresu funkcji f względem prostej $x = 2$ dla dowolnego $a \in \boldsymbol{R}$.

W celu dokładnego zbadania problemu możesz posłużyć się kalkulatorem graficznym lub odpowiednim programem komputerowym.

ZESTAW ZADAŃ – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)

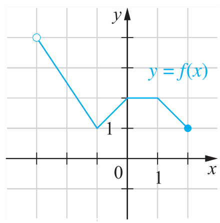
Wykres funkcji $f(x) = -2x + 6$ przesunięto równolegle do osi x o 3 jednostki w lewo. Otrzymano wykres funkcji g. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Do wykresu funkcji g należy punkt $P = (0,\ 1)$.
B. Miejscem zerowym funkcji g jest $x = -3$.
C. Funkcja g jest rosnąca.
D. Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = -2x$.

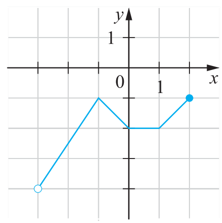
Zadanie 2. (1 p.)

Na rysunku 1. przedstawiono wykres pewnej funkcji $y = f(x)$. Wówczas na rysunku 2. naszkicowano wykres funkcji

A. $y = f(x) - 2$
B. $y = -f(x)$
C. $y = f(-x)$
D. $y = f(x - 1)$



rys. 1.



rys. 2.

Zadanie 3. (1 p.)

Punktem symetrycznym względem początku układu współrzędnych do punktu $P = \left(3,\ -\sqrt{2}\right)$ jest punkt

A. $P_1 = \left(3,\ \sqrt{2}\right)$
B. $P_1 = \left(-3,\ -\sqrt{2}\right)$
C. $P_1 = \left(-3,\ \sqrt{2}\right)$
D. $P_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Zadanie 4. (1 p.)

Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunięto równolegle do osi y o 2 jednostki w górę i otrzymano wykres funkcji $y = g(x)$. Zatem

A. $g(x) = f(x - 2)$
B. $g(x) = f(x + 2)$
C. $g(x) = f(x) + 2$
D. $g(x) = f(x) - 2$

Zadanie 5. (1 p.)

Dana jest funkcja $f(x) = 2x - 3$. Aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = -2x + 3$, należy wykres funkcji f

A. przekształcić w symetrii względem osi x.
B. przekształcić w symetrii względem osi y.
C. przekształcić w symetrii względem początku układu współrzędnych.
D. przesunąć o 6 jednostek w górę.

Zadanie 6. (2 p.)
Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = x - 3$ równolegle do osi x o 1 jednostkę w lewo, i równolegle do osi y o 3 jednostki w górę otrzymujemy wykres funkcji g. Oceń prawdziwość zdania.

a) Funkcję g opisuje wzór $g(x) = x$.
b) Do wykresu funkcji g należy punkt $P = (0, 1)$.
c) Miejscem zerowym funkcji g jest $x = -1$.
d) Funkcja g jest rosnąca.

Zadanie 7. (2 p.)
W tabelce przedstawiono wartości funkcji f, określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$, przyporządkowane wybranym argumentom.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

a) Zaproponuj wzór funkcji f.
b) Zapisz wzór funkcji g, której wykres otrzymasz w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f w symetrii względem osi x. Oblicz $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, $g\left(2\frac{1}{3}\right)$, $g\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Zadanie 8. (2 p.)
Wykres funkcji $y = x + 2, x \in \boldsymbol{R}$, przekształć w symetrii względem osi x, a następnie otrzymany obraz wykresu przekształć w symetrii względem osi y. Sprawdź, czy punkt $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ należy do otrzymanego wykresu funkcji.

Zadanie 9. (3 p.)
Wykres funkcji $f(x) = -x, x \in \boldsymbol{R}$, przesunięto równolegle do osi x o 1 jednostkę w prawo, a następnie przekształcono w symetrii względem osi y i otrzymano wykres funkcji g. Jaką figurą jest zbiór punktów ograniczonych wykresem funkcji g oraz osiami układu współrzędnych? Wyznacz oś symetrii tej figury.

Zadanie 10. (3 p.)
Wykres funkcji $g(x) = 2x - 4$ otrzymano, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo oraz równolegle do osi y o 2 jednostki w dół. Podaj wzór funkcji f oraz narysuj wykresy funkcji f i g. Podaj miejsca zerowe tych funkcji.

Zadanie 11. (3 p.)
Wyznacz część wspólną zbiorów wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 3, x \in \boldsymbol{R}$, oraz funkcji g, której wykres jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji f.

Zadanie 12. (4 p.)
Narysuj wykres funkcji rosnącej, określonej w zbiorze $\langle -3; 2\rangle \cup (4; 7)$, która nie ma miejsc zerowych. Przekształć wykres w symetrii względem osi y. Określ monotoniczność otrzymanej funkcji.

Zadanie 13. (4 p.)
Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $x \in \boldsymbol{R}$, przesunięto równolegle do osi x o 6 jednostek w lewo i otrzymano wykres funkcji g.

a) Oblicz pole P_1 figury ograniczonej wykresem funkcji f i osiami układu współrzędnych.
b) Oblicz pole P_2 figury ograniczonej wykresem funkcji g i osiami układu współrzędnych.
c) O ile procent pole P_2 jest mniejsze od pola P_1?

DODATKOWE ĆWICZENIA
Sprawdź się na wsipnet.pl

5 Funkcja kwadratowa

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

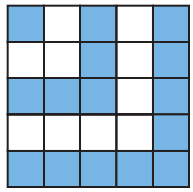
- szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej z wykorzystaniem jej wzoru
- obliczanie ze wzoru wartości funkcji dla danego argumentu; posługiwanie się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość
- odczytywanie z wykresu własności funkcji
- wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie
- interpretowanie współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje)
- wyznaczanie wartości najmniejszej i wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- wykorzystywanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji różnych zagadnień
- rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą
- rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą

5.1 Funkcja $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

PRZYKŁAD 1.

Piotr układa dwukolorową mozaikę z kwadratowych płytek. Rozpoczyna od lewego, górnego rogu, od płytki niebieskiej. Następnie układa 3 płytki białe. W kolejnych etapach układa 5 płytek niebieskich, 7 płytek białych, 9 niebieskich itd. Na bieżąco notuje, ile ułożył już wszystkich płytek, numerując kolejne etapy układania odpowiednio $n = 1, 2, 3, \ldots$

dla $n = 1$ 1 płytka,
dla $n = 2$ $1 + 3 = 4$ płytki,
dla $n = 3$ $4 + 5 = 9$ płytek,
dla $n = 4$ $9 + 7 = 16$ płytek,
dla $n = 5$ $16 + 9 = 25$ płytek,
…



Piotr zauważył następującą zależność: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$ itd. Dzięki niej może szybko ustalić, ile płytek będzie ułożonych po każdym kolejnym etapie. Po n-tym etapie układania mozaika będzie ułożona z n^2 płytek. Widzimy więc, że liczbę użytych płytek możemy opisać za pomocą funkcji $f(n) = n^2$, $n \in N_+$, której wartości są kwadratami kolejnych liczb naturalnych.

PRZYKŁAD 2.

Ciało spadające swobodnie w próżni pokonuje drogę, którą możemy obliczyć z wzoru $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, gdzie s oznacza drogę, t – czas, g – przyspieszenie ziemskie (przyjmij $g = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$). Przebytą drogę w zależności od czasu możemy w przybliżeniu wyrazić wzorem $s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2 = 4{,}9t^2$.

Skoczek spadochronowy wyskakuje z samolotu na wysokości 3000 m. Jeśli pominiemy opór powietrza, z wzoru $s(t) = 4{,}9t^2$ możemy obliczyć drogę, jaką pokona skoczek do momentu otwarcia czaszy spadochronu, a z wzoru $h(t) = 3000 - 4{,}9t^2$ możemy obliczyć odległość skoczka od ziemi. Są to przykłady funkcji kwadratowych.

Definicja

Funkcję $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**.
Wyrażenie $ax^2 + bx + c$ nazywamy **trójmianem kwadratowym**.

ĆWICZENIE 1.

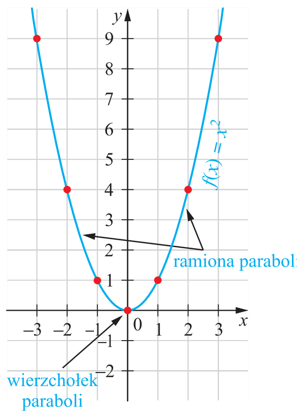
Zastanów się i odpowiedz na pytania.
a) Jaki zbiór jest dziedziną funkcji kwadratowej?
b) Dlaczego założenie $a \neq 0$ jest istotne?

PRZYKŁAD 3.

Sporządźmy wykres funkcji $f(x) = x^2$ (współczynniki trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ wynoszą odpowiednio $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$\big(x, f(x)\big)$	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

Z wykresu funkcji $f(x) = x^2$ odczytujemy jej własności:
- $D_f = \boldsymbol{R}$
- $Z_W = \langle 0; +\infty)$
- Miejsce zerowe $x = 0$.
- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$.
- Dla $x = 0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą zero.
- Funkcja nie przyjmuje wartości największej.
- Oś y jest osią symetrii wykresu funkcji.



Krzywą będącą wykresem funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**.

ĆWICZENIE 2.

W układzie współrzędnych sporządź wykresy podanych funkcji. Podaj ich własności. Opisz położenie ramion paraboli względem osi układu współrzędnych.

a) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{3}{2}x^2$

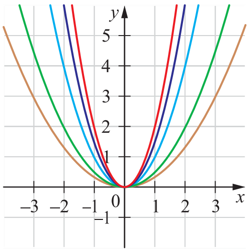
b) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$

ĆWICZENIE 3.

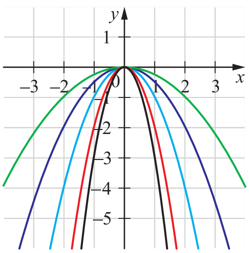
W układzie współrzędnych sporządź wykresy podanych funkcji. Opisz ich własności. Jak położone są ramiona parabol w zależności od wartości współczynnika przy x^2?

a) $y = -x^2,\ y = -\frac{1}{2}x^2,\ y = -\frac{1}{4}x^2$ b) $y = -x^2,\ y = -2x^2,\ y = -3x^2$

Współczynnik a w równaniu paraboli $y = ax^2$ decyduje o tym, jak skierowane są ramiona paraboli:



- jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są do góry,



- jeśli $a < 0$, to ramiona skierowane są w dół.

Współczynnik a decyduje również o tym, jak bardzo rozchylone są ramiona. Im większa jest wartość $|a|$, tym ramiona paraboli są mniej odchylone od osi y.

ĆWICZENIE 4.

Czy istnieje a, dla którego ramiona paraboli $y = ax^2$ pokryją się z osią y lub osią x? Odpowiedź uzasadnij.

ĆWICZENIE 5.

Jak skierowane są ramiona każdej z podanych parabol?

a) $y = 1\frac{2}{3}x^2$ b) $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x^2$ c) $y = (3 - \pi)\,x^2$ d) $y = \sqrt[3]{-8}x^2$

PRZYKŁAD 4.

Sprawdźmy, czy punkty $A = (-2,\ 5)$ i $B = \left(\sqrt{2},\ 3\right)$ należą do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{2}x^2$.

Punkt $P = (m,\ n)$ należy do wykresu funkcji, jeżeli dla argumentu m wartość funkcji jest równa n. Zatem:

$f(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 = 6$ $f(-2) \neq 5$ – punkt A nie należy do wykresu funkcji,

$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3$ $f\left(\sqrt{2}\right) = 3$ – punkt B należy do wykresu funkcji.

ZADANIA

1. Pierwsza współrzędna punktu $P=\left(x,\ 3+2\sqrt{2}\right)$ należącego do wykresu funkcji $f(x)=x^2$ może być równa

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ **C.** $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$

2. Do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ należy punkt $P=\left(\frac{3}{2}, 2n\right)$. Zatem n jest równe

A. $\frac{4}{3}$ **B.** 2 **C.** 1,25 **D.** 0,375

3. Wyznacz współczynnik a, jeżeli do paraboli o równaniu $y=ax^2$ należy podany punkt.

a) $A=(-2,\ 1)$ b) $B=\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ c) $C=\left(-3,\ \sqrt{3}\right)$

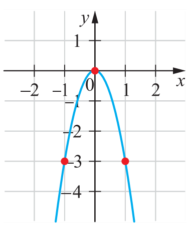
4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=-2x^2$, a następnie odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości:

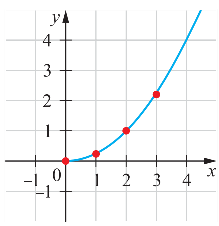
a) większe od -2, b) mniejsze od -4, c) $-4<f(x)\leqslant -2$.

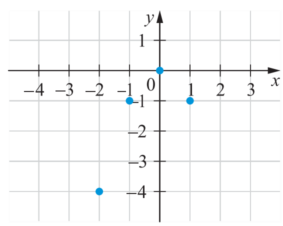
5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, a następnie odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości:

a) większe od 1, b) mniejsze od $\frac{1}{4}$, c) dodatnie.

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=ax^2$. Wyznacz wzór oraz dziedzinę funkcji.

a)


b)


c)


7. Dwa punkty o rzędnej $y=3$ należą do wykresu funkcji kwadratowej $y=ax^2$. Dla której z podanych funkcji odległość między tymi punktami jest najmniejsza, a dla której – największa?

a) $y=2x^2,\ y=\frac{1}{4}x^2,\ y=\sqrt{3}x^2$

b) $y=3x^2,\ y=\pi x^2,\ y=\frac{4}{\sqrt{3}+1}x^2$

8. Wierzchołek paraboli, punkt na paraboli o odciętej $x = 2$ oraz punkt do niego symetryczny względem osi y wyznaczają trójkąt równoramienny. Wybierz funkcję, dla której pole takiego trójkąta jest największe. Odpowiedź uzasadnij.

a) $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = \sqrt{2}x^2$ b) $y = -3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \pi x^2$

BANK ZADAŃ z. 189–196 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Punkt $P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}, \frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$ należy do wykresu funkcji

A. $f(x) = 3x^2$ **B.** $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ **C.** $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ **D.** $f(x) = 2x^2$

2. Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt $P = \left(\frac{3}{4}, 3\right)$. W takim razie współczynnik a jest równy

A. $\frac{14}{3}$ **B.** $5\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{15}{4}$ **D.** $3\frac{1}{4}$

3. Odpowiedz na pytania.

a) Jaką funkcję nazywamy funkcją kwadratową?

b) Jak nazywa się krzywa będąca wykresem funkcji kwadratowej?

c) Jakie jest położenie względem osi x ramion parabol $y = \frac{2}{3}x^2$ oraz $y = -\frac{1}{4}x^2$?

4. Wyznacz przedział, w którym funkcja:

a) $f(x) = 3x^2$ jest rosnąca,

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ jest malejąca,

c) $f(x) = -4x^2$ przyjmuje wartości niedodatnie.

5. Napisz równanie prostej równoległej do osi x, przechodzącej przez punkt o odciętej 2, który należy do paraboli $y = 5x^2$.

6. Podaj równanie paraboli symetrycznej do paraboli $y = 5x^2$ względem:

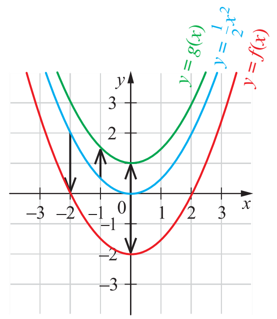
a) osi x, b) osi y, c) punktu $(0, 0)$.

5.2 Przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ równolegle do osi układu współrzędnych otrzymamy parabolę. Wykorzystując własności przesunięcia równoległego względem osi x oraz osi y odpowiednio o p i q jednostek, możemy zapisać wzór otrzymanej funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

PRZYKŁAD 1.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ otrzymujemy po przesunięciu paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ równolegle do osi y o 2 jednostki w dół. Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ otrzymujemy po przesunięciu paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ równolegle do osi y o 1 jednostkę w górę. Osią symetrii tych wykresów jest oś y (prosta o równaniu $x = 0$).

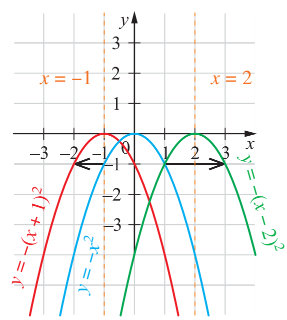


ĆWICZENIE 1.

Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ oraz $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$. Na podstawie otrzymanych wykresów odczytaj własności tych funkcji. Które z własności funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ zostały zachowane?

PRZYKŁAD 2.

Wykres funkcji $f(x) = -(x + 1)^2$ otrzymujemy po przesunięciu paraboli $y = -x^2$ równolegle do osi x o 1 jednostkę w lewo, natomiast wykres funkcji $g(x) = -(x - 2)^2$ otrzymujemy po przesunięciu paraboli $y = -x^2$ równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo. Każdy z wykresów ma oś symetrii. Są nimi proste prostopadłe do osi x, przechodzące przez wierzchołki parabol.



ĆWICZENIE 2.

Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = (x + 3)^2$ i $h(x) = (x - 4)^2$. Na ich podstawie odczytaj własności funkcji. Które z własności funkcji $f(x) = x^2$ zostały zachowane?

ĆWICZENIE 3.

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2$ przesuń równolegle do osi x o 2 jednostki w lewo, a następnie otrzymany wykres przesuń równolegle do osi y o 3 jednostki w górę. Podaj wzór funkcji g opisującej otrzymaną parabolę.

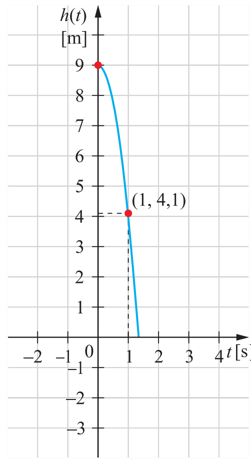
PRZYKŁAD 3.

Z mostu znajdującego się 9 m nad powierzchnią wody spada kamień. Jeśli pominiemy opór powietrza oraz przyjmiemy, że $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, to odległość kamienia od lustra wody możemy opisać równaniem $h(t) = -4{,}9t^2 + 9$. Na wykresie zilustrowano zależność wysokości, na której znajduje się kamień, od czasu. W chwili $t = 0$ kamień znajduje się na wysokości 9 m. Po pierwszej sekundzie jest już 4,1 m nad wodą, czyli w ciągu tej sekundy pokonuje odległość 4,9 m.

$t = 1,\ h(1) = -4{,}9 \cdot 1 + 9 = 4{,}1$ [m], $\quad 9 - 4{,}1 = 4{,}9$ [m]

Po dwóch sekundach kamień znajdzie się pod wodą, ponieważ czas jego spadania jest krótszy od dwóch sekund.

$t = 2,\ h(2) = -4{,}9 \cdot 2^2 + 9 = -10{,}6$ [m]



ZADANIA

1. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = -2x^2$ równolegle do osi układu współrzędnych o 2 jednostki w prawo oraz 3 jednostki w górę otrzymamy parabolę, której wierzchołek ma współrzędne

A. $(2, 3)$ **B.** $(-2, 3)$ **C.** $(2, -3)$ **D.** $(-2, -3)$

2. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ należy punkt $A = \left(x, \frac{9}{2}\right)$, $x > 0$. Po przesunięciu tego wykresu równolegle do osi układu współrzędnych o 4 jednostki w lewo oraz 2 jednostki w dół obraz punktu A będzie miał współrzędne

A. $(4, -2)$ **B.** $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ **C.** $\left(-4, -\frac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$

3. Wykres funkcji $f(x) = 2x^2$ przesunięto równolegle do osi układu współrzędnych o podaną liczbę jednostek. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana parabola, oraz podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) 2 jednostki w dół

b) 4 jednostki w prawo

c) 3 jednostki w lewo i 2 jednostki w górę

d) $\sqrt{2}$ jednostek w prawo i 1 jednostka w dół

4. Wykres funkcji $f(x) = -3x^2$ przesuń równolegle do osi układu współrzędnych o podaną liczbę jednostek. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest parabola otrzymana w wyniku przesunięcia. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.
a) 1 jednostka w górę
b) 2 jednostki w lewo
c) 1 jednostka w prawo i 2 jednostki w dół
d) 2 jednostki w lewo i $\frac{1}{2}$ jednostki w górę

5. Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto tak, że otrzymano wykres funkcji g. Funkcja g największą wartość $y = 0$ przyjmuje dla argumentu $x = -3$.
a) Opisz wykonane przesunięcie.
b) Napisz wzór otrzymanej funkcji.
c) Odczytaj własności funkcji g: zbiór wartości, oś symetrii wykresu, współrzędne wierzchołka.

6. Wykres funkcji f przesuń równolegle do osi układu współrzędnych o podaną liczbę jednostek. Napisz wzór otrzymanej funkcji i odczytaj jej własności.
a) $f(x) = -8x^2$, 3 jednostki w prawo
b) $f(x) = 1{,}25x^2$, 2 jednostki w dół
c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$, 1 jednostka w prawo i 2 jednostki w dół
d) $f(x) = 2{,}3x^2$, 2 jednostki w lewo

7. Dana jest funkcja $f(x) = x^2$. Wyznacz wzór funkcji g, której wykres otrzymujemy po przesunięciu wykresu funkcji f równolegle do osi x o 1 jednostkę w prawo, oraz wzór funkcji h, której wykres otrzymujemy po przesunięciu wykresu funkcji f równolegle do osi układu współrzędnych o 1 jednostkę w lewo i 3 jednostki w dół. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez wierzchołki parabol będących wykresami funkcji f, g i h.

8. Podaj przykład funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste z podanego przedziału.
a) $\langle 4;\ +\infty)$ b) $(-\infty;\ 2\rangle$ c) $(-\infty;\ 0\rangle$ d) $\langle \sqrt{2};\ +\infty)$

9. Przypuśćmy, że z dachu 298-metrowego wieżowca Kingdom Center w Rijadzie (Arabia Saudyjska) spada piłka. Jeśli pominiemy opór powietrza, odległość od ziemi spadającej piłki można opisać wzorem $h(t) = -4{,}9t^2 + 298$.
a) W której sekundzie piłka spadnie na ziemię?
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
c) Jaką drogę pokona piłka w pierwszej sekundzie spadania?
d) Wyznacz dziedzinę funkcji opisującej odległość piłki od ziemi.

BANK ZADAŃ z. 197–208 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = 4x^2$ przesunięto równolegle do osi układu współrzędnych o 3 jednostki w lewo i 2 jednostki w dół. Otrzymano wykres funkcji g danej wzorem

A. $g(x) = 4(x + 3)^2 - 2$ **B.** $g(x) = 4(x - 3)^2 + 2$

C. $g(x) = 4(x + 3)^2 + 2$ **D.** $g(x) = 4(x - 3)^2 - 2$

2. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej otrzymanej w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = -7x^2$ o podaną liczbę jednostek, równolegle do osi układu współrzędnych.

a) 7 jednostek w prawo

b) 10 jednostek w dół

c) 3 jednostki w lewo i 4 jednostki w dół

3. Opisz, jakie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = -12x^2$ należy wykonać, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $g(x) = -12(x - 7)^2$,

b) $g(x) = -12x^2 - 1$,

c) $g(x) = -12(x + 5)^2 + 2$.

4. Wyznacz równanie paraboli i opisz, jak należy ją przesunąć równolegle do osi układu współrzędnych, aby otrzymać wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = -\frac{2}{3}(x - 6)^2$,

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 1$,

c) $f(x) = -\frac{2}{3}(x - 6)^2 - 1$.

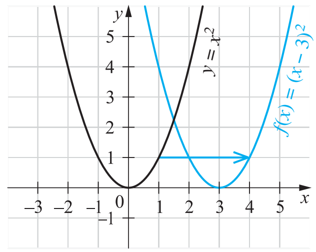
5.3 Postać ogólna i postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, nazywamy funkcją kwadratową **w postaci ogólnej**. Z postaci tej nie od razu widać, jak będzie położony wykres funkcji w układzie współrzędnych.

PRZYKŁAD 1.

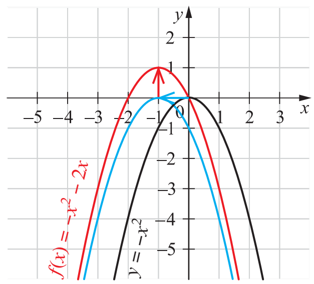
Naszkicujmy wykres funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ b) $f(x) = -x^2 - 2x$



Wzór funkcji przekształcamy następująco:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Zatem aby naszkicować wykres funkcji f, należy parabolę $y = x^2$ przesunąć w prawo o 3 jednostki.



b) $f(x) = -x^2 - 2x = -(x^2 + 2x) = -(x^2 + 2x + 1 - 1) =$
$= -[(x+1)^2 - 1] = -(x+1)^2 + 1$. Zatem aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = -x^2 - 2x$, należy parabolę $y = -x^2$ przesunąć w lewo o 1 jednostkę i w górę o 1 jednostkę.

Wykorzystując wzory skróconego mnożenia, funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, możemy przedstawić w postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie p i q wskazują kierunek i wielkość przesunięcia równoległego względem osi układu współrzędnych wykresu funkcji $y = ax^2$.

Definicja

Wzór $f(x) = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

ĆWICZENIE 1.

Przekształć wzór funkcji f do postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ c) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

Liczby jednostek p i q, o jakie przesuwamy równolegle do osi układu współrzędnych parabolę $y = ax^2$, są jednocześnie współrzędnymi wierzchołka paraboli $y = a(x - p)^2 + q$, którą otrzymujemy w wyniku tego przesunięcia.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy współrzędne wierzchołka (p, q) paraboli $f(x) = ax^2 + bx + c$ w zależności od współczynników a, b, c.
W tym celu przekształcamy wzór funkcji kwadratowej z postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Wobec tego $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Wyrażenie $b^2 - 4ac$ oznaczamy Δ (czytaj: delta) i nazywamy **wyróżnikiem** funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zatem możemy zapisać: $\Delta = b^2 - 4ac$, $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$.

Postać kanoniczna funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ pozwala na:
- odczytanie **współrzędnych wierzchołka** (p, q) **paraboli**, oznaczanego (x_w, y_w), wówczas $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$;
- podanie osi symetrii paraboli: $x = p$;
- ustalenie, dla jakiego argumentu funkcja osiąga wartość najmniejszą albo największą $\left(x_w = -\frac{b}{2a}\right)$, i odczytanie, ile ona wynosi $\left(y_w = -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- odczytanie przedziałów monotoniczności funkcji.

ĆWICZENIE 2.

Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej (deltę).

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 2$
c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$ d) $f(x) = -2x^2 + x - 3$

ĆWICZENIE 3.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$ b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
c) $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$

ĆWICZENIE 4.

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ b) $f(x) = x^2 - 6x - 6$
c) $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ d) $f(x) = -2x^2 - 4x - 3$

Jeżeli $a > 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ osiąga wartość najmniejszą dla $x = -\frac{b}{2a}$, równą $-\frac{\Delta}{4a}$.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ osiąga wartość największą dla $x = -\frac{b}{2a}$, równą $-\frac{\Delta}{4a}$.

Zauważmy, że jeśli znamy $x_w = -\frac{b}{2a}$, to obliczenie wartości najmniejszej (największej) funkcji kwadratowej sprowadza się do obliczenia wartości funkcji dla x_w, tzn. $y_w = f(x_w) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

ĆWICZENIE 5.

Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 17$ b) $f(x) = x^2 - 10x + 23$

c) $f(x) = -x^2 - 12x - 38$ d) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{16}$

PRZYKŁAD 3.

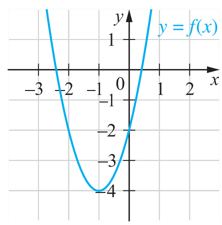
Wyznaczmy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$.

Przekształćmy wzór funkcji z postaci ogólnej do postaci kanonicznej.

$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$

$q = f(p) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2 = -4$

Zatem $f(x) = 2\,(x + 1)^2 - 4$. W przedziale $(-\infty; -1\rangle$ funkcja jest malejąca, natomiast w przedziale $\langle -1; +\infty)$ jest rosnąca. Dla $x = -1$ ma wartość najmniejszą równą -4. Funkcja nie ma wartości największej.



Jeżeli $a > 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest malejąca w przedziale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right\rangle$, a rosnąca w przedziale $\left\langle -\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right\rangle$, a malejąca w przedziale $\left\langle -\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

PRZYKŁAD 4.

Przedstawmy funkcję kwadratową $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ w postaci ogólnej.

Po odpowiednich przekształceniach:

$f(x) = 2(x - 1)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 2x^2 - 4x + 2 - 3 = 2x^2 - 4x - 1$

otrzymaliśmy funkcję kwadratową w postaci ogólnej $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

ĆWICZENIE 6.

Przedstaw funkcję $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{4}$ w postaci ogólnej.

ZADANIA

1. Wierzchołek paraboli $y = \frac{3}{4}x^2 + 2x - 3$ ma współrzędne

A. $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}\right)$ **B.** $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{3}\right)$ **D.** $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{3}\right)$

2. Postacią kanoniczną funkcji $f(x) = x^2 + bx + 3$ jest $f(x) = (x-1)^2 + 2$. Wówczas współczynnik b jest równy

A. -2 **B.** 2 **C.** -3 **D.** -1

3. Funkcje $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ mają wspólny wierzchołek. Jest nim punkt

A. $(-1, -1)$ **B.** $(-1, 1)$ **C.** $(1, 1)$ **D.** $(2, -1)$

4. Dla danych współczynników zapisz trójmian kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $a = \sqrt{2},\ b = -1,\ c = 0$
b) $a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b = 0,\ c = -2\pi + 8$
c) $a = 2 + \sqrt{3},\ b = -3\sqrt{2} - 11,\ c = 6$
d) $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt[3]{5},\ c = -1{,}7$

5. Zapisz funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = (x-4)^2$
b) $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$
c) $y = \sqrt{2}(x+3)^2 - 1$
d) $y = -\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + 2$

6. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej oraz podaj przedziały monotoniczności funkcji.

a) $y = x^2 - 2x - 3$
b) $y = 2x^2 + 5x$
c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
d) $y = -x^2 + \sqrt{3}x - 6$

7. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli bez obliczania wyróżnika funkcji kwadratowej.

a) $y = -3x^2 + x - \frac{1}{2}$
b) $y = \frac{2}{3}x^2 - 5x$
c) $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \sqrt{2}x + 1$
d) $y = 0{,}(2)x^2 + 1{,}(3)x - 4$

8. Zapisz funkcję kwadratową w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres. Dla każdej z funkcji wyznacz zbiór wartości, równanie osi symetrii wykresu, wartość najmniejszą lub największą.

a) $y = 3x^2 - 3x$
b) $y = x^2 + 4x + 5$
c) $y = 2x^2 + 4x + 2$
d) $y = -x^2 - 6x - 9$

9. Sprawdź, czy funkcja w podanym przedziale jest rosnąca, czy – malejąca.

a) $y = x^2 + 2x + 8$, $(-\infty; -2\rangle$ b) $y = -0{,}5x^2 + x + 2$, $(-\infty; 0\rangle$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 1$, $(9; +\infty)$ d) $y = 5x^2 - 3x + 9$, $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

10. Sprawdź, czy funkcja f jest monotoniczna w podanym przedziale.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $(-2; 4)$ b) $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$, $(-\infty; -3)$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$, $(1; 7)$ d) $f(x) = \left(1 + \log_3 \frac{1}{3}\right)x^2 - 4$, $\langle -5; 8\rangle$

11. W którym z podanych przedziałów funkcja $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ jest rosnąca, malejąca, a w którym nie jest monotoniczna?

a) $(-\infty; -4)$ b) $(-5; 2)$ c) $(0; 3)$ d) $(4; 7)$

12. Wyznacz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $y = x^2 + bx + c$, znając współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji.

a) $W = (2, 5)$ b) $W = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ c) $W = (0, -3)$ d) $W = (2, 0)$

13. Wyznacz współczynniki a, b i c funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, mając dane współrzędne wierzchołka W oraz punktu P należącego do wykresu funkcji.

a) $W = (1, 3)$, $P = (2, 5)$ b) $W = (-2, -1)$, $P = (1, 3)$

c) $W = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$, $P = (0, -2)$ d) $W = (0, 3)$, $P = (2, 7)$

BANK ZADAŃ z. 209–212 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Postać ogólna funkcji $f(x) = -5(x + 2)^2 - 1$ to

A. $f(x) = -5x^2 - 20x - 21$ **B.** $f(x) = -5x^2 - 20x - 19$

C. $f(x) = -5x^2 - 10x - 21$ **D.** $f(x) = -5x^2 - 10x - 11$

2. Wierzchołek paraboli $y = -2x^2 - 16x - 37$ ma współrzędne

A. $(-3, 2)$ **B.** $(-4, -5)$ **C.** $(-3, 4)$ **D.** $(2, -5)$

3. Przedstaw funkcję $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ w postaci kanonicznej.

4. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 4x^2 + x - 2$.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

a) $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ b) $f(x) = (x - 7)^2 + 4$ c) $h(x) = x^2 - 8{,}5x - 4{,}5$

6. Wyznacz najmniejszą albo największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x + 4$.

5.4 Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Miejsce zerowe funkcji to pierwsza współrzędna punktu, w którym wykres tej funkcji przecina oś x. Jak znaleźć miejsca zerowe funkcji kwadratowej? Ile ich może być? Od czego zależy liczba miejsc zerowych? Rozważmy następujące przykłady.

PRZYKŁAD 1.

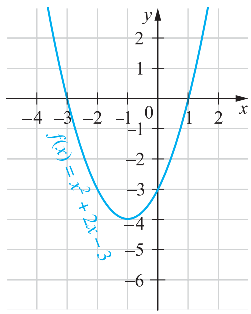
Sprawdźmy, czy poniższe funkcje kwadratowe mają miejsca zerowe.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

a) Przedstawmy funkcję $f(x) = x^2 + 2x - 3$ w postaci kanonicznej.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16$

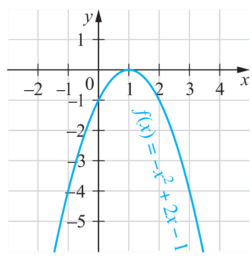
$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1, \quad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$



Zatem $f(x) = (x + 1)^2 - 4$.

Naszkicujmy wykres tej funkcji. W tym celu wykres funkcji $f(x) = x^2$ przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 4 jednostki w dół. Otrzymana parabola przecina oś x w dwóch punktach, czyli funkcja ma dwa miejsca zerowe. Odczytujemy z wykresu: $x = -3$ oraz $x = 1$. Wyróżnik Δ jest w tym wypadku dodatni.

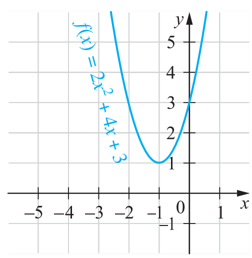
b) Przekształćmy wzór funkcji f do postaci kanonicznej, wykorzystując wzór skróconego mnożenia.



$f(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$

Naszkicujmy wykres tej funkcji. W tym celu wykres funkcji $f(x) = -x^2$ przesuwamy o 1 jednostkę w prawo. Otrzymana parabola ma jeden punkt wspólny z osią x. Zatem funkcja ma tylko jedno miejsce zerowe. Jest nim $x = 1$. Wyróżnik Δ jest w tym wypadku równy 0.

c) Przedstawmy funkcję $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ w postaci kanonicznej.



$\Delta = b^2 - 4ac = -8$

$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1, \quad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-8}{8} = 1$

Zatem $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1$.

Wykresem jest parabola położona nad osią x, która nie ma z nią punktów wspólnych. Funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych. Wyróżnik Δ jest w tym wypadku ujemny.

ĆWICZENIE 1.

Sporządź pomocniczy wykres i sprawdź, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa. Jaki warunek spełnia wyróżnik trójmianu kwadratowego każdej z podanych funkcji?

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ c) $f(x) = -2x^2 + 2x - 2$

ĆWICZENIE 2.

Zbadaj liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, w zależności od a i $q = -\frac{\Delta}{4a}$, jeśli:

a) $a > 0$ i $q > 0$, b) $a > 0$ i $q = 0$, c) $a > 0$ i $q < 0$,
d) $a < 0$ i $q > 0$, e) $a < 0$ i $q = 0$, f) $a < 0$ i $q < 0$.

ĆWICZENIE 3.

Uzasadnij, że jeżeli wyróżnik $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma postać $y = a(x - p)^2$.

Twierdzenie

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.
Jeśli:
$\Delta > 0$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe wyrażone wzorami

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

$\Delta = 0$, to funkcja f ma jedno miejsce zerowe wyrażone wzorem $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

$\Delta < 0$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych.

Dowód:

Wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można przedstawić w postaci kanonicznej $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ i $a \neq 0$.

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji f.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Rozpatrujemy trzy przypadki. Jeśli:

$\Delta > 0$, to $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, stąd $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;

$\Delta = 0$, to $x + \frac{b}{2a} = 0$, stąd $x = -\frac{b}{2a}$;

$\Delta < 0$, to równanie $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ jest sprzeczne, czyli funkcja f nie ma miejsc zerowych.

PRZYKŁAD 2.

Obliczmy miejsca zerowe funkcji kwadratowych.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = 4x^2 - 10x + 15$

a)

I sposób

$f(x) = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 2 = 0$

$\left((x + 2) + \sqrt{2}\right)\left((x + 2) - \sqrt{2}\right) = 0$

$x + 2 = -\sqrt{2}$ lub $x + 2 = \sqrt{2}$

$x_1 = -2 - \sqrt{2},\ x_2 = -2 + \sqrt{2}$

II sposób

$f(x) = x^2 + 4x + 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$

$\Delta > 0,\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$

Funkcja $f(x) = x^2 + 4x + 2$ ma dwa miejsca zerowe.

b)

I sposób

$f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0$

$x + 3 = 0$

$x = -3$

II sposób

$f(x) = x^2 + 6x + 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

$\Delta = 0,\ \sqrt{\Delta} = 0$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$

Funkcja $f(x) = x^2 + 6x + 9$ ma jedno miejsce zerowe.

c)

I sposób

$f(x) = 4x^2 - 10x + 15 = \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{35}{4}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} = 0$

$\left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{35}{4}$

Równanie to jest sprzeczne, ponieważ wyrażenie $\left(2x - \frac{5}{2}\right)^2$ jest nieujemne dla dowolnego $x \in \boldsymbol{R}$.

II sposób

$f(x) = 4x^2 - 10x + 15$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 =$

$= -140$

$\Delta < 0$

Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Funkcja $f(x) = 4x^2 - 10x + 15$ nie ma miejsc zerowych.

Twierdzenie

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.
Jeśli:
$\Delta > 0$, to funkcję f możemy przedstawić w **postaci iloczynowej**
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 to miejsca zerowe funkcji,
$\Delta = 0$, to funkcję f możemy przedstawić w postaci iloczynowej
$f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 to miejsce zerowe funkcji,
$\Delta < 0$, to funkcji f nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

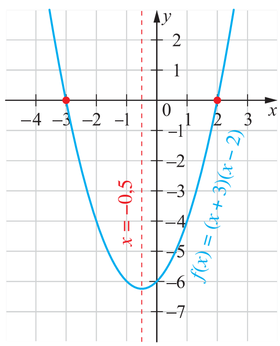
Funkcje z przykładu 2a i 2b możemy zapisać w postaci iloczynowej.
a) $f(x) = \left(x + 2 + \sqrt{2}\right)\left(x + 2 - \sqrt{2}\right)$ b) $f(x) = (x + 3)^2$

ĆWICZENIE 4.

Zbadaj, czy dana liczba jest miejscem zerowym podanej funkcji.
a) $2 - \sqrt{21}$, $f(x) = x^2 - 4x - 17$
b) $-4 - \sqrt{37}$, $g(x) = x^2 + 8x - 21$
c) $\frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{11}\right)$, $h(x) = x^2 - 2x - 2$
d) $\frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}$, $k(x) = -3x^2 + 6x + 5$

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy najmniejszą wartość funkcji
$f(x) = (x + 3)(x - 2)$.



Wzór funkcji jest podany w postaci iloczynowej. Miejscami zerowymi funkcji są $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 2$. Wykresem jest parabola mająca oś symetrii o równaniu $x = -0{,}5$. Stąd pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli jest $p = -0{,}5$, a drugą jest $q = f(p) = -6{,}25$. Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = (x + 3)(x - 2)$ jest więc $y = -6{,}25$.

Współrzędne wierzchołka (p, q) paraboli możemy wyznaczyć, korzystając z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej f: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $q = f(p)$, gdzie x_1, x_2 to miejsca zerowe funkcji f.

ĆWICZENIE 5.

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = -(x + 1)(x - 4)$.

ZADANIA

1. Funkcja kwadratowa $g(x) = 2(x - 1)^2 + c$ ma dwa miejsca zerowe, jeśli

A. $c > 0$ **B.** $c < 0$ **C.** $c > -2$ **D.** $c < 4$

2. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ są $x = 2$ oraz $x = -4$. Wtedy

A. $b = 4, c = -1$ **B.** $b = -3, c = 2$ **C.** $b = 2, c = -8$ **D.** $b = -2, c = 8$

3. Miejscami zerowymi funkcji $g(x) = (x - 3)^2 - 16$ są liczby

A. 7 i -1 **B.** 3 i 4 **C.** -3 i -4 **D.** 2 i 4

4. Zbadaj, czy funkcja ma miejsca zerowe. Odpowiedź uzasadnij.

a) $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$ b) $f(x) = 0{,}4x^2 - x + 0{,}1$

c) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3}$ d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

5. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - x - 12$ b) $f(x) = -2x^2 - 3x - 7$

c) $f(x) = x^2 - x$ d) $f(x) = x^2 - 25$

6. Zapisz wzór funkcji w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 + 5x - 6$ b) $y = 3x^2 - 27$

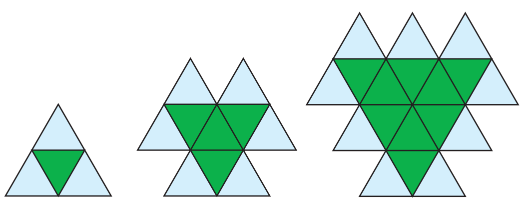
c) $y = 2(x - 3)^2 - 8$ d) $y = x^2 - 2x - 6$

7. Wyznacz miejsca zerowe z dokładnością do 0,01. Przyjmij, że $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ i $\sqrt{7} \approx 2{,}646$.

a) $y = x^2 + x - 1$ b) $y = 3x^2 - 8x + 3$ c) $y = -x^2 - 7x - 1$

8. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -2(x - 3)(x + 4)$. Wyznacz jej miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

9. Przyjrzyj się rysunkom. Z ilu zielonych trójkątów zbudowany jest trójkąt równoboczny po: piątym, siódmym, n-tym etapie takiej konstrukcji?



itd.

10. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, o której wiesz, że:
a) jej miejsca zerowe to -3, 2 i $f(0) = -2$,
b) wierzchołek paraboli będącej jej wykresem ma współrzędne $W = (-2, 3)$, a jedno z miejsc zerowych jest równe 3.

11. Dla jakich wartości k podana funkcja nie ma miejsc zerowych?
a) $f(x) = kx^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = x^2 - 3x + k$
c) $f(x) = kx^2 - kx + 2k$
d) $f(x) = 3k^2x^2 - 2kx + 1$

12. Wyznacz wszystkie wartości k, dla których podana funkcja ma dwa miejsca zerowe.
a) $f(x) = x^2 - 4kx + 2k^2$
b) $f(x) = k^2x^2 - (2k - 1)x + 1$

13. Dla jakich wartości k podana funkcja ma jedno miejsce zerowe?
a) $f(x) = x^2 - (k - 1)x - k$
b) $f(x) = -x^2 + (k - 2)x + 1$

BANK ZADAŃ z. 213–216 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Funkcja kwadratowa $g(x) = a(x - p)^2 + q$ ma dwa miejsca zerowe, jeśli
A. $a > 0, p < 0, q > 0$
B. $a < 0, p < 0, q < 0$
C. $a > 0, p > 0, q > 0$
D. $a < 0, p > 0, q > 0$

2. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ są $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 1$. Do wykresu funkcji f należy punkt $P = (2, 5)$. Współczynnik a jest równy
A. 3 **B.** -2 **C.** 1 **D.** $-\frac{1}{2}$

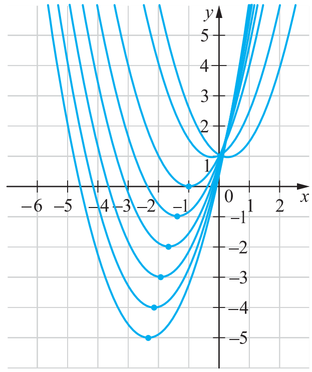
3. Odpowiedz na pytania.
a) Ile miejsc zerowych może mieć funkcja kwadratowa?
b) Co decyduje o liczbie miejsc zerowych funkcji kwadratowej?
c) Jaka funkcja kwadratowa nie ma postaci iloczynowej?

4. Zbadaj istnienie i liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Jeżeli funkcja ma miejsca zerowe, przedstaw ją w postaci iloczynowej.
a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
b) $f(x) = x^2 + x + 7$
c) $f(x) = x^2 + 10x + 25$

5. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 11x + 9$.

6. Wyznacz oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = (x + 5)(-x - 3)$.

PROJEKT



1. Zbadaj, jak zmienia się położenie wierzchołka paraboli, gdy zmienia się jeden ze współczynników funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, a dwa pozostałe współczynniki są ustalone.

2. Zaproponuj wzór funkcji określającej rodzinę parabol, których wierzchołki należą do wykresu funkcji:
a) $y = x$, b) $y = -x$.

3. Czy wierzchołki pewnej rodziny parabol mogą tworzyć inne parabole? Jeżeli tak, to podaj przykłady wzorów opisujących takie rodziny parabol.

4. Czy potrafisz podać inne przykłady zbiorów punktów utworzonych przez wierzchołki parabol?

W swoich poszukiwaniach możesz wykorzystać kalkulator graficzny lub programy komputerowe do sporządzania wykresów funkcji.

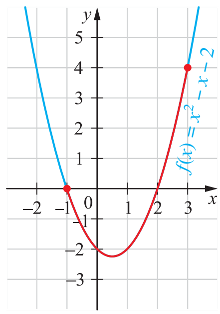
5.5 Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Potrafimy już wyznaczyć najmniejszą albo największą wartość funkcji kwadratowej w całym zbiorze $\boldsymbol{R}$. Często jednak interesuje nas wartość największa lub najmniejsza funkcji w określonym przedziale, nawet w takim, do którego nie należy współrzędna x_w.

PRZYKŁAD 1.

Znajdźmy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - x - 2$ w przedziale $\langle -1;\ 3\rangle$.

Sprawdzamy, czy odcięta wierzchołka paraboli $x_w = \frac{1}{2}$ należy do badanego przedziału. Ponieważ $x_w \in \langle -1;\ 3\rangle$ oraz ramiona paraboli skierowane są do góry, więc w tym przedziale funkcja przyjmuje wartość najmniejszą dla x_w.



$$y_w = f(x_w) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}$$

Aby znaleźć największą wartość funkcji w podanym przedziale, wyznaczamy wartości funkcji na jego końcach.

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

$f(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4$

Ponieważ $f(-1) < f(3)$, więc w przedziale $\langle -1;\ 3\rangle$ funkcja przyjmuje wartość największą dla $x = 3$. Ta wartość wynosi 4.

ĆWICZENIE 1.

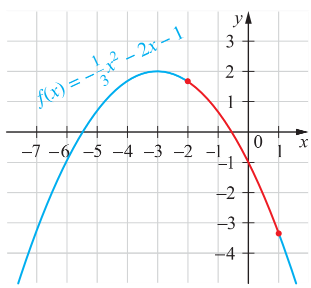
Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ w podanym przedziale.

a) $\langle 1;\ 3\rangle$ b) $\langle -1;\ 2\rangle$

PRZYKŁAD 2.

Znajdźmy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1$ w przedziale $\langle -2;\ 1\rangle$.

Sprawdzamy, czy odcięta wierzchołka paraboli należy do badanego przedziału: $x_w = -3$, $-3 \notin \langle -2;\ 1\rangle$. Ponieważ funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -3;\ +\infty)$, więc jest również malejąca w przedziale $\langle -2;\ 1\rangle$. Zatem największej i najmniejszej wartości poszukujemy na końcach badanego przedziału.



$f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot 4 + 4 - 1 = \frac{5}{3}$ – największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -2;\ 1 \rangle$.

$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1 - 2 - 1 = -\frac{10}{3}$ – najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -2;\ 1 \rangle$.

ĆWICZENIE 2.

Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \pi x^2 - \sqrt{2}x - 1$ w podanym przedziale. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

a) $\langle -1;\ 1 \rangle$ b) $\langle -3;\ -1 \rangle$

Najmniejszą lub największą wartością funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, w przedziale $\langle m;\ n \rangle$ jest najmniejsza lub największa z wartości: $f(m)$, $f(n)$ lub y_w, jeżeli odcięta wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle m;\ n \rangle$.

ZADANIA

1. Największą wartością funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 9$ w przedziale $\langle -1;\ 7 \rangle$ jest

A. 9 **B.** 0 **C.** 16 **D.** 6

2. Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ w przedziale $\langle 0;\ 3 \rangle$ jest

A. -2 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -2 i 1

3. Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = x^2 + 4x + c$ jest liczba -1. Największą wartością tej funkcji w przedziale $\langle 1;\ 3 \rangle$ jest

A. 16 **B.** 24 **C.** 8 **D.** 12

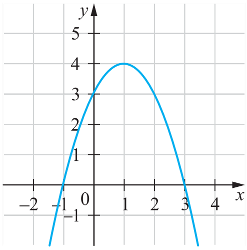
4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $\langle 2;\ 4 \rangle$ b) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$, $\langle 0;\ 3 \rangle$

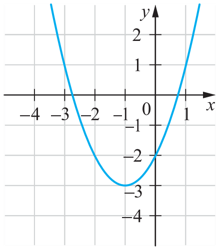
c) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}x + 1$, $\langle -1;\ 1 \rangle$ d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $\langle 0;\ 5 \rangle$

5. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale. Jeżeli jest to konieczne, wyznacz wzór funkcji kwadratowej i wykonaj potrzebne obliczenia.

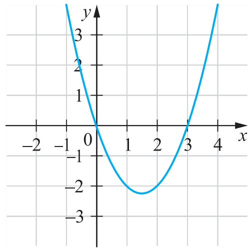
a) $\langle -1;\ 2 \rangle$



b) $\langle -3;\ 0 \rangle$



c) $\langle 2;\ 3 \rangle$



6. Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ jest malejąca w przedziale $\langle 2;\ 5\rangle$ i przyjmuje w nim wartość najmniejszą równą -2 oraz wartość największą równą 7. Wyznacz wartości współczynników b i c.

7. W ubiegłym miesiącu w Centrum Kultury otwarto wystawę prac malarskich. Wystawa była czynna przez 10 dni. Liczbę osób zwiedzających wystawę n-tego dnia od momentu jej otwarcia można w przybliżeniu opisać funkcją $Z(n) = -n^2 + 12n - 6$. W którym dniu wystawę odwiedziło:

a) najwięcej osób,

b) najmniej osób?

8. Podaj przykładowe wartości współczynników funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ tak, aby funkcja była rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 2;\ +\infty)$. Czy funkcja ta przyjmuje wartość największą, czy – najmniejszą? Wyznacz tę wartość.

9. Piłka podrzucona do góry osiąga po t sekundach wysokość, którą można wyrazić wzorem $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{5}{2}$. Jaką maksymalną wysokość osiągnie ta piłka? W którym momencie lotu to nastąpi? Jaką drogę przebędzie piłka w ciągu trzeciej sekundy lotu?

BANK ZADAŃ z. 217–221 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 24$ w przedziale $\langle -1;\ 4\rangle$ jest równa

A. -21 **B.** -23 **C.** -24 **D.** -25

2. Funkcja $f(x) = -x^2 + x + 12$ jest malejąca w przedziale $\langle a;\ 7\rangle$. Wobec tego

A. $a < -2$ **B.** $-12 \leqslant a < 7$ **C.** $\frac{1}{2} \leqslant a < 7$ **D.** $a < -\frac{1}{2}$

3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1;\ 1\rangle$.

4. Wyznacz wartości współczynników b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + bx + c$, wiedząc, że funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -3;\ 1\rangle$, przyjmuje w nim wartość najmniejszą równą -6 oraz największą równą 3.

5. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ są $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$. Oblicz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $\langle 1;\ 7\rangle$.

5.6 Zastosowanie własności funkcji kwadratowej

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy wartość współczynnika b oraz zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2 + bx + 3$, wiedząc, że w przedziale $\langle 3;\ +\infty)$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $(-\infty;\ 3\rangle$ jest malejąca.

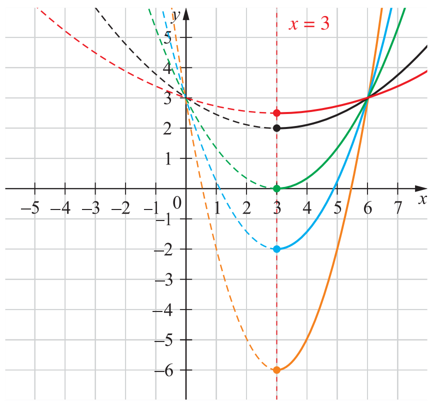
Współrzędna x_w wierzchołka paraboli pozwala określić przedziały, w których funkcja f jest odpowiednio malejąca lub rosnąca w zależności od znaku współczynnika a.

$x_w = -\frac{b}{2a}$, czyli $3 = -\frac{b}{2 \cdot 1}$, zatem $b = -6$.

Funkcja ma postać $f(x) = x^2 - 6x + 3$.

Aby wyznaczyć zbiór wartości, obliczmy drugą współrzędną wierzchołka paraboli $y_w = f(3) = -6$.

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 3$ jest przedział $\langle -6;\ +\infty)$.



ĆWICZENIE 1.

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + bx - 2$. Dla jakiej wartości współczynnika b funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\ -2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle -2;\ +\infty)$? Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

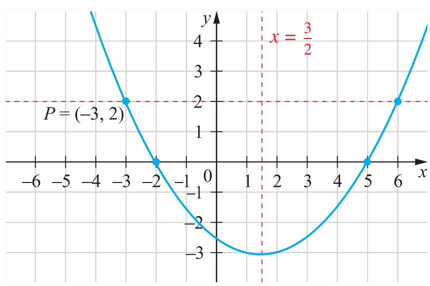
PRZYKŁAD 2.

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej wyznaczmy współczynniki a, b, c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Dla jakich argumentów wartości tej funkcji są większe od 2?

Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 5$ i przedstawiamy funkcję w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 2)(x - 5)$.

Ponieważ punkt $P = (-3,\ 2)$ należy do wykresu funkcji, więc jego współrzędne spełniają równanie tej funkcji.

Zatem $2 = a(-3 + 2)(-3 - 5)$, stąd $a = \frac{1}{4}$.



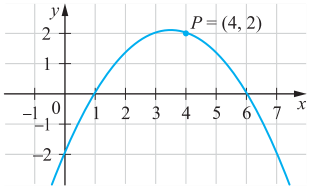
Postać iloczynową $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 5)$ zamieniamy na postać ogólną $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$.

To oznacza, że $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = -\frac{5}{2}$.

Ponieważ prosta $x = \frac{3}{2}$ jest osią symetrii wykresu, więc do paraboli należy również punkt o współrzędnych $(6, 2)$ symetryczny do punktu $P = (-3, 2)$ względem prostej $x = \frac{3}{2}$. Odczytujemy z wykresu, że wartości funkcji są większe od 2 dla $x \in (-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$.

ĆWICZENIE 2.

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c. Dla jakich argumentów wartości funkcji są mniejsze od 2?



PRZYKŁAD 3.

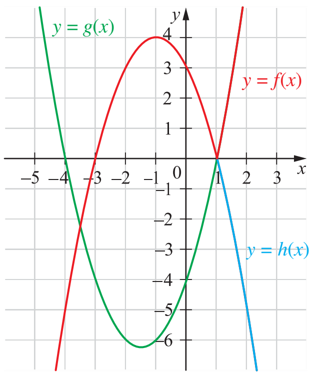
Narysujmy wykres funkcji $y = f(x)$, która jest określona w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ dla $x \in (-\infty; 1)$ oraz $f(x) = x^2 + 3x - 4$ dla $x \in \langle 1; +\infty)$. Na podstawie wykresu:

a) wyznaczmy przedziały, w których funkcja jest malejąca, oraz przedziały, w których jest rosnąca,
b) podajmy miejsca zerowe funkcji,
c) podajmy zbiór argumentów, dla których funkcja osiąga wartości dodatnie.

Aby narysować wykres funkcji f, powinniśmy najpierw narysować wykresy funkcji $h(x) = -x^2 - 2x + 3$ i $g(x) = x^2 + 3x - 4$.

Wyznaczamy miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołków parabol.
Dla funkcji $h(x) = -x^2 - 2x + 3$ mamy $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_w = -1$, $y_w = 4$.
Dla funkcji $g(x) = x^2 + 3x - 4$ mamy $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_w = -\frac{3}{2}$, $y_w = -6\frac{1}{4}$.

Rysujemy wykresy funkcji h oraz g i zaznaczamy odpowiednie części parabol w podanych przedziałach. W ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f.



a) Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -1\rangle$ oraz $\langle 1; +\infty)$, a malejąca – w przedziale $\langle -1; 1\rangle$.
b) Miejscami zerowymi są $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
c) Funkcja ma wartości dodatnie dla $x \in (-3; 1) \cup (1; +\infty)$.

ĆWICZENIE 3.

Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ określonej w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: $f(x) = -x^2 - 5x$ dla $x \in (-\infty; -5)$ oraz $f(x) = x^2 + 4x - 5$ dla $x \in \langle -5; +\infty)$.
Na podstawie wykresu:
a) wskaż, dla jakich argumentów funkcja jest malejąca,
b) podaj miejsca zerowe funkcji,
c) odczytaj zbiór argumentów, dla których funkcja osiąga wartości ujemne.

ZADANIA

1. Funkcja $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ nie ma miejsc zerowych, jeśli

A. $a > -2$ **B.** $a \geqslant -\frac{1}{3}$ **C.** $a < -1$ **D.** $a > 0$

2. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty; 4\rangle$. Funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(1; 3)$. Wobec tego funkcję f opisuje wzór

A. $f(x) = -4x^2 + 16x - 12$ **B.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$
C. $f(x) = 4x^2 - 16x + 12$ **D.** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

3. Dana jest funkcja kwadratowa f opisana wzorem $f(x) = ax^2 + 2x - 24$. Wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $P = (4, 16)$:
a) wyznacz wartość współczynnika a,
b) sporządź wykres funkcji,
c) odczytaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
d) wyznacz równanie osi symetrii paraboli.

4. Wyznacz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + bx + c$, jeśli do jej wykresu należy punkt $P = (1, 10)$, a jednym z miejsc zerowych jest liczba -4. Przedstaw funkcję w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.

5. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że ma ona jedno miejsce zerowe oraz że do jej wykresu należą punkty $A = (1, 2)$ i $B = \left(4, \frac{1}{2}\right)$.

6. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ określonej w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ oraz $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$ dla $x \in \langle -1; 3\rangle$. Na podstawie wykresu:
a) wyznacz przedziały, w których funkcja jest malejąca, oraz w których jest rosnąca,
b) podaj miejsca zerowe funkcji,
c) oblicz wartości funkcji f dla argumentów -3 oraz 2,
d) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

BANK ZADAŃ z. 222–228 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Funkcja $f(x) = ax^2 - 3x - 4$ ma dwa różne miejsca zerowe, jeśli

A. $a > -\frac{9}{16}$ i $a \neq 0$ **B.** $a \geqslant -\frac{9}{16}$ **C.** $a \neq 0$ **D.** $a > 0$

2. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$. Jeżeli $b < 0$ i $c < 0$, to funkcja f

A. ma dwa miejsca zerowe jednakowych znaków.
B. ma jedno dodatnie miejsce zerowe.
C. ma dwa miejsca zerowe różnych znaków.
D. nie ma miejsc zerowych.

3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 4$ określonej dla $x \in \langle -1; +\infty)$.

4. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + bx + c$.

a) Wyznacz współczynniki b i c, wiedząc, że miejscami zerowymi funkcji f są liczby -4 oraz 3.
b) Sporządź wykres funkcji i podaj zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.
c) Wyznacz równanie osi symetrii wykresu.

5. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $P = (4, -9)$ i funkcja ma dwa miejsce zerowe -5 oraz 2.

5.7 Funkcja kwadratowa w zadaniach optymalizacyjnych

W otaczającym nas świecie często poszukujemy wyników optymalnych. W matematyce optymalizacja sprowadza się do poszukiwania największych lub najmniejszych wyników, zgodnych z podanymi warunkami.

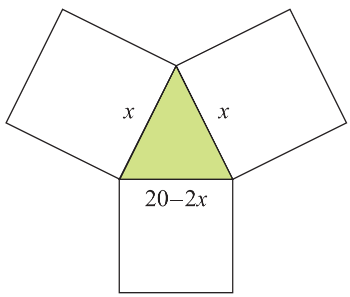
PRZYKŁAD 1.

Przedstawmy liczbę 16 w postaci sumy dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza.

Oznaczmy szukane składniki jako x i y, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$.
$x + y = 16$, więc $y = 16 - x$
Niech S będzie funkcją opisującą sumę kwadratów tych składników.
$S(x) = x^2 + (16 - x)^2 = 2x^2 - 32x + 256$
Dziedziną funkcji S jest zbiór liczb rzeczywistych. Jest to funkcja kwadratowa, a jej wykresem jest parabola mająca ramiona skierowane do góry. Z własności funkcji kwadratowej wiemy, że wartość najmniejszą funkcja S przyjmie w wierzchołku: dla $x_w = \frac{32}{4} = 8$.
Wynosi ona $S(8) = 128$.
Szukanymi składnikami są więc $x = 8$ oraz $y = 8$.

PRZYKŁAD 2.

Odcinek długości 20 cm podzielono na trzy części, z których zbudowano trójkąt równoramienny. Na bokach tego trójkąta zbudowano kwadraty. Jaką długość powinny mieć boki trójkąta, aby suma pól tak zbudowanych kwadratów była najmniejsza? Wyznaczmy tę sumę.



Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku. Sumę pól kwadratów w zależności od długości boków trójkąta opisuje funkcja
$P(x) = x^2 + x^2 + (20 - 2x)^2 =$
$= 2x^2 + 400 - 80x + 4x^2 = 6x^2 - 80x + 400.$
Dziedziną funkcji jest przedział $(0; 10)$ – aby istniał trójkąt równoramienny o obwodzie 20 cm, jego najdłuższy bok musi mieć długość mniejszą niż 10 cm. Ponieważ P jest funkcją kwadratową, więc skorzystamy z metod, którymi badaliśmy taką funkcję. Wyznaczmy współrzędne wierzchołka paraboli.

$x_w = \frac{80}{12} = 6\frac{2}{3}$, $6\frac{2}{3} \in (0; 10)$ $\qquad y_w = P(x_w) = 6 \cdot \frac{400}{9} - 80 \cdot \frac{20}{3} + 400 = 133\frac{1}{3}$

Dla $x = 6\frac{2}{3}$ wartość funkcji P jest najmniejsza, więc suma pól kwadratów jest najmniejsza. Długość trzeciego boku trójkąta wynosi $20 - 2x$, czyli $20 - 2 \cdot 6\frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$. Zatem ten trójkąt ma wszystkie boki równej długości.

Suma pól kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta o obwodzie 20 cm jest najmniejsza, jeżeli trójkąt jest równoboczny. Wtedy długość boku trójkąta wynosi $6\frac{2}{3}$ cm, a suma pól kwadratów zbudowanych na jego bokach jest równa $133\frac{1}{3}$ cm^2.

ZADANIA

1. Pręt stalowy długości 10 cm podzielono na cztery kawałki, z których zbudowano prostokąt. Jakiej długości powinny być te kawałki, aby pole zbudowanego prostokąta było największe?

A. 2 cm, 2 cm, 3 cm, 3 cm
B. 1 cm, 1 cm, 4 cm, 4 cm
C. 2,5 cm, 2,5 cm, 2,5 cm, 2,5 cm
D. 0,5 cm, 0,5 cm, 4,5 cm, 4,5 cm

2. Liczbę 12 przedstawiono jako sumę dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza. Składnikami tymi są

A. 4 i 8 **B.** 6 i 6 **C.** 4,5 i 7,5 **D.** 2 i 8

3. Pole prostokąta o obwodzie 88 cm może opisywać funkcja

A. $f(x) = x^2 - 44x,\ x > 44$
B. $f(x) = -x^2 + 44x,\ 0 < x < 44$
C. $f(x) = x^2 + 88x,\ 0 < x < 88$
D. $f(x) = -x^2 + 88x,\ x > 0$

4. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o obwodzie 64 m, aby jego pole było największe?

5. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 60. Oblicz wysokość prostopadłościanu, którego pole powierzchni całkowitej jest największe.

6. Na ogrodzenie prostokątnej działki potrzeba 120 m siatki. Jakie wymiary będzie miała działka o największym polu, jeśli szerokość bramy wjazdowej na działkę to 4 m?

7. W trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 20$ cm, $|AC| = |BC| = 12{,}5$ cm, wpisano prostokąt w taki sposób, że jeden jego bok zawiera się w podstawie trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki należą do ramion trójkąta. Wyznacz wymiary takiego prostokąta o największym polu.

8. W trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości 6 cm wpisano prostokąt tak, że jeden jego bok zawiera się w przeciwprostokątnej, a dwa pozostałe wierzchołki należą do ramion trójkąta. Wyznacz wymiary takiego prostokąta, który ma największe pole.

9. Na bokach trójkąta równoramiennego o obwodzie 26 cm zbudowano półkola. Jakie powinny być wymiary trójkąta, aby suma pól półkoli zbudowanych w ten sposób była najmniejsza? Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

10. Ratownicy wytyczają prostokątne kąpielisko, przylegające do plaży. Mają do dyspozycji linę długości 240 m. Jakie wymiary będzie miało kąpielisko o największej powierzchni?

11. Wyznacz liczby x, y takie, że ich różnica wynosi 18, a suma ich kwadratów jest najmniejsza.

12. Z prostokątnego arkusza blachy o wymiarach 120 cm × 80 cm wycięto na rogach jednakowe kwadraty tak, że po odpowiednim zagięciu otrzymano otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe?

BANK ZADAŃ z. 229–232 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Funkcja opisująca sumę kwadratów dwóch dowolnych liczb różniących się o 1

A. nie ma miejsc zerowych. **B.** ma jedno miejsce zerowe.
C. ma dwa miejsca zerowe. **D.** ma wartość największą.

2. Prostokąt o obwodzie 20 cm ma największe pole, jeśli jego wymiary to

A. 4 cm × 5 cm **B.** 2 cm × 10 cm
C. 5 cm × 5 cm **D.** 2 cm × 8 cm

3. Liczbę 6 przedstaw w postaci sumy takich dwóch liczb, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

4. Parking samochodowy w kształcie prostokąta przylega do ściany hali targowej. Aby ogrodzić trzy pozostałe boki parkingu, zakupiono 200 m siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary powinien mieć ten parking, żeby jego powierzchnia była największa?

5. Centrala ogrodnicza skupuje dziennie 3 t truskawek, płacąc dostawcom 3 zł za 1 kg, i sprzedaje je po 3,50 zł za 1 kg. Kierownik centrali oszacował, że każda obniżka ceny 1 kg sprzedawanych truskawek o 10 gr zwiększa ilość sprzedanych truskawek o 100 kg dziennie. Jaką cenę sprzedaży 1 kg truskawek powinien ustalić, aby zysk centrali był największy?

5.8 Równania kwadratowe

Funkcja kwadratowa może mieć jedno miejsce zerowe, dwa miejsca zerowe albo nie mieć ich wcale. Liczba miejsc zerowych zależy od znaku wyróżnika Δ. Wyznaczając miejsca zerowe funkcji kwadratowej, wyznaczamy tym samym rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Definicja

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym**.
Liczba p jest **rozwiązaniem** równania kwadratowego, jeśli spełnia to równanie, tzn. jeśli $ap^2 + bp + c = 0$. Rozwiązanie równania kwadratowego nazywamy również **pierwiastkiem** równania kwadratowego.

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

PRZYKŁAD 1.

Rozwiążmy równanie.

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 - 6x = 0$ c) $x^2 + 3x = 3(x - 2) + 1$

a) Gdy $b = 0$, rozwiązanie równania ułatwi nam przedstawienie trójmianu kwadratowego w postaci iloczynowej.

$x^2 - 16 = 0$
$(x - 4)(x + 4) = 0$
$x - 4 = 0$ lub $x + 4 = 0$
$x = 4$ lub $x = -4$

Pierwiastkami równania są liczby -4 i 4.

b) Gdy $c = 0$, trójmian kwadratowy przedstawiamy w postaci iloczynowej.

$x(x - 6) = 0$
$x = 0$ lub $x - 6 = 0$, stąd $x = 6$

Pierwiastkami równania są liczby 0 i 6.

c) Przekształćmy równanie na równanie równoważne.

$x^2 + 3x = 3x - 6 + 1$, stąd $x^2 = -5$

Równanie to jest sprzeczne, ponieważ wyrażenie x^2 jest nieujemne dla każdej liczby $x \in \boldsymbol{R}$. Równanie nie ma pierwiastków.

ĆWICZENIE 1.

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 = 8$ b) $x^2 - 12 = 0$ c) $x^2 + 5 = 0$

d) $x^2 = \sqrt{5}x$ e) $3x^2 - 5x = 0$ f) $-2x^2 - 3x = 0$

> Jeżeli $b = 0$ i $c = 0$, to równanie kwadratowe niezupełne $ax^2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie $x = 0$.

Równania, w których wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0, nazywamy **równaniami zupełnymi**.

PRZYKŁAD 2.

Rozwiążmy równanie $x^2 + 8x + 16 = 0$.

W tym przypadku skorzystamy z wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$(x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Pierwiastkiem równania jest liczba -4.

> Jeżeli trójmian kwadratowy można przedstawić jako kwadrat sumy lub różnicy, to równanie kwadratowe ma **pierwiastek podwójny** (dwukrotny).

PRZYKŁAD 3.

Rozwiążmy równanie $3x^2 - 6x + 1 = 0$.

Wykorzystamy metodę dopełnienia do kwadratu różnicy.

$3x^2 - 6x + 1 = 0 \quad | : 3$

$x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + \frac{1}{3} = 0$

$(x - 1)^2 = \frac{2}{3}$

$x - 1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ lub $x - 1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x = \frac{\sqrt{6}}{3} + 1$ lub $x = -\frac{\sqrt{6}}{3} + 1$, czyli $x = \frac{\sqrt{6} + 3}{3}$ lub $x = \frac{-\sqrt{6} + 3}{3}$

Pierwiastkami równania są liczby $\frac{\sqrt{6} + 3}{3}$ i $\frac{-\sqrt{6} + 3}{3}$.

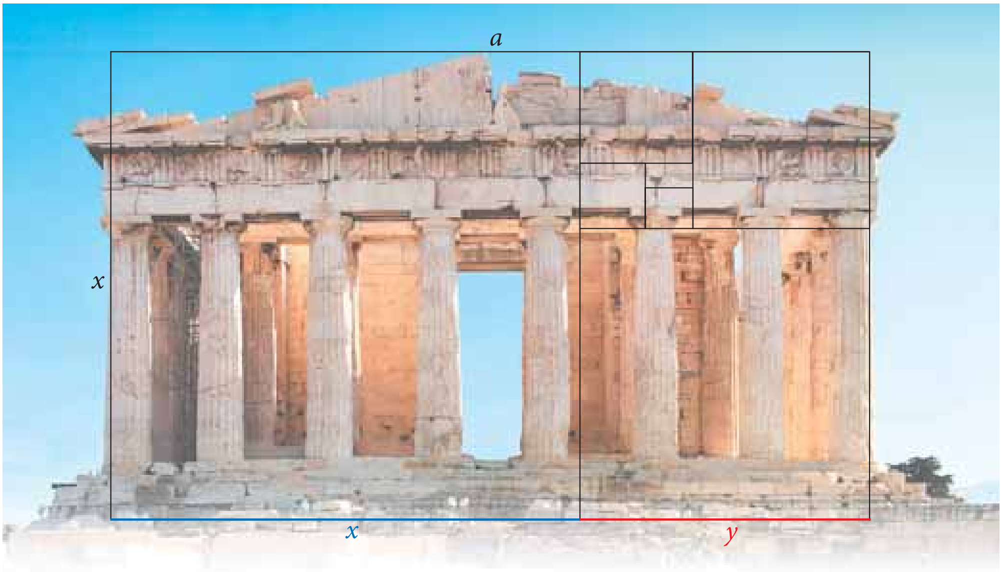
ĆWICZENIE 2.

Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$ b) $-4x^2 + 8x - 4 = 0$

c) $x^2 + 8x - 21 = 0$ d) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = 0$

Ciekawostka



Złoty podział liczby a $(a \neq 0)$ to przedstawienie tej liczby w postaci sumy dwóch składników x, y takich, że $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$. Podział ten znany był już starożytnym Grekom i bywał często stosowany w architekturze, ponieważ uchodził za klasycznie piękny.
Niech 1 będzie długością odcinka AB, a punkt C wyznacza jego złoty podział.

Wyrażenie $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ opisuje złoty podział odcinka AB. Gdy przekształcimy tę równość, otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 + x - 1 = 0$, którego rozwiązaniem jest złota liczba: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PRZYKŁAD 4.

Rozwiążmy równanie.

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ c) $5x^2 - 2x + 3 = 0$

a) Rozwiązanie równania jest równoważne z wyznaczeniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - 5x - 3$.

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$

Równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$.

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

Równanie ma jeden pierwiastek podwójny $x = \frac{8}{2} = 4$.

c) $5x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 - 60 = -56,\ \ \Delta < 0$

Równanie nie ma pierwiastków. Jest to równanie sprzeczne.

Twierdzenie

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$:

- ma dwa różne pierwiastki $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$;
- ma jeden (podwójny) pierwiastek $x_0 = \frac{-b}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$;
- nie ma pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$.

ZADANIA

1. Rozwiązaniem równania $x^2 - 10x + 25 = 0$

A. są liczby 5 i –5. **B.** jest liczba –5. **C.** jest liczba 5. **D.** jest liczba 0.

2. Liczby –3 i 5 są pierwiastkami równania kwadratowego

A. $x^2 - 3x + 5 = 0$ **B.** $-2(x - 3)(x + 5) = 0$

C. $\sqrt{5}(x + 3)(x - 5) = 0$ **D.** $2x^2 - 4x + 30 = 0$

3. Liczby –1 i 3 są pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$. Wówczas

A. $b = 3, c = -1$ **B.** $b = -2, c = -3$

C. $b = -3, c = -1$ **D.** $b = 2, c = -3$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 = 256$ b) $\frac{2}{3}x^2 = 12$ c) $x^2 - 7x = 0$

d) $-\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{3}x$ e) $x^2 - 7x = \frac{1}{2}(8 - 14x)$ f) $x^2 = 4\frac{1}{6}$

5. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $5x + 4x^2 = 2x^2 - 3x$ b) $(x - 3)(x + 2) = (x + 4)(2 - x) - 14$

c) $(2 - 3x)^2 + (3 + x)(x - 1) = 1 + x$ d) $(x - 3)^2 + (x + 5)^2 = 34 - x$

6. Rozwiąż równanie, stosując wzory skróconego mnożenia lub metodę dopełniania do pełnego kwadratu.

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$ b) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ c) $x^2 + 12x + 3 = 0$

7. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $x^2 - 3x - 7 = 0$ c) $x^2 - 11x + 28 = 0$

8. Podaj przykład równania kwadratowego, którego pierwiastkami są podane liczby.

a) 2 i 5 b) 0 i 12 c) -3 i $\sqrt{3}$ d) $\frac{2}{5}$ i $-\frac{1}{3}$

9. Pierwiastkami równania kwadratowego są liczby $x_1 = \frac{2}{2-3\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{2}{2+3\sqrt{2}}$. Przedstaw to równanie w postaci $x^2 + bx + c = 0$.

10. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych wynosi 116. Wyznacz te liczby.

11. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych wynosi 368. Wyznacz te liczby.

12. Suma dwóch liczb jest równa 29, a ich iloczyn wynosi 84. Wyznacz te liczby.

13. W prostokącie jeden z boków wydłużono o x%, a drugi skrócono o x% tak, że pole tego prostokąta zmniejszyło się o 8%. Oblicz x.

BANK ZADAŃ z. 233–239 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Pierwiastkami równania $7(x - 3)(x + 1) = 0$ są liczby

A. -3 i -1 **B.** 3 i -1
C. -3 i 1 **D.** 3 i 1

2. Jeżeli pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby 3 i 5, to

A. $b = -8$, $c = 15$ **B.** $b = 4$, $c = -8$
C. $b = 0$, $c = 15$ **D.** $b = 3$, $c = 5$

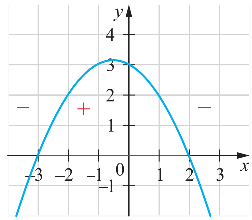
3. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

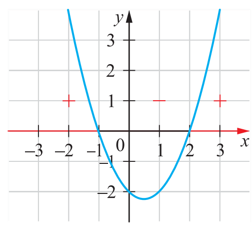
a) $x^2 + 5x = 0$ b) $x^2 - 15 = 0$ c) $x^2 + 4 = 0$ d) $2x^2 + 8x + 3 = 0$

4. Rozwiąż równanie $x^2 + 12x + 4 = 0$ metodą dopełniania do pełnego kwadratu.

5. Z kwadratowej płyty gipsowej odcięto pas szerokości 30 cm. Pole pozostałej części płyty wynosi 6 m^2. Oblicz długość boku płyty przed odcięciem.

5.9 Nierówności kwadratowe





Wykres funkcji kwadratowej pozwala na odczytanie zbioru argumentów, dla których wartości funkcji są dodatnie lub ujemne. Daje tym samym odpowiedź na pytanie, co jest zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c < 0$. Jak jednak podać zbiór rozwiązań nierówności, gdy nie możemy sporządzić dokładnego wykresu funkcji? Wystarczy wtedy sporządzić tylko jego szkic na podstawie miejsc zerowych funkcji i znaku współczynnika a. **Rozwiązanie nierówności** polega na wyznaczeniu zbioru tych wartości niewiadomej, dla których nierówność jest spełniona.

PRZYKŁAD 1.

Rozwiążmy nierówność.

a) $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$ b) $-x^2 - 5x - 4 > 0$

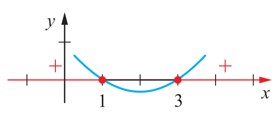
c) $2x^2 - 12x + 18 \leqslant 0$

W celu wyznaczenia rozwiązania nierówności na rysunku zaznaczamy na osi x miejsca zerowe funkcji kwadratowej i szkicujemy fragment jej wykresu (paraboli).

a) Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - 8x + 6$.

$\Delta = 64 - 48 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$, zatem $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

Zaznaczamy na osi x miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - 8x + 6$ i szkicujemy fragment paraboli ($a = 2$, czyli $a > 0$, ramiona paraboli skierowane są do góry). Rozwiązanie nierówności odczytujemy z rysunku.

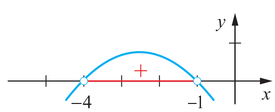


$2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 1\rangle \cup \langle 3; +\infty)$

b) Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = -x^2 - 5x - 4$.

$\Delta = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$, zatem $x_1 = -1$, $x_2 = -4$

Zaznaczamy na osi x miejsca zerowe i szkicujemy parabolę ($a = -1$, $a < 0$, ramiona paraboli skierowane są w dół). Rozwiązanie nierówności odczytujemy z rysunku.

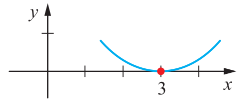


$-x^2 - 5x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4;\ -1)$

c) Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji $y = 2x^2 - 12x + 18$.

$2(x^2 - 6x + 9) = 0, \quad 2(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Funkcja ma jedno miejsce zerowe, więc parabola jest styczna do osi x. Rozwiązanie nierówności odczytujemy z rysunku.



$2x^2 - 12x + 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 3$

ĆWICZENIE 1.

Rozwiąż nierówność.

a) $-x^2 - 6x \geqslant 0$

b) $-2x^2 + x + 1 \leqslant 0$

c) $x^2 - 18x + 81 \geqslant 0$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 > 0$

PRZYKŁAD 2.

Rozwiążmy nierówność.

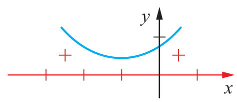
a) $3x^2 + 4x + 5 > 0$

b) $-2x^2 > 7 - 5x$

a) Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji $y = 3x^2 + 4x + 5$.

$3x^2 + 4x + 5 = 0, \ \Delta = 16 - 60 = -44 < 0$

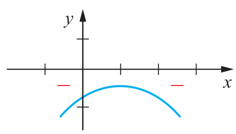
Funkcja nie ma miejsc zerowych. Naszkicujmy jej wykres, wiedząc, że ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$). Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie. Zatem nierówność $3x^2 + 4x + 5 > 0$ jest spełniona dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.



b) Nierówność sprowadzamy do postaci $-2x^2 + 5x - 7 > 0$. Wyznaczmy miejsca zerowe funkcji $y = -2x^2 + 5x - 7$.

$-2x^2 + 5x - 7 = 0, \ \Delta = 25 - 56 = -31 < 0$

Funkcja nie ma miejsc zerowych. Naszkicujmy jej wykres, wiedząc, że ramiona paraboli są skierowane w dół ($a < 0$). Funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne. Zatem nierówność $-2x^2 + 5x - 7 > 0$ nie ma rozwiązania, jest sprzeczna.



ZADANIA

1. Przedział $\langle 3;\ 8\rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności

A. $(x+3)(x+8) \leqslant 0$

B. $(x+3)(x+8) > 0$

C. $(x-3)(x-8) > 0$

D. $(3-x)(8-x) \leqslant 0$

2. Nierówność $x^2 + bx + 5 < 0$ nie ma rozwiązań, jeśli

A. $b < 0$

B. $b \in \left(-2\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}\right)$

C. $b \in \left(-5\sqrt{2};\ 5\sqrt{2}\right)$

D. $b \in \left(2\sqrt{5};\ +\infty\right)$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 + x + 1 \leqslant 0$
b) $3x^2 - 2x - 1 > 0$
c) $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$
d) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 > 0$
e) $3x^2 - 2x + 1 > 0$
f) $2x^2 \geqslant 8x + 21$
g) $(x + 2)(x - 5) \leqslant 2$
h) $\sqrt[3]{2}x^2 - 3\sqrt{2}x < 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $(3x - 6)(x + 2) > (x - 1)(x + 3)$
b) $2x^2 + (x + 1)^2 < 8x + 1$
c) $(x + 2)^2 - 1 \leqslant 2(x - 3)^2$
d) $x^2 + 3x - 2 < -x^2 - 2x + 4$

5. Podaj przykład nierówności kwadratowej, której zbiorem rozwiązań jest podany zbiór.

a) $(-4;\ 3)$
b) $(-\infty;\ -2) \cup (5;\ +\infty)$
c) $\langle -\sqrt{3};\ \sqrt{5} \rangle$

6. Rozwiąż nierówność. Końce przedziałów podaj z dokładnością do 0,01.

a) $0,(6)x^2 - \sqrt{5}x + 1 > 0$
b) $(0,3)^3 x^2 \geqslant x + 12$
c) $\left(x + 3\sqrt{2}\right)(x - \pi) \leqslant 1$
d) $\frac{1}{\sqrt{6}}x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 < 0$

7. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$
b) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-x^2 + 3x + 2}}$
c) $f(x) = \sqrt{3 - x^2} + \sqrt{x^2 - 3}$
d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x}}{\sqrt{x^2 + 6x - 2}}$

8. Szerokość prostokątnego pokoju jest o 1 m mniejsza od jego długości. Jego podłoga ma być przykryta w całości prostokątnym dywanem. Jakie wymiary może mieć dywan, jeżeli przekątna podłogi jest nie mniejsza od 5 m i nie większa od 8 m? Wynik podaj w pełnych metrach.

9. Jakie wymiary powinna mieć ramka w kształcie prostokąta wykonana z drutu o długości 3 dm, aby ograniczała powierzchnię większą od 52,25 cm^2?

BANK ZADAŃ z. 240–246 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Przedział $\langle -2;\ 5\rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 + bx + c \leqslant 0$, jeśli

A. $b = -3,\ c = 6$ **B.** $b = -2,\ c = 5$
C. $b = 2,\ c = -5$ **D.** $b = -3,\ c = -10$

2. Nierówność $x^2 + bx + 4 > 0$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, jeśli

A. $b < 0$ **B.** $b \in (-4;\ 4)$
C. $b \in (16;\ +\infty)$ **D.** $b > 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 14x + 49 \leqslant 0$

b) $-x^2 + x - 2 \geqslant 0$

c) $(x - 3)^2 < 2\,(x + 1)^2$

4. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 9}$.

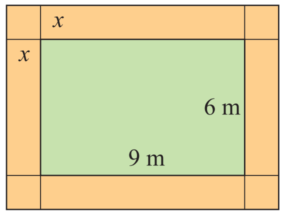
5. Podaj przykład nierówności kwadratowej, której zbiorem rozwiązań jest zbiór $(-\infty;\ 6) \cup (12;\ +\infty)$.

6. Jaką wartość może mieć odcięta punktu A należącego do wykresu funkcji $f(x) = -2x^2 + 3x + 3$, jeśli jego rzędna jest większa od 1?

5.10 Zadania tekstowe z zastosowaniem równań i nierówności kwadratowych

PRZYKŁAD 1.

Prostokątną rabatę kwiatową o wymiarach 9 m × 6 m otoczono chodnikiem o szerokości x. Wyznaczmy szerokość chodnika, jeśli wiadomo, że jego powierzchnia jest równa powierzchni rabaty.



Pole powierzchni rabaty z chodnikiem możemy zapisać za pomocą wyrażenia $(9 + 2x)(6 + 2x)$, a pole samego chodnika $(9 + 2x)(6 + 2x) - 6 \cdot 9$, $x > 0$.
Uwzględniając warunek podany w treści zadania, otrzymujemy równanie

$(9 + 2x)(6 + 2x) - 6 \cdot 9 = 6 \cdot 9$

$4x^2 + 30x + 54 = 108$

$4x^2 + 30x - 54 = 0$

$\Delta = 900 + 864 = 1764$, $\sqrt{\Delta} = 42$,

$x_1 = \frac{-30 - 42}{8} = -9$, $x_2 = \frac{-30 + 42}{8} = 1,5$

Pierwiastek równania $x_1 = -9$ nie spełnia warunków zadania, ponieważ szerokość chodnika nie może być liczbą ujemną – zatem szerokość chodnika wynosi 1,5 m.

PRZYKŁAD 2.

W trójkącie prostokątnym boki mają długości a, $2a - 1$, $2a + 1$. Obliczmy pole trójkąta.

Aby wyznaczyć długości boków tego trójkąta, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Najdłuższym spośród danych boków, czyli przeciwprostokątną trójkąta, jest bok długości $2a + 1$. Mamy więc równanie kwadratowe, w którym niewiadoma $a > \frac{1}{2}$ (długość każdego boku trójkąta jest liczbą dodatnią).

$a^2 + (2a - 1)^2 = (2a + 1)^2$

$a^2 + 4a^2 - 4a + 1 = 4a^2 + 4a + 1$

$a^2 - 8a = 0$

$a(a - 8) = 0$, stąd $a = 0$ lub $a = 8$

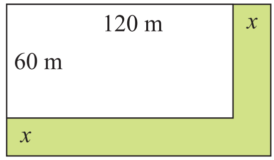
Rozwiązanie $a = 0$ nie spełnia założenia $a > \frac{1}{2}$. Zatem $a = 8$. Długości boków trójkąta prostokątnego wynoszą 8, 15 i 17. Pole trójkąta wynosi $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60$.

ĆWICZENIE 1.

Długości boków prostokąta i jego przekątnej są zapisane w postaci: x, $2x-8$, $2x-4$. Wyznacz długości boków prostokąta. Oblicz jego obwód i pole. Pamiętaj o odpowiednich założeniach.

PRZYKŁAD 3.

Parking samochodowy ma wymiary 60 m × 120 m. Postanowiono powiększyć teren przeznaczony na parkowanie – zwiększono długość i szerokość parkingu o taką samą liczbę metrów. O ile należy zwiększyć wymiary parkingu, aby jego powierzchnia była co najmniej trzy razy większa od dotychczasowej?



Powierzchnia dotychczasowego parkingu

$P = 60 \cdot 120 = 7200\ [\mathrm{m}^2]$

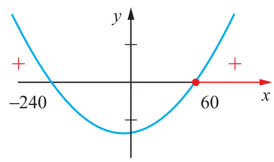
Powierzchnia parkingu po zmianie wymiarów

$P_1 = (60+x)(120+x)$ dla $x > 0$

$(60+x)(120+x) \geqslant 3 \cdot 7200$

$x^2 + 180x - 14\,400 \geqslant 0$

$\Delta = 90\,000$, $\sqrt{\Delta} = 300$, $x_1 = -240$, $x_2 = 60$



Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 180x - 14\,400$.

Ponieważ $x > 0$, więc nierówność jest spełniona dla $x \in \langle 60; +\infty)$.

Długość i szerokość parkingu należy zwiększyć o co najmniej 60 m, aby jego powierzchnia zwiększyła się co najmniej trzykrotnie.

ZADANIA

1. Obwód prostokąta jest równy 14, a jego przekątna ma długość 5. Pole prostokąta jest równe

A. 18,5 **B.** 12 **C.** 24 **D.** 16

2. W turnieju tenisowym, podczas którego każdy tenisista rozegrał po jednym meczu z każdym z pozostałych zawodników, rozegrano łącznie 28 meczów. Wobec tego w tym turnieju brało udział

A. 7 tenisistów. **B.** 8 tenisistów. **C.** 12 tenisistów. **D.** 14 tenisistów.

3. Oblicz pole rombu o obwodzie równym 40 dm, jeśli wiadomo, że jedna z jego przekątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej.

4. Rok temu abonament za przyłącze internetowe wynosił 60 zł miesięcznie. Po dwukrotnej obniżce ceny o tyle samo procent abonament wynosi teraz 48 zł 60 gr. O ile procent obniżono cenę za każdym razem?

5. Różnica kwadratów dwóch liczb wynosi 1035. Większa liczba jest o 1 większa od potrojonej mniejszej liczby. Podaj te liczby.

6. Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez 3. Suma kwadratów tych liczb wynosi 450. Oblicz długości boków tego trójkąta. Jaki to trójkąt?

7. Jeżeli liczbę dwucyfrową pomnożymy przez liczbę o przestawionych cyfrach, to otrzymamy 4032. Wyznacz te liczby, jeśli suma cyfr każdej z nich wynosi 12.

8. Obwód prostokąta wynosi 18 dm. Na bokach prostokąta zbudowano półkola o średnicach równych długościom tych boków. Jakie powinny być wymiary prostokąta, aby suma pól czterech półkoli była najmniejsza?

BANK ZADAŃ z. 247–249 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. W trójkącie prostokątnym długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi. Oceń prawdziwość zdania.

A. Są dwa takie trójkąty.
B. Jest jeden taki trójkąt.
C. Jest nieskończenie wiele takich trójkątów.
D. Nie ma takiego trójkąta.

2. Dany jest kwadrat o boku 6 cm. Jeżeli jeden z jego boków skrócimy o x cm, a drugi wydłużymy o x cm, to pole otrzymanego prostokąta będzie o 4 cm^2 mniejsze niż pole danego kwadratu. Podaj długości boków prostokąta.

3. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 515. Jakie to liczby?

4. Dany jest trójkąt równoboczny o boku 5 cm. O ile centymetrów należy wydłużyć boki trójkąta, aby jego pole zwiększyło się co najwyżej o $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$?

5. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 15. Różnica kwadratu tej liczby i kwadratu liczby powstałej z niej po przestawieniu cyfr jest równa 1485. Co to za liczba?

ZESTAW ZADAŃ – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + x - 12$. Wówczas

A. funkcja nie ma miejsc zerowych.
B. funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 1; +\infty)$.
C. zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\langle -12; +\infty)$.
D. funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(-4; 3)$.

Zadanie 2. (1 p.)

Do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 3x + 1$ należy punkt

A. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ **B.** $(-3, 1)$ **C.** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **D.** $(1, 2)$

Zadanie 3. (1 p.)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -2(x+1)^2 + 1$ jest przedział

A. $\langle 1; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -2\rangle$ **C.** $(-\infty; 1\rangle$ **D.** $\langle -2; 1\rangle$

Zadanie 4. (1 p.)

Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 2$. Funkcję f możemy zapisać za pomocą wzoru

A. $f(x) = x^2 + x - 6$ **B.** $f(x) = x^2 - x + 6$
C. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **D.** $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Zadanie 5. (1 p.)

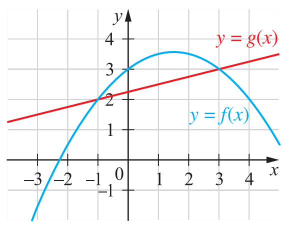
Równanie $x^2 - 7x + 12 = 0$

A. ma jedno rozwiązanie. **B.** nie ma rozwiązań.
C. ma dwa rozwiązania dodatnie. **D.** ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Zadanie 6. (3 p.)

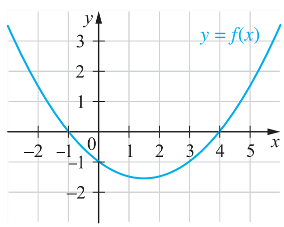
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f oraz wykres funkcji liniowej g. Podaj:

a) współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g,
b) rozwiązanie nierówności $g(x) \leqslant 3$,
c) rozwiązanie nierówności $g(x) \geqslant f(x)$.



Zadanie 7. (3 p.)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $y = f(x)$. Odczytaj współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych. Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.



Zadanie 8. (4 p.)

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest przedział $\langle 3; +\infty)$, natomiast zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 5$ jest przedział $\langle -3; 1\rangle$. Wyznacz wzór tej funkcji.

Zadanie 9. (4 p.)

Piotr postanowił ulokować w banku kwotę 5000 zł na lokacie dwuletniej o rocznej kapitalizacji odsetek. Jakie powinno być oprocentowanie lokaty, aby po dwóch latach za zgromadzone pieniądze mógł wykupić dwutygodniowe wczasy za granicą w cenie 5400 zł?

Zadanie 10. (4 p.)

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 1 \geqslant 0$. Podaj największą liczbę całkowitą ujemną i najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią spełniające tę nierówność.

Zadanie 11. (5 p.)

Punkty wspólne parabol $y = -x^2 + 2x + 8$ i $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{7}{2}$ oraz wierzchołki tych parabol tworzą czworokąt. Oblicz pole tego czworokąta.

Zadanie 12. (4 p.)

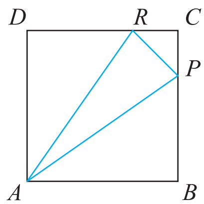
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 4 cm dłuższa od drugiej. Obwód trójkąta jest równy 48 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zadanie 13. (3 p.)

Oblicz sumę odwrotności rozwiązań równania $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

Zadanie 14. (6 p.)

Kwadrat $ABCD$ ma boki długości 10. Na bokach BC i DC zaznaczono odpowiednio punkty P i R tak, że pola trójkątów ABP i ADR są cztery razy większe od pola trójkąta PCR. Znajdź długości odcinków BP i DR.



Zadanie 15. (6 p.)

Osiedlowa piekarnia wypiekała na początku 100 bochenków chleba dziennie. Oszacowano, że dzienny zysk piekarni (w złotych) przy wypieku n bochenków chleba dziennie w przybliżeniu można wyrazić za pomocą funkcji $f(n) = 20n - 0{,}025n^2 - 30$. Po tygodniu zwiększono dzienny wypiek do 200 bochenków chleba dziennie. Popyt na pieczywo wzrastał i zdecydowano o dalszym zwiększaniu dziennej produkcji.

a) O ile zwiększył się dzienny zysk piekarni w drugim tygodniu w stosunku do pierwszego?

b) Czy w związku ze wzrostem popytu na pieczywo opłacalne jest zwiększenie dziennej produkcji do 300 bochenków dziennie?

c) Wypiek ilu bochenków chleba dziennie przyniesie największy dochód?

d) Przy jakim dziennym wypieku chleba działalność piekarni będzie nieopłacalna?

6 Trygonometria

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

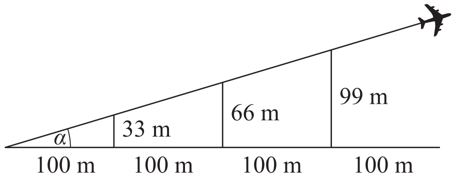
- wykorzystywanie definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°
- korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych
- obliczanie miary kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miary dokładnej albo przybliżonej)
- stosowanie prostych zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
- wyznaczanie wartości pozostałych funkcji kąta ostrego przy znajomości wartości funkcji sinus lub cosinus tego kąta
- korzystanie z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych

6.1 Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

PRZYKŁAD 1.

Piotr z rodziną obserwował z tarasu widokowego start samolotu. Rozpędzony na pasie startowym samolot oderwał się od płyty lotniska. Po kilkunastu sekundach był już bardzo wysoko. Tata Piotra sfilmował start samolotu. „Ciekawe – pomyślał Piotr – jak wysoko znajduje się teraz ten samolot". Po powrocie do domu to pytanie nadal go nurtowało. Wielokrotnie oglądał moment startu samolotu. Po chwili zawołał: „Już wiem!".

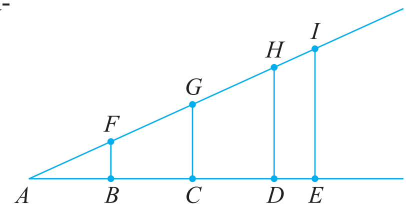
Przeanalizujmy odkrycie Piotra.
Samolot po oderwaniu się od pasa startowego wznosił się, lecąc wzdłuż linii prostej nachylonej do płyty lotniska pod pewnym kątem α. Na filmie Piotr zauważył, że podczas wznoszenia samolot w ciągu jednej sekundy pokonywał odległość 100 m (światła wzdłuż krawędzi pasa startowego były ustawione co tyle metrów).



Wysokość, na której znajdował się samolot, po jednej sekundzie wynosiła około 33 m, po dwóch sekundach – 66 m, po trzech sekundach – 99 m itd. Dopóki samolot wznosił się wzdłuż linii prostej nachylonej pod tym samym kątem do płyty lotniska, ta zasada pozwalała na przybliżone wyznaczenie jego położenia.

ĆWICZENIE 1.

Wykonaj jak najdokładniej pomiary odpowiednich odcinków na rysunku i oblicz następujące ilorazy:



a) $\frac{|FB|}{|AB|}, \frac{|GC|}{|AC|}, \frac{|HD|}{|AD|}, \frac{|IE|}{|AE|},$

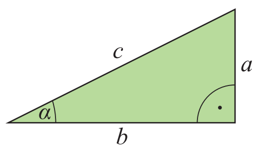
b) $\frac{|FB|}{|AF|}, \frac{|GC|}{|AG|}, \frac{|HD|}{|AH|}, \frac{|IE|}{|AI|},$

c) $\frac{|AB|}{|AF|}, \frac{|AC|}{|AG|}, \frac{|AD|}{|AH|}, \frac{|AE|}{|AI|}.$

Co zauważasz? Czy potrafisz uzasadnić swoje spostrzeżenia?

Zauważmy, że na rysunku w ćwiczeniu 1. odpowiednie punkty są wierzchołkami trójkątów prostokątnych mających wspólny kąt ostry. W każdym z trzech przypadków odpowiednie ilorazy długości odcinków są równe. Podobna zasada będzie obowiązywała dla dowolnych trójkątów prostokątnych o kącie ostrym tej samej miary.

Definicja



a, b – przyprostokątne
c – przeciwprostokątna

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta.
Tangens kąta α oznaczamy jako $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.
Sinus kąta α oznaczamy jako $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem (czytaj: kosinusem) **kąta ostrego** α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.
Cosinus kąta α oznaczamy jako $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Ilorazy, o których mowa w definicji, są wielkościami stałymi dla ustalonego kąta ostrego α. Możemy więc kątowi ostremu α przyporządkować odpowiednio wartości $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Przyporządkowania takie nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta α.

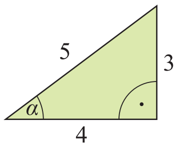
Zauważmy, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a, b, przeciwprostokątnej długości c oraz kącie ostrym α zachodzi zależność $\frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Iloraz $\frac{b}{a}$ jest nazywany **cotangensem** (czytaj: kotangensem) **kąta ostrego** α (ozn. $\operatorname{ctg}\alpha$). Jest to czwarta z funkcji trygonometrycznych kąta α.

Funkcję tę można łatwo wyrazić za pomocą funkcji tangens, więc będziemy posługiwać się tylko trzema funkcjami zdefiniowanymi wcześniej. Sprawdź, że na kalkulatorze znajdują się tylko funkcje: tangens, sinus oraz cosinus.

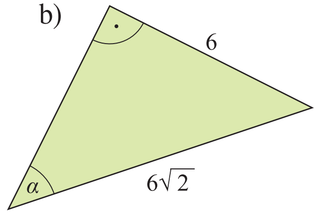
ĆWICZENIE 2.

Oblicz tangens, sinus i cosinus kąta α.

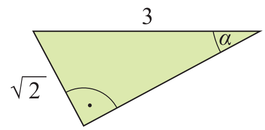
a)



b)



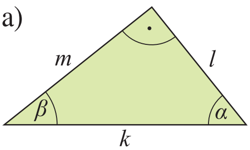
c)



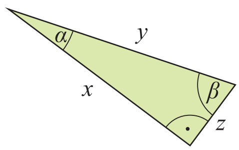
ĆWICZENIE 3.

Wyznacz tangens, sinus i cosinus kąta α oraz kąta β.

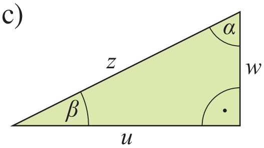
a)



b)

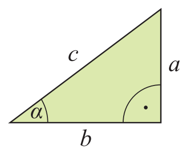


c)



PRZYKŁAD 2.

Sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{3}{5}$, a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta wynosi 6. Obliczmy długość drugiej przyprostokątnej.



Uwzględniając oznaczenia na rysunku, mamy $a = 6$,

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Z warunków w zadaniu wiemy, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,

zatem $\frac{3}{5} = \frac{6}{c}$, stąd $c = 10$.

Z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$, czyli $6^2 + b^2 = 10^2$,

$b^2 = 100 - 36 = 64$, stąd $b = 8$.

Długość drugiej przyprostokątnej wynosi 8.

ĆWICZENIE 4.

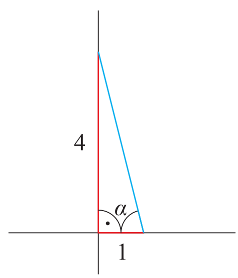
Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{\sqrt{5}}{4}$, a przeciwprostokątna ma długość 12. Oblicz długości przyprostokątnych.

PRZYKŁAD 3.

Narysujmy kąt, którego:

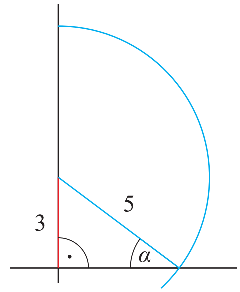
a) tangens jest równy 4,

b) sinus jest równy $\frac{3}{5}$.



a) Ponieważ tangens kąta ostrego jest ilorazem długości przyprostokątnych, więc rysujemy dowolny trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b takich, że $\frac{a}{b} = 4$, np. $a = 4$, $b = 1$.

b) Ponieważ sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest ilorazem długości przyprostokątnej (a) leżącej naprzeciw tego kąta i długości przeciwprostokątnej (c), rysujemy trójkąt prostokątny, w którym iloraz długości tych boków jest równy $\frac{3}{5}$, np. $a = 3$, $c = 5$.



Stosunek długości odpowiednich boków w trójkątach prostokątnych o takim samym kącie ostrym nie zależy od wielkości trójkątów. Zatem dla każdego trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α możemy wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Wartości te są zestawione w tablicach wartości funkcji trygonometrycznych (s. 324). Można z nich korzystać przy obliczeniach. Należy jednak pamiętać, że wartości funkcji trygonometrycznych w tablicach są wartościami przybliżonymi.

PRZYKŁAD 4.

Odczytajmy z tablicy wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta o mierze 4°.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875

$\sin 4^\circ = 0{,}0698$
$\cos 4^\circ = 0{,}9976$
$\operatorname{tg} 4^\circ = 0{,}0699$

ĆWICZENIE 5.

Odczytaj z tablic wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów α oraz β, jeśli:

a) $\alpha = 26^\circ$, $\beta = 64^\circ$, b) $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 37^\circ$.

Co zauważyłeś?

CIEKAWOSTKA

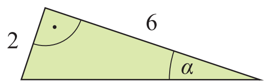
Najtrudniejszy podjazd Europy, którego pokonanie jest chyba wyzwaniem dla każdego rowerzysty, położony jest w północnych Włoszech, w regionie Bolzano. Podjazd rozpoczyna się w niewielkiej miejscowości Besenello. Średnie nachylenie stoku to ponad 20%, co oznacza, że gdy zdobywamy 6-kilometrowy podjazd, pokonujemy różnicę wysokości 1560 metrów.

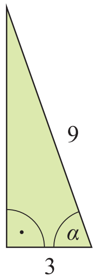
ZADANIA

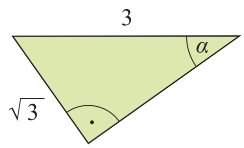
1. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 2 cm oraz $\sin|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}$. Wobec tego bok AC ma długość

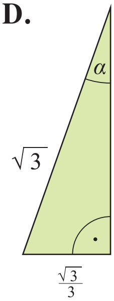
A. 2 cm **B.** 1 cm **C.** 3 cm **D.** $\sqrt{2}$ cm

2. Wskaż trójkąt, dla którego $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

A.


B.


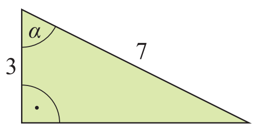
C.


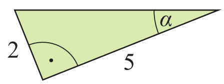
D.


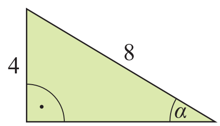
3. Dla kąta α w trójkącie prostokątnym zachodzi $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{5}{3\sqrt{5}}$. Zatem $\operatorname{tg}\alpha$ jest równy

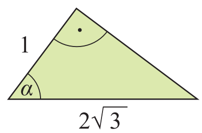
A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α zaznaczonego na rysunku.

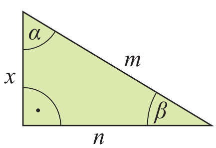
a)


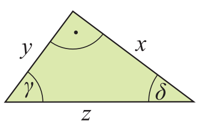
b)


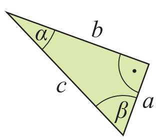
c)


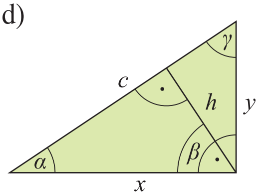
d)


5. Wyznacz sinus, cosinus oraz tangens kątów ostrych zaznaczonych na rysunku.

a)


b)


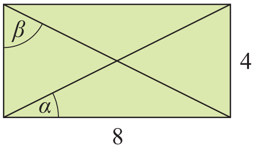
c)


d)


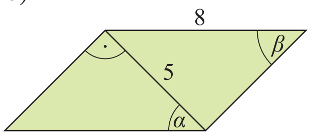
6. Narysuj trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątna przyległa do kąta α ma długość 4 cm, a sinus tego kąta jest równy $\frac{2}{5}$.

7. Oblicz sinus, cosinus oraz tangens kątów ostrych zaznaczonych na rysunku.

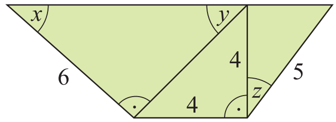
a)



b)



c)



8. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

a) $\sin 68^\circ, \sin 13^\circ, \sin 55^\circ, \sin 3^\circ, \sin 89^\circ$

b) $\cos 17^\circ, \cos 5^\circ, \cos 65^\circ, \cos 44^\circ, \cos 85^\circ$

c) $\operatorname{tg} 85^\circ, \operatorname{tg} 13^\circ, \operatorname{tg} 69^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ, \operatorname{tg} 55^\circ$

Jakie nasuwają ci się wnioski?

9. Nie korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych ani z kalkulatora, oceń, który z kątów α, β, γ ma największą miarę, jeżeli:

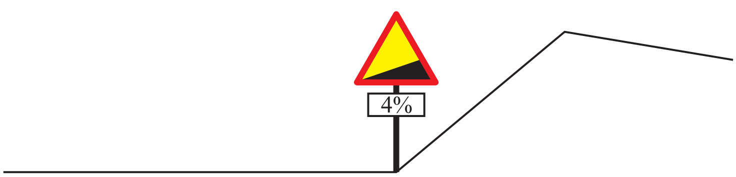
a) $\cos\alpha = 0{,}3$, $\cos\beta = 0{,}7$, $\cos\gamma = 0{,}43$,

b) $\sin\alpha = 0{,}25$, $\sin\beta = 0{,}6$, $\sin\gamma = 0{,}79$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\beta = 2{,}3$, $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}52$.

10. Na jednej z wysp oceanicznych postanowiono zmodernizować lotnisko tak, aby mogły lądować na nim duże samoloty pasażerskie. W tym celu należy wydłużyć pas startowy, który ma teraz długość 2 km. Jedyna możliwość wydłużenia pasa to usypanie szerokiego nasypu w głąb oceanu. Jaką długość powinien mieć pas startowy, aby samolot podchodzący do lądowania pod kątem 12° był na wysokości 100 m nad początkiem nasypu, a miejsce, w którym maszyna kołami dotknie pasa startowego, było już na stałym lądzie?

11. Oblicz różnicę wysokości między początkiem a końcem stromego podjazdu długości 300 m oraz kąt nachylenia tego podjazdu do poziomu. Skorzystaj z rysunku. Tabliczka umieszczona pod znakiem oznacza, że droga na odcinku 100 m wznosi się o 4 m.



BANK ZADAŃ z. 250–253 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 5 tangens kąta ostrego α jest równy 2. Zatem

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

2. W równoległoboku o kącie ostrym α dłuższy bok ma długość 10 cm, a krótsza przekątna – prostopadła do krótszego boku – 4 cm. Zatem

A. $\cos\alpha = \frac{5}{2}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$

3. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ABC w trójkącie prostokątnym ABC, jeżeli przyprostokątna AB ma długość 4 cm, a przeciwprostokątna BC – 7 cm.

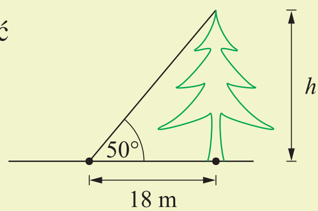
4. Narysuj kąt ostry α taki, że:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$.

5. Uporządkuj rosnąco liczby: $\sin 20^\circ$, $\cos 34^\circ$, $\operatorname{tg} 56^\circ$, $\sin 69^\circ$, $\cos 53^\circ$, $\operatorname{tg} 12^\circ$.

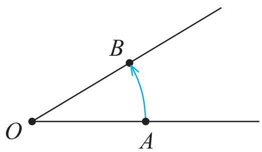
6. Ile wynosi wysokość drzewa, jeżeli jego cień ma długość 18 m w momencie, gdy promienie słoneczne padają pod kątem $\alpha = 50^\circ$ do ziemi?

Przez kąt padania rozumiemy kąt, pod jakim widać słońce nad linią horyzontu.

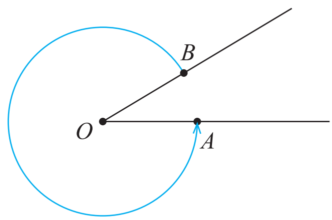


6.2 Funkcje trygonometryczne kątów o miarach od 0° do 180° w układzie współrzędnych

Kątem skierowanym nazywamy kąt płaski z ustalonym uporządkowaniem ramion. Pierwsze ramię tego kąta nazywamy **ramieniem początkowym**, drugie – **ramieniem końcowym**. Kąt skierowany będziemy oznaczać łukiem zakończonym strzałką wskazującą jego ramię końcowe.



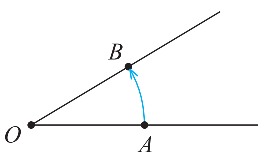
$\sphericalangle AOB$ – kąt skierowany
$OA^{\rightarrow}$ – ramię początkowe
$OB^{\rightarrow}$ – ramię końcowe



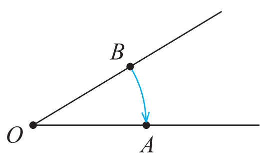
$\sphericalangle BOA$ – kąt skierowany
$OB^{\rightarrow}$ – ramię początkowe
$OA^{\rightarrow}$ – ramię końcowe

$OA^{\rightarrow}$, $OB^{\rightarrow}$ to półproste wyznaczające kąty skierowane. Miarę $\sphericalangle AOB$ oznaczamy jako $|\sphericalangle AOB|$. Analogicznie miara $\sphericalangle BOA$ to $|\sphericalangle BOA|$.

Przyjmujemy, że kąt skierowany zerowy jest kątem zerowym, a kąt skierowany pełny – kątem pełnym. Kąty skierowane wyznaczające ten sam kąt płaski, lecz o ramionach uporządkowanych w odwrotnej kolejności, nazywamy **kątami skierowanymi przeciwnie**.



$\sphericalangle AOB$ – kąt skierowany dodatnio

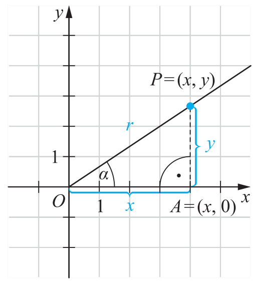


$\sphericalangle BOA$ – kąt skierowany ujemnie

Miara kąta skierowanego może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Zależy to od zwrotu kąta skierowanego, tzn. od kierunku, w którym należy obrócić jego ramię początkowe, aby otrzymać ramię końcowe.
W tym temacie zajmujemy się wyłącznie kątami skierowanymi dodatnio.

PRZYKŁAD 1.

W jaki sposób można określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α umieszczonego w układzie współrzędnych?

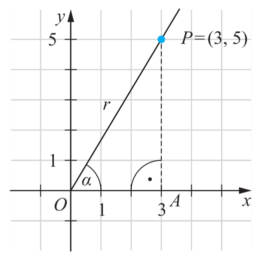


Przez **kąt ostry umieszczony w układzie współrzędnych** rozumiemy kąt, którego wierzchołek znajduje się w początku układu współrzędnych, ramię początkowe pokrywa się z dodatnią częścią osi x, a ramię końcowe położone jest w I ćwiartce układu współrzędnych. Na ramieniu końcowym kąta obieramy dowolny punkt $P = (x, y)$. Niech $|OP| = r$. Na osi x zaznaczamy punkt $A = (x, 0)$. Trójkąt prostokątny OAP ma przyprostokątne długości x i y.

Zatem $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

PRZYKŁAD 2.

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α umieszczonego w układzie współrzędnych, jeśli na ramieniu końcowym tego kąta leży punkt $P = (3, 5)$.



$x = |OA| = 3,\ y = |AP| = 5,\ r = |OP|$

$|OP|^2 = |OA|^2 + |AP|^2 = 3^2 + 5^2 = 34,\ r = \sqrt{34}$

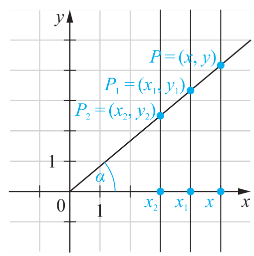
$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$

ĆWICZENIE 1.

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α umieszczonego w układzie współrzędnych, wiedząc, że na ramieniu końcowym tego kąta leży punkt P.

a) $P = (5, 10)$ $\qquad$ b) $P = \left(\frac{1}{4}, 3\right)$ $\qquad$ c) $P = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$



Umieśćmy kąt skierowany w układzie współrzędnych. Zauważmy, że jeśli przez każdy punkt leżący na ramieniu końcowym kąta poprowadzimy prostą prostopadłą do osi x, to ta prosta, oś x oraz ramię końcowe kąta wyznaczają trójkąt prostokątny. Utworzone w ten sposób trójkąty są podobne (cecha kkk). Wobec tego stosunki długości odpowiednich boków tych trójkątów są stałe, czyli stosunki $\frac{y}{x}, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}$ nie zależą od wyboru punktu $P = (x, y)$ na ramieniu końcowym kąta.

Określmy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

Definicja

Niech $P = (x, y)$ będzie dowolnym punktem należącym do ramienia końcowego kąta α, różnym od punktu $(0, 0)$. Wówczas:

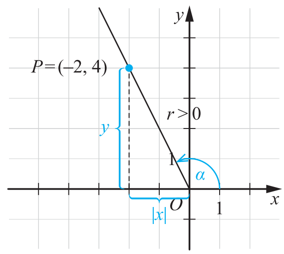
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, gdy $x \neq 0$.

Takie określenie funkcji trygonometrycznych jest zgodne z ich definicją dla kąta ostrego. Od znaków, jakie mają odcięta x i rzędna y punktu $P = (x, y)$ leżącego na ramieniu końcowym kąta, zależy znak wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.
Dla kąta ostrego wartości funkcji trygonometrycznych są dodatnie, a dla kąta rozwartego $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ już tak nie jest.

PRZYKŁAD 3.

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych, jeśli na ramieniu końcowym tego kąta leży punkt $P = (-2, 4)$.



Kąt α jest rozwarty. Na jego ramieniu końcowym leży punkt P o odciętej $x = -2$ oraz rzędnej $y = 4$.

$|OP|^2 = |x|^2 + y^2$

$|OP|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$|OP| = 2\sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{-2} = -2$

ĆWICZENIE 2.

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych, jeśli na jego ramieniu końcowym leży punkt:

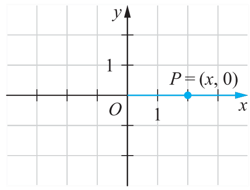
a) $P = (-4, 3)$, b) $P = (-1, 1)$, c) $P = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$, d) $P = (5, 3)$.

Niech punkt $P = (x, y)$ będzie punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych.
Jeśli $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, to $x > 0$, $y > 0$, zatem $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Jeśli $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, to $x < 0$, $y > 0$, zatem $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

PRZYKŁAD 4.

Korzystając z definicji, wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α równego:

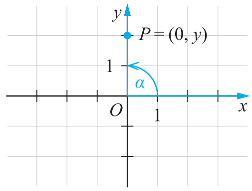
a) 0°, b) 90°, c) 180°.



a) $\alpha = 0^\circ$, ramię końcowe kąta pokrywa się z ramieniem początkowym.
Zatem punkt $P = (x, 0)$, $r = |OP| = x$.

$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = \frac{0}{x} = 0$ $\qquad \cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{x}{x} = 1$

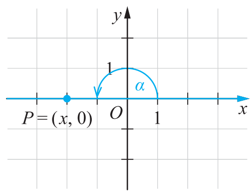
$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$



b) $\alpha = 90^\circ$, ramię końcowe kąta pokrywa się z dodatnią półosią osi y.
Zatem punkt $P = (0, y)$, $r = |OP| = y$.

$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$ $\qquad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$

$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{y}{x}$ – nieokreślony (nie istnieje)



c) $\alpha = 180^\circ$, ramię końcowe kąta pokrywa się z ujemną półosią osi x.
Zatem punkt $P = (x, 0)$, $r = |OP| = |x| = -x$.

$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{-x} = 0$ $\qquad \cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{x}{-x} = -1$

$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$

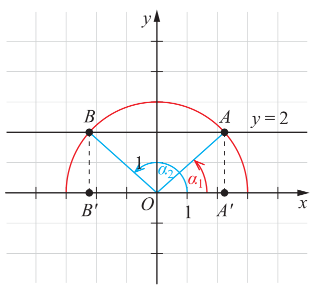
Podsumowując, mamy:

α	0°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	1	0
$\cos\alpha$	1	0	–1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	nie istnieje	0

PRZYKŁAD 5.

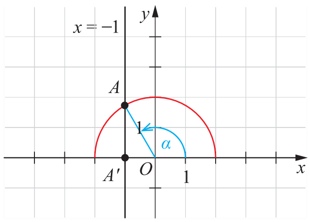
Skonstruujmy kąt α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.



a) Ponieważ $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, więc kreślimy półokrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 3 oraz prowadzimy prostą $y = 2$. Prosta ta przecina półokrąg w dwóch punktach A i B, symetrycznych względem osi y. Mamy więc $|OA| = |OB| = 3$ oraz $|AA'| = |BB'| = 2$. Zatem $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{2}{3}$, czyli otrzymane kąty α_1 i α_2 spełniają warunek zadania.

b) Ponieważ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ i $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$, więc kreślimy półokrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2 oraz prowadzimy prostą $x = -1$. Prosta ta przecina półokrąg w punkcie A. Mamy więc $|OA| = 2$, zatem $\cos\alpha = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$, czyli skonstruowany kąt α spełnia warunek zadania.



ĆWICZENIE 3.

Skonstruuj kąt α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{7}$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$.

PRZYKŁAD 6.

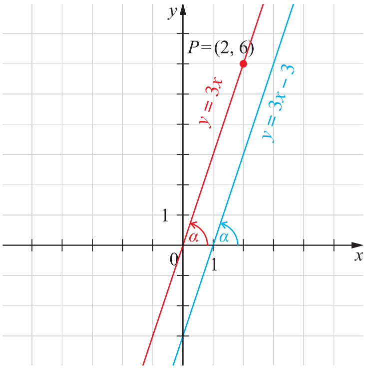
Zbadajmy zależność między współczynnikiem kierunkowym prostej a kątem, jaki tworzy ona z osią x, jeśli prosta ma równanie:

a) $y = 3x - 3$, b) $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

a) Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = 3x - 3$ tworzy z osią x kąt α. Prosta równoległa do niej, przechodząca przez początek układu współrzędnych, ma równanie $y = 3x$ i również tworzy z osią x kąt α. Obierzmy na tej prostej dowolny punkt P, np. $P = (2, 6)$.

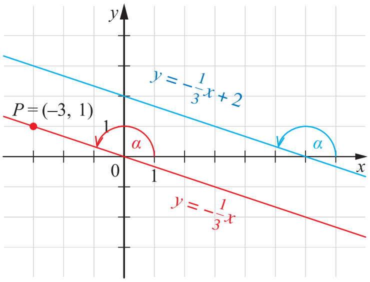
Zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{2} = 3$.

Zauważmy, że współczynnik kierunkowy obu prostych również jest równy 3.



b) Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = -\frac{1}{3}x + 2$ oraz prosta do niej równoległa, przechodząca przez początek układu współrzędnych, o równaniu $y = -\frac{1}{3}x$, tworzą z osią x kąt α. Obierzmy dowolny punkt P należący do prostej $y = -\frac{1}{3}x$, np. $P = (-3, 1)$.

Zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.



Współczynnik kierunkowy obu prostych również jest równy $-\frac{1}{3}$.

Sprawdź, czy taka zależność zachodzi dla innych prostych.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta, jaki prosta tworzy z osią x. Jest więc tangensem kąta, jaki prosta tworzy z osią x.

ĆWICZENIE 4.

Podaj tangens kąta, jaki z osią x tworzy prosta opisana równaniem:

a) $y = x - 4$, b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 9$, c) $y = -\sqrt{3}x - 0{,}4$, d) $y = -\frac{3}{4}x + \sqrt{3}$.

ZADANIA

1. Do ramienia końcowego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych należy punkt $P = \left(-\sqrt{3}, 5\right)$. Zatem

A. $\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{14}$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$

2. W układzie współrzędnych umieszczono kąt α, którego $\cos\alpha = -\frac{5}{7}$. Zatem do ramienia końcowego tego kąta należy punkt

A. $P = (-5, 7)$ **B.** $P = (5, 7)$ **C.** $P = \left(-5, 2\sqrt{6}\right)$ **D.** $P = \left(-7, 2\sqrt{5}\right)$

3. Do ramienia końcowego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych należy punkt $A = (-4, 9)$. Współczynnik kierunkowy prostej k, zawierającej ramię końcowe kąta α, jest równy

A. $-2{,}25$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $-\frac{9}{4}$ **D.** $2\frac{1}{4}$

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli na jego ramieniu końcowym leży punkt o współrzędnych:

a) $(6, 3)$, b) $(1, 5)$, c) $\left(-4, \frac{4}{3}\right)$, d) $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$.

5. Skonstruuj kąt α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, b) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, d) $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

6. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wyznacz kąt, jaki tworzy z osią x prosta o równaniu:

a) $y = x - 10$, b) $y = \sqrt{3}x + 2$, c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 7$, d) $y = \pi x - 10$.

7. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, jaki tworzy prosta o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 4$ z osią x.

8. Wyznacz miejsce zerowe funkcji, której wykresem jest prosta tworząca z osią x kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, i przechodząca przez punkt $P = (2, 4)$.

9. Wyznacz tangens kąta, jaki tworzy prosta przechodząca przez punkty $A = (-4, 3)$ i $B = (3, -2)$ z osią x.

10. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy prosta przechodząca przez punkty $A = (-2, -1)$ i $B = (3, 5)$ z osią x. Wynik podaj z dokładnością do 0,1.

11. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz prostą tworzącą z osią x kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, i przechodzącą przez punkt $A = (-2, 3)$.

12. Wyznacz tangensy kątów, jakie tworzą z osią x proste zawierające boki trójkąta ABC o wierzchołkach: $A = (-6, -1)$, $B = (5, 2)$, $C = (-2, 4)$.

BANK ZADAŃ z. 254–256 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. W układzie współrzędnych umieszczono kąt α, którego $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Zatem do ramienia końcowego tego kąta należy punkt

A. $P = (-3, 4)$ **B.** $P = (-3, 5)$ **C.** $P = \left(-3, \sqrt{7}\right)$ **D.** $P = \left(-3, \sqrt{5}\right)$

2. Punkty $A = (2, 0)$ oraz $B = (5, 7)$ należą do prostej k. Tangens kąta, jaki tworzy ta prosta z osią x, jest równy

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** 7 **D.** $2\frac{1}{3}$

3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, wiedząc, że na jego ramieniu końcowym leży punkt $P = (6, 2)$.

4. Prosta o równaniu $y = ax$ tworzy z osią x kąt, którego tangens jest równy 1. Wyznacz równanie prostej równoległej do danej prostej, przechodzącej przez punkt:

a) $P = (-5, 1)$, b) $P = (3, -4)$.

5. Przez punkt $K = (-5, 6)$ poprowadzono proste przecinające oś x odpowiednio w punktach $A = (-1, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (5, 0)$.

a) Wyznacz tangens kąta, jaki tworzy każda z tych prostych z osią x.

b) Oblicz sinus kąta, jaki tworzy każda z tych prostych z osią x.

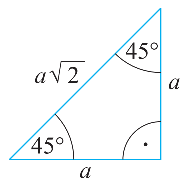
6.3 Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 180°

Wartości funkcji trygonometrycznych odczytywane z tablic lub obliczane z użyciem kalkulatora są najczęściej wartościami przybliżonymi. Dla niektórych kątów możemy jednak wyznaczyć wartości dokładne. Należą do nich kąty ostre o miarach 30°, 45° i 60° oraz kąty rozwarte o miarach 120°, 135° i 150°.

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta o mierze 45°.

Rozważmy trójkąt prostokątny równoramienny o ramieniu długości a.
Jego przeciwprostokątna jest równa $a\sqrt{2}$.
Dla kąta 45° mamy więc:



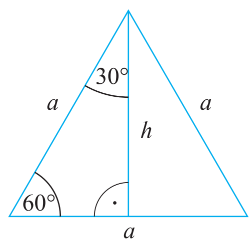
$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta o mierze 30°.

Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości a. Wysokość h w trójkącie równobocznym jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Wysokość dzieli trójkąt równoboczny na dwa trójkąty prostokątne, w których kąty ostre mają miary 60° i 30°. Dla kąta 30° mamy:



$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ĆWICZENIE 1.

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta o mierze 60°.

PRZYKŁAD 3.

W tabeli podano wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Wskażmy zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi dla danych kątów.

Analizując tabelę, możemy zauważyć, że:

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}$.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ĆWICZENIE 2.

Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego:

a) o bokach długości: $6, 6, 6\sqrt{2}$,

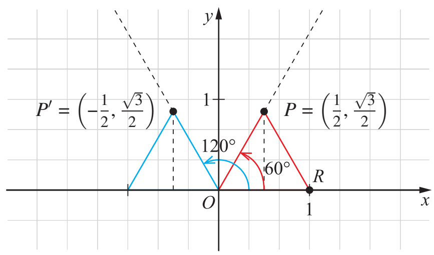
b) o przyprostokątnej długości 4 i przeciwprostokątnej długości 8.

PRZYKŁAD 4.

Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta o mierze:

a) 120°, b) 150°.

a) Umieśćmy w układzie współrzędnych trójkąt równoboczny OPR o boku długości 1 tak, jak na rysunku obok.



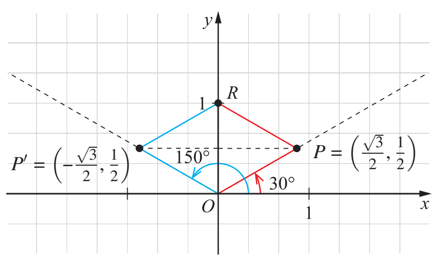
Na ramieniu końcowym kąta o mierze 60° położony jest punkt $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Przekształćmy trójkąt OPR w symetrii względem osi y.

Obrazem punktu P jest punkt $P' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, leżący na ramieniu końcowym kąta o mierze 120°.

Zatem $\sin 120^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.

b) Umieśćmy w układzie współrzędnych trójkąt równoboczny OPR o boku długości 1 w taki sposób, jak na rysunku obok.



Na ramieniu końcowym kąta o mierze 30° położony jest punkt $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Przekształćmy trójkąt OPR w symetrii względem osi y. Obrazem punktu P jest punkt $P' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, leżący na ramieniu końcowym kąta o mierze 150°.

Zatem $\sin 150^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Zauważmy, że:

$\sin 120^\circ = -\cos 150^\circ$, $\sin 150^\circ = -\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 150^\circ}$, $\operatorname{tg} 150^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 120^\circ}$

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\sin 30^\circ$

$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}$

ĆWICZENIE 3.

Wypisz zależności między $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$ a wartościami funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych 30° i 60°.

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta o mierze 135°. Wypisz zależności między wartościami funkcji trygonometrycznych dla tego kąta a wartościami tych funkcji dla kąta ostrego 45°.

ZADANIA

1. Jeśli $\alpha = 120^\circ$, to

A. $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ **B.** $\sin\alpha = \cos 30^\circ$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \sin 30^\circ$ **D.** $\sin\alpha = -\cos 30^\circ$

2. Jeśli w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β $\cos\alpha = \frac{5}{8}$, to tangens β jest równy

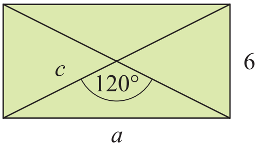
A. $\frac{8}{5}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{39}{64}$ **D.** $\frac{5\sqrt{39}}{39}$

3. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 9, a kąt ostry ma miarę 30°. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

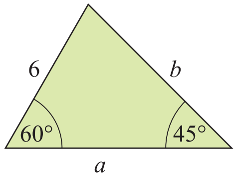
4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 60°, a dłuższa przyprostokątna ma długość 7 cm. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

5. Oblicz długości odcinków a, b, c.

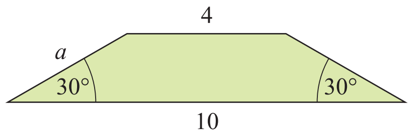
a)



b)

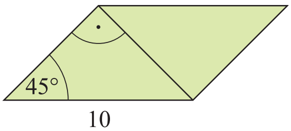


c)

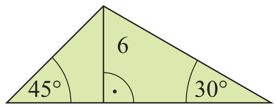


6. Oblicz pole figury.

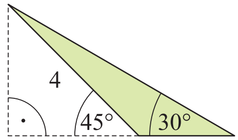
a)



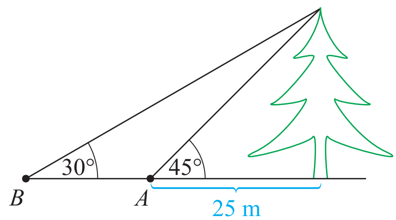
b)



c)



7. Wyznacz wysokość drzewa i oblicz, w jakiej odległości od niego znajduje się obserwator B. Wykorzystaj informacje podane na rysunku.



8. Oblicz obwód i pole trapezu prostokątnego, w którym górna podstawa jest dwa razy krótsza od dolnej, kąt ostry ma miarę 60°, a wysokość wynosi 10 dm.

9. Z punktu $P = (-3, 4)$ poprowadzono dwie proste tworzące z osią x odpowiednio kąty 120° i 150°. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi oraz osią x.

10. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\sin 135^\circ, \sin 150^\circ, \sin 120^\circ, \sin 90^\circ$,

b) $\cos 150^\circ, \cos 120^\circ, \cos 45^\circ, \cos 135^\circ$,

c) $\operatorname{tg} 45^\circ, \operatorname{tg} 135^\circ, \operatorname{tg} 120^\circ, \operatorname{tg} 150^\circ$.

11. Oblicz:

a) $\operatorname{tg} 135^\circ - \sin 135^\circ$,

b) $\sin 150^\circ - \cos 150^\circ$,

c) $\dfrac{\cos 120^\circ}{\operatorname{tg} 150^\circ} + \dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 150^\circ}$,

d) $\dfrac{\sin 120^\circ}{\cos 150^\circ} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 135^\circ}{\sin 150^\circ}$.

12. Czy istnieje taki trójkąt, w którym cosinus jednego z kątów jest równy $-\frac{1}{2}$, a sinus drugiego kąta jest równy $\frac{1}{2}$? Jeśli tak, podaj miary kątów tego trójkąta.

BANK ZADAŃ z. 257–261 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Jeśli $\alpha = 30^\circ$, to

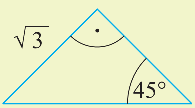
A. $\operatorname{tg}\alpha < \sin\alpha$ **B.** $\cos\alpha > \operatorname{tg}\alpha$ **C.** $\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ **D.** $\sin\alpha = 1 - \cos\alpha$

2. Jeśli $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, to

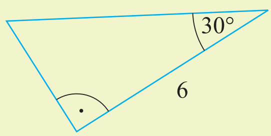
A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Oblicz pole i obwód trójkąta.

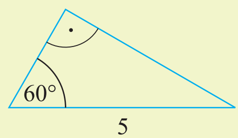
a)



b)

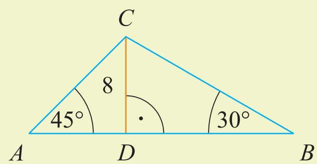


c)



4. Na jakiej wysokości znajduje się samolot w chwili, gdy w odległości 10 km od początku pasa startowego rozpoczyna podchodzenie do lądowania pod kątem 15°?

5. Na podstawie rysunku oblicz pole trójkąta ABC.



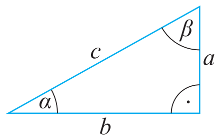
6. Oblicz $\frac{\sin 150^\circ}{\cos 120^\circ} : \frac{\operatorname{tg} 120^\circ}{\sin 135^\circ} - (\sin 120^\circ + \cos 150^\circ)^2$.

6.4 Podstawowe tożsamości trygonometryczne

PRZYKŁAD 1.

Przeanalizujmy tabelę wartości funkcji trygonometrycznych, podaną w przykładzie 3. w poprzednim temacie.

Wiemy, że $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ i $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$. Czy jest to przypadkowe? Czy istnieją inne zależności między wartościami funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\sin\beta = \frac{b}{c}$ $\qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$ $\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$

Zauważmy, że:

$\sin\alpha = \cos\beta$, $\qquad \cos\alpha = \sin\beta$, $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, $\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Ponieważ $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc otrzymujemy:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \qquad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}, \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 1$$

ĆWICZENIE 1.

Oblicz:

a) $\cos 35^\circ - \sin 55^\circ$,

b) $\operatorname{tg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ$,

c) $\sqrt{\frac{\sin 43^\circ}{\cos 47^\circ}} - 2$,

d) $\sin 30^\circ \cdot \cos 17^\circ + \operatorname{tg} 14^\circ \cdot \operatorname{tg} 76^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 73^\circ$.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy sumę kwadratów sinusa i cosinusa kąta 30°. Zbadajmy tę sumę dla dowolnego kąta ostrego α.

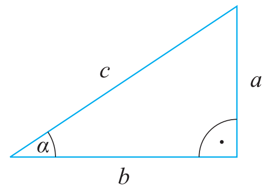
Wiemy, że $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ i $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem

$$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 \underset{\uparrow}{=} \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

$(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $\quad (\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym mamy $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, zatem

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$



Równość dwóch wyrażeń zawierającą związki trygonometryczne nazywamy **tożsamością trygonometryczną**.

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**. Jest ona prawdziwa dla dowolnego kąta $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

ĆWICZENIE 2.

Sprawdź, czy istnieje kąt ostry α taki, że:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$,   b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

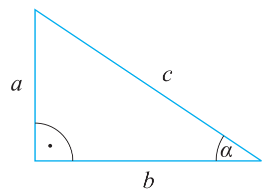
PRZYKŁAD 3.

Zbadajmy iloraz funkcji sinus i cosinus dowolnego kąta ostrego α.

Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$



Otrzymaliśmy tożsamość $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

PRZYKŁAD 4.

Sprawdźmy, czy $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną dla dowolnego kąta $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Należy wykazać, że obie strony równości mają taką samą wartość dla tego samego kąta.
Zatem:

$$L = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} = \frac{2\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha} = P$$

Należy jeszcze założyć, że wyrażenia występujące w mianownikach są różne od zera, czyli $\sin\alpha \neq 1$ oraz $\sin\alpha \neq -1$. Ponieważ $\sin\alpha \geqslant 0$ dla dowolnego $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$, więc $\alpha \neq 90^\circ$.

Równość jest tożsamością trygonometryczną dla dowolnego kąta $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ i $\alpha \neq 90^\circ$.

ĆWICZENIE 3.

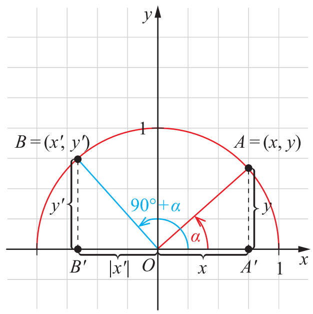
Wykaż, że równość $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną dla dowolnego kąta $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ i $\alpha \neq 90^\circ$.

PRZYKŁAD 5.

Wyraźmy funkcje trygonometryczne kąta o mierze:

a) $90^\circ + \alpha$, gdy α jest kątem ostrym, za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta ostrego,

b) $180^\circ - \alpha$, gdy α jest kątem ostrym, za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.



a) Niech punkty $A = (x, y)$ i $B = (x', y')$ należą do półokręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 1$ oraz $|\sphericalangle AOB| = 90^\circ$. Rozważmy trójkąty prostokątne: $A'OA$ i $B'BO$. Oznaczmy:

$|\sphericalangle A'OA| = \alpha$, wtedy

$|\sphericalangle A'AO| = 90^\circ - \alpha$.

$|\sphericalangle A'OB| = 90^\circ + \alpha$, stąd

$|\sphericalangle B'OB| = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$ oraz

$|\sphericalangle B'BO| = \alpha$.

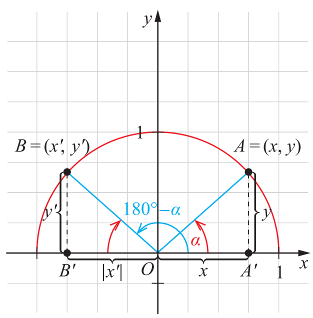
Trójkąty $A'OA$ i $B'BO$ są przystające (cecha kbk), więc $x = y'$ oraz $y = |x'| = -x'$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α mamy: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$ oraz $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$. Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $(90^\circ + \alpha)$.

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{y'}{1} = y' = x = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{x'}{1} = x' = -y = -\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$



b) Weźmy punkty $A = (x, y)$ i $B = (x', y')$ należące do półokręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 1$ takie, że $|\sphericalangle A'OA| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle B'OB| = \alpha$. Rozważmy trójkąty prostokątne: $A'OA$ i $B'BO$. Wtedy $|\sphericalangle A'AO| = |\sphericalangle B'BO| = 90^\circ - \alpha$.

Trójkąty $A'OA$ i $B'BO$ są przystające (cecha kbk).

Ponieważ $x = |x'| = -x'$ oraz $y = y'$, więc otrzymujemy:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y'}{1} = y = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x'}{1} = x' = -x = -\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{-x} = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

ĆWICZENIE 4.

Oblicz wartość funkcji trygonometrycznej dla danego kąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

a) $\sin 145^\circ$ b) $\cos 160^\circ$ c) $\operatorname{tg} 115^\circ$ d) $\sin 100^\circ$ e) $\operatorname{tg} 130^\circ$

ZADANIA

1. Wyrażenie $\frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot (1 - \cos^2\alpha)$ dla $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ można zapisać w postaci

A. $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ **B.** 1 **C.** $1 - \operatorname{tg}\alpha$ **D.** $\operatorname{tg}^2\alpha$

2. Równość $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną

A. dla każdego kąta $\alpha \in (0^\circ;\ 180^\circ)$.
B. tylko dla kąta ostrego.
C. tylko dla kąta $\alpha \in (90^\circ;\ 180^\circ)$.
D. dla kąta $\alpha \in (0^\circ;\ 180^\circ)$ i $\alpha \neq 90^\circ$.

3. Czy $\sin\alpha$ może przyjmować wartość:

a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{7}{6}$, c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, d) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$?

4. Czy $\cos\alpha$ może przyjmować wartość:

a) $\frac{7}{8}$, b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, c) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$, d) $-\frac{2}{3}$?

W przypadku odpowiedzi pozytywnej ustal, czy kąt α jest kątem ostrym, czy – rozwartym.

5. Oblicz wartość wyrażenia, wiedząc, że α jest kątem ostrym.

a) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$
b) $\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\alpha$
c) $\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin\alpha}$

6. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby:

a) $\sin 130^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\cos 25^\circ$, $\sin 140^\circ$,
b) $\operatorname{tg} 100^\circ$, $\operatorname{tg} 50^\circ$, $\operatorname{tg} 140^\circ$, $\operatorname{tg} 10^\circ$.

7. W trójkącie równoramiennym *ABC* sinus kąta α przy podstawie jest równy 0,3420. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

BANK ZADAŃ z. 262–264 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wyrażenie $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ można zapisać w postaci

A. $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ **B.** $1+\operatorname{tg}^2\alpha$ **C.** $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}$ **D.** $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

2. Sprawdź, czy istnieje taki kąt ostry α, dla którego:

a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ i $\cos\alpha=\frac{1}{5}$, b) $\operatorname{tg}\alpha=3$ i $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

3. Oblicz $\frac{\operatorname{tg}23^\circ\cdot\operatorname{tg}67^\circ-2}{\sin^2 17^\circ+\sin^2 73^\circ}$.

4. Oblicz:

a) $\frac{\cos 110^\circ}{\cos 70^\circ}-\operatorname{tg}160^\circ\cdot\operatorname{tg}70^\circ$, b) $\frac{\cos(90^\circ+40^\circ)}{\sin(180^\circ-40^\circ)}+\operatorname{tg}(180^\circ-30^\circ)\cdot\operatorname{tg}60^\circ$.

6.5 Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy znana jest wartość sinusa lub cosinusa kąta

Jeżeli znamy wartość jednej funkcji trygonometrycznej kąta α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, to możemy za pomocą poznanych tożsamości trygonometrycznych obliczyć wartości pozostałych funkcji tego kąta. Przypomnijmy, że wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α są dodatnie. Z kolei dla kąta α takiego, że $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ mamy $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Wyznaczmy wartość $\sin\alpha$, korzystając z jedynki trygonometrycznej.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$$

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

W celu wyznaczenia $\operatorname{tg}\alpha$ korzystamy z zależności

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

ĆWICZENIE 1.

Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{7}$ i α jest kątem ostrym.

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że $\sin\alpha = 3\cos\alpha$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$$(3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$10\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Jest to jedyne rozwiązanie równania, ponieważ kąt α jest kątem ostrym, więc $\cos\alpha$ ma wartość dodatnią.

ĆWICZENIE 2.

Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$.

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

Ponieważ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, więc istnieją dwa kąty α_1, α_2 (ostry oraz rozwarty) takie, że $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{1}{5}$.

Wyznaczamy wartość $\cos\alpha$, korzystając z jedynki trygonometrycznej.

$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = \frac{24}{25}$, stąd $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ lub $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

oraz odpowiednio $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ lub $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$.

ĆWICZENIE 3.

Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

PRZYKŁAD 4.

Wyznaczmy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, jeśli wiemy, że $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$.

Ponieważ $\cos\alpha < 0$, więc kąt α jest kątem rozwartym. Zatem $\sin\alpha > 0$ oraz $\operatorname{tg}\alpha < 0$.
Po zastosowaniu jedynki trygonometrycznej otrzymujemy:

$\sin^2\alpha + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 = 1$, $\sin^2\alpha = \frac{45}{49}$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

Jest to jedyne rozwiązanie równania, ponieważ $\sin\alpha$ ma wartość dodatnią.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{7}}{-\frac{2}{7}} = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, wiedząc, że $\sin\alpha = -2\cos\alpha$.

ZADANIA

1. Jeśli dla kąta ostrego α zachodzi równość $\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} = 2$, to

A. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = 1$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Jeśli $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, to

A. $\sin\alpha = \frac{3}{2}$ **B.** $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. Korzystając z poznanych tożsamości trygonometrycznych, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeżeli:

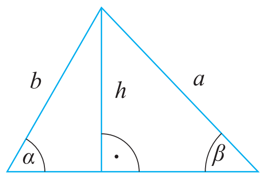
a) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

c) $\sin\alpha = 2\cos\alpha$, d) $2\sin\alpha = 3\cos\alpha$.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jaki tworzy prosta będąca wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x - 5$ z osią x.

5. Przekątna prostokąta tworzy z dłuższym bokiem prostokąta kąt α, którego $\cos\alpha = \frac{9}{13}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

6. Wiedząc, że $\alpha = 60^\circ$, $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, oblicz miarę kąta β.



7. Kąty α i β są kątami ostrymi w trójkącie prostokątnym. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\cos\beta = \frac{1}{3}$,

b) $\sin\alpha$, jeżeli $\cos\beta = \frac{2}{5}$,

c) $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\cos\beta = 2\sin\beta$.

8. Wiedząc, że $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$, oblicz:

a) $\sin 15^\circ$, b) $\operatorname{tg} 15^\circ$, c) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

9. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α takiego, że $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, b) $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = -5$, d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

BANK ZADAŃ z. 265–266 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Jeśli dla kąta ostrego α zachodzi $2\cos\alpha - \sqrt{2} = 0$, to

A. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = -1$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = 1$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Jeśli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, to

A. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ lub $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{5}{3}$ lub $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$

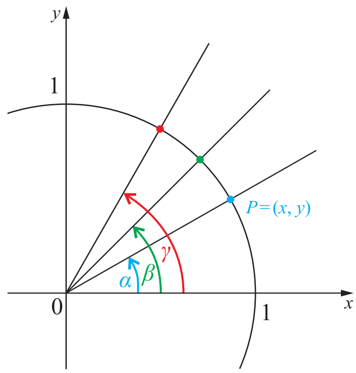
3. Oblicz bez korzystania z tablic $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

4. Wiedząc, że $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

5. W trapezie prostokątnym długość wysokości wynosi 6 cm, a długości podstaw wynoszą 14 cm i 8 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych, jakie tworzy każda z przekątnych trapezu z ramieniem prostopadłym do podstaw.

PROJEKT

Zakreśl okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1. Zaznacz dowolny kąt ostry. Okrąg i ramię końcowe kąta przecinają się w pewnym punkcie. Jeżeli zmieniamy miarę kąta, to punkt zmienia swoje położenie na okręgu.



1. Oblicz pierwsze współrzędne punktów przecięcia okręgu z ramieniem końcowym kąta, jeżeli miara kąta jest równa odpowiednio 30°, 45°, 60°, 120°, 135° i 150°.

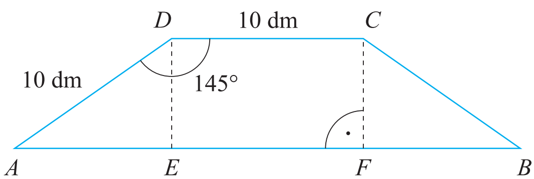
2. Oblicz drugie współrzędne punktów przecięcia okręgu z ramieniem końcowym kąta, jeżeli miara kąta wynosi odpowiednio 30°, 45°, 60°, 120°, 135° i 150°.

3. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia okręgu z ramieniem końcowym kąta α, gdy $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

6.6 Zastosowanie trygonometrii

PRZYKŁAD 1.

Ramię trapezu równoramiennego oraz jego górna podstawa mają długości 10 dm. Kąt, jaki tworzy ramię z górną podstawą, ma miarę 145°. Obliczmy obwód (L) i pole (P) trapezu. Wyniki obliczeń zaokrąglijmy do części dziesiątych.



W trójkącie AED:

$|\sphericalangle ADE| = 145° - 90° = 55°$.

$\sin 55° = \frac{|AE|}{|AD|}$, stąd

$|AE| = |AD| \cdot \sin 55° =$

$= 10 \cdot \sin 55° \approx 10 \cdot 0{,}8192 \approx 8{,}2$ [dm]

$|AE| = |FB| \approx 8{,}2$ [dm]

$\cos 55° = \frac{|DE|}{|AD|}$, stąd $|DE| = |AD| \cdot \cos 55° = 10 \cdot \cos 55° \approx 10 \cdot 0{,}5736 \approx 5{,}7$ [dm]

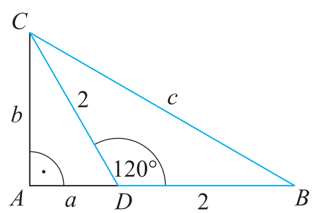
$L = 2\left(|AD| + |AE| + |DC|\right) \approx 2(10 + 8{,}2 + 10) = 56{,}4$ [dm]

$P = \frac{1}{2}\left(|AB| + |DC|\right) \cdot |DE| \approx \frac{1}{2}(26{,}4 + 10) \cdot 5{,}7 = 103{,}74 \approx 103{,}7$ [dm^2]

Obwód trapezu wynosi około 56,4 dm, a jego pole – około 103,7 dm^2.

PRZYKŁAD 2.

Obliczmy długości odcinków a, b, c przedstawionych na rysunku.



W trójkącie ADC: $|\sphericalangle ADC| = 180° - 120° = 60°$.

Zatem $\sin 60° = \frac{b}{2}$, stąd $b = 2\sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\cos 60° = \frac{a}{2}$, stąd $a = 2\cos 60° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Trójkąt CDB jest równoramienny, zatem

$|\sphericalangle DBC| = (180° - 120°) : 2 = 30°$.

W trójkącie ABC: $\sin 30° = \frac{b}{c}$, stąd $c = \frac{b}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$.

ĆWICZENIE 1.

W trapezie równoramiennym przekątne przecinają się pod kątem 120° i dzielą kąty przy dłuższej podstawie na połowy. Oblicz obwód trapezu, jeśli wiadomo, że jego dłuższa podstawa ma długość a.

PRZYKŁAD 3.

Janek i Karol rozwiązywali następujące zadanie:
Dwaj chłopcy, znajdujący się w odległości 100 m od siebie, obserwują jednocześnie motolotniarza w powietrzu. Jeden z chłopców widzi go pod kątem 60°, a drugi – pod kątem 45°. Na jakiej wysokości znajduje się motolotniarz?

Janek zaproponował takie rozwiązanie.

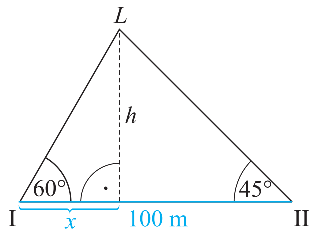
$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x}$, stąd $h = x \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}x$

$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{100-x}$, stąd $h = (100-x)\operatorname{tg} 45^\circ = 100 - x$

zatem $\sqrt{3}x = 100 - x$, $\left(\sqrt{3}+1\right)x = 100$

$x = \frac{100}{\sqrt{3}+1} = \frac{100(\sqrt{3}-1)}{2} = 50\left(\sqrt{3}-1\right)$

$h = 100 - 50(\sqrt{3}-1) = 150 - 50\sqrt{3} = 50(3-\sqrt{3})$ [m]



Karol zaproponował inne rozwiązanie.

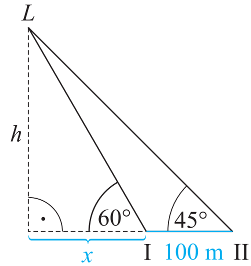
$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x}$, stąd $h = x \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}x$

$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{100+x}$, stąd $h = (100+x)\operatorname{tg} 45^\circ = 100 + x$

zatem $\sqrt{3}x = 100 + x$, $\left(\sqrt{3}-1\right)x = 100$

$x = \frac{100}{\sqrt{3}-1} = \frac{100(\sqrt{3}+1)}{2} = 50\left(\sqrt{3}+1\right)$

$h = 100 + 50\left(\sqrt{3}+1\right) = 150 + 50\sqrt{3} = 50\left(3+\sqrt{3}\right)$ [m]

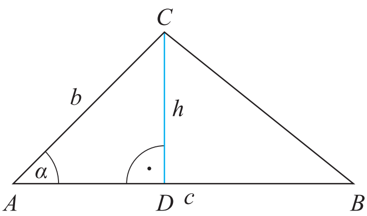


„Mamy różne wyniki” – powiedział Janek. „Ale oba rozwiązania są poprawne – odpowiedział Karol – ponieważ każdy z nas inaczej zinterpretował ten problem”.

PRZYKŁAD 4.

Obliczmy pole trójkąta ABC, jeśli $|AB| = c$, $|AC| = b$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i α jest kątem ostrym.
W trójkącie ABC prowadzimy wysokość CD.
W trójkącie ADC: $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, czyli $h = b\sin\alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.



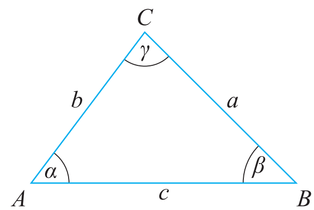
ĆWICZENIE 2.

Oblicz pole trójkąta rozwartokątnego ABC, jeśli $|AB| = c$, $|AC| = b$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i α jest kątem rozwartym.

Twierdzenie

Pole dowolnego trójkąta o bokach długości a, b, c i kątach α, β, γ wyraża się wzorem:

$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.



ĆWICZENIE 3.

Oblicz z dokładnością do 0,01 pole trójkąta ABC, w którym:

a) $|AB| = 7$, $|AC| = 6$, $|\sphericalangle BAC| = 40^\circ$,

b) $|AB| = 12$, $|AC| = 9$, $|\sphericalangle BAC| = 125^\circ$.

ZADANIA

1. W równoległoboku $ABCD$ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Jeżeli tangens kąta BAC jest równy $\sqrt{3}$, to kąt ABC ma miarę

A. 60° **B.** 120° **C.** 150° **D.** 135°

2. Lina łącząca wierzchołek masztu o wysokości 20 m tworzy z podłożem kąt o mierze 30°. Lina łącząca ten sam punkt podłoża z punktem znajdującym się w połowie wysokości masztu tworzy z podłożem kąt α taki, że

A. $\alpha = 15^\circ$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Dłuższa przekątna rombu ma długość 12 cm i tworzy z jednym z boków kąt 30°. Oblicz obwód i pole rombu.

4. Pole prostokąta, w którym jeden z boków jest trzy razy dłuższy od drugiego, wynosi 48 cm^2. Oblicz kąt między przekątnymi prostokąta.

5. W trójkącie prostokątnym ABC kąt ACB jest prosty, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Wysokość CD jest równa 3 dm. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC.

6. W trójkącie KLM: $|KM| = 8\sqrt{2}$, $|\sphericalangle MKL| = 30^\circ$ i $|\sphericalangle MLK| = 45^\circ$. Oblicz długość boku ML trójkąta.

7. W równoległoboku $ABCD$: $|AB| = 4$, $|BC| = \sqrt{3}$ oraz kąt ostry $\alpha = 30^\circ$. Oblicz pole równoległoboku i długość jego krótszej przekątnej.

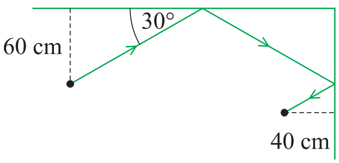
8. W koło o promieniu $r = 20$ wpisano trójkąt równoboczny o boku a. O ile procent pole trójkąta jest mniejsze od pola koła?

9. W trójkąt równoboczny wpisano koło o promieniu $r = 8$. O ile procent pole trójkąta jest większe od pola koła?

10. Powstały plany zagospodarowania działki w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości 40 m. Wydzielono na niej teren nadający się do zabudowy. Teren ten ma kształt trapezu równoramiennego o podstawach długości 40 m i 20 m. Oblicz jego powierzchnię i wyraź ją w arach.

11. Jacht wypłynął z portu w kierunku zachodnim. Po przepłynięciu 20 mil zmienił kurs i po pewnym czasie znajdował się w odległości 7 mil od portu oraz 3 mile od początkowej linii kursu. Pod jakim kątem jacht zmienił kurs?

12. Uderzona kula bilardowa pierwszy raz odbiła się od bandy w odległości 80 cm od rogu stołu, następnie odbiła się od drugiej bandy i zatrzymała się w odległości 40 cm od niej. Jaką drogę pokonała kula bilardowa? Wykorzystaj dane z rysunku.



13. Geodeta mierzący wysokość wzgórza zaznaczył po wschodniej stronie wzgórza na płaskim terenie dwa punkty P_1, P_2 odległe od siebie o 300 m, leżące razem z wierzchołkiem wzgórza w płaszczyźnie prostopadłej do poziomu. Wierzchołek wzgórza widać z punktów P_1, P_2 odpowiednio pod kątami o miarach 20° i 40°. Jaka jest wysokość wzgórza?

14. Przez punkt $P = (-1, 2)$ poprowadzono dwie proste tworzące z osią x odpowiednio kąty 120° i 150°, które razem z osią x wyznaczają trójkąt ABP. Oblicz długości boków $|PA|$ i $|PB|$ trójkąta oraz jego pole.

15. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 16$ i $|CP| = 10$, gdzie P jest środkiem boku AB. Kąt między bokiem AB a odcinkiem CP ma miarę 45°. Oblicz pole trójkąta ABC.

16. Przekątne równoległoboku długości 12 cm i 10 cm przecinają się pod kątem 120°. Oblicz pole równoległoboku.

17. W trójkącie ABC: $|\sphericalangle BAC| = 150^\circ$ oraz $|AB| = 6$. Oblicz długość boku AC oraz wysokość poprowadzoną z wierzchołka C, jeśli pole tego trójkąta jest równe 12.

18. Kąt rozwarty rombu ma miarę 135°. Oblicz obwód rombu, jeśli jego pole jest równe 32 cm^2.

BANK ZADAŃ z. 267–277 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Przed zachodem słońca promienie słoneczne padają na ziemię pod kątem 15°. Drzewo w tym czasie rzuca cień długości 15 m. Wysokość drzewa jest równa w przybliżeniu

A. 4 m **B.** 3,9 m **C.** 14,5 m **D.** 8 m

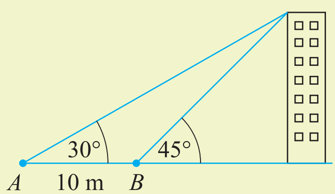
2. Drabinę oparto o ścianę budynku tak, że tworzy z podłożem kąt α i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$.

Wobec tego tangens kąta, jaki tworzy drabina ze ścianą budynku, jest równy

A. $\frac{3}{4}$ **B.** 1,125 **C.** 0,375 **D.** $1\frac{1}{3}$

3. Oblicz pole i obwód prostokąta, wiedząc, że jego przekątna o długości 15 cm tworzy z bokiem kąt 60°.

4. Wykorzystaj informacje zamieszczone na rysunku i oblicz wysokość budynku wielorodzinnego.



5. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, w którym przekątna o długości 10 cm jest prostopadła do ramienia i tworzy z dolną podstawą kąt 30°.

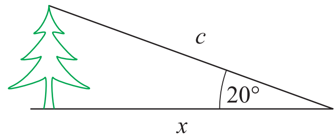
6. W trójkącie, którego kąty mają miary 60°, 45° i 75°, poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta o największej mierze. W jakim stosunku wysokość dzieli bok trójkąta?

7. W trójkącie równoramiennym ABC: $|AC| = |BC| = 4\sqrt{3}$, $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$. Z wierzchołka A poprowadzono środkową AD. Oblicz pole trójkąta ADC.

ZESTAW ZADAŃ – poziom podstawowy

Zadanie 1. (1 p.)

Promienie słoneczne padają na ziemię pod kątem 20°.
Wówczas



A. drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości $x = \frac{20}{\operatorname{tg} 20^\circ}$ m.

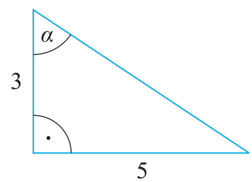
B. cień drzewa o wysokości 20 m ma długość około 30 m.

C. odległość wierzchołka drzewa o wysokości 20 m od końca jego cienia wynosi około 40,5 m.

D. odległość wierzchołka drzewa o wysokości 20 m od końca jego cienia wynosi $c = \frac{20}{\sin 70^\circ}$ m.

Zadanie 2. (1 p.)

Dany jest trójkąt prostokątny. Sinus kąta ostrego α jest równy



A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{5}{3}$

C. $\frac{3}{\sqrt{34}}$ **D.** $\frac{5\sqrt{34}}{34}$

Zadanie 3. (1 p.)

Liczba $\sin 115^\circ$ jest

A. większa od $\frac{1}{2}$. **B.** mniejsza od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. większa od 1. **D.** mniejsza od $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 4. (1 p.)

Jeżeli $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, to $\cos \alpha$ jest równy

A. $-\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{4}{5}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Zadanie 5. (1 p.)

Przekątna prostokąta tworzy z bokiem długości 7 cm kąt 60°. Jej długość wynosi

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm **B.** 3,5 cm **C.** 14 cm **D.** $7\sqrt{2}$ cm

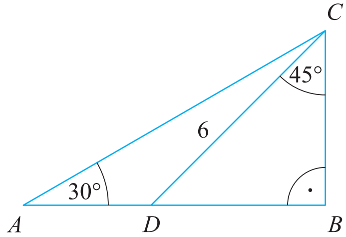
Zadanie 6. (3 p.)

W trójkącie równoramiennym ramiona długości 5 tworzą kąt 120°. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

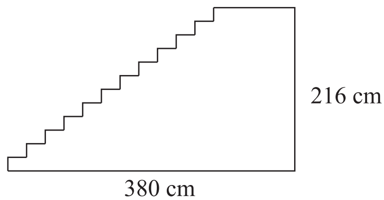
Zadanie 7. (3 p.)

Latarnia morska z wysokości 48 m n.p.m. wysyła sygnały świetlne. Kapitan statku dostrzegł jej światło pod kątem 4°. W jakiej odległości od latarni morskiej znajduje się statek?

Zadanie 8. (3 p.)
Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Punkt D należy do boku AB. Wykorzystując dane na rysunku obok, oblicz:
a) długości boków trójkąta ABC,
b) o ile procent pole trójkąta BCD różni się od pola trójkąta ADC,
c) miarę kąta ADC.



Zadanie 9. (3 p.)
Na rysunku pokazano schody o wysokości 216 cm.
a) Jaka jest wysokość każdego z 12 stopni?
b) Jaka jest szerokość każdego stopnia, jeżeli schody nachylone są do poziomu pod kątem 36°?
Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.



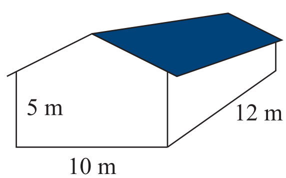
Zadanie 10. (3 p.)
Oblicz miary kątów rombu o przekątnych długości 6 cm i 9 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1°.

Zadanie 11. (3 p.)
Znajdź obwód i pole trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 10 dm i kącie między ramionami 140°. Wyniki podaj z dokładnością odpowiednio do 1 dm i 1 dm^2.

Zadanie 12. (2 p.)
Drabina ustawiona jest bezpiecznie, gdy odległość jej punktu podparcia od ściany budynku jest cztery razy mniejsza od jej długości. Pod jakim kątem do poziomu jest wtedy nachylona drabina?

Zadanie 13. (3 p.)
Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 2 cm. Krawędź boczna ma długość $\sqrt{3}$ cm. Znajdź miarę kąta między krawędzią boczną a przekątną prostopadłościanu. Wynik podaj z dokładnością do 1°.

Zadanie 14. (5 p.)
Budynek w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 12 m × 10 m × 5 m przykryto dachem dwuspadowym o kącie nachylenia do poziomu równym 35°.
a) Znajdź wysokość budynku liczoną do szczytu dachu.
b) O ile procent wysokość poddasza jest mniejsza od wysokości budynku liczonej do szczytu dachu?



1. Joasia podała cztery informacje o pewnej liczbie, z których tylko trzy są prawdziwe.
I. Liczba dzieli się przez 10.
II. Liczba dzieli się przez 5.
III. Liczba dzieli się przez 60.
IV. Liczba dzieli się przez 15.
Która z tych informacji jest fałszywa?

2. Marcin pisał cztery testy. Średnia ocen z tych testów to 4. Jeśli z testu można otrzymać jedną z ocen 1, 2, 3, 4, 5, 6, to które z poniższych zdań nie może być prawdziwe?
I. Marcin z jednego testu otrzymał 1.
II. Marcin otrzymał 5 z dwóch testów.
III. Trzy testy Marcina zostały ocenione na 3.
IV. Z jednego testu Marcin otrzymał 2, a z drugiego dostał 3.

3. W lipcu pewnego roku było pięć niedziel. Który dzień tygodnia na pewno nie wystąpił pięć razy?

4. Dane są zbiory: A – liczb naturalnych mniejszych od 25, B – zbiór całkowitych dzielników liczby 15, C – zbiór liczb będących całkowitymi wielokrotnościami liczby 5, które są nie mniejsze od –10 i nie większe od 25. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość $A\setminus(B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

5. Dane są zbiory: A – zbiór naturalnych dzielników liczby 81, B – zbiór naturalnych dzielników liczby 36. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

6. Dane są zbiory: A – zbiór naturalnych potęg liczby 2 mniejszych od 33, B – zbiór naturalnych dzielników liczby 64. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

7. Wyznacz elementy a i b w zbiorze, jeśli:
a) $A = \{3, 5, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 6, a, b\}$ i $A \cap B = \{7, 10\}$.
b) $A = \{5, 6, 7, 8, 10\}$, $B = \{2, 5, 7, 9, a, b\}$ i $A \cup B = \{2, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$.

8. Wyznacz wszystkie liczby naturalne leżące między 9999 i 100 000, których suma cyfr jest równa 2.

9. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych takie, że ich iloczyn jest równy 3200, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 8.

10. Zbadaj podzielność różnicy liczby trzycyfrowej i liczby o przestawionych cyfrach, tak że cyfra jedności staje się cyfrą setek, cyfra dziesiątek pozostaje cyfrą dziesiątek, a cyfra setek staje się cyfrą jedności. Zbadaj podzielność sumy tych liczb. A jak będzie z podzielnością różnicy liczby czterocyfrowej i liczby utworzonej z cyfr zapisanych w odwrotnej kolejności?

11. Uzasadnij, że:
a) suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą,
b) iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą,
c) kwadrat liczby, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, jest liczbą nieparzystą,
d) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2.

12. Budujemy liczbę w taki sposób, że ustawiamy kolejno cyfry 123456789123... . Jaka cyfra znajduje się na 50., 75., 100. miejscu tej liczby?

13. Liczby m i p przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio 2 i 3. Wyznacz resztę z dzielenia przez 4 sumy kwadratów tych liczb.

14. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych m i n, których największym wspólnym dzielnikiem jest 5, a suma liczb m i n jest równa 50.

15. Liczba a jest liczbą pierwszą. Ile jest liczb naturalnych n mniejszych od a^2 takich, że n i a są liczbami względnie pierwszymi?

16. Znajdź taką liczbę całkowitą m, aby prawdziwa była równość:
a) $m(m + 1) = 319\,790$ b) $m(m + 1) = 94\,556$ c) $m(m + 1)(m + 2) = -941\,094$

17. Resztami z dzielenia liczb całkowitych a, b i c przez liczbę 5 są odpowiednio liczby 1, 2 i 3. Wyznacz resztę z dzielenia sumy kwadratów liczb a, b i c przez liczbę 5.

18. Paweł pokonuje drogę do szkoły rowerem lub pieszo. Jeśli w obie strony porusza się rowerem, to zajmuje mu to 30 minut. Jeśli do szkoły jedzie rowerem i wraca pieszo, to droga w obie strony zajmuje mu $\frac{3}{4}$ godziny. Ile czasu zajmie Pawłowi droga do szkoły, jeśli w obie strony będzie szedł pieszo? Zakładamy, że Paweł chodzi do szkoły tą samą drogą i w tym samym tempie.

19. Wskaż liczby naturalne n, dla których $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ mają rozwinięcie dziesiętne skończone.

20. Nacisk w kilopaskalach, jaki wywiera na podłogę obcas buta, zależy od masy osoby noszącej obuwie i od szerokości obcasa. Nacisk ten jest liczony ze wzoru $p = \frac{100m}{x^2}$, gdzie m oznacza masę człowieka w kg, natomiast x – szerokość obcasa w cm. Oblicz, jaki nacisk na podłogę wywiera obcas buta:
a) mężczyzny ważącego 90 kg, który nosi obuwie z obcasami o szerokości 7 cm,
b) kobiety ważącej 60 kg, noszącej pantofle z obcasami o szerokości 2 cm.

21. Sprawdź na przykładach, że jeśli liczba $\frac{1}{m}$, gdzie m jest liczbą naturalną, ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe, to okres musi być krótszy od m.

22. Wyznacz 135. cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{2}{7}$.

23. Wyznacz 357. cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby:
a) $\frac{8}{15}$, b) $\frac{4}{13}$, c) $3\frac{1}{14}$, d) $1\frac{5}{22}$.

24. Wyznacz sumę pięćdziesięciu ośmiu cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby:
a) $2\frac{3}{7}$, b) $5\frac{1}{18}$, c) $\frac{6}{41}$, d) $3\frac{1}{24}$.

25. Znajdź długość przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym, o którym wiadomo, że przeciwprostokątna jest równa:
a) 17, a druga przyprostokątna ma długość 12,
b) 14, a druga przyprostokątna ma długość $\sqrt{114}$,
c) $\sqrt{21}$, a druga przyprostokątna ma długość $\sqrt{5}$.

26. Skonstruuj odcinek o długości:

a) $\sqrt{2}+1$, b) $3\sqrt{5}+2$, c) $\sqrt{3}-1$.

27. Podaj co najmniej trzy liczby niewymierne x, które spełniają warunek:

a) $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$, b) $\sqrt{11} < x < \sqrt{13}$, c) $\sqrt{191} < x < \sqrt{193}$.

28. Porównaj liczby.

a) $\frac{14^2}{7^2}$ i $\frac{15^2}{5^2}$ b) $\frac{2^6 \cdot 64^2}{32^3}$ i $\frac{9^3 \cdot 3^3}{27^3}$

29. Zapisz iloraz w postaci a^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $(-4)^3 : (-4)^8$ b) $\left(3^4\right)^7 : \left(3^3\right)^{10}$ c) $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 8}{4^{12}}$ d) $\frac{3^5 \cdot 27^3 \cdot 9}{81^2}$ e) $\frac{7^3 \cdot 343^2}{49^6}$

30. Oblicz iloraz liczby największej przez najmniejszą.

a) 2^{3^4}, 3^{4^2}, 4^{2^3} b) 3^{3^3}, 3^{33}, 33^3

31. Wyznacz ostatnią cyfrę liczby 7^{2010}.

32. Oblicz sumę cyfr liczby $10^{2010} - 2010$.

33. Wyznacz cyfrę jedności każdej z liczb: 3^{23}, 3^{57}, 3^{2010}, $3^{2010}+1$, $3^{2010}-2$.

34. Wyznacz n, wiedząc, że:

a) $3{,}4 \cdot 10^n = 3\,400\,000$, b) $6{,}002 \cdot 10^n = 60\,020$, c) $0{,}00021 \cdot 10^n = 2\,100\,000$.

35. Liczbę przedstaw w notacji wykładniczej.

a) 5,383 b) 243,3 c) 677,6 d) 63,39 e) 9,718

36. Porównaj liczby $99\,993\,333^2$ i $99\,993\,332 \cdot 99\,993\,334$.

37. Oblicz $49\,999\,991^2 - 50\,000\,009^2$.

38. Przekształć wyrażenie, korzystając z wzorów skróconego mnożenia.

a) $\left(2x^3 - 3\sqrt{2}\right)^2$ b) $(3xy^2 + 2x^2y)^2$ c) $(x^2+5y)(x^2-5y)$

39. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $(x+y)^2 - 121$ b) $\left(2a^2-3\right)^2 - 9$ c) $\left(4x^2-y^2\right)^2 - 4x^2y^2$

40. Porównaj liczby: $4 \cdot \left(\frac{2-\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2$, $\left(5\sqrt{2}-7\right)^2$, $99-70\sqrt{2}$.

41. Niech $m = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ i $n = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $m \cdot n$ b) $(m-n)(m+n)$ c) $m^2 + m \cdot n$ d) $\frac{m}{n}$

42. Wyznacz sumę, różnicę, iloczyn oraz iloraz liczb x i y. Wynik podaj w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a i b to liczby wymierne, a c to liczba naturalna.

a) $x = 2 + 3\sqrt{2}$ i $y = 7 - 2\sqrt{2}$

b) $x = -2 + 3\sqrt{3}$ i $y = 6 - 2\sqrt{3}$

c) $x = 4\sqrt{7}$ i $y = -1 - 2\sqrt{7}$

d) $x = 5\sqrt{2} + 7$ i $y = -5\sqrt{2}$

43. Wskaż parę liczb całkowitych a i b spełniających równanie $a + b\sqrt{2} = 1$.

44. Oblicz $\left(\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{7}} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}\right)^2$.

45. Oblicz obwód i pole trójkąta równobocznego o boku $a = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

46. Liczbę $\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{8} - 4}\right)^{-1}$ przedstaw w postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a i b to liczby całkowite.

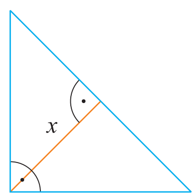
47. Podaj przykładowe liczby wymierne x i y, które spełniają dany warunek.

a) $\left(\sqrt{20} - \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 9$

b) $\left(2\sqrt{10} - \sqrt{15}\right)\left(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right) = 25$

c) $\left(\sqrt{15} - \sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right) = 9$

48. Trójkąt równoramienny prostokątny ma pole równe 32 cm^2. Na podstawie rysunku wyznacz długość odcinka x.



49. Wyznacz odwrotność liczby.

a) $\dfrac{\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3}$

b) $\dfrac{64^{\frac{1}{3}} \cdot 100^{\frac{3}{2}}}{27^{\frac{1}{3}} \cdot 8000^{-\frac{2}{3}}}$

c) $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$

50. Wiedząc, że $\sqrt[3]{abc} = 4$ i $(abcd)^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{10}$, oblicz wartość d.

51. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2.

a) $\dfrac{6\sqrt{2} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 32^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{36} \cdot 256\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\left(3\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3} \cdot 8^{\frac{4}{3}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{72} \cdot \sqrt[3]{18} \cdot 3^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{27}}$

52. Oblicz:

a) $10^{0{,}789}$, b) $10^{1{,}483}$, c) $10^{3{,}824}$, d) $10^{\frac{1}{3}}$, e) $10^{\frac{1}{3} \cdot 1{,}893}$.

53. W pewnym gospodarstwie agroturystycznym właściciele wytwarzają masło dla gości. Dla wczasowiczów przeznaczają 90% tygodniowej produkcji mleka, z czego 70% zużywają na produkcję masła. W mleku jest 16% śmietany, a masło stanowi 25% śmietany. Ile wynosi tygodniowa produkcja mleka, jeśli tygodniowa produkcja masła to 5,6 kg?

54. Cena biletu do muzeum wzrosła o 40%, ale wpływy ze sprzedaży zwiększyły się tylko o 26%. O ile procent zmniejszyła się liczba zwiedzających?

55. Akcja pewnej firmy na giełdzie miała początkowo wartość 14 zł. W maju wartość ta wzrosła o 10%, a w czerwcu zmalała o 10%.

a) Ile kosztowała jedna akcja na koniec czerwca?

b) Ile kosztowałaby jedna akcja, gdyby sytuacja na giełdzie była odwrotna?

56. Pszczelarz stwierdził, że na skutek epidemii wymarło mu 20% pszczół w pasiece. O ile procent powinna wzrosnąć liczba pszczół, żeby liczebność pasieki była taka jak przed epidemią?

57. W pewnej grupie osób 40% ma wadę wzroku. Wśród osób z wadą wzroku 70% nosi okulary, a 30% – szkła kontaktowe. Liczba osób noszących okulary wynosi 21. Oblicz, ile osób jest w tej grupie.

58. Liczba a stanowi 10% liczby b, która stanowi 20% liczby c. Liczba c stanowi 30% liczby d, która jest równa 40% liczby e. Oblicz iloczyn liczb a i d.

59. Dwa kilogramy soku, w którym cukier stanowi 15%, zmieszano z 3 kilogramami soku, w którym cukier stanowi 20%. Oblicz zawartość cukru w otrzymanej mieszaninie.

60. Na pewnej stacji benzynowej 20% kierowców samochodów osobowych i 40% kierowców samochodów ciężarowych tankuje biopaliwo. Kierowcy samochodów osobowych stanowią 60%, a kierowcy ciężarówek – 30% wszystkich kierowców korzystających z tej stacji paliw.

a) Jaki procent kierowców samochodowych, którzy korzystają z tej stacji, stanowią ci, którzy tankują biopaliwo?

b) Jaki procent wszystkich kierowców samochodów osobowych stanowią ci kierowcy, którzy nie korzystają z biopaliw?

61. Liczbę K zwiększono o a%, a następnie otrzymaną w ten sposób liczbę ponownie zwiększono o a%. O ile procent ostatnia liczba jest większa od liczby K?

62. Liczbę dodatnią b zwiększono o 25%. Następnie otrzymaną liczbę ponownie zwiększono o 25% i otrzymano liczbę r. Oblicz stosunek otrzymanej liczby r do liczby b.

63. Piotr i Kuba porównują swoje oszczędności. Piotr mówi: „Razem mamy 1000 zł. Gdyby moje oszczędności wzrosły o 10%, a twoje zmalały o 10%, to nadal będziemy mieli 1000 zł".

a) Oblicz, jaką część oszczędności Kuby stanowią oszczędności Piotra.

b) Ile procent oszczędności Piotra stanowią oszczędności Kuby?

64. Wskaż wszystkie liczby całkowite, które należą do podanego zbioru.

a) $(-4; 6) \cup (3; 7)$
b) $(-3; 6\rangle \cup \langle 3; 7)$
c) $\langle -3; 6) \cup (3; 7\rangle$
d) $\langle -3; 6\rangle \cup \langle 3; 7\rangle$
e) $(-3; 6) \cap (3; 7)$
f) $(-3; 6\rangle \cap \langle 3; 7)$
g) $\langle -3; 6) \cap (3; 7\rangle$
h) $\langle -3; 6\rangle \cap \langle 3; 7\rangle$
i) $(-3; 6) \setminus (3; 7)$
j) $(-3; 6\rangle \setminus \langle 3; 7)$
k) $\langle -3; 6) \setminus (3; 7\rangle$
l) $\langle -3; 6\rangle \setminus \langle 3; 7\rangle$

65. Wyznacz:

a) $\big((-\infty;\ 5) \cup \langle 5;\ 7)\big) \cap \boldsymbol{N}$,
b) $\big((-\infty;\ 5) \cap \boldsymbol{N}\big) \cup \big(\langle 5;\ 7) \cap \boldsymbol{N}\big)$,
c) $\big(\boldsymbol{N} \setminus (7;\ +\infty)\big) \cap \langle 0;\ +\infty)$,
d) $\big(\boldsymbol{N} \cap \langle 0;\ +\infty)\big) \setminus \big((7;\ +\infty) \cap \langle 0;\ +\infty)\big)$,
e) $\big((-3;\ 7\rangle \cap (0;\ 10)\big) \cup \langle 5;\ 9)$,
f) $\big((-3;\ 7\rangle \cup \langle 5;\ 9)\big) \cap \big((0;\ 10) \cup \langle 5;\ 9)\big)$,
g) $\big(\boldsymbol{C} \cap \langle -5;\ 7\rangle\big) \setminus \boldsymbol{N}$,
h) $(\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{N}) \cap \big(\langle -5;\ 7\rangle \cap \boldsymbol{N}\big)$.

66. Wyznacz liczbę całkowitą n tak, aby podany zbiór był jednoelementowy.

a) $(-\infty;\ 3\rangle \cap \langle 2n+1; +\infty)$
b) $\langle -5;\ 3\rangle \cap \langle 2n-7;\ 10\rangle$
c) $(-\infty;\ n^2\rangle \cap \langle 16;\ +\infty)$
d) $(-\infty;\ n^3\rangle \cap \langle -27;\ +\infty)$

67. Zaznacz na osi liczbowej zbiory, do których należą liczby rzeczywiste x spełniające podane warunki.

a) $x > 7$ lub $x < 5$
b) $x < -3$ lub $x \geqslant 1$
c) $-6 < x < -3$
d) $-4 \leqslant x < 0$

68. Niech $a = -3$, $b = -6$, $c = -5$. Oblicz wartość wyrażeń.

a) $|-3a^2b|$, $\quad a^2|-3b|$, $\quad -2a^2|b|$
b) $|2a| + |3b| - |c|$, $\quad |ab| + |3c|$, $\quad -|c| \cdot |ab| \cdot a$

69. Zapisz liczby bez użycia pierwiastka.

a) $\sqrt{16a^2}$, $\quad \sqrt{16a^4b^2}$, $\quad \sqrt{16a^6}$
b) $\sqrt{25a^4b^2}$, $\quad \sqrt{25a^2b^8}$, $\quad \sqrt{25a^{14}b^{10}}$

70. Zapisz bez użycia wartości bezwzględnej.

a) $|x+2| + |x-1|$, $x \in (1;\ +\infty)$
b) $|2x-4| - |x+3|$, $x \in (-3;\ 2)$
c) $3\left|\frac{2}{3}x - 1\right| + |4x-1|$, $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right)$

71. Czy dana liczba jest liczbą wymierną, czy – niewymierną?

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$
b) $\sqrt{18-8\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}$

72. Zakładając, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, znajdź liczbę p taką, że $p = \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{y^2}}{y}$.

73. Rozwiąż równanie.

a) $|x| + 3 = 5|x| - 2$
b) $4|x+3| = 12$
c) $-2|4x| = -12$
d) $-\frac{3}{4}|-8x| = -18$
e) $|1+3x| = 7$
f) $|2-3x| = 11$
g) $6|x+1| - 20 = 4|x+1|$
h) $|2x+1| = |x+5|$
i) $|2x-5| = |x-1|$

74. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste spełniające dany warunek.

a) $|x-3| \leqslant 8$
b) $|x-3| > 11$
c) $|x+7| < 10$
d) $|x+1| \geqslant 13$

75. Podaj zaokrąglenie liczby 7,47254 z dokładnością do:

a) 0,0001,
b) 0,001,
c) 0,01.

Porównaj popełnione błędy względne.

76. Oblicz błąd względny, jaki popełniono przy wykonywaniu dodawania $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$, jeśli każdy z ułamków przybliżono z dokładnością do 0,001.

77. Dane są liczby $\sqrt{290}+17$ i $\frac{-1}{17-\sqrt{290}}$.

a) Każdą z liczb zapisz z dokładnością do 0,00001.
b) Porównaj te liczby bez użycia kalkulatora.
c) Skomentuj wynik.

78. Oblicz:

a) $\log_7 10 + \log_7 4{,}9$,
b) $\log_6 4 + \log_6 54$,
c) $\log_3 72 - \log_3 8$,
d) $\log_{\frac{1}{2}} 18 - \log_{\frac{1}{2}} 9$,
e) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_3 27 - \log_{\sqrt{3}} 4$,
f) $\log_{\sqrt{5}} 125^2 + \log_{125} 1 - \log_{\sqrt{5}} 25^3$,
g) $\left(\log_2 \sqrt{2} + \log_4 \frac{1}{16}\right)\left(\log_2 \sqrt{2} - \log_4 \frac{1}{16}\right)$,
h) $\left(\log_4 \frac{1}{2} - \log_4 \frac{1}{16}\right)^3$.

79. Wiedząc, że $\log_4 a = 3$, oblicz wartość wyrażenia $\log_4 \frac{64}{\sqrt{a}}$.

80. Wiedząc, że $\log_2 7 = k$, oblicz:

a) $\log_2 14$,
b) $\log_2 \frac{7}{16}$,
c) $\log_2 28$,
d) $\log_2 4\frac{4}{7}$.

81. Wyznacz x, jeśli:

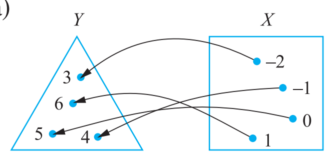
a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = -\frac{1}{2}$,
b) $\log_4(3x-10) = \frac{1}{2}$,
c) $\log_x 4 = 2$,
d) $\log_{x-5} 25 = 2$,
e) $\log_4(x+3) + \log_4(x+3) = 2$,
f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 4$,
g) $\log_3 x + \log_3 \sqrt{x} = 3$,
h) $\log_5 \sqrt{x} - \log_5 x = -1$,
i) $\log_2(\log_\pi x) = 0$,
j) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x + 1) = 2$,
k) $\log_{\sqrt{3}}\left(\log_2(\log_3 x - 1)\right) = 0$,
l) $\left|\log_{x^2} 1\right| = 0$.

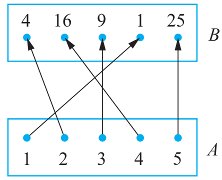
82. Przyporządkowanie określono za pomocą opisu słownego. Jeżeli jest ono funkcją, przedstaw je innym sposobem.

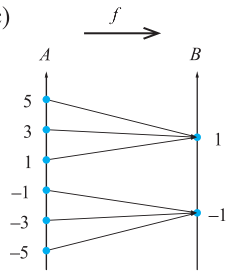
a) Każdej liczbie naturalnej mniejszej od 11 przyporządkowano liczbę o 4 mniejszą.
b) Każdej liczbie całkowitej z przedziału $(-3;\ 4)$ przyporządkowano trzecią potęgę tej liczby.
c) Każdej liczbie naturalnej przyporządkowano jej dzielnik.
d) Każdemu wielokątowi przyporządkowano liczbę jego wierzchołków.
e) Każdemu kwadratowi, którego długość boku jest liczbą naturalną, przyporządkowano jego pole.

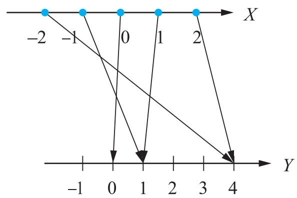
83. Do przyporządkowań przedstawionych w zadaniu 82. podaj przyporządkowania odwrotne (przyporządkowanie odwrotne to przyporządkowanie ze zbioru wartości podanej funkcji do zbioru będącego dziedziną tej funkcji), które będą również funkcjami. Przedstaw je na różne sposoby.

84. Funkcję opisano za pomocą grafu. Przedstaw ją innymi sposobami. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

a)


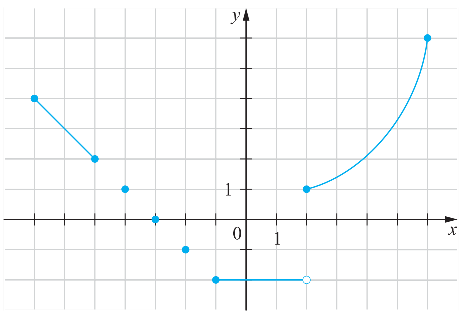
b)


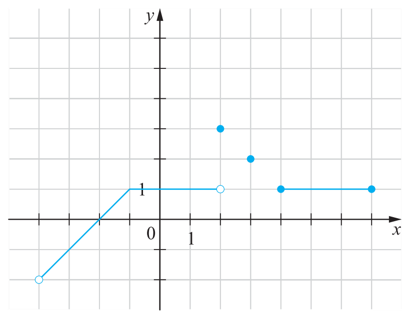
c)


d)


Czy przyporządkowanie odwrotne do podanej funkcji też jest funkcją?

85. Na podstawie wykresu funkcji określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

a)


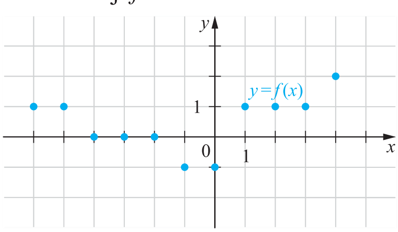
b)


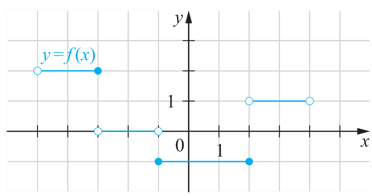
86. Naszkicuj wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $\langle -3;\ 5\rangle$, zbiorem wartości – przedział $\langle -1;\ 4\rangle$, a funkcja ma dwa miejsca zerowe ujemne.

87. Naszkicuj wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $(-2;\ 5)$, zbiorem wartości – przedział $(-3;\ 1)$, a funkcja ma dwa miejsca zerowe dodatnie.

88. Naszkicuj wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $\langle -2;\ 6)$, zbiorem wartości – przedział $(-4;\ 3\rangle$, a funkcja ma dwa miejsca zerowe różnych znaków.

89. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Podaj dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe funkcji f.

a)


b)


90. Wyznacz zbiór wartości funkcji. Czy funkcja ma miejsca zerowe? Jeżeli tak, podaj je.

a) $x \longrightarrow 2x - 3,\ x \in \boldsymbol{N}_+$ b) $x \longrightarrow -x + 3,\ x \in \boldsymbol{N}_+$ c) $x \longrightarrow |x| + 1,\ x \in \boldsymbol{C}$

91. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b) $f(x) = -\sqrt{2-x}$ c) $f(x) = \frac{2}{|x|-2}$ d) $f(x) = \frac{-3}{|x|+\sqrt{2}}$

92. Funkcję opisano za pomocą tabelki. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji oraz miejsca zerowe, o ile istnieją.

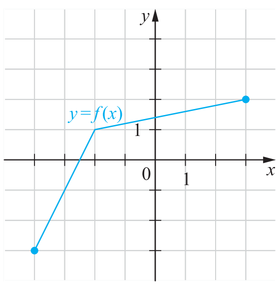
x	–2	–1	1	2	4	5	7
$f(x)$	3	0	3	3	0	1	2

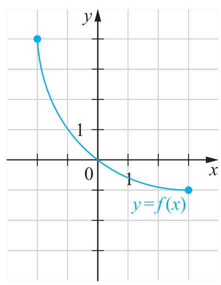
93. Dane są funkcje $f(x) = \frac{16-x^2}{x+4}$ oraz $g(x) = -x + 4$. Podaj wspólne miejsca zerowe funkcji f i g.

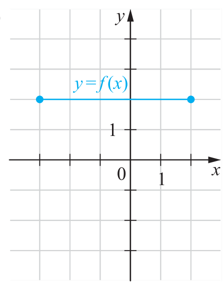
94. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji.

a) $y = \frac{x+5}{(x-2)(x+1)}$ b) $y = \frac{x^2-16}{(x-4)(x+2)(x-8)}$ c) $y = \frac{\log_3 27}{x - \sqrt[3]{27}}$

95. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Uzasadnij, powołując się na odpowiednie definicje, że jest ona rosnąca, malejąca bądź stała.

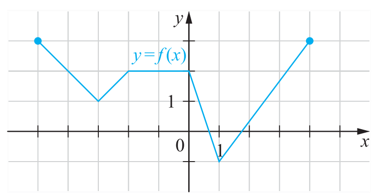
a)


b)


c)


96. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja jest:

a) rosnąca,
b) malejąca,
c) nierosnąca,
d) niemalejąca.



97. Naszkicuj wykres funkcji niemalejącej, mającej dwa miejsca zerowe: $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 1$, której zbiorem wartości jest przedział $\langle -2;\ 3 \rangle$.

98. Naszkicuj wykres funkcji nierosnącej, określonej w przedziale $\langle -4;\ 5 \rangle$, mającej nieskończenie wiele miejsc zerowych.

99. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1,\ 3,\ 5\}$, a wartości tej funkcji należą do zbioru $\{2,\ 4,\ 6\}$. Podaj przykłady przyporządkowań opisujących funkcję:

a) rosnącą, b) malejącą, c) nierosnącą, d) niemalejącą.

100. Naszkicuj wykres funkcji określonej w zbiorze $(-\infty;\ -3\rangle \cup \langle 3;\ +\infty)$, która ma cztery miejsca zerowe. Na podstawie wykresu podaj własności tej funkcji.

101. Przedstaw za pomocą wzoru funkcję opisującą objętość kuli, jeśli długość średnicy tej kuli jest liczbą z przedziału $\langle 3;\ 8\rangle$. Podaj z dokładnością do 0,01 wartości najmniejszą i największą funkcji.

102. Dziedziną funkcji $y = -3x + 2$ jest zbiór $D_f = (-5;\ 3) \cup \langle 4;\ 6\rangle$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji.

103. Funkcja $y = x^2$ określona jest w zbiorze $\langle -1;\ 6\rangle$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji.

104. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $y = |x|$ w każdym z przedziałów.
a) $\langle 5;\ 7\rangle$ b) $\langle -1;\ 3\rangle$ c) $(-6;\ -4\rangle$ d) $\langle 10;\ +\infty)$

105. Naszkicuj wykresy trzech różnych funkcji, które w przedziale $\langle -2;\ 5\rangle$ przyjmują wartość najmniejszą $y = -1$ oraz wartość największą $y = 3$.

106. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:
a) $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$,
b) $f(x) = |x|$ i $g(x) = x^2$,
c) $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x$.
Dla jakich argumentów $f(x) > g(x)$?

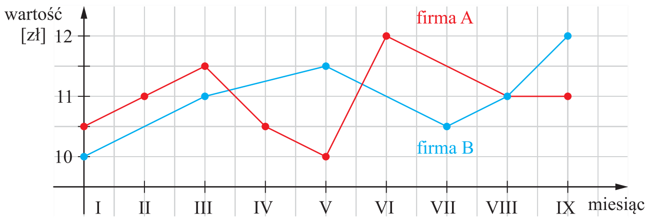
107. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = x + 4$ dla $x \in (-\infty;\ -2\rangle$, $g(x) = |x|$ dla $x \in (-2;\ 3)$ oraz $h(x) = 3$ dla $x \in \langle 3;\ +\infty)$. Czy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny należących do tych trzech wykresów może być jednocześnie wykresem pewnej funkcji? Jeżeli tak, to podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, wartości największą oraz najmniejszą.

108. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji o następujących własnościach:
a) dziedziną jest przedział $\langle -6;\ 4)$, zbiorem wartości jest przedział $\langle 0;\ 5)$, $f(-4) = 2$, $f(0) = 0$,
b) dziedziną jest przedział $\langle -3;\ 5)$, zbiorem wartości jest przedział $(-4;\ 0\rangle$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$.

109. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$ monotonicznej przedziałami, której dziedziną jest przedział $\langle -3;\ 5)$. Wykres funkcji f ma z osią y punkt wspólny $A = (0,\ -2)$.

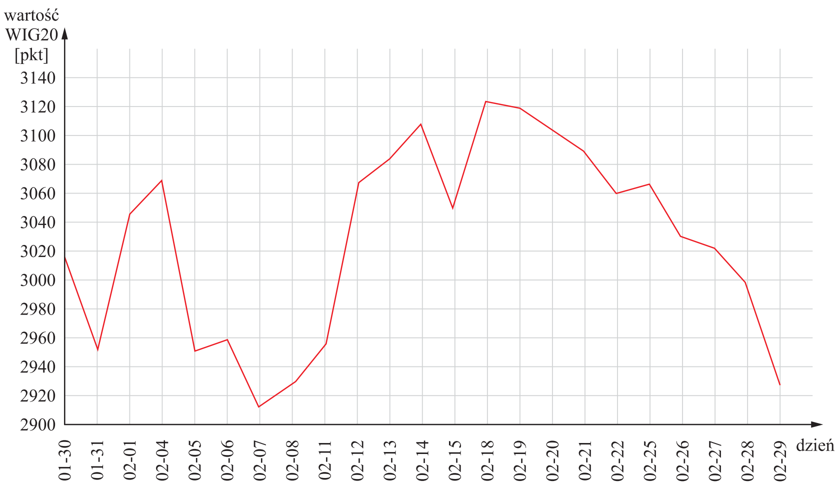
110. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$ monotonicznej przedziałami, której dziedziną jest zbiór $\langle -4;\ -1) \cup (1;\ 4\rangle$. Wykres funkcji f ma z osią x dwa punkty wspólne $A = (-2, 0)$ oraz $B = (3, 0)$. Podaj miejsca zerowe funkcji f.

111. Na wykresie przedstawiono notowania akcji firmy A i firmy B na giełdzie.



a) Podaj najwyższe oraz najniższe notowania akcji firmy A i firmy B.
b) Wymień okresy, w których wartość akcji firmy A wzrastała, oraz okresy, w których wartość tych akcji malała.
c) Podaj okres, w którym wartość akcji obu firm wzrastała.
d) Opisz, jak zmieniał się kurs akcji firmy A i firmy B w okresie od marca do czerwca.
e) Oblicz, o ile procent zmieniła się wartość akcji firmy A, a o ile procent zmieniła się wartość akcji firmy B w maju w stosunku do stycznia. Czy to był wzrost, czy – spadek wartości akcji?

112. Wykres przedstawia miesięczne notowania indeksu giełdowego WIG20 od 30 stycznia do 29 lutego 2008 r.



Źródło: www.money.pl

a) Na podstawie wykresu przeanalizuj zmiany wartości indeksu w lutym 2008 r.
b) W jakim okresie nastąpił największy ciągły wzrost wartości indeksu? O ile procent wzrosła wtedy jego wartość?
c) W jakim okresie nastąpił największy ciągły spadek wartości indeksu? O ile procent spadła wtedy jego wartość?

113. W tabeli podano cennik opłat pocztowych za przesyłkę paczek. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji opisujące wysokości opłat w zależności od wagi paczki dla gabarytu A i gabarytu B. Kiedy różnica w opłacie jest najmniejsza dla różnych gabarytów paczek, a kiedy – największa? O ile procent różnią się opłaty w poszczególnych przedziałach wagowych?

Waga paczki pocztowej	Gabaryt A	Gabaryt B
do 1 kg	6,50 zł	9,00 zł
ponad 1 kg do 2 kg	8,00 zł	11,00 zł
ponad 2 kg do 5 kg	9,50 zł	13,00 zł
ponad 5 kg do 10 kg	15,00 zł	20,00 zł

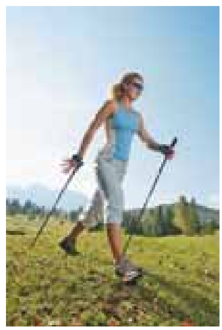
114. Świstak żyjący na terenie Tatr zapada na kilka miesięcy w sen zimowy, podczas którego wykonuje 5 oddechów na godzinę. Oblicz, ile razy oddycha świstak podczas trzymiesięcznego snu. Do obliczeń przyjmij, że każdy miesiąc ma 30 dni.

115. Dwudziestu robotników, pracując po 8 godzin dziennie, wykonało pewną pracę w ciągu 6 dni. W ciągu ilu dni wykona tę pracę 16 robotników pracujących w tym samym tempie przez 6 godzin dziennie?

116. Do uprawiania *nordic walking* używa się kijków o długości proporcjonalnej do wzrostu. Osoba o wzroście 165 cm powinna używać kijków o długości 112,2 cm.

a) Jakiej długości kijków powinna używać osoba o wzroście 194 cm?

b) Osoba doświadczona w narciarstwie może wybrać kijki o 5 cm dłuższe. Jakiego wzrostu jest doświadczony chodziarz, który używa kijków o długości 127,4 cm?



117. Do 20 l białej farby dodano 1 l zielonego pigmentu. W trakcie wykonywania prac malarskich okazało się, że brakuje 6,3 l kolorowej farby. Ile litrów farby białej oraz pigmentu należy użyć, aby uzyskać farbę takiego samego koloru jak podczas pierwszego mieszania?

118. Narysuj wykres podanej funkcji. Czy jest to wykres funkcji liniowej?

a) $y = -3x,\ x \in \langle -2;\ 3\rangle$

b) $y = 2x + 1,\ x \in \boldsymbol{C}_+$

c) $y = x - 2,\ x \in \boldsymbol{R}$

d) $y = \frac{3}{4}x - 1,\ x \in \langle 0;\ +\infty)$

119. Do wykresu funkcji liniowej należy początek układu współrzędnych oraz punkt A. Napisz wzór tej funkcji oraz naszkicuj jej wykres.

a) $A = (-3,\ 2)$

b) $A = (-4,\ -2)$

c) $A = (3,\ 0)$

d) $A = \left(\frac{2}{3},\ 3\right)$

120. Dana jest funkcja $f(x) = -x + 5$.

a) Wyznacz miejsce zerowe funkcji.

b) Oblicz $f(\sqrt{2})$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, $f(0)$, $f(1 - \sqrt{3})$.

c) Wyznacz brakujące współrzędne punktów $A = (2, a)$, $B = (b, 1)$, $C = (0, c)$, $D = (d, 6)$, $E = (4, e)$, wiedząc, że każdy z nich należy do wykresu funkcji f.

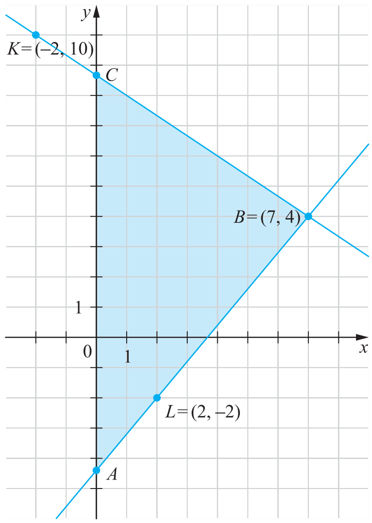
121. Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $P = (-3, 5)$, a jej współczynnik kierunkowy jest równy:

a) -4, b) 3, c) $\frac{2}{5}$, d) $-\frac{3}{2}$.

122. Napisz wzór funkcji liniowej, mając dane jej miejsce zerowe i punkt, przez który przechodzi wykres tej funkcji.

a) $x = -6$, $A = (5, 8)$ b) $x = \frac{4}{5}$, $C = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ c) $x = \sqrt{2}$, $D = (2, -3)$

123. Oblicz pole trójkąta ABC. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



124. Narysuj wykres funkcji liniowej i podaj argumenty, dla których wartości funkcji są nieujemne.

a) $y = -12x + 5$ b) $y + 3x - 2 = 0$ c) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2$ d) $2y - 4x = 6$

125. Do wykresu funkcji liniowej należą początek układu współrzędnych oraz punkt P. Napisz wzór tej funkcji.

a) $P = (1, p)$ b) $P = (p, 2)$ c) $P = (m, n)$ d) $P = \left(2p^2, q\right)$

126. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji liniowej $y = ax + b$, jeżeli:

a) $a > 0$ i $b > 0$, b) $a < 0$ i $b > 0$, c) $a > 0$ i $b = 0$, d) $a = 0$ i $b > 0$?

127. Wskaż funkcje rosnące, malejące i stałe.

I. $y = -2x + 8$ II. $y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 4$

III. $y = (\sqrt[3]{6} - \sqrt{3})x - 4$ IV. $y = (\log_4 16 - \sqrt{2})x - 7$

V. $y = -12{,}8$ VI. $y = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)x + 1$

128. Dla jakiej wartości k podana funkcja jest stała?

a) $y = (-2k + 1)x + 4$ b) $y = (3 - 4k)x - 7$

c) $y = -(\sqrt{2} + 3k)x - 1$ d) $y = (k^2 + 2)x - 4$

e) $y = (|k - 3| - 2)x$ f) $y = -|k|x + 3$

129. Podaj wzór funkcji liniowej, która przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do zbioru:

a) $(3; +\infty)$, b) $(-\infty; -2)$, c) $\boldsymbol{R}$.

130. Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest rosnąca i jej miejscem zerowym jest liczba ujemna. Ustal znak wyrażenia $a + b$ oraz $\frac{a}{b}$.

131. Podaj wzór funkcji liniowej spełniającej warunki: $f(1) = 2$, $f(x + 1) = f(x) + 2$.

132. Narysuj wykres funkcji liniowej, wiedząc, że $f(x) > 0$ dla $x \in (-3; +\infty)$ i $f(0) = 1$.

133. Narysuj wykres funkcji liniowej, wiedząc, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ $f(x) > 0$ i $f(5) = 4$.

134. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych kilka prostych z rodziny $y = ax + 2$. Jak położone są proste w układzie współrzędnych, jeżeli:

a) $a > 0$, b) $a < 0$?

135. Punkty $A = (-1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (5, 1)$ oraz $D = (3, 3)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Wyznacz równania prostych zawierających:

a) boki czworokąta $ABCD$,

b) przekątne czworokąta $ABCD$.

Jaki to czworokąt?

136. Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą $y = -3x + 2$ oraz osiami układu współrzędnych.

137. Oblicz pole trapezu ograniczonego prostymi $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{2}x + 5$ oraz osiami układu współrzędnych.

138. Dana jest funkcja liniowa $y = -3x + m$.

a) Dobierz m tak, aby punkt $P = (-5, 2)$ należał do wykresu tej funkcji.

b) Dobierz m tak, aby miejsce zerowe funkcji było równe 2.

c) Dla jakich wartości m prosta, będąca wykresem tej funkcji, jest równoległa do wykresu funkcji $y = -3x + 7$?

139. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt A i jest równoległy do wykresu danej funkcji.

a) $A = (-4, 6)$, $y = 3x + 4$ b) $A = (3, -1)$, $y = -2{,}3x + 6$

c) $A = (0, 4)$, $y = 0{,}(6)x - 2$ d) $A = (1, 2)$, $y = \sqrt{2}$

140. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C trójkąta ABC, wiedząc, że $A = (-3, 1)$, $B = (4, -1)$, $C = (2, 6)$.

141. Czy zdanie jest prawdziwe?

a) Wykresem funkcji liniowej $y = -5x + 1$ jest prosta równoległa do prostej $\frac{1}{5}y + x + 7 = 0$.

b) Funkcja liniowa $y = 4x + 2$ ma jedno miejsce zerowe.

c) Prosta o równaniu $y = 0$ jest wykresem funkcji stałej.

d) Prosta o równaniu $x = 3$ jest wykresem funkcji liniowej.

142. Uzasadnij, że proste $3x + y - 1 = 0$ oraz $3y = x + 15$ są prostopadłe. Wyznacz punkt przecięcia tych prostych.

143. Wyznacz współrzędne punktu M leżącego na osi x tak, aby proste MN i KL były równoległe.

a) $K = (-2, 4)$, $L = (-5, 1)$, $N = (2, 3)$

b) $K = (-1, 4)$, $L = (7, -2)$, $N = (3, 4)$

c) $K = (-2, 3)$, $L = (4, 3)$, $N = (0, 0)$

d) $K = (-4, 2)$, $L = (-4, 5)$, $N = (1, 3)$

144. Wyraź obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 12 dm i podstawie x cm jako funkcję zmiennej x. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Narysuj jej wykres.

145. Zapisz obwód trapezu równoramiennego o ramieniu długości 8 cm i podstawach długości 10 cm i x cm jako funkcję zmiennej x. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Narysuj jej wykres.

146. W hurtowni owoców znajduje się 10 ton bananów. Codziennie sprzedaje się 250 kg tych owoców. Wyraź liczbę kilogramów bananów pozostających w hurtowni jako funkcję, której zmienną niezależną jest czas. Naszkicuj wykres tej funkcji, podaj dziedzinę i zbiór wartości.

147. W szybkim *nordic walking* (marszu ze specjalnymi kijkami) spalamy 6 kalorii na minutę. Wyraź liczbę spalanych kalorii jako funkcję czasu marszu. Przyjmując, że trening trwał 1 godzinę, narysuj wykres tej funkcji, podaj zbiór wartości.

148. Stalowy pręt w temperaturze 0°C ma długość 16 m. Przy wzroście temperatury o 1°C pręt wydłuża się o 0,2 mm.

a) Wyraź długość pręta w zależności od temperatury.

b) Oblicz długość pręta w temperaturze 26°C.

c) Przy jakiej temperaturze pręt wydłuży się o 1,6 cm w stosunku do swojej długości w temperaturze 0°C?

149. Kurtki uszyte w zakładzie krawieckim są sprzedawane po 190 zł za sztukę. Na całkowity miesięczny koszt produkcji składają się koszty stałe w kwocie 15 000 zł i koszty produkcji każdej kurtki w kwocie 110 zł.

a) Podaj wzór funkcji opisującej miesięczny całkowity koszt produkcji w zależności od liczby uszytych kurtek.

b) Przy jakiej sprzedaży gotowych wyrobów szycie kurtek zacznie przynosić zysk?

c) Ile kurtek powinien sprzedać zakład, aby jego zysk wyniósł co najmniej 2000 zł?

150. W ekonomii punktem krytycznym nazywany jest punkt, w którym linia przychodów przecina się z linią kosztów. Wyznacz punkt krytyczny dla produkcji określonych wyrobów, jeżeli linią przychodów jest wykres funkcji $y = 18x + 1$, linią kosztów – wykres funkcji $y = 10x + 1500$, a x jest liczbą wyprodukowanych sztuk wyrobu. Przedstaw to graficznie. Dobierz odpowiednią jednostkę.

151. Dane są funkcje $f(x) = |x - 3|$ oraz $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresów tych funkcji. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami tych funkcji.

152. Dla jakich liczb naturalnych m, n funkcje liniowe $f(x) = 3x + m$ i $g(x) = nx + 4$ mają to samo miejsce zerowe?

153. Rozwiąż zadanie.

a) Cegła waży kilogram i $\frac{1}{3}$ cegły. Ile waży cegła?

b) Karp waży 0,5 kg i $\frac{3}{4}$ karpia. Ile waży karp?

c) Wąż ma długość 8 m i $\frac{1}{4}$ węża. Jaką długość ma wąż?

d) Prędkość, z jaką porusza się samochód, to 30 km/h i dwie trzecie tej prędkości. Z jaką prędkością porusza się samochód?

154. Dopisz drugą stronę równania tak, aby otrzymać równanie, które:

- ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- nie ma rozwiązania,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań.

a) $5x - 3 = \ldots$ b) $3(2 - x) = \ldots$ c) $(2x - 1)^2 - 4x^2 = \ldots$

155. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{3} + 5 = \frac{4}{x} - \frac{1-x}{3}$ b) $\frac{2x+1}{3} + \frac{2}{x} = \frac{2(x+5)}{3}$ c) $\frac{5}{2x+7} = \frac{-9}{4x+14}$

156. Wyznacz x z równania. Zapisz konieczne założenia.

a) $ax + b = c$ b) $ax - b = 7$ c) $bx + 3x - d = e$

157. Pola trzech działek mają się do siebie jak 5 : 9 : 3. Oblicz pole każdej z nich, wiedząc, że najmniejsza działka ma pole o 600 m^2 mniejsze niż średnia.

158. Rozwiąż nierówność. Zbiór rozwiązań przedstaw na osi liczbowej.

a) $0{,}5(2 + 5x) \geqslant \frac{2}{3}(15 - 3x)$ b) $(6x - 2)^2 - (4x + 1)^2 > 5(2x - 3)^2 + 14$

c) $\frac{x}{3} - \frac{1-x}{4} \leqslant \frac{5x-1}{6}$ d) $\frac{3-x}{2} - \frac{x+12}{4} < \frac{(3x+3)^2}{6} - \frac{3}{2}x^2$

159. Dla jakich wartości k podana funkcja liniowa jest rosnąca, a dla jakich – malejąca?

a) $y = (-2k + 1)x + 4$ b) $y = (3 - 4k)x - 7$ c) $y = -\left(\sqrt{2} + 3k\right)x - 1$

d) $y = (k^2 + 2)x - 4$ e) $y = (|k - 3| - 2)x$ f) $y = -|k|x + 3$

160. Wskaż w zbiorze $\left\{-3, -2\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, 1, 3\frac{1}{2}\right\}$ liczby spełniające nierówność.

a) $3(x + 1) - 2(3 - 2x) \leqslant -2x - (4 + 2x)$

b) $\frac{4-5x}{2} - \frac{3-7x}{3} > 2 - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x}{2} - 1 - \frac{5+6x}{3} \leqslant -2 - x$

161. Podaj wszystkie liczby całkowite ujemne spełniające nierówność.

a) $x(x+3) - 2x + 2 \geqslant x^2 - 1$

b) $\frac{1-x}{2} - \frac{2x+3}{5} < 1\frac{1}{5}$

c) $2\left(1 + \frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{2}\left(4 - \frac{2}{3}x\right) > \frac{1}{3}(1 - 3x) - 6$

162. Wyznacz zbiór argumentów x, dla których funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = 3x - 5$ przyjmuje wartości z danego przedziału.

a) $(-\infty; 4\rangle$ b) $(1; +\infty)$ c) $\langle -4; 4\rangle$ d) $(-1; 1)$

163. Wyznacz zbiór argumentów x, dla których funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = -2x + 3$ przyjmuje wartości z podanego przedziału.

a) $(-\infty; -3\rangle$ b) $(3; +\infty)$ c) $(-1; 5)$ d) $\langle 6; 11\rangle$

164. Na modernizację kotłowni w budynku mieszkalnym potrzeba 3000 zł. Kiedy zwróci się ten wydatek, jeżeli miesięczne wydatki na ogrzewanie przed modernizacją wynosiły 150 zł, a po modernizacji będą wynosić 110 zł? Przyjmij, że sezon grzewczy trwa 7 miesięcy w roku.

165. Rozwiąż układ równań dowolną metodą.

a) $\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ 10x + 14y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 2x - 7y = 13 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}25x + 3y = 7 \\ 0{,}5x + 6y = 14 \end{cases}$

166. Zbadaj, dla jakich wartości a i b wykresy funkcji liniowych $f(x) = -2x + 4$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$ przecinają się w punkcie P.

a) $P = (a, b)$ b) $P = (a + 1, b - 2)$

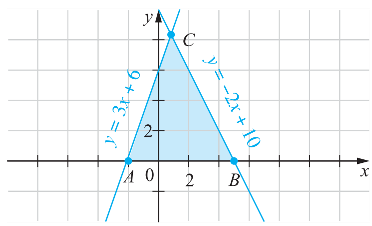
c) $P = (-a - 2, 2b)$ d) $P = (a + b, a - 2b)$

167. Dla jakiej wartości parametru k wykresy funkcji liniowych $f(x) = \left(\frac{2}{3}k - 2\right)x + 1$ i $g(x) = (k + 7)\,x$ są prostymi:

a) równoległymi, b) pokrywającymi się?

168. Znajdź wartości m i n, jeśli para liczb $(5, -3)$ jest rozwiązaniem układu równań
$\begin{cases} 3mx + 4ny = -6 \\ 2mx - 5ny = 65 \end{cases}$.

169. Oblicz pole trójkąta ABC. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



170. Uzasadnij, że proste $3x - y - 1 = 0$ i $2y = 6x + 4$ są równoległe. Oblicz odległość między nimi, wiedząc, że odległość między prostymi to długość odcinka prostopadłego do nich, którego każdy koniec należy do jednej z tych prostych.

171. Jarek kupił płyty CD i DVD. Płyt DVD było o 20 więcej niż płyt CD. Czysta płyta CD kosztuje 80 gr, a płyta DVD – 1,20 zł. Za wszystkie płyty chłopiec zapłacił 44 zł. Ile płyt każdego rodzaju kupił Jarek?

172. W dniu otwarcia Zimowych Igrzysk Olimpijskich w Lillehammer w lutym 1994 r. w kantorach za dolara i cztery marki płacono średnio 71 200 zł, a za 10 marek można było kupić 5 dolarów i 14 500 zł. Jaki był średni kurs dolara, a jaki – marki w tym dniu?

173. Z dwóch plantacji truskawek w pierwszym roku zebrano 11,7 ton owoców. W drugim roku na pierwszej plantacji odnotowano 20-, a na drugiej 30-procentowy wzrost i zebrano łącznie 14,21 ton truskawek. Ile ton truskawek zebrano z każdej plantacji w pierwszym roku, a ile – w drugim?

174. W 2011 roku wybudowanie 580 km autostrad i 730 km dróg ekspresowych kosztowało około $1{,}787 \cdot 10^{10}$ zł. Jeśli w kolejnym roku powstanie o 20% autostrad i o 30% dróg ekspresowych więcej, to przy takich samych kosztach inwestycje te będą kosztowały około $2{,}1955 \cdot 10^{10}$ zł. Jaki był koszt wybudowania 1 km autostrady i 1 km drogi ekspresowej w 2011 roku?

175. Do układu przyporządkuj parę liczb, która jest jego rozwiązaniem.

I. $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ II. $\begin{cases} -4x + y = 0 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

III. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} -7x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

A. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ B. $(-1, 2)$ C. $\left(3\frac{1}{2}, 3\right)$ D. $(0, 1)$

176. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji f. Wykres ten przekształć w symetrii względem:
a) osi x i funkcję, której wykres otrzymałeś, nazwij g,
b) osi y i funkcję, której wykres otrzymałeś, nazwij h.

Które z własności funkcji f (niezależnie od jej wyboru) są takie same jak własności funkcji g, a które są takie same jak własności funkcji h?

177. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem osi x.

a) $f(x) = (x + 1)^3$ b) $f(x) = \sqrt{6}x^2$ c) $f(x) = x + 1$ d) $f(x) = -\frac{5}{x}$

178. Funkcja f ma 3 miejsca zerowe: $x = -4$, $x = 0$, $x = 5$. Podaj miejsce zerowe funkcji g, której wykres otrzymano po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem:
a) osi x, b) osi y.

179. Wykres funkcji $f(x) = |x| - 8$, $x \in \boldsymbol{R}$, przekształć w symetrii względem osi x. Jaką figurą jest obszar ograniczony wykresami obu funkcji, dla którego oś x jest osią symetrii?

180. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji f. Następnie przekształć go w symetrii względem początku układu współrzędnych i funkcję, której wykres otrzymałeś, nazwij g. Czy własności funkcji f (niezależnie od jej wyboru) są takie same jak własności funkcji g?

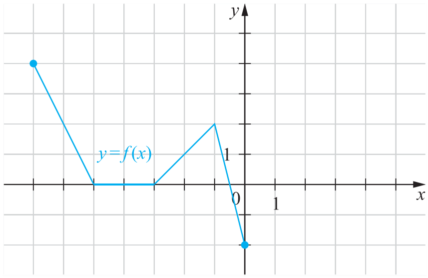
181. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przekształceniu wykresu funkcji f względem punktu $(0, 0)$.

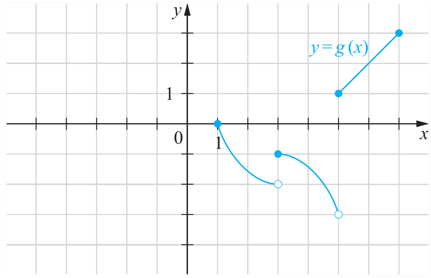
a) $f(x) = (x - 1)^4$ b) $f(x) = -8\sqrt{x} - 2$ c) $f(x) = \sqrt{3}(x + 4) - 2$ d) $f(x) = \frac{3}{x - 1}$

182. Uzupełnij brakujący fragment wykresu tak, aby wykres funkcji był symetryczny:

a) względem osi y,

b) względem początku układu współrzędnych.





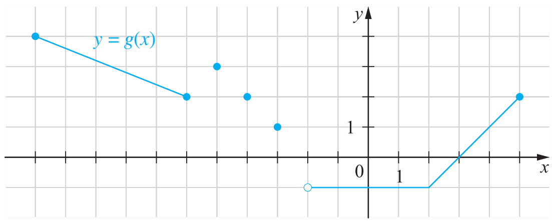
Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

183. Rysunek przedstawia wykres funkcji g. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = -g(x)$,

b) $y = -g(-x)$,

c) $y = g(-x)$.



184. Narysuj wykres funkcji f, której dziedziną jest zbiór $\{-3, -2, -1\} \cup (0;\ 4)$, a następnie sporządź wykres funkcji:

a) $y = f(-x)$,

b) $y = -f(-x)$,

c) $y = -f(x)$.

Podaj własności otrzymanej funkcji.

185. Przekształć wykres funkcji $f(x) = (3 - x)^2 + 1$ w symetrii względem osi x, a następnie otrzymany wykres przekształć względem osi y. Zaproponuj inne przekształcenie, w wyniku którego otrzymasz ten sam obraz wykresu.

186. Odgadnij wzór funkcji $y = f(x)$ oraz opisz przekształcenia, jakie należało wykonać, aby z wykresu funkcji f otrzymać wykres funkcji o podanym wzorze.

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = (x - \pi)^3 + 2$

c) $y = \frac{-9}{x+3} + 5$

d) $y = \sqrt{x - 4} - \sqrt{2}$

187. Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunięto o 3 jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g. Podaj przykład innego przekształcenia wykresu funkcji f tak, aby otrzymać wykres funkcji g.

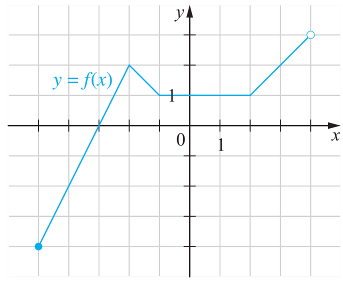
a) $y = x + 2$

b) $y = 2x - 3$

c) $y = -x + 4$

d) $y = -3x - 1$

188. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicuj wykres funkcji g:
a) $g(x) = f(x + 2) + 2$,
b) $g(x) = f(x - 2) - 1$,
c) $g(x) = f(x - 4) - 4$.



189. Który wzór określa funkcję kwadratową?

a) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 3$

b) $g(x) = \dfrac{5x^2 - x + 5}{x - 5}$

c) $h(x) = 2x^2 + 3x - 7 - 2x(3x - 9)$

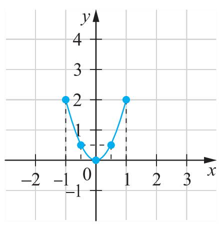
d) $k(x) = (2x - 1)^2 - (3 - 2x)^2$

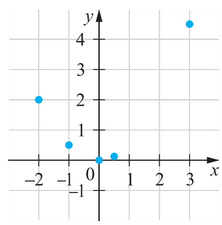
190. Wyznacz równanie paraboli $y = ax^2$, jeżeli należy do niej podany punkt.

a) $A = (-1,\ 1)$ b) $B = (0,\ 0)$ c) $C = (6,\ 2)$ d) $D = (\sqrt{3},\ \sqrt{2})$

191. W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji: $y = 4x^2$, $y = \frac{2}{3}x^2$, $y = 1{,}25x^2$.
a) Wypisz własności wspólne dla tych funkcji.
b) Opisz różnice między wykresami tych funkcji.

192. Odgadnij wzór funkcji z wykresu. Wyznacz jej dziedzinę i zbiór wartości.

a)


b)


193. Zapisz funkcję opisującą pole P trapezu, którego podstawy mają długości x i $2x$, a wysokość ma długość $0{,}3x$.

194. Zapisz funkcję opisującą pole P rombu, w którym krótsza przekątna ma długość $2x$, a kąt ostry ma miarę $60°$.

195. Zapisz funkcję opisującą pole P koła, którego promień ma długość $\frac{11}{10}x$.

196. Krawędzie otwartego prostopadłościennego pudełka (bez pokrywki) są w stosunku $1 : 3 : 5$. Podaj wzór funkcji opisującej pole powierzchni tego pudełka. Rozpatrz różne przypadki.

197. Sporządź wykresy funkcji. Wypisz wspólne własności tych funkcji. Podaj różnice.

a) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 2$, $y = 2x^2 - 3$

b) $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$, $y = -2x^2 - 3$

198. Sprawdź, czy podane punkty należą do wykresu funkcji f.

a) $A = (-1, -1)$, $B = (-1, 1)$ $\quad f(x) = 3x^2 - 2$

b) $A = (-2, -1)$, $B = (-2, 7)$ $\quad f(x) = -x^2 + 3$

c) $A = (2, 1)$, $B = (3, 0)$ $\quad f(x) = x^2 - 6x + 9$

d) $A = (-2, -2)$, $B = (-4, 2)$ $\quad f(x) = 2(x + 3)^2$

199. Opisz położenie paraboli określonej wzorem $f(x) = ax^2 + q$, jeśli:

a) $a > 0$ i $q > 0$, b) $a > 0$ i $q < 0$, c) $a < 0$ i $q > 0$, d) $a < 0$ i $q < 0$.

200. Sporządź wykresy funkcji. Wypisz wspólne własności tych funkcji. Podaj różnice.

a) $y = -2(x - 1)^2$, $\quad y = -2(x + 1)^2$, $\quad y = -2(x - 3)^2$

b) $y = 2(x - 1)^2$, $\quad y = 2(x + 1)^2$, $\quad y = 2(x - 3)^2$

201. Opisz położenie paraboli określonej wzorem $f(x) = a(x - p)^2$, jeśli:

a) $a > 0$ i $p > 0$, b) $a > 0$ i $p < 0$, c) $a < 0$ i $p > 0$, d) $a < 0$ i $p < 0$.

202. Przesuń wykres funkcji $f(x) = 2x^2$ równolegle do osi układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana parabola, oraz podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) O 3 jednostki w lewo i 2 jednostki w górę.

b) O $\frac{1}{2}$ jednostki w prawo i 1 jednostkę w dół.

c) O 2 jednostki w dół.

d) O $\sqrt{2}$ jednostki w prawo i 1 jednostkę w dół.

203. Przesuń wykres funkcji $f(x) = -3x^2$ równolegle do osi układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana parabola, oraz podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) O 1 jednostkę w prawo i 2 jednostki w dół.

b) O $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo i 2 jednostki w górę.

c) O 1 jednostkę w górę.

d) O 2 jednostki w lewo i $\sqrt{2}$ jednostki w górę.

204. Piłkę upuszczono z balkonu, z wysokości 30 m. Wzór $h(t) = -4{,}9t^2 + 30$ opisuje wysokość h, na jakiej znajduje się piłka po t sekundach, jeśli pominąć opór powietrza.

a) Narysuj wykres funkcji opisującej wysokość, na jakiej znajduje się piłka, w zależności od czasu.

b) Na jakiej wysokości będzie piłka po 2 sekundach spadania?

c) Czy piłka dotknie ziemi po 3 sekundach?

205. Uczestnicy kursu spadochronowego wykonują skoki szkoleniowe – na wysokości 4000 m wyskakują z samolotu. Bezpieczna wysokość, na jakiej skoczek powinien otworzyć spadochron, to 1650 m. Odległość skoczka od ziemi, przed otwarciem spadochronu, opisuje wzór $h(t) = -4{,}9t^2 + 4000$, jeśli pominąć opór powietrza.

a) Na jakiej wysokości znajdzie się skoczek po 5 sekundach od rozpoczęcia skoku, a na jakiej – po 10 sekundach?

b) Ile maksymalnie sekund może spadać skoczek do czasu otwarcia czaszy spadochronu, aby skok był bezpieczny?

206. Jak długo będzie spadać kamień zrzucony z dachu wieżowca CN Tower (Toronto) o wysokości 553,3 m? Pomiń wpływ oporu powietrza.

207. Narysuj wykresy funkcji. Napisz, jakie wspólne własności mają te funkcje, a jakie są między nimi różnice.

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ $\quad g(x) = 2(x-2)^2 - 1$ $\quad h(x) = 2(x+3)^2 - 1$

b) $f(x) = -3x^2 + 2$ $\quad g(x) = -3(x-1)^2 + 2$ $\quad h(x) = -3(x+2)^2 + 2$

208. Wykorzystaj informacje z tabelki dotyczące szybkiego wyznaczania punktów należących do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$ i narysuj wykres funkcji $y = g(x)$.

x	-1	0	1
$f(x) = ax^2$	a	0	a
$(x, f(x))$	$(-1, a)$	$(0, 0)$	$(1, a)$

a) $g(x) = 3(x-1)^2 + 2$ $\quad$ b) $g(x) = -2(x+1)^2 - 3$ $\quad$ c) $g(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

209. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem danej funkcji.

a) $f(x) = 3x^2 - 2$ $\quad$ b) $f(x) = -2x^2 + 1$ $\quad$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$

d) $f(x) = -(x+2)^2$ $\quad$ e) $f(x) = -3(x-1)^2$ $\quad$ f) $f(x) = -7(x+2)^2 - 5$

210. Opisz położenie paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdy:

a) $a > 0$ i $q > 0$, $\quad$ b) $a < 0$ i $q > 0$,

c) $p = 0$, $q = 0$ i $a > 0$, $\quad$ d) $p = 0$, $q = 0$ i $a < 0$.

211. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, mając dane:

a) wierzchołek $W = (2, 6)$ i punkt $A = (1, 7)$ należący do wykresu tej funkcji,

b) punkty $A = (0, 2)$ i $B = (8, 5)$ należące do wykresu funkcji oraz prostą $x = 3$ będącą osią symetrii wykresu,

c) punkty $A = \left(-2, \frac{5}{8}\right)$ i $B = \left(2, \frac{5}{8}\right)$ należące do wykresu funkcji oraz $f(0) = 0$,

d) oś symetrii wykresu $x = 2$ oraz $f(-1) = -6$ i $f(3) = 1$.

212. Wysokość, jaką uzyskuje kula wystrzelona pionowo do góry z prędkością 150 m/s po czasie t sekund wyraża w przybliżeniu funkcja $h(t) = 150t - 4{,}9t^2$.

a) Jaką maksymalną wysokość osiągnie kula w trakcie lotu?

b) Po jakim czasie kula spadnie na ziemię?

213. Dane są funkcje: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$, $g(x) = -3(x+2)^2$, $h(x) = 2(x-1)^2 + 4$.

a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

b) Napisz równania osi symetrii wykresów funkcji.

c) Zapisz funkcje w postaci iloczynowej.

d) Oreśl, czy funkcje osiągają wartość najmniejszą, czy – największą, oraz podaj tę wartość.

e) Określ argumenty, dla których funkcje osiągają wartości najmniejsze lub największe.

214. Dla podanej funkcji wyznacz przedziały monotoniczności oraz podaj wartość największą lub najmniejszą. Jeśli to możliwe, przedstaw funkcję w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 + 4x + 4$ b) $y = 2x^2 - 3x + 2$ c) $y = -6x^2 + 12x - 10$

215. Dana jest funkcja $y = 2x^2 - 1$.

a) Który z punktów $A = (1,\ 1)$, $B = (2,\ 8)$ czy $C = (-2,\ 7)$ należy do wykresu tej funkcji?
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji oraz zapisz ją w postaci iloczynowej.
c) Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji.
d) Dla punktu, który należy do wykresu funkcji, znajdź punkt symetryczny względem osi symetrii wykresu.

216. Zbadaj liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej.

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$ c) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

217. Jeśli pewien obiekt porusza się pionowo i startuje z prędkością v metrów na sekundę, a ruch rozpoczyna się na wysokości H metrów, to wysokość, na jakiej znajdzie się obiekt po t sekundach, opisuje się wzorem $h(t) = vt - 4{,}9t^2 + H$. Możemy ten wzór wykorzystać do matematycznego opisu wysokości, na jaką podskoczy koszykarz. Jeśli przyjmiemy, że zawodnik porusza się z prędkością 6 m/s i skok z piłką pod koszem rozpoczyna się na parkiecie boiska, to wzór przyjmuje prostszą postać $h(t) = 6t - 4{,}9t^2$.

a) Na jaką maksymalną wysokość podskoczy koszykarz?
b) Wyznacz, na jakiej wysokości od podłogi znajduje się koszykarz po 1 sekundzie od momentu podskoku.
c) Po jakim czasie zawodnik opadnie na parkiet boiska?

218. Zawodnik o wzroście 1,98 m wyrzucił piłkę znad głowy z prędkością 16,9 m/s. Na jaką wysokość została wyrzucona piłka? Jak długo piłka była w powietrzu, zanim została złapana?

219. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w danym przedziale.

a) $f(x) = x^2 - 12x + 10,\ \langle 1;\ 8\rangle$ b) $f(x) = -7x^2 + 3x + 4,\ \langle \sqrt{2};\ 6\rangle$
c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3,\ \langle -1;\ 3\rangle$ d) $f(x) = 2x^2 - 7x - 5,\ \langle 1{,}5;\ 5\rangle$

220. Wyznacz wartości współczynników a, b tak, aby funkcja f była rosnąca w przedziale $(-\infty;\ 4\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 4;\ +\infty)$. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ w przedziale $\langle 1;\ 5\rangle$,
b) $f(x) = -2x^2 + bx + 2$ w przedziale $\langle 3;\ 6\rangle$.

221. Wyznacz wartości współczynników a, b tak, aby funkcja f była malejąca w przedziale $(-\infty;\ -2\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -2;\ +\infty)$. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - 8$ w przedziale $\langle -4;\ 0\rangle$,
b) $f(x) = ax^2 + 3x + 7$ w przedziale $\langle -1;\ 1\rangle$.

222. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ określonej w zbiorze liczb rzeczywistych następująco: $f(x) = x^2 + x - 6$ dla $x \in (-\infty;\ 3)$ oraz $f(x) = 2x + 12$ dla $x \in \langle 3;\ +\infty)$. Na podstawie wykresu:

a) wyznacz, dla jakich argumentów funkcja jest malejąca, a dla jakich – rosnąca,
b) podaj miejsca zerowe funkcji,
c) odczytaj zbiór, w którym funkcja osiąga wartości niedodatnie.

223. Wiedząc, że do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ należą punkty $A = (1, -5)$, $B = (2, 0)$ i $C = (3, 7)$, wyznacz współczynniki a, b, c. Podaj zbiór wartości funkcji oraz przedziały monotoniczności.

224. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej miejscami zerowymi są $x_1 = -3$ i $x_2 = 5$ oraz że do wykresu funkcji należy punkt $P = (1, -4)$. Zbadaj monotoniczność funkcji w przedziale $\langle 0; +\infty)$.

225. Zanalizuj wartości, jakie przyjmuje funkcja f, i wyznacz (jeśli istnieje) jej najmniejszą lub największą wartość.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + x}$ c) $f(x) = \dfrac{-3}{2x^2 - x + 1}$

226. Funkcja kwadratowa $d(v) = 0{,}018v^2 + 1{,}2v + 150$ w przybliżeniu opisuje drogę hamowania pociągu osobowego w zależności od prędkości v wyrażonej w m/s.
a) Wyznacz prędkość, z jaką poruszał się pociąg, jeśli droga hamowania wynosiła 200 m.
b) Oblicz drogę hamowania pociągu poruszającego się z prędkością 100 km/h.

227. Janek i Piotr wyruszyli z miejsca biwakowania do schroniska odległego o 3 km dwiema różnymi drogami. Piotr szedł o 0,5 km/h szybciej niż Janek. Janek na swojej drodze spotkał turystów i rozmawiał z nimi 5 minut. W rezultacie Piotr przyszedł wcześniej i czekał na Janka 10 minut.
a) Z jaką prędkością każdy z chłopców pokonał drogę do schroniska?
b) Jak długo Janek i Piotr wędrowali do schroniska?

228. Funkcja kwadratowa $d(v) = 0{,}06v^2 + 0{,}4v + 20$ w przybliżeniu opisuje drogę hamowania motocykla w zależności od prędkości v wyrażonej w m/s. Wyznacz prędkość, z jaką jechał motocyklista, jeśli droga hamowania wynosiła 50 m.

229. W hipermarkecie „Dobry Zakup” ogłoszono wyprzedaż. Liczbę klientów L, którzy odwiedzili hipermarket, w przybliżeniu opisuje funkcja $L(n) = -10n^2 + 100n + 1250$, gdzie n oznacza kolejną godzinę otwarcia w ciągu doby. Sklep otwarty był od godz. 10^{00} do godz. 18^{00}. O której godzinie w sklepie było najwięcej klientów?

230. Firma „Dwa Kółka” sprzedaje motocykle. Dotychczas co tydzień znajdowano nabywców 20 motocykli po 8400 zł każdy. Pracownik firmy poszukuje klientów i za każdego pozyskanego nabywcę otrzymuje wynagrodzenie o wartości 600 zł. Firma stara się uzyskać maksymalny zysk ze swej działalności. Dział marketingu przewiduje, że każda kolejna podwyżka ceny motocykla o 300 zł spowoduje spadek sprzedaży o jeden motocykl w ciągu tygodnia. Jaką cenę powinien zaproponować dział marketingu, aby firma osiągnęła maksymalny zysk tygodniowy?

231. Taśmą długości 60 cm obszyto dwie kwadratowe serwetki (pomijamy szerokość taśmy). Jakie wymiary mają te serwetki, jeśli ich łączna powierzchnia jest najmniejsza i wykorzystano całą taśmę?

232. Dochód dzienny w zakładzie produkującym okna można wyrazić za pomocą wzoru $d(n) = 100n - 5000 - 0{,}3n^2$, gdzie n to dzienna liczba wyprodukowanych okien.
a) Ile co najmniej okien dziennie powinien produkować zakład, aby osiągać zysk?
b) Czy opłacalne jest zwiększenie produkcji dziennej z 60 okien do 90? Czy opłacalne będzie również zwiększenie produkcji dziennej ze 150 do 190 okien?
c) Przy jakiej produkcji zakład ten może uzyskać największy dzienny dochód?

233. Rozwiąż równanie.
a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $2(4 - t)^2 = t + 2$ c) $\frac{2}{3}(a + 1) + a^2 = 1{,}5(1 - a)$

234. Funkcja f opisana jest wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 15$. Znajdź taki argument m, że $f(m) = m$.

235. Funkcja g opisana jest wzorem $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Znajdź taki argument p, że $g(p - 1) = g(2p)$.

236. Funkcja h opisana jest wzorem $h(x) = x^2 - 2x + 14$. Znajdź taki argument m, że $h(3m - 2) = 3h(m) - 2$.

237. Wysokość trójkąta równoramiennego stanowi 60% długości podstawy. Wyznacz długość ramienia trójkąta, jeżeli jego pole wynosi 30 cm^2.

238. Pierwszym człowiekiem, który za pomocą własnoręcznie skonstruowanego mikroskopu zobaczył świat mikroorganizmów, był Antonie van Leeuwenhoek. Dokładnie 205 lat później Robert Koch odkrył prątki gruźlicy. Wyznacz rok pierwszego i drugiego wydarzenia, wiedząc, że iloczyn liczb określających lata tych wydarzeń wynosi 3 156 114.

239. Jeżeli średnicę przewodu elektrycznego zwiększymy o 8 mm, to pole przekroju poprzecznego zwiększy się dziewięć razy. Oblicz promień przekroju poprzecznego przewodu.

240. Rozwiąż nierówność.
a) $2x \leqslant 3x^2$ b) $-(5 - x)(2x + 3) < 0$ c) $(x^2 - 5x + 4)(1 - 2x + x^2) \leqslant 0$

241. Rozwiąż nierówność.
a) $x^2 - \sqrt{3}x > 0$ b) $8x - 16 \leqslant x^2$ c) $2x - x^2 > 1$ d) $x^2 + 2x < 3$

242. Wypisz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $x(x - 2) < 8$.

243. Rozwiąż nierówności $x^2 - 2x + 3 \geqslant 3$ oraz $x^2 < 5$. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do zbiorów rozwiązań obu nierówności.

244. Rozwiąż nierówności $(x^2 - x + 2)(3 - 2x - x^2) \geqslant 0$ oraz $x^2 - 1 < 3$. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą spełniającą obie nierówności.

245. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.
a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{2x^2 + 3x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{x^2 + x + 3}}$

246. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $P = (4, -1)$. Wiedząc, że $f(0) = 15$, rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant 0$.

247. Dom i garaż wybudowano na planie kwadratów. Szerokość ściany domu jest o 6 m dłuższa od szerokości ściany garażu. Całkowita powierzchnia domu i garażu wynosi 180 m^2. Jakie wymiary ma dom, a jakie – garaż?

248. Rabatę kwiatową w kształcie kwadratu o boku 16 m podzielono prostymi równoległymi do przekątnej kwadratu na trzy części.

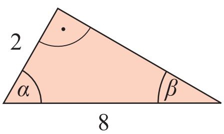
a) Oblicz odległość między prostymi równoległymi, jeżeli powstałe części mają równe pola.

b) W środkowej części rabaty posadzono tulipany, a w dwóch pozostałych częściach hiacynty. Jaka powinna być odległość między prostymi równoległymi, aby pole powierzchni, na której rosną tulipany, było nie większe od pola, na którym rosną hiacynty?

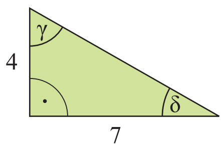
249. Dany jest sześcian o krawędzi a oraz prostopadłościan o krawędziach $a + 1$, $a - 2$, $a + 2$. Dla jakich wartości a objętość sześcianu jest większa od objętości prostopadłościanu?

250. Oblicz sinus, cosinus i tangens kątów ostrych zaznaczonych na rysunku.

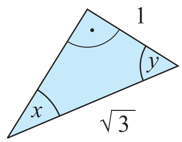
a)



b)

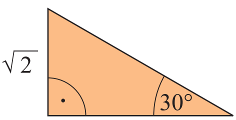


c)

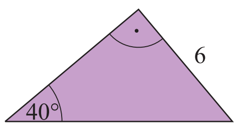


251. Rozwiąż trójkąt prostokątny, tzn. oblicz brakujące długości boków i miarę drugiego kąta ostrego.

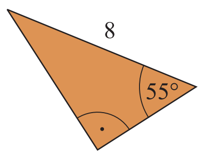
a)



b)

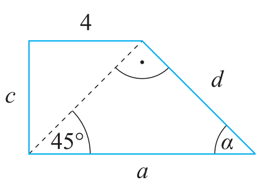


c)

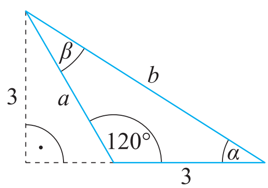


252. Oblicz długości boków oraz miary kątów figury.

a)



b)



253. Skonstruuj trójkąt prostokątny taki, że:

a) tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{3}{4}$,

b) sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{4}{7}$,

c) cosinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{2}$.

254. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych α i β w trójkącie, jaki tworzy prosta o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 6$ z osiami układu współrzędnych.

255. Prosta k zawiera ramię końcowe kąta przechodzące przez punkt $P = (-3, 5)$. Wyznacz równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $A = (-5, -1)$.

256. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, jaki prosta o równaniu $y = 2x - 3$ tworzy z osią y.

257. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 12 dm i 6 dm. Oblicz obwód i pole trapezu, wiedząc, że przekątna trapezu dzieli kąt o mierze 60° przy dłuższej podstawie na połowy.

258. W trapezie równoramiennym $ABCD$ długości ramienia, podstawy górnej i podstawy dolnej są odpowiednio równe 4 cm, 8 cm, 12 cm. Oblicz miary kątów w trapezie.

259. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych lub kalkulatora, odczytaj wartości sinusa, cosinusa i tangensa następujących kątów: 5°, 12°, 27°, 36°, 49°, 65°, 83°, 115°, 130°, 155°, 170°. Sformułuj wniosek dotyczący wartości poszczególnych funkcji trygonometrycznych w zależności od miary kąta.

260. Oblicz $(\sin 150^\circ + \cos 120^\circ)^2 \cdot \operatorname{tg} 150^\circ - (\sin 120^\circ + \cos 150^\circ)^2 \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$.

261. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)(\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \sin\alpha \cdot \cos\beta)$ dla $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$.

262. Oblicz:

a) $\sin^2 23^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ + \cos^2 23^\circ$,

b) $\cos^2 34^\circ - \operatorname{tg} 16^\circ \cdot \operatorname{tg} 106^\circ + \cos^2 56^\circ$,

c) $\dfrac{\sin^2 48^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ + \sin^2 42^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 63^\circ}$,

d) $\sin^2 16^\circ + \operatorname{tg}^2 106^\circ \cdot \sin^2 16^\circ$.

263. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha + \cos^3\alpha$

b) $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

c) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \cdot (1 - \cos^2\alpha)$

d) $\dfrac{(\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}$

264. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi.

a) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \sin^2\alpha$

c) $\dfrac{1}{1 - \cos\alpha} + \dfrac{1}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

d) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$

265. Wiedząc, że α jest kątem ostrym, sprawdź, czy $\sin\alpha$ może być równy:

a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{9}{8}$, c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$, d) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 2}$.

266. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeżeli:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, d) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 4$.

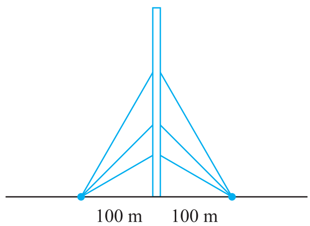
267. Droga prowadzi przez tereny pagórkowate. Na odcinku o długości 2 km obniża się pod kątem 6°. Jaka jest różnica poziomów początku i końca tego odcinka drogi?

268. Narciarska trasa zjazdowa ma długość 480 m. Różnica poziomów początku i końca trasy wynosi 160 m. Oblicz miarę kąta nachylenia tej trasy.

269. Szlak górski wznosi się na odcinku pomiędzy dwoma schroniskami pod kątem 34°. Odległość pomiędzy schroniskami wynosi 1650 m. Jaka jest różnica poziomów położenia schronisk?

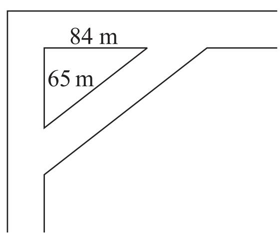
270. Górska kolejka linowa pierwszą część trasy, do połowy wysokości góry, pokonuje pod kątem 42°, a następną część – pod kątem 26°. Stacja końcowa kolejki, znajdująca się na szczycie góry, jest położona o 1250 m wyżej niż stacja początkowa, u podnóża góry. Jaka jest długość trasy kolejki górskiej?

271. Maszt nadajnika telewizyjnego jest podtrzymywany przez liny. Końce tych lin są zakotwiczone w betonowych blokach ustawionych w odległości 100 m od masztu. Z każdego bloku prowadzą do masztu 3 liny nachylone do poziomu odpowiednio pod kątami 30°, 45°, 60°. Oblicz długość każdej liny oraz wysokości, na jakich są one mocowane.



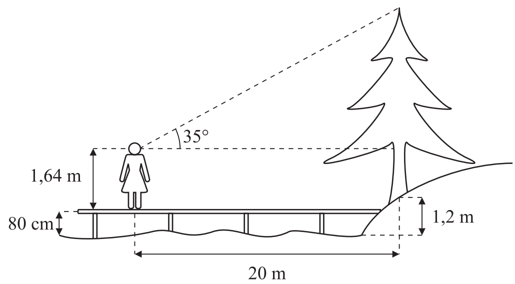
272. Chłopcy postanowili zmierzyć wysokość wzgórza. W tym celu zaznaczyli na płaskim terenie dwa punkty odległe od siebie o 200 m. Wierzchołek wzgórza i zaznaczone dwa punkty leżą w płaszczyźnie prostopadłej do poziomu. Z tych punktów widać wierzchołek wzgórza odpowiednio pod kątami 35° i 40°. Jaka jest wysokość wzgórza?

273. Dwie drogi osiedlowe są prostopadłe. Wybudowano między nimi w linii prostej chodnik, który łączy jedną drogę (w odległości 65 m od skrzyżowania) z drugą (w odległości 84 m od skrzyżowania). Jakie kąty tworzy chodnik z drogami? Jaka jest długość chodnika?



274. Latarnia morska ma wysokość 35 m. Prom pasażerski i statek handlowy płyną tym samym kursem w kierunku latarni. Z promu światło latarni widać pod kątem 4°, a ze statku handlowego – pod kątem 15°. W jakiej odległości od statku handlowego płynie prom pasażerski?

275. Na brzegu jeziora, na wysokości 1,2 m od powierzchni wody rośnie drzewo. Ewa stoi na pomoście w odległości 20 m od drzewa. Pomost wystaje nad powierzchnię wody 80 cm. Jaka jest wysokość drzewa, jeżeli jego wierzchołek Ewa widzi pod kątem 35°, a jej oczy znajdują się na wysokości 1,64 m od pomostu? Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.



276. Długość jednego z boków równoległoboku jest równa 14. Wysokość równoległoboku poprowadzona z wierzchołka na ten bok dzieli go na połowy. Kąt rozwarty równoległoboku ma miarę 150°. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

277. Przekątne równoległoboku mają długości 6 i 8, a dłuższy bok jest równy $\sqrt{37}$. Jeden z kątów, pod jakim przecinają się te przekątne, ma miarę 120°. Oblicz wysokość równoległoboku.

Wartości funkcji trygonometrycznych

kąt α	sin α	cos α	tg α
0°	0,0000	1,0000	0,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

kąt α	sin α	cos α	tg α
45°	0,7071	0,7071	1,0000
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1,0000	0,0000	nie istnieje

1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

1.1. Język matematyki (s. 18). **1.** a) P b) P c) P d) F **2.** a) $-3 > 0$, F b) $5^0 \neq 5$, P c) $\sqrt{17} < 4$, F d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = 2$, P e) $\sqrt{4+9} \neq 5$, P f) $\frac{5}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \geqslant 1$, F **5.** Karolina

1.2. Zbiory i działania na zbiorach (s. 22). **3.** a) $\{-5, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ c) $\varnothing$ d) $\{2, 4, 6, 8\}$ **4.** $\{-1, 0, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0\}, \{1\}, \{-1\}, \{0\}, \varnothing$ **5.** 0, 1, 2, 3, 4 **6.** $A \setminus B$ **8.** 9 – tylko samochodem, 1 – tylko autobusem, 0 – tylko rowerem **9.** 0
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 23) **1.** D **2.** C **3.** $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42\}$, $A \cap B = \{3, 6, 9, 12, 18, 36\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$, $B \setminus A = \{0, 15, 21, 24, 27, 30, 33, 39, 42\}$ **4.** $A \cup B = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$, $A \setminus B = \{-3, -1, 7\}$, $B \setminus A = \varnothing$ **5.** 0, 1, 2 **6.** 9

1.3. Liczby naturalne i liczby całkowite (s. 28). **1.** D **2.** D **3.** C
4. a) 666, 810, 1728 b) 352, 448, 1456, 1728 c) 666, 810, 1728 d) 666, 810, 1728
5. a) $7^2 \cdot 2$, $\{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$ b) $2^2 \cdot 31$, $\{1, 2, 4, 31, 62, 124\}$
c) $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$, $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 23, 42, 46, 69, 161, 322, 483, 966\}$
d) $2^6 \cdot 3 \cdot 7$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 32, 42, 48, 56, 64, 84, 96, 112, 168, 192, 224, 336, 448, 672, 1344\}$ **7.** 2268
10. a) $98 = 79 + 19$ b) $184 = 173 + 11$ c) $300 = 281 + 19$ d) $480 = 421 + 59$
11. a) 100 b) 1 min 20 s **12.** a) 173 b) 647 c) 1549 d) 2221 **13.** 720, nie
14. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, ..., 98\}$, $A \cap B = \{10, 13, 16, ..., 97\}$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{0, 1, 2, ..., 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, ..., 95, 96, 98\}$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 29) **1.** D **2.** $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{3, 5, 7, 11, ...\}$, $B \setminus A = \{0, 4, 6, 8, ...\}$ **3.** 1, 3, 11, 23, 33, 69, 253, 759 **4.** 1526 **5.** 0

1.4. Liczby wymierne i liczby niewymierne (s. 34). **1.** C **2.** D **3.** C **4.** A
6. a) nie b) nie c) tak d) nie **7.** a) $\frac{2}{15}, \frac{4}{29}, \frac{3}{20}$ b) $-\frac{3}{13}, -\frac{4}{19}, -\frac{6}{53}$ **8.** a) -4 b) $1\frac{67}{144}$ c) $1\frac{19}{24}$ d) $\frac{1}{24}$ **9.** a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{1347}{1000}$ c) 1 d) $\frac{4091}{990}$ **10.** a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ b) $1, 2, 3, 4$ c) $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 35) **1.** C **3.** 178 cm **4.** $3\frac{2}{13} < 3\frac{11}{57}$
5. $\frac{2}{37} = \frac{1}{19} + \frac{1}{703}$

1.5. Liczby rzeczywiste (s. 37). **1.** C **2.** A **3.** C **4.** A **5.** a) 0 b) $10\frac{5}{7}$ c) $-3\frac{29}{72}$ d) $14\frac{8}{11}$ **6.** a) $0, \sqrt{9}$ b) $0, -3, \sqrt{9}$ c) $0, -3, \frac{1}{3}, \sqrt{9}, \left(-\frac{1}{3}\right)^2, -2\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{7}$ **8.** a) $\boldsymbol{C}$ b) $\boldsymbol{N}$ c) $\boldsymbol{C}_-$ d) $\boldsymbol{R}$ **10.** a) 40 cm b) $26\frac{2}{3}$ cm **11.** $v_Z \approx 7{,}91\frac{\text{km}}{\text{s}}$, $v_M \approx 3{,}54\frac{\text{km}}{\text{s}}$ **12.** 11 900 zł
13. a) $4\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{3}$ c) 6
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 39) **1.** D **2.** a) 7 b) 0,5 c) 0,75 **3.** 190,80 zł
4. $773\frac{1}{3}$ km

1.6. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza (s. 43). **1.** C **2.** B **3.** B
4. C **5.** D **6.** D **8.** a) $\frac{1}{6}$ b) $7\frac{1}{7}$ c) 1 **9.** a) 1 b) $1\frac{7}{9}$ c) -1 **10.** a) 3^4 b) 2^{-4}
c) 2^0 **12.** $7{,}92 \cdot 10^{12}$ lat **13.** a) ok. $1{,}37 \cdot 10^0$ parseka b) $2{,}384046 \cdot 10^{19}$ km

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 45) **1.** C **2.** $\left(3\frac{3}{4}\right)^{-1}$, $(3{,}97)^0$, $\left(-1\frac{2}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{3}{11}\right)^{-2}$, $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$
3. Wskazówka: Zbadaj różnicę tych liczb. pierwsza liczba
4. a) $9\frac{1}{4}$ b) $1\frac{9}{17}$ c) 216 **5.** Wskazówka: Jeżeli dwie potęgi o tych samych podstawach są równe, to ich wykładniki też są równe. 5 **6.** a) $5 \cdot 10^0$ b) $1{,}175 \cdot 10^{15}$ c) 0,0321722

1.7. Wzory skróconego mnożenia (s. 48). **1.** A **2.** B **3.** C
5. a) $(5a + 4b)(5a - 4b)$, $(4x^2 + 6y)(4x^2 - 6y)$, $\left(2\sqrt{2}a^3 + 5\right)\left(2\sqrt{2}a^3 - 5\right)$
b) $(x - y + 3)(x - y - 3)$, $\left[11xy + (2a + 3b)\right]\left[11xy - (2a + 3b)\right]$, $\left(\frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{9}\right)\left(\frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{9}\right)$
6. a) $\left(\frac{1}{2}a - 3b\right)^2$ b) $(0{,}1x + 10)^2$ c) $(2ab - 7a)^2$ f) $(x - 11)^2$ **7.** a) $p = 12$ b) $p = 4$
c) $p = 9$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 49) **1.** C **2.** a) $25x^2 - 70xy + 49y^2$
b) $27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3$ c) $4a^2 - 9$ d) $0{,}25a^2 + 4ab + 16b^2$
e) $4a^2 - 12ab + 9b^2$ f) $x^4 - 6x^2 + 9$ **3.** a) $12\left(x - y\sqrt{2}\right)\left(x + y\sqrt{2}\right)$
b) $\left(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{5}y\right)$ c) $(x - 7)^2$ d) $\left(\sqrt{1{,}25}x - 9\right)\left(\sqrt{1{,}25}x + 9\right)$
e) $\left(2\sqrt{3}x - \frac{y}{7}\right)\left(2\sqrt{3}x + \frac{y}{7}\right)$ f) $\frac{20}{9}\left(a - \sqrt{2}b\right)\left(a + \sqrt{2}b\right)$ **4.** $5k^2 + 10k$, $20\left(3 + \sqrt{3}\right)$
5. $24x^2 + 4x - 5$

1.8. Pierwiastek dowolnego stopnia (s. 53). **1.** A **2.** C **3.** D **4.** $\sqrt[5]{12}$
5. a) 6 b) 4 c) -7 d) 18 **7.** a) $16\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{7} - 12\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$
d) $12\sqrt[3]{2} + 33$ **8.** a) -2 b) $65 - 6\sqrt{14}$ c) $18 + 12\sqrt{2}$ d) $4\sqrt[3]{9} + 12\sqrt[3]{6} + 9\sqrt[3]{4}$
9. a) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ b) $\frac{4\sqrt{2} - 1}{5}$ c) $\frac{\sqrt{39} - 13}{39}$ d) $\frac{12 + 3\sqrt{3}}{13}$ e) $\frac{\sqrt{35} - \sqrt{15}}{2}$ f) $\frac{9\sqrt{15} + 6\sqrt{6} + 4\sqrt{10} + 30}{37}$
10. $x + y = 5 + \sqrt{5}$, $x - y = 1 - 5\sqrt{5}$, $xy = -24 + 5\sqrt{5}$, $\frac{x}{y} = -\frac{36}{41} + \frac{13}{41}\sqrt{5}$
11. $6\sqrt{3} - 3\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{216}$, $3 + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{6}$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ **12.** pierwsza liczba mniejsza
13. $2\sqrt{6}$ **14.** $\sqrt{39}$ **15.** a) $r\sqrt{\pi}$ b) $r\sqrt{2\pi}$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 55) **1.** B **2.** B **3.** a) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$
b) $98 - 24\sqrt{5}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ **5.** $1\frac{12}{19} + \frac{10}{19}\sqrt{6}$ **6.** a) $-6 + 3\sqrt{3} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}$ b) $-4 \in \boldsymbol{W}$
c) $-6 \in \boldsymbol{W}$ d) $9 - \sqrt{3} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W}$

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym (s. 60). **1.** D **2.** B **3.** C **4.** D
5. a) 15, 6, $-7\frac{7}{8}$ b) $3\frac{1}{2}$, $9\frac{26}{27}$ c) $3\frac{8}{9}$, $-3\frac{7}{12}$ **6.** a) $1\frac{1}{4}$ b) -3 c) 7,5
7. a) a^0 b) $3^3 \cdot 2^{-1} \cdot a^{-\frac{1}{4}}$ c) $a^{\frac{37}{2}} \cdot b^{-\frac{17}{2}}$ **8.** a) 4 b) 8 c) 0,125 **10.** $2 = 2$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 61) **1.** C **2.** B **3.** a) 27 b) $\frac{\sqrt[5]{4}}{2}$ c) $-6\frac{5}{12}$
4. a) $7^{\frac{33}{20}}$ b) $a^{-7k-\frac{1}{4}}$

1.10. Procenty (s. 65). **1.** A **2.** B **3.** a) 5 207 875 b) ok. 11,96% **4.** ok. 2,69%, ok. 0,62%
5. Czechy – ok. 22,67%, Litwa – ok. 2,96%, morska – ok. 12,53% **6.** 43,05 zł **7.** 2000 zł
8. pierwszy sklep, o 46,15% **9.** o 7,5% **10.** ok. 30,7% **13.** A – ok. 68,2%, B – ok. 23,6%, o ok. 44,6, o ok. 189%
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 67) **1.** A **2.** B **3.** 10,4% **4.** 600 zł **5.** podwyżka o ok. 6,67% **6.** o 17,65%

1.11. Przedziały liczbowe (s. 71). **1.** C **2.** D **3.** C **7.** a) $\{0, 1\}$ b) $(0; 2\rangle$
c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **8.** a) $C \cap D$ b) $(D \setminus C) \setminus B$ c) $(C \cup B) \setminus A$ d) $D \setminus B$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 72) **1.** C **2.** D **3.** a) $(6; 7\rangle$ b) $(-\infty; 5)$ c) $\{0, 1, 2, 3\}$
5. a) $(-2; -1) \cup (-1; 0)$ b) $\{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

1.12. Wartość bezwzględna (s. 77). **1.** A **2.** C **3.** a) $\frac{1}{27}, 0, \sqrt{5} - 2$ b) $\sqrt{5} - 2, 3 - \sqrt{3}, 8\frac{7}{8}$
4. a) $2 + 3\pi$ b) $3 - \sqrt{2}$ c) 5 **6.** a) $x \geqslant 0$ b) $x = 0$ c) $x \leqslant 0$
10. a) $x \in (-\infty; -8\rangle \cup \langle 2; +\infty)$ b) $x \in (1; 3)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$ **11.** n – nieparzyste, $a < 0$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 78) **1.** B **2.** B **3.** $3\sqrt{2} + \frac{5}{36} - \sqrt{11}$ **4.** pierwsza
6. a) $x = -31$ b) $-10, 12$ c) $x \in (-\infty; -31) \cup (-31; +\infty)$

1.13. Błąd przybliżenia (s. 80). **1.** D **2.** a) 0,0231 b) 0,0142 c) 0,0018
3. brat Magdy – należy wlać ok. 50,6 l wody **4.** a) $\frac{2}{11}$ b) $\frac{2}{9}$ **5.** $\frac{209}{340}$ lub $\frac{231}{340}$
6. 0,4, 1,2% **7.** średnica $\in (17{,}99; 18{,}01)$ mm, długość $\in (25{,}98; 26{,}02)$ mm
8. ok. 32,5 km, 9,23%
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 82) **1.** C **2.** D **3.** 17,87 **4.** 5,9%
5. 250, 70, 1250; $1 < 3 < 5$

1.14. Pojęcie logarytmu (s. 87). **1.** D **2.** B **3.** D **5.** a) $\frac{1}{2}, 0, 5$ b) $-4, 6, \frac{1}{4}$
6. a) 8, 4, 256, $\sqrt[3]{100}, \frac{\sqrt{10}}{10}$ b) 3, 2, 2, 27, 27 c) $3\frac{1}{2}$, pozostałe: $x \in \boldsymbol{R}_+ \setminus \{1\}$ **7.** a) 4 b) 7
c) 4 d) 1 **8.** a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$, $\log_3 27^2$, $\log_4 16^4$, $\log_5 125^3$ b) $\log_2 \sqrt[7]{8}, \log_3 \sqrt[4]{27}$,
$\log \sqrt[3]{10\,000}, \log_3 81^7$ **9.** ok. 300 kPa **10.** a) 1 b) 19 c) $\frac{1}{10}$ d) 16 e) 10 f) 9
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 88) **1.** C **2.** C **3.** a) -3 b) -4 c) 6 d) 5 **4.** 8
5. $\log_2 \sqrt[4]{\frac{a^2b^6}{c^3}}$ **6.** 8

A gdyby matura była teraz? (s. 89)
1. A **2.** C **3.** C **4.** C **5.** B **6.** $a \in \langle 2; 3)$ **7.** a) 2 b) $-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5$
c) $-4, -3, -2, -1$ **8.** $\frac{11}{27}$ **9.** $43 - 23\sqrt{2}$ **10.** 9,9 kg **11.** $5 - 4\sqrt{7}$
12. $1 \cdot 10^{-9}$ **13.** c) **16.** 161,29 m^2 **17.** a) 25,48 m b) wydłuży się o ok. 65,31%

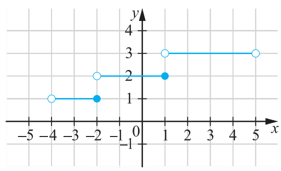
2. Funkcja i jej własności

2.1. Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji (s. 97). **1.** A **2.** C **3.** B **8.** b) $D = (-5; 3\rangle, Z_w = (-2; 4\rangle$ c) $D = (-5; 3\rangle, Z_w = (-2; 2\rangle$ **9.** f: a) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, Z_w = \{0, 1, 2, 3\}$ b) (0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 2) c) –2 i 3 – tak d) dla $x = 0$ i $x = 1$; g: a) $D = \langle -3; 4\rangle \setminus \{-2\}, Z_w = \langle -3; 2) \cup \{0, 2\}$ b) $(-3, -3), (0, 2), (3, 0), (4, 0)$ c) 3 – tak d) dla $x \in \langle 3; 4\rangle$; h: a) $D = \langle -5; 5\rangle, Z_w = \langle -4; 3\rangle$ b) $(-5, -2), (-2, -3), (0, -4), (3, 0)$ c) tak d) dla $x = -4{,}5, x = 3$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 100) **1.** A **2.** np. $y = \frac{1}{2}x^2, x \in \{0, 1, ..., 9\}$ **3.** $Z_w = \{-9, -5, -1, 3, 7, 11\}$

2.2. Wykres funkcji. Dziedzina i zbiór wartości funkcji (s. 104). **1.** C **2.** D **3.** a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, Z_w = \{-1, 2\}, 2, -1, 2, -1$ b) $D = (-4; 5), Z_w = \{-2, 0, 2\}, 0, 0, 0, -2$ c) $D = (-4; -2) \cup \langle -1; 1\rangle \cup \langle 2; 4), Z_w = \langle -2; 4\rangle, -2, 0, -2, 0$ d) $D = \langle -10; 15\rangle, Z_w = \langle -15; 10\rangle, 10, 10, 10, 10$ **6.** a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}, Z_w = \{-1, 0, 1, 2\}, 1, 3$ b) $D = (-3; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; 5), Z_w = \{-2, 0, 2\}, 0$ c) $D = (-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4), Z_w = (-2; 1) \cup \langle 2; 4), -3, 3$ d) $D = \langle -4; 4\rangle, Z_w = \langle -3; 3\rangle, -1, 3$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 106) **1.** C **2.** $D = \{-5, -4\} \cup \langle -3; 4), Z_w = (-1; 5)$, m. zerowe: $x \in \langle -3; -1\rangle$ i $x = 2$ **4.** np.



2.3. Wzór funkcji. Dziedzina i zbiór wartości funkcji (s. 110). **1.** C **2.** D **3.** D **5.** a) $D = \boldsymbol{R}, Z_w = \langle 1; +\infty)$ b) $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), Z_w = (0; +\infty)$ c) $D = \boldsymbol{R}, Z_w = \boldsymbol{R}$ d) $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), Z_w = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ **8.** a) 2, –2 b) –3 c) brak d) brak **9.** a) $Z_w = \{-5, -1, 3, 7, 11\}$ b) $Z_w = \{-18, -4, 5\sqrt{2} - 6, 3\sqrt{5} - 5, 2\}$ c) $Z_w = \langle 2; 2\sqrt{3}\rangle$ d) $Z_w = (-2; +\infty)$ e) $Z_w = \{-3, \sqrt[3]{-9}, 0, \sqrt[3]{9}, 3\}$ **10.** a) $Z_w = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ b) $Z_w = \{-1, 4, 9, 14, ...\}$ c) $Z_w = \{..., -16, -13, -10, -7\}$ **11.** $y = x(50 - x), D = (0; 50)$ **12.** a)

x	50	100	200
y	3	6	12

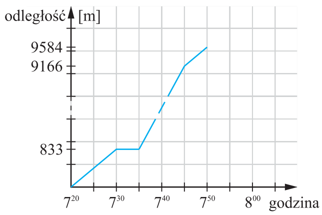
b) $D = \langle 0; 800\rangle$ c) 30 l d) ok. 717 km e) tak

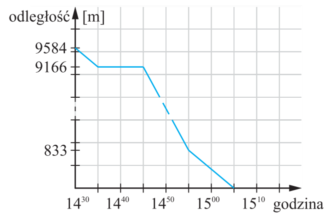
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 111) **1.** C **2.** B **3.** a) $D = \boldsymbol{R}$ b) $D = \langle -9; +\infty)$ c) $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-2\}$ **4.** a) 4 b) –4 c) 3 **5.** $Z_w = \{1 - 3\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\}$

2.4. Monotoniczność funkcji (s. 115). **1.** B **2.** C **6.** *B* **7.** a) stała dla $x \in \langle -6; 4)$ oraz $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$, malejąca dla $x \in (1; 5\rangle$ b) rosnąca dla $x \in \langle -3; 0\rangle$ oraz $x \in \langle 3; 4\rangle$, malejąca dla $x \in \langle -7; -3\rangle$, stała dla $x \in \langle 0; 3\rangle$ c) rosnąca dla $x \in (-4; -2\rangle$ oraz $x \in \langle 3; 5)$, stała dla $x \in \langle -2; 1)$, malejąca dla $x \in \langle 1; 3\rangle$ d) rosnąca dla $x \in \langle -6; 0) \setminus \{-5, -4, -3, -2, -1\}$, stała dla $x \in (0; 5\rangle \setminus \{3\}$

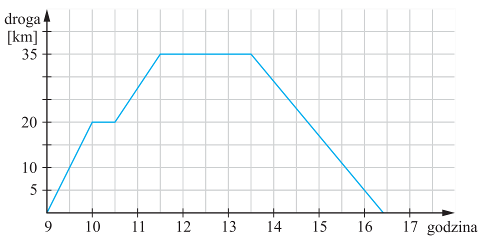
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 117) **1.** D **2.** C

2.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (s. 121). **1.** a) A b) D c) D d) C **2.** D
3. a) 5 km b) 2 km c) 40 min d) 20 km/h e) 5 min **4.** a) po 8 godz. b) o 6^{00} c) 36°
d) między 14^{00} a 18^{00} w piątek **6.** a) $y_{min} = -7$, $y_{max} = 7$ b) $y_{min} = 11$ c) $y_{min} = y_{max} = -3$
– wszystkie wartości są takie same d) $y_{min} = -\frac{1}{4}$ **8.** a) $y_{min} = f(12)$, $y_{max} = f(-5)$
b) $y_{min} = f(2)$, y_{max} – brak c) $y_{max} = f(-1)$, y_{min} – brak d) $y_{min} = y_{max}$ – wszystkie wartości są takie same
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 124) **1.** D **2.** B **3.** $y_{min} = -10$, $y_{max} = 24$
4. $y_{min} = f(5)$, y_{max} – brak

2.6. Rysowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach (s. 128). **1.** D **2.** C
6. a)


b)


A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 129) **1.** C **3.** dodatnie dla $x \in \langle -6; -4\rangle$ oraz $x \in (-3; 2)$, ujemne dla $x \in (-4; -3)$ oraz $x \in (2; 6\rangle$

2.7. Zastosowanie wiadomości o funkcjach w zadaniach praktycznych (s. 133).
1. a) P b) F c) F d) P (uwzględniając czas postoju) **2.** a) P b) P c) F d) P
3. a) 12 godz. b) 300 km c) 1 godz. d) o 200% e) 37,5 km/h **4.** a) 458 zł b) o ok. 12,5%
c) wzrost: II–III, V–VII, VIII–XII, spadek: I–II, III–V, VII–VIII **5.** a) dolar i euro – II
b) stosunek ten malał w okresach II–VIII i IX–XI, a rósł w okresach I–II, VIII–IX i XI–XII
c) II–XI; euro – zmiany analogiczne z wyjątkiem okresów: VI–VII, IX–XI (wzrost)
6. a) maksymalny zysk – 1644,58 zł, maksymalna strata – 3296,60 zł.
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 136) **1.** B
2.


o 16^{25}, 16 km/h

A gdyby matura była teraz? (s. 138)
1. D **2.** C **3.** D **4.** D **5.** C **6.** $Z_w = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, $x = -1$ **8.** funkcja może mieć np. jedno, dwa lub trzy m. zerowe **10.** $x = -2$, $f(x) = x + 2$, $D_f = \boldsymbol{R} \setminus \{2\}$
11. $y_{min} = 3$ **12.** a) 10 XI b) ok. 22,2% c) 25 XI d) o 10,19% **13.** $f(x) = x^2 - 4x$
14. $A = (-8; 4)$, $B = (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$, $A \cap B = (-8; -5) \cup (0; 4)$

3. Funkcja liniowa

3.1. Proporcjonalność prosta (s. 144). **1.** C **2.** D **3.** a) $\frac{n}{m}$ b) $\frac{y}{n}$ c) xn **4.** 2 h 20 min
5. z 90 kg **6.** a) 8,7 kg b) 9,6 q **7.** 435 kcal

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 145) **1.** D **2.** 165 km **3.** a) 228,75 zł b) $393\frac{27}{61}$ km **4.** 21 g krzemu, 24 g tlenu

3.2. Funkcja liniowa i jej własności (s. 152). **1.** A **2.** B **3.** C **4.** A **5.** należy do wykresu funkcji b) **6.** a) $y = -x - 2$ b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $y = 1{,}5$ e) $y = 4x - 1$ f) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ **10.** a) $(0,\ 3)$, $(-7{,}5,\ 0)$ b) $(0,\ -2)$, $(-8,\ 0)$ c) $(0,\ 3)$, $(3,\ 0)$ d) $(0,\ -4)$ **11.** a) $-\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ **12.** a) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{23}{4}$ b) $y = 0x - 1$ c) $y = 0{,}7x + 8{,}6$ d) $y = -1{,}2x - 0{,}2$ **13.** a) $y = -2x + 6$ b) $y = 3x$ c) $y = 4$ d) $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$ **14.** a) $-\frac{7}{4}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $-\frac{1}{10}$ d) nie ma takiego a e) -4 **15.** a) 1 b) $3\frac{2}{3}$ c) $-4\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) 6 **16.** a) 0 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 2, -2

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 154) **1.** C **2.** B **4.** a) $y = x - 4$ b) $y = \frac{3}{5}x - \frac{24}{5}$ **5.** h

3.3. Równoległość i prostopadłość prostych (s. 161). **1.** D **2.** A **3.** a) $3x - y + 4 = 0$ b) $\frac{1}{2}x - y + 4 = 0$ c) $x + 4y - 16 = 0$ d) $-3x - y + 4 = 0$ **4.** a) $y = -\frac{2}{3}x + 7$ b) $y = x + 1$ c) $y = 3x - 8$ **5.** a) $-4x - 3y - 5 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$ c) $2x + 11y = 0$ d) $2x + 11y + 22 = 0$ **6.** a) $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ b) $y = -x - 3$ c) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **7.** $D = (-6,\ 6)$, $BD\colon y = -\frac{1}{3}x + 4$, $AD\colon y = -3x - 12$ **8.** a) tak b) nie c) tak **9.** 7,5

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 162) **1.** A **2.** D **3.** $(-3,\ 0)$, $\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$ **4.** a) $x + 5y - 13 = 0$ b) $2x + 3y + 6 = 0$ c) $2x - 5y + 15 = 0$ d) $3x - 2y + 6 = 0$ **5.** a) k i l, m i p b) k i t, l i t

3.4. Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego (s. 164). **1.** C **2.** a) $y = 10x + 20$ c) 48° d) 4 km **3.** c) 825 zł d) 1200 **4.** a) $S(t) = -135t + 546$ c) 377,25 km

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 165) **1.** C **2.** D **3.** b) $y = 0{,}7x + 3360$ c) 13 860 zł **4.** 373,15 K, –173,15°C

3.5. Równania liniowe (s. 169). **1.** B **2.** C **3.** a) tak b) nie c) nie d) tak **6.** a) 4 b) $-\frac{3}{5}$ **7.** 12, 8

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 170) **1.** C **2.** C **3.** a) 0,44% b) po 38 dniach **4.** –2,5

3.6. Nierówności liniowe (s. 178). **1.** B **2.** C **3.** A – IV, B – III, C – II, D – I **5.** a) $x > 5$ b) $x \geqslant 3$ c) $x \in (-\infty;+\infty)$ d) $x > -10$ **7.** a) 0, 1, 2 b) 11, 12, 13 **10.** 14 **11.** punkty o współrzędnych postaci $(x, 2x - 6)$ dla $x \in (1{,}5;\ 3{,}75)$ **12.** a) $m > 1$ b) $m < 0$ c) $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $m < 0$ **13.** a) $m < 0$ b) $m < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $m < -\frac{2}{3}$ d) $m < \sqrt{2}$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 180) **1.** D **3.** a) $x < 1\frac{6}{7}$; 0, 1 b) $x < 6\frac{1}{3}$; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 c) $x \leqslant 2$; 0, 1, 2 d) $x \leqslant \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; 0, 1 **4.** 2, 3, 5 **5.** nie większą niż 6,5 cm

3.7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi (s. 185). **1.** C **2.** C **3.** A **5.** a) brak rozw. b) nieskończenie wiele rozw. c) $(0,\ 1)$ **6.** a) $m = 4$, $n = 3$ b) $m = 3$, $n = 1$ c) $m = -1$, $n = 2$ d) $m = -3$, $n = 8$ **7.** a) dla $m \neq 1$ jedno rozw., dla $m = 1$ brak rozw. b) dla $m \neq -8$ jedno rozw., dla $m = -8$ brak rozw. c) dla $m \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $m \neq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ jedno rozw., dla $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ brak rozw. d) dla $m \neq -2$ i $m \neq 2$ jedno rozw., dla $m = -2$ brak rozw., dla $m = 2$ nieskończenie wiele rozw.

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 186) **1.** A **2.** C **3.** $\left(3\frac{3}{43},\ 3\frac{41}{43}\right)$ **4.** a) nieskończenie wiele rozw. b) brak rozw. c) jedno rozw. **5.** dla $m \neq -\frac{15}{8}$ jedno rozw., dla $m = -\frac{15}{8}$ brak rozw.

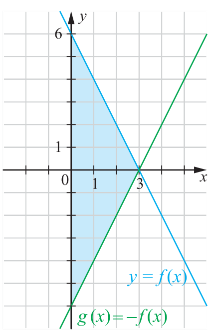
3.8. Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem układów równań liniowych (s. 189). **1.** D **2.** C **3.** 22 zł, 5,04 zł **4.** 12 cm, 20 cm **5.** $\frac{5}{3}$, $13\frac{2}{3}$ **6.** 3 zł, 1,25 zł **7.** 160 zł i 120 zł **8.** 7 i 3

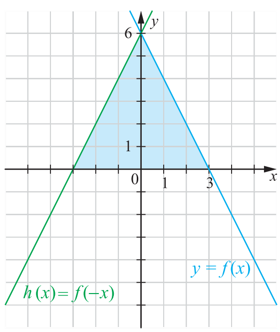
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 190) **1.** C **2.** 84 zł, 0,75 zł/1 km **3.** 25 **4.** 135 zł

A gdyby matura była teraz? (s. 191)
1. D **2.** D **3.** A **4.** C **5.** B **6.** $l \approx 34{,}4$ m, $H = 48$ m **7.** 7,35 kg, 7,35 kg, 6,3 kg **8.** $y = -\frac{3}{2}x - 3$ **9.** 2-złotowych – 17, 5-złotowych – 9 **10.** b) $S = 18 \cdot t$ c) 36 km **11.** $(3,\ 2)$ **12.** wpisowe 150 zł, 6 zł/1 godz. **13.** $n = 4$, $m = 5$

4. Przekształcanie wykresów funkcji

4.1. Symetria względem osi układu współrzędnych (s. 196). **1.** C **2.** D **3.** A–V, B–II, C–IV, D–I, E–III **4.** C **5.** a) $y = 3x + 5$ b) $y = 2x^2$ c) $y = \frac{2}{x}$ d) $y = x^3$ **6.** a) $y = -\pi x - 1{,}5$ b) $y = 3x^2 + 2$ c) $y = \frac{1}{2}x^2$ d) $y = x^3 - x$ **7.** rosnąca dla $x \in \langle -2;\ 2\rangle$, malejąca dla $x \in \langle -7;\ -4\rangle$ oraz dla $x \in \langle 2;\ 4\rangle$, stała dla $x \in \langle -4;\ -2\rangle$ a) rosnąca dla $x \in \langle -7;\ -4\rangle$ oraz dla $x \in \langle 2;\ 4\rangle$, malejąca dla $x \in \langle -2;\ 2\rangle$, stała dla $x \in \langle -4;\ 2\rangle$ b) rosnąca dla $x \in \langle -4;\ -2\rangle$ oraz dla $x \in \langle 4;\ 7\rangle$, malejąca dla $x \in \langle -2;\ 2\rangle$, stała dla $x \in \langle 2;\ 4\rangle$

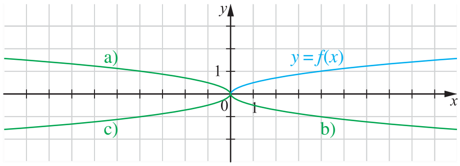
9. a)


$P = 18$ b)


$P = 18$ **11.** $y = \frac{3}{5}x + 3$, $y = -3x + 1$, $y = 2x - 6$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 198) **1.** A **2.** B **3.** względem osi x: $A' = (-2,\ 2)$, $B' = (3,\ -6)$, $C' = (-5,\ 0)$, względem osi y: $A'' = (2,\ -2)$, $B'' = (-3,\ 6)$, $C'' = (5,\ 0)$ **4.** a) $y = 10x - 4$ b) $y = 10x + 4$ **6.** f: $y = -2x - 9$, g: $y = -2x + 9$

4.2. Symetria względem początku układu współrzędnych (s. 200). **1.** B **2.** C **3.** B
5. a) $y = 6x + 2$ b) $y = x^2$ c) $y = -2\sqrt{-x}$ d) $y = -x^3$ **8.** a) $f(x) > 0$ dla $x > 8$, $g(x) < 0$ dla $x < -8$ b) $f(x) > 0$ dla $x > 0$, $g(x) < 0$ dla $x < 0$ c) nie ma takiego x, nie ma takiego x d) $f(x) > 0$ dla $x > 0$, $g(x) < 0$ dla $x < 0$ **9.** symetrią względem $(0, 0)$
10. a), b) i c)



A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 203) **1.** D **2.** C **3.** $A' = (-7, 9)$, $B' = (4, 10)$, $C' = (-17, 0)$ **5.** $y = 12x + 2{,}3$

4.3. Przesunięcia wykresu funkcji równolegle do osi x i do osi y (s. 207). **1.** B **2.** B **3.** C
5. a) $y = -2x - 2$ b) $y = (x-3)^2$ c) $y = \frac{4}{x-2} - 2$ d) $y = \sqrt{x+4} + 3$ **6.** a) $D = \boldsymbol{R}$, $Z_w = \boldsymbol{R}$, $y_1 = -3x + 6$, $D_1 = \boldsymbol{R}$, $Z_{w_1} = \boldsymbol{R}$ b) $D = \boldsymbol{R}$, $Z_w = \boldsymbol{R}$, $y_1 = 2x + 1$, $D_1 = \boldsymbol{R}$, $Z_{w_1} = \boldsymbol{R}$
c) $D = \langle 0; +\infty)$, $Z_w = \langle 0; +\infty)$, $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} - 2$, $D_1 = \langle -3; +\infty)$, $Z_{w_1} = \langle -2; +\infty)$
8. f wyznaczona niejednoznacznie, np. a) $f(x) = 3x$, 4 jednostki w prawo b) $f(x) = x^5$, $\sqrt{2}$ jednostek w dół c) $f(x) = 3x$, 2 jednostki w prawo, 1 jednostka w górę d) $f(x) = \sqrt{5x}$, 2 jednostki w lewo, 12 jednostek w górę
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 209) **1.** C **2.** C **4.** np. $g(x) = x^2$, przesunięcie o 6 jednostek w prawo i 3 jednostki w dół, g: rosnąca dla $x \in \langle 0; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; 0\rangle$, $Z_{w_g} = \langle 0; +\infty)$, f: rosnąca dla $x \in \langle 6; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; 6\rangle$, $Z_{w_f} = \langle -3; +\infty)$
5. np. $y = -2$
A gdyby matura była teraz? (s. 210)
1. D **2.** B **3.** C **4.** C **5.** A **6.** a) F b) P c) P d) P **7.** a) $f(x) = x^2$
b) $g(x) = -x^2$, $-\frac{1}{4}$, $-5\frac{5}{9}$, $-4\sqrt{3} - 7$ **8.** należy **12.** malejąca **13.** a) 4 b) 1 c) o 75%

5. Funkcja kwadratowa

5.1. Funkcja $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ (s. 217). **1.** C **2.** D **6.** a) $y = -3x^2$, $D = \boldsymbol{R}$ b) $y = \frac{1}{4}x^2$, $D = \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$ c) $y = -x^2$, $D = \{-2, -1, 0, 1\}$ **7.** a) najmniejsza dla $y = 2x^2$, największa dla $y = \frac{1}{4}x^2$ b) najmniejsza dla $y = \pi x^2$, największa dla $y = \frac{4}{\sqrt{3}+1}x^2$ **8.** a) $y = 2x^2$ b) $y = \pi x^2$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 218) **1.** B **2.** B **4.** a) $x \in \langle 0; +\infty)$ b) $x \in \langle 0; +\infty)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$ **5.** $y = 20$ **6.** a) $y = -5x^2$ b) $y = 5x^2$ c) $y = -5x^2$

5.2. Przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ (s. 220). **1.** A **2.** B **5.** a) równolegle do osi x o 3 jednostki w lewo b) $g(x) = -2(x+3)^2$ c) $Z_w = (-\infty; 0\rangle$, oś symetrii $x = -3$, $W = (-3, 0)$ **6.** a) $g(x) = -8(x-3)^2$ b) $g(x) = 1{,}25x^2 - 2$ c) $g(x) = \frac{3}{4}(x-1)^2 - 2$ d) $g(x) = 2{,}3(x+2)^2$ **7.** $g(x) = (x-1)^2$, $h(x) = (x+1)^2 - 3$, $P = 1{,}5$
9. a) w 8 s c) 4,9 m d) $D = \langle 0; 7{,}8)$

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 222) **1.** A **2.** a) $f(x) = -7(x-7)^2$ b) $f(x) = -7x^2 - 10$ c) $f(x) = -7(x+3)^2 - 4$ **3.** równolegle do osi układu współrzędnych: a) o 7 jednostek w prawo b) o 1 jednostkę w dół c) o 5 jednostek w lewo i 2 jednostki w górę
4. a) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$, równolegle do osi x o 6 jednostek w prawo b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$, równolegle do osi y o 1 jednostkę w dół c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$, równolegle do osi układu współrzędnych o 6 jednostek w prawo i 1 jednostkę w dół

5.3. Postać ogólna i postać kanoniczna funkcji kwadratowej (s. 226). **1.** D **2.** A **3.** C
6. a) $y = (x-1)^2 - 4$, rosnąca dla $x \in \langle 1; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; 1\rangle$
b) $y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$, rosnąca dla $x \in \left\langle -\frac{5}{4}; +\infty\right)$, malejąca dla $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right\rangle$
c) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$, rosnąca dla $x \in \langle -1; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; -1\rangle$
d) $y = -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 5\frac{1}{4}$, rosnąca dla $x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$, malejąca dla $x \in \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$
7. a) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{12}\right)$ b) $\left(\frac{15}{4}, -\frac{75}{8}\right)$ c) $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ d) $(-3, -6)$ **8.** a) $y = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$, $Z_w = \left\langle -\frac{3}{4}; +\infty\right)$ b) $y = (x+2)^2 + 1$, $Z_w = \langle 1; +\infty)$ c) $y = 2(x+1)^2$, $Z_w = \langle 0; +\infty)$
d) $y = -(x+3)^2$, $Z_w = (-\infty; 0\rangle$ **9.** a) malejąca b) rosnąca c) rosnąca d) rosnąca
10. a) nie b) tak c) tak d) tak **11.** a) rosnąca b) i c) nie jest monotoniczna d) malejąca
12. Wskazówka: Zastanów się, z której postaci funkcji kwadratowej skorzystać. a) $b = -4$, $c = 9$ b) $b = 2$, $c = 1{,}5$ c) $b = 0$, $c = -3$ d) $b = -4$, $c = 4$ **13.** a) $a = 2$, $b = -4$, $c = 5$ b) $a = \frac{4}{9}$, $b = 1\frac{7}{9}$, $c = \frac{7}{9}$ c) $a = -6\frac{1}{4}$, $b = 5$, $c = -2$ d) $a = 1$, $b = 0$, $c = 3$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 227) **1.** A **2.** B **3.** $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$
4. $Z_w = \left\langle -2\frac{1}{16}; +\infty\right)$ **5.** a) rosnąca dla $x \in (-\infty; -2\rangle$, malejąca dla $x \in \langle -2; +\infty)$
b) rosnąca dla $x \in \langle 7; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; 7\rangle$ c) rosnąca dla $x \in \left\langle 4\frac{1}{4}; +\infty\right)$, malejąca dla $x \in \left(-\infty; 4\frac{1}{4}\right\rangle$ **6.** $y_{max} = 8$

5.4. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (s. 232).
1. B **2.** C **3.** A **5.** a) $-3, 4$ b) brak c) $0, 1$ d) $5, -5$ **6.** a) $y = (x+6)(x-1)$
b) $y = 3(x-3)(x+3)$ c) $y = 2(x-1)(x-5)$ d) $y = \left(x - 1 + \sqrt{7}\right)\left(x - 1 - \sqrt{7}\right)$
7. a) $-1{,}62$, $0{,}62$ b) $0{,}45$, $2{,}22$ c) $-0{,}15$, $-6{,}85$ **8.** m. zerowe: $3, -4$; $W = \left(-\frac{1}{2}, 24\frac{1}{2}\right)$
9. z 25, z 49, z n^2 **10.** a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 - \frac{12}{25}x + 2\frac{13}{25}$ **11.** a) $k > \frac{4}{3}$
b) $k > 2\frac{1}{4}$ c) $k \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ d) $k \in \boldsymbol{R}$ **12.** a) $k \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ b) $k \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right)$
13. a) $k = -1$ b) nie ma takiego k
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 233) **1.** D **2.** C **4.** a) m. zerowe: $\frac{1}{2}$, 1, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$ b) brak c) m. zerowe -5, $f(x) = (x+5)^2$ **5.** 1, 4,5 **6.** $x = -4$

5.5. Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (s. 236). **1.** C **2.** A **3.** B **4.** a) $y_{max} = 4$, $y_{min} = 0$ b) $y_{max} = \frac{5}{4}$, $y_{min} = -1$ c) $y_{max} = 4 + \sqrt{3}$, $y_{min} = \frac{3}{4}$ d) $y_{max} = 5$, $y_{min} = -4$ **6.** $b = -10$, $c = 23$
7. a) w szóstym b) w pierwszym **9.** 4,5 m, po 2 s, 0,5 m
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 237) **1.** D **2.** C **3.** $y_{max} = \frac{4}{3}$, $y_{min} = -4$
4. $f(x) = -x^2 + \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4}$

5.6. Zastosowanie własności funkcji kwadratowej (s. 240). **1.** C **2.** A **3.** a) $a = 2$ c) dla $x \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$ d) $x = -\frac{1}{2}$ **4.** $b = -4$, $c = 16$, $y = -2(x + 1)^2 + 18$
5. $y_1 = \frac{1}{18}x^2 - \frac{7}{9}x + 2\frac{13}{18}$, $y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 241) **1.** A **2.** C **3.** malejąca dla $x \in \left(-1; 2\frac{1}{2}\right\rangle$, rosnąca dla $x \in \left\langle 2\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **4.** a) $b = -1$, $c = 12$ b) $x \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$ c) $x = -\frac{1}{2}$
5. $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 5$

5.7. Funkcja kwadratowa w zagadnieniach optymalizacyjnych (s. 243). **1.** C **2.** B **3.** B
4. 16 m × 16 m **5.** 5 **6.** 31 m × 31 m **7.** 10 cm × 3,75 cm **8.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm × $3\sqrt{2}$ cm
9. Δ równoboczny: 8,67 cm **10.** 60 m × 120 m **11.** 9, –9 **12.** 25 cm
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 244) **1.** A **2.** C **3.** 6 = 3 + 3 **4.** 50 m × 100 m
5. 3,25 zł

5.8. Równania kwadratowe (s. 248). **1.** C **2.** C **3.** B **5.** a) 0, –4 b) $0, -\frac{1}{2}$ c) $0, \frac{11}{10}$ d) $0, -\frac{5}{2}$ **6.** a) –5 b) $-\frac{5}{2}$ c) $\sqrt{33} - 6, -\sqrt{33} - 6$ **7.** a) –5, 1 b) $\frac{3 - \sqrt{37}}{2}, \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ c) 4, 7 **9.** $x^2 + \frac{4}{7}x - \frac{2}{7} = 0$ **10.** 4, 6, 8 lub –8, –6, –4 **11.** 91, 93 lub –93, –91
12. $\frac{29 - \sqrt{505}}{2}, \frac{29 + \sqrt{505}}{2}$ **13.** $0, 2\sqrt{2}$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 249) **1.** B **2.** A **3.** a) 0, –5 b) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ c) brak rozw. d) $-2 - \frac{\sqrt{10}}{2}, -2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ **4.** $4\sqrt{2} - 6, -4\sqrt{2} - 6$ **5.** $15 + 5\sqrt{2409}$ cm

5.9. Nierówności kwadratowe (s. 251). **1.** D. **2.** B **3.** a) nie ma takiego x b) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ c) $x = \frac{2}{3}$ d) $x \in \boldsymbol{R}$ e) $x \in \boldsymbol{R}$ f) $x \in \left(-\infty; \frac{4 - \sqrt{58}}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{4 + \sqrt{58}}{2}; +\infty\right)$ g) $x \in \left\langle\frac{3 - \sqrt{57}}{2}; \frac{3 + \sqrt{57}}{2}\right\rangle$ h) $x \in \left(0; 3\sqrt[6]{2}\right)$
4. a) $x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{19}}{2}; +\infty\right)$ b) $x \in (0; 2)$ c) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 15; +\infty)$ d) $x \in \left(\frac{-5 - \sqrt{73}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{73}}{4}\right)$ **6.** a) $x \in (-\infty; 0{,}53) \cup (2{,}82; +\infty)$ b) $x \in (-\infty; -9{,}54\rangle \cup \langle 46{,}58; +\infty)$ c) $x \in \langle -4{,}38; 3{,}28\rangle$ d) $x \in (-0{,}93; 7{,}86)$
7. a) $D = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 1; +\infty)$ b) $D = \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$ c) $D = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ d) $D = \left(-\infty; -3 - \sqrt{11}\right) \cup \langle 3; +\infty)$ **8.** długość: 4 m, 5 m lub 6 m, szerokość odpowiednio: 3 m, 4 m lub 5 m **9.** długość i szerokość $\in$ (5,5 cm; 9,5 cm)

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 253) **1.** D **2.** B **3.** a) 7 b) nie ma takiego x
c) $x \in \left(-\infty; -5-4\sqrt{2}\right) \cup \left(-5+4\sqrt{2}; +\infty\right)$ **4.** $D = \left\langle -2-\sqrt{13}; -2+\sqrt{13} \right\rangle$

5.10. Zadania tekstowe z zastosowaniem równań i nierówności kwadratowych (s. 255).
1. B **2.** B **3.** 80 dm^2 **4.** 10% **5.** 11, 34 **6.** 9, 12, 15, Δ prostokątny **7.** 48 i 84
8. 4,5 cm × 4,5 cm

A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 256) **1.** B **2.** 8 cm × 4 cm **3.** 11, 13, 15
lub –15, –13, –11 **4.** najwyżej o 2 cm **5.** 87

A gdyby matura była teraz? (s. 257)
1. B **2.** A **3.** C **4.** A **5.** C **6.** a) (–1, 2), (3, 3) b) $x \in (-\infty; 3\rangle$
c) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 3; +\infty)$ **7.** $(-1, 0), (4, 0), (0, -1)$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$ **9.** 4% **10.** $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; –1, 2
11. 12 **12.** 12 cm, 16 cm, 20 cm **13.** $2\sqrt{2}$ **14.** $|BP| = |DR| = \frac{5(9-\sqrt{17})}{4}$
15. a) o 1250 zł b) tak c) 400 d) powyżej 798 bochenków

6. Trygonometria

6.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym (s. 264). **1.** B **2.** D
3. C **9.** a) α b) γ c) α **10.** 2470 m **11.** 12 m, ok. $2°18'$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 266) **1.** A **2.** C **3.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$, $\cos\alpha = \frac{4}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$
6. ok. 21,45 m

6.2. Funkcje trygonometryczne kątów o miarach od 0° do 180° w układzie współrzędnych (s. 272).
1. C **2.** C **3.** A **4.** a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$
b) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\operatorname{tg}\alpha = 5$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$
d) $\sin\alpha = \frac{9\sqrt{82}}{82}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{82}}{82}$, $\operatorname{tg}\alpha = -9$ **7.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$
8. $x = 2-4\sqrt{3}$ **9.** $-\frac{5}{7}$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 273) **1.** C **2.** D **3.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$
4. a) $y = x+6$ b) $y = x-7$

6.3. Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 180° (s. 276).
1. B **2.** D **3.** $4{,}5$, $4{,}5\sqrt{3}$ **4.** $7\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm, $\frac{49\sqrt{3}}{6}$ cm^2 **5.** a) $c = 6$, $a = 6\sqrt{3}$
b) $a = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$, $b = 3\sqrt{6}$ c) $a = 2\sqrt{3}$ **6.** a) 50 b) $18\left(1+\sqrt{3}\right)$ c) $4\left(\sqrt{3}-1\right)$
7. 25 m, $25\sqrt{3}$ m **8.** $10\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ dm, $50\sqrt{3}$ dm^2 **12.** 120°, 30°, 30°
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 278) **1.** B **2.** B **3.** a) Obw. = $\sqrt{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$, $P = \frac{3}{2}$
b) Obw. = $6\left(\sqrt{3}+1\right)$, $P = 6\sqrt{3}$ c) Obw. = $2{,}5\left(3+\sqrt{3}\right)$, $P = \frac{25}{8}\sqrt{3}$ **4.** ok. 2,68 km
5. $32\left(1+\sqrt{3}\right)$

6.4. Podstawowe tożsamości trygonometryczne (s. 282). **1.** B **2.** D **3.** a) tak b) nie c) nie d) tak **4.** a) tak, α ostry b) nie c) nie d) tak, α rozwarty **5.** a) -1 b) 1 c) 1
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 283) **1.** B **2.** Wskazówka: Skorzystaj z jedynki trygonometrycznej. a) nie b) nie **3.** -1

6.5. Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy znana jest wartość sinusa lub cosinusa kąta (s. 286). **1.** D **2.** C **6.** ok. 46° **8.** a) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ b) $2-\sqrt{3}$ c) $2+\sqrt{3}$
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 287) **1.** C **2.** A **3.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$
5. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\sin\beta = \frac{7\sqrt{58}}{58}$, $\cos\beta = \frac{3\sqrt{58}}{58}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{3}$

6.6. Zastosowanie trygonometrii (s. 290). **1.** A **2.** B **3.** $16\sqrt{3}$ cm, $24\sqrt{3}$ cm^2
4. ok. 36° **6.** 8 **8.** o ok. 59% **9.** o ok. 65,4% **10.** ok. 5,2 a
11. 168° na wschód **12.** $40(3+2\sqrt{3})$ cm **13.** ok. 192,9 m **16.** $30\sqrt{3}$ cm^2
A gdyby sprawdzian był teraz? (s. 292) **1.** A **2.** C **3.** $15\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm, $56{,}25\sqrt{3}$ cm^2
4. $5\left(1+\sqrt{3}\right)$ m **5.** $25\sqrt{3}$ cm^2, $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm **6.** $\sqrt{3} : 1$
A gdyby matura była teraz? (s. 293)
1. A **2.** D **3.** A **4.** D **5.** C **6.** $5\sqrt{3}$ **7.** ok. 686,7 m **8.** a) $3\sqrt{2}$ cm, $6\sqrt{2}$ cm, $3\sqrt{6}$ cm b) o ok. 27% c) 135° **9.** a) 18 cm b) 25 cm **10.** 112°, 68°
11. 39 dm, 32 dm^2 **12.** 75° **13.** 58° **14.** a) ok. 8,5 m b) o ok. 59%

Bank zadań

1. III **2.** III **3.** środa i czwartek **4.** nie **5.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 81\}$, $A \cap B = \{1, 3, 9\}$, $A \setminus B = \{27, 81\}$, $B \setminus A = \{2, 4, 6, 12, 18, 36\}$
6. $A \cup B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, $A \cap B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{64\}$
7. a) $a = 7$ i $b = 10$ lub $a = 10$ i $b = 7$ b) $a = 11$ i $b = 6$ lub $a = 6$ i $b = 11$, lub $a = 11$ i $b = 8$, lub $a = 8$ i $b = 11$ **8.** 10 001, 10 010, 10 100, 11 000, 20 000 **9.** 8 i 400, 16 i 200
12. 50. miejsce – 5, 75. miejsce – 3, 100. miejsce – 1 **13.** 1 **14.** 5 i 45, 15 i 35
15. $a^2 - a$ **16.** a) -566, 565 b) -308, 307 c) -99 **17.** 4 **18.** 60 min **19.** 1, 4
20. a) ok. $0{,}18 \cdot 10^3$ kPa b) $1{,}5 \cdot 10^3$ kPa **22.** 5 **23.** a) 3 b) 7 c) 1 d) 7 **24.** a) 262 b) 285 c) 209 d) 335 **25.** a) $\sqrt{145}$ b) $\sqrt{82}$ c) 4 **27.** a) np. $\frac{8}{7}\sqrt{2}$, $\sqrt{2{,}9}$, $\frac{11}{9}\sqrt{2}$
28. a) pierwsza liczba mniejsza b) pierwsza liczba większa
29. a) $(-4)^{-5}$ b) 3^{-2} c) 2^{-19} d) 3^8 e) 7^{-3} **30.** a) 2^{65} b) $3^{30} \cdot 11^{-3}$ **31.** 9 **32.** 18 079
33. 7, 3, 9, 0, 7 **34.** a) 6 b) 4 c) 10 **35.** a) $5{,}383 \cdot 10^0$ b) $2{,}433 \cdot 10^2$ c) $6{,}776 \cdot 10^2$ d) $6{,}339 \cdot 10^1$ e) $9{,}718 \cdot 10^0$ **36.** pierwsza liczba większa **37.** $-1\,800\,000\,000$
38. a) $4x^6 - 12\sqrt{2}x^3 + 18$ b) $9x^2y^4 + 12x^3y^3 + 4x^4y^2$ c) $x^4 - 25y^2$
39. a) $(x+y-11)(x+y+11)$ b) $4a^2(a^2-3)$ c) $(4x^2-2xy-y^2)(4x^2+2xy-y^2)$
40. wszystkie trzy liczby są równe **41.** a) $6-5\sqrt{6}$ b) $-5-24\sqrt{6}$ c) $36-17\sqrt{6}$ d) $\frac{30-13\sqrt{6}}{19}$ **42.** a) $x+y = 9+\sqrt{2}$, $x-y = -5+5\sqrt{2}$, $xy = 2+17\sqrt{2}$, $\frac{x}{y} = \frac{26}{41} + \frac{25}{41}\sqrt{2}$
b) $x+y = 4+\sqrt{3}$, $x-y = -8+5\sqrt{3}$, $xy = -30+22\sqrt{3}$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{4} + \frac{7}{12}\sqrt{3}$

c) $x + y = -1 + 2\sqrt{7}$, $x - y = 1 + 6\sqrt{7}$, $xy = -56 - 4\sqrt{7}$, $\frac{x}{y} = -\frac{56}{27} + \frac{4}{27}\sqrt{7}$
d) $x + y = 7 + 0\sqrt{2}$, $x - y = 7 + 10\sqrt{2}$, $xy = -50 - 35\sqrt{2}$, $\frac{x}{y} = -1 - \frac{7}{10}\sqrt{2}$
43. $a = 1, b = 0$ **44.** $8\sqrt{2} + 4$ **45.** $P = 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$, Obw. $= 6(\sqrt{3} - 1)$
46. $0 + 2\sqrt{2}$ **47.** a) $x = 20, y = 9$ b) $x = 15, y = 10$ c) $x = \frac{15}{9}, y = \frac{3}{2}$ **48.** $4\sqrt{2}$ cm
49. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{3}{16 \cdot 10^5}$ c) $\frac{25}{7}$ **50.** 25 **51.** a) $2^{\frac{5}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{11}{6}}$ **52.** a) ok. 6,15
b) ok. 30,41 c) ok. 6668,07 d) ok. 2,15 e) ok. 4,28 **53.** 222,(2) kg **54.** o 10%
55. a) 13,86 zł b) 13,86 zł **56.** o 25% **57.** 75 **58.** $0{,}00096e^2$ **59.** 18%
60. a) 24% b) 48% **61.** o $(2a + 0{,}01a^2)$% **62.** 1,5625 **63.** a) $\frac{500}{500} = 1$, mają po tyle samo b) 100% **64.** a) $-3, -2, -1, ..., 6$ b) $-2, -1, ..., 6$ c) $-3, -2, -1, ..., 7$
d) $-3, -2, -1, ..., 7$ e) 4, 5 f) 3, 4, 5, 6 g) 4, 5, h) 3, 4, 5, 6 i) $-2, -1, 0, 1, 2, 3$
j) $-2, -1, ..., 2$ k) $-3, -2, ..., 3$ l) $-3, -2, ..., 2$ **65.** a) $\{0, 1, 2, ..., 6\}$
b) $\{0, 1, 2, ..., 6\}$ c) $\{0, 1, 2, ..., 7\}$ d) $\{0, 1, 2, ..., 7\}$ e) $(0, 9)$ f) $(0, 9)$
g) $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$ h) $\varnothing$ **66.** a) 1 b) 5 c) 4 d) -3
67. a) $x \in (-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$ b) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 1; +\infty)$ c) $x \in (-6; -3)$ d) $x \in \langle -4; 0)$
68. a) 162, 162, -108 b) 19, 33, 270 **69.** a) $|4a|, |4a^2b|, |4a^3|$ b) $|5a^2b|, |5ab^4|, |5a^7b^5|$
70. a) $2x + 1$ b) $-3x + 1$ c) $-6x + 4$ **71.** obie liczby są wymierne
72. -2 lub 2 lub 0 **73.** a) $-1{,}25$, 1,25 b) 0, -6 c) $-1{,}5$, 1,5 d) -3, 3 e) 2, $-2\frac{2}{3}$ f) -3, $4\frac{1}{3}$
g) 9, -11 h) -2, 4 i) 2, 4 **74.** a) $x \in \langle -5; 11\rangle$ b) $x \in (-\infty; -8) \cup (14; +\infty)$
c) $x \in (-17; 3)$ d) $x \in (-\infty; -14\rangle \cup \langle 12; +\infty)$ **75.** a) 7,4725, 0,0000053
b) 7,473, 0,0000615 c) 7,47, 0,0003399 **76.** 0,000383 **77.** a) 34,02939, 34,02518
78. a) 2 b) 3 c) 2 d) -1 e) -1 f) 0 g) $-3\frac{3}{4}$ h) $3\frac{3}{8}$ **79.** $\frac{3}{2}$ **80.** a) $k + 1$ b) $k - 4$
c) $k + 2$ d) $5 - k$ **81.** a) $4 + \sqrt{2}$ b) 4 c) 2 d) 10 e) 1 f) $1\frac{1}{4}$ g) 9 h) 25 i) π j) $\frac{1}{8}$
k) 27 l) $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 1\}$ **84.** a) $D = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Z_w = \{3, 4, 5, 6\}$,
p. odwrotne – funkcja b) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z_w = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, p. odwrotne – funkcja
c) $D = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$, $Z_w = \{-1, 1\}$, p. odwrotne – nie jest funkcją
d) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Z_w = \{0, 1, 4\}$, p. odwrotne – nie jest funkcją
89. a) $D = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $Z_w = \{-1, 0, 1, 2\}$, m. zerowe: $-4, -3, -2$
b) $D = (-5; 4)$, $Z_w = \{-1, 0, 1, 2\}$, m. zerowe: $x \in (-3; -1)$
90. a) $Z_w = \{-1, 1, 3, 5, 7, ...\}$, brak m. zerowych b) $Z_w = \{..., -2, -1, 0, 1, 2\}$, m. zerowe 3
c) $Z_w = \boldsymbol{N}_+$, brak m. zerowych **91.** a) $D = \boldsymbol{R} \setminus \{3\}$ b) $D = (-\infty; 2\rangle$ c) $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-2, 2\}$
d) $D = \boldsymbol{R}$ **92.** $D = \{-2, -1, 1, 2, 4, 5, 7\}$, $Z_w = \{0, 1, 2, 3\}$, m. zerowe: -1, 4
93. 4 **94.** a) $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 2\}$, m. zerowe -5 b) $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-2, 4, 8\}$, m. zerowe -4
c) $D = \boldsymbol{R} \setminus \{3\}$, brak m. zerowych **96.** a) $\langle -3; -2\rangle$ oraz $\langle 1; 4\rangle$ b) $\langle -5; -3\rangle$ oraz $\langle 0; 1\rangle$
c) $\langle -5; -3\rangle$ oraz $\langle -2; 1\rangle$ d) $\langle -3; 0\rangle$ oraz $\langle 1; 4\rangle$ **99.** a) $1 \to 2, 3 \to 4, 5 \to 6$
b) $1 \to 6, 3 \to 4, 5 \to 2$ c) np.: $1 \to 6, 3 \to 4, 5 \to 4$ d) np.: $1 \to 2, 3 \to 6, 5 \to 6$
101. $y = \frac{\pi}{6}x^3$, $y_{min} = 14{,}13$, $y_{max} = 267{,}95$ **102.** $y_{min} = -16$, y_{max} – brak
103. $y_{min} = 0$, $y_{max} = 36$ **104.** a) $y_{min} = 5$, $y_{max} = 7$ b) $y_{min} = 0$, $y_{max} = 3$
c) $y_{min} = 4$, y_{max} – brak d) $y_{min} = 10$, y_{max} – brak **106.** a) dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

b) dla $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ c) dla $x \in (0; 1)$ **107.** tak, $D = \boldsymbol{R}$, $Z_w = \left(-\infty; 3\right\rangle$, m. zerowe: -4, 0, rosnąca w przedziałach $\left(-\infty; -2\right\rangle$ oraz $\langle 0; 3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 0\rangle$, stała w przedziale $\langle 3; +\infty)$, $y_{max} = 3$, y_{min} – brak **110.** -2, 3

111. a) A: 12 zł i 10 zł, B: 12 zł i 10 zł b) wzrost: I–III, V–VI, spadek: III–V, VI–VIII c) I–III e) A: spadek ok. 5%, B: wzrost 15% **112.** b) 7–14.02, o ok. 6,8% c) 18–29.02, o ok. 6,4%

114. 10 800 razy **115.** 10 dni **116.** a) ok. 132 cm b) ok. 180 cm **117.** 6 l i 0,3 l

119. a) $y = -\frac{2}{3}x$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = 0$ d) $y = \frac{9}{2}x$ **120.** a) 5 b) $5 - \sqrt{2}, 5\frac{1}{3}, 5, 4 + \sqrt{3}$ c) $a = 3, b = 4, c = 5, d = -1, e = 1$ **121.** a) $y = -4x - 7$ b) $y = 3x + 14$ c) $y = \frac{2}{5}x + 6\frac{1}{5}$ d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ **122.** a) $y = \frac{8}{11}x + \frac{48}{11}$ b) $y = -\frac{5}{27}x + \frac{4}{27}$ c) $y = -\frac{3}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)x + 3 + 3\sqrt{2}$ **123.** $45\frac{11}{15}$ **124.** a) $x \leqslant \frac{5}{12}$ b) $x \leqslant \frac{2}{3}$ c) $x \geqslant -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ d) $x \geqslant -\frac{3}{2}$ **125.** a) $y = px$ b) $y = \frac{2}{p}x, p \neq 0$ c) $y = \frac{n}{m}x, m \neq 0$ d) $y = \frac{q}{2p^2}x, p \neq 0$

126. a) I, II, III b) I, II, IV c) I, III d) I, II **127.** rosnące: III, IV, VI, malejące: I, II, stałe: V

128. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) nie ma takiego k e) 1, 5 f) 0 **129.** np. a) $y = x - 3$ b) np. $y = -x - 2$ c) np. $y = 3$ **130.** $a + b > 0, \frac{a}{b} > 0$ **131.** Wskazówka: Oblicz wartość funkcji f dla $x = 0$. $y = 2x$ **132.** np. $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ **133.** $y = 4$ **135.** a) AB: $y = -x$, CD: $y = -x + 6$, BC: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, AD: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ b) AC: $y = 1$, BD: $y = 2x - 3$ równoległobok

136. $\frac{2}{3}$ **137.** 21 **138.** a) -13 b) 6 c) $m \in \boldsymbol{R}$ **139.** a) $y = 3x + 18$ b) $y = -2{,}3x + 5{,}9$ c) $y = 0{,}(6)x + 4$ d) $y = 2$ **140.** $y = \frac{7}{2}x - 1$ **141.** a) tak b) tak c) tak d) nie

142. $\left(-\frac{6}{5}, 4\frac{3}{5}\right)$ **143.** a) $(-1, 0)$ b) $\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$, $y = 0$ d) $(1, 0)$

144. $y = x + 240$, $D = (0; 240)$, $Z_w = (240; 480)$ **145.** $y = x + 26$, $D = (0; 26)$, $Z_w = (26; 52)$ **146.** $y = -0{,}25x + 10$, $D = \langle 0; 40\rangle$, $Z_w = \langle 0; 10\rangle$

147. $y = 6x$, $Z_w = \langle 0; 360\rangle$ **148.** a) $y = 0{,}2x + 16\,000$ b) 16,0052 m c) 80°C

149. a) $y = 110x + 15\,000$ b) od 188 c) 213 **150.** $(187{,}375,\ 3373{,}75)$

151. Wskazówka: Aby sporządzić wykres funkcji f, sporządź tabelkę wartości. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{21}{4}, \frac{9}{4}\right)$, $10\frac{1}{8}$ **152.** $m = 1, n = 12$ lub $m = 2, n = 6$, lub $m = 3, n = 4$, lub $m = 4, n = 3$, lub $m = 6, n = 2$, lub $m = 12, n = 1$ **153.** a) 1,5 kg b) 2 kg c) $10\frac{2}{3}$ m d) 90 km/h

155. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) brak rozw. **156.** a) $x = \frac{c - b}{a}$, $a \neq 0$ b) $x = \frac{7 + b}{a}$, $a \neq 0$ c) $x = \frac{e + d}{b + 3}$, $b \neq -3$ **157.** 1500 m^2, 2700 m^2, 900 m^2 **158.** a) $x \geqslant 2$ b) $x > 2$ c) $x \geqslant -\frac{1}{3}$ d) $x > -\frac{4}{5}$ **159.** a) rosnąca dla $k < \frac{1}{2}$, malejąca dla $k > \frac{1}{2}$ b) rosnąca dla $k < \frac{3}{4}$, malejąca dla $k > \frac{3}{4}$ c) rosnąca dla $k < -\frac{\sqrt{2}}{3}$, malejąca dla $k > -\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) rosnąca dla $k \in \boldsymbol{R}$ e) rosnąca dla $k < 1$ oraz dla $k > 5$, malejąca dla $k \in (1; 5)$ f) malejąca dla $k \neq 0$ **160.** a) -3, $-2\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$ b) $3\frac{1}{2}$ c) -3, $-2\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, 1

161. a) $-3, -2, -1$ b) -1 c) $-2, -1$ **162.** a) $x \leqslant 3$ b) $x > 2$ c) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3$ d) $\frac{4}{3} < x < 2$

163. a) $x \geqslant 3$ b) $x < 0$ c) $-1 < x < 2$ d) $-4 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$ **164.** w trakcie 11. sezonu grzewczego **165.** a) $\left(\frac{23}{20}, -\frac{25}{28}\right)$ b) $(4, 1)$ c) $(4, 3)$ d) $(3, 2)$ e) $(3, -1)$ f) $(4, 2)$

166. a) $a = 2{,}8$, $b = -1{,}6$ b) $a = 1{,}8$, $b = 0{,}4$ c) $a = -4{,}8$, $b = -0{,}8$ d) $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{22}{15}$

167. a) -27 b) nie ma takiego k **168.** $m = 2$, $n = 3$ **169.** 29,4

170. $\sqrt{0{,}9}$ **171.** 10 CD, 30 DVD **172.** 1 dolar = 21 800 zł, 1 marka = 12 350 zł

173. w pierwszym roku: 1,7 t i 10 t, a w drugim roku: 2,21 t i 12 t **174.** 1 km autostrady – ok. 22 mln zł, 1 km drogi ekspresowej – ok. 7 mln zł **175.** I–D, II–A, III–C, IV–B

177. a) $f(x) = -(x+1)^3$ b) $f(x) = -\sqrt{6}x^2$ c) $f(x) = -x - 1$ d) $f(x) = \frac{5}{x}$

178. a) $-4, 0, 5$ b) $-5, 0, 4$ **179.** kwadrat **181.** a) $f(x) = -(-x-1)^4$ b) $f(x) = 8\sqrt{-x} + 2$ c) $f(x) = -\sqrt{3}(-x+4) + 2$ d) $f(x) = \frac{3}{x+1}$

185. symetria względem $(0, 0)$ **186.** a) np. $y = x^2$, przesunięcie o 1 jednostkę w dół b) np. $y = x^3$, o π jednostek w prawo oraz 2 jednostki w górę c) np. $y = -\frac{9}{x}$, o 3 jednostki w lewo oraz 5 jednostek w górę d) np. $y = \sqrt{x}$, o 4 jednostki w prawo oraz $\sqrt{2}$ jednostek w dół

187. a) $g(x) = x - 1$, przesunięcie o 3 jednostki w dół b) $g(x) = 2x - 9$, przesunięcie o 6 jednostek w dół c) $g(x) = -x + 7$, przesunięcie o 3 jednostki w górę d) $g(x) = -3x + 8$, przesunięcie o 9 jednostek w górę **189.** a), c) **190.** a) $y = x^2$ b) $y = ax^2$, $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ c) $y = \frac{1}{18}x^2$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{3}x^2$ **192.** a) $y = 2x^2$, $D = \langle -1; 1\rangle$, $Z_w = \langle 0; 2\rangle$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$, $D = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 3\}$, $Z_w = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, 4\frac{1}{2}\right\}$ **193.** $P = \frac{9}{20}x^2$

194. $P = 2\sqrt{3}x^2$ **195.** $P = 1{,}21\pi x^2$ **196.** $P = 43x^2$, $P = 41x^2$, $P = 31x^2$

198. a) A nie należy, B należy b) A należy, B nie należy c) A należy, B należy d) A nie należy, B należy **202.** a) $f(x) = 2(x+3)^2 + 2$, $Z_w = \langle 2; +\infty)$ b) $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$, $Z_w = \langle -1; +\infty)$ c) $f(x) = 2x^2 - 2$, $Z_w = \langle -2; +\infty)$ d) $f(x) = 2(x - \sqrt{2})^2 - 1$, $Z_w = \langle -1; +\infty)$

203. a) $f(x) = -3(x-1)^2 - 2$, $Z_w = (-\infty; -2\rangle$ b) $f(x) = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$, $Z_w = (-\infty; 2\rangle$ c) $f(x) = -3x^2 + 1$, $Z_w = (-\infty; 1\rangle$ d) $f(x) = -3(x+2)^2 + \sqrt{2}$, $Z_w = \left(-\infty; \sqrt{2}\right\rangle$

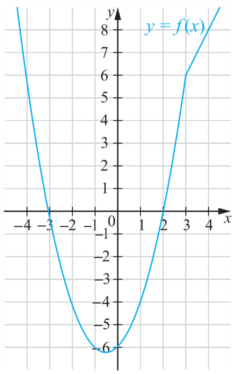
204. b) 10,4 m c) tak **205.** a) 3877,5 m, 3510 m b) ok. 22 s **206.** ok. 10,63 s

209. a) $W = (0, -2)$ b) $W = (0, 1)$ c) $W = (0, 3)$ d) $W = (-2, 0)$ e) $W = (1, 0)$ f) $W = (-2, -5)$ **211.** a) $f(x) = x^2 - 4x + 10$ b) $f(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{9}{8}x + 2$ c) $f(x) = \frac{5}{32}x^2$ d) $f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{13}{8}$ **212.** a) 1148,5 m b) po ok. 30,6 s

213. f: a) $-\sqrt{6}, \sqrt{6}$ b) $x = 0$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$ d) $y_{\min} = -3$ e) dla $x = 0$;
g: a) -2 b) $x = -2$ c) $g(x) = -3(x+2)(x+2)$ d) $y_{\max} = 0$ e) dla $x = -2$;
h: a) brak m. zerowych b) $x = 1$ c) brak d) $y_{\min} = 4$ e) dla $x = 1$

214. a) rosnąca dla $x \in \langle -2; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; -2\rangle$, $y_{\min} = 0$, $y = (x+2)(x+2)$ b) rosnąca dla $x \in \left\langle \frac{3}{4}; +\infty\right)$, malejąca dla $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right\rangle$, $y_{\min} = \frac{7}{8}$ c) rosnąca dla $x \in (-\infty; 1\rangle$,

malejąca dla $x \in \langle 1; +\infty)$, $y_{max} = -4$ **215.** a) A i C b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $x = 0$ d) $A' = (-1, 1)$, $C' = (2, 7)$ **216.** a) 2 b) 0 c) 1 **217.** a) ok. 1,84 m b) 1,1 m
c) po ok. 1,2 s **218.** Wskazówka: Załóż, że piłka została wyrzucona z wysokości 1,98 m i na tej samej wysokości została złapana. ok. 16,55 m, ok. 3,44 s **219.** a) $y_{max} = -1$, $y_{min} = -26$
b) $y_{max} = -10 + 3\sqrt{2}$, $y_{min} = -230$ c) $y_{max} = 30$, $y_{min} = -6$ d) $y_{max} = 10$, $y_{min} = -11\frac{1}{8}$
220. a) $a = -\frac{1}{4}$, $y_{min} = 4\frac{3}{4}$, $y_{max} = 7$ b) $b = 16$, $y_{min} = 26$, $y_{max} = 34$
221. a) $b = 2$, $y_{min} = -10$, $y_{max} = -8$ b) $a = \frac{3}{4}$, $y_{min} = 4\frac{3}{4}$, $y_{max} = 10\frac{3}{4}$
222.



a) rosnąca dla $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; +\infty\right)$, malejąca dla $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$
b) 2, –3 c) $x \in \langle -3; 2\rangle$
223. $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$, $Z_w = \langle -9; +\infty)$, rosnąca dla $x \in \langle -1; +\infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; -1\rangle$
224. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$, rosnąca dla $x \in \langle 1; +\infty)$, malejąca dla $x \in \langle 0; 1\rangle$ **225.** a) $y_{min} = 0$ b) brak c) $y_{min} = -\frac{24}{7}$
226. a) ok. 29 m/s b) ok. 197,2 m **227.** a) Janek – 4 km/h, Piotr – 4,5 km/h b) Janek – 45 min, Piotr – 40 min
228. ok. 19,3 m/s **229.** o 15^{00} **230.** 8535 zł
231. obie po 7,5 cm × 7,5 cm **232.** a) 62 b) tak, nie c) 167 **233.** a) $-2, \frac{1}{2}$ b) 2,5, 6
c) $-2{,}5, \frac{1}{3}$ **234.** $2 - \sqrt{19}, 2 + \sqrt{19}$ **235.** $-1, \frac{4}{3}$ **236.** –1, 3 **237.** $\sqrt{61}$ cm
238. 1677, 1882 **239.** 2 mm **240.** a) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}; +\infty\right)$ b) $x \in \left(-\frac{3}{2}; 5\right)$
c) $x \in \langle 1; 4\rangle$ **241.** a) $x \in (-\infty; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ b) $x \in \mathbb{R}$ c) brak rozw. d) $x \in (-3; 1)$
242. –1, 0, 1, 2, 3 **243.** –2, –1, 0, 2 **244.** najmniejsza $x = -1$, największa $x = 1$
245. a) $D = (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, m. zerowe 0 b) $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, m. zerowe – brak c) $D = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, m. zerowe 2 d) $D = \mathbb{R}$, m. zerowe: 3, 4
246. $x \in (-\infty; 3\rangle \cup \langle 5; +\infty)$ **247.** 12 m, 6 m **248.** a) $\frac{8(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{3}$ m
b) nie większa niż $16\sqrt{2} - 16$ m **249.** $a \in (0; 2 + \sqrt{2})$
250. a) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{15}}{15}$
b) $\sin\gamma = \cos\delta = \frac{7\sqrt{65}}{65}$, $\cos\gamma = \sin\delta = \frac{4\sqrt{65}}{65}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{7}{4}$, $\operatorname{tg}\delta = \frac{4}{7}$
c) $\sin x = \cos y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos x = \sin y = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} y = \sqrt{2}$
251. a) $\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 60°$ b) ok. 7,2, ok. 9,3, 50° c) ok. 4,5, ok. 6,6, 35°
252. a) $a = 8$, $c = 4$, $d = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$ b) $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{21 + 6\sqrt{3}}$, $\alpha \approx 32°$, $\beta \approx 28°$
254. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}$ **255.** $y = -\frac{5}{3}x - \frac{28}{3}$
256. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ **257.** 30 dm, $27\sqrt{3}$ dm^2 **258.** 60°, 120°

261. $2\frac{1}{4}$ **262.** a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ d) 1 **263.** a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ c) 1 d) $\frac{1}{\sin\alpha}$
264. a) tak b) tak c) nie d) tak **267.** 209 m **268.** ok. 19° **269.** ok. 922,68 m
270. ok. 2359,7 m **271.** $h_1=\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m, $l_1=\frac{200\sqrt{3}}{3}$ m, $h_2=100$ m, $l_2=100\sqrt{2}$ m, $h_3=100\sqrt{3}$ m, $l_3=200$ m **272.** ok. 76,4 m lub 840 m **273.** ok. 52°, ok. 38°, ok. 106 m
274. ok. 370 m **275.** 15,24 m **276.** $P=\frac{98\sqrt{3}}{3}$, Obw. $=28\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **277.** $h=\frac{12\sqrt{111}}{37}$

Indeks

Źródła ilustracji i fotografii

Okładka: s. I (kamienie) Anatoli Styf/Shutterstock.com; s. IV (dziewczyna z laptopem) Szekeres Szabolcs/ Shutterstock.com, (laptop) Evgeny Karandaev/Shutterstock.com, (kamienie) Anatoli Styf/ Shutterstock.com

Strony działowe: s. 11 (układ galaktyk Kwintet Stefana) NASA, ESA, and the Hubble SM4 ERO Team; s. 91 (wykres funkcji) apdesign/Shutterstock.com; s. 141 (Hogeschool w Holandii) Worldpics/Shutterstock.com; s. 193 (most Brookliński) javarman/ Shutterstock.com; s. 213 (kamienie) Anatoli Styf/Shutterstock.com; s. 259 (snowboardzista) Ipatov/Shutterstock.com

Tekst główny: s. 3 (układ galaktyk Kwintet Stefana) NASA, ESA, and the Hubble SM4 ERO Team, (wykres funkcji) apdesign/Shutterstock.com, (Hogeschool w Holandii) Worldpics/Shutterstock.com; s. 4 (most Brookliński) javarman/Shutterstock.com, (kamienie) Anatoli Styf/Shutterstock.com, (snowboardzista) Ipatov/Shutterstock.com; s. 8 i inne (fragment kartki) thumb/Shutterstock.com; s. 12 (książki) ajt/Shutterstock.com; s. 16 (Układ Słoneczny) martiin/fluidworkshop/Shutterstock.com; s. 22 (rowerzyści) PAP/Andrzej Rybczyński, (ikony) Pixotico/Shutterstock.com; s. 23 (włosy) 1809056 Ontario Ltd./Shutterstock.com; s. 24 (kamienie) ruslanchik/Shutterstock.com; s. 38 (wizja artystyczna Marsa) NASA/JPL-CALTECH/SCIENCE PHOTO LIBRARY/East News; s. 42 (czerwone krwinki) Josh Gramling/Phototake/BE&W; s. 43 (atom kryptonu) Studio Verde; s. 44 (Galaktyka Andromedy) Igor Chekalin/Shutterstock.com; s. 56 (Układ Słoneczny) JCElv/ Shutterstock.com; s. 62 (diagram) Pedro Tavares/Shutterstock.com; s. 63 (turyści na szlaku) Galyna Andrushko/ Shutterstock.com; s. 64 (wycinki prasowe) WSiP; s. 66 (kalkulator) karen roach/Shutterstock.com; s. 67 (wieża Eiffla) vichie81/Shutterstock.com, (pieczątka) myVector/Shutterstock.com; s. 80 (rysunek z cyrklem) Scorpp/Shutterstock.com; s. 83 (alga morska brunatna) Jeff Rotman/Alamy/BE&W; s. 90 (jacht) Comstock; s. 92 (wodorost) Lisovskaya Natalia/Shutterstock.com; s. 93 (osoby przy laptopie) Konstantin Chagin/ Shutterstock.com; s. 94 (samochód) efiplus/Shutterstock.com; s. 98 (gniazda i wtyczki) tele52/Shutterstock.com; s. 111 (tankowanie) Comstock; s. 116 (bolid) renkshot/ Shutterstock.com; s. 122 (termometr) Fotofermer/Shutterstock.com; s. 131 (banknoty) Patryk Stanisz/ Shutterstock.com; s. 132 (złotówka) rsooll/Shutterstock.com; s. 133 (rower) steamroller_blues/Shutterstock.com; 134 (ikony) Pixotico/ Shutterstock.com; s. 135 (banknoty) Przemek Tokar/Shutterstock.com; s. 136 (wycieczka rowerowa) maga/Shutterstock.com; s. 137 (paczki) AGITA LEIMANE/Shutterstock.com; s. 142 (uderzenie pioruna) kwest/Shutterstock.com; s. 143 (świstak) Photoshot/Medium; s. 144 (łyżka z nasionami) Roblan/ Shutterstock.com; s. 145 (łyżka ze śmietaną) angelo gilardelli/Shutterstock.com, (pociąg na moście) Natali Glado/Shutterstock.com; s. 147 (pustynia) LianeM/Shutterstock.com; s. 149 (znak drogowy) hunta/ Shutterstock.com; s. 163 (kran z wodą) ifong/Shutterstock.com; s. 164 (zgnieciony papier) Picsfive/ Shutterstock.com, (warstwy gleby) J. Helgason/Shutterstock.com; s. 166 (rakieta tenisowa) ID1974/ Shutterstock.com; s. 170 (dzieci) Andrey Shadrin/Shutterstock.com; s. 173 (emotikon) beboy/Shutterstock.com; s. 175 (gondole) David Ionut/Shutterstock.com; s. 176 (długopisy) jeka84/Shutterstock.com; s. 188 (piłka) Le Do/Shutterstock.com; s. 190 (koparka z operatorem) PAP/Andrzej Rybczyński; s. 198 (motyl) Ingram Publishing/ThETA; s. 214 (skoczek spadochronowy) PAP/EPA/Wendy Smith; s. 221 (wieżowiec Kingdom Center w Rijadzie, Arabia Saudyjska) AGRfoto/Alex Rowbotham/Alamy/BE&W; s. 234 (Fontanny Uniwersytetu w Adelajdzie) gkphotography/Alamy/BE&W; s. 237 (wystawa malarska) PAP/Jacek Bednarczyk; s. 244 (kąpielisko) PHILIPPE ROY/Alamy/BE&W, (truskawki) Valentyn Volkov/Shutterstock.com; s. 247 (Partenon) Fergus McNeill/Alamy/BE&W; s. 252 (dywan) karam Miri/Shutterstock.com; s. 254 (tulipany) Susan Fox/ Shutterstock.com; s. 260 (samolot na pasie startowym) Mikael Damkier/ Shutterstock.com; s. 263 (rowerzyści) PAP/EPA/Olivier Maire; s. 265 (półwysep wchodzący w morze) M. Łaszczyk; s. 289 (motolotniarz) PAP/Piotr Polak; s. 291 (jacht) aragami12345s/Shutterstock.com; s. 306 (osoba uprawiająca nordic walking) Mauritius/BE&W; s. 320 (rabata kwiatowa) Paweł Napieraj/ DiGiTouch; s. 322 (narciarz) JupiterImages/Comstock/ PhotoStock

Mapy: s. 65 (mapa Polski) Jerzy Domosud; s. 81 (mapa okolic Gorlic) Jerzy Domosud

PONADGIMNAZJALNE
zakres podstawowy
Chemia w ćwiczeniach online
Oferta: sklep.wsip.pl