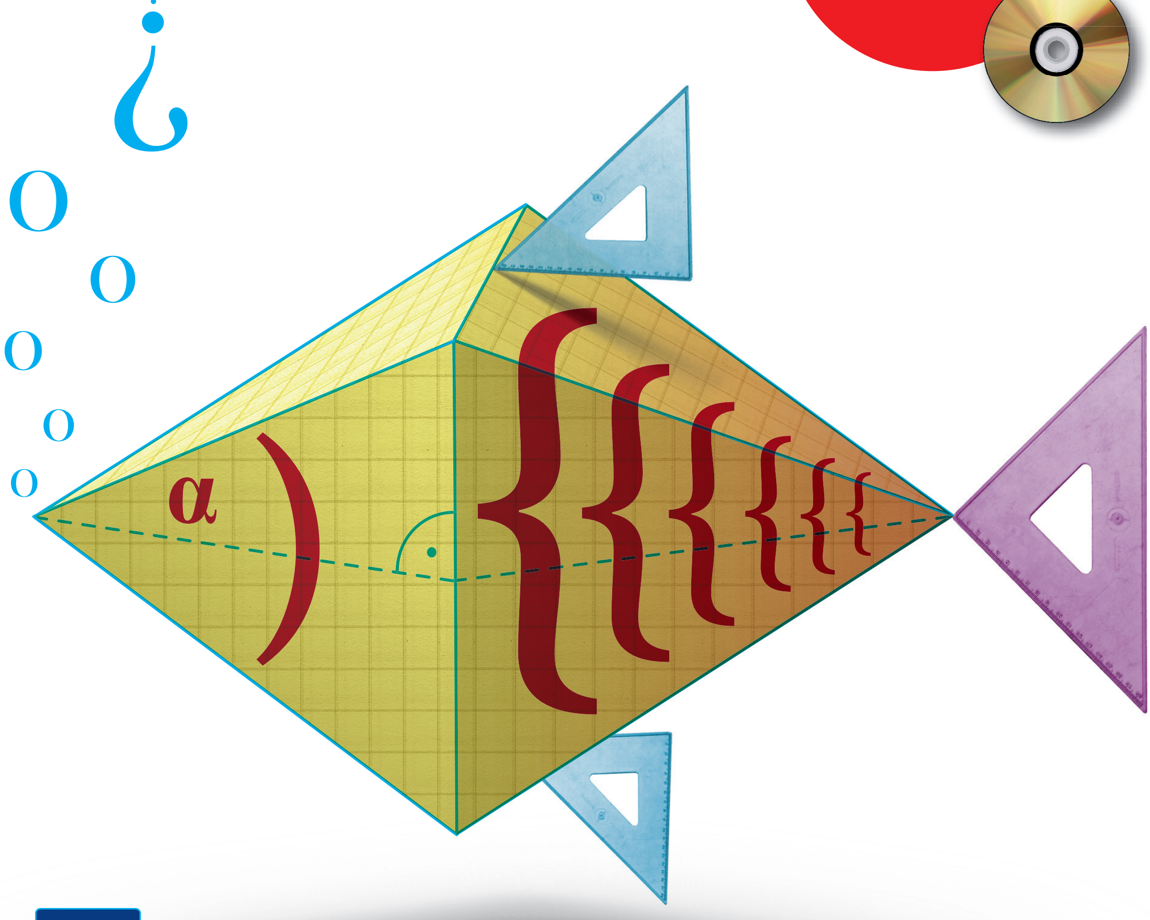
Matematyka 2001

podręcznik **do gimnazjum**

2



WSiP

Autorzy podręcznika: **Anna Bazyluk, Anna Dubiecka, Barbara Dubiecka-Kruk, Zbigniew Góralewicz, Tomasz Malicki, Piotr Piskorski, Henryk Sienkiewicz, Andrzej Ziemieńczuk**

W przygotowaniu poprzednich wydań podręcznika brali udział: **Anna Bazyluk, Jerzy Chodnicki, Krystyna Dałek, Mirosław Dąbrowski, Anna Dubiecka, Barbara Dubiecka-Kruk, Anna Frączek-Cierniak, Maria Fryska, Zbigniew Góralewicz, Ewa Łakoma, Tomasz Malicki, Marek Matejuk, Zofia Miczek, Agnieszka Pfeiffer, Piotr Piskorski, Henryk Sienkiewicz, Wacław Zawadowski, Andrzej Ziemieńczuk**.

Ilustrator: **Jakub Sowiński**

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki na poziomie klasy II gimnazjum, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Grażyny Komarzyniec, prof. dr. hab. Tadeusza Stanisza, dr. Piotra Zbróga.

Numer ewidencyjny w wykazie:

39/2/2009 (dla tradycyjnej formy podręcznika)

Wydanie VIII (2013)

ISBN 978-83-02-12054-1 (dla tradycyjnej formy podręcznika)

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Ewa Rucińska, Danuta Olszewska** (redaktorzy cyklu), **Józef Daniel, Tomasz Zamek-Gliszczyński** (redaktorzy merytoryczni)
Redakcja językowa: **Lidia Gruse**
Redakcja techniczna: **Janina Soboń**
Projekt okładki: **Artur Matulaniec**
Projekt graficzny: **Jakub Sowiński, Ewa Pawińska**
Koncepcja infografik: **Wacław Zawadowski**
Projekt infografik i wykonanie: **Piotr Bukowski, Ewa Pawińska**
Opracowanie graficzne: **Ewa Pawińska**
Fotoedycja: **Ignacy Składowski**
Skład i łamanie: **Elżbieta Walczak**

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne spółka z ograniczoną odpowiedzialnością
00-807 Warszawa, Aleje Jerozolimskie 96
Tel.: 22 576 25 00
Infolinia: 801 220 555
www.wsip.pl

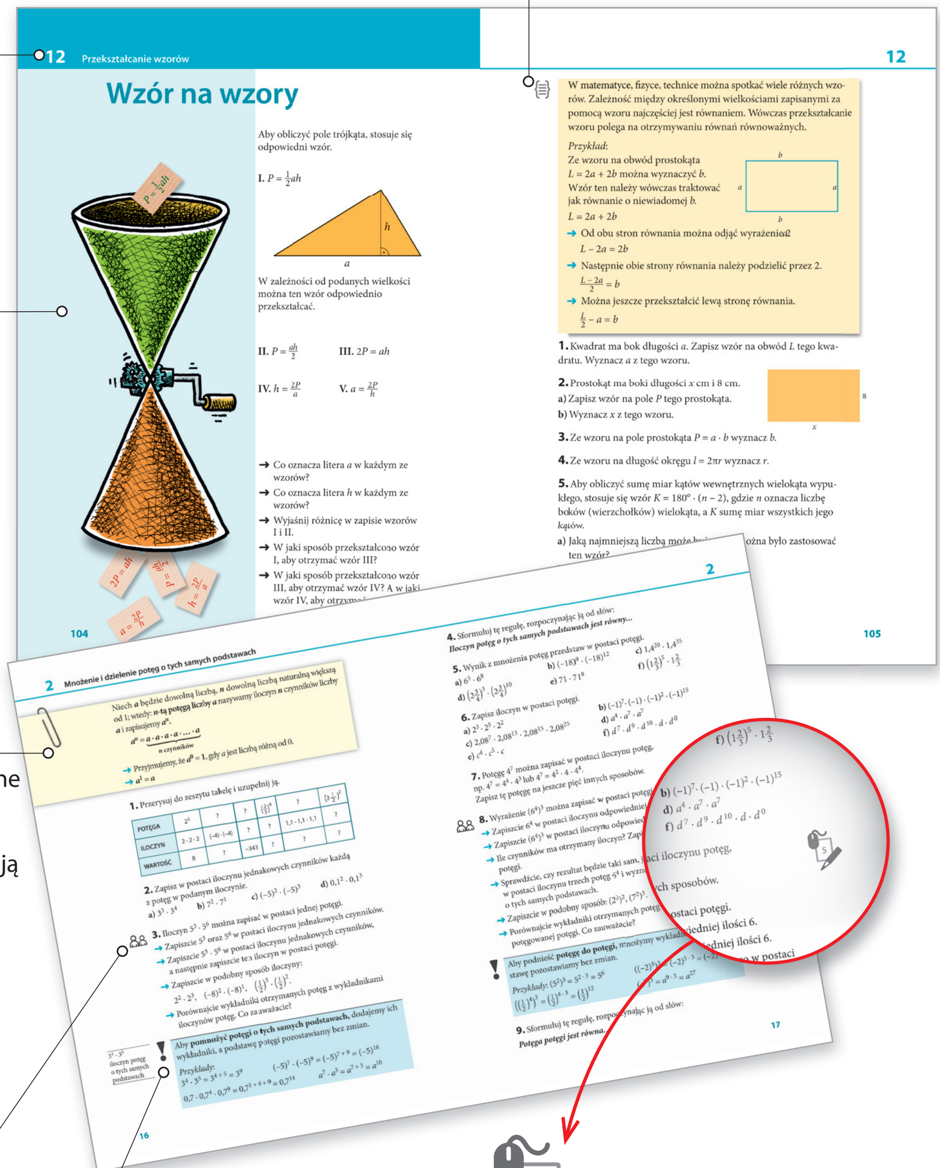
SPIS TREŚCI

O podręczniku

Treści matematyczne w „ramce z klamrami” to komentarze lub dodatkowe wyjaśnienia

Moduły, czyli poszczególne tematy, w obrębie podręcznika ponumerowano w sposób ciągły

Każdy moduł zaczyna się od **Startera**, który wprowadza w nową tematykę



Treści matematyczne umieszczone w „ramce ze spinaczem” ułatwiają przypomnienie i zebranie wiadomości

Zadanie to warto wykonać w grupie, dyskutując o jego rozwiązaniu, porównując rezultaty pracy, formułując spostrzeżenia i wnioski

Treści matematyczne w „ramce z wykrzyknikiem” powinieneś dobrze zrozumieć i zapamiętać, będą potrzebne w dalszej edukacji

numer lekcji w zeszycie ćwiczeń

Tą ikoną oznaczono **dodatkowe zadania**, które znajdziesz w papierowym zeszycie ćwiczeń oraz jego elektronicznej wersji na stronie internetowej

wsipnet.pl

Atrakcyjne **infografiki**, łączące ilustracje z informacjami, zachęcą Cię do zainteresowania się matematyką

Takie wyróżnienie oznacza **wiązkę zadaniową**, czyli serię zadań powiązanych ze sobą tematycznie

Symbol kłódki oznacza **zagadkę**

Rozszerzenie

– treści nieobowiązkowe, przeznaczone dla chętnych

Praca projektowa wraz ze wskazówkami do jej wykonania

Polecenie oznaczone strzałką odnosi się do każdego podpunktu zadania

Sprawdź sam siebie

– zestaw czterech zadań na zakończenie każdego modułu

Zadanie Problem
– jego rozwiązanie wymaga nieco więcej cierpliwości lub niekonwencjonalnego podejścia

Pora na kalkulator!
to rozdział poświęcony obliczeniom na kalkulatorze

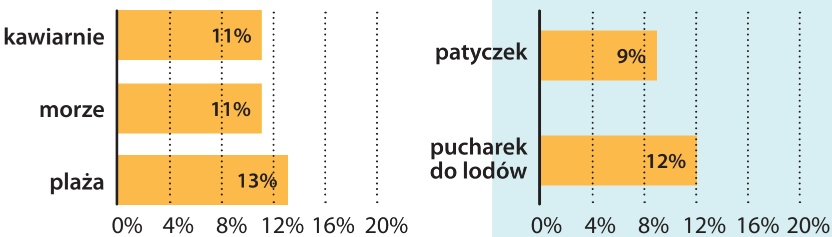
Jak to rozwiązać?
– tu znajdują się przykładowo rozwiązane zadania

Trening przed klasówką
to zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania umożliwiający powtórzenie materiału

Śmietankowe ponad wszystko

Badania TNS OBOP pokazują, że aż 38% Polaków lubi jeść lody o smaku śmietankowym, a 24% deklaruje, że jest to ich ulubiony smak. Na drugim miejscu uplasował się smak waniliowy (16%), a po nim czekoladowy (14%) i truskawkowy (10%). Lody o innych smakach mają nie więcej niż 3% zwolenników.
Polacy najczęściej wybierają lody śmietankowe, gdyż budzą one bardzo pozytywne skojarzenia. Polacy kojarzą je przede wszystkim z latem (19%), śmietaną (10%) i wakacjami (8%).

Najczęściej kojarzone z lodami śmietankowymi miejsca/przedmioty



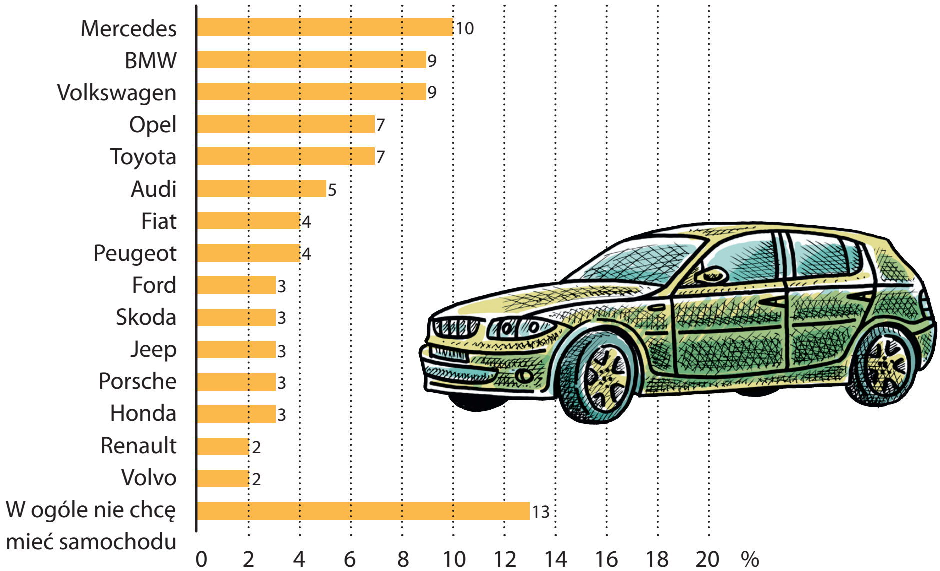
źródło: http://www.tns-global.pl/

- ➜ Jaki smak lodów podawali najczęściej respondenci opisanego badania?
- ➜ Wymień cztery najpopularniejsze smaki lodów.
- ➜ Sporządź diagram ilustrujący „lodowe" gusty Polaków.
- ➜ Jakie skojarzenia i u ilu procent badanych wywołują najczęściej lody śmietankowe?
- ➜ Zaproponuj ankietę, która mogłaby posłużyć Ci do przeprowadzenia podobnych badań w Twojej klasie.

1. Przeanalizuj diagramy ilustrujące wyniki badań przeprowadzonych przez TNS OBOP.

Jakiej marki samochód chcieliby posiadać Polacy, gdyby nie brali pod uwagę jego ceny?

Podstawa: ogół respondentów (N = 1005)
Na wykresie pokazano te marki, które uzyskały co najmniej 2% wskazań.

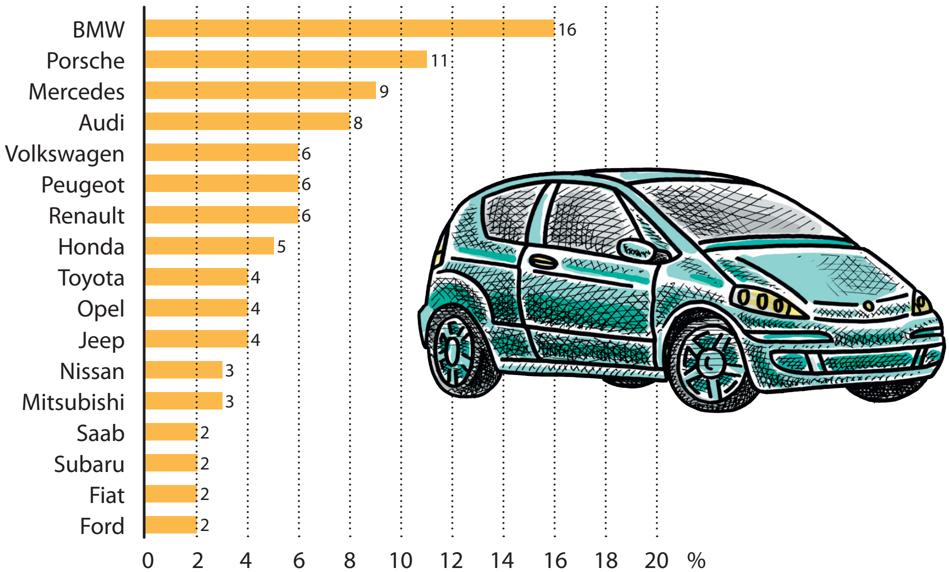


źródło: TNS OBOP, 22 września 2005

- → Jakiej marki samochód chciałby posiadać co dziesiąty Polak, gdyby nie brał pod uwagę ceny?
- → Co który Polak chciałby posiadać samochód marki Audi?
- → Która marka samochodu jest równie popularna jak Fiat?
- → Która marka samochodu jest bardziej popularna niż Opel?
- → Ile procent badanych zadeklarowało chęć posiadania samochodu?
- → Procenty na diagramie nie sumują się do stu. Dlaczego?

Jakiej marki samochód chcieliby posiadać uczniowie/studenci, gdyby nie brali pod uwagę jego ceny?

Podstawa: uczniowie/studenci (N = 140)
Na wykresie pokazano te marki, które uzyskały co najmniej 2% wskazań.



→ Wymień trzy najbardziej popularne marki samochodów w grupie uczniów i studentów.

→ Która marka samochodu jest równie popularna jak Nissan?

→ Wymień markę samochodu, która ma dwa razy więcej „sympatyków” niż Opel.

→ Ile razy więcej uczniów/studentów wskazało BMW niż Audi?

→ Czy jest taka marka samochodu, która była wskazywana równie często w grupie uczniów/studentów jak przez ogół respondentów?

→ Porównaj wyniki badań w obu grupach. Sformułuj spostrzeżenia.

2. Rysunek przedstawia wiek członków rodziny Stasia.

a) Podaj średni wiek rodziców Stasia.

b) Jaki jest średni wiek wszystkich członków rodziny?

Uwaga! Średnią arytmetyczną rozpatrujemy tylko dla wyników liczbowych.

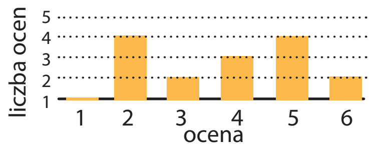
Średnią arytmetyczną wyników nazywamy iloraz sumy wszystkich wyników przez liczbę tych wyników.

Przykład: Średnia arytmetyczna liczb 4, 3, 8 równa jest 5, bo

$$\begin{array}{l} \textit{suma wyników} \longrightarrow \\ \textit{liczba wyników} \longrightarrow \end{array} \frac{4+3+8}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Jeśli w zadaniu mówimy o średniej, to mamy na myśli średnią arytmetyczną.

3. Na diagramie przedstawiono liczbę poszczególnych ocen uzyskanych na sprawdzianie. Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu.



4. Tabela przedstawia wyniki pchnięcia kulą w czasie rozgrywek sportowych między przedstawicielami klas pierwszych i drugich.

a) Oblicz średni wynik uzyskany przez przedstawicieli klas pierwszych, a następnie przez przedstawicieli klas drugich.

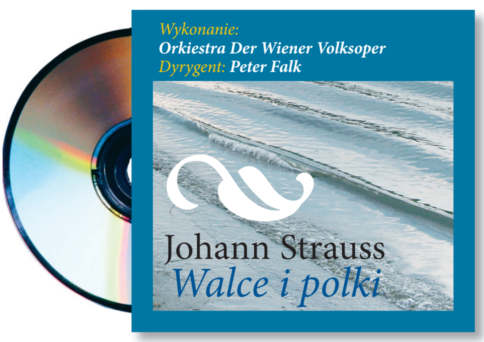
b) Oblicz średnią liczbę punktów zdobytych przez przedstawicieli klas pierwszych, a następnie przez przedstawicieli klas drugich.

Lp.	Klasa	Wynik [cm]	Punkty
1	2a	950	100
2	1b	849	99
3	2c	843	98
4	2b	808	97
5	1a	783	96

c) Oblicz średni wynik wszystkich zawodników oraz średnią liczbę punktów, jaką uzyskali wszyscy zawodnicy.

d) Które klasy uzyskały wynik powyżej średniej wszystkich zawodników?

5. Oblicz średni czas trwania jednego utworu na poniższej płycie. (Pamiętaj, że obliczenia dotyczą jednostek czasu).



1. Nad pięknym, modrym Dunajem – walc	10:03
2. Szybka polka	2:55
3. Róże południa	9:16
4. Odgłosy wiosny	6:58
5. Marsz perski	2:20
6. Życie artysty	9:35
7. Szybka polka węgierska	2:49
8. Wiedeńska krew – walc	9:27
9. Marsz z operetki „Baron Cygański”	2:52
Łączny czas:	56:15

6. Tabela przedstawia zestawienie liczby wybranych samogłosek w opisie płyty z zadania 5.

A	E	I	O	U
23	19	14	15	3

→ Która z samogłosek występuje w tym tekście najczęściej?

→ Wykonaj tabelę występowania samogłosek w zdaniu:
Matematyka jest królową nauk.
Która z samogłosek występuje w tym zdaniu najczęściej?

7. Rzucano 10 razy kostką. Oto wyniki: 2, 4, 6, 3, 1, 4, 2, 5, 5, 4.

a) Jaki był średni wynik rzutu kostką?

b) Jaki wynik uzyskiwano najczęściej?

Modalną wyników nazywamy wynik najczęściej występujący w danym zbiorze wyników. Modalna nosi też nazwę: **moda**, **dominanta**, **wartość najczęstsza.**
Przykłady:
W zbiorze wyników {kot, lew, kot, lew, koń, kot} modalną jest kot.
W zbiorze wyników {1, 2, 3, 1, 2, 1} modalną jest 1, a w zbiorze wyników {1, 2, 3, 1, 2, 1, 2} są dwie modalne: 1 i 2.

Jeśli w zbiorze wyników są dwie modalne, to taki zbiór wyników nazywa się dwumodalny.

8. W grze Twister prowadzący losuje kolejno kolory pól, które muszą zająć uczestnicy. Co jest modalną dziewięciu kolejnych losowań koloru w tej grze, jeśli wylosowano:  ?

9. Określ modalną w podanym zbiorze wyników.

a) 1, 5, 2, 5, 3, 3, 6, 4, 5, 4

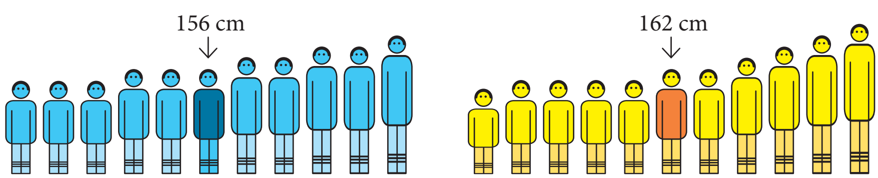
b) a, c, b, a, b, d, c, d, a

10. Zawodników dwóch drużyn piłkarskich ustawiono według wzrostu. W każdej jedenastce pośrodku stał bramkarz.

→ Na którym miejscu w każdym z szeregów stał bramkarz?

→ Czy prawdą jest, że połowa zawodników drużyny niebieskiej ma co najmniej 156 cm wzrostu?

→ Ilu zawodników żółtej drużyny ma co najmniej 162 cm wzrostu?



Medianą wyników nazywamy:
– wynik znajdujący się pośrodku uporządkowanego zbioru wyników, jeśli liczba wyników jest nieparzysta,
– średnią arytmetyczną dwóch wyników znajdujących się pośrodku uporządkowanego zbioru wyników, jeśli liczba wyników jest parzysta.

Medianę nazywamy także **wartością środkową**.

Aby wyznaczyć medianę, porządkujemy wyniki od najmniejszego do największego.

Trzeba rozpatrzyć dwa przypadki:

→ **Jeśli liczba wyników *n* jest liczbą nieparzystą**, wówczas mediana jest wynikiem na środkowej pozycji $\frac{n+1}{2}$.

Przykłady:

W grupie 5 wyników {0, 1, 2, 1, 3}, po ich uporządkowaniu, mediana jest na 3. pozycji $\left(\frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3\right)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \textit{mediana} & & \\ & & \downarrow & & \\ 0, & 1, & \boxed{\mathbf{1}}, & 2, & 3 \\ 1. & 2. & \underline{3.} & 4. & 5. \end{array}$$

W grupie 99 wyników, po ich uporządkowaniu, mediana jest na 50. pozycji $\left(\frac{99+1}{2} = \frac{100}{2} = 50\right)$.

→ **Jeśli liczba wyników *n* jest liczbą parzystą**, wówczas mediana jest średnią arytmetyczną wyników na dwóch środkowych pozycjach, tzn. na pozycji $\frac{n}{2}$ oraz $\frac{n}{2} + 1$.

Przykłady:

W grupie 6 wyników {0, 1, 2, 1, 3, 2}, po ich uporządkowaniu, mediana jest średnią wyniku na 3. i 4. miejscu $\left(\frac{6}{2} = 3 \text{ i } \frac{6}{2} + 1 = 4\right)$.

$$\textit{mediana}$$

$$\frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & \boxed{\mathbf{1}}, & \boxed{\mathbf{2}}, & 2, & 3 \\ 1. & 2. & \underline{3.} & \underline{4.} & 5. & 6. \end{array}$$

W grupie 100 wyników, po ich uporządkowaniu, mediana jest średnią wyniku na 50. i 51. miejscu $\left(\frac{100}{2} = 50 \text{ i } \frac{100}{2} + 1 = 51\right)$.

Uwaga! Medianę rozpatrujemy tylko dla wyników liczbowych.

11. Podaj modalną i medianę wyników.

a) 1, 2, 2, 3, 7, 7, 7 **b)** 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6

c) 0, 1, 2, 2, 3, 5 **d)** 1, 1, 2, 3, 5, 5, 5, 6

12. Jak wyznaczyć medianę w zbiorze wyników uporządkowanych od najmniejszego do największego, jeżeli analizowanych jest

a) 9 wyników? **b)** 45 wyników? **c)** 8 wyników? **d)** 56 wyników?

13. Łukasz otrzymał na koniec klasy pierwszej następujące oceny: 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6.

a) Oblicz średnią ocen Łukasza.

b) Która ocena jest modalną ocen Łukasza?

c) Jaka jest mediana ocen Łukasza?

Średnia arytmetyczna, moda i mediana to liczby charakteryzujące zbiór wyników.

14. Tabela przedstawia zestawienie rozmiarów obuwia w grupie 15 osób.

Uczeń	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10	A11	A12	A13	A14	A15
Nr buta	36	35	39	38	37	40	38	39	40	37	41	39	38	43	36

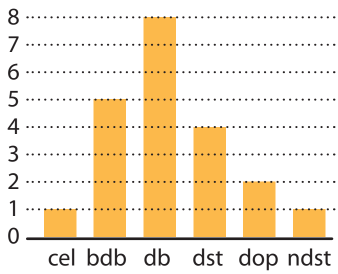
a) Jaka jest średnia rozmiarów butów w tej grupie?

b) Jaka jest modalna numerów butów w tej grupie?

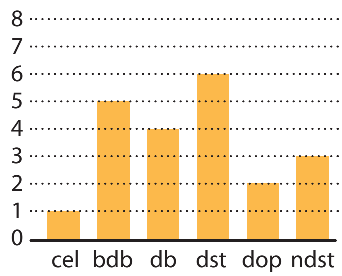
c) Jaka jest mediana numerów butów w tej grupie?

15. Odczytajcie z diagramu medianę i modalną ocen.

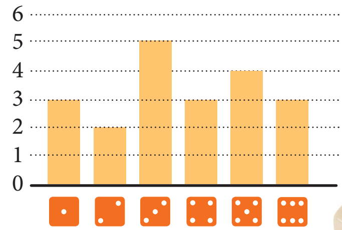
a)

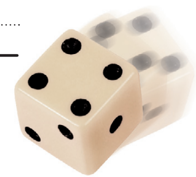


b)



16. Na diagramie przedstawiono wyniki rzutów kostką. Wyznacz średnią, modalną i medianę tych wyników.





17. Tabela zawiera wyniki pomiaru wzrostu w klasie 2c.

Wzrost (w cm) uczniów klasy 2c

C01	145	C06	160	C11	173	C16	158	C21	165
C02	155	C07	178	C12	170	C17	155	C22	173
C03	165	C08	157	C13	162	C18	182	C23	159
C04	178	C09	158	C14	160	C19	160	C24	181
C05	182	C10	160	C15	155	C20	162	C25	173

Chłopcy

Dziewczynki

a) Sporządź diagramy ilustrujące wyniki z tabeli.

b) Wyznacz modalną, medianę i średnią wzrostu chłopców.

c) Wyznacz modalną, medianę i średnią wzrostu dziewcząt.

d) Wyznacz modalną, medianę i średnią wzrostu uczniów w klasie 2c.

3

Zaproponuj takie dwa zbiory dziesięciu wyników, by miały

a) takie same średnie, a różne mody i mediany.

b) takie same mody, a różne średnie i mediany.

c) takie same mediany, a różne średnie i mody.

Sprawdź sam siebie

Oto wyniki ze sprawdzianu.

Uczeń	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10	A11	A12	A13	A14	A15
ocena	5	2	3	4	5	6	4	3	1	5	6	1	4	3	5

A. Uporządkuj dane przedstawione na diagramie.

B. Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu.

C. Wyznacz modę ocen z tego sprawdzianu.

D. Wskaż medianę ocen z tego sprawdzianu.

4

czytanka

Spójrz na podstawy !

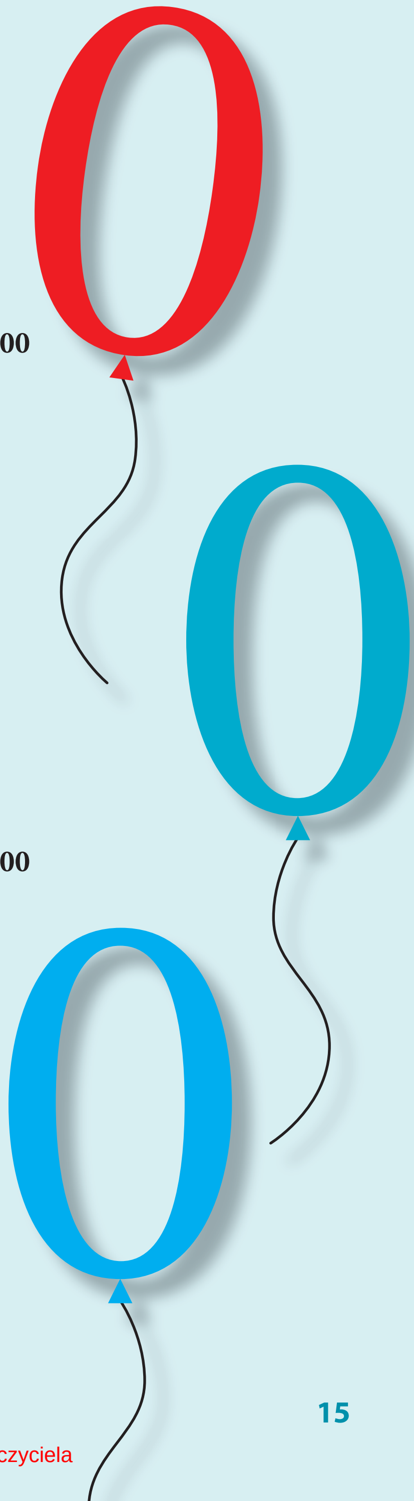
Spójrz na dywaniki liczbowe.

$1 \cdot 10000000000 =$
$10 \cdot 1000000000 =$
$100 \cdot 100000000 =$
$1000 \cdot 10000000 =$
$10000 \cdot 1000000 =$
$100000 \cdot 100000 =$
$1000000 \cdot 10000 =$
$10000000 \cdot 1000 =$
$100000000 \cdot 100 =$
$1000000000 \cdot 10 =$
$10000000000 \cdot 1 =$

10 000 000 000

$10^0 \cdot 10^{10} =$
$10^1 \cdot 10^9 =$
$10^2 \cdot 10^8 =$
$10^3 \cdot 10^7 =$
$10^4 \cdot 10^6 =$
$10^5 \cdot 10^5 =$
$10^6 \cdot 10^4 =$
$10^7 \cdot 10^3 =$
$10^8 \cdot 10^2 =$
$10^9 \cdot 10^1 =$
$10^{10} \cdot 10^0 =$

10 000 000 000



→ Porównaj oba zestawy iloczynów.
→ Jaką dostrzegasz prawidłowość?

Niech a będzie dowolną liczbą, n dowolną liczbą naturalną większą od 1; wtedy: ***n*-tą potęgą liczby *a*** nazywamy iloczyn n czynników liczby a i zapisujemy a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

→ Przyjmujemy, że $a^0 = 1$, gdy a jest liczbą różną od 0.

→ $a^1 = a$

1. Przerysuj do zeszytu tabelę i uzupełnij ją.

Potęga	2^3	?	?	$\left(\frac{2}{5}\right)^4$	?	$\left(3\frac{1}{2}\right)^2$
Iloczyn	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$(-4) \cdot (-4)$	?	?	$1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1$	?
Wartość	8	?	-343	?	?	?

2. Zapisz w postaci iloczynu jednakowych czynników każdą z potęg w podanym iloczynie.

a) $3^3 \cdot 3^4$ **b)** $7^2 \cdot 7^1$ **c)** $(-5)^2 \cdot (-5)^3$ **d)** $0{,}1^2 \cdot 0{,}1^3$

3. Iloczyn $5^3 \cdot 5^6$ można zapisać w postaci jednej potęgi.

→ Zapiszcie 5^3 oraz 5^6 w postaci iloczynu jednakowych czynników.

→ Zapiszcie $5^3 \cdot 5^6$ w postaci iloczynu jednakowych czynników, a następnie zapiszcie ten iloczyn w postaci potęgi.

→ Zapiszcie w podobny sposób iloczyny:

$2^2 \cdot 2^3$, $(-8)^2 \cdot (-8)^1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

→ Porównajcie wykładniki otrzymanych potęg z wykładnikami iloczynów potęg. Co zauważacie?

$3^4 \cdot 3^5$
iloczyn potęg o tych samych podstawach

!

Aby **pomnożyć potęgi o tych samych podstawach,** dodajemy ich wykładniki, a podstawę potęgi pozostawiamy bez zmian.

Przykłady:

$3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$ $(-5)^7 \cdot (-5)^9 = (-5)^{7+9} = (-5)^{16}$

$0{,}7 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}7^9 = 0{,}7^{1+4+9} = 0{,}7^{14}$ $a^7 \cdot a^3 = a^{7+3} = a^{10}$

4. Sformułuj tę regułę, rozpoczynając ją od słów:
Iloczyn potęg o tych samych podstawach jest równy...

5. Wynik z mnożenia potęg przedstaw w postaci potęgi.

a) $6^5 \cdot 6^8$ **b)** $(-18)^9 \cdot (-18)^{12}$ **c)** $1{,}4^{20} \cdot 1{,}4^{35}$

d) $\left(2\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(2\frac{3}{4}\right)^{10}$ **e)** $71 \cdot 71^8$ **f)** $\left(1\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 1\frac{2}{3}$

6. Zapisz iloczyn w postaci potęgi.

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^2$ **b)** $(-1)^7 \cdot (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^{15}$

c) $2{,}08^7 \cdot 2{,}08^{13} \cdot 2{,}08^{15} \cdot 2{,}08^{25}$ **d)** $a^4 \cdot a^7 \cdot a^7$

e) $c^4 \cdot c^5 \cdot c$ **f)** $d^7 \cdot d^9 \cdot d^{10} \cdot d \cdot d^0$

7. Potęgę 4^7 można zapisać w postaci iloczynu potęg, np. $4^7 = 4^4 \cdot 4^3$ lub $4^7 = 4^2 \cdot 4 \cdot 4^4$.
Zapisz tę potęgę na jeszcze pięć innych sposobów.

5

8. Wyrażenie $(6^4)^3$ można zapisać w postaci potęgi.

→ Zapiszcie 6^4 w postaci iloczynu odpowiedniej ilości 6.

→ Zapiszcie $(6^4)^3$ w postaci iloczynu odpowiedniej ilości 6.

→ Ile czynników ma otrzymany iloczyn? Zapiszcie go w postaci potęgi.

→ Sprawdźcie, czy rezultat będzie taki sam, jeśli $(6^4)^3$ przedstawicie w postaci iloczynu trzech potęg 6^4 i wyznaczycie iloczyn potęg o tych samych podstawach.

→ Zapiszcie w podobny sposób: $(2^3)^2$, $(7^2)^5$.

→ Porównajcie wykładniki otrzymanych potęg z wykładnikami potęgowanej potęgi. Co zauważacie?

$(5^2)^3$
potęga potęgi

Aby podnieść **potęgę do potęgi,** mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmian.

Przykłady: $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$ $((-2)^5)^3 = (-2)^{5 \cdot 3} = (-2)^{15}$

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ $(a^9)^3 = a^{9 \cdot 3} = a^{27}$

9. Sformułuj tę regułę, rozpoczynając ją od słów:
Potęga potęgi jest równa…

10. Zapisz podane wyrażenie w postaci potęgi.

a) $(8^3)^4$ **b)** $((-10)^6)^7$ **c)** $((0{,}6)^4)^7$

d) $\left(\left(2\frac{2}{3}\right)^3\right)^9$ **e)** $(x^{10})^{15}$ **f)** $((z^4)^6)^{10}$

11. Potęgę 7^{48} można przedstawić jako $(7^4)^{12}$. W postaci jakich innych jeszcze potęg potęgi można przedstawić 7^{48}?

12. Zapiszcie potęgi w liczniku i mianowniku w postaci iloczynów, skróćcie ułamek i zapiszcie wynik w postaci potęgi.

a) $\frac{5^3}{5^2}$ **b)** $\frac{2^{10}}{2^5}$ **c)** $\frac{3^7}{3}$ **d)** $\frac{10^6}{10^4}$ **e)** $\frac{7^9}{7^5}$

→ Jaką prawidłowość zauważacie?

$$\begin{tikzcd} 8^7 \arrow[r, bend left, "\cdot 8^3"] & 8^{10} \arrow[l, bend left, ": 8^3"] \end{tikzcd}$$

13. Wiedząc, że $8^7 \cdot 8^3 = 8^{10}$, można zapisać:
$8^{10} : 8^7 = 8^3$ oraz $8^{10} : 8^3 = 8^7$.

a) Wiedząc, że $9^8 \cdot 9^4 = 9^{12}$, zapisz ilorazy:
$9^{12} : 9^8$ i $9^{12} : 9^4$ w postaci potęg.

b) Wiedząc, że $1{,}1^9 \cdot 1{,}1^5 = 1{,}1^{14}$, zapisz ilorazy:
$1{,}1^{14} : 1{,}1^9$ i $1{,}1^{14} : 1{,}1^5$ w postaci potęg.

→ Jaki jest związek między wykładnikami w zapisanych ilorazach?

$5^4 : 5^2$
iloraz potęg
o tych samych
podstawach

Aby **podzielić potęgi o tych samych podstawach,** odejmujemy ich wykładniki, a podstawę potęgi pozostawiamy bez zmian.

Przykłady:

$5^9 : 5^6 = 5^{9-6} = 5^3$ $(-4)^5 : (-4)^2 = (-4)^{5-2} = (-4)^3$

$\frac{0{,}25^{12}}{0{,}25^8} = 0{,}25^{12-8} = 0{,}25^4$ $a^7 : a^3 = a^{7-3} = a^4 \ (a \neq 0)$

14. Przedstaw iloraz w postaci potęgi.

a) $8^6 : 8^4$ **b)** $\frac{5^6}{5^3}$ **c)** $3^9 : 3^5$

d) $10^9 : 10^6$ **e)** $(-5)^9 : (-5)^5$ **f)** $(-3)^8 : (-3)^5$

g) $(-4)^{15} : (-4)^{11}$ **h)** $(-2)^{23} : (-2)^{20}$ **i)** $1{,}5^9 : 1{,}5^7$

j) $\frac{(-0{,}2)^{12}}{(-0{,}2)^9}$ **k)** $\left(\frac{7}{9}\right)^{21} : \left(\frac{7}{9}\right)^{19}$ **l)** $\left(2\frac{2}{3}\right)^8 : \left(2\frac{2}{3}\right)^6$

15. Oblicz.

a) $(5^6 \cdot 5^{12}) : (5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^3)$

b) $(3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^7) : (3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^3)$

c) $(2^{10} : 2^7) \cdot (2^{18} : 2^{14})$

d) $\dfrac{0{,}1^5 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}1^7}{0{,}1^{20} : 0{,}1^8}$

e) $\dfrac{(-3)^{12} : (-3)^4}{(-3)^8 : (-3)^3}$

f) $\dfrac{(-2{,}5)^7 : (-2{,}5)^2 \cdot (-2{,}5)^5}{(-2{,}5)^3 \cdot ((-2{,}5)^2)^3}$

16. Potęgę 7^4 przedstaw w postaci ilorazu potęg o podstawie 7 na pięć różnych sposobów.

17. Oblicz, korzystając z praw działań na potęgach.

a) $(10^3)^4 : (10^2)^5$

b) $((-2)^8)^3 : ((-2)^3)^6$

c) $(-1{,}5)^8 \cdot (-1{,}5)^6 : ((-1{,}5)^2)^7$

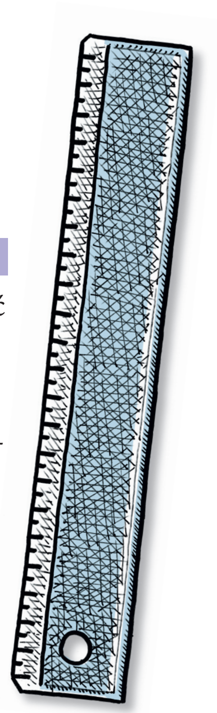
d) $\left(\dfrac{2^7 \cdot 2^3 \cdot 2^5}{2^{16} \cdot 2^4}\right)^3$

e) $\dfrac{((-3)^3 \cdot (-3)^6 \cdot (-3))^3}{((-3)^{18} : (-3)^{12})^5}$

f) $\dfrac{\left(1\frac{1}{2}\right)^8 : \left(1\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)}$

18. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{(10^2 + 11^2 + 12^2)^{1000}}{(13^2 + 14^2)^{1000}}$.

POTĘGI A JEDNOSTKI



Liczby zaczynające się od 1 i zakończone zerami możemy zapisywać za pomocą potęgi liczby 10, np. $1\,000\,000 = 10^6$.

I. Wiadomo, że 1 km = 1000 m = 10 000 dm = 100 000 cm = = 1 000 000 mm. Wyraź 100 km w metrach, decymetrach, centymetrach i milimetrach. Wyniki przedstaw w postaci potęg liczby 10.

II. Wiadomo, że 1 km^2 = 1 000 000 m^2 = 100 000 000 dm^2 = = 10 000 000 000 cm^2. Zamień 10 km^2 na m^2, dm^2 i cm^2. Wyniki przedstaw w postaci potęg liczby 10.

III. Zamień 10 km^3 na m^3, dm^3 i cm^3. Wyniki przedstaw w postaci potęg liczby 10.

IV. Prędkość światła wynosi około 300 000 km/s. Jaka jest odległość między Ziemią a Słońcem, jeżeli światło potrzebuje około 8 minut na jej przebycie? Wynik zapisz w postaci iloczynu liczby przez potęgę liczby 10.

Zauważ, że:

$1^3 = 1^2 = 1$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = 3^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = 6^2$

Dopisz dwie kolejne równości według podanej zasady, sprawdź ich poprawność i sformułuj odpowiednie twierdzenie dla *n* kolejnych liczb naturalnych.

Niektóre liczby można zapisywać w postaci różnych potęg, np.

$$81 = \begin{cases} 81^1 \\ 9^2 \\ 3^4 \end{cases}$$

Jaki jest związek między podstawami tych potęg? Sprawdź dostrzeżoną prawidłowość dla 16 i 625 oraz dla kilku innych liczb.

Sprawdź sam siebie

A. Przedstaw iloczyn w postaci potęgi.

a) $3^4 \cdot 3^{11}$ **b)** $(-2)^7 \cdot (-2)^4$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ **d)** $0{,}2^5 \cdot 0{,}2^{16} \cdot 0{,}2^3$

B. Przedstaw iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{5^9}{5^5}$ **b)** $(-13)^{16} : (-13)^7$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$ **d)** $\frac{1{,}8^{16}}{1{,}8^{11}}$

C. Przedstaw potęgę potęgi w postaci potęgi.

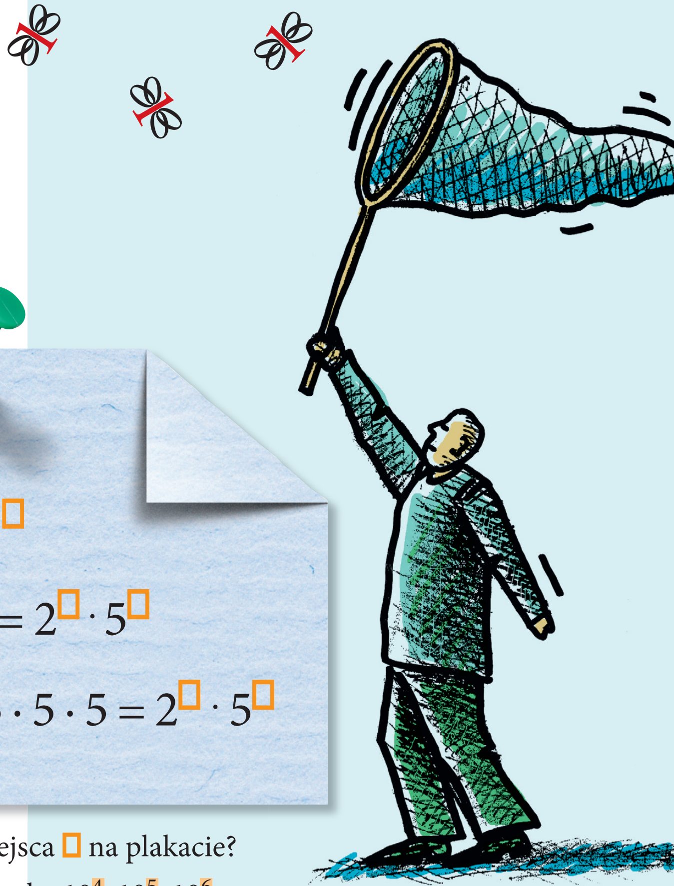
a) $(6^3)^2$ **b)** $((-3)^2)^1$

c) $(0{,}4^2)^2$ **d)** $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^4$

D. Oblicz.

a) $((5^6 \cdot 5^3) : (5^8 : 5))^3$ **b)** $((3^6 : 3^4) : (3^2 \cdot 3^3))^2$

Spójrz na wykładniki !



Na plakacie przedstawiono kolejne potęgi liczby 10.

$$10^{1} = 10 = 2 \cdot 5 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$$

$$10^{2} = 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$$

$$10^{3} = 1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$$

- ➜ Jakie liczby należy wpisać w miejsca $\square$ na plakacie?
- ➜ Przedstaw w podobny sposób liczby 10^{4}, 10^{5}, 10^{6}.
- ➜ Jaką prawidłowość zauważasz?
- ➜ Na podstawie dostrzeżonej prawidłowości podaj liczby, które należy wpisać w miejsca $\square$.

  $10^{7} = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$ $\qquad$ $10^{8} = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

  $10^{\square} = 2^{11} \cdot 5^{11}$ $\qquad$ $10^{\square} = 2^{21} \cdot 5^{21}$
- ➜ A jakie liczby należy wpisać w miejsca $\square$ w tych przykładach?

  $10^{12} = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$ $\qquad$ $10^{\square} = 2^{17} \cdot 5^{17}$
- ➜ Przedstaw w podobny sposób liczby 10^{13} i 10^{16}.
- ➜ Jaką zależność zauważasz?

1. Wynik mnożenia $2^3 \cdot 4^3$ przedstawcie w postaci potęgi iloczynu, wykorzystując poniższe zapisy. Ustalcie kolejność przekształceń danego iloczynu i zapiszcie otrzymaną równość w zeszycie.

$2^3 \cdot 4^3 =$ z definicji potęgi

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ z przemienności mnożenia

$(2 \cdot 4)^3$

$2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 =$ z definicji potęgi

→ Przekształćcie w podobny sposób iloczyn.

a) $3^2 \cdot 5^2$ **b)** $4^3 \cdot 5^3$ **c)** $0{,}2^5 \cdot 5^5$

→ Co zauważacie?

2. Przyjrzyj się równościom:

$3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$
$= (3 \cdot 4 \cdot 5)^3$

→ Zapisz analogiczne równości dla podanego iloczynu.

a) $9^6 \cdot 3^6 \cdot 17^6$ **b)** $21^4 \cdot 3^4 \cdot a^4$ **c)** $9^3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$

3. Przyjrzyj się równościom:

$(3 \cdot 7 \cdot 8)^3 = 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$
$= 3^3 \cdot 7^3 \cdot 8^3$

→ Zapisz analogicznie potęgę w postaci iloczynu potęg.

a) $(6 \cdot 7 \cdot 8)^5$ **b)** $(21 \cdot 3 \cdot a)^2$ **c)** $(a \cdot b \cdot c)^6$

$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6$

iloczyn potęg — potęga iloczynu

! Aby **pomnożyć potęgi o tych samych wykładnikach**, mnożymy ich podstawy, a wykładnik pozostawiamy bez zmian.

Przykłady: $5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6$, $2^3 \cdot a^3 = (2 \cdot a)^3$, $x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = (x \cdot y \cdot z)^3$

4. Na podstawie reguły dotyczącej mnożenia potęg o tych samych wykładnikach można sformułować twierdzenie: *Iloczyn potęg o jednakowych wykładnikach jest równy potędze o podstawie równej iloczynowi podstaw wszystkich czynników i niezmienionym wykładniku.*

→ Sformułujcie to twierdzenie, rozpoczynając je od słów:
Potęga iloczynu jest równa…

5. Zapisz w postaci potęgi.

a) $5^3 \cdot 9^3$ **b)** $8^6 \cdot (-3)^6$ **c)** $(-4)^8 \cdot (-3)^8$

d) $1{,}5^7 \cdot 0{,}6^7$ **e)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{12}$ **f)** $\left(1\frac{1}{5}\right)^4 \cdot (0{,}24)^4$

g) $2^5 \cdot a^5$ **h)** $(-7)^{11} \cdot c^{11}$ **i)** $e^{15} \cdot f^{15}$

6. Zapisz w postaci iloczynu potęg.

a) $(5 \cdot 7)^4$ **b)** $(9 \cdot 16)^3$ **c)** $(-12 \cdot 8)^2$

d) $(1{,}2 \cdot 0{,}8)^7$ **e)** $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{21}\right)^6$ **f)** $\left(2\frac{4}{7} \cdot \frac{11}{19}\right)^5$

g) $(27 \cdot x)^{13}$ **h)** $(-5 \cdot z)^{17}$ **i)** $(c \cdot d)^{14}$

7. Zapisz w postaci potęgi.

a) $14^5 \cdot 93^5 \cdot 18^5$ **b)** $24^6 \cdot (-4)^6 \cdot x^6$ **c)** $78^{17} \cdot 21^{17} \cdot y^{17} \cdot z^{17}$

8. Zapisz w postaci iloczynu potęg o tym samym wykładniku.

a) $(35 \cdot 36 \cdot 37)^8$ **b)** $(-24 \cdot a \cdot b)^9$ **c)** $(x \cdot y \cdot z)^{10}$

9. Przedstaw w postaci potęgi i oblicz.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2001} \cdot 2^{2001}$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot 5^6 \cdot 10^6$ **c)** $0{,}25^4 \cdot 4^4 \cdot 10^4$

10. Przedstaw na różne sposoby 24^6 w postaci iloczynu potęg o tym samym wykładniku.

11. Przedstaw na różne sposoby 24^6 w postaci potęgi iloczynu.

12. Przyjrzyjcie się podanym obliczeniom.

Sposób Moniki

$$\frac{8^6}{4^6} = \frac{262144}{4096} = 64$$

Sposób Elizy

$$\frac{8^6}{4^6} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{8}{4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

→ Opiszcie sposoby obliczeń proponowane przez Monikę i Elizę.

→ Sposobem Elizy obliczcie wartości podanych ilorazów.

I. $\frac{9^4}{3^4}$ **II.** $\frac{21^2}{7^2}$ **III.** $\frac{404^3}{101^3}$

→ Eliza zauważyła, że

$$\frac{8^6}{4^6} = \frac{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{8}{4}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{8}{4} = \left(\frac{8}{4}\right)^6.$$

→ Przedstawcie analogicznie ilorazy w przykładach I, II i III.

→ Co zauważacie?

→ Obliczcie jak najszybciej wartości ilorazów: $\frac{15^5}{5^5}$, $\frac{56^3}{8^3}$, $\frac{420^2}{7^2}$.

$100^5 : 25^5 = (100 : 25)^5$

iloraz potęg

potęga ilorazu

$\frac{13^5}{7^5} = \left(\frac{13}{7}\right)^5$

! Aby **podzielić potęgi o tych samych wykładnikach**, dzielimy ich podstawy, a wykładnik pozostawiamy bez zmian. Podstawa potęgi w dzielniku musi być różna od 0.

Przykłady:

$100^5 : 25^5 = (100 : 25)^5$ $\qquad$ $\frac{12^4}{7^4} = \left(\frac{12}{7}\right)^4$ $\qquad$ $\frac{a^6}{5^6} = \left(\frac{a}{5}\right)^6$

13. Jakie liczby należy wpisać w wolne miejsca w poszczególnych przykładach?

I. $\left(\frac{8}{4}\right)^{16} = \frac{8^{16}}{4^{\square}}$ $\qquad$ **II.** $\left(\frac{9}{3}\right)^5 = \frac{9^{\square}}{3^5}$ $\qquad$ **III.** $\left(\frac{56}{8}\right)^{11} = \frac{56^{\square}}{8^{\square}}$

14. Zapisz w postaci potęgi ilorazu.

a) $14^7 : 7^7$ $\qquad$ **b)** $(-48)^3 : 8^3$ $\qquad$ **c)** $(-81)^4 : (-27)^4$

d) $2{,}5^4 : 0{,}5^4$ $\qquad$ **e)** $(-2{,}6)^3 : 1{,}3^3$ $\qquad$ **f)** $0{,}42^2 : 0{,}07^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{4}{7}\right)^5$ $\qquad$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6 : \left(\frac{3}{5}\right)^6$ $\qquad$ **i)** $\left(\frac{4}{9}\right)^5 : (0{,}4)^5$

15. Zapisz w postaci potęgi ilorazu.

a) $\frac{7^{13}}{9^{13}}$ $\qquad$ **b)** $\frac{(-3)^{10}}{6^{10}}$ $\qquad$ **c)** $\frac{(-0{,}8)^3}{(-2{,}4)^3}$

d) $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$ $\qquad$ **e)** $\frac{\left(1\frac{1}{6}\right)^3}{\left(1\frac{5}{7}\right)^3}$ $\qquad$ **f)** $\frac{0{,}6^4}{\left(2\frac{2}{5}\right)^4}$

g) $\frac{a^{15}}{9^{15}}$ $\qquad$ **h)** $\frac{b^{14}}{6^{14}}$ $\qquad$ **i)** $c^{13} : 5^{13}$

16. Zapisz w postaci ilorazu potęg o tym samym wykładniku.

a) $(5 : 7)^4$ $\qquad$ **b)** $(9 : 17)^3$ $\qquad$ **c)** $(-15 : 8)^2$

d) $(1{,}5 : 0{,}7)^7$ $\qquad$ **e)** $\left(\frac{2}{5} : \frac{13}{23}\right)^6$ $\qquad$ **f)** $\left(2\frac{4}{9} : \frac{13}{17}\right)^5$

g) $\left(\frac{2}{7}\right)^8$ $\qquad$ **h)** $\left(\frac{-6}{11}\right)^9$ $\qquad$ **i)** $\left(-\frac{9}{13}\right)^{10}$

j) $(b : 7)^{15}$ $\qquad$ **k)** $\left(\frac{c}{3}\right)^{21}$ $\qquad$ **l)** $(a : 3)^2$

17. Przeanalizuj przykłady.

$$\frac{12^2 \cdot 3^2}{18^2} = \frac{(12 \cdot 3)^2}{18^2} = \frac{36^2}{18^2} = \left(\frac{36}{18}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\frac{12^2 \cdot 3^2}{18^2} = \frac{(12 \cdot 3)^2}{18^2} = \left(\frac{12 \cdot \cancel{3}^{1}}{\cancel{18}_{6}}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{12}^{2} \cdot 1}{\cancel{6}_{1}}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Oblicz.

a) $\frac{6^8 \cdot 5^8}{15^8}$ b) $\frac{7^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{21^4}$ c) $\frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3}{8^3 \cdot 5^3}$

d) $\frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 4^6 \cdot 5^6}{2^6 \cdot 6^6}$ e) $\frac{2^9 \cdot 3^9 \cdot 4^9 \cdot 5^9 \cdot 6^9}{8^9 \cdot 9^9}$ f) $\frac{4^6}{5^6} \cdot \frac{6^6}{7^6} \cdot \frac{5^6}{8^6} \cdot \frac{14^6}{3^6}$

18. Oblicz.

a) $(5^5 \cdot 0{,}2^5) \cdot (10^5 : 2^5)$ b) $(4^4 \cdot 4{,}5^4) : (18^4 : 9^4)$

c) $(2^6 \cdot 5^6 \cdot 8^6)^3 : (20^9 \cdot 4^9)^2$ d) $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2)^3 : (5^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2)^3$

e) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{16}\right)^3\right) \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3 : \left(\frac{20}{9}\right)^3\right)$ f) $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{6}{25}\right)^4\right)^5 \cdot \left(\left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{16}{35}\right)^4\right)^5$

Pamiętaj, że nie można dzielić przez 0.

19. Przekształć wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $x^{10} : ((x^7 : x^4) \cdot x^2)$ b) $(y^{12} : (y^6 : y^2)) : (y^9 : (y^5 \cdot y^2))$

c) $\frac{(a^4)^2 \cdot (a^3)^2}{(a^7)^2}$ d) $\frac{(2a)^4 \cdot (3b)^4 \cdot (-5c)^4}{(-4a)^4 \cdot (9b)^4 \cdot (-10d)^4}$

→ Czy w miejsce liter mogą być podstawione dowolne liczby? Podaj odpowiednie warunki.

Która z liczb jest większa: 22^{11} czy 11^{22}?

Sprawdź sam siebie

A. Oblicz.

a) $2{,}5^5 \cdot 4^5$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6$ c) $0{,}2^{10} \cdot 5^{10}$ d) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4$

B. Oblicz.

a) $64^4 : 16^4$ b) $0{,}25^4 : 0{,}05^4$ c) $\left(\frac{5}{9}\right)^3 : \left(\frac{25}{27}\right)^3$ d) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 : 0{,}25^3$

C. Zapisz w jak najprostszej postaci.

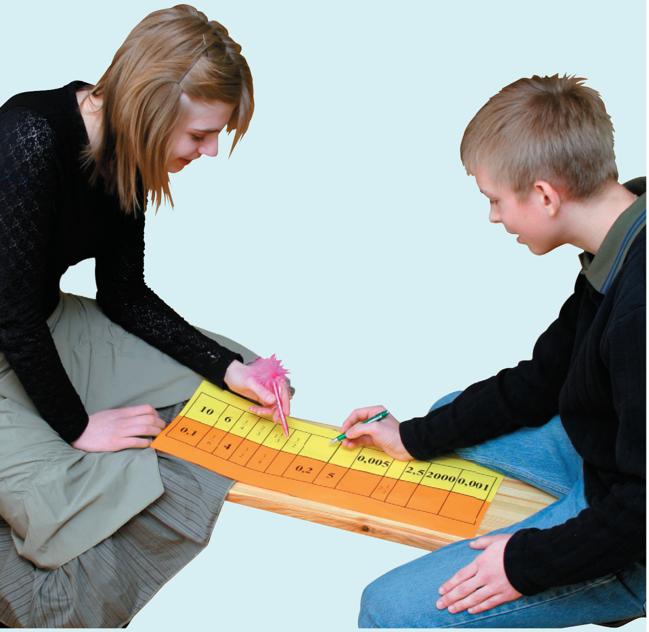
a) $a^8 \cdot b^8 \cdot c^8$ b) $a^9 : 2^9$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^7 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^7$ d) $\frac{(3x)^5 \cdot (4y)^5}{(2y)^5 \cdot (9z)^5}$

→ Czy w miejsce liter mogą być podstawione dowolne liczby?

D. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci. Podaj zastrzeżenia.

a) $(a^5 \cdot a^3 \cdot a^7)^5 : (a^9 : a^3)^5$ b) $(x^{12} : x^9)^{10} \cdot (x^6 \cdot x^4 \cdot x^5)^{10}$

Ile punktów?



Dwaj gracze mają planszę z tabelą. W tabeli są dwa wiersze. Liczby z dolnego wiersza otrzymano, wykonując pewne działanie na liczbach z górnego wiersza. Gracze na przemian zajmują wybrane wolne miejsca w tabeli i podają, jaka liczba powinna znaleźć się w tym miejscu. Za każdą prawidłowo podaną liczbę otrzymują tyle punktów, ile ona wynosi. Jeśli gracz poda niewłaściwą liczbę, traci ruch.

10	6	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$			0,005		2,5	2000	0,001
0,1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$		0,2	5		$2\frac{1}{2}$			

? ?

- → Pierwszy gracz zajął miejsce pod liczbą $\frac{1}{2}$. Ile punktów zdobędzie, jeśli poda właściwą liczbę?
- → Drugi gracz zajął miejsce nad liczbą 5. Ile punktów zdobędzie, jeśli poda właściwą liczbę?
- → Jeden z graczy zdobył 5 punktów. Jakie miejsce zajął w tabeli?
- → W jaki sposób z liczb w górnym wierszu można otrzymać liczby w dolnym wierszu?
- → W jaki sposób gracz powinien wybierać miejsca do zajęcia w tabeli, aby zdobyć jak najwięcej punktów?

1. Przyjrzyjcie się liczbom w tabeli.

30	15	7,5	3,75	$\frac{3}{5}$	$\frac{100}{375}$	$-\frac{3}{5}$	−3,75	$-\frac{75}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{30}$
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{100}{375}$	$\frac{5}{3}$	3,75	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{100}{375}$	$-\frac{10}{75}$	−15	−30

→ Jak nazywają się liczby z jednej kolumny, np. 30 i $\frac{1}{30}$?

→ Podajcie kilka par liczb, które można wpisać w komórki tabeli.

→ Jakiej liczby nie można wpisać do górnego wiersza tabelki?

→ Jakiej liczby nigdy nie otrzymacie w dolnym wierszu?

→ Jeśli w jednej z komórek wpiszecie 1, to jaką liczbę musicie wpisać w drugiej komórce tej kolumny? A jak będzie dla −1?

→ Oznaczcie przez *x* dowolną liczbę z górnego wiersza, różną od 0, i opiszcie wyrażeniem algebraicznym odpowiadającą jej liczbę w dolnym wierszu.

→ W jaki sposób z liczb w dolnym wierszu można otrzymać liczby w górnym wierszu?

Odwrotnością liczby *a*, różnej od 0, nazywamy liczbę $\frac{1}{a}$.
Odwrotność liczby *a*, różnej od 0, można zapisać w postaci potęgi o podstawie *a* i wykładniku −1, tj. a^{-1}.

$$\boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0}$$

Przykłady:

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ $\quad (-100)^{-1} = -\frac{1}{100}$ $\quad \left(-\frac{6}{7}\right)^{-1} = -\frac{1}{\frac{6}{7}} = -\frac{7}{6}$ $\quad \left(2\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{7}$

Odwrotność liczby nazywamy też liczbą odwrotną.

2. Oblicz.

a) 4^{-1} **b)** 12^{-1} **c)** $(-10)^{-1}$ **d)** 100^{-1}

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ **f)** $\left(\frac{17}{4}\right)^{-1}$ **g)** $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-1}$ **h)** $\left(-2\frac{2}{5}\right)^{-1}$

i) $0{,}1^{-1}$ **j)** $0{,}01^{-1}$ **k)** $(-3{,}2)^{-1}$ **l)** $1{,}1^{-1}$

3. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi o wykładniku −1.

a) $\frac{1}{11}$ **b)** $-\frac{1}{101}$ **c)** $81\frac{3}{4}$ **d)** $-2\frac{2}{7}$

e) 0,4 **f)** 4,8 **g)** 12,5 **h)** −13,7

4. Przyjrzyjcie się kolejnym wyrażeniom.

Gdy wykładnik zwiększy się o 1, to kolejna liczba zwiększy się 6 razy.
Odwrotnie, gdy wykładnik zmniejszy się o 1, to kolejna liczba zmniejszy się 6 razy.

$$\begin{array}{ccc} & 6^4 & \\ :6 & & \cdot 6 \\ & 6^3 & \\ :6 & & \cdot 6 \\ & 6^2 & \\ :6 & & \cdot 6 \\ & 6^1 & \\ :6 & & \cdot 6 \\ & 6^0 = 1 & \end{array}$$

→ Zbudujcie kilka kolejnych wierszy według tego schematu.

→ Czy zauważacie jakąś prawidłowość?

→ Sprawdźcie, czy ta prawidłowość zachodzi dla innych liczb.

$$\begin{array}{cl} & 6^0 = 1 \\ :6 & \\ & 6^{-1} = \frac{1}{6} \\ :6 & \\ & 6^{-2} = \frac{1}{6} : 6 = \frac{1}{6^2} \\ :6 & \\ & 6^{-3} = \frac{1}{6^2} : 6 = \frac{1}{6^3} \\ :6 & \end{array}$$

$1^{-n} = \frac{1}{1^n} = 1$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Potęga o wykładniku ujemnym jest odwrotnością potęgi o tej samej podstawie i przeciwnym wykładniku.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdzie $a \neq 0$, n – liczba naturalna

Przykłady: $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$ $\quad (-9)^{-8} = \frac{1}{(-9)^8}$ $\quad 0{,}2^{-3} = \frac{1}{0{,}2^3}$

$\left(\frac{1}{12}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{1}{12}\right)^6} = \frac{1}{\frac{1}{12^6}} = 12^6$ $\quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{5^2}{2^2}} = \frac{2^2}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$

5. Zapisz w postaci potęgi o wykładniku ujemnym.

a) $\frac{1}{2^{15}}$ **b)** $\frac{1}{10^9}$ **c)** $\frac{1}{(-4)^6}$ **d)** 10^2 **e)** $(-7)^{20}$ **f)** $0{,}2^5$

6. Oblicz.

a) 2^{-5} **b)** $(-12)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ **d)** $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}$

e) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$ **f)** $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-3}$ **g)** $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-4}$ **h)** $\left(-3\frac{3}{7}\right)^{-2}$

i) $0{,}1^{-6}$ **j)** $0{,}01^{-3}$ **k)** $1{,}5^{-2}$ **l)** $(-1{,}2)^{-3}$

7. Jaką liczbą jest x?

a) $5^x = \frac{1}{125}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ **d)** $(0{,}1)^x = 1\,000\,000$

8. Podane liczby przedstaw w postaci potęgi

a) o podstawie 2: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.

b) o podstawie 3: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$.

c) o podstawie 10: 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001.

10

Poznane prawa działań na potęgach o wykładniku naturalnym są prawdziwe także dla potęg o wykładniku całkowitym.

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

Mnożenie potęg o tych samych podstawach

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, gdzie a jest dowolną liczbą; m, n są liczbami całkowitymi (podstawa i wykładnik nie mogą być równocześnie równe 0).

Przykłady: $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$ $\qquad 3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{7+(-9)} = 3^{-2}$

Dzielenie potęg o tych samych podstawach

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, gdzie a jest dowolną liczbą różną od 0; m, n są liczbami całkowitymi.

Przykłady: $\frac{(-3)^6}{(-3)^{10}} = (-3)^{6-10} = (-3)^{-4}$ $\qquad \frac{2^{-8}}{2^5} = 2^{-8-5} = 2^{-13}$

Potęga potęgi

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, gdzie a jest dowolną liczbą; m, n są liczbami całkowitymi (podstawa i wykładnik nie mogą być równocześnie równe 0).

Przykłady: $(5^4)^5 = 5^{4 \cdot 5} = 5^{20}$ $\qquad (4^7)^{-3} = 4^{7 \cdot (-3)} = 4^{-21}$

Mnożenie potęg o tych samych wykładnikach

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami; n jest liczbą całkowitą (podstawa i wykładnik nie mogą być równocześnie równe 0).

Przykłady: $3^5 \cdot 10^5 = (3 \cdot 10)^5 = 30^5$; $(-0{,}5)^{-7} \cdot 8^{-7} = (-0{,}5 \cdot 8)^{-7} = (-4)^{-7}$

Dzielenie potęg o tych samych wykładnikach

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, gdzie a jest dowolną liczbą, b jest dowolną liczbą różną od 0; n jest liczbą całkowitą (a i n nie mogą być równocześnie równe 0).

Przykłady: $\frac{3^7}{8^7} = \left(\frac{3}{8}\right)^7$ $\qquad \frac{(-7)^{-5}}{10^{-5}} = \left(-\frac{7}{10}\right)^{-5}$

W powyższych wzorach a, b, m i n muszą przyjmować takie wartości, aby wyrażenia miały sens.

9. Porównaj wartości wyrażeń.

a) $2^3 : 2^7$ oraz $2^3 \cdot 2^{-7}$ **b)** $2^3 : 2^{-7}$ oraz $2^3 \cdot 2^7$

c) $x^{-10} : x^{-12}$ oraz $x^{-10} \cdot x^{12}$ **d)** $x^{-10} : x^{12}$ oraz $x^{-10} \cdot x^{-12}$

10. Oblicz wartość podanego iloczynu.

a) $3^{-5} \cdot 3^8$ **b)** $5^{-6} \cdot 5^9$ **c)** $(-0{,}5)^{-2} \cdot (-0{,}5)^{-2}$

d) $5^4 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$ **e)** $2^{-2} \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} \cdot 2$ **f)** $10^{-4} \cdot 10^7 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{20}$

Przyjmij, że podane wyrażenia mają sens.

11. Przedstaw podany iloczyn w postaci potęgi.

a) $a^4 \cdot a^3$ **b)** $x^{-9} \cdot x^{-12}$ **c)** $y^{20} \cdot y^{-15}$

d) $a^4 \cdot a^{-5} \cdot a^6$ **e)** $b^{-3} \cdot b^{-4} \cdot b^{-6}$ **f)** $c^{-3} \cdot c^{-4} \cdot c^{-5}$

12. Oblicz wartość podanego ilorazu.

a) $5^{-3} : 5^{-5}$ **b)** $7^4 : 7^6$ **c)** $(-1{,}1)^{-20} : (-1{,}1)^{-22}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-7} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-10}$ **e)** $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-7} : \left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$ **f)** $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-41} : \left(-1\frac{1}{3}\right)^{-39}$

Przyjmij, że podane wyrażenia mają sens.

13. Przedstaw podany iloraz w postaci potęgi.

a) $a^6 : a^{-15}$ **b)** $x^{-9} : x^{-91}$ **c)** $y^{100} : y^{-90}$

d) $\frac{k^{-20}}{k^{-15}}$ **e)** $\frac{m^{-10}}{m^{-25}}$ **f)** $\frac{z^{20}}{z^{-10}}$

14. Zapisz podany iloczyn w postaci potęgi.

a) $0{,}5^{11} \cdot 8^{11}$ **b)** $0{,}4^{10} \cdot (-2{,}5)^{10}$ **c)** $21^{33} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{33}$

15. Zapisz podany iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{3^7}{21^7}$ **b)** $\frac{13^{-5}}{39^{-5}}$ **c)** $\frac{(-81)^{-15}}{27^{-15}}$

16. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi.

a) $(3^2)^{-1}$ **b)** $(0{,}1^{-4})^3$ **c)** $(2{,}3^{-4})^{-5}$

d) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^2$ **e)** $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-3}$ **f)** $\left(\left(2\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^2$

Przyjmij, że podane wyrażenia mają sens.

17. Przedstaw podane wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $10^4 \cdot 10^{-5} : 10^3$ **b)** $(-3)^{-4} : (-3)^5 \cdot ((-3)^{-3})^{-4}$

c) $(2^{-7})^{-3} \cdot (2^4)^{-5}$ **d)** $(5^{-2})^5 : (5^{-2})^{-4}$

e) $(x^5 \cdot x^{-3}) : (x^{-6} \cdot x^9)$ **f)** $(y^4 \cdot y^{-2})^{-3} : (y^7 : y^{-3})^{-2}$

g) $(z^5)^{-4} : (z^6 \cdot z^{-3})^2$ **h)** $(d^2)^{-3} : (d^{-4})^{-5} \cdot (d^6)^{-2}$

18. Oblicz.

a) $2^{-2} + 3^{-1}$

b) $3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + 4^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

e) $5^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} - 2^5 + (0{,}1)^{-2}$

f) $4^4 \cdot 4^{-2} + 6^5 \cdot 6^{-3} - 8^{-2} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{4}$

19. Zapisz podaną zamianę jednostek, wykorzystując potęgi liczby 10.

Przykład: 1 cm = 0,01 m, czyli $1\ \text{cm} = 1 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$

a) 1 mm = 0,1 cm = 0,001 m = 0,000001 km
1 cm = 0,01 m = 0,00001 km

b) $1\ \text{mm}^2 = 0{,}01\ \text{cm}^2 = 0{,}000001\ \text{m}^2 = 0{,}000000000001\ \text{km}^2$
$1\ \text{cm}^2 = 0{,}0001\ \text{m}^2 = 0{,}0000000001\ \text{km}^2$
$1\ \text{m}^2 = 0{,}000001\ \text{km}^2$

20. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $2 \cdot 10^5$

b) $1{,}75 \cdot 10^6$

c) $9{,}125 \cdot 10^4$

d) $3 \cdot 10^{-3}$

e) $2{,}25 \cdot 10^{-2}$

f) $8{,}9 \cdot 10^{-5}$

11

10^{-5}	$= 0{,}00001$
10^{-4}	$= 0{,}0001$
10^{-3}	$= 0{,}001$
10^{-2}	$= 0{,}01$
10^{-1}	$= 0{,}1$
10^{0}	$= 1$
10^{1}	$= 10$
10^{2}	$= 100$
10^{3}	$= 1000$
10^{4}	$= 10000$
10^{5}	$= 100000$

21. Przepiszcie do zeszytu, wstawiając w miejsce liter odpowiednie liczby całkowite.

a) $30 = 0{,}03 \cdot 10^a = 0{,}3 \cdot 10^b = 3 \cdot 10^c = 30 \cdot 10^d = 300 \cdot 10^e$

b) $0{,}11 = 1{,}1 \cdot 10^a = 11 \cdot 10^b = 110 \cdot 10^c$

c) $12\,000 = 120 \cdot 10^a = 12 \cdot 10^b = 1{,}2 \cdot 10^c = 0{,}12 \cdot 10^d$

d) $0{,}0000025 = 0{,}25 \cdot 10^a = 2{,}5 \cdot 10^b = 25 \cdot 10^c$

→ Jaką wspólną cechę mają wyróżnione wyrażenia?

!

Każdą liczbę dodatnią można przedstawić w postaci iloczynu $k \cdot 10^n$, gdzie $1 \leqslant k < 10$, a n jest liczbą całkowitą.
Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą** lub **naukową**.

22. Czy podana liczba ma postać wykładniczą? Zapisz liczbę w postaci liczby dziesiętnej.

a) $0{,}5 \cdot 10^7$

b) $10{,}2 \cdot 10^{-11}$

c) $8 \cdot 10^{-5}$

d) $7{,}372 \cdot 10^{10}$

e) $0{,}5 \cdot 10^7$

f) $0{,}0025 \cdot 10^9$

g) $5{,}32 \cdot 12^5$

h) $4{,}123 \cdot 10^{-1}$

23. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

Przykłady:

$7{,}2 \cdot 10^7 = 72\,000\,000$

$1{,}03 \cdot 10^{-4} = 0{,}000103$

a) $6 \cdot 10^3$ **b)** $1{,}025 \cdot 10^6$ **c)** $9{,}75 \cdot 10^{11}$ **d)** $1{,}11 \cdot 10^4$

e) $7 \cdot 10^{-3}$ **f)** $7{,}25 \cdot 10^{-8}$ **g)** $1{,}001 \cdot 10^{-5}$ **h)** $9{,}99 \cdot 10^{-1}$

24. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

Przykłady:

$3\,450\,000 = 3{,}45 \cdot 1\,000\,000 = 3{,}45 \cdot 10^6$

$0{,}000027 = 2{,}7 \cdot 0{,}00001 = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$

a) 2000 **b)** 999 **c)** 75 **d)** 81

e) 1 250 000 **f)** 10 020 000 000 **g)** 100 000 000 000 000 000

h) 2,2250000 **i)** 0,000000431 **j)** 0,0000000000006789

25. W tabeli przedstawiono masy niektórych planet Układu Słonecznego. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

Planeta	Masa	Masa (w notacji wykładniczej)
Merkury	$0{,}33 \cdot 10^{24}$ kg	?
Ziemia	$5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg	?
Mars	$0{,}642 \cdot 10^{24}$ kg	?
Jowisz	$1898{,}6 \cdot 10^{24}$ kg	?

26. Porównaj liczby.

a) $6{,}3 \cdot 10^2$; $6{,}3 \cdot 10^{-4}$; $6{,}3 \cdot 10^7$

b) $2{,}86 \cdot 10^{-8}$; $1{,}2 \cdot 10^{-8}$; $1{,}33 \cdot 10^{-8}$

c) $3{,}2 \cdot 10^{24}$; $9{,}33 \cdot 10^{-24}$; $8{,}72 \cdot 10^4$

27. Oblicz i wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (5 \cdot 10^3)$

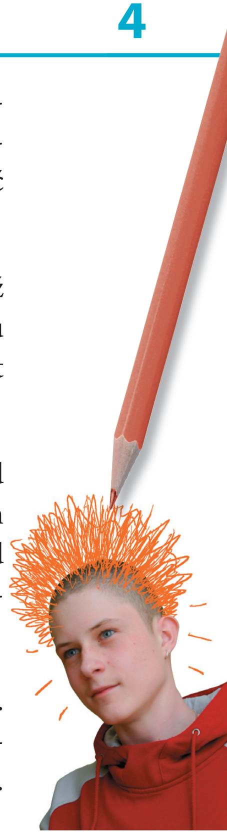
b) $(3{,}4 \cdot 10^7) \cdot (5{,}2 \cdot 10^9)$

c) $(1{,}24 \cdot 10^{-8}) \cdot (6{,}9 \cdot 10^{-11})$

28. Zapisz każdy z czynników w notacji wykładniczej i oblicz.

a) $24\,500\,000 \cdot 4\,721\,000\,000\,000$

b) $0{,}000000691 \cdot 0{,}0000045$



29. Jeden rok świetlny jest to odległość, jaką pokonuje światło biegnące z prędkością $3 \cdot 10^5$ km/s w ciągu jednego roku. Gwiazda Polarna jest oddalona od Ziemi o 1000 lat świetlnych. Podaj tę odległość w kilometrach.

30. Średnica cząsteczki tlenu (O_2) jest równa $3{,}64 \cdot 10^{-10}$ m. Wyraź tę wielkość w centymetrach i milimetrach. Średnica atomu wodoru (H) jest równa $1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m. Ile razy średnica cząsteczki tlenu jest większa od średnicy atomu wodoru?

31. Odległość Ziemi od Słońca zmienia się w ciągu roku od $1{,}471 \cdot 10^8$ km (w peryhelium, około 3 stycznia) do $1{,}521 \cdot 10^8$ km (w aphelium, około 6 lipca). Jaka jest różnica odległości Ziemi od Słońca w aphelium i w peryhelium? Wynik podaj w notacji wykładniczej i w systemie dziesiętnym.

32. Podczas głębokiego oddechu wydychamy $5 \cdot 10^{-4}$ m^3 powietrza. Zbadaj, ile oddechów robisz w ciągu minuty. Oszacuj, ile metrów sześciennych powietrza przechodzi w ciągu życia przez płuca człowieka. (Przyjmij, że średnia długość życia człowieka wynosi około 72 lat).

33. Na głowie jest około 10^5 włosów. Włos rośnie z prędkością $12 \cdot 10^{-2}$ metra w ciągu roku. Zsumuj przyrosty wszystkich włosów w ciągu roku. Ile to metrów?

12

DZIESIĄTKOWY SYSTEM POZYCYJNY

Liczby, którymi się posługujemy, zapisane są w systemie dziesiątkowym, np.:

$1902 = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1,$

$382{,}095 = 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001.$

I. Zapisz w postaci potęgi liczby 10 liczby: 100, 10, 1, 0,1, 0,01.

II. Wyjaśnij, dlaczego nasz system nazywa się dziesiątkowym.

III. Zapisz podaną liczbę według wzoru w przykładzie.

Przykład: $807{,}02 = 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

a) 3,04050 **b)** 3,04050 **c)** 304,050 **d)** 30,405

IV. Podaną liczbę zapisz w postaci dziesiętnej.

a) $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$

b) $7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}$

c) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-4}$

d) $6 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-5}$

V. Wykonaj dodawanie.

a) $(5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1}) + (4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1})$

b) $(7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}) + (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1})$

c) $(5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1}) + (9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2})$

d) $(3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-3}) + (1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^{-2})$

JAK TO UZASADNIĆ?

I. Prześledź kolejne etapy przekształcenia wzoru:

$a : x^{-n} =$	Korzystamy z definicji potęgi o wykładniku ujemnym.
$a : \frac{1}{x^n} =$	Zastępujemy dzielenie przez ułamek mnożeniem przez jego odwrotność.
$a \cdot \frac{x^n}{1} =$	Upraszczamy zapis.
$a \cdot x^n$	

→ Jak zmieniło się wykonywane działanie? A jak zmienił się wykładnik?

→ Zapisz udowodnioną równość.

II. Z jakich własności korzysta się przy kolejnych przekształceniach iloczynu $a \cdot x^{-n}$?

$$a \cdot x^{-n} = a \cdot \frac{1}{x^n} = a : \frac{x^n}{1} = a : x^n$$

→ Jak zmieniło się wykonywane działanie? A jak zmienił się wykładnik?

→ Zapisz udowodnioną równość.

→ Sformułuj wspólny wniosek dla przykładów z punktu I i II.

III. Wykonując poniższe polecenia, udowodnij równość: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

- Załóż, że m i n są liczbami naturalnymi, takimi że $m > n$.
- Zapisz potęgi w liczniku i mianowniku w postaci iloczynu. Skróć ułamek.
- Przedstaw uzyskany wynik w postaci potęgi liczby a.
- Co się zmieni, gdy $m < n$? Wykonaj odpowiednie przekształcenia.
- Co się zmieni, gdy n będzie liczbą ujemną? Uzasadnij odpowiedź.

IV. W analogiczny sposób (jak w III) przeanalizuj wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach.

13

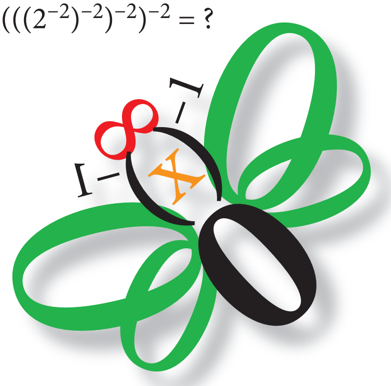
Dane są wyrażenia: 2^{-1}, $(2^{-1})^{-1}$, $((2^{-1})^{-1})^{-1}$, $(((2^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$,...

- Jakie będzie następne wyrażenie?
- Jakie są wartości kolejnych wyrażeń?
- Jaką wartość będzie miało setne takie wyrażenie?
- Sformułujcie zauważoną prawidłowość.

Przyjrzyj się kolejnym działaniom i ich wynikom.

$2^{-2} = ?$ $\quad (2^{-2})^{-2} = ?$ $\quad ((2^{-2})^{-2})^{-2} = ?$ $\quad (((2^{-2})^{-2})^{-2})^{-2} = ?$

Dopisz kolejne przykłady. Co zauważasz?



Sprawdź sam siebie

A. Oblicz.

a) 5^{-1} **b)** $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-1}$ **c)** $(-4{,}8)^{-1}$

B. Oblicz.

a) $(-3)^{-4}$ **b)** $\left(1\frac{2}{5}\right)^{-2}$ **c)** $(2{,}5)^{-3}$

C. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie.

a) $(-5)^{-4} : (-5)^2 \cdot ((-5)^{-2})^{-3}$ **b)** $(a^3 \cdot a^4 \cdot a^{-5})^{-2} : (a^7 : a^9 \cdot a^{-4})^{-5}$

D. **a)** Zapisz liczby $2{,}98 \cdot 10^6$ i $5{,}12 \cdot 10^{-4}$ w systemie dziesiętnym.
b) Zapisz liczby 3 910 000 i 0,00267 w notacji wykładniczej.

14
czytanka

Pora na kalkulator! nr 1

W niektórych kalkulatorach są takie przyciski: $\boxed{x^\wedge 2}$ $\boxed{x^\wedge 3}$ $\boxed{x^\wedge y}$. Pozwalają one potęgować liczby. Np.

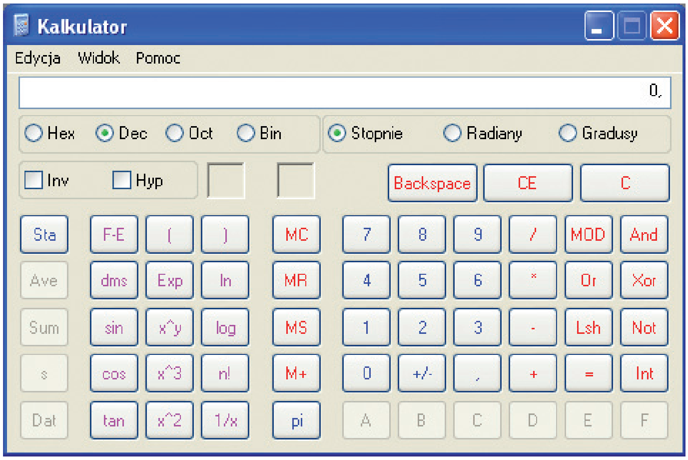
Sprawdź, jak działa twój kalkulator.

$\boxed{7}$ $\boxed{x^\wedge 2}$ $\boxed{=}$ 49

tak można wyznaczyć drugą potęgę liczby 7,

$\boxed{5}$ $\boxed{x^\wedge 3}$ $\boxed{=}$ 125

tak można wyznaczyć trzecią potęgę liczby 5.



1. Zbadajcie, jak działa przycisk $\boxed{x^\wedge y}$.

➜ Jak za pomocą tego przycisku wyznaczyć liczbę odwrotną do danej liczby?

➜ Co otrzymacie po wciśnięciu poniższej sekwencji przycisków?

$\boxed{2}$ $\boxed{x^\wedge y}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

➜ Podajcie możliwie najwięcej sposobów obliczania potęg o różnych podstawach i różnych wykładnikach przy użyciu tego przycisku.

Większość prostych kalkulatorów nie ma takich przycisków. Zatem, czy jedynym sposobem obliczenia wartości potęgi o wykładniku naturalnym jest wielokrotne mnożenie podstawy potęgi przez siebie? Czy niemożliwe jest obliczanie potęg o wykładniku całkowitym?

2. Wykonajcie następujące obliczenia na swoich kalkulatorach:

Może się zdarzyć, że twój kalkulator nie będzie reagował na taką sekwencję przycisków.

$\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

$\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

$\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

➜ Jak działa przycisk $\boxed{=}$ w tym przypadku?

➜ Jak obliczyć wartość potęgi $(-2)^7$? A jak $\left(\frac{1}{3}\right)^5$?

3. Przycisk $\boxed{=}$ użyty po liczbie $\boxed{5}$ i znaku $\boxed{\times}$ powodował wykonanie polecenia: „Pomnóż liczbę przez 5”. Zbadajcie działanie swoich kalkulatorów w sekwencji przycisków:

$\boxed{5}\ \boxed{/}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{/}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{/}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

→ Jak działa przycisk $\boxed{=}$ w tym przypadku?

→ Opiszcie, jak za pomocą kalkulatora podnieść liczbę do potęgi o wykładniku ujemnym.

→ Obliczcie za pomocą swoich kalkulatorów wartości potęg: 2^{-3}, $0{,}5^{-1}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

15

4. Zbadajcie działanie kalkulatorów w sekwencji przycisków.

a)

$\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{=}$

$\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

b)

$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}$

$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

c)

$\boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

d)

$\boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

e)

$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

f)

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{/}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{/}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{/}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

→ Jakie działanie wykonuje kalkulator po każdym naciśnięciu przycisku $\boxed{=}$?

5. Pies goni zająca, który jest 48 m przed nim. Jeden skok zająca to 80 cm, a skok psa w tym samym czasie to 120 cm. Po ilu skokach pies dogoni zająca?

→ Jak można rozwiązać to zadanie przy użyciu dwóch kalkulatorów?

→ Zaproponujcie inne zadania, w których użycie kalkulatora upraszcza rozwiązanie.

16

Jak to rozwiązać? nr 1

1. W dwóch doświadczeniach uzyskano następujące wyniki:

I. 5, 1, 9, 9, 4, 2, 3, 5, 4, 5.

II. 7, 9, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 3, 8, 3, 2, 9, 8, 3.

a) Znajdź średnią arytmetyczną każdego zbioru wyników.

Dodaj wszystkie wyniki.	**I.** 5 + 1 + 9 + 9 + 4 + 2 + 3 + 5 + 4 + 5 = 47 **II.** 7 + 9 + 5 + 3 + 1 + 1 + 3 + 5 + 3 + 8 + 3 + 2 + 9 + 8 + 3 = 70
Określ liczbę wyników.	W **I** doświadczeniu wszystkich wyników jest 10. W **II** doświadczeniu wszystkich wyników jest 15.
Sumę wszystkich wyników podziel przez liczbę wyników.	**I.** 47 : 10 = 4,7 **II.** 70 : 15 = $\frac{70}{15} = 4\frac{2}{3}$ Średnią arytmetyczną I zbioru wyników jest liczba 4,7. Średnią arytmetyczną II zbioru wyników jest liczba $4\frac{2}{3}$.

b) Znajdź modę każdego zbioru wyników.

Uporządkuj dane (malejąco lub rosnąco).	**I.** 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 9, 9. **II.** 9, 9, 8, 8, 7, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1.
Znajdź najczęściej występującą liczbę w podanym zbiorze wyników.	**I.** 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 9, 9. **II.** 9, 9, 8, 8, 7, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1. Modą I zbioru wyników jest liczba 5. Modą II zbioru wyników jest liczba 3.

c) Znajdź medianę każdego zbioru wyników.

Uporządkuj dane (malejąco lub rosnąco).	**I.** 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 9, 9. **II.** 9, 9, 8, 8, 7, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1.
Określ liczbę danych.	W **I** doświadczeniu wszystkich wyników jest 10. W **II** doświadczeniu wszystkich wyników jest 15.
Jeśli liczba wyników jest parzysta, wyznacz średnią arytmetyczną dwóch wyników środkowych uporządkowanych danych. **Jeśli liczba wyników jest nieparzysta, wyznacz wynik środkowy uporządkowanych danych.**	**I.** 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 9, 9. W zbiorze I liczba wyników jest parzysta. Dwoma wynikami środkowymi zbioru uporządkowanych wyników są liczby znajdujące się na piątym i szóstym miejscu, czyli 4 i 5. Ich średnią arytmetyczną jest $\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$. **II.** 9, 9, 8, 8, 7, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1. W zbiorze II liczba wyników jest nieparzysta. Wynikiem środkowym zbioru uporządkowanych danych jest liczba znajdująca się na ósmym miejscu. Jest nią liczba 3. Medianą I zbioru wyników jest liczba 4,5. Medianą II zbioru wyników jest liczba 3.

2. Oblicz.

a) 2^{-3} **b)** $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$

Potęgę o wykładniku ujemnym zapisz w postaci ułamka zgodnie ze wzorem $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.	**a)** $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ **b)** $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2\frac{1}{3}\right)^2}$
Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia.	**a)** $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ **b)** Liczbę $2\frac{1}{3}$ zapisujemy w postaci ułamka niewłaściwego. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2}$ Obliczamy wartość potęgi $\left(\frac{7}{3}\right)^2$. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{9}}$ Przekształcamy otrzymane wyrażenie. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{9}} = \frac{9}{49}$

3. Dany iloczyn przedstaw w postaci potęgi.

a) $5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^4$ **b)** $a^{-4} \cdot a^3 \cdot a^{-5}$

Zapisz odpowiednie zastrzeżenia (jeśli to konieczne).	**b)** $a \neq 0$, bo $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ i $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$, a mianownik musi być liczbą różną od 0.
Przedstaw iloczyn potęg o tej samej podstawie w postaci potęgi o takiej samej podstawie i wykładniku będącym sumą wszystkich wykładników. Skorzystaj ze wzoru $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.	**a)** $5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^4 = 5^{3+5+4}$ **b)** $a^{-4} \cdot a^3 \cdot a^{-5} = a^{-4+3-5}$
Oblicz sumę liczb w wykładniku otrzymanej potęgi.	**a)** $5^{3+5+4} = 5^{12}$ **b)** $a^{-4+3-5} = a^{-6}$

4. Zapisz w postaci potęgi.

a) $(7^3)^5$ **b)** $(x^4)^{-3}$

Zapisz odpowiednie zastrzeżenia (jeśli to konieczne).	**b)** $x \neq 0$, bo $x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$, a mianownik musi być liczbą różną od 0.
Przedstaw potęgę potęgi w postaci potęgi o tej samej podstawie i wykładniku równym iloczynowi wykładników, korzystając ze wzoru $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.	**a)** $(7^3)^5 = 7^{3 \cdot 5}$ **b)** $(x^4)^{-3} = x^{4 \cdot (-3)}$
Oblicz iloczyn liczb w wykładniku otrzymanej potęgi.	**a)** $7^{3 \cdot 5} = 7^{15}$ **b)** $x^{4 \cdot (-3)} = x^{-12}$

5. Przedstaw iloraz w postaci potęgi o wykładniku naturalnym.

a) $5^{10} : 5^4$ **b)** $\frac{2^{-5}}{2^{-7}}$

Przedstaw iloraz potęg w postaci potęgi o tej samej podstawie i wykładniku równym różnicy wykładników, korzystając ze wzoru $a^m : a^n = a^{m-n}$ lub $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.	**a)** $5^{10} : 5^4 = 5^{10-4}$ **b)** $\frac{2^{-5}}{2^{-7}} = 2^{-5-(-7)}$
Oblicz różnicę liczb w wykładniku otrzymanej potęgi.	**a)** $5^{10-4} = 5^6$ **b)** $\frac{2^{-5}}{2^{-7}} = 2^{-5-(-7)} = 2^{-5+7} = 2^2$

6. Oblicz wartość wyrażenia $(-2)^4 \cdot (-2) + 3^6 : 3^3 - \frac{4^8}{4^6} + (5^2)^{-1}$.

Zastosuj odpowiednie wzory dotyczące potęgowania.	$(-2)^4 \cdot (-2) \quad + \quad 3^6 : 3^3 \quad - \quad \frac{4^8}{4^6} \quad + \quad (5^2)^{-1}$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $(-2)^{4+1} \quad + \quad 3^{6-3} \quad - \quad 4^{8-6} \quad + \quad 5^{2 \cdot (-1)}$
Oblicz wykładniki otrzymanych potęg.	$(-2)^5 \quad + \quad 3^3 \quad - \quad 4^2 \quad + \quad 5^{-2}$
Wykonaj potęgowanie.	$-32 \quad + \quad 27 \quad - \quad 16 \quad + \quad \frac{1}{25}$
Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia.	$-20\frac{24}{25}$

7. Oblicz $(0{,}6)^5 \cdot (0{,}5)^5 \cdot 10^5$.

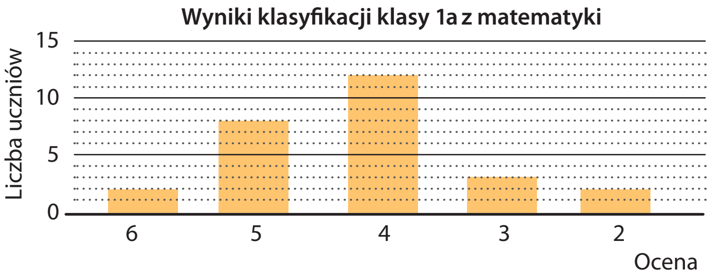
Przedstaw iloczyn potęg o tych samych wykładnikach w postaci potęgi, której podstawa jest równa iloczynowi podstaw, a wykładnik pozostaje bez zmian, korzystając ze wzoru $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.	$(0{,}6)^5 \cdot (0{,}5)^5 \cdot 10^5 = (0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 10)^5 =$
Oblicz iloczyn liczb w podstawie otrzymanej potęgi.	$3^5 =$
Oblicz wartość otrzymanej potęgi.	243

8. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

a) $100^6 : 50^6$ **b)** $\frac{7^4}{35^4}$

Przedstaw iloraz potęg o tych samych wykładnikach w postaci potęgi, której podstawa jest równa ilorazowi podstaw, a wykładnik pozostaje bez zmian, korzystając ze wzoru $a^n : b^n = (a : b)^n$ lub $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.	**a)** $100^6 : 50^6 = (100 : 50)^6$ **b)** $\frac{7^4}{35^4} = \left(\frac{7}{35}\right)^4$
Oblicz iloraz liczb w podstawie otrzymanej potęgi.	**a)** $100^6 : 50^6 = (100 : 50)^6 = 2^6$ **b)** $\frac{7^4}{35^4} = \left(\frac{7}{35}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4$
Oblicz wartość otrzymanej potęgi.	**a)** $100^6 : 50^6 = (100 : 50)^6 = 2^6 = 64$ **b)** $\frac{7^4}{35^4} = \left(\frac{7}{35}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$

1. Diagram przedstawia wyniki klasyfikacji rocznej uczniów klasy 1a z matematyki.



a) Ile wynosi średni wynik w tej klasie?

b) Ile wynosi modalna uzyskanych wyników?

c) Wyznacz medianę uzyskanych wyników.

2. Oblicz.

a) 5^3, $(-4)^4$, $(-3)^5$, $(-11)^2$, $(-20)^4$

b) $(0{,}5)^2$, $(-0{,}2)^5$, $(-0{,}1)^7$, $(0{,}03)^3$, $(0{,}002)^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$, $\left(1\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(-3\frac{1}{3}\right)^5$, $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3$

3. Oblicz.

a) 2^{-6}, 5^{-5}, 10^{-9}, $(-3)^{-4}$, $(-4)^{-3}$

b) $(0{,}3)^{-4}$, $(-0{,}5)^{-3}$, $(0{,}02)^{-5}$, $(-0{,}04)^{-2}$, $(-0{,}0002)^{-3}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$, $\left(-3\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2}$, $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-4}$

4. Podany iloczyn przedstaw w postaci potęgi.

a) $5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^2$, $(-2)^7 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^3$,

b) $(0{,}2)^3 \cdot (0{,}2)^5 \cdot (0{,}2)^2$, $(-3{,}2)^{10} \cdot (-3{,}2)^{12} \cdot (-3{,}2)^{20}$

c) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^9 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^7$, $\left(-5\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-5\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(-5\frac{2}{3}\right)^{16}$

5. Podany iloczyn przedstaw w postaci potęgi.

a) $4^5 \cdot 4^{-4}$, $5^{-3} \cdot 5^7 \cdot 5^{-6}$, $2^9 \cdot 2^{-5} \cdot 2^7 \cdot 2^{-6}$, $3^{-5} \cdot 3^{-8} \cdot 3^{-10} \cdot 3^{-12}$

b) $a^{-9} \cdot a^6$, $b^5 \cdot b^{-6} \cdot b^{-2}$, $c^{-9} \cdot c^7 \cdot c^{-4} \cdot c^3$, $d^{-6} \cdot d^{-9} \cdot d^{-12} \cdot d^{-15}$

6. Podane wyrażenie przedstaw w postaci potęgi o niezmienionej podstawie.

a) $(6^3)^4$ **b)** $((-5)^4)^6$ **c)** $((2^3)^4)^5$ **d)** $((((-3)^2)^3)^4)^5$

7. Podane ilorazy przedstaw w postaci potęgi.

a) $4^9 : 4^6$ $5^{12} : 5^8$ $6^{20} : 6^{12}$ $9^{54} : 9^9$

b) $\frac{10^{15}}{10^3}$ $\frac{25^{20}}{25^5}$ $\frac{100^{100}}{100^{20}}$ $\frac{45^{85}}{45^{78}}$

c) $a^{12} : a^3$ $b^{81} : b^9$ $c^{45} : c^9$ $d^{50} : d^{37}$

8. Podane ilorazy przedstaw w postaci potęgi.

a) $5^6 : 5^9$ $7^8 : 7^{-8}$ $2^{-4} : 2^8$ $10^{-12} : 10^{-12}$

b) $\frac{9^8}{9^{12}}$ $\frac{12^{10}}{12^{-12}}$ $\frac{7^{-9}}{7^5}$ $\frac{12^{-15}}{12^{-20}}$

c) $a^{15} : a^{20}$ $b^6 : b^{-12}$ $c^{-8} : c^{10}$ $d^{-20} : d^{-40}$

9. Oblicz.

a) $(4^6 \cdot 4^{10}) : (4^3 \cdot 4^4 \cdot 4^7)$

b) $(5^2 \cdot 5^8 \cdot 5^4) : (5^6 \cdot 5^4 \cdot 5^2)$

c) $(10^8 : 10^5) \cdot (10^{20} : 10^{14})$

d) $\frac{(0,1)^5 \cdot (0,1)^4 \cdot (0,1)^7}{(0,1)^{20} : (0,1)^8}$

e) $\frac{(-3)^{16} : (-3)^8}{(-3)^{12} : (-3)^7}$

f) $\frac{(-1,5)^9 : (-1,5)^4 : (-1,5)^5}{(-1,5)^4 : (-1,5)^5}$

10. Oblicz.

a) $(5^4)^3 : (5^5)^2$

b) $((-3)^6)^4 : ((-3)^5)^4$

c) $(-4,5)^7 \cdot (-4,5)^{13} : ((-4,5)^4)^5$

d) $\left(\frac{5^7 \cdot 5^3 \cdot 5^5}{5^{16} : 5}\right)^3$

e) $\frac{((-3)^3 \cdot (-3)^6 \cdot (-3))^3}{((-3)^{18} : (-3)^{12})^5}$

f) $\frac{\left(2\frac{1}{2}\right)^{10} : \left(2\frac{1}{2}\right)^4}{\left(2\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)}$

11. Podany iloczyn zapisz w postaci potęgi.

a) $7^9 \cdot 3^9 \cdot 8^9$ **b)** $45^4 \cdot 20^4 \cdot a^4$ **c)** $56^{20} \cdot 20^{20} \cdot a^{20} \cdot b^{20}$

12. Podaną potęgę zapisz w postaci iloczynu potęg.

a) $(120 \cdot 56 \cdot 73)^{12}$ **b)** $(-64 \cdot x \cdot y)^{15}$ **c)** $(a \cdot b \cdot c)^{12}$

13. Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{100} \cdot 4^{100}$ **b)** $\left(\frac{2}{7}\right)^8 \cdot 7^8 \cdot 0,5^8$ **c)** $0,25^4 \cdot 8^4 \cdot 10^4$

14. Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $5^8 : 5^8$ **b)** $(-42)^3 : 7^3$ **c)** $(-64)^5 : (-16)^5$

d) $(3,5)^5 : (0,7)^5$ **e)** $(-3,9)^6 : (1,3)^6$ **f)** $(0,49)^2 : (0,07)^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{5}{6}\right)^5$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^9 : \left(\frac{7}{9}\right)^9$ **i)** $\left(\frac{2}{9}\right)^5 : \left(\frac{16}{81}\right)^5$

15. Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{12^9}{4^9}$ **b)** $\frac{(-3)^{12}}{18^{12}}$ **c)** $\frac{(-0,4)^6}{(-3,6)^6}$

d) $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{\left(\frac{3}{8}\right)^6}$ **e)** $\frac{\left(2\frac{1}{3}\right)^5}{\left(1\frac{2}{5}\right)^5}$ **f)** $\frac{(0,24)^8}{\left(2\frac{2}{5}\right)^8}$

16. Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $\frac{a^{25}}{7^{25}}$ **b)** $\frac{b^{25}}{10^{25}}$ **c)** $c^{15} : 5^{15}$

17. Zapisz potęgę w postaci ilorazu potęg.

a) $(8 : 9)^7$ **b)** $(5 : 12)^4$ **c)** $(-12 : 7)^5$

d) $(3,2 : 0,9)^8$ **e)** $\left(\frac{3}{7} : \frac{15}{22}\right)^5$ **f)** $\left(3\frac{5}{8} : \frac{12}{23}\right)^5$

18. Oblicz.

a) $(4^6 \cdot 0,25^6) \cdot (10^6 : 5^6)$ **b)** $(4^5 \cdot 7,5^5) : (27^5 : 9^5)$

c) $(2^6 \cdot 5^6 \cdot 6^6)^3 : (15^9 \cdot 4^9)^2$ **d)** $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2)^3 : (3^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2)^3$

19. Podaną liczbę zapisz w postaci sumy iloczynów kolejnych cyfr i potęg liczby 10.

a) 523,84 **b)** 25,0625 **c)** 2,4576

d) 0,324 **e)** 2005,407 **f)** 0,020305

20. Podaną liczbę zapisz w postaci dziesiętnej.

a) $6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

b) $5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}$

c) $0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

21. Wykonaj zamianę jednostek, przedstawiając dane wielkości w postaci iloczynu liczby całkowitej i potęgi liczby 10.

a) zamień na km:	17 cm	3 dm	42 m
b) zamień na m^2:	8 mm^2	12 cm^2	14 dm^2
c) zamień na m^3:	6 mm^3	25 cm^3	34 dm^3

17 czytanka

Spotkanie na rynku

Ania, Krzyś i Monika zaznaczyli na planie Krakowa swoje miejsca zamieszkania punktami A, K, M. Chcieli wyznaczyć na planie taki punkt spotkań, aby był tak samo odległy dla każdego z nich.

→ Jaką figurę wyznaczają na planie punkty A, K, M?

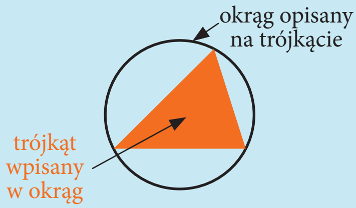
→ Gdzie położone są te miejsca, z których jest tak samo daleko do Ani jak i do Moniki?

→ Czy Ania na miejsce spotkań będzie miała tak samo daleko jak Monika? A czy tak samo daleko jak Krzyś?

1. Narysuj okrąg i zaznacz na nim punkty *A, B, C*. Połącz je odcinkami i zacieniuj trójkąt *ABC*. Opisz położenie trójkąta *ABC* względem narysowanego okręgu.

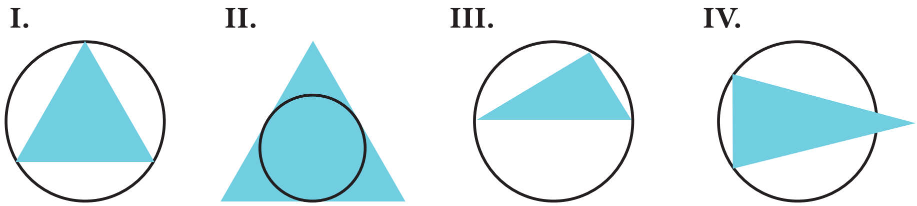
Trójkątem wpisanym w okrąg nazywamy trójkąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na tym okręgu.

Okrąg taki nazywamy **okręgiem opisanym** na tym trójkącie.



2. Zaproponuj definicję okręgu opisanego na trójkącie, zaczynającą się od słów:
Okręgiem opisanym na trójkącie nazywamy...

3. Na którym rysunku trójkąt jest wpisany w okrąg?

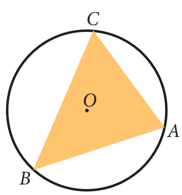


4. Narysuj okrąg i wybierz na nim punkty, tak aby były wierzchołkami trójkąta

a) ostrokątnego. **b)** prostokątnego. **c)** rozwartokątnego.

→ Czy narysowany trójkąt jest wpisany w dany okrąg? Dlaczego?

5. Dany jest trójkąt *ABC*, którego wszystkie wierzchołki leżą na okręgu o środku w punkcie *O*.



→ Porównajcie odległości punktu *O* od wierzchołków trójkąta.

→ Uzasadnijcie, że punkt *O* leży na symetralnej boku *AB*.

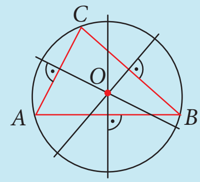
→ Uzasadnijcie, że punkt *O* leży na symetralnej boku *BC*.

→ Uzasadnijcie, że punkt *O* leży na symetralnej boku *AC*.

→ Uzasadnijcie, że w dowolnym trójkącie przecięcie się symetralnych dowolnych dwóch boków leży na symetralnej trzeciego boku tego trójkąta.

W dowolnym trójkącie symetralne trzech boków przecinają się w jednym punkcie. Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

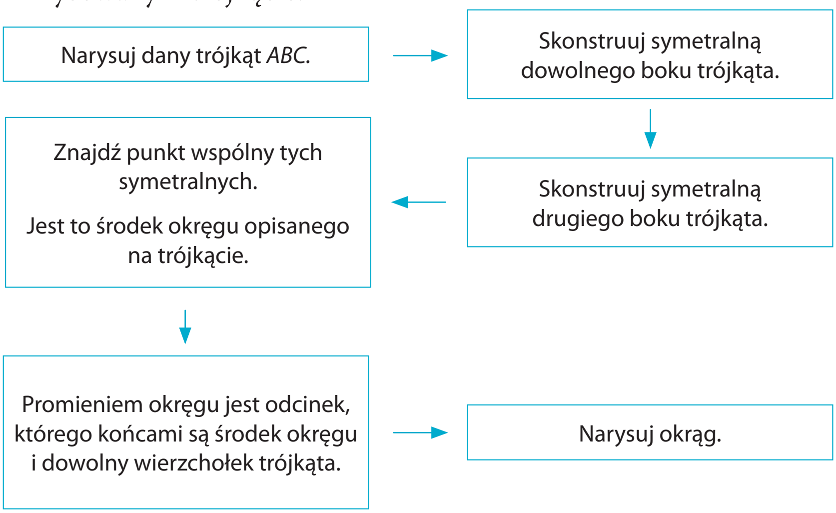
Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia symetralnych boków tego trójkąta.



6. Narysuj trójkąt

a) ostrokątny. **b)** prostokątny. **c)** rozwartokątny.

→ Wykorzystując poniższy schemat, wykreśl okręgi opisane na narysowanym trójkącie.



7. Narysuj trójkąt o bokach długości 2 cm, 3 cm i 4 cm. Wyznacz środek i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

8. Zbadajcie położenie środka okręgu opisanego na trójkącie

a) ostrokątnym. **b)** prostokątnym. **c)** rozwartokątnym.

→ Oceńcie prawdziwość wypowiedzi.

I. W trójkącie prostokątnym środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.

II. W trójkącie ostrokątnym środek okręgu opisanego leży wewnątrz tego trójkąta.

III. W trójkącie rozwartokątnym środek okręgu opisanego leży na zewnątrz tego trójkąta.

9. Narysuj trójkąt równoramienny prostokątny. Znajdź środek okręgu opisanego na tym trójkącie i narysuj ten okrąg. Jak najprościej znaleźć środek tego okręgu? Uzasadnij odpowiedź.

10. Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 10 cm, można wpisać w okrąg o promieniu długości 5 cm.

18

11. Narysujcie okrąg i zaznaczcie na nim punkty *A*, *B*, *C*, *D*.

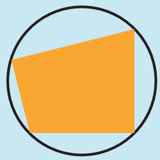
→ Zacieniujcie czworokąt *ABCD*.

→ Opiszcie położenie czworokąta *ABCD* względem narysowanego okręgu.

→ Zaproponujcie definicję czworokąta wpisanego w okrąg.

Czworokątem wpisanym w okrąg nazywamy czworokąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na tym okręgu.

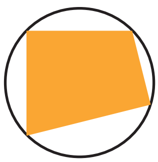
Okrąg taki nazywamy **okręgiem opisanym** na tym czworokącie.



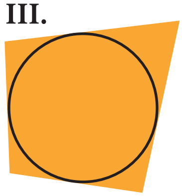
12. Na którym rysunku czworokąt jest wpisany w okrąg?

I.

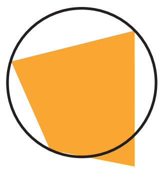
II.



III.



IV.



13. Narysujcie dowolny

I. kwadrat. **II.** prostokąt. **III.** równoległobok. **IV.** trapez.

→ Wyznaczcie symetralne wszystkich boków tych czworokątów.

→ Które z tych czworokątów mają tę własność, że symetralne wszystkich ich boków przecinają się w jednym punkcie?

→ Na których z tych czworokątów można opisać okrąg?

Środek *O* okręgu opisanego na czworokącie *ABCD* musi być równo oddalony od wszystkich jego wierzchołków. Środek *O* musi leżeć nie tylko na symetralnej boku *AB*, ale także na symetralnych boków *BC*, *CD* i *DA*. Musi być punktem wspólnym tych symetralnych.

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie.

Środek okręgu opisanego na czworokącie jest punktem przecięcia symetralnych boków tego czworokąta.

14. Narysuj trapez równoramienny. Sprawdź, czy można na tym trapezie opisać okrąg.

15. Czy na trapezie, którego trzy boki są tej samej długości, można opisać okrąg? Uzasadnij odpowiedź.

16. Podaj przykład trapezu, na którym nie można opisać okręgu.

17. Narysuj dowolny okrąg i wpisz w ten okrąg prostokąt tak, aby

a) jeden z boków miał długość równą promieniowi okręgu.

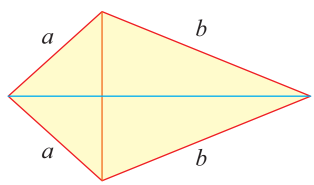
b) przekątna miała długość równą średnicy okręgu.

18. Przekątna prostokąta ma 16 cm. Jaką długość ma promień okręgu opisanego na tym prostokącie? Czy jest tylko jeden prostokąt spełniający warunki tego zadania?

19. Jaki warunek musi spełniać równoległobok, aby można było na nim opisać okrąg? A jaki warunek musi spełniać romb?

19

20. Czy każdy deltoid można wpisać w okrąg? Jaki warunek musi być spełniony? Jak nazywa się taki deltoid?



21. Narysujcie trzy okręgi i zaznaczcie na nich punkty

I. *A, B, C, D, E, F.*

II. *A, B, C, D, E, F, G.*

III. *A, B, C, D, E, F, G, H.*

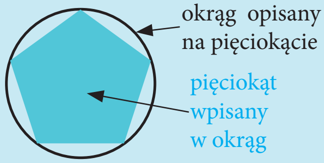
→ Zacieniujcie wielokąty wyznaczone przez te punkty.

→ Opiszcie położenie wielokątów względem okręgu.

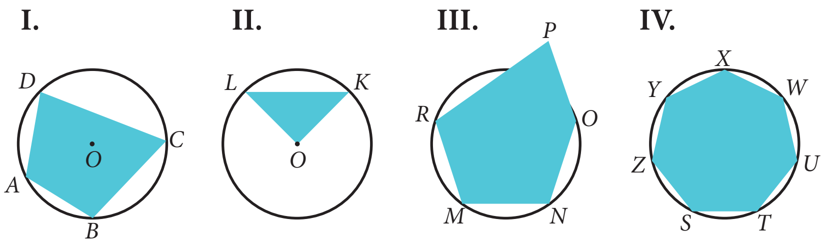
→ Zaproponujcie definicję wielokąta wpisanego w okrąg.

Wielokątem wpisanym w okrąg nazywamy wielokąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na tym okręgu.

Okrąg taki nazywamy **okręgiem opisanym** na tym wielokącie.

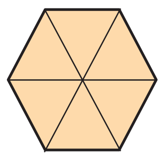


22. Na którym rysunku wielokąt jest wpisany w okrąg?



23. Czy każdy sześciokąt foremny można wpisać w okrąg?

Wielokąt foremny to taki wielokąt, który ma wszystkie boki równej długości i kąty takiej samej rozwartości, np.



24. Porównajcie odległości środka okręgu opisanego na wielokącie od każdego wierzchołka wielokąta z promieniem okręgu.

→ Jak znaleźć środek okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki wielokąta?

Na wielokącie można opisać okrąg wtedy, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie.

Środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

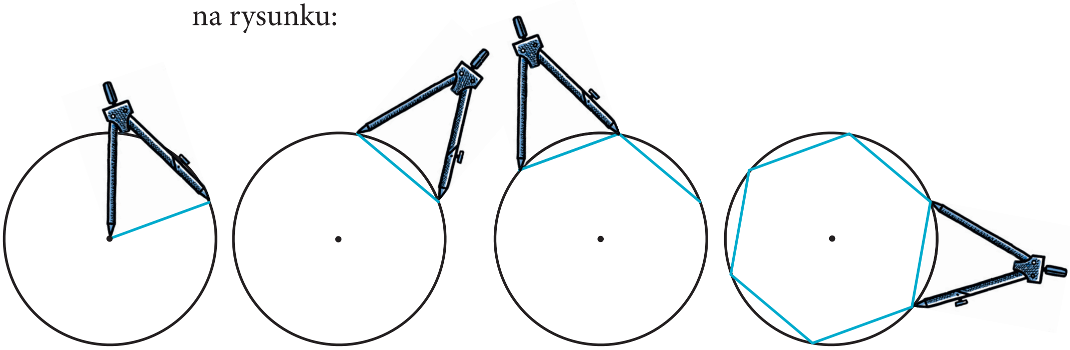
25. Narysuj z użyciem kątomierza pięciokąt foremny i opisz na nim okrąg.

26. Wpisz w okrąg ośmiokąt foremny.

27. Narysuj trapez prostokątny *ABCD* o kącie ostrym przy wierzchołku *B*. Zaproponuj sposób wyznaczania punktu *E* tak, aby czworokąt *ABCE* można było wpisać w okrąg.

SZEŚCIOKĄT FOREMNY WPISANY W OKRĄG

Aby wyznaczyć wierzchołki sześciokąta foremnego, wystarczy okrąg podzielić na 6 odpowiednich łuków wyznaczonych przez końce cięciw, z których każda ma długość równą długości promienia, tak jak na rysunku:



I. Narysuj okrąg i wpisz w niego sześciokąt foremny.

II. Wykorzystując sposób kreślenia sześciokąta foremnego, wpisz w okrąg trójkąt równoboczny.

20

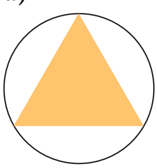
III. Wpisz w okrąg dwunastokąt foremny.

Czy w prostokącie *KLMN* można znaleźć taki punkt *Z*, aby czworokąt *KLMZ* był wpisany w okrąg?

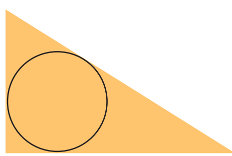
Sprawdź sam siebie

A. Na którym rysunku okrąg jest opisany na wielokącie?

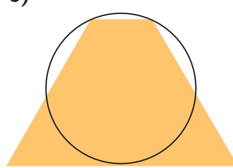
a)



b)



c)



B. Narysuj okrąg i wpisz w niego
a) trójkąt prostokątny.
b) czworokąt o dwóch przeciwległych kątach prostych.

C. Skonstruuj okrąg opisany na trójkącie o bokach 3, 4, 4.

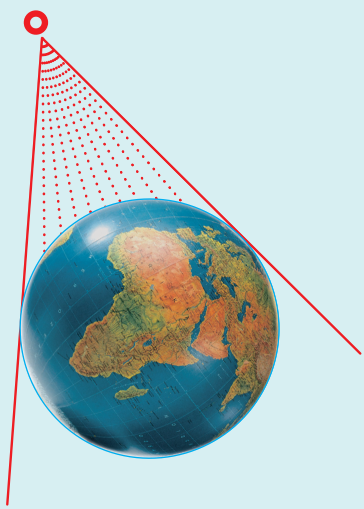
D. W pewnym równoległoboku przekątna tworzy z każdym z jego boków kąt o mierze 45°. Czy na tym równoległoboku można opisać okrąg? Uzasadnij odpowiedź. Jak inaczej można nazwać taki równoległobok?

Sieczne, styczne i…

Satelita telekomunikacyjny nadaje sygnały, które mogą być odbierane na części Ziemi „widzianej przez niego". Orbita satelity geostacjonarnego musi znajdować się w płaszczyźnie równika ziemskiego.

Aby satelita był geostacjonarny, musi być tak ustawiony, by jedno okrążenie wokół Ziemi wykonywał w 24 godziny.
Takie okrążenia satelita geostacjonarny wykonuje na wysokości 35 800 km, co odpowiada ok. 6,6 promienia Ziemi.
Na takiej wysokości wystarczy umieścić trzy satelity geostacjonarne, rozstawione na orbicie co 120°, aby były widoczne z całej Ziemi (z wyjątkiem obszarów podbiegunowych).

- ➜ Czy satelita może „zobaczyć" cały równik? A pół równika?
- ➜ Jaką największą część równika może „widzieć" satelita?
- ➜ Od czego zależy, aby satelita „widział" jak największą część równika?
- ➜ Ile co najmniej satelitów telekomunikacyjnych należy umieścić na orbicie, by transmisja sygnałów radiowych i telewizyjnych obejmowała całą Ziemię?



6 Położenie prostej względem okręgu

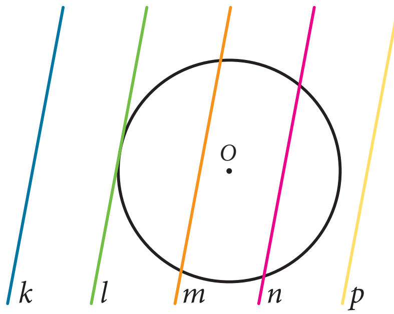
1. Dana jest prosta l i punkt A nieleżący na tej prostej.

→ Narysujcie kilka odcinków łączących punkt A z prostą l.

→ Kiedy odcinek łączący punkt A z prostą l będzie najkrótszy?

Odległością punktu A od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego ten punkt z prostą. Odcinek ten jest prostopadły do danej prostej.

2. Dany jest okrąg o środku O i promieniu $r = 1{,}5$ cm oraz proste równoległe k, l, m, n, p.



→ Ile punktów wspólnych ma każda z tych prostych z danym okręgiem?

→ Odległość prostej k od środka okręgu jest większa od promienia. Która prosta ma jeszcze tę własność?

→ Jaka jest odległość prostych m i n od środka okręgu?

→ W jakiej odległości od środka okręgu leży prosta l?

3. Narysuj okrąg o średnicy 5 cm. Narysuj trzy proste k, l, m tak, aby odległość środka okręgu

a) od prostej k była większa od promienia okręgu.

b) od prostej l była równa promieniowi okręgu.

c) od prostej m była mniejsza od promienia okręgu.

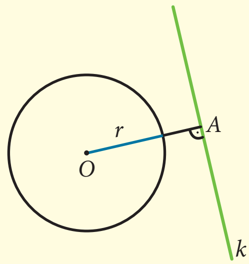
→ Ile punktów wspólnych ma każda z tych prostych z okręgiem?

4. Narysowano trzy proste i okrąg. Każdą z tych prostych opisano na dwa sposoby. Które opisy określają tę samą prostą?

I. Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.	**A.** Odległość prostej od środka okręgu jest równa promieniowi okręgu.
II. Prosta ma jeden punkt wspólny z okręgiem.	**B.** Odległość prostej od środka okręgu jest mniejsza od promienia okręgu.
III. Prosta ma dwa punkty wspólne z okręgiem.	**C.** Odległość prostej od środka okręgu jest większa od promienia okręgu.

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I OKRĘGU

Prosta *k* nie ma punktów wspólnych z okręgiem.



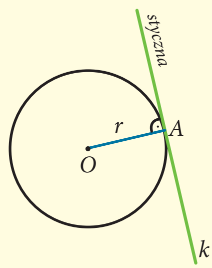
Odległość prostej od środka okręgu jest większa od długości promienia.

$|OA| > r$

Prosta *k* ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem.

Styczną do okręgu nazywamy prostą mającą jeden punkt wspólny z okręgiem.

Punkt ten jest punktem styczności prostej i okręgu.

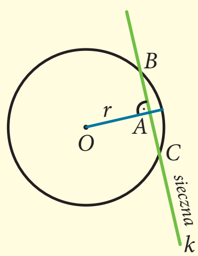


Odległość stycznej od środka okręgu jest równa długości promienia.

$|OA| = r$

Prosta *k* ma dwa punkty wspólne z okręgiem.

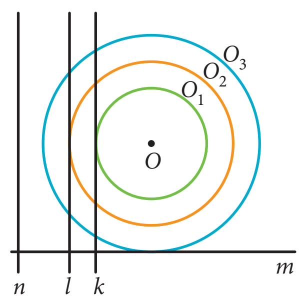
Sieczną okręgu nazywamy prostą mającą dwa punkty wspólne z okręgiem.



Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od długości promienia.

$|OA| < r$

5. Dane są trzy okręgi O_1, O_2, O_3 o wspólnym środku O oraz proste k, l, m, n. Proste k, l i n są równoległe. Prosta m jest do nich prostopadła.



- → Która prosta jest styczną do okręgu O_3?
- → Która prosta jest styczną do okręgu O_2?
- → Czy prosta k jest sieczną okręgu O_1?
- → Dla których okręgów sieczną jest prosta k?

6. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu $r = 1{,}5$ cm. Narysuj dwie proste

a) niemające punktów wspólnych z tym okręgiem. Zaznacz je kolorem niebieskim.

b) sieczne tego okręgu. Zaznacz je kolorem zielonym.

c) styczne do tego okręgu. Zaznacz je kolorem różowym.

→ Wykreśl odcinki, których długości są odpowiednio równe odległościom narysowanych prostych od środka okręgu.

7. Określ, ile punktów wspólnych ma prosta m z okręgiem o środku w punkcie A i promieniu $r = 5$ cm, jeżeli odległość punktu A od prostej m wynosi

a) 4 cm. **b)** 5 cm. **c)** 6 cm.

8. Określ, w jakiej odległości od środka okręgu o promieniu 3 cm leży

a) styczna do tego okręgu.

b) sieczna tego okręgu.

c) prosta niemająca punktów wspólnych z okręgiem.

9. Uzasadnij, że punkty przecięcia siecznej z okręgiem i środek tego okręgu wyznaczają trójkąt równoramienny, o ile tylko sieczna nie przechodzi przez środek okręgu.

10. Narysuj dowolny okrąg. Zaznacz na okręgu trzy różne punkty A, B i C. Ile siecznych wyznaczają te punkty? Narysuj je.

11. Dwie sieczne wyznaczyły na okręgu różne punkty A, B, C, D.

→ Jak położone są te sieczne, jeżeli punkty A, B, C, D są wierzchołkami kwadratu?

→ Jakie są odległości tych siecznych od środka okręgu?

→ Czy można wskazać takie dwie sieczne, aby wszystkie punkty siecznych wspólne z okręgiem wyznaczyły trójkąt?

21

12. Dana jest prosta k i punkt A leżący na tej prostej. Ile jest okręgów stycznych do prostej k w punkcie A?

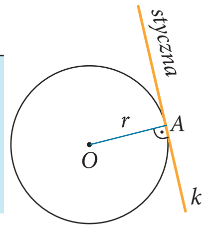
13. Narysujcie dowolny okrąg i prostą mającą z tym okręgiem jeden punkt wspólny. Oznaczcie środek okręgu literą *O*, a punkt wspólny okręgu i prostej – literą *A*.

→ Uzasadnijcie, że wszystkie punkty prostej, różne od punktu *A*, leżą od środka okręgu w odległości większej niż długość promienia okręgu.

→ Uzasadnijcie, że odcinek *OA* jest prostopadły do prostej.

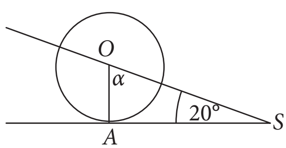
→ Uzasadnijcie, że prosta *OA* jest osią symetrii figury złożonej z okręgu i prostej stycznej do okręgu w punkcie *A*.

Styczna do okręgu tworzy z promieniem poprowadzonym do punktu styczności kąt prosty.
Prosta przechodząca przez punkt *A* okręgu i prostopadła do promienia *OA* tego okręgu jest styczna do okręgu w punkcie *A*.

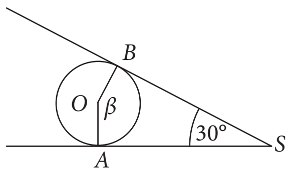


14. Oblicz miary zaznaczonych kątów wiedząc, że proste *SA* i *SB* są styczne do danego okręgu.

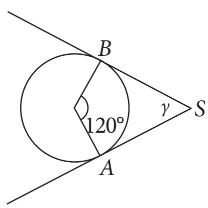
a)



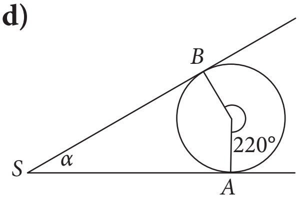
b)



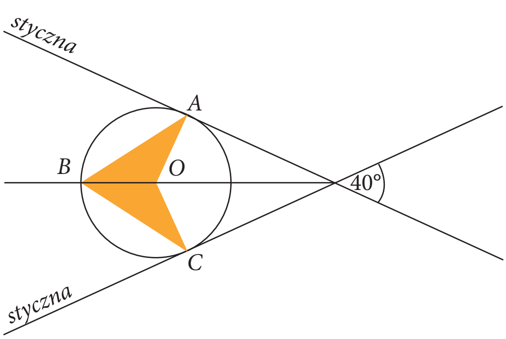
c)



d)

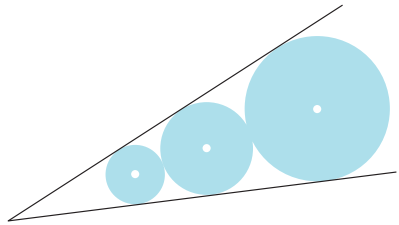


15. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta *ABCO*.



16. Z punktu A leżącego na zewnątrz okręgu poprowadźcie dwie styczne do tego okręgu. Porównajcie długości odcinków stycznych zawartych między punktem A i punktami styczności. Sformułujcie odpowiedni wniosek i uzasadnijcie go, wykorzystując cechy przystawania trójkątów.

17. Wytnij z papieru kilka kół o różnych promieniach i przekłuj ich środki. Narysuj dowolny kąt. Umieść jedno z kół tak, aby było styczne do ramion kąta. Zaznacz środek tego koła. Powtórz czynność, używając pozostałych kół. Jaką figurę wyznaczają środki tych kół?



18. Naszkicuj okrąg o środku w punkcie O i dwie proste styczne do tego okręgu przecinające się w punkcie S. Punkty styczności oznacz A i B. Zaznacz promienie okręgu poprowadzone do punktów styczności.

→ Podaj jak najwięcej własności czworokąta $SAOB$.

→ Uzasadnij, że trójkąty SAO i SBO są przystające.

→ Uzasadnij, że półprosta SO jest dwusieczną kąta ASB.

! **Środek okręgu stycznego do ramion kąta** leży na dwusiecznej tego kąta.

19. Dany jest okrąg o środku w punkcie O oraz punkt A leżący na okręgu.

I. Poprowadź prostą przechodzącą przez punkty O i A.

II. Na prostej zbuduj odcinek dwa razy dłuższy od odcinka OA, którego środkiem jest punkt A.

III. Narysuj symetralną zbudowanego odcinka.

IV. Uzasadnij, że symetralna zbudowanego odcinka jest styczną do tego okręgu w punkcie A.

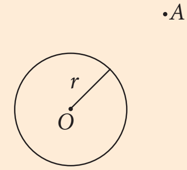
20. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r oraz punkt A, którego odległość od środka okręgu jest większa od promienia.

→ Wykonaj konstrukcję opisaną na następnej stronie.

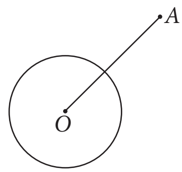
→ Ile takich prostych stycznych można poprowadzić?

Narysuj styczną do okręgu o środku *O* i promieniu *r*, przechodzącą przez punkt *A*, którego odległość od środka okręgu jest większa od promienia.

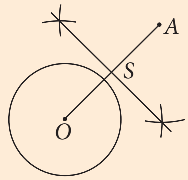
I. Narysuj okrąg o środku *O* i promieniu *r*. Zaznacz punkt *A*, którego odległość od środka okręgu jest większa od promienia.



II. Połącz punkt *O* z punktem *A*.

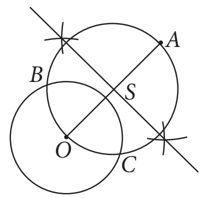


III. Wyznacz środek odcinka *OA* i oznacz go *S*.



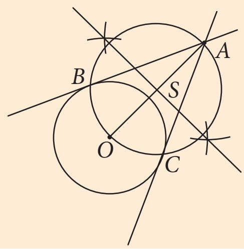
IV. Wykreśl okrąg o środku w punkcie *S* i promieniu równym długości odcinka *OS*.

Zaznacz punkty przecięcia tych dwóch okręgów, nazwij je *B* i *C* .



V. Poprowadź prostą przechodzącą przez punkty *A* i *B* oraz prostą przechodzącą przez punkty *A* i *C*.

Proste te są prostymi stycznymi do danego okręgu i przechodzącymi przez punkt *A*.



Rozszerzenie

21. Aby uzasadnić, że konstrukcja przedstawiona w zadaniu 20 jest poprawna, odpowiedz na poniższe pytania.

→ Czym dla okręgu o środku *O* są odcinki *OB* i *OC*?

→ Na jakim łuku okręgu o środku *S* oparty jest kąt *OBA*?

→ Na jakim łuku okręgu o środku *S* oparty jest kąt *OCA*?

→ Jakimi trójkątami są: trójkąt *OBA* i trójkąt *OCA*?

→ Jak położone względem siebie są odcinki *OB* i *BA* oraz *OC* i *CA*?

Rozszerzenie

→ Jak położone względem siebie są odcinek OB i prosta przechodząca przez punkty B i A oraz odcinek OC i prosta przechodząca przez punkty C i A?

→ Ile punktów wspólnych ma prosta AB z okręgiem o środku O?

→ Ile punktów wspólnych ma prosta AC z okręgiem o środku O?

Odpowiedzi na powyższe pytania powinny pokazać, że omawiane proste są prostopadłe do promieni i każda z nich ma z danym okręgiem punkt wspólny. To wystarczy, aby mieć pewność, że proste te są styczne do okręgu.

22. Dowolna prosta k i okrąg tworzą figurę g.

a) Skonstruuj oś symetrii figury g.

b) Skonstruuj prostą styczną do okręgu i równoległą do prostej k.

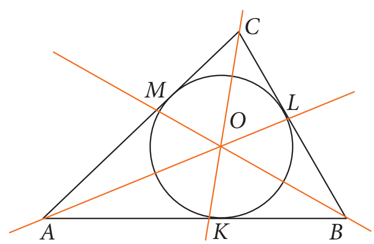
→ Uzasadnij poprawność przedstawionej konstrukcji.

Sprawdź sam siebie

A. Które proste są

a) styczne do okręgu o środku O i promieniu OM?

b) siecznymi okręgu o środku O i promieniu OM?



B. Określ, w jakiej odległości od środka okręgu o promieniu 7 cm leży

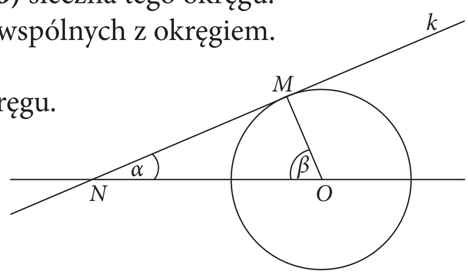
a) styczna do tego okręgu. **b)** sieczna tego okręgu.

c) prosta niemająca punktów wspólnych z okręgiem.

C. Prosta k jest styczną do okręgu.

a) Oblicz miarę kąta α wiedząc, że $\beta = 62^\circ$.

b) Oblicz miarę kąta β wiedząc, że $\alpha = 34^\circ$.



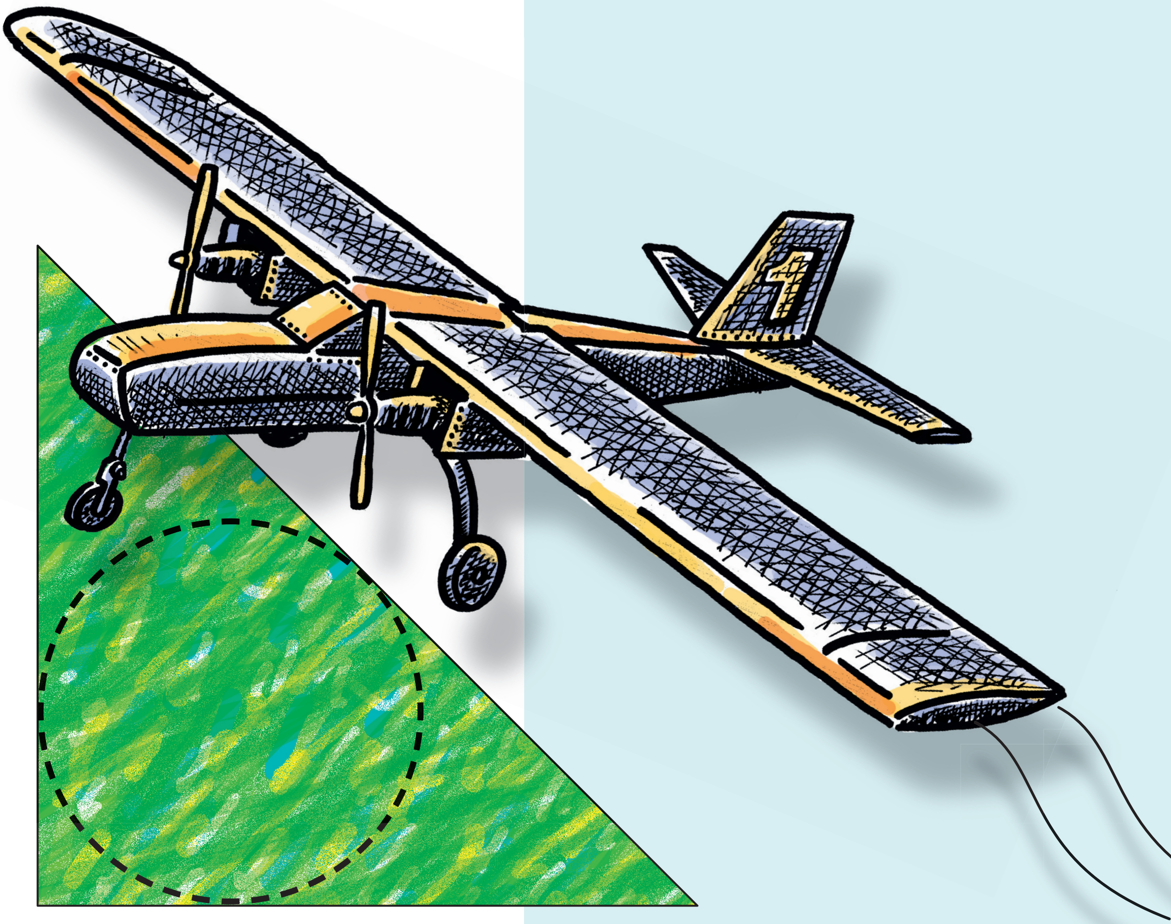
D. Narysuj okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = 2$ cm. Skonstruuj styczną przechodzącą przez punkt A,

a) należący do tego okręgu.

b) którego odległość od środka okręgu jest większa od promienia.

Latanie precyzyjne

Zawody modeli latających na uwięzi były rozgrywane na trójkątnym placu. Konkurencja polegała na locie modelu po okręgu. Chodziło o uzyskanie maksymalnego promienia lotu, przy którym model nie wyleci poza oznaczony trójkątny plac.



➜ W którym miejscu powinna stanąć osoba trzymająca linkę, aby model mógł latać po największym okręgu?

➜ Jaką największą liczbę punktów wspólnych może mieć każdy bok wyznaczonego placu z okręgiem o maksymalnym promieniu lotu?

➜ Jak położone są boki trójkątnego placu względem okręgu wyznaczającego maksymalny tor lotu modelu?

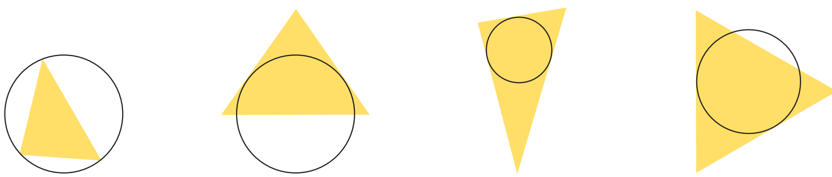
Trójkątem opisanym na okręgu nazywamy trójkąt, którego wszystkie boki są styczne do tego okręgu.

Okrąg taki nazywamy **okręgiem wpisanym w trójkąt.**

1. Zaproponuj definicję okręgu wpisanego w trójkąt, zaczynającą się od słów:
Okręgiem wpisanym w trójkąt nazywamy...

2. Na którym rysunku trójkąt jest opisany na okręgu?

I. **II.** **III.** **IV.**



3. Narysuj okrąg i opisz na nim trójkąt.

4. Narysujcie kąt i jego dwusieczną.
→ Zaznaczcie na dwusiecznej dowolny punkt *A*.
→ Narysujcie odcinek prostopadły do dowolnie wybranego ramienia kąta, łączący wybrany punkt *A* z tym ramieniem.
→ Narysujcie okrąg o środku w punkcie *A*, którego promieniem jest narysowany odcinek.
→ Czy narysowany okrąg jest styczny do obu ramion kąta? Dlaczego?

5. Narysujcie dowolny trójkąt *ABC*.
→ Narysujcie dwusieczne kątów *CAB* i *ABC*. Punkt przecięcia tych dwusiecznych nazwijcie *O*.
→ Narysujcie okrąg o środku w punkcie *O*, styczny do prostej *AB*.

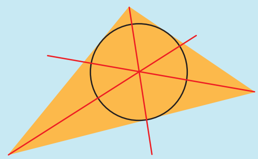
→ Uzasadnijcie, że okrąg ten jest styczny do prostej *AC*, a następnie, że jest też styczny do prostej *BC*. Czy okrąg ten jest wpisany w trójkąt *ABC*?

→ Uzasadnijcie, że punkt *O* leży na dwusiecznej kąta *ACB*.

!

W dowolnym trójkącie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.
W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.



Więcej na temat konstrukcji w *Czytance nr 3* w zeszycie ćwiczeń.

6. Korzystając ze schematu, wykreśl okrąg wpisany w trójkąt
a) ostrokątny. **b)** prostokątny. **c)** rozwartokątny.

Narysuj dany trójkąt. →

Skonstruuj dwusieczną jednego z kątów trójkąta. →

Skonstruuj dwusieczną drugiego kąta trójkąta. ↓

Znajdź punkt wspólny tych dwusiecznych. Jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. ←

Wykreśl prostą prostopadłą do jednego z boków trójkąta, przechodzącą przez wyznaczony środek okręgu. ←

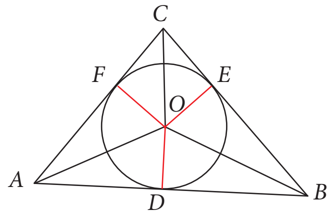
Znajdź punkt przecięcia tej prostej z bokiem trójkąta. Jest to punkt styczności. ↓

Zakreśl okrąg o środku w punkcie przecięcia się dwusiecznych, przechodzący przez znaleziony punkt styczności. Jest to szukany okrąg.

7. Narysuj trójkąt o bokach długości 3 cm, 4 cm i 6 cm. Wyznacz środek i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Narysuj ten okrąg.

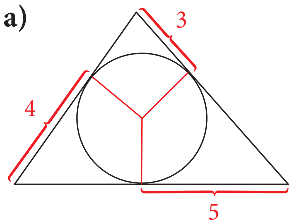
8. Czy środek okręgu wpisanego w trójkąt może leżeć na boku tego trójkąta? Uzasadnij odpowiedź.

9. Przeanalizuj rysunek i wskaż
→ pary trójkątów przystających.
→ pary odcinków równej długości.
→ pary kątów równych.

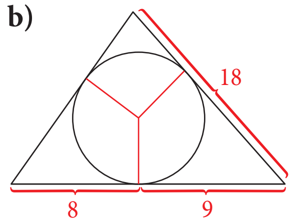


10. Oblicz obwód trójkąta naszkicowanego poniżej.

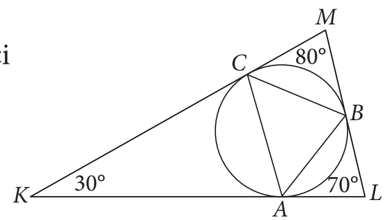
a)



b)

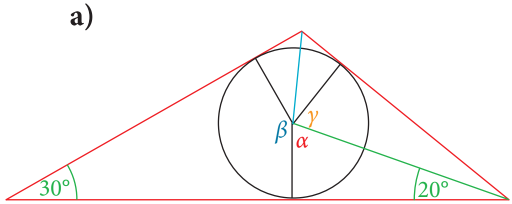


11. W trójkąt *KLM* o kątach 30°, 70° i 80° wpisano okrąg. Punkty styczności połączono odcinkami i otrzymano trójkąt *ABC*.
→ Oblicz miary kątów trójkątów: *CAK*, *BAL*, *BMC*.
→ Oblicz miary kątów trójkąta *ABC*.

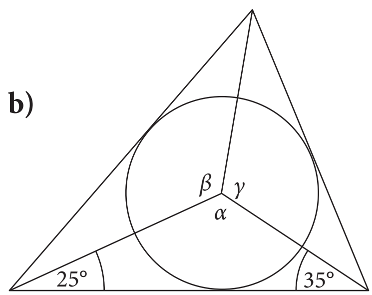


12. Oblicz miary kątów α, β, γ.

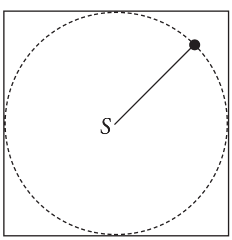
a)



b)



24

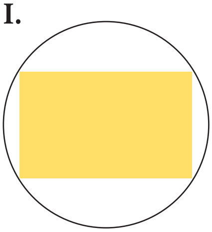


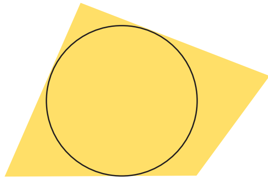
13. Oto schemat ilustrujący tor lotu modelu latającego na uwięzi po takim okręgu, aby uzyskać maksymalny promień lotu, przy którym model nie wyleci poza oznaczony kwadratowy plac.
→ W którym miejscu powinna stać osoba trzymająca linkę, aby model mógł latać po największym okręgu?
→ Jak położone są boki kwadratowego placu względem okręgu wyznaczającego maksymalny tor lotu modelu?

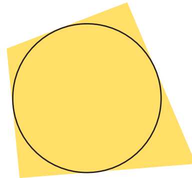
Czworokątem opisanym na okręgu nazywamy taki czworokąt, którego wszystkie boki są styczne do tego okręgu.

Okrąg taki nazywamy **okręgiem wpisanym w czworokąt.**

14. Na którym rysunku czworokąt jest opisany na okręgu?

I. 

II. 

III. 

15. Wyznaczcie dwusieczne wszystkich kątów podanych czworokątów.

I. kwadrat **II.** romb **III.** prostokąt **IV.** trapez

→ W którym z tych czworokątów dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie?

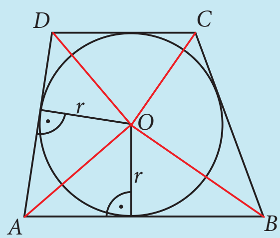
→ W które czworokąty można wpisać okrąg?

Okrąg wpisany w czworokąt *ABCD* musi być styczny do każdego z ramion kątów tego czworokąta. Środek okręgu stycznego do ramion kąta o wierzchołku *A* leży na dwusiecznej tego kąta itd.

Jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg, to środek tego okręgu jest wspólnym punktem dwusiecznych wszystkich kątów czworokąta.

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy, gdy dwusieczne jego kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie.

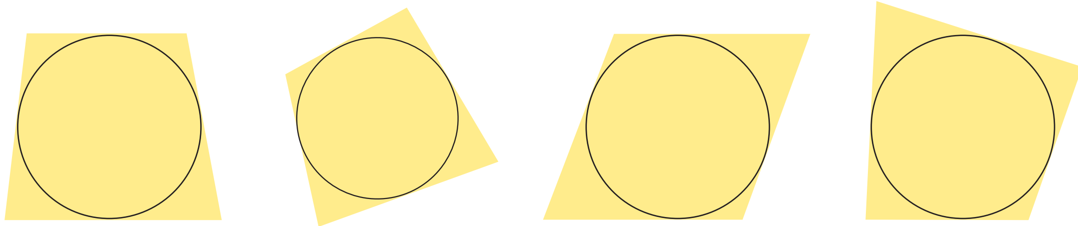
Środek okręgu wpisanego w czworokąt leży w punkcie przecięcia dwusiecznych wszystkich kątów wewnętrznych tego czworokąta.



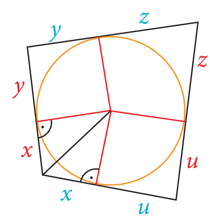
16. Narysuj deltoid i sprawdź, czy można w niego wpisać okrąg.

17. Na rysunkach przedstawiono różne czworokąty, w które wpisano okręgi.

I. **II.** **III.** **IV.**

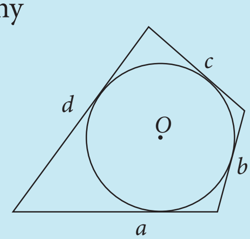


- Wytnijcie plansze z zeszytu ćwiczeń.
- Zmierzcie długości boków tych czworokątów.
- Obliczcie sumy długości przeciwległych boków czworokątów.
- Co zauważacie?
- Korzystając z rysunku, uzasadnijcie dostrzeżoną zależność.



Jeśli w czworokąt da się wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków są równe.
$a + c = b + d$

W każdy czworokąt wypukły, w którym sumy długości przeciwległych boków są równe, można wpisać okrąg.



18. Czy można wpisać okrąg w czworokąt o kolejnych bokach długości:

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm?

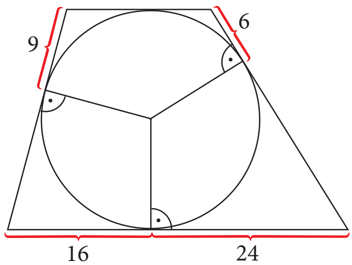
b) 5 dm, 9 dm, 11 dm, 7 dm?

c) 12,5 m, 15,6 m, 17,5 m, 13,4 m?

19. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Oblicz długości ramion tego trapezu, wiedząc że jego obwód wynosi 40 cm.

20. Dlaczego równoległobokiem, w który można wpisać okrąg, jest tylko romb?

21. Wykorzystaj dane z rysunku i oblicz obwód trapezu.



22. W jakim czworokącie punkt przecięcia przekątnych jest środkiem okręgu wpisanego w ten czworokąt? Uzasadnij odpowiedź.

25

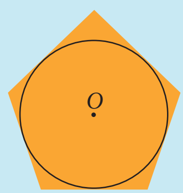
23. Narysuj okrąg i poprowadź siedem prostych stycznych do tego okręgu, tak aby wyznaczały wielokąt.

- Jaki wielokąt wyznaczyły te proste?
- Wykreśl w podobny sposób inne wielokąty.
- Opisz położenie każdego wielokąta względem narysowanego okręgu.
- Zaproponuj definicję wielokąta opisanego na okręgu.

!

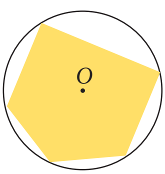
Wielokątem **opisanym na okręgu** nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki są styczne do tego okręgu.

Okrąg taki nazywamy **okręgiem wpisanym w ten wielokąt.**

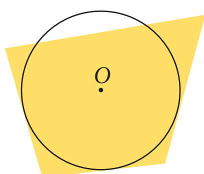


24. Na którym rysunku wielokąt jest opisany na okręgu? Uzasadnij odpowiedź.

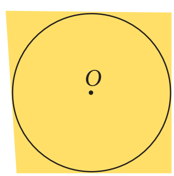
I.



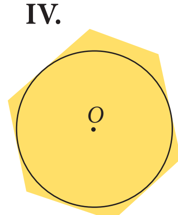
II.



III.



IV.



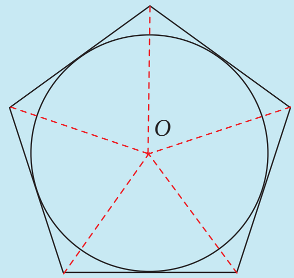
25. Narysujcie okrąg. Opiszcie na nim dowolny ośmiokąt.

→ Sprawdźcie, czy dwusieczne kątów tego ośmiokąta przecinają się w środku okręgu.

→ Sprawdźcie dla innych wielokątów, czy dwusieczne kątów wielokąta opisanego na okręgu przecinają się w środku tego okręgu.

W wielokąt można wpisać okrąg wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

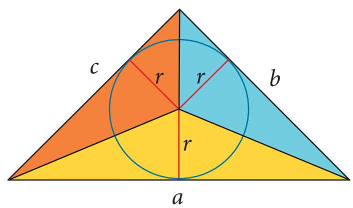
Środek okręgu wpisanego w wielokąt leży w punkcie przecięcia dwusiecznych wszystkich kątów tego wielokąta.



26. W sześciokąt foremny wpisz okrąg.

POLE TRÓJKĄTA

I. Wykorzystując rysunek, wyznacz wzór na pole trójkąta, gdy dane są długości a, b, c jego boków i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.



a) Oblicz pole trójkąta o bokach 30 cm, 39 cm, 39 cm i promieniu okręgu wpisanego w ten trójkąt 10 cm.

b) Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach 40 cm, 9 cm, 41 cm.

II. Wyznacz wzór na pole trójkąta, gdy dany jest jego obwód O i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) Oblicz pole trójkąta o obwodzie 12 cm, jeśli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 1 cm.

b) Oblicz obwód trójkąta o polu 54 cm^2, jeśli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 3 cm.

III. Podaj wzór na pole dowolnego wielokąta opisanego na okręgu, gdy dany jest obwód tego wielokąta i promień okręgu wpisanego w ten wielokąt.

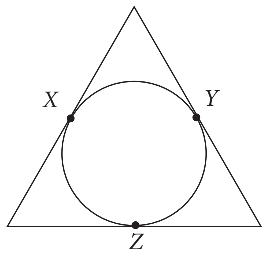
a) Oblicz pole trapezu o obwodzie 20 cm, jeśli promień okręgu wpisanego w ten trapez ma długość 2 cm.

b) Oblicz promień okręgu wpisanego w czworokąt, którego obwód wynosi 140 cm, a pole 1200 cm^2.

26

Narysuj trójkąt równoboczny. Znajdź środek okręgu wpisanego i opisanego na nim. Wykonaj to samo dla kwadratu i sześciokąta foremnego. Czy dostrzegasz jakąś prawidłowość?

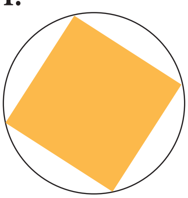
Narysuj okrąg i zaznacz na nim trzy punkty X, Y, Z. Narysuj trójkąt opisany na tym okręgu, tak aby punkty X, Y, Z były punktami styczności.
Czy jest to możliwe przy każdym położeniu punktów X, Y, Z?



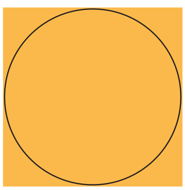
Sprawdź sam siebie

A. Na których rysunkach okrąg jest wpisany w wielokąt?

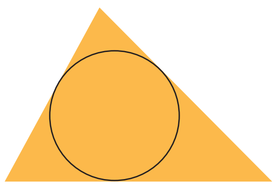
I.



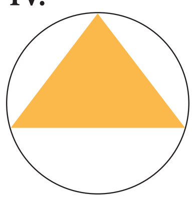
II.



III.



IV.

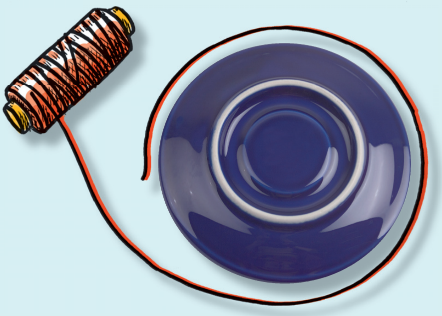


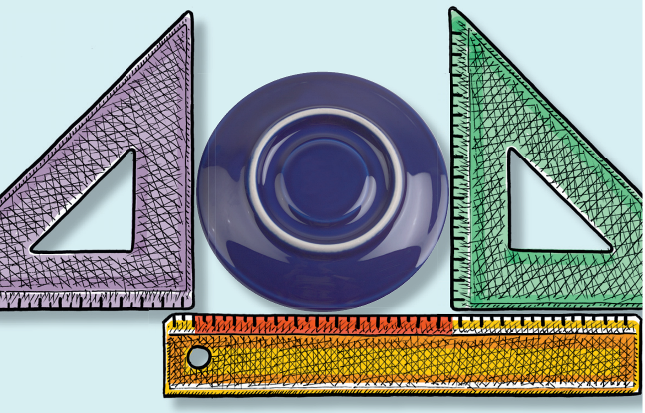
B. Narysuj dowolny trójkąt. Wpisz okrąg w ten trójkąt. Zaznacz promień okręgu i punkty styczności z bokami trójkąta.

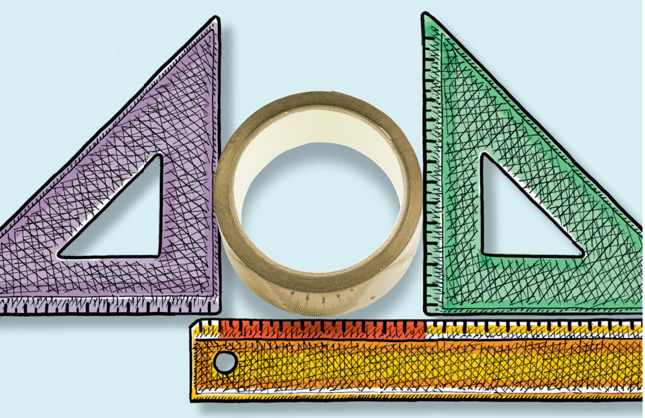
C. Czy można wpisać okrąg w czworokąt o kolejnych bokach długości 13 cm, 17 cm, 15 cm, 12 cm?

D. W trapez równoramienny wpisano okrąg. Oblicz długość ramienia trapezu wiedząc, że suma długości jego podstaw wynosi 28 cm.

Jak długi jest okrąg?







→ W tabeli przedstawiono wyniki pomiarów obwodu i średnicy talerzyka i rolki taśmy klejącej.

Przedmiot	Obwód l	Średnica d	$\frac{l}{d}$
talerzyk	44 cm	14 cm	3,1429
taśma	26,7 cm	8,5 cm	3,1412

→ Zmierz za pomocą miarki krawieckiej lub nici i linijki obwody różnych okrągłych przedmiotów, takich jak: szklanka, puszka, kubek itp.

→ Zmierz średnice tych przedmiotów.

→ W każdym przypadku oblicz stosunek obwodu do średnicy tych przedmiotów. Wyniki pomiarów przedstaw w tabeli.

→ Jakie ilorazy otrzymasz?

→ Porównaj swoje wyniki z wynikami kolegów i koleżanek.

→ Co zauważasz?

1. Jubilerzy do określenia rozmiarów pierścionków stosują miary jubilerskie. Tabela przedstawia, jak miara pierścionka jest zależna od jego średnicy wewnętrznej.
Korzystając z kalkulatora, wyznaczcie dla każdej miary iloraz obwodu wewnętrznego pierścionka i jego średnicy wewnętrznej.
Co zauważacie?

Rozmiar pierścionka	Średnica wewnętrzna pierścionka w mm	Obwód wewnętrzny pierścionka w mm
10	15,67	49,21
11	16,00	50,25
12	16,33	51,28
13	16,67	52,35
14	17,00	53,39
15	17,33	54,42
16	17,67	55,49
17	18,00	56,53
18	18,33	57,57
19	18,67	58,63
20	19,00	59,67

!

Iloraz długości okręgu *l* przez średnicę okręgu *d* jest stały.
Oznaczamy go grecką literą π (czyt. pi).

$$\frac{l}{d} = \pi$$

Iloraz ten jest liczbą niewymierną, czyli taką, której nie można przedstawić w postaci zwykłego ułamka.
Do obliczeń najczęściej używa się przybliżeń liczby π.

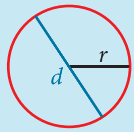
Przykłady: $\pi \approx 3{,}14$ $\quad \pi \approx \frac{22}{7}$

2. Małgosia zapisała:

Jeśli przez l oznaczę długość okręgu, a przez d długość średnicy okręgu, to: $\pi = \frac{l}{d}$*. Z tego wynika, że długość okręgu l wyraża się wzorem* $l = \pi d$.

→ Uzasadnij poprawność rozumowania Małgosi.
→ Wyznacz długość okręgu *l* w zależności od długości promienia okręgu *r*.
→ Wyznacz długość średnicy okręgu *d* w zależności od długości okręgu *l*.
→ Wyznacz długość promienia okręgu *r* w zależności od długości okręgu *l*.

Długość okręgu (obwód koła) l o średnicy d wynosi πd.
$$l = \pi d$$



Długość okręgu (obwód koła) l o promieniu r wynosi $2\pi r$.
$$l = 2\pi r$$

→ Aby podać dokładną długość okręgu, należy użyć liczby π.

Przykłady:

Długość okręgu o średnicy $d = 7$ cm jest równa $7 \text{ cm} \cdot \pi = 7\pi$ cm.

Długość okręgu o promieniu $r = 4$ cm jest równa $2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ cm} = 8\pi$ cm.

→ Aby podać wynik przybliżony, należy użyć przybliżenia liczby π. Zazwyczaj przyjmujemy: $\pi = 3{,}14$.

Przykłady:

Długość okręgu o średnicy $d = 7$ cm jest równa w przybliżeniu $7 \text{ cm} \cdot 3{,}14 = 21{,}98$ cm.

Długość okręgu o promieniu $r = 4$ cm jest równa w przybliżeniu $2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \text{ cm} = 25{,}12$ cm.

3. Wyznacz dokładną długość okręgu o podanym promieniu.

a) 3 cm **b)** 7 cm **c)** 1,2 cm **d)** 0,9 cm

4. Wyznacz dokładną długość okręgu o podanej średnicy.

a) 5 cm **b)** 16 cm **c)** 2,4 cm **d)** 0,2 cm

5. Oblicz średnicę i promień okręgu, jeśli długość okręgu wynosi

a) 28π cm. **b)** 12π dm. **c)** $1{,}4\pi$ dm. **d)** 6π cm.

6. Średnica koła ma długość 5 cm. Oblicz obwód koła, przyjmując

a) $\pi = 3$. **b)** $\pi = 3{,}1$. **c)** $\pi = 3{,}14$. **d)** $\pi = 3{,}1415$.

7. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, oblicz długość okręgu o średnicy

a) 4 cm. **b)** 0,5 m. **c)** 125 mm. **d)** $2\frac{1}{2}$ dm.

27

8. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, oblicz średnicę i promień koła o obwodzie

a) 6,28 cm. **b)** 12,56 dm. **c)** 31,40 dm. **d)** 47,1 cm.

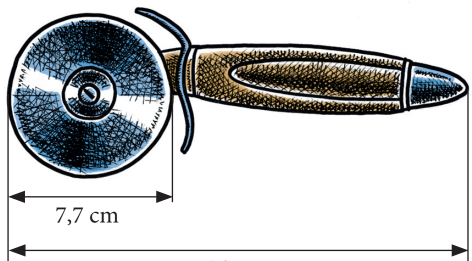
9. Promień koła ma długość 12 cm. Ile razy obwód tego koła jest większy od obwodu koła o promieniu trzy razy mniejszym?

10. Średnica dużego koła bicykla wynosi 2 m, a małego 0,5 m.

→ Jaką drogę w ciągu jednego obrotu pokonuje małe koło, a jaką – duże koło tego bicykla?

→ Ile obrotów małego koła przypada na jeden obrót dużego?

11. Mała pizza ma 19 cm średnicy, średnia 27 cm, a duża 33 cm. Którą pizzę można przekroić na pół tak, aby nóż do pizzy o podanych wymiarach wykonał co najwyżej jeden obrót? Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.



12. Diabelski młyn to rodzaj karuzeli obracającej się na poziomej osi. Główne jego elementy to zorientowane pionowo koło oraz przymocowane na jego obwodzie wagoniki. Obecnie największy diabelski młyn o średnicy koła 165 m znajduje się w Singapurze. Jaką drogę przebędzie punkt zaczepienia wagonika w czasie jednego obrotu karuzeli? Przyjmij $\pi = 3{,}14$.

13. Trasa rajdu ma 157 km. Średnica koła samochodu rajdowego ma 60 cm. Ile obrotów wykona koło tego samochodu na całej trasie? Przyjmij $\pi = 3{,}14$.

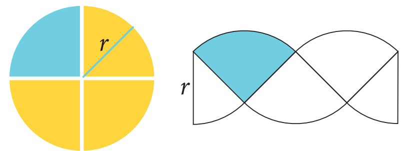
14. Dźwig podnosi ciężary, nawijając linę na bęben o średnicy 450 mm. Na jaką wysokość został podniesiony ciężar, jeżeli bęben wykonał 20 obrotów?

15. Wskazówka minutowa zegara na wieży ma długość 4,3 m, a wskazówka godzinowa – 2,7 m. Jaką drogę przebędzie koniec każdej z tych wskazówek w ciągu całego roku (365 dób)? Przyjmij $\pi = 3{,}14$.

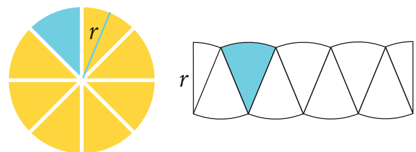
28

16. Spójrzcie na rysunki. Pokazują one, jak rozcinano koło i układano z tych elementów inną figurę.

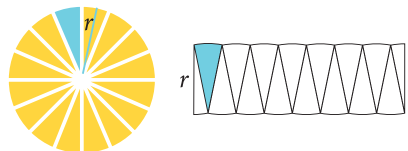
→ Jaką figurę przypomina figura ułożona z tak pociętego koła?



→ Jaką długość mają boki tej figury?



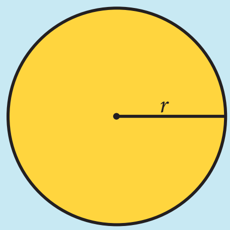
→ Jaki byłby wzór na pole tak ułożonej figury, jeśli koło byłoby rozcinane na coraz więcej coraz drobniejszych „kawałków”?



!

Pole koła P o promieniu r jest równe πr^2.

$P = \pi r^2$



17. Używając liczby π, oblicz pole koła o promieniu

a) 9 cm. **b)** 0,5 m. **c)** $2\frac{1}{2}$ dm. **d)** 15 mm.

18. Oblicz długość promienia koła, którego pole wynosi

a) 16π cm^2. **b)** 25π m^2. **c)** 64π dm^2. **d)** 4900π mm^2.

19. Przyjmując $\pi = 3{,}1416$, oblicz pole koła o promieniu 4 cm.

20. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, oblicz długość średnicy koła, którego pole wynosi

a) 254,34 cm^2. **b)** 1256 mm^2. **c)** 0,0314 m^2. **d)** 28,26 dm^2.

21. Oblicz obwód koła, którego pole jest równe 36π cm^2.

22. Oblicz pole koła, którego obwód ma długość

a) 10π cm. **b)** 16π m. **c)** $1{,}8\pi$ mm. **d)** 5π dm.

23. Przyjmując $\pi = 3{,}1$, oblicz pole koła, którego obwód wynosi

a) 24,8 cm. **b)** 31 mm. **c)** 43,4 dm. **d)** 1,24 m.

24. Przyjrzyjcie się przedmiotom na zdjęciu.

tarcza hamulcowa

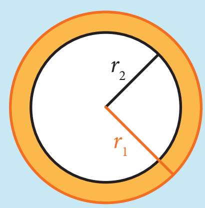
podkładka pod śrubkę

→ Jaką wspólną cechę mają te przedmioty?

→ Zaproponujcie sposób obliczania pól takich figur.

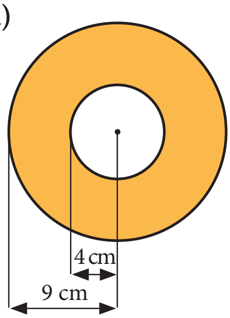
Pierścieniem kołowym nazywamy część płaszczyzny ograniczoną dwoma okręgami współśrodkowymi.
Pole pierścienia kołowego *P* jest różnicą pola koła o promieniu r_1 i pola koła o promieniu r_2 $(r_1 > r_2)$.

$$P = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

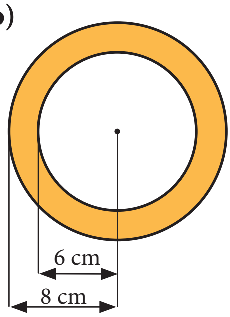


25. Oblicz pole pierścienia kołowego przedstawionego na rysunku.

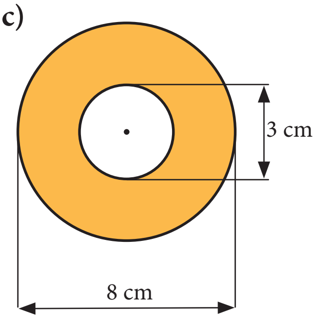
a)



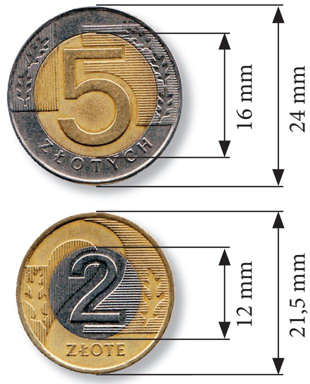
b)



c)



26. Oto wymiary monet pięciozłotowej i dwuzłotowej.



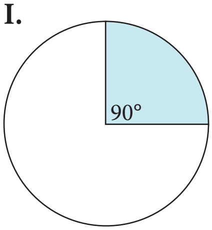
a) O ile pole powierzchni jednej strony monety pięciozłotowej jest większe od pola powierzchni jednej strony monety dwuzłotowej? A ile razy?

b) Oblicz pole powierzchni części srebrnej i złotej w każdej z monet. Porównaj pola powierzchni części złotej w obu monetach.

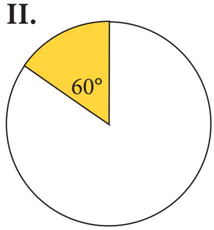
29

27. **a)** Jaką część koła zamalowano?

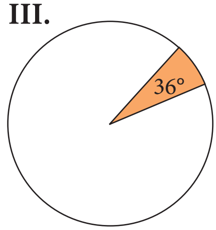
I.



II.

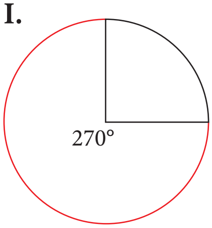


III.

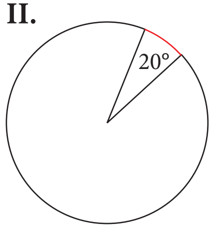


b) Jaką część okręgu stanowi zaznaczony na czerwono łuk?

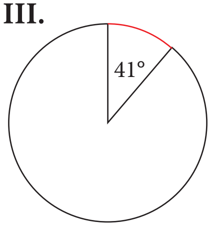
I.



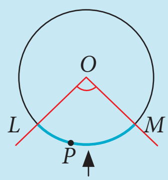
II.



III.



Kątem środkowym opartym na łuku *MPL* okręgu nazywamy kąt zawierający łuk *MPL* o wierzchołku w środku tego okręgu i o ramionach przechodzących przez punkty *L* i *M*.



łuk, na którym oparty jest kąt środkowy LOM

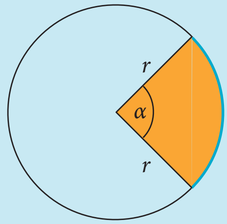
28. Z koła o promieniu $r = 10$ cm wycięto część wyznaczoną przez kąt środkowy o mierze 72° .

→ Jaką częścią koła jest wycięta część? Jakie jest jej pole?

→ Jaką częścią okręgu jest łuk wycięty przez kąt środkowy o mierze 72°? Jaka jest jego długość?

Wycinkiem koła (wycinkiem kołowym) wyznaczonym przez kąt środkowy α nazywamy część koła ograniczoną ramionami kąta środkowego i łukiem, na którym oparty jest kąt α.

Pole wycinka kołowego P wyznaczonego przez kąt środkowy α w kole o promieniu r jest równe $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$.



$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość łuku l wyznaczonego przez kąt środkowy α w kole o promieniu r jest równa $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

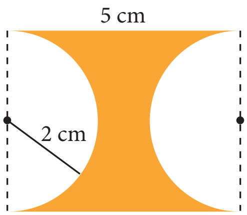
29. Oblicz długość łuku i pole wycinka kołowego o promieniu 6 cm wyznaczonego przez kąt środkowy

a) $\alpha = 30^\circ$. **b)** $\alpha = 45^\circ$. **c)** $\alpha = 120^\circ$. **d)** $\alpha = 240^\circ$.

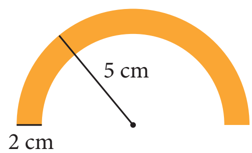
30. Pole wycinka kołowego wynosi 18π cm^2 i stanowi $\frac{3}{5}$ pola koła. Podaj miarę kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek oraz promień koła i długość łuku tego wycinka.

31. Oblicz pole i obwód zaznaczonej figury. Przyjmij $\pi = 3{,}1$.

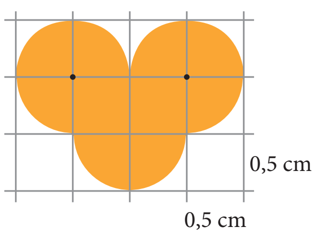
a)



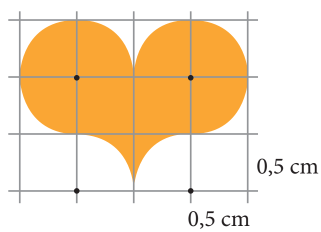
b)



c)



d)



32. Kwadrat i koło mają takie same obwody równe 16 cm. Która z tych figur ma większe pole?

ODLEGŁOŚCI NA RÓWNIKU

Można przyjąć, że promień Ziemi ma 6370 km, a $\pi = \frac{22}{7}$.

I. Jaka jest przybliżona długość równika, wyznaczona jako długość okręgu o podanym promieniu?

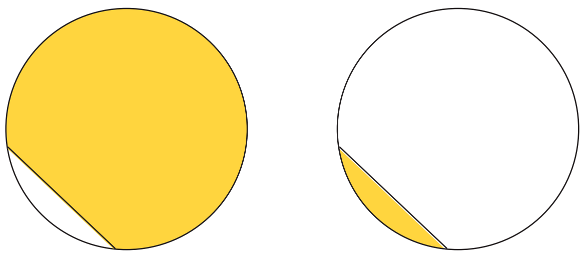
II. Jaka jest odległość między dwoma miejscami na równiku mającymi długości geograficzne różniące się o 1°?

III. Jaka jest odległość między dwoma miejscami na równiku mającymi długości geograficzne różniące się o 15°?

IV. O ile stopni różnią się długości geograficzne dwu miejsc położonych na równiku, jeśli odległość między nimi wynosi 1001 km?

Rozszerzenie

Cięciwa dzieli koło na dwa **odcinki kołowe** o wspólnej cięciwie.

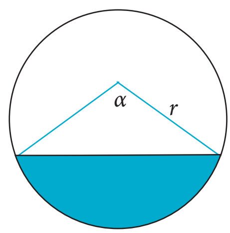


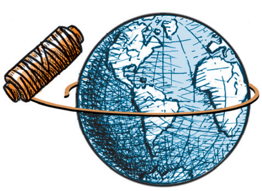
→ Wymień własności odcinka kołowego.

→ Oblicz pole odcinka kołowego dla

a) $\alpha = 90°$, $r = 10$ cm.

b) $\alpha = 270°$, $r = 5$ cm.

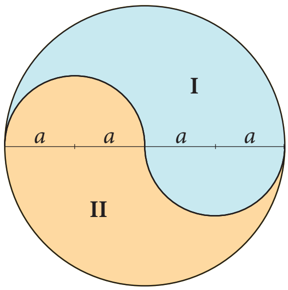


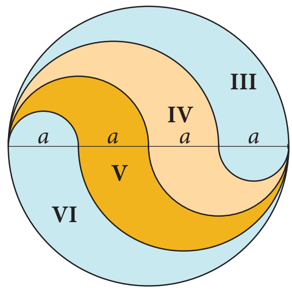


Podaje się, że długość równika jest w przybliżeniu równa 40 000 km, a średni promień Ziemi ma w przybliżeniu długość 6378 km. Jakie przybliżenie liczby π przyjęto przy wyznaczaniu tych wielkości? Znajdź w różnych źródłach dane dotyczące długości równika i promienia Ziemi. Oblicz, jakie przybliżenie liczby π zastosowano przy obliczeniach.

Pamiętaj o podaniu źródeł informacji.

Oblicz pola zaznaczonych obszarów.





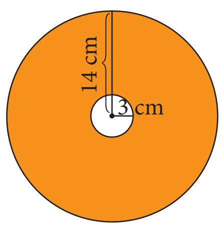
Sprawdź sam siebie

A. Oblicz długość okręgu i pole koła

a) o promieniu $r = 2{,}5$ cm. **b)** o średnicy $d = 2$ cm 4 mm.

B. Obwód koła wynosi 14π cm. Oblicz pole tego koła, przyjmując $\pi = \frac{22}{7}$.

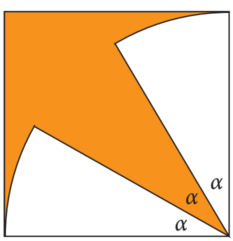
C. Z koła o promieniu 14 cm wycięto koło o tym samym środku i promieniu 3 cm. Oblicz pole powstałego pierścienia, przyjmując $\pi = 3{,}14$.



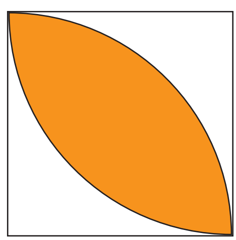
D. Oblicz pole i obwód zamalowanej figury, wiedząc że długość boku kwadratu wynosi 8 cm.

31
czytanka

a)

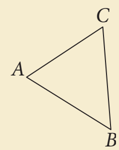
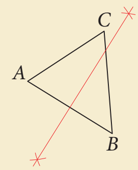
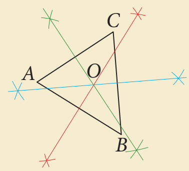
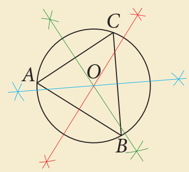


b)



Jak to rozwiązać? nr 2

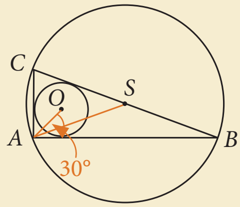
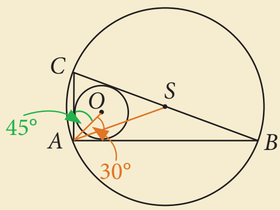
1. Na dowolnym trójkącie ABC opisz okrąg.

Narysuj dowolny trójkąt *ABC*.	
Narysuj symetralną boku *AB*.	
Narysuj symetralne pozostałych boków: *BC* i *CA*. Punkt przecięcia się symetralnych oznacz *O*.	
Narysuj okrąg o środku w punkcie *O* i promieniu o długości równej odległości punktu *O* od dowolnego wierzchołka trójkąta *ABC*. Jest to okrąg opisany na trójkącie *ABC*.	

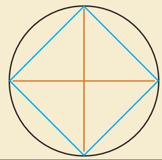
2. Oblicz długość łuku stanowiącego $\frac{4}{5}$ długości okręgu o promieniu 10 cm.

Oblicz długość okręgu.	Korzystamy ze wzoru na długość okręgu $l = 2\pi r$, otrzymujemy: $l = 2\pi \cdot 10$, $l = 20\pi$.
Oblicz daną część wyznaczonej długości okręgu.	$x = \frac{4}{5} \cdot l$ $x = \frac{4}{5} \cdot 20\pi$ $x = 16\pi$
Podaj odpowiedź.	Łuk stanowiący $\frac{4}{5}$ długości okręgu o promieniu 10 cm ma długość 16π cm.

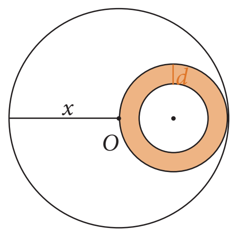
3. Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*. Kąt *BAC* jest kątem prostym, punkt *S* jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt *O* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Kąt *SAO* ma 30°. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta *ABC*.

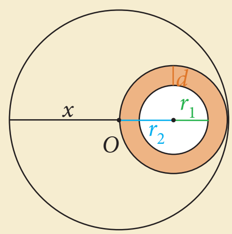
Wykonaj rysunek do zadania.	Rysujemy trójkąt *ABC*. Opisujemy na tym trójkącie okrąg i zaznaczamy jego środek *S*. Wpisujemy okrąg w ten trójkąt i zaznaczamy jego środek *O*. Zaznaczamy kąt *SAO*. 
Zastosuj własności okręgu wpisanego w wielokąt.	Środek okręgu wpisanego w trójkąt wyznaczony jest przez punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta. Zatem punkt *O* należy do dwusiecznej kąta prostego, a kąt *CAO* ma rozwartość 45°. Miara kąta *SAB* jest więc równa 90° – 45° – 30° = 15°. 
Zastosuj własności okręgu opisanego na wielokącie.	Odcinki *AS* i *BS* są promieniami okręgu opisanego na trójkącie, więc mają taką samą długość. Stąd trójkąt *ABS* jest równoramienny. W trójkącie *ABS* kąt przy wierzchołku *B* jest taki sam jak przy wierzchołku *A* i ma rozwartość 15°.
Zastosuj własności analizowanej figury.	W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* jest równy 90°, a kąt przy wierzchołku *B* ma miarę 15°. Zatem kąt przy wierzchołku *C* ma rozwartość 180° – (90° + 15°) = 180° – 105° = 75°.
Podaj odpowiedź.	Kąty ostre w trójkącie *ABC* mają miary 15° i 75°.

4. Oblicz pole koła opisanego na kwadracie o przekątnych równych 4.

Wykonaj rysunek do zadania.	Rysujemy kwadrat o przekątnych równych 4. Opisujemy na tym kwadracie koło. 
Podaj długość promienia narysowanego koła.	Ponieważ koło opisane jest na kwadracie, to przekątne kwadratu są średnicami tego koła. Stąd promień koła jest równy 2.
Oblicz pole koła.	Ze wzoru na pole koła $P = \pi r^2$ otrzymujemy: $P = \pi \cdot 2^2$, $P = \pi \cdot 4$, $P = 4\pi$.
Podaj odpowiedź.	Pole koła jest równe 4π.

5. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu x. Oblicz pole zaznaczonego pierścienia, wiedząc że $x = 6$ cm, a $d = 2$ cm.



Oblicz długości promieni okręgów wyznaczających pierścień.	Jeżeli za r_1 przyjmiemy promień najmniejszego z zaznaczonych okręgów, to $x = 2d + 2r_1$. Z tego wynika, że: $6 = 2 \cdot 2 + 2r_1$, $r_1 = 1$. Jeżeli za r_2 przyjmiemy promień drugiego z okręgów wyznaczających pierścień, to $x = 2r_2$. Z tego wynika, że: $6 = 2r_2$, $r_2 = 3$. 
Oblicz pola kół o wyznaczonych promieniach.	Obliczamy pola kół, korzystając ze wzoru $P = \pi r^2$. Pole koła o promieniu $r_2 = 3$ cm jest równe: $P_{r_2} = \pi \cdot 3^2$, $P_{r_2} = 9\pi$. Pole koła o promieniu $r_1 = 1$ cm jest równe: $P_{r_1} = \pi \cdot 1^2$, $P_{r_1} = \pi$.
Oblicz pole pierścienia jako różnicę wyznaczonych pól kół.	Pole pierścienia jest różnicą pól kół o promieniu r_2 i r_1, zatem: $P = P_{r_2} - P_{r_1}$, $P = 9\pi - \pi$, $P = 8\pi$.
Podaj odpowiedź.	Pole zaznaczonego pierścienia jest równe 8π cm^2.

1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach długości 3 cm, 4 cm, 5 cm. Na tym trójkącie opisano okrąg o środku O. Jaką długość ma promień tego okręgu?

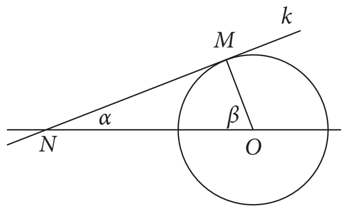
2. a) Dany jest trapez równoramienny o bokach długości 9 cm, 4,5 cm, 4,5 cm, 4,5 cm. Czy prawdą jest, że promień okręgu opisanego na tym trapezie ma długość większą niż 4,5 cm? Uzasadnij odpowiedź.

b) Dany jest trapez równoramienny o bokach długości 9 cm, 4 cm, 3 cm, 4 cm. Czy prawdą jest, że promień okręgu opisanego na tym trapezie ma długość większą niż 4,5 cm? Uzasadnij odpowiedź.

3. Prosta k jest styczną do okręgu.

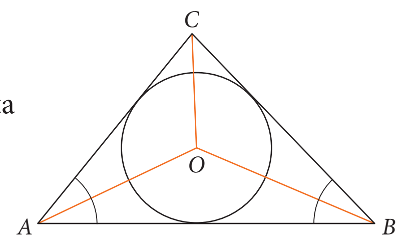
a) Oblicz miarę kąta α, wiedząc że $\beta = 72°$.

b) Oblicz miarę kąta β, wiedząc że $\alpha = 25°$.



4. Narysuj okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = 4$ cm. Skonstruuj styczną przechodzącą przez punkt A, którego odległość od środka okręgu jest większa od promienia.

5. W trójkąt równoramienny ABC o kącie przy podstawie $\beta = 45°$ wpisano okrąg. Wierzchołki trójkąta połączono ze środkiem okręgu O. Oblicz miary powstałych kątów o wierzchołku O.



6. Oblicz długość okręgu i pole koła o promieniu

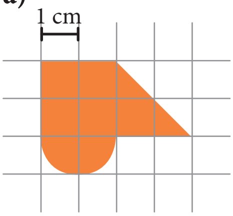
a) 8 cm. **b)** 7,5 cm. **c)** 4 dm 5 cm.

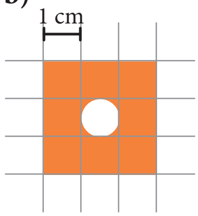
7. Obwód koła jest równy 12π cm. Jakie jest pole tego koła?

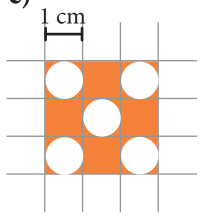
8. Dane jest koło o promieniu 4 cm oraz koło o promieniu dwa razy większym. Ile razy pole większego koła jest większe od pola mniejszego koła?

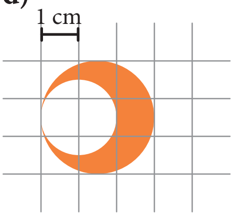
9. Jaką średnicę ma słup telegraficzny, jeśli jego obwód jest równy 62 cm? Podaj wynik przybliżony i dokładny.

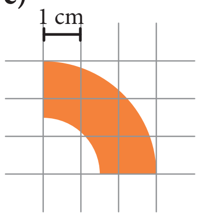
10. Oblicz pole zamalowanej figury.

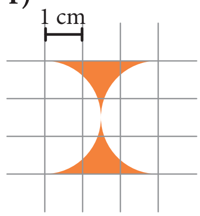
a)


b)


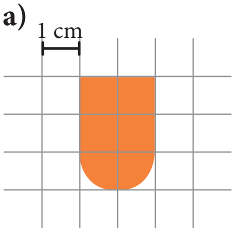
c)


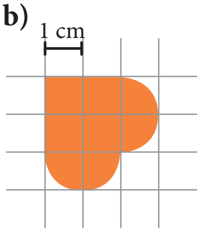
d)


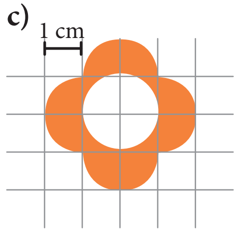
e)


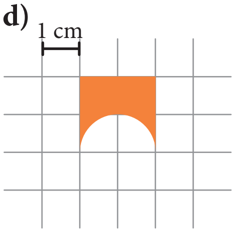
f)


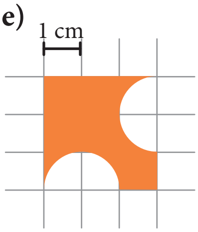
11. Oblicz obwód zamalowanej figury.

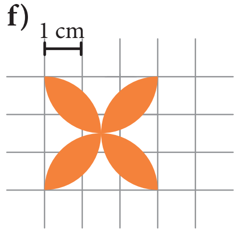
a)


b)


c)


d)


e)


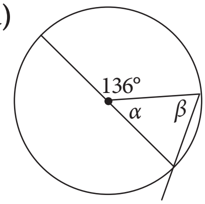
f)


12. Kąt środkowy $\alpha = 45°$, a promień koła $r = 7$ cm. Oblicz pole wycinka kołowego wyznaczonego w tym kole przez dany kąt środkowy i długość łuku, na którym oparty jest ten kąt.

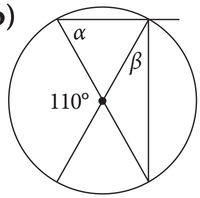
13. W koło o obwodzie 28π cm wpisano kwadrat i na tym kole opisano kwadrat. O ile cm^2 pole koła różni się od pól tych kwadratów?

14. Podaj miary kątów α i β.

a)

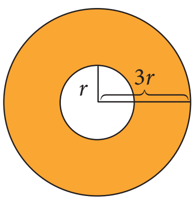


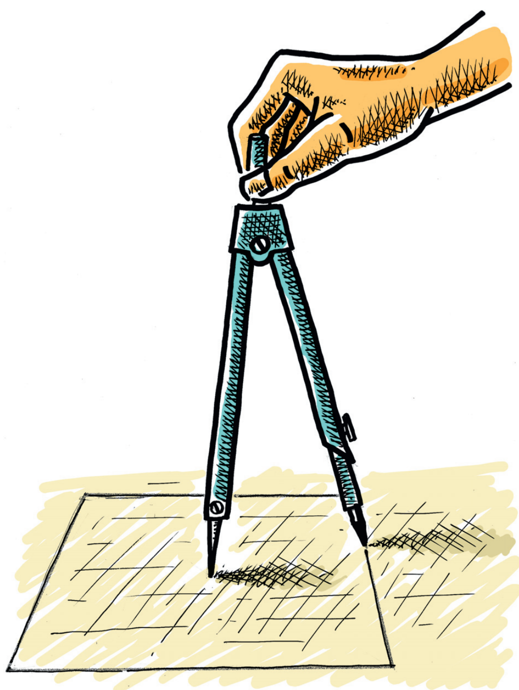
b)



15. W okręgu o środku O i promieniu równym 4 cm narysuj cięciwę $AB = 6$ cm. Poprowadź styczne do punktów A i B, a punkt przecięcia tych stycznych nazwij D.
Czy powstały czworokąt $AOBD$ ma oś symetrii?

16. Oblicz pole narysowanego pierścienia, wiedząc że promień małego koła jest trzy razy krótszy od promienia dużego koła.





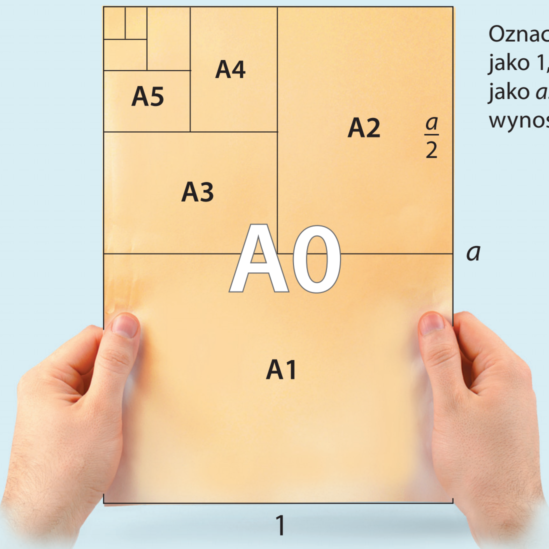
Trening przed klasówką nr 2

$\sqrt{2}$ łączy Europę

Książka, zeszyt, gazeta mają pewne wymiary – najczęściej odpowiadające jednemu ze standardowych formatów. Typowa kartka, której używasz podczas drukowania, ma format A4. Paszport ma format B7, a najprostsza koperta – C6. Co oznaczają te symbole? Jakie są między nimi zależności?

Tajemnice A4

Przyjrzyjmy się podstawowej serii formatów – A. Symbolem 0 oznaczono największy arkusz, o powierzchni 1 m^2. Mniejsze formaty tworzy się, składając większe arkusze na pół: A0 → A1 → A2 → A3 → A4 → … (jak pokazano na rysunku).
Wymiary są tak dobrane, że wszystkie kartki mają taką samą proporcję boków.
Jaka to proporcja?



Oznaczmy krótszy bok kartki jako 1, natomiast dłuższy jako a. Stosunek długości boków wynosi wówczas:

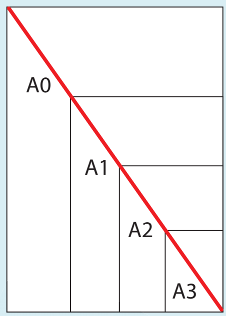
$$\frac{a}{1} = \frac{1}{\frac{a}{2}}$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{a^2}{2} = 1$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$



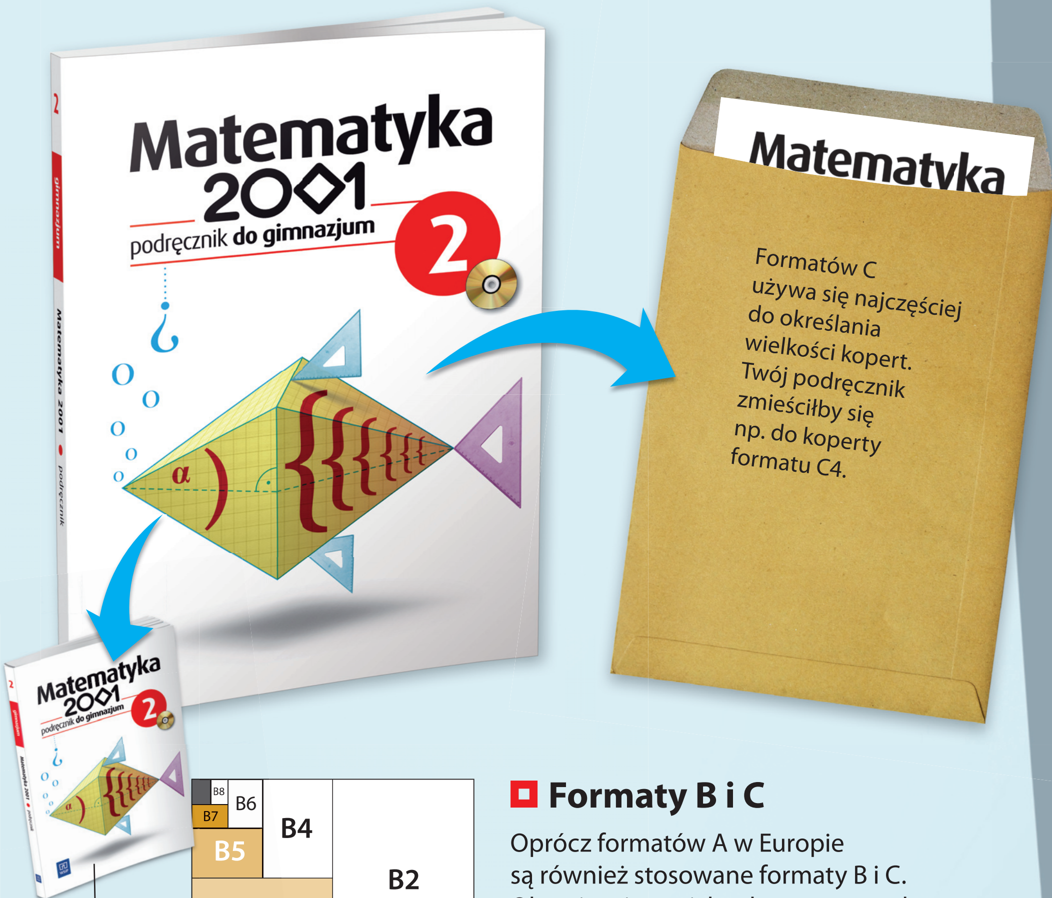
Pomysł wykorzystania pierwiastka z dwóch w taki sposób powstał w Europie w XIX wieku, w XX wieku korzystał już z niego prawie cały kontynent. Obecnie przyjął się w większości krajów świata – wyjątkami są USA, Kanada, Meksyk oraz Chiny i Japonia.

Dla niedowiarków

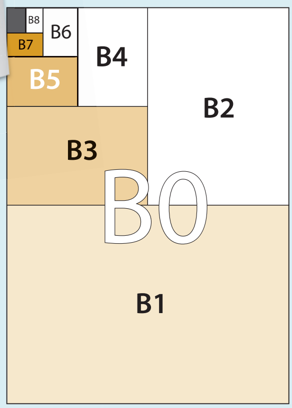
Korzystając z danych z poniższej tabeli, możesz sprawdzić, czy rzeczywiście 1189 : 841 = 841 : 594 = 594 : 420 = … ≈ 1,41.

format papieru	A0	A1	A2	A3	A4	A5
wymiary [mm]	841 × 1189	594 × 841	420 × 594	297 × 420	210 × 297	148 × 210

Ile procent powiększenia trzeba wpisać na kserografie, żeby kartkę formatu A5 zwiększyć do formatu A4? Obliczmy: $\sqrt{2} \cdot 100$, czyli $1{,}41 \cdot 100$... **Powiększenie jest w skali 141%.**
I odwrotnie – żeby otrzymać z kartki A4 kartkę A5, musimy ją zmniejszyć w skali $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}71$.
Na kserografie wpisujemy więc 71%. Analogicznie możesz zwiększać i zmniejszać inne formaty.



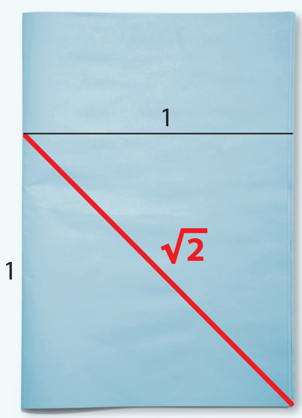
Twój podręcznik ma format zbliżony do B5.

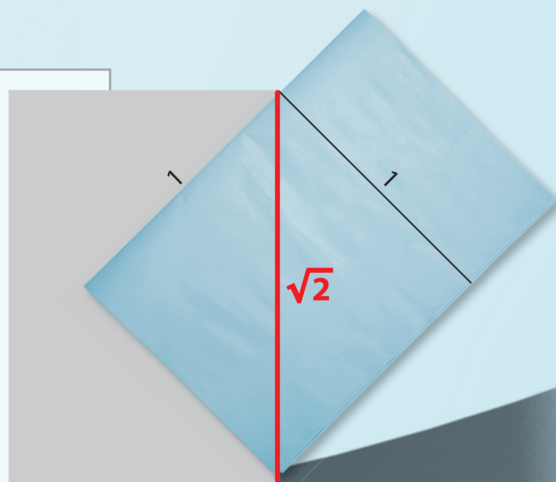


Formaty B i C

Oprócz formatów A w Europie są również stosowane formaty B i C. Obowiązuje w nich taka sama zasada proporcji jak w przypadku serii A. B0 ma wymiary 1000 × 1414 mm, czyli ma powierzchnię równą $\sqrt{2}$ m^2. Wymiary formatów C są średnią geometryczną odpowiednich wymiarów A i B, np. format C2 to średnia geometryczna A2 i B2.

Sprawdź, że dłuższy bok kartki A4 ma taką długość, jak przekątna największego kwadratu wpisanego w tę kartkę.

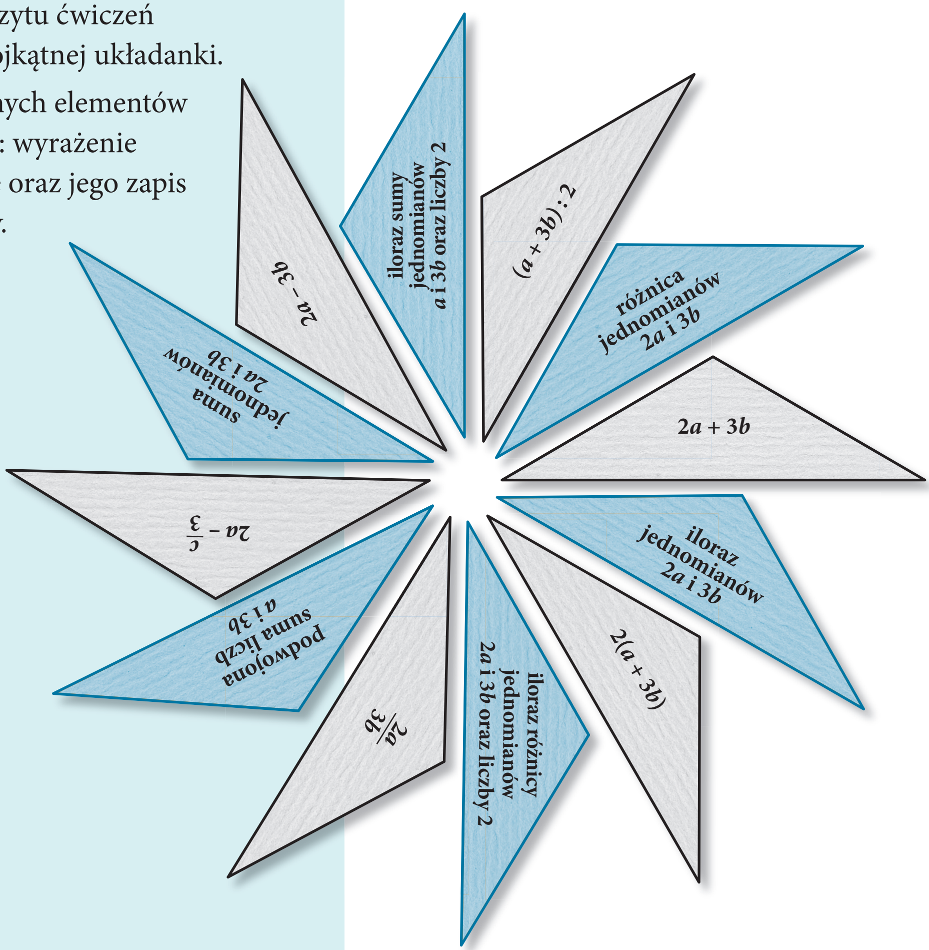


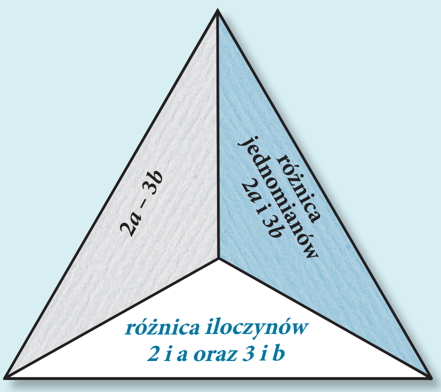


Jak to nazwać?

➜ Wytnij z zeszytu ćwiczeń elementy trójkątnej układanki.

➜ Z wypełnionych elementów utwórz pary: wyrażenie algebraiczne oraz jego zapis symboliczny.





➜ Jakie napisy powinny być na wolnych polach, aby można było wykorzystać wszystkie elementy układanki przy tworzeniu par?

➜ Zamiast mówić **różnica jednomianów $2a$ i $3b$**, można powiedzieć **różnica iloczynów liczb 2 i a oraz 3 i b.** Nazwij pozostałe wyrażenia inaczej, niż podano, i wpisz je w białe elementy.

1. Zapisz wyrażenie.

a) suma liczb −2, w, x, y.

b) iloczyn liczb 13, p, q, r.

c) kwadrat różnicy liczb z i w.

d) iloczyn liczby −5 i różnicy liczb a oraz b.

e) różnica kwadratu liczby a i iloczynu liczb 3, b, c.

f) iloraz różnicy liczb 3 oraz a i sumy liczb a oraz b.

2. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x - y - 3x$

b) $13a - 7b + 3ab + 4b$

c) $-5e + 2f - 2e$

d) $-a - b - ab + 2ab$

3. Zredukuj wyrazy podobne w podanym wyrażeniu i oblicz jego wartość liczbową.

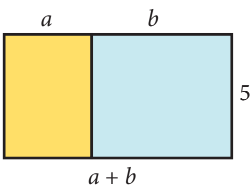
a) $x - 2x + 3x - 4x$ dla $x = -3$

b) $x + 2y + 3z - 4x - 5y - 6z$ dla $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ i $z = 0{,}3$

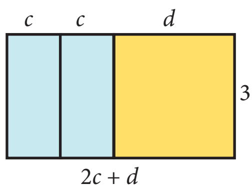
c) $a + 0{,}1b + 0{,}2c - 0{,}2a - 0{,}3b - 0{,}4c$ dla $a = 10$, $b = -20$, $c = 30$

4. Opiszcie na różne sposoby pole każdego z prostokątów.

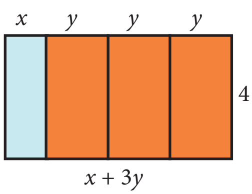
I.



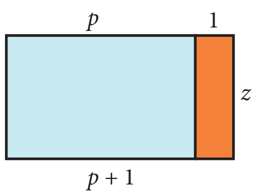
II.



III.



IV.



5. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $x(b + 1) + x$

b) $-a(3 - b) + 3a$

c) $-a(a - 5b + 7) - ab$

6. Dany jest prostokąt o bokach a i b. Dwa równoległe boki tego prostokąta zwiększono o 5 cm i otrzymano prostokąt o bokach $a + 5$ i b. Pole prostokąta zwiększyło się o 15 cm^2. Ile cm ma bok b tego prostokąta?

7. Dany jest prostokąt o bokach a i b. Pole tego prostokąta jest równe 24 cm². Dwa równoległe boki tego prostokąta zwiększono o 8 cm i otrzymano prostokąt o bokach $a + 8$ i b. Pole prostokąta zwiększyło się o 64 cm². Wyznacz długości boków a i b.

8. Przeanalizuj przykłady ilustrujące wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias.

$$15x + 21y + 3 = 15x + 21y + 3 = 3 \cdot 5x + 3 \cdot 7y + 3 \cdot 1 = 3 \cdot (5x + 7y + 1)$$

$$1{,}8ab - 2{,}4ac + 12a = 1{,}8ab - 2{,}4ac + 12a =$$
$$= 0{,}6 \cdot 3 \cdot a \cdot b - 0{,}6 \cdot 4 \cdot a \cdot c + 0{,}6 \cdot 20 \cdot a = 0{,}6a \cdot (3b - 4c + 20)$$

Wyłącz wspólny czynnik poza nawias.

a) $14x + 21y + 7$
b) $-2ab + 4{,}6b - 6bc$

9. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias.

a) $16x + 12y + 8$
b) $-2a + 4b - 6c$
c) $10ab + 5a + 25a^2$
d) $0{,}5a + 2{,}5b + 1{,}5ab$
e) $-0{,}6y + 0{,}9x - 1{,}2xy$
f) $1{,}4az + 2{,}1zb - 3{,}5z$
g) $-\frac{1}{6}u + \frac{5}{12}w - \frac{5}{18}y$
h) $\frac{11}{21}u - \frac{22}{35}w - \frac{33}{42}y$

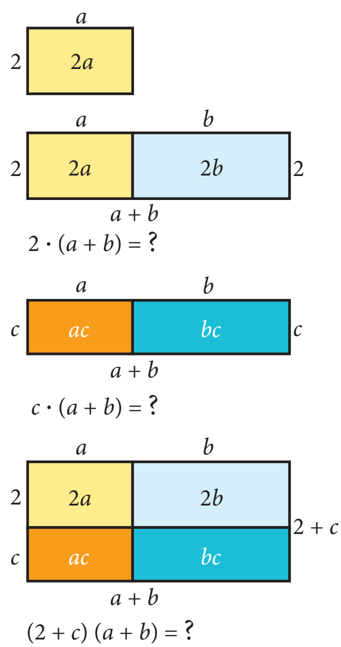
32

10. Przeanalizujcie rysunek.

→ W miejscu znaków zapytania powinny być sumy opisujące pola narysowanych prostokątów. Podajcie te sumy.

→ Narysujcie prostokąt o bokach $x + 2$ oraz $y + 5z$ i opiszcie jego pole za pomocą sumy jednomianów oraz za pomocą iloczynu.

→ Narysujcie prostokąt o polu $ac + bc + ad + bd$ i opiszcie jego pole za pomocą iloczynu.



Mnożąc dwie sumy algebraiczne, korzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania lub odejmowania. W praktyce sprowadza się to do mnożenia każdego wyrazu pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy.

Przykłady:

$(5 + a) \cdot (b + c) = 5 \cdot (b + c) + a(b + c) = 5b + 5c + ab + ac$

$(3 - d) \cdot (e + f) = 3 \cdot (e + f) - d(e + f) = 3e + 3f - de - df$

$(7 - p) \cdot (x - p) = 7 \cdot (x - p) - p(x - p) = 7x - 7p - px + p^2$

$(3 + a - b) \cdot (2c - 5d) = 3 \cdot (2c - 5d) + a \cdot (2c - 5d) - b \cdot (2c - 5d) =$

$= 6c - 15d + 2ac - 5ad - 2bc + 5bd$

11. Wykonaj mnożenie.

a) $(x + z)(b + 1)$ **b)** $(a + b)(12 - b)$ **c)** $(a - b)(5b - 9)$

d) $(x + 5z)(b - 11)$ **e)** $(a - 6b)(-8 - 13b)$ **f)** $(a - 4b)(2b - 7a)$

12. Wykonaj mnożenie.

a) $(x + 2 + y)(z + 1)$ **b)** $(a + b)(7 - b + 4c)$ **c)** $(p - 2s + 5t)(5p - 3)$

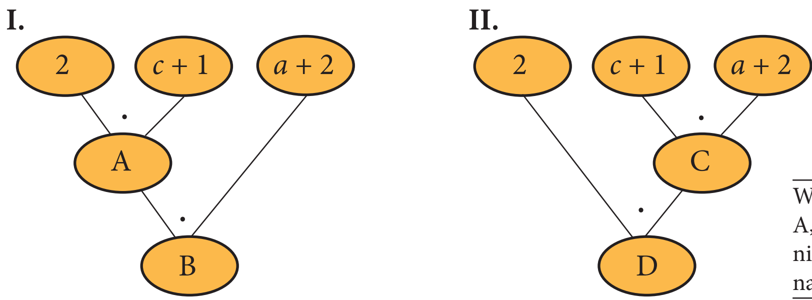
13. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(c - 1)(b + 2) + 2bc$ **b)** $(1 - b)(b - 4) + 3b$

c) $(2a - b)(a - 2b) + 5a^2$ **d)** $(b - 4)(b - 3) - b(b + 3)$

e) $-(a - b) - 5(a - 2)(b + 1)$ **f)** $x(y + 2) + (3x + 4 - y)(y + 4)$

14. Przeanalizujcie grafy.



Wyrażenia A, B, C i D nie zawierają nawiasów.

→ Jakie wyrażenie trzeba wpisać w miejsce litery A? A jakie w miejsce B?

→ Jakie wyrażenie trzeba wpisać w miejsce litery C? A jakie w miejsce D?

→ Przekształcanie jakiego wyrażenia zilustrowano na I grafie, a jakiego na II?

→ Wyjaśnijcie podobieństwa i różnice między tymi grafami.

→ Wykonajcie mnożenie $6b(1-a)(b-7)$. Obliczenia przedstawcie na grafie.

15. Wykonaj mnożenie. Obliczenia przedstaw na grafie.

a) $(2a-b)(a-7b)(5-c)$ **b)** $(a-3)(b-1)(c+8)$

c) $-(a-1)(c-2)(b+3)$ **d)** $z(y-2)(3x-1)(y-4)$

16. Rozwiąż równanie.

a) $2x(x-1)=1+2x^2$ **b)** $2x(x-1)-x^2=(1+x)x$

c) $(1+x)(2-3x)=1{,}5x(1-2x)$ **d)** $(0{,}5x-4)x=0{,}25(1+2x^2)$

17. Dane są dwa kwadraty. Długość boku drugiego kwadratu jest 4 razy większa od długości boku pierwszego kwadratu, a pole drugiego kwadratu jest o 60 cm^2 większe od pola pierwszego kwadratu. Oblicz długość boku pierwszego kwadratu.

33

18. Dwa równoległe boki kwadratu zwiększono i otrzymano taki prostokat, że stosunek długości jego nierównoległych boków wynosi 3 : 1, a pole jest o 32 cm^2 większe od pola kwadratu. Jaką długość ma bok kwadratu?

Rozszerzenie

19. Na schemacie zilustrowano, w jaki sposób można przekształcić sumę algebraiczną na iloczyn.

$$2ac+2ab+bd+cd=$$

I SPOSÓB

$$2a(c+b)+(b+c)d=$$
$$=(2a+d)(b+c)$$

II SPOSÓB

$$2ac+cd+2ab+bd=$$
$$=(2a+d)c+(2a+d)b=$$
$$=(2a+d)(c+b)$$

→ Przedstaw w postaci iloczynu podaną sumę.

a) $ac+bc+ad+bd$ **b)** $2a+2b+ac+bc$

c) $3ac-3bc+ad-bd$ **d)** $-a+b+ac-bc$

Sprawdź sam siebie

A. Wykonaj mnożenie.

a) $(x + 1)(y + z)$ **b)** $(a + 3)(5 - b)$ **c)** $(a - 2b)(b - 5)$

B. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x - 4)(y + 1) + xy$ **b)** $(1 - p)(3p - 4) - 3p$

c) $(k - 0{,}5l)(k + 6) + k^2$ **d)** $(c - 1{,}5c)(12 + c) - c^2$

C. Rozwiąż równanie.

a) $2x(x + 1) = 2x^2 + 4$ **b)** $(x - 1)(x + 2) = x^2 + 5$

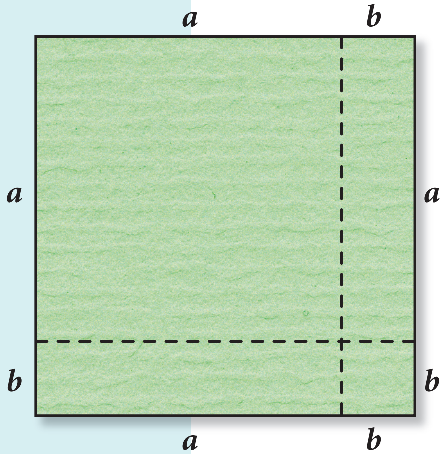
c) $(x + 2)(x - 1) = x^2 + 5$ **d)** $(x - 5)(x - 10) = x(x + 5)$

D. Każdy boki kwadratu zwiększono o 4 cm. Pole kwadratu otrzymanego w ten sposób jest o 56 cm^2 większe od pola pierwszego kwadratu. Jaką długość ma bok pierwszego kwadratu?

Kwadraty w sumach

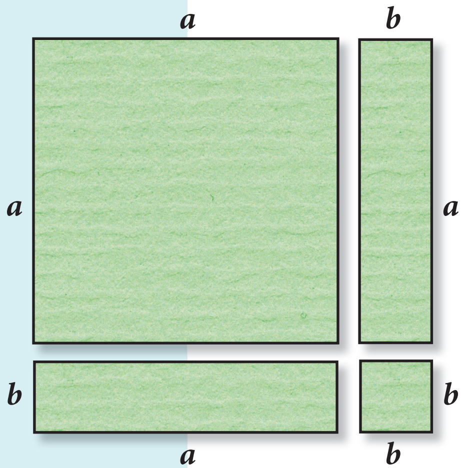
Dany jest kwadrat, którego każdy bok jest sumą dwóch odcinków.

➜ Jaką długość ma bok danego kwadratu?



➜ Zapisz wzór na pole tego kwadratu.

Kwadrat rozcięto na cztery części wzdłuż narysowanych linii.

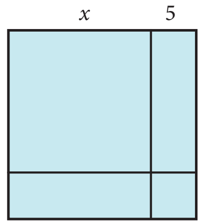


➜ Opisz wzorem pole każdej otrzymanej figury.

➜ Zapisz wyrażenie opisujące sumę pól tych figur.

➜ Porównaj otrzymane wyrażenia.

1. Dany jest kwadrat o boku długości $x + 5$.



→ Opisz jego pole za pomocą wyrażenia algebraicznego.

→ Zapisz pole tego kwadratu jako sumę pól prostokątów, na które został rozcięty.

→ Zapisz równość, w której porównasz oba wzory.

Po przekształceniu wyrażenie $(a + b)^2$ można zapisać w postaci iloczynu sum, a następnie te sumy pomnożyć.

$$\boldsymbol{(a + b)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z definicji potęgi}}}{=} (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń algebraicznych

Dla dowolnych wyrażeń a i b

$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

Uwaga! Wzór na kwadrat sumy zaliczamy do **wzorów skróconego mnożenia**.

2. Kwadrat sumy przedstaw w postaci sumy.

a) $(a + z)^2$ **b)** $(y + 2)^2$ **c)** $(4 + a)^2$

d) $(3x + 1)^2$ **e)** $(4x + 2)^2$ **f)** $(\frac{1}{2} + 5b)^2$

g) $(a + 2b)^2$ **h)** $(3x + 5y)^2$ **i)** $(4x + \frac{2}{3}y)^2$

3. Jakie wyrażenie powinno być wpisane w miejscu znaku zapytania, aby prawdziwa była podana równość?

a) $(2a + ?)^2 = 4a^2 + 12a + 9$ **b)** $(? + z)^2 = \frac{1}{4} + z + z^2$

c) $(3x + 5y)^2 = 9x^2 + ? + 25y^2$ **d)** $(8a + 8b)^2 = 64a^2 + ? + 64b^2$

4. Przyjrzyj się, w jaki sposób niektóre sumy algebraiczne można przekształcić do postaci kwadratu sumy algebraicznej.

$$4a^2 + 12a + 9 = (2a)^2 + 12a + 3^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = (2a + 3)^2$$

→ Opisz kolejne kroki tego przekształcenia.

→ Analogicznie przekształć podaną sumę do postaci potęgi.

a) $25 + 10a + a^2$ **b)** $b^2 + 8b + 16$ **c)** $4c^2 + 12cd + 9d^2$

5. Jakie wyrażenie powinno być wpisane w miejscu znaku zapytania, aby całość można było przedstawić w postaci kwadratu sumy algebraicznej?

a) $a^2 + 4ab + ?$ **b)** $25x^2 + ? + \frac{1}{4}y^2$

c) $? + 12x + 9$ **d)** $? + 7x + 0{,}49$

6. Jakie wyrażenie należy dodać lub odjąć od podanej sumy, aby można było ją przedstawić w postaci kwadratu sumy algebraicznej?

a) $x^2 + 5xy + 25y^2$ **b)** $3a^2 + 42ab + 49b^2$

c) $9a^2 + 24ab + 20b^2$ **d)** $0{,}16a^2 + ab + b^2$

→ Czy potraficie zrobić to na kilka sposobów?

7. Rozwiąż równanie.

a) $(x + 2)^2 = x^2$ **b)** $(x + 1)^2 = x^2 - 1$

c) $(x + 4)^2 = x(6 + x)$ **d)** $(3x + 2)^2 = x(-2 + 9x)$

8. Korzystając z definicji potęgi, przekształć wyrażenie $(a - b)^2$ do postaci sumy algebraicznej.

Uwaga! Wzór na kwadrat różnicy zaliczamy do **wzorów skróconego mnożenia**.

!

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń algebraicznych

Dla dowolnych wyrażeń a i b:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

9. Kwadrat różnicy przedstaw w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2x - 1)^2$ **b)** $(3b - 2)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{4} - 4a\right)^2$

d) $(x - 4y)^2$ **e)** $(3x - 5y)^2$ **f)** $\left(0{,}5a - \frac{2}{3}b\right)^2$

10. Przedstaw sumę w postaci potęgi.

a) $x^2 - 2xy + y^2$ **b)** $4a^2 - 12ad + 9d^2$ **c)** $16b^2 - 8bc + c^2$

11. Jakie wyrażenie powinno być wpisane w miejscu znaku zapytania, aby prawdziwa była podana równość?

a) $(3a - ?)^2 = 9a^2 - 12a + 4$ **b)** $(? - x)^2 = \frac{1}{4} - x + x^2$

c) $(4x - 7y)^2 = 16x^2 - ? + 49y^2$ **d)** $(8a - 3b)^2 = 64a^2 - ? + ?$

12. Podane wyrażenie zapisz w najprostszej postaci.

a) $(x + 1)^2 - x^2 + 2$ **b)** $(a - 2)^2 + 4 - a^2$

c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2$ **d)** $(2a - 1)^2 - (2a + 1)^2$

13. Oblicz średnią arytmetyczną kwadratów liczb: $a - 3$, a, $a + 3$.

14. Wartość wyrażenia $49x^2 + 42xy + 9y^2$ dla pewnych liczb x i y wynosi 100. Oblicz dla tych samych liczb wartość wyrażenia

a) $4(3y + 7x)^2$. **b)** $-(7x + 3y)^3$. **c)** $(7x + 3y)^4$.

15. Rozwiąż równanie i sprawdź poprawność rozwiązania.

a) $(x - 2)^2 = x^2$ **b)** $(2x - 2)^2 = 4x(x - 4)$

c) $x(4x - 3) = (2x - 3)^2$ **d)** $x(0{,}04x - 1{,}3) = (0{,}2x - 1)^2$

35

16. Rozwiąż nierówność i przedstaw rozwiązanie na osi liczbowej.

a) $(x - 3)^2 < x(x - 2) - x$ **b)** $(3 - x)^2 > 2 - x(6 - x)$

17. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest równość $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2$.

18. Które z podanych równości są prawdziwe dla dowolnych liczb k i m?

a) $(k - m)^2 = (m - k)^2$ **b)** $(m - k)^2 = (k + m)^2$

c) $(-k - m)^2 = (m + k)^2$ **d)** $-(k - m)^2 = (m - k)^2$

19. Przyjrzyj się poniższemu rozumowaniu.

Wiadomo, że $(x - y)^2 \geqslant 0$. *Stąd* $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$, *czyli* $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

→ W podobny sposób uzasadnij, że $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy$.

SPRYTNE RACHUNKI

I. Przeanalizuj przykład pokazujący, jak można obliczyć kwadrat liczby 71.

$71^2 = (70 + 1)^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$

→ Na czym polega ten sposób podnoszenia liczby do kwadratu?

→ Oblicz podobnie.

a) 13^2 **b)** 31^2 **c)** 42^2 **d)** 205^2

II. Przyjrzyj się, jak korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy, można obliczyć kwadraty pewnych liczb.

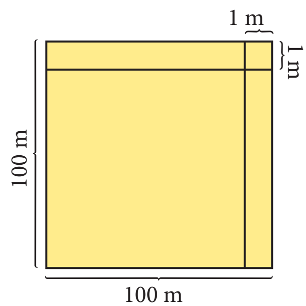
$27^2 = (30 - 3)^2 = 900 - 180 + 9 = 729$

→ Oblicz podobnie.

a) 18^2 **b)** 37^2 **c)** 98^2 **d)** 199^2

III. Wzdłuż dwóch boków kwadratowej działki o wymiarach 100 m × 100 m zrobiono ścieżkę szerokości 1 m.

a) Jaką powierzchnię ma pozostała część działki? Oblicz tę powierzchnię, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy wyrażeń algebraicznych.



b) Jaką powierzchnię będzie miała działka, gdy ścieżka o szerokości 1 m zostanie zrobiona wokół całej działki?

36

Oblicz, ile to jest $(100{,}89 - 98{,}89)^2$.

Sprawdź sam siebie

A. Przekształć wyrażenie, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

a) $(n + 5)^2$ **b)** $(3c + 2)^2$ **c)** $(5 - x)^2$ **d)** $(2a - 3c)^2$

B. Zapisz w postaci iloczynu.

a) $c^2 + 4c + 4$ **b)** $x^2 - 6x + 9$ **c)** $49u^2 - 42pu + 9p^2$

C. Doprowadź do najprostszej postaci podane wyrażenie.

a) $(2z + 3)^2 - 4z^2 + 2z$ **b)** $(3s + 4)^2 - (2s - 2)^2$

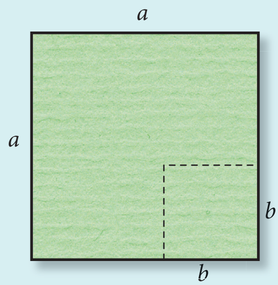
D. Rozwiąż równanie.

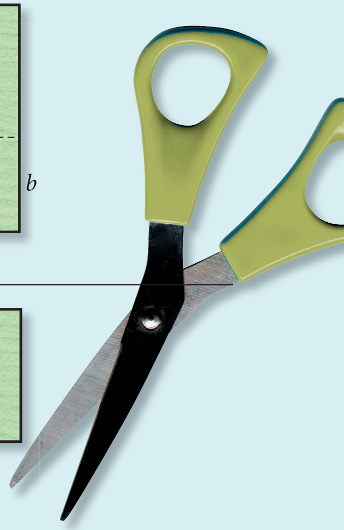
a) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 2$ **b)** $4x^2 = (5 - 2x)^2$

Szybkie rachowanie

Z kwadratu o boku *a* odcięto kwadrat o boku *b*.

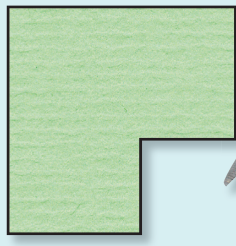
➜ Zapisz symbolicznie pole kwadratu o boku *a* oraz pole kwadratu o boku *b*.



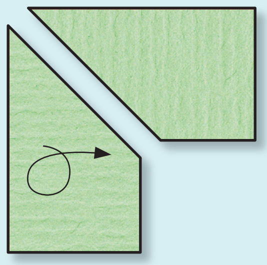


➜ Zapisz symbolicznie pole sześciokąta, który powstał po odcięciu kwadratu.

➜ Zapisz, jakie są długości wszystkich boków powstałego sześciokąta.



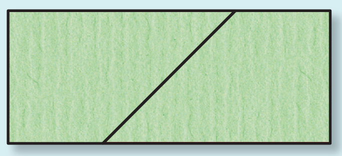
Sześciokąt przecięto na dwa równoległoboki i złożono tak jak na rysunku.



Powstał prostokąt.

➜ Jakie są długości boków tego prostokąta?

➜ Zapisz symbolicznie pole prostokąta.



➜ Porównaj symboliczny zapis pola sześciokąta z zapisem pola prostokąta.

1. Oblicz i porównaj wyniki.

a) $11^2 - 1^2$ i $10 \cdot 12$ **b)** $17^2 - 3^2$ i $14 \cdot 20$

c) $25^2 - 5^2$ i $20 \cdot 30$ **d)** $100^2 - 4^2$ i $96 \cdot 104$

2. Pomnóż i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x - 1)(x + 1)$ **b)** $(2 + a)(2 - a)$

c) $(3t - 5)(3t + 5)$ **d)** $(10 - 4y)(10 + 4y)$

3. Wykonaj mnożenie $(a + b)(a - b)$ i zredukuj wyrazy podobne.

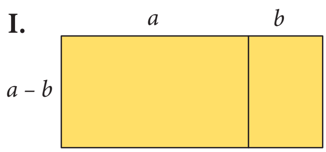
Uwaga! Wzór na różnicę kwadratów zaliczamy do **wzorów skróconego mnożenia.**

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń algebraicznych jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń i ich różnicy.

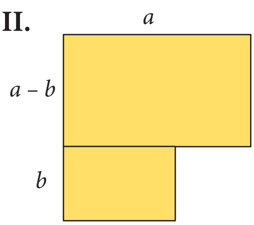
$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

4. Przeanalizujcie rysunki.

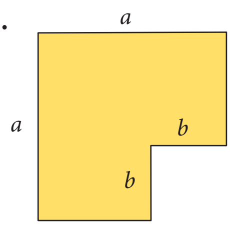
I.



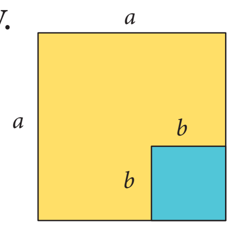
II.



III.



IV.



→ Zapiszcie wzorem pole figury na rysunku I.

→ Jakie są wymiary prostokątów na rysunku II?

→ Jakie są wymiary sześciokąta na rysunku III?

→ Zapiszcie pole sześciokąta jako różnicę pól kwadratów.

→ Co zauważacie?

5. Korzystając ze wzoru na iloczyn sumy dwóch wyrażeń i ich różnicy, przedstaw wyrażenia w postaci różnicy.

a) $(7 - 2x)(7 + 2x)$ **b)** $(a + 5b)(a - 5b)$

c) $(2p + 3q)(2p - 3q)$ **d)** $(11x - 4y)(11x + 4y)$

6. Korzystając ze wzoru na iloczyn sumy dwóch wyrażeń i ich różnicy, przedstaw wyrażenia w postaci różnicy.

a) $(0{,}2 - 2x)(0{,}2 + 2x)$ **b)** $(0{,}3a + 0{,}5b)(0{,}3a - 0{,}5b)$

c) $(0{,}1p + 2{,}3q)(0{,}1p - 2{,}3q)$ **d)** $(2{,}8x + 1{,}1y)(2{,}8x - 1{,}1y)$

e) $\left(\frac{2}{3}r - \frac{1}{4}s\right)\left(\frac{1}{4}s + \frac{2}{3}r\right)$ **f)** $\left(1\frac{1}{2}k - \frac{1}{3}m\right)\left(1\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}m\right)$

7. Oblicz.

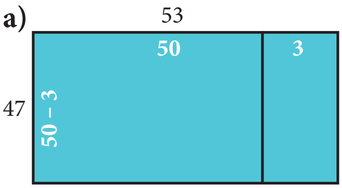
a) $(2x^2)^2$ **b)** $(5x^3)^2$ **c)** $\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2$ **d)** $(1{,}2x^2)^2$

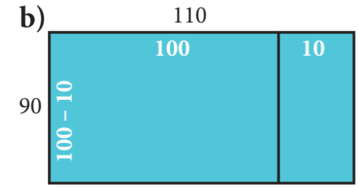
8. Korzystając ze wzoru na iloczyn sumy dwóch wyrażeń i ich różnicy, przedstaw wyrażenia w postaci różnicy.

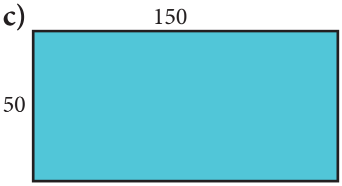
a) $(a^2 + 1)(1 - a^2)$ **b)** $(p^2 + q)(p^2 - q)$

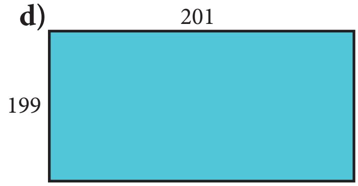
c) $(2x^2 + y^3)(2x^2 - y^3)$ **d)** $(0{,}2p^2 + 5q)(0{,}2p^2 - 5q)$

9. Oblicz pole narysowanej figury, korzystając ze wzoru na iloczyn sumy dwóch wyrażeń i ich różnicy.

a)


b)


c)


d)


10. Doprowadź iloczyn do różnicy kwadratów i oblicz.

a) $102 \cdot 98$ **b)** $17 \cdot 23$ **c)** $55 \cdot 45$ **d)** $7{,}1 \cdot 6{,}9$

11. Przedstaw w postaci iloczynu.

a) $9 - x^2$ **b)** $4a^2 - 1$ **c)** $t^2 - 25k^2$

d) $\frac{1}{4}x^2 - 0{,}01y^2$ **e)** $16a^4 - 36b^6$ **f)** $x^6y^8 - x^4y^{12}$

12. Oblicz, nie wykonując potęgowania.

a) $17^2 - 16^2$ **b)** $52^2 - 48^2$

c) $10{,}7^2 - 9{,}3^2$ **d)** $9{,}75^2 - 0{,}25^2$

13. Doprowadź do najprostszej postaci, podobnie jak w przykładzie.

Przykład: $-2(3x + 1)(3x - 1) = -2(9x^2 - 1) = -18x^2 + 2$

a) $-5(4x + 1)(4x - 1)$ **b)** $2(\frac{1}{4}x^2 + 1)(\frac{1}{4}x^2 - 1)$

14. Doprowadź do najprostszej postaci, podobnie jak w przykładzie.

Przykład: $\frac{2}{7}(7x + 1)^2 = \frac{2}{7}(49x^2 + 14x + 1) = 14x^2 + 4x + \frac{2}{7}$

a) $-3(0{,}1x - 10)^2$ **b)** $2{,}7(0{,}3x + 10y)^2$

15. Doprowadź do najprostszej postaci.

a) $(a + b)^2 + (a - b)^2$ **b)** $(a - b)^2 - (a - b)(a + b)$

c) $(2x - 3)^2 + (x + 1)(x - 1)$ **d)** $-(3x - 5)(3x + 5) + (x - 10)^2$

e) $2(\frac{1}{2}x - y)^2 - 6(\frac{2}{3}x + 1)(\frac{2}{3}x - 1)$ **f)** $-9(\frac{1}{3}x - y)^2 - 5(\frac{2}{5}x + y)(\frac{2}{5}x - y)$

16. Rozwiąż równanie.

a) $(x - 5)(x + 5) = (x - 3)^2$

b) $(2a - 1)^2 = (2a + 1)(2a - 1)$

c) $(3x + 2)(3x - 2) - 9(x + 1)^2 = -22$

d) $4x(2 - x) + 12 = -(2x + 6)(2x - 6)$

17. Długości wszystkich boków kwadratu zwiększono o 2 cm. Wówczas pole kwadratu wzrosło o 24 cm^2. Oblicz długość boku kwadratu przed zmianą długości.

18. Rozwiąż zadania.

a) Długości dwóch równoległych boków kwadratu zwiększono o 2, a długości dwóch pozostałych boków zmniejszono o 2. Otrzymano prostokąt. Jak zmieniło się pole?

b) Długości dwóch równoległych boków kwadratu zwiększono o 3, a długości dwóch pozostałych boków zmniejszono o 3. Otrzymano prostokąt. Jak zmieniło się pole?

c) Długości dwóch równoległych boków kwadratu zwiększono, a długości dwóch pozostałych boków zmniejszono o tę samą wielkość. Otrzymano prostokąt o polu o 36 mniejszym od pola kwadratu. Jak zmieniano długości boków?

19. Przyjrzyj się, jak rozwiązano równanie $x^2 - 9 = 0$.

$x^2 - 9 = 0$		
$(x + 3)(x - 3) = 0$		Iloczyn dwóch czynników jest równy 0, jeżeli przynajmniej jeden z nich jest równy 0.
$(x + 3) = 0$	lub	$(x - 3) = 0$
$x = -3$	lub	$x = 3$
Równanie spełniają dwie liczby: -3 i 3.		

→ W podobny sposób rozwiąż równanie $x^2 - 25 = 0$

20. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 1 = 0$. **b)** $x^2 - \frac{1}{4} = 0$. **c)** $9x^2 - 16 = 0$.

21. Oblicz najkrótszym sposobem.

a) $998^2 - 4$ **b)** $101^2 - 100^2 + 201^2 - 200^2$ **c)** $11^3 - 2 \cdot 11^2 + 11$

38

Oblicz. $\frac{2^2 - 1}{2 + 1} + \frac{3^2 - 2^2}{3 + 2} + \frac{4^2 - 3^2}{4 + 3} + \frac{5^2 - 4^2}{5 + 4} + \ldots + \frac{10^2 - 9^2}{10 + 9}$

Znajdź wszystkie pary liczb **a)** naturalnych **b)** całkowitych spełniających równanie $x^2 - y^2 = 15$.

Sprawdź równości:

$19^2 - 18^2 = 37 = 19 + 18$

$0{,}67^2 - 0{,}33^2 = 0{,}34 = 0{,}67 - 0{,}33$

Podaj przykłady innych liczb, dla których zachodzą podobne równości.
Dla jakich liczb różnica ich kwadratów jest równa sumie tych liczb?
Dla jakich liczb różnica ich kwadratów jest równa różnicy tych liczb?

Sprawdź sam siebie

A. Oblicz.

a) $71 \cdot 69$ **b)** $101 \cdot 99$ **c)** $3{,}8 \cdot 4{,}2$

B. Zapisz w postaci iloczynu.

a) $625 - 81a^2$ **b)** $0{,}36x^2 - 0{,}25y^2$

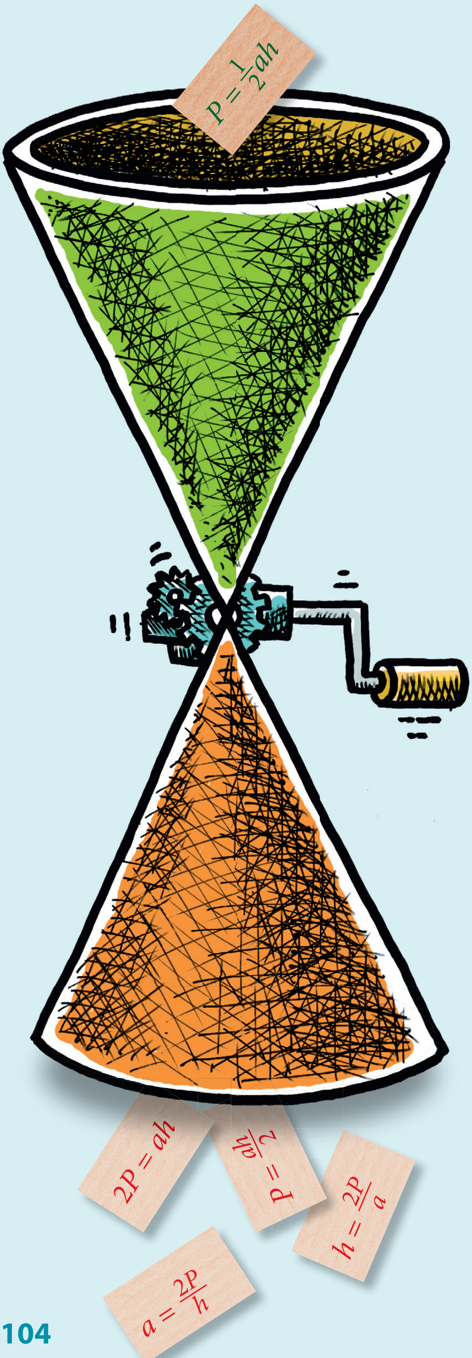
C. Doprowadź do najprostszej postaci.

a) $(5 - 5a)(5 + 5a) + (5 - 5a)^2$ **b)** $(4a - 1)^2 - (4a + 1)^2$

D. Długości dwóch równoległych boków kwadratu zwiększono o 12, a długości dwóch pozostałych boków zmniejszono o 12. Otrzymano prostokąt. Jak zmieniło się pole?

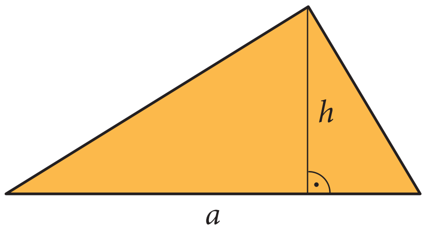
39
czytanka

Wzór na wzory



Aby obliczyć pole trójkąta, stosuje się odpowiedni wzór.

I. $P = \frac{1}{2}ah$



W zależności od podanych wielkości można ten wzór odpowiednio przekształcać.

II. $P = \frac{ah}{2}$ **III.** $2P = ah$

IV. $h = \frac{2P}{a}$ **V.** $a = \frac{2P}{h}$

➜ Co oznacza litera *a* w każdym ze wzorów?

➜ Co oznacza litera *h* w każdym ze wzorów?

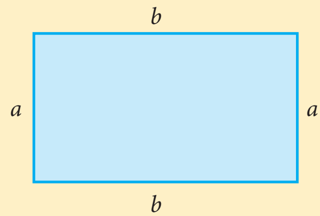
➜ Wyjaśnij różnicę w zapisie wzorów I i II.

➜ W jaki sposób przekształcono wzór I, aby otrzymać wzór III?

➜ W jaki sposób przekształcono wzór III, aby otrzymać wzór IV? A w jaki wzór IV, aby otrzymać wzór V?

W matematyce, fizyce, technice można spotkać wiele różnych wzorów. Zależność między określonymi wielkościami zapisanymi za pomocą wzoru najczęściej jest równaniem. Wówczas przekształcanie wzoru polega na otrzymywaniu równań równoważnych.

Przykład:
Ze wzoru na obwód prostokąta $L = 2a + 2b$ można wyznaczyć b. Wzór ten należy wówczas traktować jak równanie o niewiadomej b.



$L = 2a + 2b$

→ Od obu stron równania można odjąć wyrażenie $2a$.

$L - 2a = 2b$

→ Następnie obie strony równania należy podzielić przez 2.

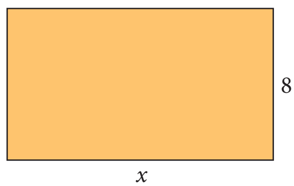
$\frac{L - 2a}{2} = b$

→ Można jeszcze przekształcić lewą stronę równania.

$\frac{L}{2} - a = b$

1. Kwadrat ma bok długości a. Zapisz wzór na obwód L tego kwadratu. Wyznacz a z tego wzoru.

2. Prostokąt ma boki długości x cm i 8 cm.



a) Zapisz wzór na pole P tego prostokąta.

b) Wyznacz x z tego wzoru.

3. Ze wzoru na pole prostokąta $P = a \cdot b$ wyznacz b.

4. Ze wzoru na długość okręgu $l = 2\pi r$ wyznacz r.

5. Aby obliczyć sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego, stosuje się wzór $K = 180° \cdot (n - 2)$, gdzie n oznacza liczbę boków (wierzchołków) wielokąta, a K sumę miar wszystkich jego kątów.

a) Jaką najmniejszą liczbą może być n, aby można było zastosować ten wzór?

b) Oblicz K dla $n = 7$.

c) Oblicz n, wiedząc że $K = 1080°$.

d) Wyznacz n ze wzoru $K = 180° \cdot (n - 2)$.

6. Wzór na pole trapezu można zapisać na kilka sposobów, np.:

$P = \frac{a+b}{2} \cdot h,$ $\quad P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h,$ $\quad P = (a+b) \cdot \frac{h}{2}.$

Oblicz pole trapezu, wykorzystując każdy z tych wzorów, jeżeli $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $h = 4$ cm.

→ Na czym polegają różnice w zapisie tych wzorów?

7. Przyjrzyjcie się sposobom wyznaczenia długości podstawy a ze wzoru na pole trapezu $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

I.	**II.**	**III.**
$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \vert \cdot 2$	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \vert : h$	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
$2P = (a+b) \cdot h \quad \vert : h$	$\frac{P}{h} = \frac{a+b}{2}$	$P = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot h$
$\frac{2P}{h} = a + b \quad \vert - b$	$\frac{P}{h} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad \vert - \frac{b}{2}$	$P = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \quad \vert - \frac{bh}{2}$
$\frac{2P}{h} - b = a$	$\frac{P}{h} - \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \quad \vert \cdot 2$	$P - \frac{bh}{2} = \frac{ah}{2} \quad \vert \cdot 2$
	$2 \cdot \frac{P}{h} - b = a$	$2P - bh = ah \quad \vert : h$
		$\frac{2P - bh}{h} = a$

→ Czym różnią się te rozwiązania?

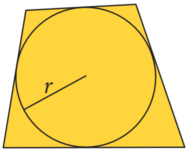
→ Jak przekształcić wzór na długość podstawy otrzymany III sposobem na wzór otrzymany I sposobem?

→ Wybierzcie dowolny sposób i rozwiążcie równanie $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ z niewiadomą b.

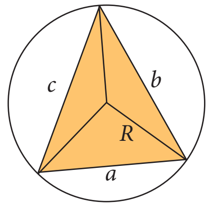
8. Ze wzoru $P = p \cdot r$ na pole czworokąta wypukłego opisanego na okręgu, gdzie p oznacza połowę obwodu czworokąta, natomiast r – długość promienia okręgu, wyznacz

a) połowę obwodu czworokąta.

b) długość promienia okręgu.



9. Promień okręgu opisanego na trójkącie można obliczyć ze wzoru $R = \frac{abc}{4P}$, gdzie P oznacza pole trójkąta, zaś a, b, c są długościami boków tego trójkąta. Z podanego wzoru wyznacz kolejno: P, a, b i c.



10. Jeżeli liczba b stanowi $p\%$ liczby a, to $b = \frac{p \cdot a}{100}$.

a) Oblicz, jaką liczbą jest 20% liczby 500.

b) Z podanego wzoru wyznacz a.

11. Jeżeli cenę a pewnego towaru obniżono o $p\%$, to nową cenę c można obliczyć ze wzoru $c = a - \frac{p \cdot a}{100}$.

a) Jaka jest cena towaru, który przed obniżką o 20% kosztował 450 zł?

b) Z podanego wzoru wyznacz p.

12. Popularnym sposobem obliczania wagi ciała człowieka jest metoda zaproponowana przez lekarza Paula Broca.
Idealną wagę W obliczał on ze wzoru:

dla mężczyzn: $W = 0{,}9(h - 100)$,

dla kobiet: $W = \frac{17}{20}(h - 100)$,

gdzie h oznacza wzrost osoby w cm.

a) Oblicz, ile powinien ważyć mężczyzna mający 180 cm wzrostu.

b) Oblicz, ile powinna ważyć kobieta mająca 165 cm wzrostu.

c) Wyznacz h z podanych wzorów.

40

13. W sali kinowej jest k rzędów i w każdym rzędzie jest m foteli. Zapisz za pomocą wzoru, ilu maksymalnie widzów N może oglądać film w tej sali. Wyznacz z tego wzoru k i m.

14. Zosia kupiła 5 ciastek po x złotych za sztukę i 3 batony po y zł każdy. Zapisz wzór na resztę R, którą otrzymała Zosia po zapłaceniu banknotem 50 zł.

15. Prostokątna sala lekcyjna ma z metrów szerokości i t metrów długości. Drzwi wejściowe sali mają szerokość 90 cm. Ile metrów listwy podłogowej L należy przybić w tej sali? Przyjmując za dane wielkości L i t, wyznacz z.

16. Zmieszano 0,7 litra soku malinowego z m litrami wody mineralnej i uzyskaną mieszaninę rozlano do k szklanek. Zapisz za pomocą wzoru, ile napoju zmieściło się w jednej szklance. Ilość napoju oznacz przez n. Z otrzymanego wzoru wyznacz m.

17. Ze wzoru na objętość prostopadłościanu $V = abc$ wyznacz kolejno a, b, c.

18. Wzór $w - k + s = 2$ nosi nazwę wzoru Eulera. Opisuje on zależność między liczbą ścian s, liczbą krawędzi k i liczbą wierzchołków w dla graniastosłupów. Sprawdź ten wzór dla sześcianu i graniastosłupa pięciokątnego. Z podanego wzoru wyznacz kolejno w, k i s.

19. Zapisz wzór pozwalający obliczyć pole powierzchni P prostopadłościanu, którego podstawa jest kwadratem o boku długości a, zaś wysokość prostopadłościanu ma długość h. Rozwiąż otrzymane równanie o niewiadomej h.

20. Średnica koła ma długość d. Zapisz wzór na pole koła uwzględniający długość podanej średnicy.

21. Pole rombu P można obliczyć, mając podane długości jego przekątnych d_1 i d_2. Napisz ten wzór. Wyznacz d_2.

22. Mocą P urządzenia nazywamy iloraz pracy W i czasu t, w którym została ona wykonana: $P = \frac{W}{t}$. Z podanego wzoru wyznacz W i t.

23. Na wysokości h ciało o masie m ma energię potencjalną grawitacji równą: $E = mgh$ (g oznacza przyspieszenie ziemskie). Ze wzoru wyznacz kolejno m i h.

24. Ciśnienie p jest wielkością fizyczną informującą o tym, jaki jest nacisk ciała F na jednostkę powierzchni S, na którą to ciało działa. Ciśnienie oznaczamy literą p, a opisaną zależność można przedstawić za pomocą wzoru: $p = \frac{F}{S}$. Wyznacz S.

25. Stałą dla danej substancji wartość ilorazu masy m i objętości V nazywamy gęstością, oznaczamy symbolem ρ (czyt. ro) i określamy wzorem: $\rho = \frac{m}{V}$. Wyznacz kolejno m i V.

26. W nauce często używa się do pomiaru temperatury skali Kelvina. Do przeliczeń temperatury podanej w skali Celsjusza t na temperaturę w skali Kelvina T stosuje się wzór: $T = t + 273$.

a) Oblicz, ilu Kelvinom jest równe 30°C.

b) Ze wzoru wyznacz t.

c) Oblicz, ilu stopniom Celsjusza jest równe 0 K.

27. Jednym z najczęściej stosowanych wzorów w kinematyce jest wzór opisujący zależność między prędkościami v_1, v_0, przyspieszeniem a i czasem t: $v_1 = v_0 + at$. Wyznacz a z tego wzoru.

Zapisz wzór na pole koła P, jeżeli dany jest jego obwód l.

Sprawdź sam siebie

A. Zapisz wzór na pole równoległoboku o podstawie a i wysokości h. Wyznacz z niego a.

B. Obwód koła można obliczyć za pomocą wzoru $L = \pi \cdot d$, gdzie d jest długością średnicy.

a) Oblicz obwód koła, gdy $d = 10$ cm.

b) Oblicz obwód koła, gdy $r = 0{,}2$ dm.

c) Ze wzoru $L = \pi d$ wyznacz d.

C. Michał miał k złotych, na gumę do żucia wydał z groszy. Zostało mu m złotych. Wyznacz m.

a) Rozwiąż zadanie dla $k = 8$ i $z = 90$.

b) Zapisz wzór określający zależność między wielkościami k, m i z.

c) Z otrzymanego wzoru wyznacz k.

D. Ze wzoru $F = m \cdot a$ wyznacz kolejno m i a.

Jak to rozwiązać? nr 3

1. Podaną sumę algebraiczną przedstaw w postaci iloczynu.
$2x(5-x)+\frac{1}{2}(5-x)$

Wskaż wspólny czynnik w każdym składniku danej sumy algebraicznej.	Składnikami sumy są: $2x(5-x)$ i $\frac{1}{2}(5-x)$. Wspólnym czynnikiem może być liczba, jednomian lub inne wyrażenie. W naszym przypadku jest nim $(5-x)$. $2x(5-x)+\frac{1}{2}(5-x)$
Wskaż wyrażenia, które pozostaną po wyodrębnieniu wspólnego czynnika.	$2x(5-x)+\frac{1}{2}(5-x)$ Wyrażeniami tymi są $2x$ i $\frac{1}{2}$. Tworzymy z nich sumę algebraiczną $2x+\frac{1}{2}$.
Wyłącz przed nawias wspólny czynnik.	$(5-x)(2x+\frac{1}{2})$
Sprawdź poprawność rozwiązania.	$(5-x)(2x+\frac{1}{2})=(5-x)\cdot 2x+(5-x)\cdot\frac{1}{2}=2x(5-x)+\frac{1}{2}(5-x)$

2. Przedstaw wyrażenie $(2x-7)^2$ w postaci sumy algebraicznej.

Wskaż działanie między jednomianami w podanym wyrażeniu.	Wyrażenie $2x-7$ jest różnicą dwóch wyrażeń.
Wybierz właściwy wzór skróconego mnożenia.	Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
Podstaw odpowiednie wyrażenia do wzoru na kwadrat różnicy.	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ $(2x-7)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 7+7^2$
Wykonaj działania i zapisz sumę.	$(2x-7)^2=4x^2-28x+49$

3. Zapisz w postaci kwadratu sumy dwóch jednomianów następujące wyrażenie $9x^2 + 12xy + 4y^2$.

Przypomnij sobie wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ Zaznaczamy wyrażenia, w których występuje druga potęga. $9x^2 + 12xy + 4y^2$
Znajdź jednomiany, których kwadrat jest równy odpowiednim składnikom sumy występującym w drugiej potędze.	Wyrażeniami tymi są $3x$ i $2y$, bo $(3x)^2 = 9x^2$ i $(2y)^2 = 4y^2$.
Sprawdź, czy składnik 2*ab* ze wzoru na kwadrat sumy dwóch jednomianów jest równy podwojonemu iloczynowi znalezionych jednomianów.	$12xy \stackrel{?}{=} 2 \cdot 3x \cdot 2y$ $12xy = 12xy$ L = P
Utwórz kwadrat sumy wyznaczonych jednomianów.	$(3x + 2y)^2$
Sprawdź zgodność z odpowiednim wzorem skróconego mnożenia.	$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

4. Oblicz 97^2, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

Podstawę potęgi zapisz w postaci sumy lub różnicy dwóch liczb.	Liczbę będącą podstawą potęgi przedstawiamy tak, aby składniki sumy lub odjemna i odjemnik były liczbami, których kwadrat można łatwo obliczyć, np. $97 = 100 - 3$ lub $97 = 90 + 7$.	
Otrzymaną sumę lub różnicę podnieś do kwadratu.	$(100 - 3)^2$ lub $(90 + 7)^2$	
Skorzystaj z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia.	Wzór na kwadrat różnicy $(100 - 3)^2 =$ $= 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2$	Wzór na kwadrat sumy $(90 + 7)^2 =$ $= 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 7 + 7^2$
Wykonaj działania i oblicz wartość wyrażenia.	$10\,000 - 600 + 9 = 9409$	$8100 + 1260 + 49 = 9409$
Podaj odpowiedź.	$97^2 = 9409$	

5. Rozwiąż równanie $(2x + 6)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = -11$.

Przekształć równanie tak, aby po jego lewej stronie występowały wyrażenia w postaci sumy jednomianów.	$(2x + 6)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = -11$ Wykorzystując wzory skróconego mnożenia, otrzymujemy: $(2x + 6)^2 = 4x^2 + 24x + 36$ $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$, czyli $4x^2 + 24x + 36 - (4x^2 - 1) = -11$ $4x^2 + 24x + 36 - 4x^2 + 1 = -11$.
Wskaż wyrazy podobne i zredukuj je.	$4x^2 + 24x + 36 - 4x^2 + 1 = -11$ $24x + 37 = -11$
Rozwiąż otrzymane równanie.	$24x + 37 = -11$ Od obu stron równania odejmujemy 37. $24x + 37 = -11 \mid -37$ $24x = -48$ Obie strony równania podzielmy przez 24. $24x = -48 \mid : 24$ $x = -2$
Sprawdź poprawność rozwiązania.	W miejsce niewiadomej x wstawiamy otrzymaną liczbę. $(2 \cdot (-2) + 6)^2 - (2 \cdot (-2) - 1)(2 \cdot (-2) + 1) \stackrel{?}{=} -11$ $(-4 + 6)^2 - (-4 - 1)(-4 + 1) \stackrel{?}{=} -11$ $2^2 - (-5) \cdot (-3) \stackrel{?}{=} -11$ $4 - 15 \stackrel{?}{=} -11$ $-11 = -11$ L = P Zatem liczba -2 spełnia równanie.
Podaj odpowiedź.	Rozwiązaniem równania jest liczba -2.

6. Jeżeli od kwadratu pewnej liczby odejmiemy kwadrat sumy tej liczby i liczby 6, to otrzymamy 48. Znajdź tę liczbę.

Przeanalizuj treść zadania i zapisz ją za pomocą równania.	Określamy niewiadomą z zadania. x – szukana liczba. Wyrażamy za pomocą tej niewiadomej pozostałe zależności z zadania. x^2 – kwadrat szukanej liczby. $x + 6$ – suma szukanej liczby i liczby 6. $(x + 6)^2$ – kwadrat sumy szukanej liczby i liczby 6.
Ułóż równanie.	Zapisujemy równanie. $x^2 - (x + 6)^2 = 48$ „x to taka liczba, że jeżeli od jej kwadratu odejmiemy kwadrat sumy tej liczby i liczby 6, to otrzymamy 48”.
Rozwiąż równanie.	$x^2 - (x + 6)^2 = 48$ Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy. $x^2 - (x^2 + 12x + 36) = 48$ $x^2 - x^2 - 12x - 36 = 48$ $-12x - 36 = 48 \mid + 36$ $-12x = 84 \mid : (-12)$ $x = -7$
Sprawdź, czy otrzymana liczba spełnia warunki zadania.	x – szukana liczba, czyli -7. x^2 – kwadrat szukanej liczby, czyli $(-7)^2 = 49$. $(x + 6)^2$ – kwadrat sumy szukanej liczby i liczby 6, czyli $(-7 + 6)^2 = (-1)^2 = 1$. Różnica kwadratu liczby -7 i kwadratu sumy liczby -7 i liczby 6 jest równa $49 - 1$, czyli 48. Liczba -7 spełnia warunki zadania.
Podaj odpowiedź.	Szukaną liczbą jest -7.

1. Podane wyrażenie doprowadź do najprostszej postaci.

a) $3x + 6x - 4y - 2x + 3x + 9y$

b) $-3x - 11y + (-6)y - 3$

c) $(x - 4) + 6(3x - 2) - 5(2 - x)$

d) $-(4 - y) + 7(y - 7) - (-3)(2y - 6)$

2. Podany iloczyn przedstaw jako sumę trzech składników.

a) $3x$ **b)** $-18x^2y^3$

c) $46ab$ **d)** $-\frac{1}{2}xy^2$

3. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

a) $-12x - (4y^2 - 7) + 5x$ dla $x = -2$ i $y = \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}a + 2(-3b + a) - 6$ dla $a = 1$ i $b = -0{,}5$

c) $5x - 4y(-6x + 12) - (-5)y$ dla $x = 6$ i $y = -6$

d) $7 + (-3)(x - 2y) - \frac{1}{2}(-4y + x)$ dla $x = -0{,}4$ i $y = 1{,}2$

4. Zamień sumę algebraiczną na iloczyn.

a) $4x(3 - y) + \frac{1}{2}(3 - y)$ **b)** $(2x - 1) + 11(2x - 1)$

c) $-6(\frac{1}{2}x + y) - (-20)(\frac{1}{2}x + y)$ **d)** $-\frac{3}{4}x(y + 5) - (y + 5)$

5. Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy, zapisz potęgę w postaci sumy algebraicznej.

a) $(4x + 7)^2$ **b)** $(4x + y)^2$

c) $(-6a + \frac{1}{2})^2$ **d)** $(\frac{2}{5}x + (-2))^2$

e) $(0{,}3x + 1)^2$ **f)** $(x + y^2)^2$

6. Zapisz w postaci potęgi podaną sumę.

a) $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $9a^2 + 54ab + 81b^2$

c) $a^2 + 20ab + 100b^2$ **d)** $16a^2 + 8ab + b^2$

e) $100a^2 + 80ab + 16b^2$ **f)** $a^2 + 12a + 36$

7. Narysuj kwadrat, którego pole można opisać za pomocą wyrażenia $(a + b)^2$.

8. Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy, zapisz potęgę w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2x - 7)^2$ **b)** $(-3x - 2y)^2$ **c)** $(-5a - 2\frac{1}{2})^2$

d) $(0{,}3x - 7)^2$ **e)** $(2{,}3 - x)^2$ **f)** $(x^2 - 1)^2$

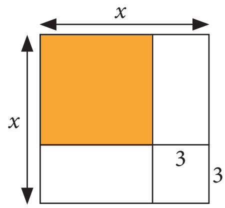
9. Zapisz w postaci potęgi podaną sumę.

a) $a^2 - 4ab + 4b^2$ **b)** $9a^2 - 30ab + 25b^2$

c) $100a^2 - 180ab + 81b^2$ **d)** $36a^2 - 24ab + 4b^2$

e) $0{,}25a^2 - 10ab + 100b^2$ **f)** $9a^2 - 36a + 36$

10. Zapisz za pomocą kwadratu różnicy pole zacieniowanego kwadratu.



11. Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, zapisz dane wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $x^2 - y^2$ **b)** $x^2 - 144y^2$ **c)** $9x^2 - 36y^2$

d) $4x^2 - 81$ **e)** $49a^2 x^2 - 64$ **f)** $3x^2 - y^2$

12. Zapisz podany iloczyn w postaci różnicy kwadratów.

a) $(x - y)(x + y)$ **b)** $(5x - 3y)(5x + 3y)$

c) $(4{,}5x + y)(4{,}5x - y)$ **d)** $\left(\frac{1}{2}x - 0{,}5y\right)\left(\frac{1}{2}x + 0{,}5y\right)$

e) $(10x - 2y)(2y + 10x)$ **f)** $(x + y)(y - x)$

13. Czy podane wyrażenia są równe?

$(x - 7)^2$ i $(7 - x)^2$

14. Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykłady: $68 \cdot 72 = (70 - 2)(70 + 2) = 70^2 - 2^2 = 4900 - 4 = 4896$

$69^2 = (70 - 1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 + 1 = 4900 - 140 + 1 = 4761$

a) $29 \cdot 31$ **b)** $99 \cdot 101$ **c)** 48^2 **d)** 57^2

15. Rozwiąż i sprawdź rozwiązanie równania.

a) $(2x + 7)^2 + 5 = (2x - 3)(2x + 3) + 7$

b) $\frac{1}{4}(8x - 2)^2 - 4(2x - 2) = 13 + 4x(5 + 4x)$

c) $(x + \frac{1}{2})^2 - (x - 1)(x + 1) = 16$

d) $-(x - 4)^2 = (3 - x)(3 + x)$

16. Jeżeli od kwadratu pewnej liczby odejmiemy kwadrat różnicy tej liczby i liczby 6, to otrzymamy -120. Znajdź tę liczbę.

17. Jeżeli podwoimy kwadrat pewnej liczby powiększony o kwadrat liczby 3, to otrzymamy różnicę kwadratu tej liczby pomniejszonej o 3 i kwadratu sumy tej liczby i liczby 3. Jaka to liczba?

18. Sprawdź, czy to prawda, że kwadrat liczby nieparzystej jest równy iloczynowi poprzedzającej ją liczby nieparzystej i następującej po niej liczby nieparzystej zwiększonemu o 4. Liczbę nieparzystą oznaczamy $2n + 1$.

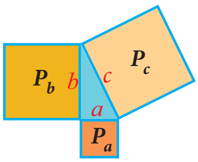
19. Znajdź liczby, których różnica wynosi 3, a iloczyn jest równy kwadratowi mniejszej liczby.

20. O ile większe jest pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a od sześcianu o krawędzi o 3 mniejszej? Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $a = 7$.

21. Oblicz długości boków trójkąta, wiedząc że jeden bok jest o 3 cm dłuższy od najkrótszego, a drugi – o 2 cm dłuższy od najkrótszego oraz suma kwadratów najkrótszego i najdłuższego jest równa podwojonemu kwadratowi długości średniego z boków.

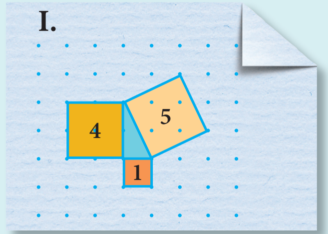
Kwadraty na trójkącie

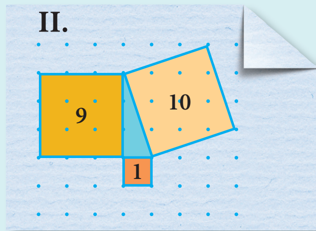
Marta narysowała kilka trójkątów prostokątnych i na ich bokach zbudowała kwadraty. Następnie wyznaczyła pola każdego z tych kwadratów. Otrzymane wielkości zapisała w tabeli.

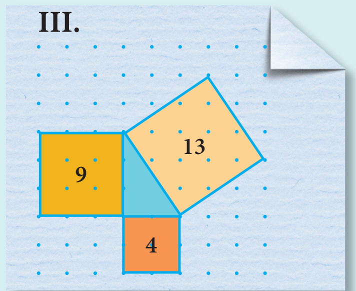


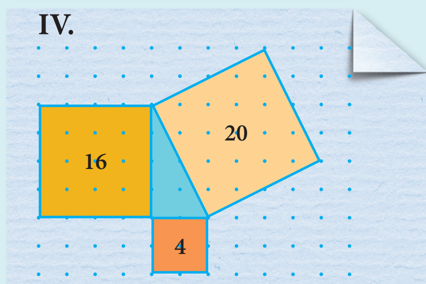
a, b – przyprostokątne
c – przeciwprostokątna
P_a – pole kwadratu zbudowanego na przyprostokątnej a
P_b – pole kwadratu zbudowanego na przyprostokątnej b
P_c – pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej c

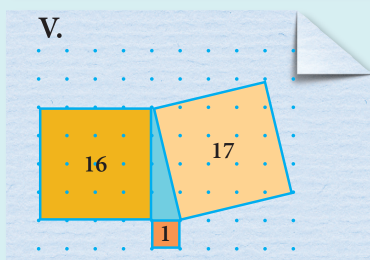
	P_a	P_b	P_c
I.	1	4	5
II.	1	9	10
III.	4	9	13
IV.	4	16	20
V.	1	16	17











➜ Co zauważasz? Sprawdź swoje spostrzeżenia na innych przykładach. Uzupełnij tabelę z zeszytu ćwiczeń.

➜ Jaką własność mają pola kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego?

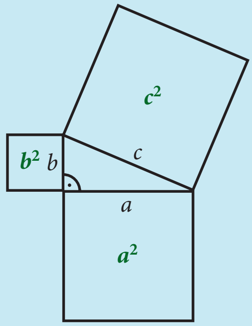
➜ Jakim wyrażeniem można opisać pole kwadratu o boku a? A jakim o boku c?

➜ Zapisz symbolicznie dostrzeżoną zależność między polami kwadratów zbudowanych na bokach a, b i c trójkąta prostokątnego.

Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

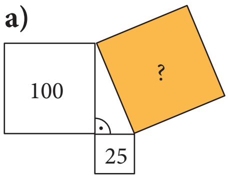
Symbolicznie tę zależność można zapisać:
$a^2 + b^2 = c^2$,
gdzie a i b są przyprostokątnymi trójkąta,
c jest jego przeciwprostokątną.



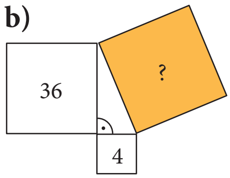
PITAGORAS (ok. 572 – ok. 497 p.n.e.), grecki matematyk i filozof z Samos; założyciel słynnej szkoły pitagorejczyków w Krotonie. Pitagoras jest uważany za twórcę początków teorii liczb oraz koncepcji harmonii kosmosu.

1. Na rysunkach przedstawiono kwadraty zbudowane na bokach trójkąta prostokątnego oraz pola niektórych z nich. Wyznacz pola zaznaczonych kwadratów.

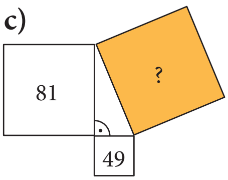
a)



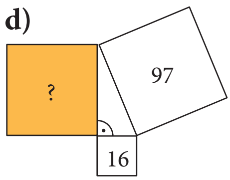
b)



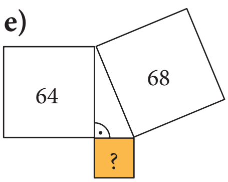
c)



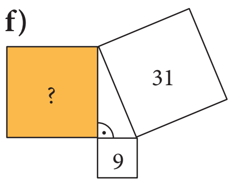
d)



e)



f)

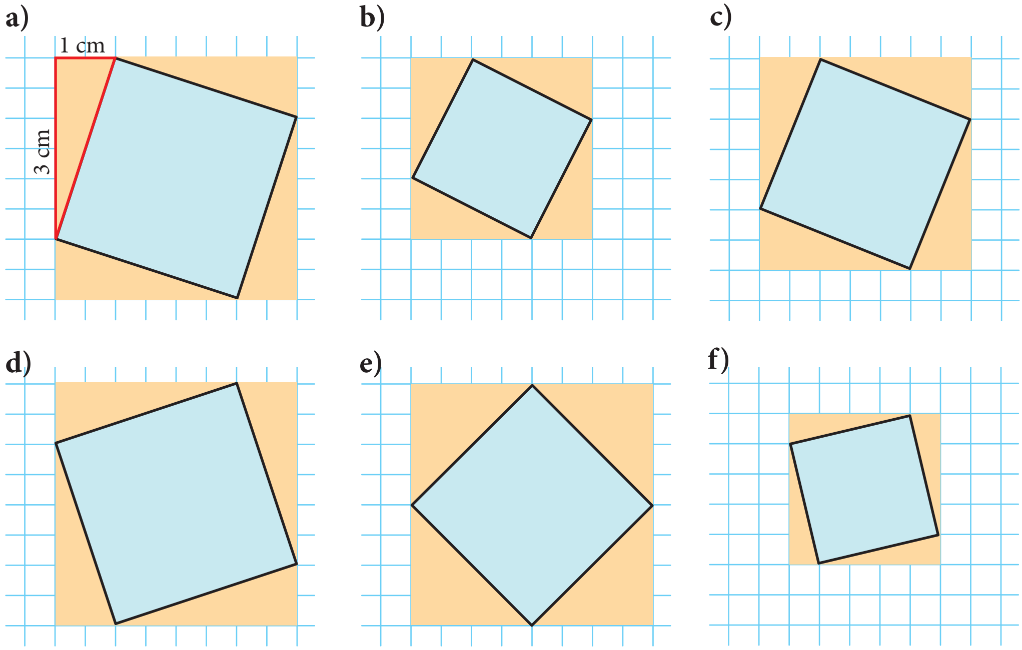


2. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznacz pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości

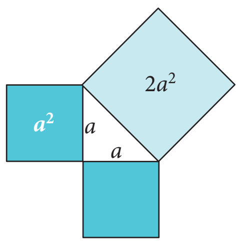
a) $a = 3$ cm, $b = 6$ cm. **b)** $a = 5$ cm, $b = 7$ cm.

c) $a = 9$ cm, $b = 17$ cm. **d)** $a = 11$ cm, $b = 14$ cm.

3. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznacz pole niebieskiego kwadratu.



4. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można zbudować kwadrat o polu dwa razy większym od pola danego kwadratu. Przyjrzyjcie się rysunkowi i opiszcie, jak można to zrobić.



5. Narysujcie dowolny kwadrat i korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zbudujcie kwadrat o polu

a) dwa razy mniejszym niż pole narysowanego kwadratu.

b) o 1 cm^2 większym od pola narysowanego kwadratu.

6. Zbyszek znalazł w klaserze dziadka grecki znaczek. Przedstawiał on kwadraty zbudowane na bokach trójkąta prostokątnego zwanego ***trójkątem egipskim***.

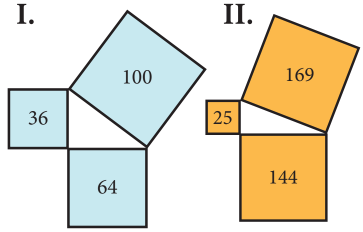
→ Jakie pola mają poszczególne kwadraty?

→ Jakie długości mają przyprostokątne tego trójkąta?

→ Jaką długość ma przeciwprostokątna tego trójkąta?

→ Zapisz związek między długościami boków trójkąta egipskiego.

7. Trójkąty prostokątne, których wszystkie boki, wyrażone w tych samych jednostkach, mają całkowite długości, nazywane są ***trójkątami pitagorejskimi.***

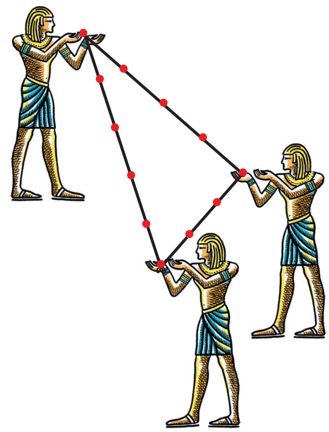


a) Dlaczego trójkąt egipski jest trójkątem pitagorejskim?

b) Podaj długości boków trójkątów pokazanych na rysunkach.

c) Zapisz związki między długościami boków tych trójkątów.

8. Ponad pięć tysięcy lat temu w starożytnym Egipcie i Babilonie do wyznaczenia kąta prostego używano sznura podzielonego węzłami na dwanaście równych części. Po rozciągnięciu sznura w kształt trójkąta o bokach 3, 4, 5 otrzymywano kąt prosty.



a) Czy odmierzając na sznurze kolejno 5, 12 i 13 jednostek, a następnie układając sznur w kształt trójkąta o takich bokach, można wyznaczyć kąt prosty?

→ Sprawdź to, korzystając ze sznurka lub miarki krawieckiej.

→ Czy liczby 5, 12, 13 spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$?

b) Który diagram ilustruje sposób wnioskowania w sytuacji, gdy chcemy stwierdzić, czy podział sznura na wskazane odcinki wyznaczy kąt prosty?

Jeżeli | trójkąt jest prostokątny | to | $a^2 + b^2 = c^2$

Jeżeli | $a^2 + b^2 = c^2$ | to | trójkąt jest prostokątny

c) Jak sądzisz, który z diagramów ilustruje twierdzenie Pitagorasa, a który twierdzenie do niego odwrotne? Sformułuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
Jeżeli pole kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku trójkąta jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na pozostałych bokach, to trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym.

Aby zbadać, czy trójkąt o bokach a, b, c jest prostokątny, trzeba sprawdzić, czy $a^2 + b^2 = c^2$, gdzie a i b są krótszymi bokami trójkąta, a c jest jego najdłuższym bokiem.

Zależność $a^2 + b^2 = c^2$ jest cechą rozpoznawczą trójkątów prostokątnych.

Przykłady:

→ Dla trójkąta o bokach 5, 12, 13 spełniony jest warunek $5^2 + 12^2 = 13^2$, bo $25 + 144 = 169$, zatem trójkąt o bokach 5, 12, 13 jest trójkątem prostokątnym.

→ Dla trójkąta o bokach 2, 3, 4 nie jest spełniony warunek $2^2 + 3^2 = 4^2$, bo $4 + 9 \neq 16$, zatem trójkąt o bokach 2, 3, 4 nie jest trójkątem prostokątnym.

9. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny.

a) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm.
b) $a = 5$ dm, $b = 6$ dm, $c = 8$ dm.
c) $a = 15$ mm, $b = 8$ mm, $c = 17$ mm.
d) $a = 10$ m, $b = 11$ m, $c = 15$ m.

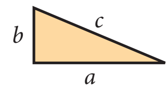
10. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny.

a) 12 cm, 16 cm, 20 cm.
b) 4 m, 6 m, 4 m.
c) 10 cm, 12 cm, 15 cm.
d) 20 dm, 29 dm, 21 dm.

DOWODY TWIERDZENIA PITAGORASA

Twierdzenie Pitagorasa to jedno z najstarszych twierdzeń matematycznych. Znane było w starożytnym Babilonie, w Chinach, w Egipcie na długo przed Pitagorasem. Pierwsze dowody tego twierdzenia przypisuje się jednak pitagorejczykom.

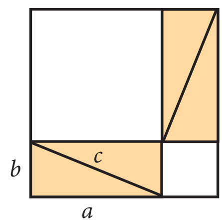
Oto przykłady dwóch dowodów twierdzenia Pitagorasa. Pierwszy z nich jest przypisywany Pitagorasowi.



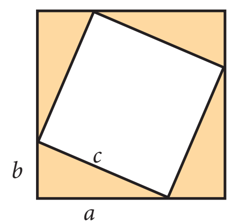
I. Przeanalizuj rysunki i odpowiedz na pytania.

- → Porównaj wymiary dużych kwadratów na rysunkach A i B.
- → Porównaj pola zacieniowanych obszarów w obu dużych kwadratach.
- → Porównaj pola niezacieniowanych obszarów w obu dużych kwadratach.
- → Zapisz algebraicznie równość obu niezacieniowanych pól, używając długości *a*, *b* i *c*.

A

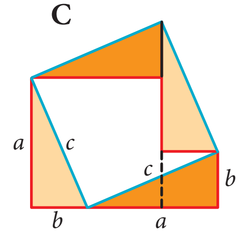


B



II.

C



- → Opisz, jak powstał rysunek **C**.
- → Jakie wymiary ma zaznaczony na czerwono sześciokąt?
- → Jakim wyrażeniem można opisać jego pole?
- → Jakie wymiary ma zaznaczony na niebiesko kwadrat?
- → Jakim wyrażeniem można opisać jego pole?
- → Porównaj pola figur zaznaczonych na niebiesko i czerwono.
- → Zapisz algebraicznie równość pól figur zaznaczonych na niebiesko i czerwono, używając długości *a*, *b* i *c*.

Rozszerzenie

11. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 6 i 8 suma pól kwadratów zbudowanych na bokach 6 i 8 jest równa polu kwadratu zbudowanego na trzecim boku.
$6^2 + 8^2 = 10^2$ (rys. I)

a) Na rysunku II kąt α między bokami długości 6 i 8 jest rozwarty.

→ Porównaj sumę pól kwadratów zbudowanych na bokach 6 i 8 z polem kwadratu zbudowanego na boku x.

→ Przedstaw za pomocą nierówności związek między polami tych kwadratów.

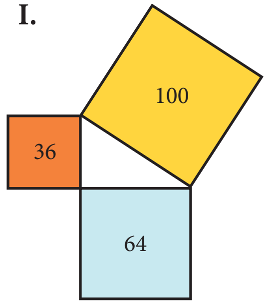
→ Przedstaw za pomocą nierówności związek między bokami tego trójkąta.

b) Na rysunku III kąt β między bokami długości 6 i 8 jest ostry.

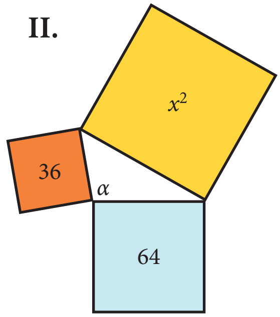
→ Porównaj sumę pól kwadratów zbudowanych na bokach 6 i 8 z polem kwadratu zbudowanego na boku y.

→ Przedstaw za pomocą nierówności związek między bokami tego trójkąta.

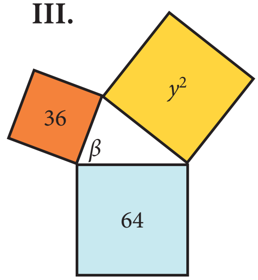
I.



II.



III.



!

W dowolnym trójkącie rozwartokątnym kwadrat długości najdłuższego boku jest większy od sumy kwadratów długości pozostałych boków. Na przykład trójkąt o bokach długości 5, 12 i 14 jest rozwartokątny:
$14^2 > 5^2 + 12^2$.

W dowolnym trójkącie ostrokątnym kwadrat długości najdłuższego boku jest mniejszy od sumy kwadratów długości pozostałych boków. Na przykład trójkąt o bokach długości 10, 11 i 12 jest ostrokątny:
$12^2 < 10^2 + 11^2$.

12. Podaj długości takich trzech odcinków, które są bokami trójkąta

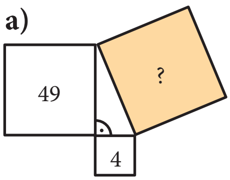
a) rozwartokątnego. **b)** ostrokątnego.

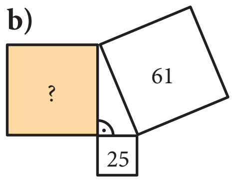
13. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

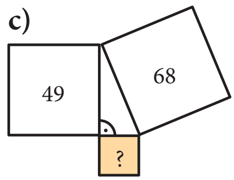
a) 16 cm, 15 cm, 17 cm. **b)** 19 dm, 8 dm, 12 dm.
c) 1,5 cm, 2 cm, 3 cm. **d)** 24 cm, 15 cm, 20 cm.
e) 1 m, 0,75 m, 1,2 m. **f)** 2,1 dm, 28 cm, 0,35 m.

Sprawdź sam siebie

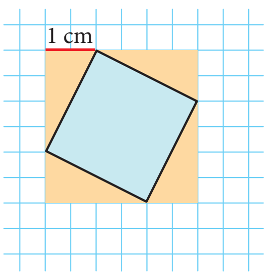
A. Na rysunkach przedstawiono kwadraty zbudowane na bokach trójkąta prostokątnego oraz zapisano pola niektórych z nich. Wyznacz pole zaznaczonego kwadratu.

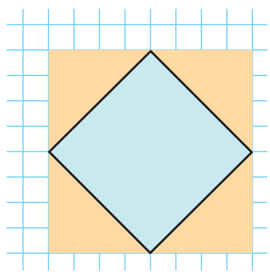
a)


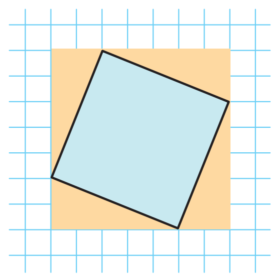
b)


c)


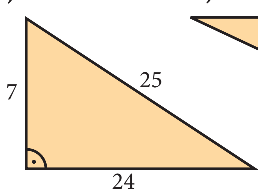
B. Na półcentymetrowej kratce narysowano kwadraty. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznacz pole zielonego kwadratu.

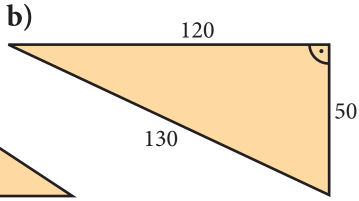
a)


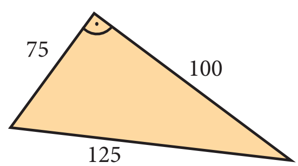
b)


c)


C. Zapisz i sprawdź zależność między długościami boków trójkąta pitagorejskiego.

a)


b)


c)


D. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny.

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm. **b)** 9 mm, 41 mm, 40 mm. **c)** 5 dm, 5 dm, 8 dm.

Matematyczna maszynka

Wejście	Wyjście
4	2
9	3
25	5
36	6
49	?
64	?
81	?
a	*b*

Tabela przedstawia sposób działania pewnej maszynki. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

→ Jaką liczbę otrzymasz po wprowadzeniu do maszynki liczby 49? A jaką po wprowadzeniu liczb: 64, 81, 400?

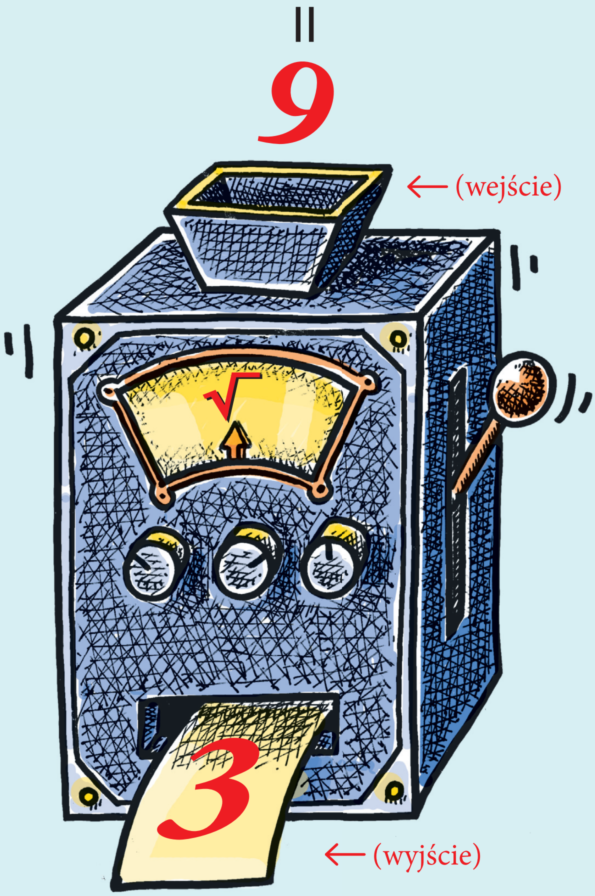
→ Jaką liczbę należy wprowadzić do maszynki, aby otrzymać 10, a jaką, by uzyskać 11?

→ Jaką liczbę otrzymasz, wprowadzając do maszynki liczbę $\frac{1}{4}$?

→ Opisz sposób działania maszynki.

→ Jaką zależność spełnia każda z par liczb zapisanych w tabeli? Dorysuj kolumnę i zapisz odpowiednie równości dla każdej pary z tabeli.

→ Do maszynki wprowadzono liczbę a, w wyniku czego otrzymano liczbę b. Zapisz zależność, jaką spełniają te liczby.



1. Liczby 121, 225, 441, 625 otrzymano, podnosząc pewne liczby do kwadratu. Jakie to liczby?

2. Jaką liczbę trzeba podnieść do kwadratu, aby otrzymać podaną liczbę?

a) $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{36}{49}$ **c)** $\frac{64}{81}$ **d)** $\frac{196}{100}$

e) 0,25 **f)** 0,16 **g)** 0,01 **h)** 1,44

3. Jaka jest długość boku kwadratu o podanym polu?

a) 16 **b)** 36 **c)** 196 **d)** 900

!

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej *a* nazywamy taką liczbę nieujemną *b*, która podniesiona do kwadratu jest równa liczbie *a*.

Symbolicznie zapisujemy to tak:

$\sqrt{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}$, gdy $\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}$, gdzie $\boldsymbol{a} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}$.

Do zapisu pierwiastka kwadratowego używamy znaku: $\sqrt[2]{}$ lub $\sqrt{}$.

Czytamy: pierwiastek kwadratowy lub pierwiastek drugiego stopnia, lub – krótko – pierwiastek.

Przykład: $\sqrt{4} = 2$, bo $2^2 = 4$.

Zapis $\sqrt{4} = 2$ czytamy: pierwiastek kwadratowy z liczby 4 jest równy 2.

Pierwiastkowaniem nazywamy działanie polegające na obliczeniu pierwiastka z liczby.

4. Podaj wartość pierwiastka i zapisz uzasadnienie, tak jak w przykładzie.

Przykład: $\sqrt{9} = 3$, bo $3^2 = 9$ i $3 \geqslant 0$

a) $\sqrt{1}$ **b)** $\sqrt{16}$ **c)** $\sqrt{64}$ **d)** $\sqrt{81}$

e) $\sqrt{121}$ **f)** $\sqrt{900}$ **g)** $\sqrt{2500}$ **h)** $\sqrt{0}$

5. Oblicz.

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{9}}$ **c)** $\sqrt{\frac{25}{36}}$ **d)** $\sqrt{\frac{64}{81}}$

6. Oblicz, tak jak w przykładzie.

a) $\sqrt{1\frac{21}{100}}$ b) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$ c) $\sqrt{1\frac{27}{169}}$ d) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$

Przykład:

$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} =$

$= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

7. Oblicz.

a) $\sqrt{0{,}01}$ b) $\sqrt{0{,}36}$ c) $\sqrt{0{,}49}$ d) $\sqrt{2{,}25}$

8. Oblicz. Możesz skorzystać z tablicy kwadratów w zeszycie ćwiczeń.

a) $\sqrt{324}$ b) $\sqrt{484}$ c) $\sqrt{576}$ d) $\sqrt{784}$

e) $\sqrt{961}$ f) $\sqrt{1296}$ g) $\sqrt{13{,}69}$ h) $\sqrt{14{,}44}$

9. Jaką liczbą powinno być a, aby $\sqrt{a}$ był równy podanej liczbie?

a) 7 b) 8 c) 10 d) 14

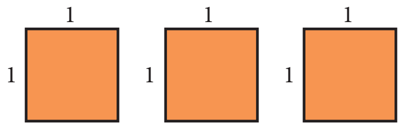
e) 0,1 f) 0,5 g) 1,2 h) 1,6

10. Pole kwadratu jest równe 2. Zapisz w postaci pierwiastka długość boku tego kwadratu.

Bok kwadratu o polu P ma długość $\sqrt{P}$.

11. Wykonaj w zeszycie kolejne kroki instrukcji.

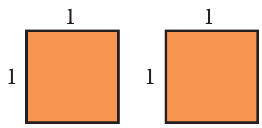
I. Narysuj na kolorowej kartce kwadrat.
Będzie to kwadrat jednostkowy, czyli taki, którym będziemy wymierzać pola figur.
Narysuj i wytnij trzy takie kwadraty.



→ Ile wynosi pole kwadratu jednostkowego?

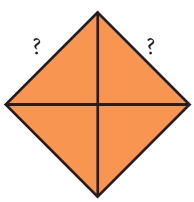
II. Weź dwa kwadraty jednostkowe.

→ Ile wynosi pole figury złożonej z dwóch kwadratów jednostkowych?



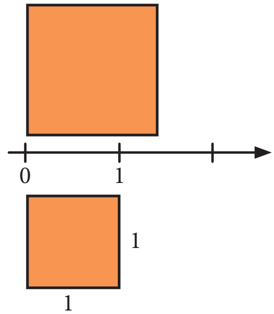
III. Zbuduj kwadrat o polu 2.
Dwa kwadraty rozetnij wzdłuż przekątnej.
Z otrzymanych trójkątów zbuduj kwadrat.

→ Jaką długość ma bok kwadratu o polu 2?



IV. Zaznacz na osi liczbowej długość boku kwadratu o polu 2.

Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej jednostkę równą długości boku kwadratu jednostkowego.
Zaznacz na osi liczbę będącą długością boku kwadratu o polu 2.



→ Między jakimi liczbami naturalnymi leży na osi liczbowej liczba będąca długością boku kwadratu o polu 2?

→ Zapisz nierówność ilustrującą tę zależność.

12. Dominika, określając, między jakimi dwiema liczbami naturalnymi znajduje się pierwiastek, korzystała z diagramu.

→ Opiszcie sposób budowy tego diagramu.

→ Które z kwadratów wyróżniono? Dlaczego?

→ Co oznacza liczba 2 zaznaczona na osi?

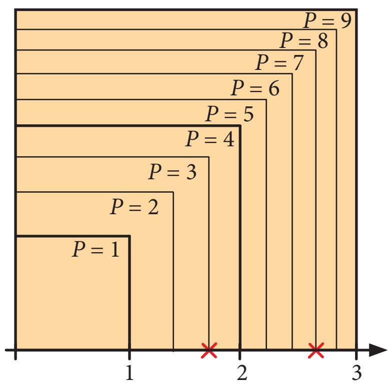
→ Jakie liczby zaznaczono na osi liczbowej?

→ Aby określić położenie na osi liczbowej $\sqrt{2}$, Dominika zapisała:

$1 < 2 < 4$

$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{2} < 2$



→ Na czym polega sposób Dominiki?

→ Sposobem Dominiki określcie, między jakimi liczbami naturalnymi na osi liczbowej leży $\sqrt{3}$. A między jakimi leży $\sqrt{7}$?

→ Wiedząc, że $9 < 14 < 16$, porównajcie pierwiastki: $\sqrt{9}$, $\sqrt{14}$ i $\sqrt{16}$.

13. Między jakimi liczbami naturalnymi na osi liczbowej leży $\sqrt{27}$? A między jakimi $\sqrt{95}$?

14. Korzystając z tablicy kwadratów, określ, między jakimi liczbami naturalnymi na osi liczbowej leży

a) $\sqrt{2000}$. **b)** $\sqrt{3000}$. **c)** $\sqrt{4000}$. **d)** $\sqrt{5000}$.

15. Marcin, korzystając z tablicy kwadratów, zapisał:

$\sqrt{1,96} < \sqrt{2,00} < \sqrt{2,25}$

$\mathbf{1,4} < \sqrt{2} < \mathbf{1,5}$

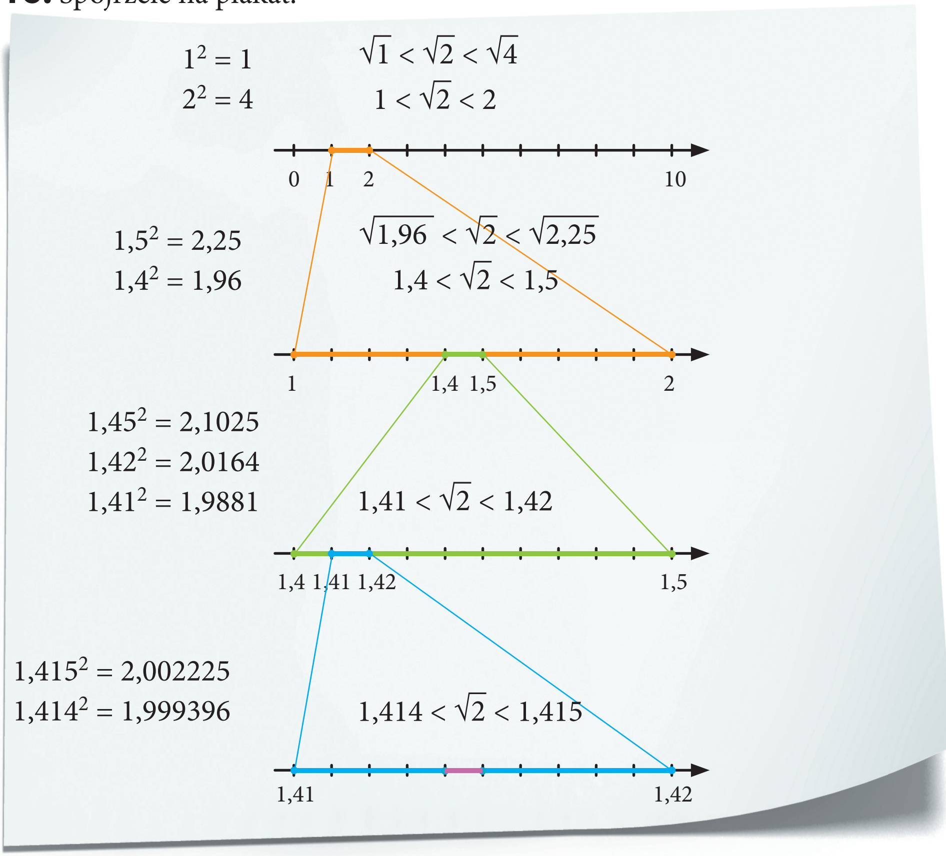
$\sqrt{2} \approx 1,4$

a	a^2
14	196
15	225

Korzystając z tablicy kwadratów, znajdź przybliżenie danej liczby do liczby naturalnej.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{17}$ **d)** $\sqrt{40}$

16. Spójrzcie na plakat.



- Jakie są pierwsze dwie cyfry rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{2}$?
- Ile w zaokrągleniu do części dziesiątych jest równy $\sqrt{2}$? A do części setnych?
- Postępując podobnie, znajdźcie kolejne dwie cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.
- Znajdźcie dwie pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczb $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Nie wszystkie liczby można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$.

Takie liczby, których nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Liczby niewymierne mają **rozwinięcie dziesiętne nieskończone, nieokresowe**.

Przykładami liczb niewymiernych są:
$\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + 1$, $2\sqrt{3}$, 0,1010010001…, π.

17. Naciskając na kalkulatorze wybraną liczbę, a następnie klawisz $\sqrt{}$, uzyskasz przybliżenie dziesiętne pierwiastka lub dokładną wartość pierwiastka z wybranej liczby. Wyznacz na kalkulatorze

45

a) przybliżenia dziesiętne pierwiastków: $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{1000}$.
b) wartości dokładne pierwiastków: $\sqrt{1024}$, $\sqrt{2601}$, $\sqrt{2304}$, $\sqrt{6241}$.

18. Oto kolejny przykład maszynki matematycznej.

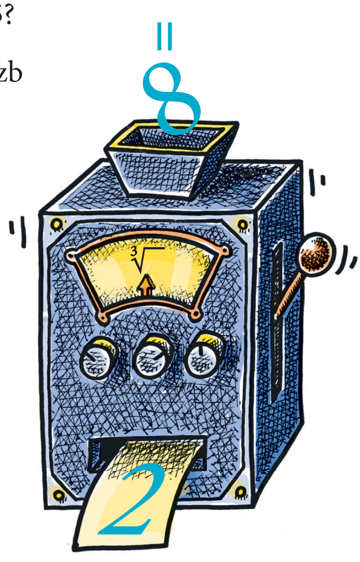
wejście	1	–1	–8	8	27	–27	64	–64	125	–125	*a*
wyjście	1	–1	–2	2	3	–3	?	?	?	?	*b*

→ Na podstawie tabeli opisz sposób działania tej maszynki.

→ Jaką liczbę otrzymasz, wprowadzając do maszynki liczbę 64? A jaką, gdy wprowadzisz 125? A –125?

→ Jaką zależność spełnia każda z par liczb zapisanych w tabeli?

→ Do maszynki wprowadzono liczbę a, a w wyniku otrzymano liczbę b. Zapisz zależność, jaką spełniają te liczby.



Pierwiastkiem sześciennym z liczby *a* nazywamy taką liczbę *b*, która podniesiona do potęgi trzeciej daje liczbę *a*.

Symbolicznie zapisujemy to tak:

$\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$.

Do zapisu tego działania używamy znaku: $\sqrt[3]{}$.
Pierwiastek sześcienny nazywamy inaczej pierwiastkiem trzeciego stopnia.

Czytamy: pierwiastek sześcienny lub pierwiastek trzeciego stopnia.

Przykłady:

$\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$ $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$

Zapis $\sqrt[3]{8} = 2$ czytamy: pierwiastek trzeciego stopnia z liczby 8 jest równy 2.

Uwaga!
Pod pierwiastkiem trzeciego stopnia może być dowolna liczba, a pod pierwiastkiem drugiego stopnia liczba dodatnia lub zero.

19. Podaj wartość pierwiastka i zapisz uzasadnienie, tak jak w przykładzie.

Przykład: $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

a) $\sqrt[3]{1}$ **b)** $\sqrt[3]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{216}$ **d)** $\sqrt[3]{343}$
e) $\sqrt[3]{512}$ **f)** $\sqrt[3]{1000}$ **g)** $\sqrt[3]{8000}$ **h)** $\sqrt[3]{0}$
i) $\sqrt[3]{-1}$ **j)** $\sqrt[3]{-64}$ **k)** $\sqrt[3]{-125}$ **l)** $\sqrt[3]{-729}$

20. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ **c)** $\sqrt[3]{1\frac{331}{1000}}$ **d)** $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$
e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ **f)** $\sqrt[3]{-\frac{27}{216}}$ **g)** $\sqrt[3]{-1\frac{91}{125}}$ **h)** $\sqrt[3]{-1\frac{271}{729}}$

21. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{0{,}001}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}027}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}125}$ **d)** $\sqrt[3]{1{,}331}$
e) $\sqrt[3]{-0{,}001}$ **f)** $\sqrt[3]{-0{,}027}$ **g)** $\sqrt[3]{-0{,}216}$ **h)** $\sqrt[3]{-0{,}729}$

22. Oblicz. Możesz skorzystać z tablicy sześcianów w zeszycie ćwiczeń.

a) $\sqrt[3]{1728}$ **b)** $\sqrt[3]{5832}$ **c)** $\sqrt[3]{2{,}744}$ **d)** $\sqrt[3]{4{,}913}$

46

23. Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości

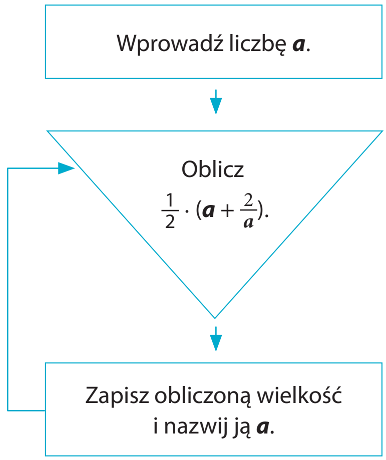
a) 8 mm^3. **b)** 1000 cm^3. **c)** 0,027 dm^3. **d)** 0,027 m^3.

→ Weź kalkulator i postępuj zgodnie z przedstawionym algorytmem. Wstaw w pierwsze okno jakąkolwiek liczbę, np. 10, wykonaj kilka kolejnych kroków.

→ Znajdź na kalkulatorze przybliżenie $\sqrt{2}$.

→ Porównaj otrzymane liczby. Co zauważasz?

→ A jak tą metodą znaleźć przybliżenie $\sqrt{3}$?



→ Zbadaj, jak podają wartości pierwiastków różne rodzaje kalkulatorów, a jak to robi komputer.

→ Poszukaj informacji, jak wyznaczano pierwiastki dawniej, gdy nie było tego rodzaju urządzeń.

Sprawdź sam siebie

A. Oblicz.

a) $\sqrt{169}$ **b)** $\sqrt{2{,}56}$ **c)** $\sqrt{\frac{25}{49}}$ **d)** $\sqrt{1\frac{19}{81}}$

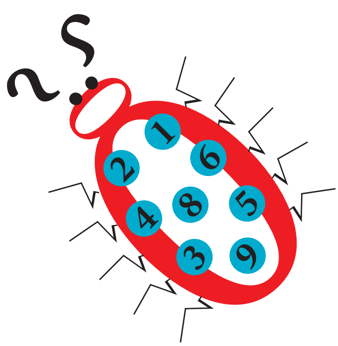
B. Między jakimi liczbami naturalnymi na osi liczbowej leży $\sqrt{55}$? A między jakimi $\sqrt{89}$?

C. Znajdź dwie pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{8}$.

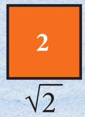
D. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{1000}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}125}$ **c)** $\sqrt[3]{-\frac{64}{343}}$ **d)** $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

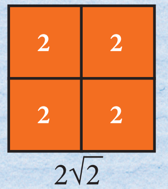
47
czytanka



Dwójkowanie



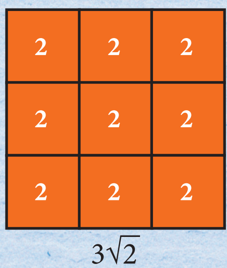
Kwadrat o polu 2 ma bok długości $\sqrt{2}$.



Kwadrat o boku dwa razy dłuższym niż $\sqrt{2}$, czyli $2\sqrt{2}$, ma pole 8.

$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

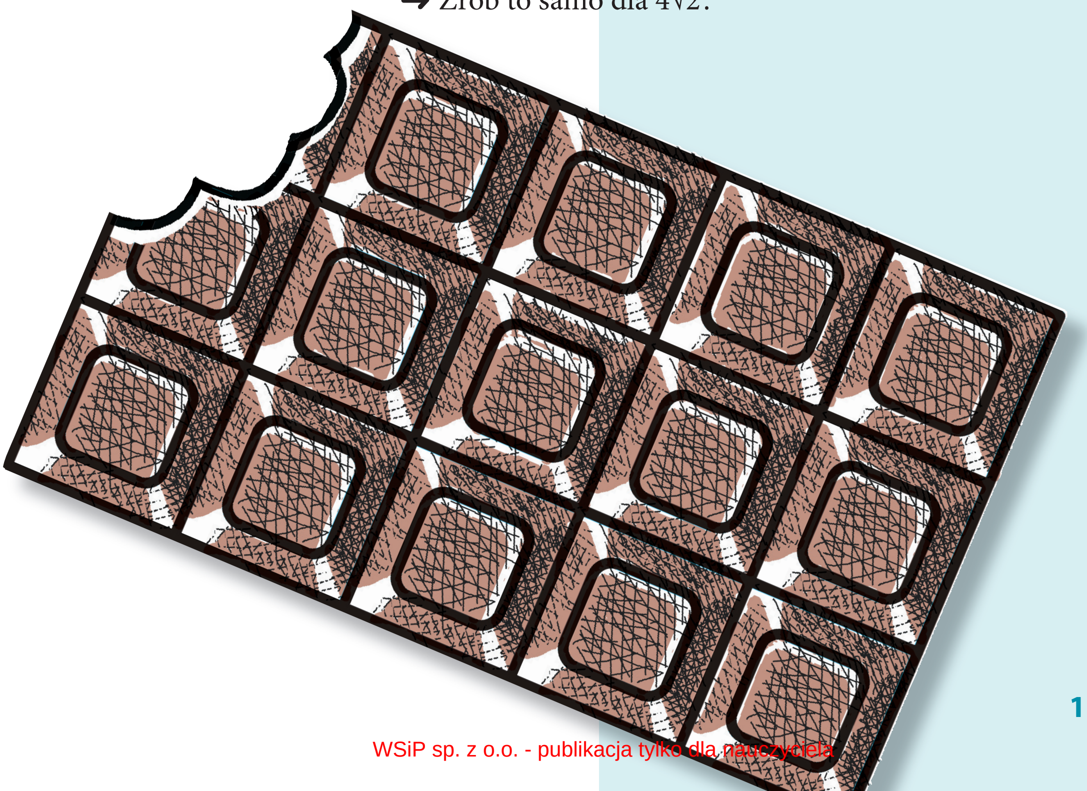
Kwadrat o polu 8 ma bok długości $\sqrt{8}$.



➜ Przedstaw $3\sqrt{2}$ w postaci pierwiastka z liczby.

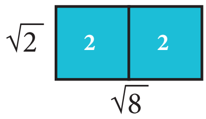
$3\sqrt{2} = \sqrt{?}$

➜ Zrób to samo dla $4\sqrt{2}$.



1. Przeanalizuj następujące rozumowanie.
Pokażemy, że $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}$.

Prostokąt na rysunku zbudowany jest z dwóch kwadratów o polu 2. Jego pole jest równe 4. Liczbę 4 możemy zapisać w postaci $4=\sqrt{16}$.



Prostokąt zbudowany z dwóch kwadratów o polu 2 ma boki długości $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$. Jego pole P możemy obliczyć $P=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$.

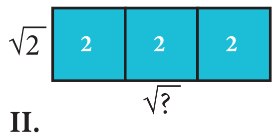
Zatem: $\sqrt{16}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$.

→ Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla prostokątów I i II.

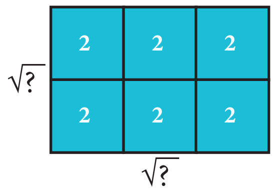
→ Przeanalizuj zapisane iloczyny. Co zauważasz?

→ Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla kwadratów o polu 3 lub 5.

I.



II.



2. Zapiszcie i wykonajcie obliczenia, tak jak w przykładzie.

Przykład:
$\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$
$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$,
więc
$\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$.

I. $\sqrt{4\cdot 16}$ i $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}$ **II.** $\sqrt{4\cdot 36}$ i $\sqrt{4}\cdot\sqrt{36}$

III. $\sqrt{4\cdot 25}$ i $\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}$ **IV.** $\sqrt{16\cdot 100}$ i $\sqrt{16}\cdot\sqrt{100}$

V. $\sqrt{25\cdot 16}$ i $\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}$ **VI.** $\sqrt{25\cdot 25}$ i $\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}$

→ Czy dostrzegacie jakąś prawidłowość?

→ Sprawdźcie prawdziwość spostrzeżeń dla wyrażeń:

$\sqrt{100}\cdot\sqrt{4}$; $\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$; $\sqrt{144}\cdot\sqrt{36}$; $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{9\cdot 9}$; $\sqrt{9\cdot 100}$.

3. Wykonajcie obliczenia, tak jak w przykładzie, i porównajcie wyniki.

Przykład:
$\sqrt{16:4}=\sqrt{4}=2$
$\sqrt{16}:\sqrt{4}=4:2=2$,
więc
$\sqrt{16:4}=\sqrt{16}:\sqrt{4}$.

a) $\sqrt{100:25}$ i $\sqrt{100}:\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{36:4}$ i $\sqrt{36}:\sqrt{4}$

c) $\sqrt{144:4}$ i $\sqrt{144}:\sqrt{4}$ **d)** $\sqrt{64:4}$ i $\sqrt{64}:\sqrt{4}$

→ Czy dostrzegacie jakąś prawidłowość?

→ Sprawdźcie to na innych, wymyślonych przez siebie przykładach.

→ Zapiszcie wzorem dostrzeżoną prawidłowość.

4. Sprawdź, że zachodzą równości.

I. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \cdot 27}$ **II.** $\sqrt[3]{1000} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1000 : 8}$

→ Zaproponuj analogiczne równości dla innych pierwiastków.

→ Zapisz wzorem dostrzeżoną własność.

Iloczyn pierwiastków z liczb a, b jest równy pierwiastkowi z iloczynu tych liczb.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ dla $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$

Iloraz pierwiastków z liczb a, b jest równy pierwiastkowi z ilorazu tych liczb.

$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dla $a \geqslant 0$, $b > 0$,

$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ dla $b \neq 0$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, bo $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, bo $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$

5. Zapisz iloczyn w postaci pierwiastka.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$ **c)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}$

6. Oblicz.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{0,2} \cdot \sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{0,32} \cdot \sqrt{2}$

d) $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{4}{7}}$ **e)** $\sqrt{\frac{5}{18}} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}}$ **f)** $\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{14}$

g) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$ **h)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}$ **i)** $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-0,004}$

j) $\sqrt[3]{0,003} \cdot \sqrt[3]{9}$ **k)** $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$ **l)** $\sqrt[3]{\frac{108}{3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{2}{9}}$

7. Oblicz.

a) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{72} : \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{1,28} : \sqrt{2}$

d) $\sqrt{0,9} : \sqrt{0,1}$ **e)** $\sqrt{\frac{1}{5}} : \sqrt{\frac{5}{4}}$ **f)** $\sqrt{\frac{4}{7}} : \sqrt{\frac{7}{9}}$

g) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$ **h)** $\sqrt[3]{0,5} : \sqrt[3]{4}$ **i)** $\sqrt[3]{1,6} : \sqrt[3]{0,0002}$

j) $\sqrt[3]{-\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{-\frac{2}{27}}$ **k)** $\sqrt[3]{\frac{7}{25}} : \sqrt[3]{-\frac{5}{49}}$ **l)** $\sqrt[3]{\frac{3}{16}} : \sqrt[3]{-1\frac{1}{2}}$

8. Oblicz.

a) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}$ c) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$

48

d) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{135}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{-128}}$

9. Oblicz x.

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{32}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{x}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{30}$

d) $\sqrt{56} : \sqrt{7} = \sqrt{x}$ e) $\sqrt{20} : \sqrt{x} = \sqrt{10}$ f) $\sqrt{x} : \sqrt{3} = \sqrt{15}$

g) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{13} = \sqrt[3]{x}$ h) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{121}$ i) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{45}$

j) $\sqrt[3]{124} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{x}$ k) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{9}$ l) $\sqrt[3]{42} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{7}$

10. Oblicz.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}$ e) $\sqrt{107} \cdot \sqrt{107}$ f) $\sqrt{86} \cdot \sqrt{86}$

g) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ i) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-4}$

$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geqslant 0)$
$(\sqrt[3]{a})^3 = a$

11. Oblicz.

a) $(\sqrt{7})^2$ b) $(\sqrt{19})^2$ c) $(\sqrt{63})^2$

d) $(\sqrt[3]{11})^3$ e) $(\sqrt[3]{21})^3$ f) $(\sqrt[3]{78})^3$

12. Oblicz x.

a) $(\sqrt{3})^4 = x$ b) $(\sqrt{3})^x = 9$ c) $(\sqrt{x})^6 = 64$

d) $(\sqrt[3]{2})^6 = x$ e) $(\sqrt[3]{5})^x = 125$ f) $(\sqrt[3]{x})^9 = -8$

13. Przyjrzyjcie się zapisanym równościom.

I. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{5\sqrt{3}}$ II. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$ III. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

→ Przez jaką liczbę rozszerzano za każdym razem ułamek $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

→ Rozszerzcie podane ułamki przez $\sqrt{5}$.

I. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ II. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ III. $\frac{4}{\sqrt{5}}$

→ Przez jaką liczbę należy rozszerzyć ułamek $\frac{1}{\sqrt{7}}$, aby otrzymać równy mu ułamek o mianowniku 7?

→ Rozszerzcie podane ułamki tak, aby w mianowniku otrzymać liczbę wymierną.

I. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ II. $\frac{9}{\sqrt{11}}$ III. $\frac{3}{\sqrt{13}}$

Usunięciem niewymierności z mianownika ułamka nazywamy takie przekształcenie ułamka, w którego wyniku w mianowniku otrzymujemy liczbę wymierną, np.

$\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$, $\quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

14. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ **b)** $\frac{10}{\sqrt{15}}$ **c)** $\frac{14}{\sqrt{7}}$ **d)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{9}{2\sqrt{3}}$ **f)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

15. Usuń niewymierności z mianowników i skróć ułamki.

I. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **II.** $\frac{5}{\sqrt{5}}$ **III.** $\frac{13}{\sqrt{13}}$

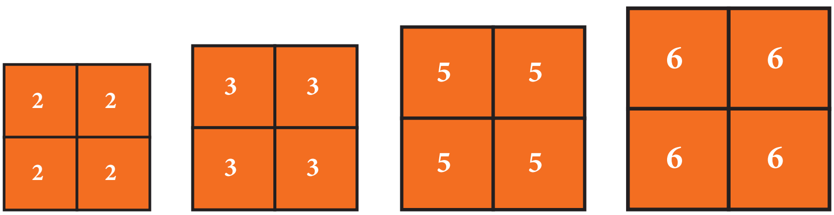
→ Zapisz podobne ułamki i usuń niewymierność z ich mianowników.

→ Co zauważasz?

→ Zapisz wzorem dostrzeżoną prawidłowość i uzasadnij ją.

49

16. Przeanalizuj rysunek i podpisy pod kwadratami.



$2\sqrt{2}$ $\quad 2\sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{5}$ $\quad 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ $\quad 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ $\quad 2\sqrt{5} = ?$ $\quad 2\sqrt{6} = ?$

→ Jakiemu pierwiastkowi są równe $2\sqrt{5}$? A jakiemu $2\sqrt{6}$?

→ Jakiemu pierwiastkowi są równe $2\sqrt{7}$? A jakiemu $2\sqrt{10}$?

→ Dwukrotność jakiego pierwiastka jest równa $\sqrt{32}$?

→ Zauważcie, że $2\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$. Uzasadnijcie w analogiczny sposób pozostałe równości.

→ Pokażcie, że $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

→ Wyznaczcie pierwiastek równy $3\sqrt{3}$.

→ Jakie liczby należy wstawić w miejsce znaków zapytania?

Przykład: $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

I. $\sqrt{12} = ?\sqrt{3}$ **II.** $\sqrt{20} = 2\sqrt{?}$ **III.** $\sqrt{45} = ?$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka

Przykłady:

$\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

Przykłady:

$\frac{1}{5}\sqrt{3} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{25}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{25} \cdot 3} = \sqrt{\frac{3}{25}}$

$3\sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

17. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{24}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{125}$ b) $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[3]{48}$; $\sqrt[3]{108}$

$\sqrt{a} + \sqrt{a} =$
$2 \cdot \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$
$a \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} =$
$2 \cdot \sqrt[3]{a} = 2\sqrt[3]{a}$

18. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $2\sqrt{3}$; $10\sqrt{2}$; $9\sqrt{5}$; $12\sqrt{10}$ b) $2\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{10}$; $4\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt[3]{3}$

19. Oblicz x.

a) $x\sqrt{7} = \sqrt{112}$ b) $11\sqrt{x} = \sqrt{605}$ c) $12\sqrt{3} = \sqrt{x}$
d) $x\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{432}$ e) $3\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{189}$ f) $4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{x}$

20. Oblicz.

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ b) $3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{11} + \sqrt{11} + 5\sqrt{11}$
d) $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}$ e) $7\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{12}$ f) $2\sqrt[3]{9} + 7\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[3]{9}$
g) $2\sqrt{13} - \sqrt{13}$ h) $7\sqrt[3]{9} - 12\sqrt[3]{9}$ i) $4\sqrt[3]{12} - 8\sqrt[3]{12} + 5\sqrt[3]{12}$

Postępuj zgodnie z regułą kolejności wykonywania działań. Jeśli w działaniu masz potęgowanie i pierwiastkowanie, to wykonuj je przed mnożeniem i dzieleniem.

21. Przedstaw iloczyn w postaci pierwiastka.

a) $9 \cdot \sqrt{2}$ b) $\sqrt{7} \cdot 3$ c) $2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4$
d) $3 \cdot \sqrt[3]{12}$ e) $\sqrt[3]{9} \cdot 5$ f) $5 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot 7$

22. Oblicz.

a) $2 \cdot \sqrt{121} - 6^2 : \sqrt{9}$ b) $27 : \sqrt{9} - \sqrt{25} \cdot 2$
c) $2(\sqrt{0{,}04} + \sqrt{0{,}09}) - 3\sqrt{0{,}49}$ d) $\sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{16}}$
e) $\sqrt{2\sqrt{100} + 11\sqrt{16}}$ f) $\sqrt{10(\sqrt{1{,}44} + \sqrt{0{,}25} - \sqrt{0{,}01})}$

23. Przyjrzyj się wykonanym szacowaniom wartości $\sqrt{3}$.

$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ $1 < \sqrt{3} < 2$	$\sqrt{2{,}25} < \sqrt{3} < \sqrt{3{,}24}$ $1{,}5 < \sqrt{3} < 1{,}8$

Oszacuj wartość podanej liczby, wyznaczając dwie liczby wymierne, między którymi na osi liczbowej leży dana liczba.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $\sqrt[3]{15}$ **d)** $\sqrt[3]{50}$
e) $\sqrt{5} + 1$ **f)** $\sqrt{7} - 1$ **g)** $\sqrt[3]{15} + 3$ **h)** $\sqrt[3]{50} - 4$

24. Przyjrzyj się wykonanym szacowaniom wartości $2\sqrt{3}$.

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$	$\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$ $3 < 2\sqrt{3} < 4$	$\sqrt{11{,}56} < \sqrt{12} < \sqrt{12{,}25}$ $3{,}4 < 2\sqrt{3} < 3{,}5$

Oszacuj wartość podanej liczby, wyznaczając dwie liczby wymierne, między którymi na osi liczbowej leży dana liczba.

a) $3\sqrt{5}$ **b)** $4\sqrt{7}$ **c)** $2\sqrt[3]{15}$ **d)** $3\sqrt[3]{50}$
e) $3\sqrt{5} + 1$ **f)** $4\sqrt{7} - 2{,}5$ **g)** $2\sqrt[3]{15} + 3{,}1$ **h)** $3\sqrt[3]{50} - 7$

25. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci i oszacuj jego wartość.

a) $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$ **b)** $2\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 3\sqrt{45}$
c) $\sqrt{12} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{108}$ **d)** $\sqrt{48} + 5\sqrt{75} - \sqrt{147}$

26. Oblicz.

a) $3 \cdot \sqrt[3]{343} - 2 \cdot \sqrt[3]{1000}$ **b)** $18 : \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{8} \cdot 3$
c) $(\sqrt[3]{0{,}027} + \sqrt[3]{0{,}064}) : 7 + 2\sqrt[3]{1}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}}$
e) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{64}}$ **f)** $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{343} - \sqrt[3]{512}}$

27. Oblicz.

a) $2\sqrt{56 : 7 + 1}$ **b)** $6 : \sqrt{2^3 + 1^4} - \sqrt{54 : 2 - 2}$
c) $\sqrt[3]{2^2 \cdot 6 + 15 : 5}$ **d)** $2 - 4 \cdot \sqrt[3]{12^2 - 2^2 \cdot 5 + 3^0}$

51

Czy pierwiastek z sumy liczb będących pod znakiem pierwiastka jest większy czy mniejszy od sumy pierwiastków tych liczb?

Znajdź x, takie że: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$.

Sprawdź sam siebie

A. Oblicz.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$
b) $\sqrt{8{,}1} \cdot \sqrt{0{,}9}$
c) $\sqrt[3]{135} : \sqrt[3]{5}$
d) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}}$
e) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$
f) $\sqrt[3]{\frac{2}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$

B. Oblicz x.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{24}$
b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{56}$
c) $\sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{63}$
d) $\sqrt{124} : \sqrt{x} = \sqrt{10}$
e) $\sqrt{x} : \sqrt{6} = \sqrt{13}$
f) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{13}$

C. Oblicz.

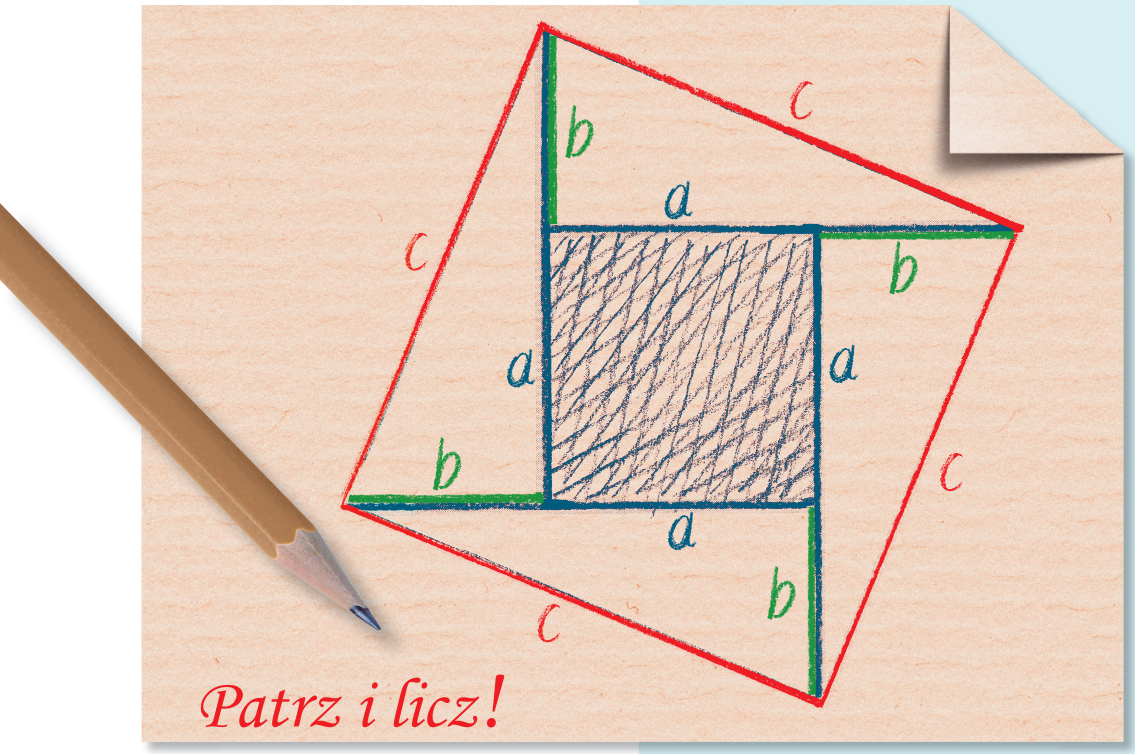
a) $(\sqrt{15})^2$
b) $(\sqrt[3]{21})^3$
c) $(\sqrt[3]{5})^3$

D. Oblicz.

a) $\sqrt{7} \cdot 3 + \sqrt{7}$
b) $2\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$
c) $14\sqrt{13} - 6\sqrt{13}$
d) $7 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}$
e) $11\sqrt[3]{6} + 7\sqrt[3]{6}$
f) $15\sqrt[3]{6} - 8\sqrt[3]{6}$

Patrz i licz!

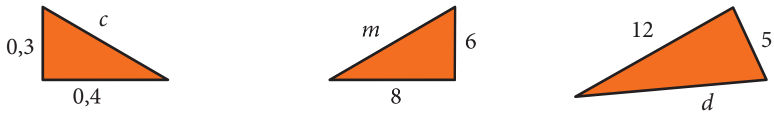
Oto jeden z najstarszych i najkrótszych dowodów twierdzenia Pitagorasa.



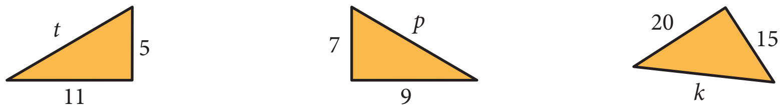
W kwadracie o boku c narysowane są cztery trójkąty prostokątne o bokach a, b, c (c jest przeciwprostokątną). Takie rozmieszczenie trójkątów zawsze jest możliwe, ponieważ każdy kąt kwadratu jest sumą dwóch kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

- ➜ Ile wynosi pole kwadratu o boku c?
- ➜ Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące długość boku zacieniowanego kwadratu oraz jego pole.
- ➜ Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole trójkąta.
- ➜ Przedstaw za pomocą sumy pól trójkątów i pola małego kwadratu pole całej figury.
- ➜ Zapisz otrzymane wyrażenie w najprostszej postaci.
- ➜ Co to za wzór?

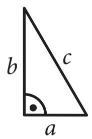
1. Na rysunkach przedstawiono trójkąty prostokątne. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długość trzeciego boku trójkąta.



2. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długości przeciwprostokątnych w przedstawionych trójkątach prostokątnych.

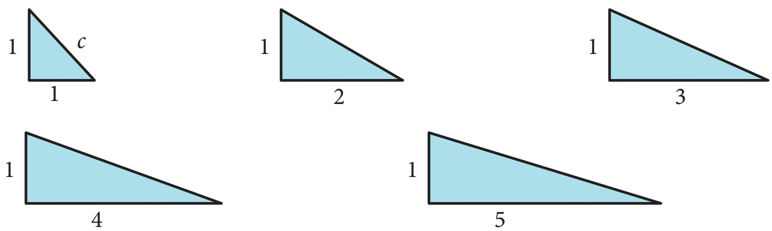


Przykład:



$a = 2,\ \ b = \sqrt{7}$
$c^2 = 2^2 + (\sqrt{7})^2$
$c^2 = 4 + 7$
$c^2 = 11$
$c = \sqrt{11}$

3. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długości przeciwprostokątnych w przedstawionych trójkątach prostokątnych.

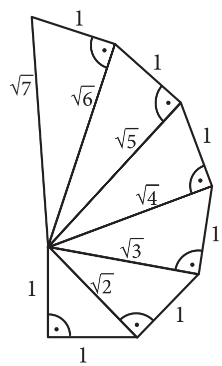


4. Oblicz długości przeciwprostokątnych, gdy dane są długości przyprostokątnych *a* i *b*.

I. $a = \sqrt{2},\ \ b = 1$ **II.** $a = \sqrt{3},\ \ b = 1$
III. $a = \sqrt{4},\ \ b = 1$ **IV.** $a = \sqrt{5},\ \ b = 1$

→ Jaką zauważasz prawidłowość?

5. Rysunek przedstawia metodę rysowania odcinków o długościach będących pierwiastkami kolejnych liczb naturalnych.



a) Oblicz długości wszystkich narysowanych odcinków.

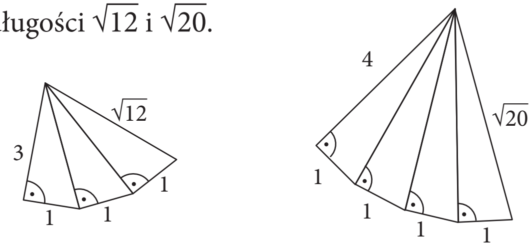
b) Zapisz swoje spostrzeżenia.

c) Czy aby narysować odcinek długości $\sqrt{10}$, musisz narysować kolejno wszystkie trójkąty?

d) Jak najszybciej narysować odcinek długości $\sqrt{37}$?

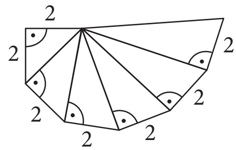
6. Narysuj odcinki długości: $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{50}$.

7. Przyjrzyj się rysunkom. Ilustrują one sposób wyznaczenia odcinków długości $\sqrt{12}$ i $\sqrt{20}$.



→ Wyznacz tym sposobem odcinki długości: $\sqrt{30}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{55}$.

8. Przyjrzyjcie się rysunkowi. Obliczcie długości wszystkich narysowanych odcinków. Co zauważacie?



→ Korzystając z poznanych sposobów, wyznaczcie odcinki długości: $\sqrt{13}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{27}$.

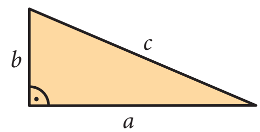
9. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej, wiedząc że

a) $c = 7$ cm, $a = 2$ cm.

b) $c = 25$ cm, $b = 10$ cm.

c) $c = 1{,}5$ dm, $a = 1$ dm.

d) $c = 2{,}5$ dm, $b = 1{,}5$ dm.



Przykład:
$b = \sqrt{7}$, $c = 5$
$c^2 = a^2 + b^2$
$5^2 = a^2 + (\sqrt{7})^2$
$25 = a^2 + 7$
$25 - 7 = a^2$
$18 = a^2$
$\sqrt{18} = a$
$3\sqrt{2} = a$

10. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej, wiedząc że

a) $a = 3$, $c = \sqrt{12}$. **b)** $b = 2$, $c = \sqrt{10}$.

c) $a = \sqrt{3}$, $c = 3$. **d)** $b = \sqrt{2}$, $c = 2$.

e) $a = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{12}$. **f)** $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{21}$.

g) $a = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{15}$. **h)** $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{11}$.

11. Oblicz, jakie długości mogą mieć pozostałe dwa boki trójkąta prostokątnego, jeśli najdłuższy bok ma długość

a) $\sqrt{10}$. **b)** $\sqrt{53}$. **c)** $\sqrt{55}$.

12. Narysuj trójkąt prostokątny, w którym dwa boki mają długości wyrażone liczbami naturalnymi, a trzeci bok ma długość x.

a) $x = \sqrt{8}$ **b)** $x = \sqrt{12}$ **c)** $x = \sqrt{20}$

→ Który z nich można zbudować na dwa różne sposoby?

13. Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, rozstrzygnij, czy trójkąt o podanych długościach boków jest trójkątem prostokątnym.

a) 9, 15, 8 **b)** 16, 20, 12 **c)** $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$

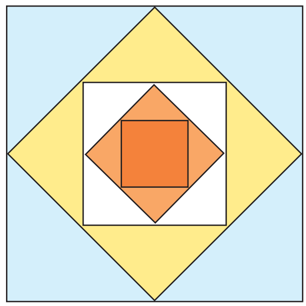
d) $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$ **e)** $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$ **f)** $\sqrt{15}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{18}$

14. Rozstrzygnij, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

a) 4, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 4 **c)** $3\sqrt{2}$, 6, 6

d) 2, 4, $3\sqrt{2}$ **e)** $5\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{6}$ **f)** $0{,}2\sqrt{3}$, $0{,}5\sqrt{2}$, $0{,}3\sqrt{5}$

Wiedząc, że długość boku największego kwadratu jest równa *a*, znajdź długości boków pozostałych kwadratów. Czy dostrzegasz jakąś prawidłowość? Opisz ją.



Sprawdź sam siebie

A. Oblicz długość przeciwprostokątnej, jeżeli przyprostokątne mają długości

a) 5 i 3. **b)** 2 i $\sqrt{2}$. **c)** $\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$. **d)** $2\sqrt{3}$ i $\sqrt{10}$.

B. Oblicz długość przyprostokątnej, jeżeli

a) przeciwprostokątna ma 4, a druga przyprostokątna 2.

b) przeciwprostokątna ma 6, a druga przyprostokątna $\sqrt{8}$.

c) przeciwprostokątna ma $\sqrt{5}$, a druga przyprostokątna $\sqrt{1}$.

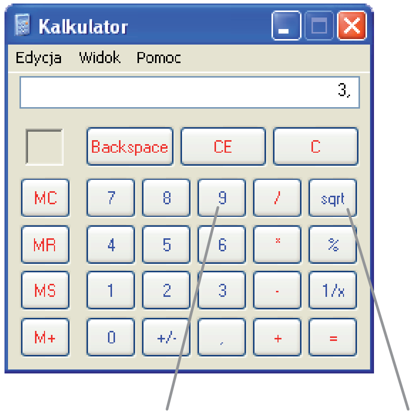
C. Zbuduj odcinek długości $\sqrt{26}$ jako jeden z boków trójkąta prostokątnego.

D. Czy trójkąt o podanych długościach boków jest trójkątem prostokątnym?

a) 2, 3, 4 **b)** 1, $\sqrt{2}$, 1 **c)** $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$

Pora na kalkulator! nr 2

1. Przeanalizujcie przykłady działania kalkulatora komputerowego.



1. 2. 1. 2.

→ Jakie działanie zostaje wykonane na liczbie po naciśnięciu klawisza $\boxed{\text{sqrt}}$?

→ Sprawdź, jak działa Twój kalkulator.

→ Zaproponujcie, jak wykorzystując potęgowanie na kalkulatorze, wyznaczać pierwiastek lub jego przybliżenie.

2. Obliczcie.

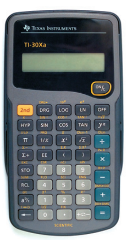
a) $\sqrt{3,43}$ **b)** $\sqrt{13}$ **c)** $\sqrt{51}$

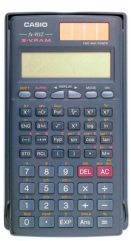
3. Oszacujcie wartość wyrażenia, a następnie obliczcie na kalkulatorze.

a) $\sqrt{3,43} + 5$ **b)** $2,5\sqrt{13}$ **c)** $\sqrt{51} : 9$

4. Na kalkulatorze naciśnięto kolejno:

$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ i otrzymano 5.





→ Jakie działanie zostało wykonane na liczbie 25?

54

5. Obliczcie.

a) $\sqrt{1{,}69}$ b) $\sqrt{10{,}24}$ c) $\sqrt{0{,}0081}$

6. Oszacujcie wartość wyrażenia, a następnie obliczcie na kalkulatorze.

a) $\sqrt{1{,}5}+7$, $7\sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{1{,}5}:8$, $\sqrt{1{,}5}-7$

b) $\sqrt{7{,}5}+3$, $3\sqrt{7{,}5}$, $\sqrt{7{,}5}:3$, $\sqrt{7{,}5}-3$

c) $\sqrt{0{,}8}+0{,}5$, $0{,}5\sqrt{0{,}8}$, $\sqrt{0{,}8}:0{,}3$, $\sqrt{0{,}8}-0{,}3$

7. Zaproponujcie sposób szukania pierwiastka z danej liczby lub szacowania jego wartości z wykorzystaniem kalkulatora, który nie posiada opcji wyznaczania pierwiastka.

→ Wykonajcie schemat blokowy ilustrujący sposób wyznaczania wartości pierwiastka na takim kalkulatorze.

8. Wyznaczcie na kalkulatorze, bez użycia klawisza do obliczania pierwiastka, wartość

a) $\sqrt{2401}$. b) $\sqrt{136161}$. c) $\sqrt{161{,}29}$.

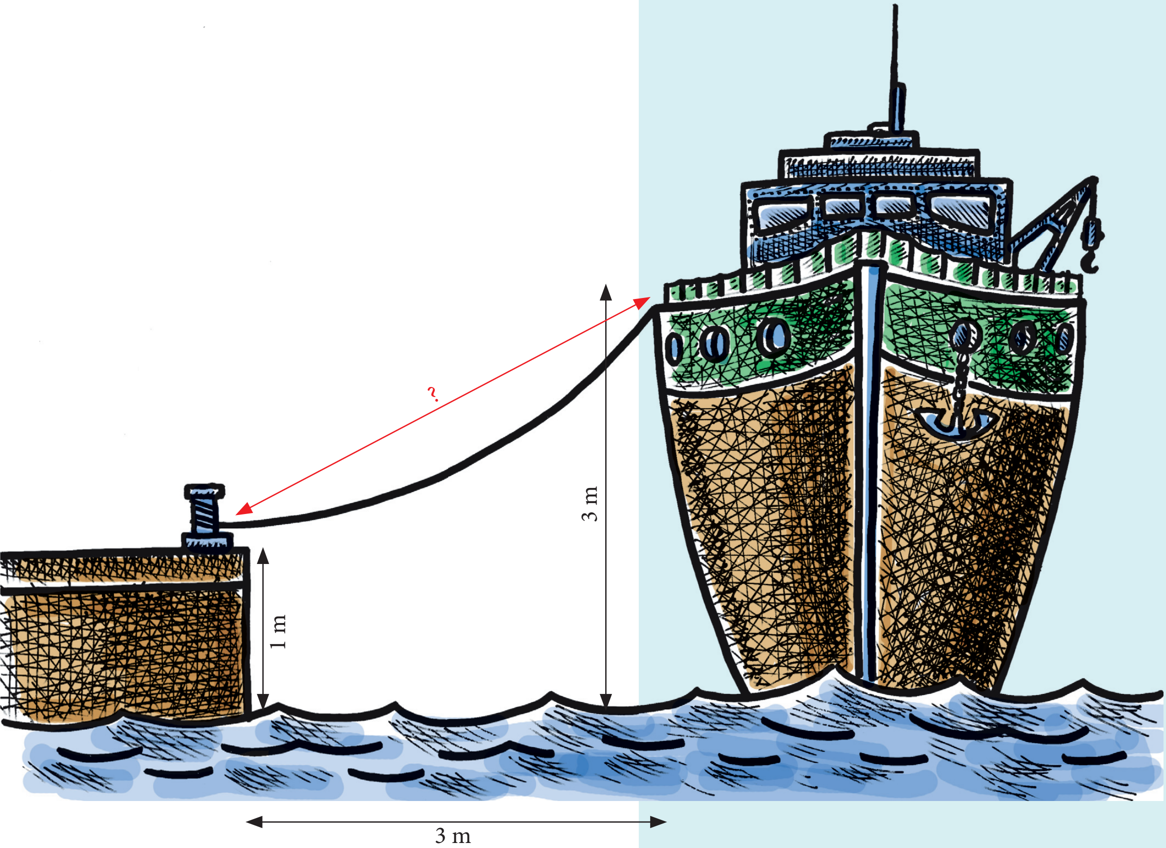
55

9. Oszacujcie na kalkulatorze z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, bez użycia klawisza do obliczania pierwiastka, wartość

a) $\sqrt{98765}$. b) $\sqrt{123456}$. c) $\sqrt{2001{,}2001}$.

Jak długi musi być trap?

Statek zacumowany jest w odległości 3 m od nabrzeża. Nabrzeże znajduje się 1 m powyżej lustra wody, a pokład statku 3 m powyżej lustra wody. Jaka powinna być minimalna długość trapu?



- ➜ Przedstaw schematycznie sytuację z treści zadania.
- ➜ Opisz długości poszczególnych odcinków.
- ➜ Zaznacz na rysunku trójkąt prostokątny.
- ➜ Wyznacz długości przyprostokątnych zaznaczonego trójkąta.
- ➜ Wyznacz długość przeciwprostokątnej.
- ➜ Jakiej długości musi być najkrótszy trap?

1. W trójkącie prostokątnym dwa krótsze boki mają długości 9 cm i 12 cm. Jaka jest długość trzeciego boku?

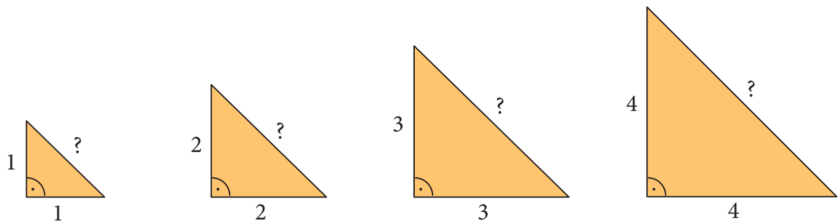
2. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długość przekątnej prostokąta o bokach

a) $a = 1, b = 2.$ **b)** $a = 4, b = 6.$

c) $a = 3, b = 6.$ **d)** $a = 6, b = 7.$

3. Ekran monitora ma wymiary 5 cali × 12 cali. Ile cali ma długość przekątnej tego monitora?

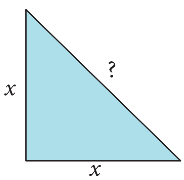
4. Obliczcie długości przeciwprostokątnych w czterech trójkątach prostokątnych równoramiennych, jeśli ramię pierwszego trójkąta ma długość 1 cm, drugiego – 2 cm, trzeciego – 3 cm, czwartego – 4 cm.



→ Co zauważacie?

→ Spróbujcie przewidzieć długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym równoramiennym o ramieniu długości 8 cm.

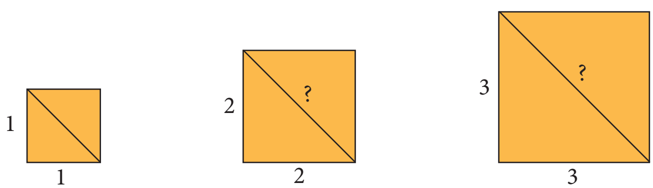
→ Sprawdźcie słuszność swoich przewidywań.

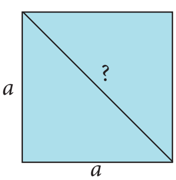


→ Jaką długość ma ramię trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej długości $5\sqrt{2}$?

→ Obliczcie długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym równoramiennym o ramieniu długości x.

→ Jaką długość ma przekątna kwadratu o boku długości 1 cm? A jaką o boku 2 cm? A jaką o boku 3 cm?



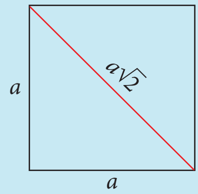


→ Co zauważacie?

→ Jaką długość ma przekątna kwadratu o boku długości a?

Przekątna p kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$.

$\boldsymbol{p = a\sqrt{2}}$



$p = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

5. Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4.

6. Oblicz długość boku kwadratu o przekątnej

a) $5\sqrt{2}$. **b)** $13\sqrt{2}$. **c)** $\sqrt{8}$. **d)** 2.

7. Korzystając ze wzoru $p = \sqrt{2a^2}$, oblicz długość przekątnej kwadratu o polu

a) 8. **b)** 16. **c)** 25. **d)** 17.

8. Bok trójkąta równobocznego ma 8 cm.

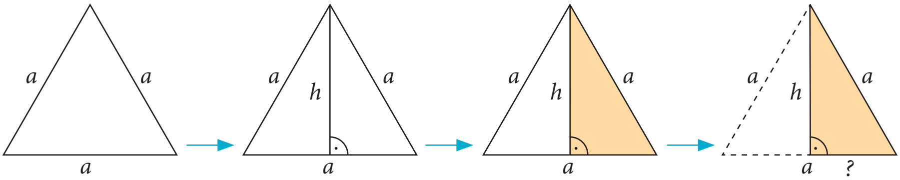
→ Narysuj taki trójkąt i zaznacz jego wysokość.

→ Zaznacz jeden z powstałych trójkątów prostokątnych.

→ Jaką długość ma krótsza przyprostokątna, a jaką przeciwprostokątna tego trójkąta?

→ Oblicz wysokość tego trójkąta równobocznego.

9. Narysowano trójkąt równoboczny o boku a i zaznaczono jego wysokość. Zacieniowano jeden z powstałych trójkątów prostokątnych.



→ Jakie długości mają krótsza przyprostokątna oraz przeciwprostokątna zacieniowanego trójkąta?

→ Zapiszcie zależność między długościami boków tego trójkąta.

→ Wyznaczcie długość przyprostokątnej h.

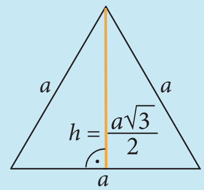
→ Jaka jest wysokość trójkąta równobocznego o boku a?

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

!

Wysokość h trójkąta równobocznego o boku a ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\boldsymbol{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$



10. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku

a) 1 dm. **b)** 2 cm. **c)** 14 dm. **d)** 24 cm.

11. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość wynosi

a) $\sqrt{3}$ cm. **b)** $\sqrt{12}$ cm. **c)** 6 cm. **d)** 1,5 cm.

12. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego, wiedząc że pole kwadratu zbudowanego na jego boku jest równe

a) 1 dm^2. **b)** 25 cm^2. **c)** 144 dm^2. **d)** 256 cm^2.

13. Dany jest trójkąt równoboczny o boku długości 2 cm.

→ Oblicz wysokość tego trójkąta.

→ Oblicz pole tego trójkąta.

14. Dany jest trójkąt równoboczny o boku długości a.

→ Zapisz wzór na pole trójkąta.

→ Podstaw do wzoru wyrażenie opisujące wysokość trójkąta równobocznego.

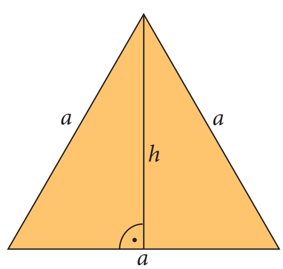
→ Przekształć otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci.

→ Podaj wzór na pole trójkąta równobocznego o boku a.

$$P = \frac{1}{2} \cdot ah \quad \text{i} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Pole P trójkąta równobocznego o boku a jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\boldsymbol{P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

15. Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku

a) 1. **b)** 2. **c)** 4. **d)** 8.

16. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego pole wynosi

a) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2. **b)** $4\sqrt{3}$ cm^2. **c)** $2\sqrt{3}$ cm^2. **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

17. Trójkąt równoramienny ma ramię długości 10 cm i podstawę długości 12 cm.

→ Narysuj taki trójkąt i zaznacz jego wysokość. Zacieniuj powstały trójkąt prostokątny.

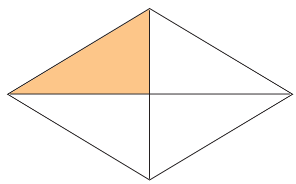
→ Jakie długości mają boki trójkąta prostokątnego? Oblicz jego obwód.

→ Jaką wysokość ma trójkąt równoramienny? Oblicz jego pole.

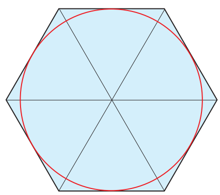
18. W trójkącie równoramiennym podstawa ma 8 cm, a wysokość $\sqrt{20}$ cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

19. W trójkącie równoramiennym ramię ma 10 cm, a wysokość $\sqrt{19}$ cm. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta?

20. Przekątne rombu mają 12 cm i 16 cm. Oblicz bok tego rombu.



21. Oblicz średnicę okręgu wpisanego w sześciokąt foremny o boku 2 cm. O ile większe jest pole sześciokąta od pola koła?



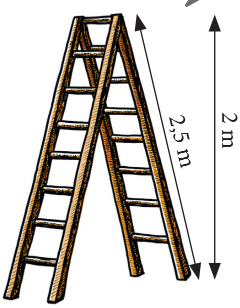
22. Trapez prostokątny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm, a jego wysokość wynosi $\sqrt{20}$ cm.

- → Zrób odpowiedni rysunek i zaznacz na nim wysokość wyznaczającą trójkąt prostokątny w tym trapezie.
- → Oblicz długość ramienia tego trapezu.
- → Oblicz obwód tego trapezu.

23. Trapez prostokątny ma podstawy długości 5 cm i 9 cm, a dłuższe ramię 5 cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

58

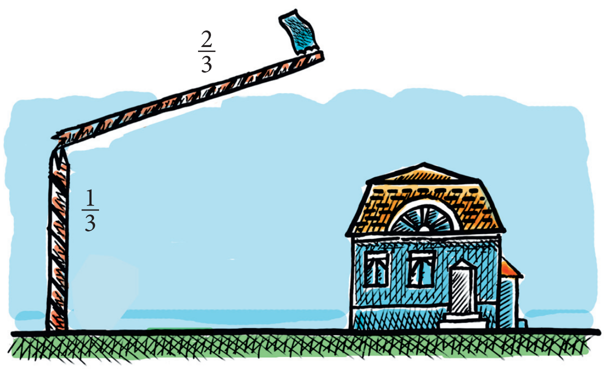
24. Trapez równoramienny ma podstawy długości 2 cm i 6 cm, a ramię $\sqrt{13}$ cm. Oblicz pole tego trapezu.



25. Oblicz długość poręczy wzdłuż schodów z 12 stopniami, jeżeli każdy z nich ma 12 cm wysokości i 35 cm głębokości.

26. Rozkładana drabina ma 2,5 metra długości. Jak szeroko muszą być rozstawione jej nogi, aby sięgała 2 metrów?

27. Dwunastometrowy maszt zgiął się w $\frac{1}{3}$ wysokości od ziemi.



- → Czy uszkodzony koniec masztu dosięgnie budynku stojącego na linii upadku masztu w odległości 7 metrów od jego podstawy?
- → W odległości pół metra od masztu rośnie drzewko owocowe wysokości 1,5 m. Czy łamiący się maszt może je uszkodzić?

59

28. Drabina długości 3 metrów stoi oparta o ścianę. Do jakiej wysokości dosięgnie ta drabina, gdy ją postawimy w odległości: 0,5 m, 1 m, 1,5 m, 2 m, 2,5 m od ściany?

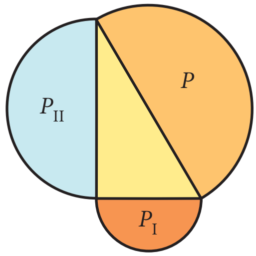
PITAGORAS NIECO INACZEJ

I. Narysuj trójkąt prostokątny o bokach 6, 8, 10.

→ Wyznacz środek każdego boku.

→ Na każdym boku narysuj półkole. Oblicz pole każdego z nich.

→ Sprawdź, czy suma pól półkoli, zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta, jest równa polu półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej.



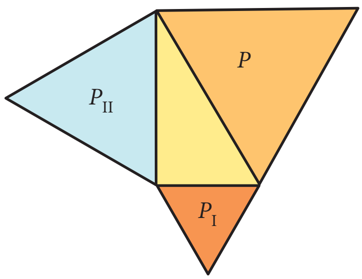
II. Weź inny trójkąt prostokątny i wykonaj analogiczne rachunki.

III. Sformułuj twierdzenie o półkolach zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego.

IV. Uzasadnij poprawność sformułowanego twierdzenia, obliczając pola półkoli zbudowanych na trójkącie prostokątnym o bokach a, b, c.

V. A co będzie, gdy na bokach trójkąta zbudujesz trójkąty równoboczne? A co, gdy trójkąty prostokątne równoramienne?

→ Sprawdź na przykładach dostrzeżone fakty i spróbuj je uzasadnić.



Sprawdź sam siebie

A. Bok kwadratu ma 7 cm. Oblicz długość przekątnej tego kwadratu.

B. Bok trójkąta równobocznego ma $\sqrt{3}$ cm. Oblicz jego wysokość.

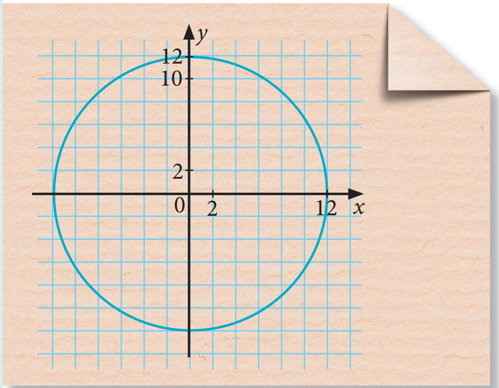
C. Krótsza przekątna rombu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne. Oblicz pole i obwód tego rombu, jeżeli dłuższa przekątna ma $6\sqrt{3}$ cm.

D. Kij o długości 2 m oparto o ścianę. Do jakiej wysokości ściany będzie sięgał ten kij, jeżeli koniec przy ziemi odsunął się o 30 cm od ściany?

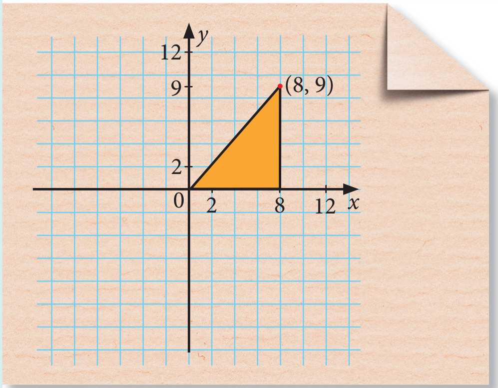
Pitagoras u Kartezjusza

W układzie współrzędnych narysuj okrąg o środku w początku układu i promieniu 12.

➜ Czy punkt (8, 9) leży na tym okręgu, czy wewnątrz, czy na zewnątrz tego okręgu?



➜ Narysuj trójkąt, którego jeden z boków leży na osi *x* układu współrzędnych, drugi jest równoległy do osi *y*, a trzeci łączy punkt (8, 9) z początkiem układu współrzędnych.



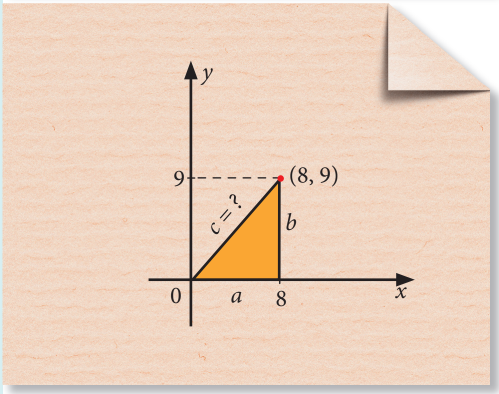
➜ Odczytaj, jaką długość ma odcinek *a*, leżący na osi *x*.

➜ Jaką długość ma odcinek *b*, równoległy do osi *y*?

➜ Oblicz, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość odcinka *c*.

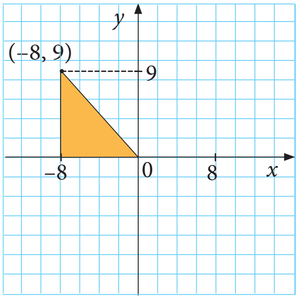
➜ Jakie jest położenie punktu (8, 9) względem okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 12?

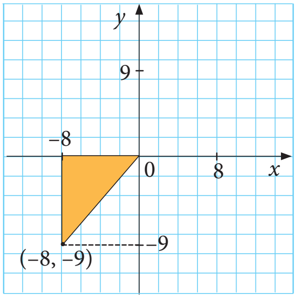
➜ Czy twoje przypuszczenia się potwierdziły?

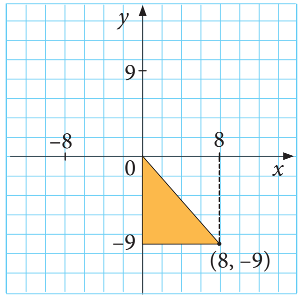


1. Oblicz odległość punktu A od początku układu współrzędnych.

a) $A = (-8, 9)$ **b)** $A = (-8, -9)$ **c)** $A = (8, -9)$



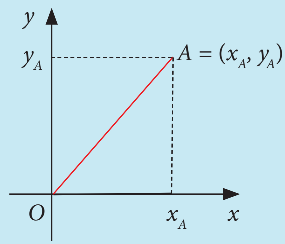




!

Odległość punktu A o współrzędnych (x_A, y_A) od początku układu współrzędnych O wynosi $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$.

$$|AO| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$



2. Jakie są długości odcinków łączących początek układu współrzędnych z podanymi punktami?

a) (8, 6), (−8, −6) **b)** (−5, 12), (5, −12)

c) (9, −12), (−9, 12) **d)** (−15, −20), (15, 20)

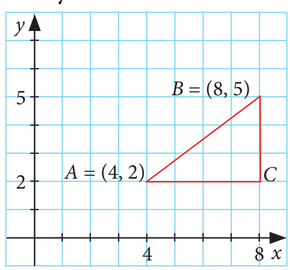
3. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty A, B i C.

→ Jakie współrzędne ma punkt C?

→ Jaka jest długość odcinka AC?

→ Jaka jest długość odcinka BC?

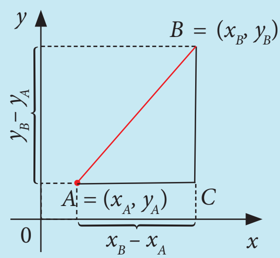
→ Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długość odcinka AB.



!

Długość odcinka AB dla $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



4. Oblicz długość odcinka wyznaczonego przez punkty o współrzędnych

a) $(1, 0)$ oraz $(4, 4)$.
b) $(0, 3)$ oraz $(3, 7)$.
c) $(2, 1)$ oraz $(14, 17)$.
d) $(-1, 1)$ oraz $(7, 7)$.
e) $(-3, 3)$ oraz $(3, -3)$.
f) $(-1, 1)$ oraz $(1, -1)$.
g) $(-1, 1)$ oraz $(5, 1)$.
h) $(3, -7)$ oraz $(3, 11)$.

5. Dane są punkty: $A = (5, 4)$, $B = (3, 2)$, $C = (10, -1)$, $D = (-1, -1)$. Oblicz długości odcinków: AB, BC, CD, DA, DB.

6. Dane są punkty: $A = (0, 1)$, $B = (5, 0)$, $C = (2, 3)$.
- → Zaznacz w układzie współrzędnych punkty A, B, C.
- → Oblicz długości odcinków: AB, BC, CA.
- → Sprawdź, korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

7. Dane są punkty $A = (4, 5)$, $B = (5, 0)$, $C = (2, 2)$.
- → Zaznacz w układzie współrzędnych punkty A, B, C.
- → Oblicz długości odcinków: AB, BC, CA.
- → Czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym? Uzasadnij odpowiedź.

8. Trójkąt o wierzchołkach: $(0, 0)$, $(-1, 3)$, $(6, 2)$ jest trójkątem prostokątnym. Oblicz pole tego trójkąta.

9. Dany jest czworokąt o wierzchołkach: $A = (3, 0)$, $B = (5, 3)$, $C = (2, 5)$, $D = (0, 2)$.
- → Sprawdź, obliczając długości boków, czy ten czworokąt jest rombem.
- → Sprawdź, wykonując odpowiednie rachunki, czy trójkąt ACD jest trójkątem prostokątnym.
- → Jaką figurą jest czworokąt $ABCD$?
- → Oblicz pole tego czworokąta.

10. Dany jest czworokąt o wierzchołkach: $A = (0, 5)$, $B = (4, 2)$, $C = (4, -1)$, $D = (0, -5)$.
- → Oblicz długości boków tego czworokąta. Jaki to czworokąt?
- → Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.
- → Oblicz pole tego czworokąta.

11. Wykaż, że czworokąt o wierzchołkach: $A = (-4, -5)$, $B = (0, -2)$, $C = (3, 2)$, $D = (-1, -1)$ jest rombem.

→ Oblicz bok tego rombu.

→ Oblicz długości przekątnych tego rombu.

→ Oblicz jego pole.

12. Dany jest sześciokąt o wierzchołkach:
$A = (-4, 0)$, $B = (-2, 2)$, $C = (2, 2)$,
$D = (4, 0)$, $E = (2, -2)$, $F = (-2, -2)$.

→ Oblicz długości przekątnych tego sześciokąta.

→ Oblicz obwód sześciokąta.

→ Podziel ten sześciokąt na trapezy i oblicz pola tych trapezów.

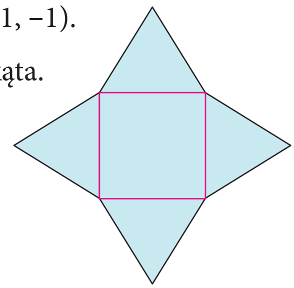
→ Oblicz pole sześciokąta.

13. Dany jest ośmiokąt o wierzchołkach:
$A = (-3, 0)$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, 3)$, $D = (1, 1)$,
$E = (3, 0)$, $F = (1, -1)$, $G = (0, -3)$, $H = (-1, -1)$.

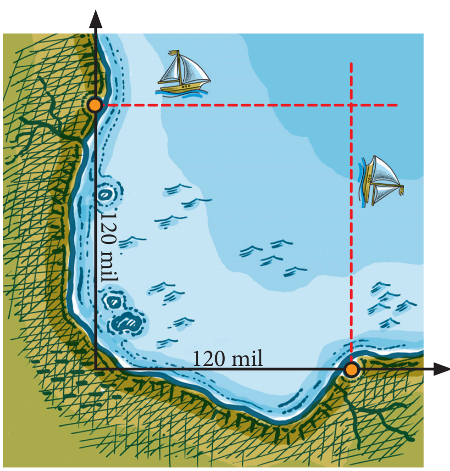
→ Oblicz długości przekątnych tego ośmiokąta.

→ Oblicz obwód ośmiokąta.

→ Podziel ten ośmiokąt na figury, których pola potrafisz wyznaczyć, i oblicz jego pole.



Dwa statki wypływają w tym samym czasie z dwóch portów, położonych jak na rysunku obok. Jeden płynie na wschód z prędkością10 węzłów, drugi – na północ z prędkością 20 węzłów.
Co godzinę sprawdzana jest odległość między statkami. Po ilu godzinach od rozpoczęcia rejsów odległość między nimi będzie najmniejsza? Jak zmieniają się odległości między tymi statkami?



1 mila morska = 1,852 km
1 węzeł = 1 mila morska na godzinę

Sprawdź sam siebie

A. Oblicz odległość punktu A od początku układu współrzędnych.

a) $A = (15, 20)$. **b)** $A = (-5, 12)$. **c)** $A = (-24, -7)$.

B. Oblicz długość odcinka AB, jeżeli

a) $A = (5, 3)$, $B = (3, 5)$.

b) $A = (-2, 3)$, $B = (5, -2)$.

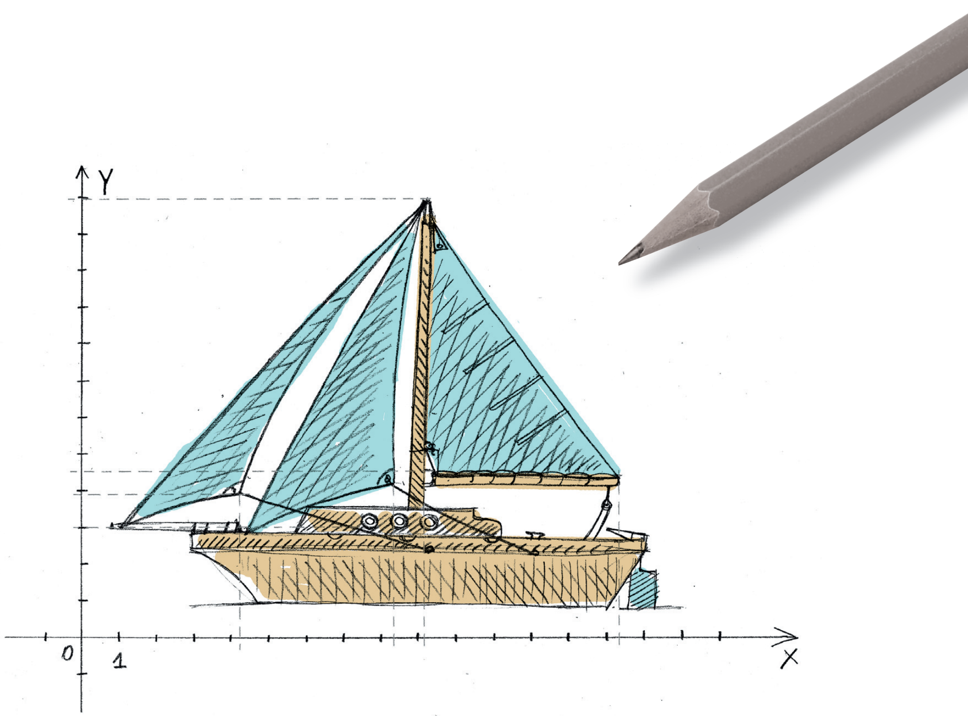
c) $A = (-1, -2)$, $B = (-2, -3)$.

C. Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne:
$A = (0, 3)$, $B = (4, 0)$, $C = (2, 4)$.

a) Oblicz długości boków trójkąta.

b) Sprawdź rachunkowo, czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

D. Trójkąt o wierzchołkach: $(0, -2)$, $(4, -4)$, $(7, 2)$ jest trójkątem prostokątnym. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.



Jak to rozwiązać? nr 4

1. Oblicz iloczyn pierwiastków $\sqrt{2} \cdot \sqrt{98}$.

Iloczyn pierwiastków przedstaw w postaci pierwiastka iloczynu. **Skorzystaj ze wzoru:** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$**.**	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 98}$
Oblicz wartość iloczynu pod znakiem pierwiastka.	$\sqrt{2 \cdot 98} = \sqrt{196}$
Wyznacz wartość pierwiastka.	$\sqrt{196} = 14$

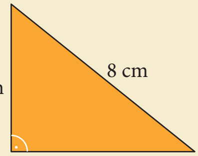
2. Oblicz iloraz pierwiastków $\dfrac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}$.

Iloraz pierwiastków przedstaw w postaci pierwiastka ilorazu. Skorzystaj ze wzoru: $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$.	$\dfrac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\dfrac{375}{81}}$
Skróć ułamek i wyznacz wartość pierwiastka.	$\sqrt[3]{\dfrac{375}{81}} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{27}} = \dfrac{5}{3}$

3. Oblicz wartość wyrażenia $2\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{147}$.

Przedstaw liczby pod pierwiastkiem w postaci iloczynu dwóch liczb, z których jedna ma wymierny pierwiastek.	$2\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{147} =$ $= 2\sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{49 \cdot 3}$
Pierwiastki z iloczynu przedstaw w postaci iloczynu pierwiastków.	$2\sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{49 \cdot 3} =$ $= 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{49} \cdot \sqrt{3}$
Wyznacz wymierne wartości pierwiastków.	$2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} =$ $= 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot \sqrt{3}$
Przedstaw iloczyny w najprostszej postaci.	$2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot \sqrt{3} =$ $= 10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$
Wykonaj działania.	$10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

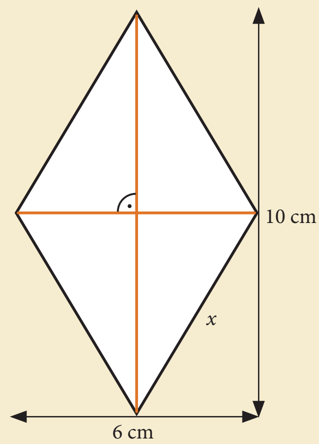
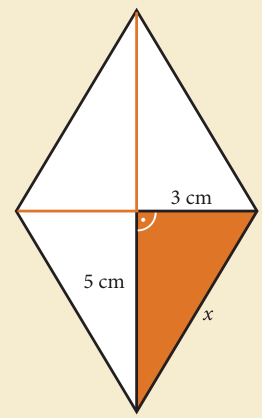
4. W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna ma 6 cm, a przeciwprostokątna 8 cm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

Naszkicuj rysunek pomocniczy. Oznacz przez *x* długość drugiej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego.	
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapisz zależność między długościami boków trójkąta prostokątnego.	$6^2 + x^2 = 8^2$
Rozwiąż równanie z jedną niewiadomą *x*. Pamiętaj, że $x > 0$.	$36 + x^2 = 64$ $x^2 = 64 - 36$ $x^2 = 28$ $x = \sqrt{28}$ $x = 2\sqrt{7}$
Zapisz odpowiedź.	Druga przyprostokątna ma długość $2\sqrt{7}$ cm.

5. Czy trójkąt o bokach długości 6 cm, 4 cm i $2\sqrt{5}$ cm jest prostokątny?

Ustal, który z boków ma największą długość. Tylko najdłuższy bok trójkąta może być przeciwprostokątną.	Trzeba oszacować wartość $2\sqrt{5}$. Szacujemy najpierw wartość $\sqrt{5}$. Ponieważ $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, to $2 < \sqrt{5} < 3$. Zatem $4 < 2\sqrt{5} < 6$. Największą długość ma bok długości 6 cm.
Skorzystaj z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i zapisz zależność między długościami boków.	$4^2 + (2\sqrt{5})^2 \stackrel{?}{=} 6^2$
Sprawdź, czy zapisana równość jest prawdziwa.	$L = 4^2 + (2\sqrt{5})^2 = 16 + 20 = 36$ $P = 6^2 = 36$ $L = P$ Równość $4^2 + (2\sqrt{5})^2 = 6^2$ jest prawdziwa.
Zapisz odpowiedź.	Trójkąt o bokach 6 cm, 4 cm i $2\sqrt{5}$ cm jest prostokątny.

6. Oblicz obwód rombu o przekątnych długości 10 cm i 6 cm.

Wykonaj rysunek zgodnie z warunkami zadania.	
Zaznacz na rysunku trójkąt prostokątny, którego jednym z boków jest szukany bok rombu, a pozostałe boki są odcinkami o znanych długościach.	Przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy. Romb możemy zatem podzielić na cztery trójkąty prostokątne o bokach 3 cm, 5 cm i *x* cm. 
Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa i zapisz związek pomiędzy długościami boków wyznaczonego trójkąta.	$5^2 + 3^2 = x^2$
Rozwiąż równanie z jedną niewiadomą *x*. Pamiętaj, że *x* > 0.	$5^2 + 3^2 = x^2$ $x^2 = 25 + 9$ $x^2 = 34$ $x = \sqrt{34}$
Oblicz obwód rombu.	$4 \cdot \sqrt{34} = 4\sqrt{34}$
Zapisz odpowiedź.	Obwód rombu jest równy $4\sqrt{34}$ cm.

7. Sprawdź, czy trójkąt ABC, którego wierzchołki mają współrzędne $A = (1, 3)$, $B = (-1, -3)$, $C = (-4, -2)$, jest prostokątny.

Oblicz długości poszczególnych boków trójkąta *ABC*, stosując wzór na długość odcinka, gdy dane są współrzędne jego końców.	Obliczamy długość odcinka AB, korzystając ze wzoru: $\|AB\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. $\|AB\| = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-3 - 3)^2} =$ $= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} =$ $= \sqrt{4 + 36} =$ $\sqrt{40}$
	Podobnie obliczamy długości pozostałych odcinków. $\|BC\| = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-2 - (-3))^2} =$ $= \sqrt{(-3)^2 + 1^2} =$ $= \sqrt{9 + 1} =$ $\sqrt{10}$
	$\|AC\| = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (-2 - 3)^2} =$ $\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} =$ $= \sqrt{25 + 25} =$ $\sqrt{50}$
Sprawdź, czy trójkąt o wyznaczonych długościach boków jest prostokątny, stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.	Aby trójkąt ABC o najdłuższym boku AC był prostokątny, spełniona musi być równość: $\|AB\|^2 + \|BC\|^2 = \|AC\|^2$. Zatem: $(\sqrt{40})^2 + (\sqrt{10})^2 \stackrel{?}{=} (\sqrt{50})^2$. $L = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{10})^2 = 40 + 10 = 50$ $P = (\sqrt{50})^2 = 50$ $L = P$
Zapisz odpowiedź.	Trójkąt, którego wierzchołki mają współrzędne: $A = (1, 3)$, $B = (-1, -3)$, $C = (-4, -2)$, jest prostokątny.

1. Oblicz.

a) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{0{,}5}$

b) $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{48}$

c) $1\sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{12}$

d) $\dfrac{\sqrt{24{,}3}}{\sqrt{0{,}3}}$

e) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

f) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{16}$

g) $(\sqrt{125} + \sqrt{45}) : \sqrt{5}$

h) $\sqrt[3]{0{,}75} \cdot (\sqrt[3]{10\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{1\frac{1}{3}})$

2. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{68}$, $\sqrt{500}$, $\sqrt{7{,}5}$, $\sqrt{\frac{8}{9}}$

b) $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{250}$, $\sqrt[3]{2{,}7}$, $\sqrt[3]{\frac{81}{64}}$

3. Ile jest pierwiastków z liczb naturalnych, które są większe od 3 i mniejsze od 4? Ile jest pierwiastków trzeciego stopnia z liczb naturalnych, które są większe od 3 i mniejsze od 4?

4. Jaką długość ma bok kwadratu, którego pole jest dwa razy większe od pola kwadratu o boku 5 cm?

5. Oblicz.

a) $(\sqrt{81} - \sqrt{64}) \cdot \sqrt{5\frac{1}{16}}$

b) $\dfrac{\sqrt{1{,}21} + \sqrt{3\frac{1}{16}}}{\sqrt{2{,}56} - \sqrt{1\frac{9}{16}}}$

c) $(5\sqrt{0{,}09} - 3\sqrt{0{,}04}) \cdot (2\sqrt{2\frac{1}{4}} - 3\sqrt{1\frac{7}{9}})$

d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[3]{0{,}125} : (\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{\frac{8}{27}})$

6. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $5\sqrt{7}$, $\frac{2}{3}\sqrt{27}$, $0{,}2\sqrt{15}$, $3\sqrt{\frac{1}{18}}$

b) $3\sqrt[3]{2}$, $0{,}6\sqrt[3]{10}$, $8\sqrt[3]{\frac{1}{256}}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$

7. Zapisz w postaci ułamka o mianowniku naturalnym.

$\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $\dfrac{11}{\sqrt{11}}$, $\dfrac{1}{5\sqrt{7}}$, $\dfrac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$

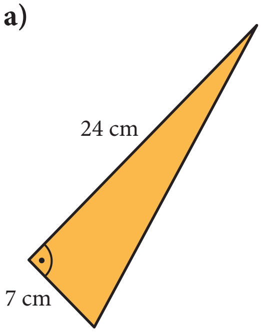
8. Wykonaj działanie.

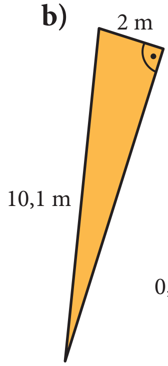
a) $3\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} - 2$ **b)** $4\sqrt[3]{2} - 5(2\sqrt[3]{2} + 1)$

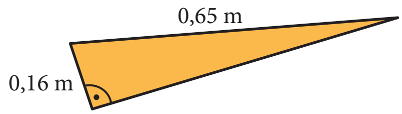
c) $\sqrt{72} - \sqrt{32} - 3\sqrt{8}$ **d)** $2\sqrt[3]{24} + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{375}\right)$

e) $3\sqrt{5^2} - 5^{-2}$ **f)** $(2\sqrt{3})^4 - (3\sqrt{2})^{-2}$

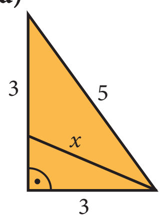
9. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta prostokątnego.

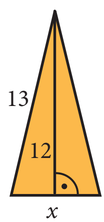
a)


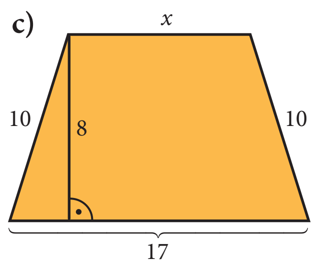
b)


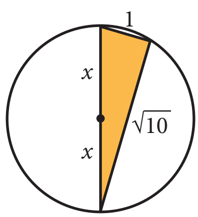
c)


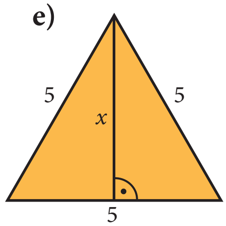
10. Oblicz długość odcinka *x*.

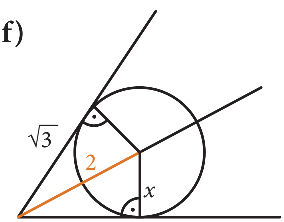
a)


b)


c)


d)


e)


f)


11. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest trójkątem prostokątnym.

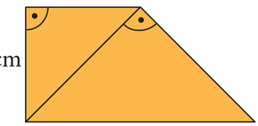
a) 2 cm 2 cm 2,82 cm **b)** 15 cm 3,9 dm 3,6 dm

c) 8,5 m 5,1 m 6,8 m **d)** 6 cm 9 cm $3\sqrt{5}$ cm

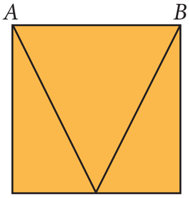
12. Dwa boki trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm i 4 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok tego trójkąta? Rozważ wszystkie możliwości.

13. Dany jest trójkąt równoboczny o boku $\sqrt{3}$ cm. Oblicz wysokość i pole tego trójkąta oraz promienie okręgów, wpisanego i opisanego.

14. Z dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych ułożono trapez jak na rysunku obok. Oblicz obwód tego trapezu.



15. Oblicz obwód trójkąta równoramiennego *ABE*, jeżeli pole kwadratu *ABCD* jest równe 12 cm^2.

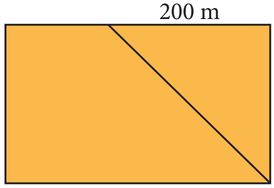


16. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna ma 12 cm, a przeciwprostokątna jest o 8 cm dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

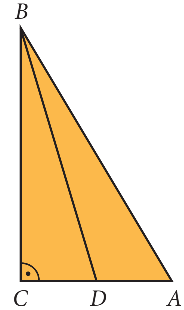
17. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 42 cm. Jedna podstawa ma 5 cm, a druga jest od niej o 12 cm dłuższa. Oblicz pole tego trapezu.

18. Oblicz pole sześciokąta foremnego o boku długości $4\sqrt{6}$.

19. Przez prostokątną działkę o wymiarach 200 m × 300 m prowadzi ścieżka, taka jak na rysunku. Oblicz długość tej ścieżki. Wynik podaj z dokładnością do 1 m. O ile dłuższa byłaby ścieżka poprowadzona wzdłuż przekątnej działki?



20. Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|BC| = 35$ cm, rozcięto na dwa trójkąty wzdłuż środkowej BD, $|BD| = 37$ cm. Oblicz obwody tych trójkątów.



21. W trapez równoramienny o podstawach długości 3 cm i 7 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

22. Oblicz długość odcinka AB, jeżeli

a) $A = (0, 0)$, $B = (-2, 4)$. **b)** $A = (1, 1)$, $B = (5, 5)$.

c) $A = (-4, 3)$, $B = (3, -4)$. **d)** $A = (14, -3)$, $B = (-3, 14)$.

23. Zbadaj, czy trójkąt o wierzchołkach: $(-2, -2)$, $(-3, 1)$, $(7, 1)$ jest prostokątny. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

24. Oblicz długości boków i przekątnej prostokąta $ABCD$, jeżeli $A = (1, 0)$, $B = (7, 2)$, $C = (6, 5)$, $D = (0, 3)$.

25. Punkty $A = (4, 2)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, -3)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

a) Oblicz współrzędne punktu D.

b) Sprawdź, czy ten równoległobok jest rombem.

c) Oblicz pole tego równoległoboku.

26. Wskaż przekształcenie, w którym obrazem punktu $(-5, 2)$ jest punkt

a) $(5, 2)$. **b)** $(5, -2)$. **c)** $(-5, -2)$.

27. Wyznacz współrzędne punktu B, symetrycznego do punktu $A = (-1, 3)$ względem osi x, oraz współrzędne punktu C, symetrycznego do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC.

SMS-owy zawrót głowy

Do pisania SMS-ów używa się klawiszy numerowanych od 0 do 9. Każdemu klawiszowi przyporządkowanych jest kilka znaków, a ich wywołanie zależy od liczby naciśnięć.
W tabeli przedstawiono przyporządkowanie, w którym liczbie kolejnych naciśnięć klawisza 2 odpowiada wywołany znak.

Liczba naciśnięć klawisza 2	1	2	3	4	5	6
Wywołany znak	a	ą	b	c	ć	2

→ Ilu naciśnięciom przyporządkowana jest litera *ą*?

→ Jaka litera przyporządkowana jest pięciu naciśnięciom klawisza 2?

→ Czy określonej liczbie naciśnięć klawisza 2 przyporządkowany jest dokładnie jeden znak?

→ Jaki klawisz należy nacisnąć, aby wywołać literę *j*?

→ Któremu klawiszowi odpowiada litera *e*?
Jakie inne litery są przyporządkowane temu klawiszowi?

→ Jakie litery są przyporządkowane klawiszowi 8?
A jakie – klawiszowi 9?

→ Odgadnij, jaki wyraz wpisano, wybierając klawisze: 5, 3, 5, 2, 5, 2. Przydatny do odgadnięcia wyrazu może być schemat.

5	3	5	2	5	2
↓	↓	↓	↓	↓	↓
jkl	def	jkl	abc	jkl	abc

→ Czy każdemu klawiszowi są przyporządkowane jakieś litery?

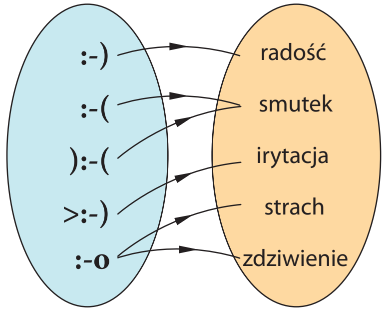
1. Przy pisaniu SMS-ów często używane są skróty wyrażające emocje. Na grafie przedstawiono przykład, jak serii znaków przyporządkowano emocje.

→ Podaj znaczenie serii znaków):-(

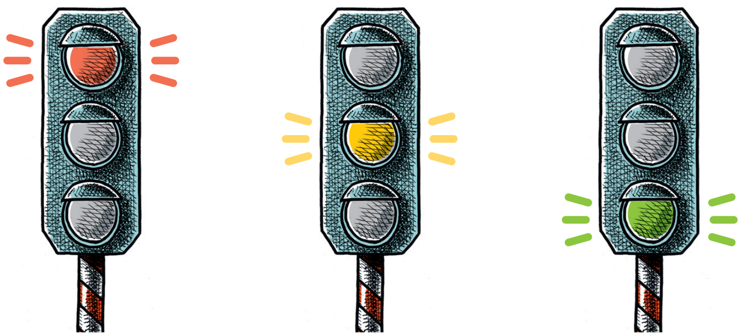
→ Podaj znaczenie serii znaków >:-(

→ Jakiej serii znaków przyporządkowano „radość”?

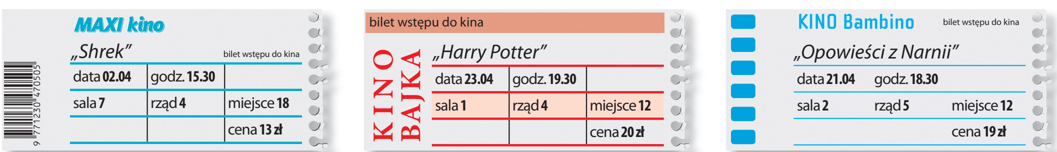
→ Której serii znaków przyporządkowano więcej niż jedno znaczenie?



2. Jaka informacja jest przyporządkowana każdemu z kolorów świateł w sygnalizatorach świetlnych?



3. Korzystając z informacji podanych na biletach, wskaż elementy odpowiadające sobie w poniższych przyporządkowaniach.



a) bilet do kina ⟶ tytuł filmu

b) bilet do kina ⟶ data seansu

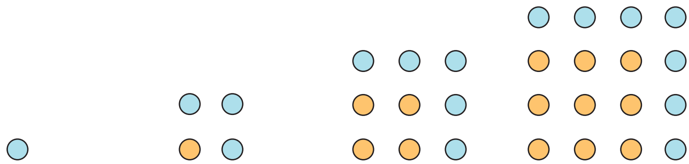
c) bilet do kina ⟶ rząd na widowni

d) nazwa kina ⟶ cena biletu

e) tytuł filmu ⟶ nazwa kina

→ Podaj inne przyporządkowania, które można określić, dysponując tymi biletami.

4. Na podstawie rysunku zaproponowano trzy przyporządkowania.



I. 1 ⟶ 1   2 ⟶ 4   3 ⟶ 9   4 ⟶ 16

II. 1 ⟶ 1   2 ⟶ 3   3 ⟶ 5   4 ⟶ 7

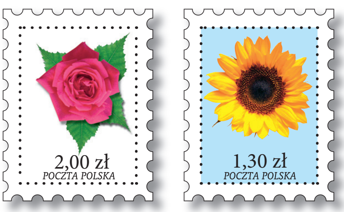
III. 1 ⟶ 1   2 ⟶ 4   3 ⟶ 8   4 ⟶ 12

→ Opisz sposób przyporządkowania.

→ Co jest w każdym przykładzie przyporządkowane liczbie 5?

5. Zaproponujcie przyporządkowania, które można zilustrować tak jak poniżej.

a)



b)

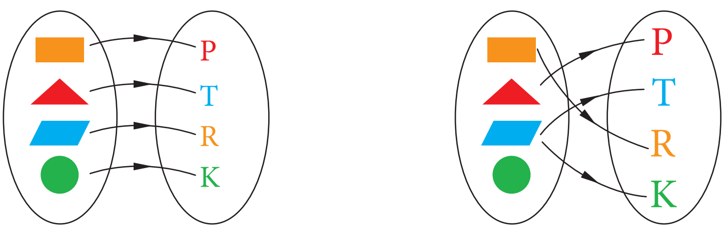
c)

771230 470505

d)

6. Przeanalizuj grafy.

a) **b)**



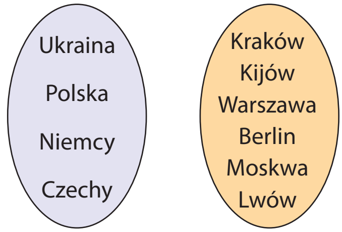
→ Podaj przyporządkowania przedstawione na grafach.

→ Wymień elementy, którym przyporządkowano poszczególne litery. Jaki zbiór tworzą te elementy?

7. Wytnij z zeszytu ćwiczeń zbiory z nazwami państw i miast. Korzystając z tych zbiorów, wykonaj graf ilustrujący przyporządkowanie

a) państwo ⟶ stolica.

b) miasto ⟶ państwo.



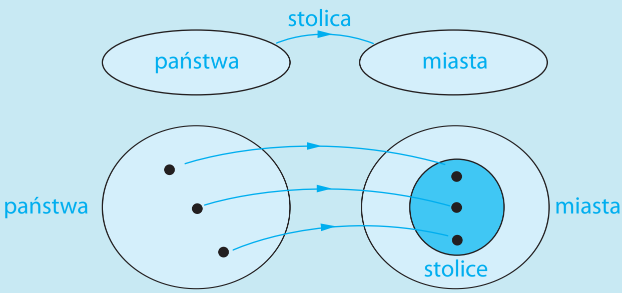
Przy określaniu przyporządkowania wyróżniamy dwa zbiory: **dziedzinę** i **przeciwdziedzinę**.

dziedzina ⟶ *przeciwdziedzina*

Elementy dziedziny nazywamy **argumentami**, a przyporządkowane im elementy przeciwdziedziny – **wartościami**.

Przykłady:

W przyporządkowaniu „stolica" dziedziną jest zbiór państw, a przeciwdziedziną jest zbiór miast. Zbiorem wartości jest zbiór stolic.



Argumentowi *Polska* przyporządkowana jest wartość *Warszawa*.

8. Przeanalizuj tabelę.

Oznaka								
Stopień marynarski	marynarz	starszy marynarz	mat	starszy mat	bosmanmat	bosman	starszy bosman	bosman sztabowy

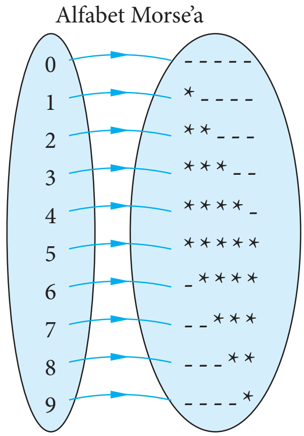
→ Jakie przyporządkowanie zilustrowano w tabeli?

→ Wskaż dziedzinę tego przyporządkowania.

→ Wskaż przeciwdziedzinę tego przyporządkowania.

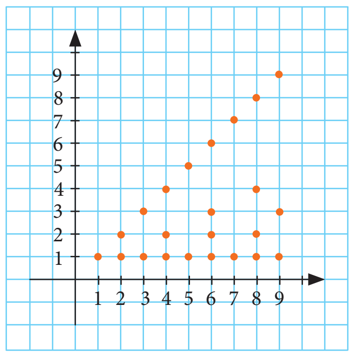
62

9. Przeanalizuj graf.



- Jakie przyporządkowania zilustrowano na grafie?
- Wskaż dziedzinę tego przyporządkowania.
- Wskaż przeciwdziedzinę tego przyporządkowania.
- Wskaż jeden z argumentów i określ jego wartość.
- Przedstaw w tabeli to przyporządkowanie.

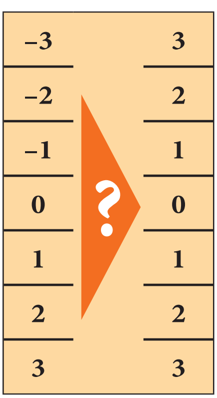
10. Na wykresie przedstawiono przyporządkowanie „dzielniki liczb jednocyfrowych".



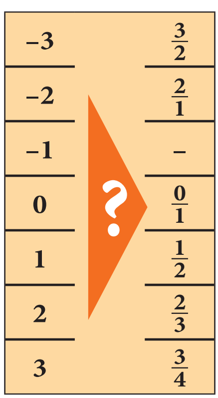
- Wskaż dziedzinę i przeciwdziedzinę tego przyporządkowania.
- Jaka wartość jest przyporządkowana argumentowi 1? A argumentowi 6?
- Przedstaw w tabeli przyporządkowanie „dzielniki liczb jednocyfrowych".
- Przedstaw na grafie przyporządkowanie „dzielniki liczb jednocyfrowych".
- Sporządź wykres przyporządkowania „liczba dzielników liczb jednocyfrowych", czyli przyporządkowania każdej liczbie jednocyfrowej liczby jej dzielników.

11. Przeanalizuj maszynki ilustrujące pewne przyporządkowania.

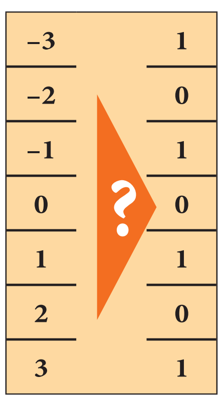
I.



II.



III.



- Jaka wartość przyporządkowana jest w każdym przypadku argumentowi 3?
- Jakie przyporządkowania ilustrują maszynki?
- Przedstaw na wykresie przyporządkowanie I dla argumentów: −5, −4, 4, 5.
- Przedstaw w tabeli przyporządkowanie II dla argumentów: −5, −4, 4, 5.
- Przedstaw na grafie przyporządkowanie III dla argumentów: −5, −4, 4, 5.

12. Przedstaw na różne sposoby przyporządkowanie, w którym każdej liczbie jest przyporządkowany wynik z dzielenia tej liczby przez liczbę o 1 mniejszą, a dziedziną jest zbiór liczb naturalnych jednocyfrowych większych od 1.

63

Wykonaj plakat ilustrujący przyporządkowania, jakie są określone za pomocą piktogramów używanych w życiu codziennym, np. znaków drogowych czy ikon programów komputerowych.

Sprawdź sam siebie

Numeracja obuwia										
Długość stopy [cm]	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5	27
Numeracja angielska	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8
Numeracja francuska	35	36	36,5	37	38	39	39,5	40	41	42

A. Co jest przyporządkowane długości stopy 25 cm w podanym przyporządkowaniu?

a) długość stopy $\longrightarrow$ numeracja angielska

b) długość stopy $\longrightarrow$ numeracja francuska

B. Co jest dziedziną i przeciwdziedziną przyporządkowania?

a) długość stopy $\longrightarrow$ numeracja angielska

b) długość stopy $\longrightarrow$ numeracja francuska

C. Przedstaw na wykresie podane przyporządkowanie.

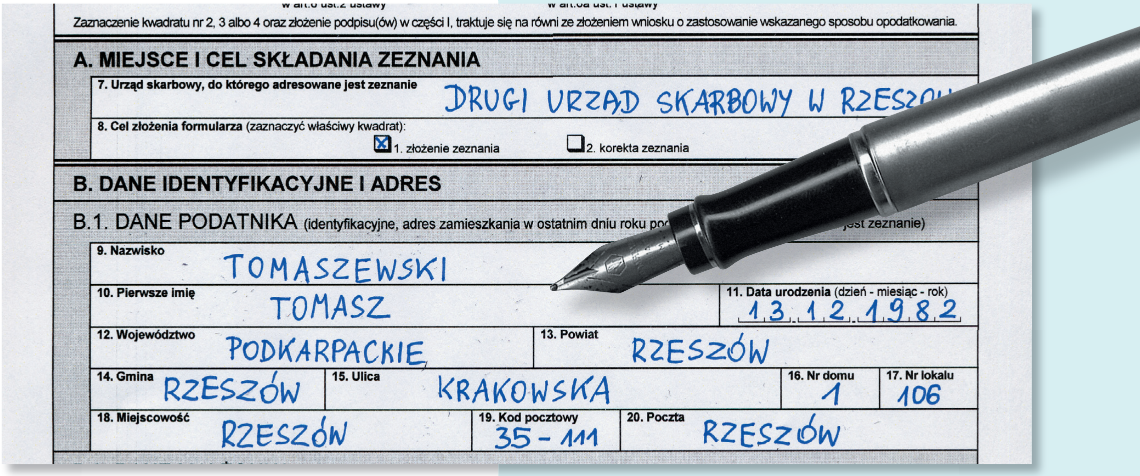
numeracja angielska $\longrightarrow$ długość stopy

D. Przedstaw na grafie podane przyporządkowanie.

numeracja angielska $\longrightarrow$ numeracja francuska

Gdzie Tomek ma domek?

To jest fragment zeznania podatkowego.


Zaznaczenie kwadratu nr 2, 3 albo 4 oraz złożenie podpisu(ów) w części I, traktuje się na równi ze złożeniem wniosku o zastosowanie wskazanego sposobu opodatkowania.

A. MIEJSCE I CEL SKŁADANIA ZEZNANIA

7. Urząd skarbowy, do którego adresowane jest zeznanie: DRUGI URZĄD SKARBOWY W RZESZO…

8. Cel złożenia formularza (zaznaczyć właściwy kwadrat): ☒ 1. złożenie zeznania ☐ 2. korekta zeznania

B. DANE IDENTYFIKACYJNE I ADRES

B.1. DANE PODATNIKA (identyfikacyjne, adres zamieszkania w ostatnim dniu roku po… …jest zeznanie)

9. Nazwisko: TOMASZEWSKI

10. Pierwsze imię: TOMASZ

11. Data urodzenia (dzień - miesiąc - rok): 13 12 1982

12. Województwo: PODKARPACKIE

13. Powiat: RZESZÓW

14. Gmina: RZESZÓW

15. Ulica: KRAKOWSKA

16. Nr domu: 1

17. Nr lokalu: 106

18. Miejscowość: RZESZÓW

19. Kod pocztowy: 35 - 111

20. Poczta: RZESZÓW

Każdemu człowiekowi jest przyporządkowana **jedna** miejscowość w jego stałym adresie zameldowania.
W **jednej** miejscowości mieszka **wiele** osób.

Każdemu człowiekowi jest przyporządkowana **jedna** ulica w jego stałym adresie zameldowania.
Przy **jednej** ulicy mieszka **wiele** osób.

Każdemu człowiekowi jest przyporządkowany **jeden** numer domu w jego stałym adresie zameldowania.
W **jednym** domu może mieszkać **wiele** osób.

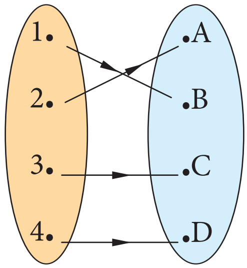
➜ Wymień przywołane w tekście przyporządkowania.

➜ Rozważ przyporządkowanie, w którym osobie przypisany jest jej numer telefonu. Czy każdej osobie przyporządkowany jest numer telefonu? Czy tylko jeden?

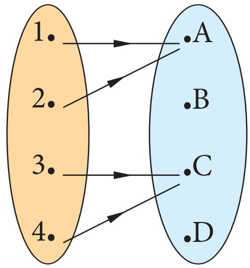
➜ Zaproponuj takie przyporządkowanie informacji z zeznania podatkowego, które każdej osobie przypisuje jedną daną.

1. Na grafach przedstawiono pewne przyporządkowania.

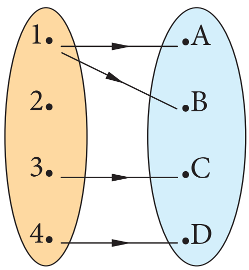
I.



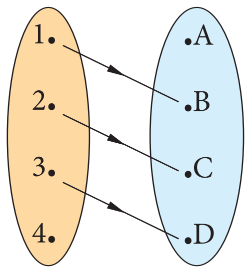
II.



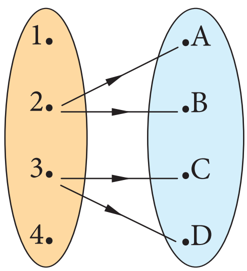
III.



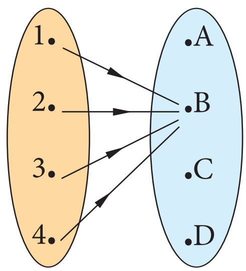
IV.



V.



VI.



a) Wskaż przyporządkowania spełniające podany warunek.

A. Każdemu argumentowi jest przyporządkowany jakiś element.

B. Każda litera jest wartością dla jakiegoś argumentu.

C. Każdemu argumentowi jest przyporządkowany dokładnie jeden element.

D. Nie ma różnych argumentów, którym przyporządkowane są takie same wartości.

b) Zaproponujcie warunek, który spełniają tylko przyporządkowania I, II i VI.

!

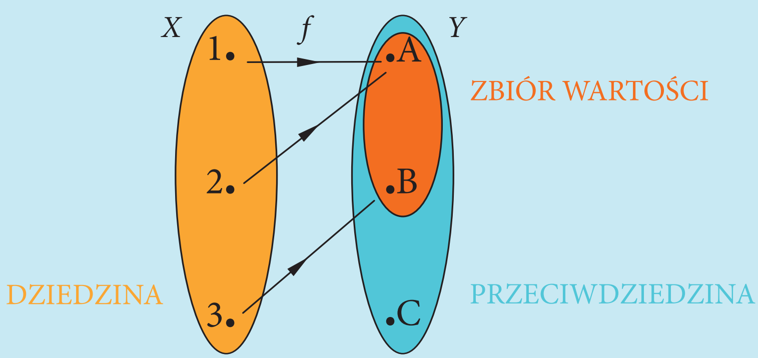
Dane są dwa zbiory X i Y. **Funkcją** nazywamy takie przyporządkowanie, które **każdemu** elementowi ze zbioru X przyporządkowuje **dokładnie jeden** element ze zbioru Y.

Zapis symboliczny $\boldsymbol{f\colon X \longrightarrow Y}$ oznacza, że pewna funkcja f jest określona na zbiorze X i ma wartości ze zbioru Y.

Dla funkcji $\boldsymbol{f\colon X \longrightarrow Y}$ zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji** $\boldsymbol{f}$, a jego elementy nazywamy **argumentami**. Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji** $\boldsymbol{f}$. Elementy przeciwdziedziny, które są przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji** $\boldsymbol{f}$.

Przykłady:

Na grafie przedstawiono funkcję.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb: {1, 2, 3}.
Przeciwdziedziną tej funkcji jest zbiór liter: {A, B, C}.
Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór liter: {A, B}.



Argumentowi 1 funkcja f przyporządkowuje wartość A.
Zapisujemy: $f(1) = \text{A}$.
Argumentowi 2 funkcja f przyporządkowuje wartość A.
Zapisujemy: $f(2) = \text{A}$.
Argumentowi 3 funkcja f przyporządkowuje wartość B.
Zapisujemy: $f(3) = \text{B}$.

2. Korzystając z definicji funkcji, uzasadnijcie poprawność stwierdzenia określającego, czy podane przyporządkowanie **jest funkcją**.

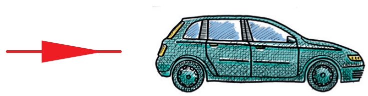
I.

marka samochodu

Przyporządkowanie, w którym każdemu samochodowi przypisana jest jego marka, **jest funkcją**.

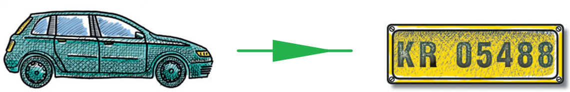
II.

marka samochodu



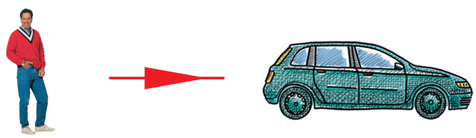
Przyporządkowanie, w którym każdej marce samochodów przypisany jest samochód tej marki, **nie jest funkcją**.

III.



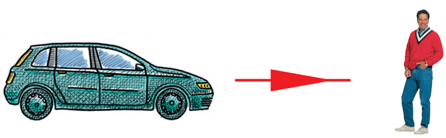
Przyporządkowanie, w którym każdemu samochodowi przypisany jest numer jego rejestracji, **jest funkcją**.

IV.



Przyporządkowanie, w którym każdej osobie przypisany jest jej samochód, **nie jest funkcją**.

V.



Samochód może być własnością kilku osób, np. ojca i syna.

Przyporządkowanie, w którym każdemu samochodowi przypisany jest jego właściciel, **nie jest funkcją**.

3. Czy podane przyporządkowanie jest funkcją?

a) Każdemu państwu jest przyporządkowana jego stolica.

b) Każdemu uczniowi twojej klasy jest przyporządkowana pierwsza litera jego nazwiska.

c) Każdemu imieniu jest przyporządkowane nazwisko ucznia twojej szkoły noszącego to imię.

d) Każdemu wielokątowi jest przyporządkowana liczba jego wierzchołków.

e) Każdemu wyrazowi przyporządkowana jest liczba występujących w nim samogłosek.

f) Każdej liczbie jest przyporządkowana jej połowa.

g) Każdej liczbie jest przyporządkowany jej kwadrat.

4. Jakie funkcje możesz utworzyć, wykorzystując dane z legitymacji szkolnej?


LEGITYMACJA SZKOLNA

Nr 85/2002

D. Soboń
(podpis właściciela)

Dominik Soboń
(imię i nazwisko)

data urodzenia 19.08.1989 r.
(dzień, miesiąc, rok)

zamieszkał(y) w Żyrardowie
ul. Gen. Andersa 19
(dokładny adres)

96-300 ŻYRARDÓW
ul. Jasna nr 11
(podłużna pieczęć szkoły)

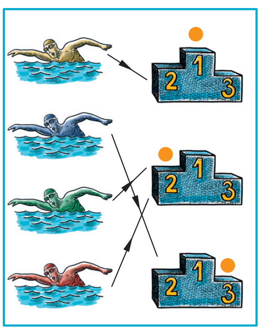
20.09.2002
(data)

(podpis wystawcy)

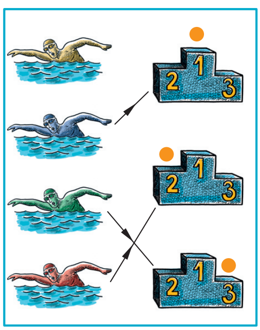
MEN-II/180

5. Które przyporządkowanie jest funkcją? Uzasadnij odpowiedź.

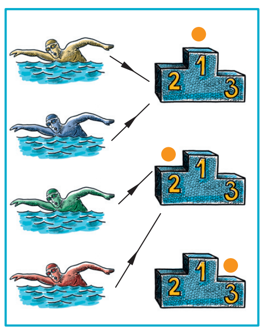
I.



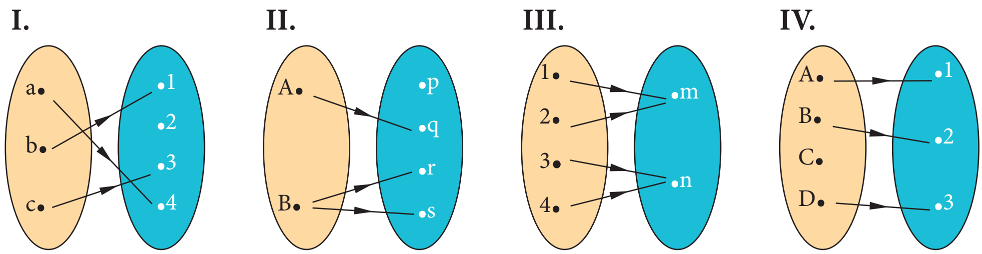
II.



III.



6. Które przyporządkowanie jest funkcją? Uzasadnij odpowiedź.



→ Jeżeli przyporządkowanie jest funkcją, to podaj jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i zbiór wartości.

→ Czy przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji są takie same?

7. Która tabelka wyznacza przyporządkowanie będące funkcją? Uzasadnij swoją odpowiedź.

I.

liczba	2	3	4	5	6	7	8
dzielniki liczby różne od 1	2	3	2, 4	5	2, 3, 6	7	2, 4, 8

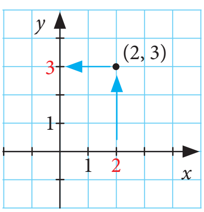
II.

liczba	1	2	3	4	5	6	7	8
reszta z dzielenia liczby przez 4	1	2	3	0	1	2	3	0

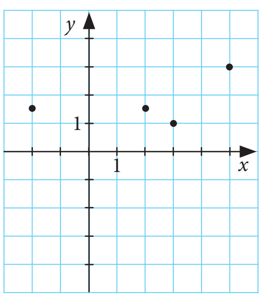
→ Jeżeli przyporządkowanie jest funkcją, to podaj dziedzinę i zbiór wartości.

→ Wskaż argumenty, którym przyporządkowana jest ta sama wartość.

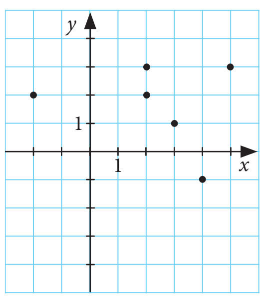
8. Czy przyporządkowanie określone na wykresie jest funkcją?



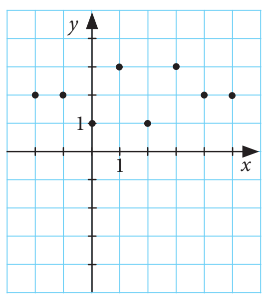
a)



b)



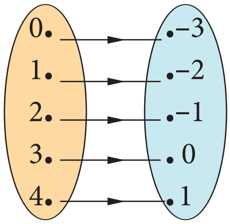
c)



→ Zaproponuj sposób sprawdzenia, czy wykres przedstawia funkcję.

9. Dana jest funkcja.

a)



b)

x	1	2	3	4
y	0	1	0	1

c)

Każdej liczbie naturalnej jednocyfrowej przyporządkowana jest reszta z dzielenia przez 3.

- ➜ Co jest dziedziną tej funkcji? Co zbiorem wartości?
- ➜ Jaką wartość przyjmuje funkcja dla argumentu 4?
- ➜ Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 1?
- ➜ Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość najmniejszą?
- ➜ Narysuj wykres tej funkcji.

Przy opisie funkcji wzorem stosuje się różne formy zapisu.
Przykład:
Funkcję, która każdej liczbie przyporządkowuje liczbę dwa razy większą, można opisać następująco:
– przez działanie (algorytm) f: $x \longrightarrow 2x$
– wzorem $f(x) = 2x$
– równaniem $y = 2x$.

10. Funkcja f jest opisana tabelką.

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	–2	–1	0	1	2	3

- ➜ Opisz słowami to przyporządkowanie.
- ➜ Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.
- ➜ Używając liter x i y, zapisz równanie opisujące funkcję f.
- ➜ Narysuj wykres funkcji f.

Jeśli funkcja jest opisana równaniem, to jej wykresem jest zbiór tych punktów (x, y), które spełniają to równanie.

11. Narysuj wykres funkcji opisanej tabelką.

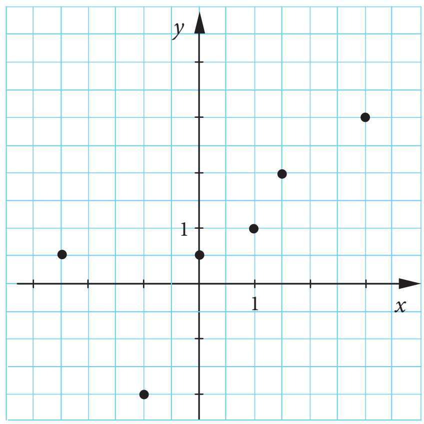
x	–2	–1	0	2
y	–4	–2	0	4

12. Narysuj wykres funkcji, która liczbom całkowitym ujemnym przyporządkowuje liczbę -1, liczbie 0 przyporządkowuje liczbę 0, a liczbom całkowitym dodatnim przyporządkowuje liczbę 1. Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

13. Narysuj wykres funkcji, która każdej liczbie naturalnej parzystej n, nie większej od 8, przyporządkowuje liczbę $\frac{1}{2}n + 1$.

14. Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, jeśli jej argumentami są liczby: $-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.

15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



- Odczytaj z wykresu $f(0)$ i $f(1{,}5)$.
- Dla jakiego argumentu funkcja ma wartość $\frac{1}{2}$?
- Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji?
- Wypisz wszystkie argumenty funkcji.
- Przedstaw funkcję za pomocą tabelki.

16. Funkcje f, g i h są określone następująco:

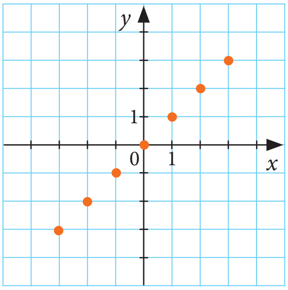
f: każdej liczbie naturalnej jest przyporządkowana liczba o 2 większa.
g: każdej liczbie całkowitej jest przyporządkowana liczba o 2 większa.
h: każdej liczbie rzeczywistej jest przyporządkowana liczba o 2 większa.

- Dla każdej z tych funkcji podajcie jej wzór.
- Dla każdej z tych funkcji podajcie dziedzinę i zbiór wartości.
- Narysujcie wykresy tych funkcji.
- Czym różnią się otrzymane wykresy?

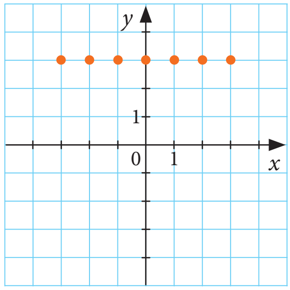
65

17. Odczytaj z wykresu dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

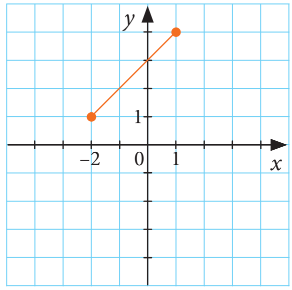
a)



b)



c)



18. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb naturalnych większych od 20 i mniejszych od 31. Każdej liczbie z dziedziny przyporządkowana jest suma jej cyfr.

a) Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.

b) Wyznacz $f(21)$, $f(25)$ i $f(30)$.

c) Dla jakiego argumentu wartość funkcji f jest równa 6?

d) Wyznacz argumenty, dla których funkcja f ma tę samą wartość.

19. Dziedziną funkcji $y = 5 - 2x$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

→ Określ przeciwdziedzinę tej funkcji.

→ Oblicz wartość funkcji dla argumentów: -3, 0 i $2\frac{1}{2}$.

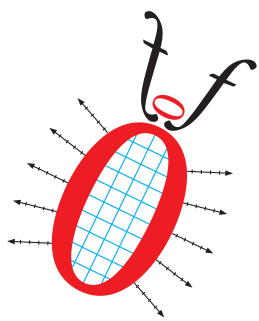
→ Oblicz, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 1, a dla jakiego wartość 100.

20. Dziedziną funkcji $y = 3x + 5$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Sprawdź, czy punkt o podanych współrzędnych należy do wykresu tej funkcji.

a) $(0, 5)$ **b)** $(-1, 3)$ **c)** $(3, 14)$ **d)** $(-55, -155)$

21. Wskaż liczby, które nie mogą być argumentami funkcji.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}$ **c)** $y = \frac{2}{x+5}$

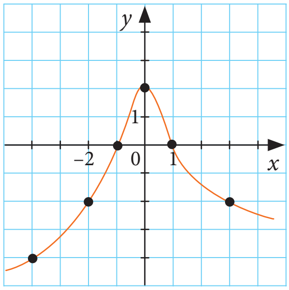


22. Wskaż liczby, które nie mogą być wartościami funkcji.

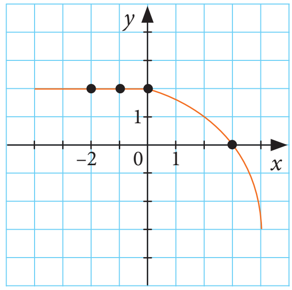
a) $y = x^2$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$

23. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji.

a)



b)

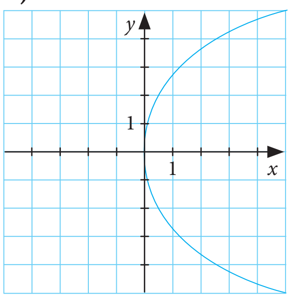


→ Odczytaj z wykresu wartości funkcji dla argumentów: −2, 0, 3.

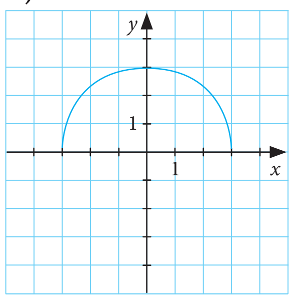
→ Dla jakich argumentów funkcja ma wartość 0?

24. Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji?

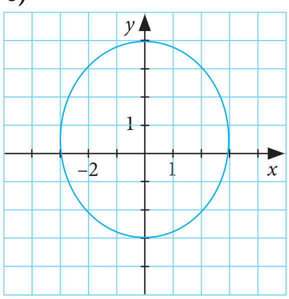
a)



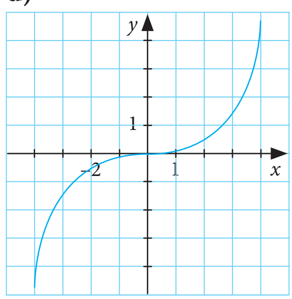
b)



c)



d)



25. Narysuj wykres funkcji spełniającej następujące warunki:

I. Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb.

II. Zbiorem wartości funkcji jest zbiór wszystkich liczb mniejszych lub równych 4.

III. Dla argumentu −3 funkcja przyjmuje wartość 2, dla argumentu 0 wartość 0, a dla argumentu 2 wartość −2.

IV. Największą wartość funkcja osiąga dla argumentu 5.

Narysuj wykres funkcji, która każdej liczbie przyporządkowuje najbliższą, większą od niej, liczbę całkowitą.

Sprawdź sam siebie

A. Między podanymi zbiorami ustal przyporządkowanie będące funkcją.

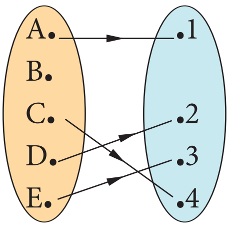
a) Grupy krwi, ludzie.

b) Objętości, bryły.

c) Daty urodzenia, ludzie.

B. Które przyporządkowanie jest funkcją? Uzasadnij odpowiedź.

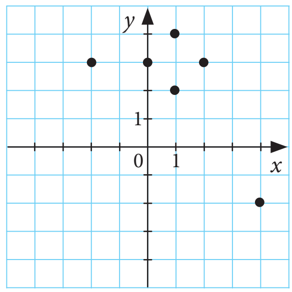
I.



II.

x	–2	–1	0	1	2
y	0	0	0	0	1

III.



C. Funkcja jest przedstawiona w tabeli.

x	–3	–1	0	0,5	2	3
y	2	4	1,5	–1	–4	0

a) Wskaż największą i najmniejszą wartość funkcji.

b) Odczytaj wartości funkcji dla argumentów 0 i –1.

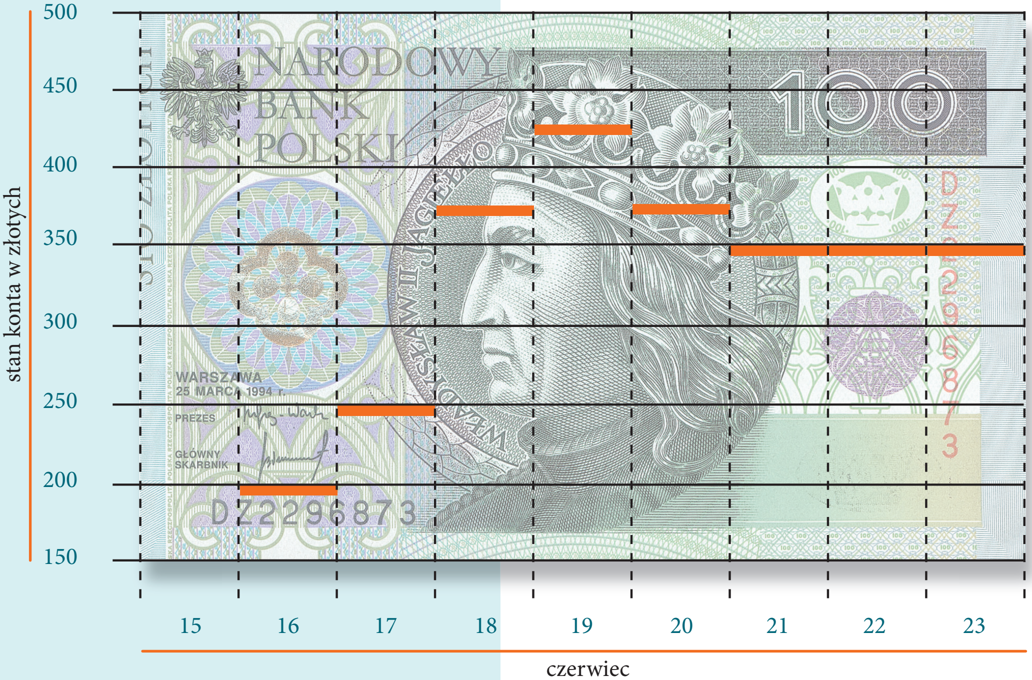
c) Odczytaj, dla jakiego argumentu wartość funkcji jest równa 2.

d) Narysuj wykres tej funkcji.

D. Narysuj wykres funkcji $y = -x^2 + 4$, której dziedzinę stanowią liczby: $-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1$.

Jakie to funkcje?

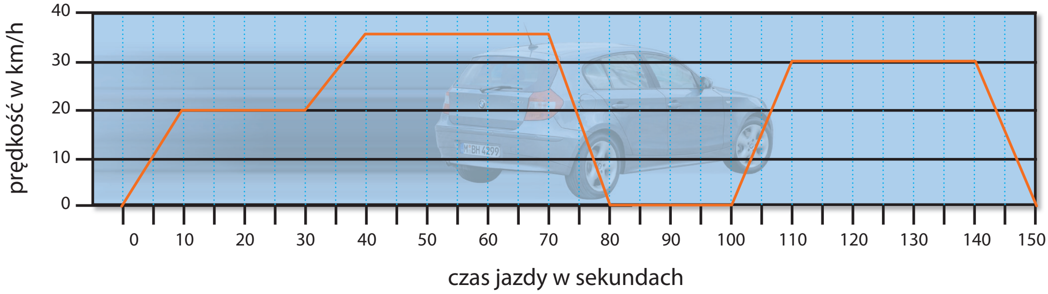
Oto wykres stanu konta bankowego Stanisława Nowaka w okresie od 16 do 23 czerwca.



➜ Kiedy stan konta pana Nowaka:
- rósł
- malał
- był stały?

➜ Kiedy stan konta spadnie poniżej 0 zł, jeżeli od poniedziałku 24 czerwca pan Nowak będzie pobierał z konta 30 złotych dziennie w dni powszednie, w soboty i niedziele – po 70 złotych, a na konto nie będzie żadnych wpływów?

1. Na wykresie przedstawiono prędkość samochodu między skrzyżowaniami, podczas jazdy po mieście, w zależności od czasu. Opowiedz, jak przebiegała ta jazda. Pomocne mogą być poniższe pytania.



- Jaka była maksymalna prędkość samochodu?
- Po jakim czasie samochód osiągnął prędkość maksymalną?
- Jak długo jechał z prędkością maksymalną?
- Kiedy samochód się zatrzymał? Jak długo stał?
- Kiedy prędkość samochodu rosła, kiedy malała, a kiedy była stała?
- Jaką w przybliżeniu drogę przejechał ten samochód w czasie 150 sekund?

2. Które z podanych wielkości rosną, które maleją, a które są stałe?

I. Ilość zupy na twoim talerzu w czasie obiadu.

II. Wskazania licznika kilometrów w czasie jazdy samochodu.

III. Stan licznika kilometrów podczas postoju.

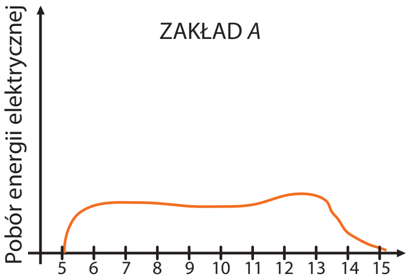
IV. Ilość paliwa w baku podczas jazdy.

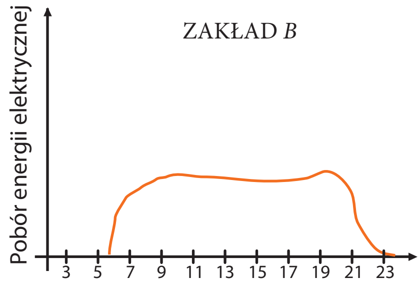
V. Prędkość piłki rzuconej do góry.

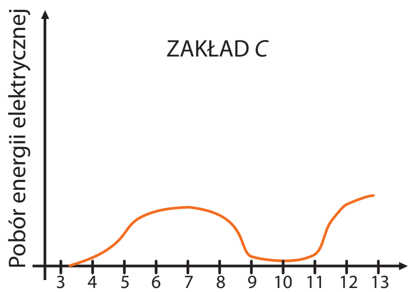
VI. Ilość wody w wannie podczas napełniania.

- Do każdego przykładu naszkicuj wykres funkcji, która może odpowiadać opisanej sytuacji.

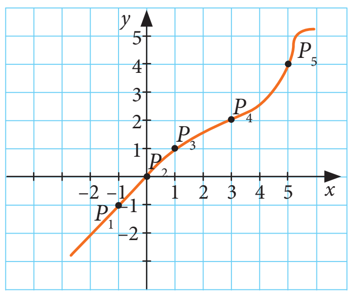
3. Wykresy przedstawiają, jak zmieniał się pobór energii elektrycznej wraz z upływem czasu. Opisz, w jakich godzinach pobór energii rósł, w jakich malał, a w jakich się nie zmieniał.







4. Na wykresie wyróżniono kilka punktów: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.



a) Odczytaj po kolei i zapisz pierwsze współrzędne zaznaczonych punktów. Jak zmieniają się te współrzędne?

b) Odczytaj po kolei drugie współrzędne tych punktów. Jak zmieniają się te współrzędne?

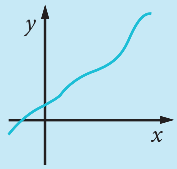
5. Naszkicujcie wykresy podanych funkcji.

I. Każdej liczbie przyporządkowuję liczbę do niej przeciwną.

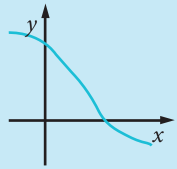
II. Każdej liczbie przyporządkowuję liczbę o 5 mniejszą.

→ Dla której z tych funkcji wraz ze wzrostem argumentów jej wartości rosną, a dla której maleją?

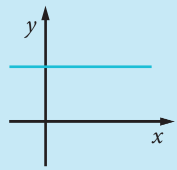
To jest wykres pewnej **funkcji rosnącej**. Coraz większym argumentom odpowiadają coraz większe wartości funkcji.



To jest wykres pewnej **funkcji malejącej**. Coraz większym argumentom odpowiadają coraz mniejsze wartości funkcji.

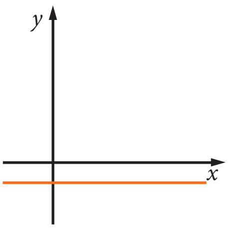


To jest wykres pewnej **funkcji stałej**. Wszystkim argumentom odpowiada jedna wartość.

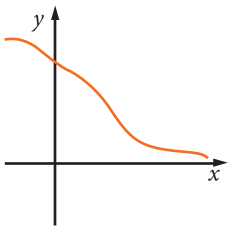


6. Zapisz, jak zmieniają się wartości funkcji, gdy rosną argumenty.

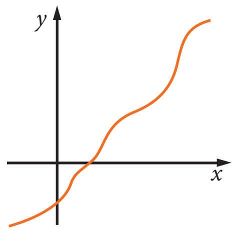
a)



b)



c)



→ Określ, czy funkcja jest rosnąca, malejąca, czy stała.

7. Narysuj wykres funkcji, która jest określona dla liczb

a) większych od 0 ($x > 0$) i jest malejąca.

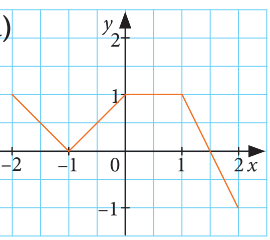
b) większych od −2 ($x > -2$) i jest rosnąca.

c) większych od −2 i mniejszych od 3 ($-2 < x < 3$) i jest rosnąca.

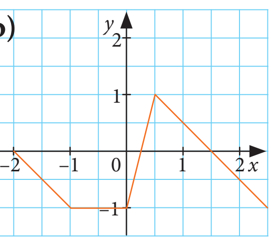
8. W jakim zbiorze argumentów wartości funkcji przedstawionej na wykresie maleją, w jakim rosną, a w jakim są stałe?

W zad. 8 podane są przykłady funkcji, które nie są ani rosnące, ani malejące, ani stałe w całej dziedzinie. Są natomiast w pewnych przedziałach dziedziny albo rosnące, albo malejące, albo stałe.

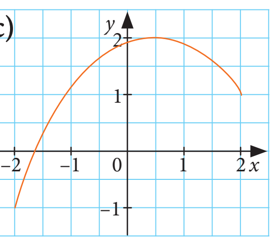
a)



b)



c)



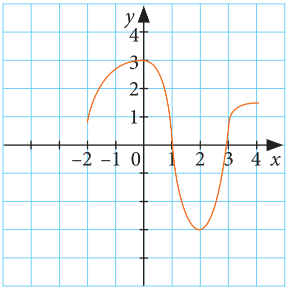
9. Narysuj wykres funkcji, która

a) w zbiorze argumentów mniejszych od −2 ($x < -2$) jest malejąca, a w zbiorze argumentów większych lub równych −2 ($x \geqslant -2$) jest stała.

67

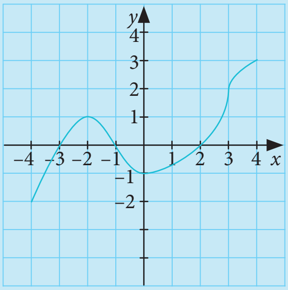
b) w zbiorze argumentów większych od 3 ($x > 3$) jest stała, a mniejszych lub równych 3 ($x \leqslant 3$) jest rosnąca.

10. Dla jakich argumentów x wartości funkcji podanej na rysunku są równe 0? Gdzie na wykresie leżą punkty o takich współrzędnych? Zapisz ich współrzędne.



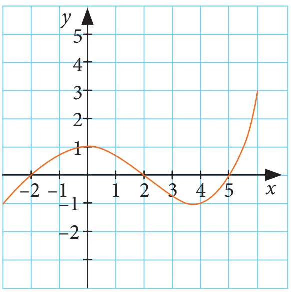
Miejscem zerowym funkcji nazywamy tę wartość argumentu, dla której wartość funkcji jest równa 0.

Przykład:
Wykres funkcji przecina oś x w punktach $(-3, 0)$, $(-1, 0)$ i $(2, 0)$.
Miejscami zerowymi tej funkcji są:
$x = -3$, $x = -1$, $x = 2$.

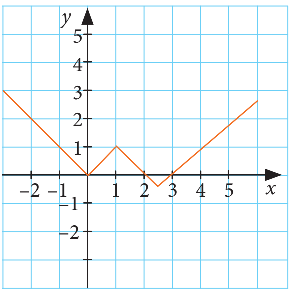


11. Ile miejsc zerowych ma każda z funkcji przedstawionych na wykresie? Odczytajcie miejsca zerowe każdej z nich.

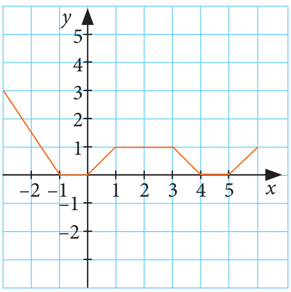
I.



II.



III.



12. Naszkicuj wykres funkcji

a) mającej jedno miejsce zerowe.

b) mającej dwa miejsca zerowe.

c) mającej nieskończenie wiele miejsc zerowych.

d) niemającej miejsc zerowych.

13. Kiedy funkcja f określona wzorem $f(x) = -4x + 20$ osiąga wartość 0?

14. Naszkicuj wykres funkcji mającej dwa miejsca zerowe -1 i 1.

15. Narysuj wykres funkcji która ma dwa miejsca zerowe -3 i 1 oraz rośnie dla $x < -1$ i maleje dla $x > -1$.

16. Każdego dnia turysta przemierza 30 kilometrów. Do 27 lipca przebył 210 kilometrów. Ile dni jest już w podróży? Kiedy wyruszył? Zilustruj za pomocą wykresu jego wędrówkę. Czy wszystkie wykresy opisujące wędrówkę są w twojej klasie takie same?

68

Znajdź miejsca zerowe funkcji.

$y = x - 1$

$y = (x - 1)(x - 2)$

$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

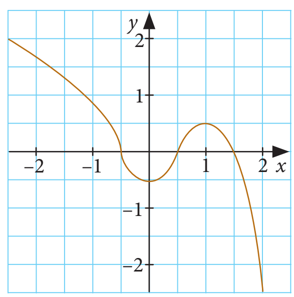
itd.

Zastanów się, ile miejsc zerowych mają kolejne funkcje z tej serii.

Sprawdź sam siebie

A. Zapisz wzór funkcji opisującej pole kwadratu w zależności od długości boku. Czy funkcja ta jest rosnąca, malejąca, czy stała?

B. Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji na rysunku obok rosną, a dla jakich maleją.



C. Z wykresu obok odczytaj miejsca zerowe funkcji.

D. Narysuj wykres funkcji, która ma dwa miejsca zerowe 2 i -3, rośnie dla $x < 0$ i maleje dla $x > 0$.

Jak szybko napełni się akwarium?

Do akwarium woda wlewa się jest jednolitym strumieniem.
W ciągu jednej minuty przybywa 6 litrów wody.

Przerysuj i uzupełnij tabelkę ilustrującą ilość wody w akwarium po kolejnych minutach.

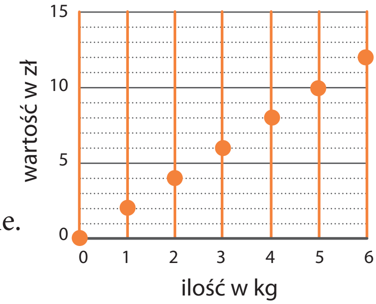
x – czas wlewania wody (w minutach)	0	1	2	3	4	5
y – ilość wody w akwarium (w litrach)	0	?	?	?	?	?

- ➜ Wykorzystując dane z tabelki, narysuj w układzie współrzędnych wykres ilustrujący zmianę ilości wody w akwarium w kolejnych minutach.
- ➜ Oszacuj, korzystając z wykresu, po jakim czasie w akwarium będzie 50 litrów wody.
- ➜ Sporządź tabelkę i na jej podstawie narysuj wykres ilustrujący ilość wody znajdującej się w akwarium w kolejnych minutach, jeżeli w ciągu minuty wlewałyby się 3 litry wody.
- ➜ Sporządź tabelkę i wykres ilustrujący ilość wody znajdującej się w akwarium, gdyby wlewała się ona ciągle z prędkością 12 litrów na minutę.
- ➜ Przyjrzyj się otrzymanym wykresom. Jakie dostrzegasz ich wspólne cechy, a jakie różnice?
- ➜ W każdym przypadku opisz wzorami zależność pomiędzy czasem wlewania wody a ilością wody w akwarium.
- ➜ Porównaj zapisane wzory. Co zauważasz?

1. Wykres ilustruje zależność pomiędzy ilościami zakupionych winogron a ich kosztem.

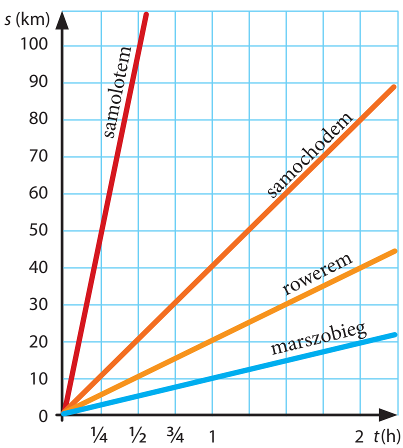
- Przerysuj ten wykres do zeszytu.
- Jaka była cena 1 kg winogron?
- Jaki jest koszt 2 kg, 4 kg, 5 kg winogron?
- Ile trzeba zapłacić za 0,5 kg, 2,5 kg, 3,5 kg winogron? Zaznacz te wartości na wykresie.
- A ile kosztuje 0,25 kg, 1,25 kg, 2,25 kg winogron? Zaznacz te wartości na wykresie.
- Zapisz wzorem przedstawioną na wykresie zależność, oznaczając literą x ilość kupionych winogron, a literą y – ich wartość.
- Czy przyporządkowanie, w którym zakupionej ilości danego towaru odpowiada jego wartość przy ustalonej cenie, jest funkcją?

Zależność wartości od ilości



Dwie wielkości nazywamy **wielkościami proporcjonalnymi**, jeśli wraz ze wzrostem jednej druga wzrasta tyle samo razy. Iloraz wielkości proporcjonalnych jest stały i nazywa się współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli x i y są wielkościami proporcjonalnymi, to symbolicznie możemy zapisać: $y = ax, \quad a = \frac{y}{x}, \quad a \neq 0$.

2. Wykresy i tabele przedstawiają, w jakiej odległości od miejsca rozpoczęcia podróży znajdowali się poszczególni turyści w zależności od czasu podróży.



- Przerysuj do zeszytu tabele i uzupełnij je.
- Dopasuj do każdego z wykresów tabelę.

t	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
s	5	10	15	20
$\frac{s}{t}$	?	?	?	?

t	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
s	100	200	300	400
$\frac{s}{t}$	?	?	?	?

t	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
s	10	20	30	40
$\frac{s}{t}$	?	?	?	?

t	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
s	20	40	60	80
$\frac{s}{t}$	?	?	?	?

- Jaką drogę przebył każdy z podróżnych w czasie $\frac{1}{2}$ h, 1 h, $1\frac{1}{2}$ h, 2 h?
- Z jaką prędkością poruszał się każdy podróżny?
- Czy każde z tych czterech przyporządkowań jest funkcją? Jeśli tak, określ dziedzinę i zbiór wartości każdej z funkcji.

3. Niech x oznacza bok kwadratu, y jego obwód.

- Oblicz obwód kwadratu dla boku długości: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm.
- Zależność między długością boku kwadratu a jego obwodem można zapisać w postaci $y = ax$, $a > 0$. Ile wynosi współczynnik a?
- O ile wzrastają wartości y, jeżeli x wzrasta o 1?
- Czy przyporządkowanie, w którym liczbie będącej długością boku kwadratu przypisujemy jego obwód, jest funkcją? Jeśli tak, określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

!

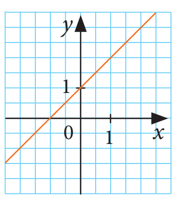
Proporcjonalnością prostą nazywamy funkcję postaci $y = ax$, gdzie a jest ustaloną liczbą różną od 0.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**. Współczynnik proporcjonalności określa, o ile wzrosną lub zmaleją wartości funkcji, jeżeli argumenty wzrosną o 1.

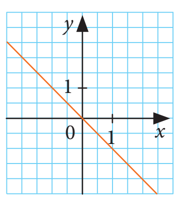
Dziedziną funkcji $y = ax$ jest zbiór liczb rzeczywistych. **Wykresem proporcjonalności** prostej jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych.

4. Na rysunkach przedstawiono wykresy ośmiu funkcji. Które z tych funkcji są proporcjonalnościami prostymi?

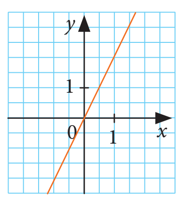
I.



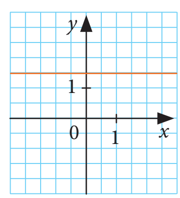
II.



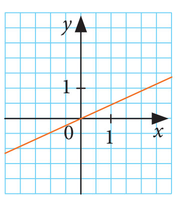
III.



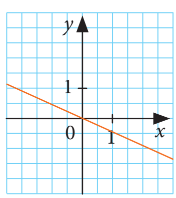
IV.



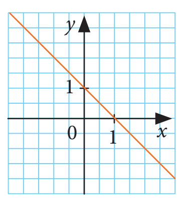
V.



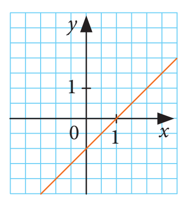
VI.



VII.



VIII.



5. Sporządź wykres funkcji $y = ax$ dla x należących do zbioru liczb rzeczywistych, jeżeli

I. $a = \frac{1}{2}$. **II.** $a = 1$. **III.** $a = 2$. **IV.** $a = 3$.

→ Jak położone są wykresy tych funkcji w układzie współrzędnych?

6. Sporządź wykres funkcji $y = ax$ dla x należących do zbioru liczb rzeczywistych, jeżeli

I. $a = -\frac{1}{2}$. **II.** $a = -1$. **III.** $a = -2$. **IV.** $a = -3$.

→ Jak położone są wykresy tych funkcji w układzie współrzędnych?

7. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres proporcjonalności prostej

a) $y = 3x$? **b)** $y = -3x$? **c)** $y = 1{,}8x$?

d) $y = -\frac{3}{5}x$? **e)** $y = \frac{1}{3}x$? **f)** $y = -1\frac{1}{10}x$?

8. Przedstaw w układzie współrzędnych i znajdź wzór proporcjonalności prostej, jeżeli jej wykres przechodzi przez punkt

a) $A = (3, 6)$. **b)** $B = (-2, -1)$. **c)** $C = (-5, 5)$. **d)** $D = (\frac{1}{2}, -2)$.

e) $E = (2, \frac{1}{2})$. **f)** $F = (3, -1)$. **g)** $G = (-3, -3)$. **h)** $H = (-2, 8)$.

9. Który z punktów należy do wykresu proporcjonalności prostej $y = -2x$?

$A = (-1, 2)$, $B = (5, -7)$, $C = (-2, 1)$, $D = (-4, -8)$.

10. Narysujcie wykres funkcji $y = 2x$, gdy:

I. dziedziną jest zbiór liczb: $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

II. dziedziną jest zbiór liczb większych od -5 i mniejszych od 5.

III. dziedziną jest zbiór liczb naturalnych.

IV. dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.

V. dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

VI. dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

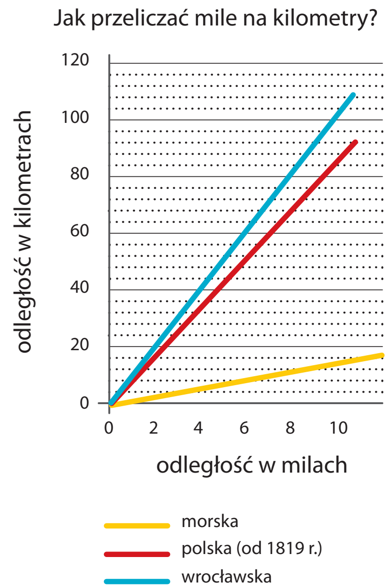
→ Określcie zbiór wartości każdej z funkcji.

→ Co możecie powiedzieć o wykresach funkcji opisanej tym samym wzorem, a określonej na różnych dziedzinach?

RÓŻNE RODZAJE MIL

Mila to jednostka długości. Są różne rodzaje mil. Większość z nich nie jest już używana. Spotyka się jeszcze milę angielską i milę morską. Tabelka przedstawia przelicznik mil ma kilometry.

Mila	Długość w km
morska	1,852
angielska	1,609
admiralska	1,855
fińska	10,670
geograficzna	7,422
londyńska	1,524
niemiecka (saksońska)	7,500
norweska	11,299
polska (do 1819 r.)	7,146
polska (od 1819 r.)	8,534
pruska	7,532
rzymska	1,481
szwedzka	10,692
wrocławska	10,282



I. Przerysuj do zeszytu tabelkę i przepisz, zaokrąglając do jednego miejsca po przecinku, długość każdej mili wyrażonej w kilometrach.

II. Korzystając z wykresu, podaj w milach odległości podane w km.

III. Korzystając z wykresu, podaj w km odległości podane w milach.

IV. Zapisz wzorami zależność między odległością mierzoną milami angielskimi a tą samą odległością mierzoną w kilometrach.

V. Ile mil morskich, a ile lądowych polskich używanych od 1819 r. ma kilometr?

VI. Opisz wzorami zależności między odległością mierzoną kilometrami a tą samą odległością mierzoną milami angielskimi, morskimi.

VII. Czy zależność między odległością mierzoną milami angielskimi a tą samą odległością w kilometrach jest funkcją?

70

VIII. Czy zależność między odległością mierzoną w kilometrach a tą samą odległością mierzoną w milach angielskich jest funkcją?

Dana jest proporcjonalność prosta $y = 3x$. Jakie równanie ma prosta symetryczna do wykresu danej proporcjonalności

I. względem początku układu współrzędnych?

II. względem osi x?

III. względem osi y?

IV. względem dwusiecznej ćwiartki I i III?

Sformułuj ogólne wnioski.

Sprawdź sam siebie

A. Narysuj wykres proporcjonalności prostej.

a) $y = \frac{1}{4}x$ **b)** $y = 4x$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x$ **d)** $y = -4x$

B. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres podanej proporcjonalności prostej?

a) $y = -x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = \frac{1}{5}x$ **d)** $y = -7x$

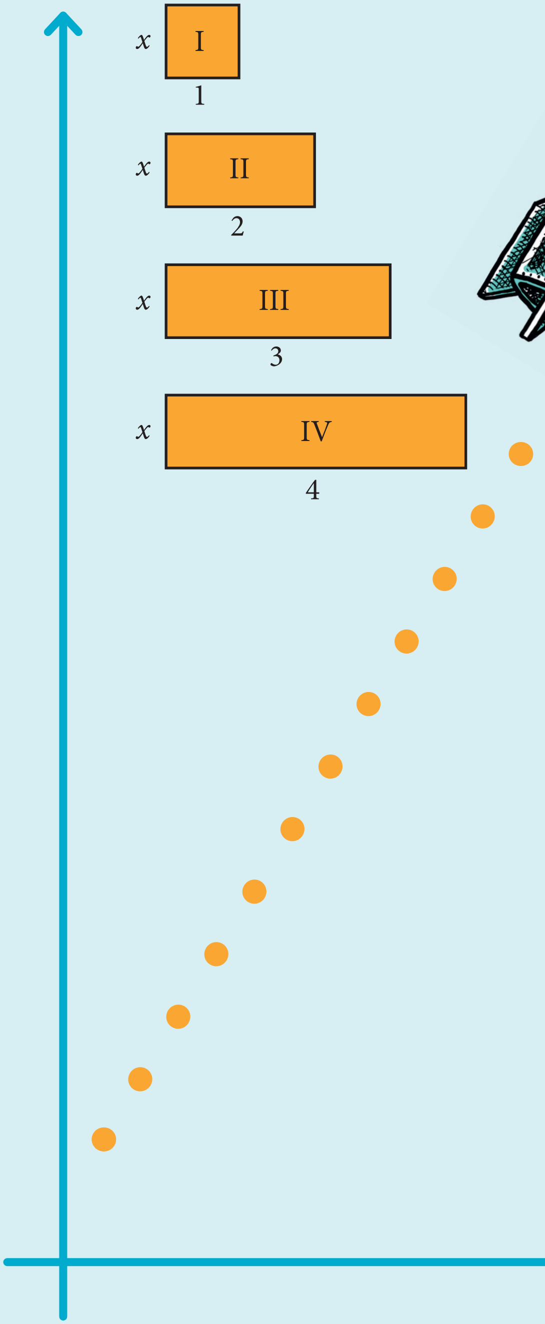
C. Zapisz wzór proporcjonalności prostej, której wykres przechodzi przez podany punkt.

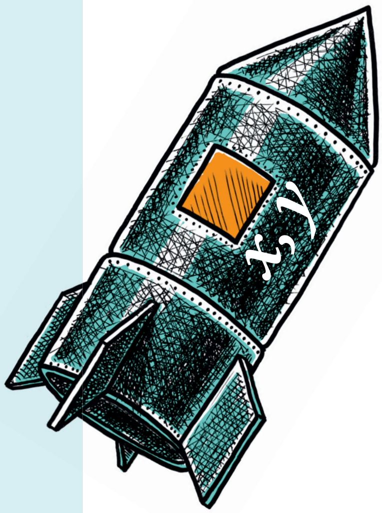
a) $A = (-5, 1)$ **b)** $B = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ **c)** $C = (12, 2)$ **d)** $D = \left(-\frac{1}{4}, 2\right)$

D. Który z podanych punktów należy do wykresu proporcjonalności prostej $y = 4x$?

$A = (1, 2)$ $B = (-5, 12)$ $C = (102, 408)$ $D = (-4, 16)$

Jaki obwód?





→ Opisz wzorem obwód y każdego z narysowanych prostokątów.

→ Podaj wzory na obwody kolejnych prostokątów z tej serii.

→ Przedstaw w tabelach, jak będą zmieniały się obwody tych prostokątów wraz ze zmianą długości boku x.

→ Przedstaw te przyporządkowania w prostokątnym układzie współrzędnych.

→ Jaką figurę wyznaczają punkty ilustrujące każde z przyporządkowań?

→ Czy opisane przyporządkowania są funkcjami?

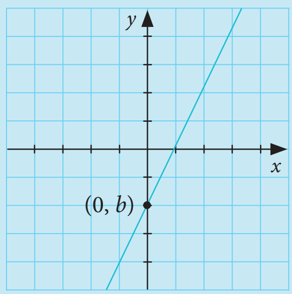
1. Narysujcie wykres funkcji $y = 3x$. W tym samym układzie współrzędnych narysujcie wykres funkcji, która dla każdego argumentu ma wartość:

I. o 1 większą, **II.** o 2,5 większą,
III. o 2 mniejszą, **IV.** o 3,5 mniejszą.

→ Co jest wykresem każdej z tych funkcji?
→ Jakie jest wzajemne położenie tych wykresów?
→ Zapiszcie wzór każdej z tych funkcji. Porównajcie te wzory.
→ Odczytajcie dla każdej z funkcji współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią y.
→ Jakie dostrzegacie zależności pomiędzy wzorami tych funkcji a ich wykresami?
→ Sprawdźcie, czy podobne zależności zachodzą, gdy te same polecenia wykonacie dla funkcji $y = -2x$ oraz $y = 0{,}5x$.

Funkcję liniową przedstawia wzór $\boldsymbol{y = ax + b}$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami, a dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

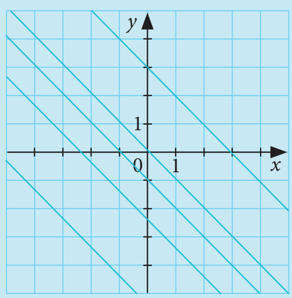
Funkcją liniową nazywamy funkcję, której wykresem jest prosta.



Wykres funkcji liniowej $\boldsymbol{y = ax + b}$ przechodzi przez punkt o współrzędnych $\boldsymbol{(0, b)}$.

Współczynnik $\boldsymbol{a}$ nazywa się **współczynnikiem kierunkowym**, a $\boldsymbol{b}$ – **wyrazem wolnym**.

Wykresy funkcji liniowych o jednakowym współczynniku kierunkowym $\boldsymbol{a}$ są prostymi równoległymi.



2. We wzorze funkcji liniowej wskaż współczynnik kierunkowy i wyraz wolny.

a) $y = 2x + 5$ **b)** $y = 6 + 3x$ **c)** $y = -x - 1$
d) $y = \frac{2}{5}x - 0{,}75$ **e)** $y = x$ **f)** $y = \frac{1}{2}$

3. Wykresy których funkcji są prostymi przecinającymi oś y w tym samym punkcie?

I. $y = 2x - 5$ **II.** $y = -5x + 5$ **III.** $y = -5 - x$
IV. $y = 5 - 3x$ **V.** $y = 5x - 3$ **VI.** $y = 2 - 5x$

4. Wykresy których funkcji są prostymi równoległymi?

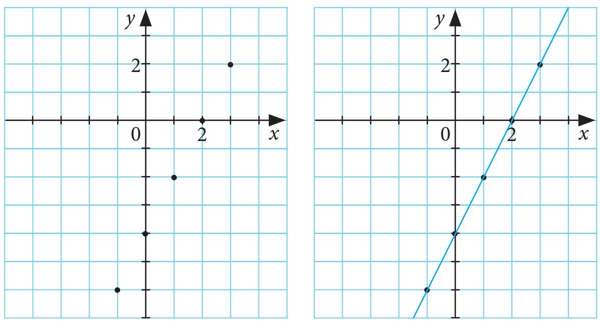
I. $y = 3x - 1$ **II.** $y = -3x + 5$ **III.** $y = 3 - 1x$
IV. $y = 5 + x$ **V.** $y = x - 3$ **VI.** $y = 1 - 3x$

5. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostą równoległą do wykresu funkcji $y = \frac{3}{5}x + 2$, przechodzącą przez punkt o współrzędnych $(0, -3)$.

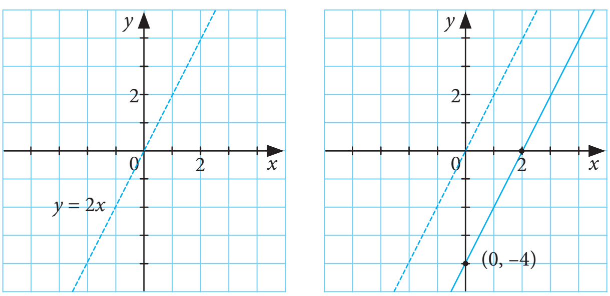
6. Porównajcie trzy sposoby rysowania wykresów funkcji liniowej $y = 2x - 4$.

Sposób I.

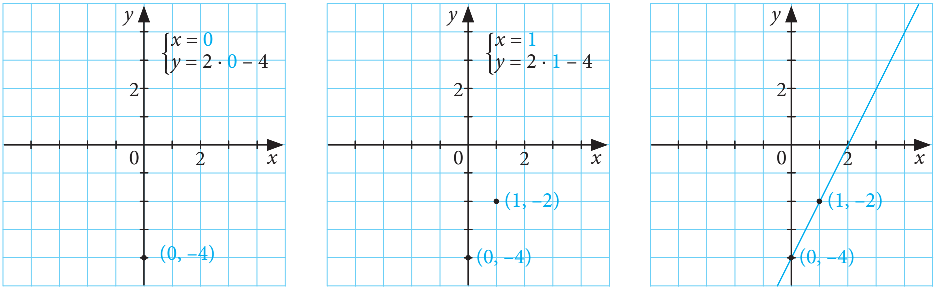
x	−1	0	1	2	3
$y = 2x - 4$	−6	−4	−2	0	2



Sposób II.



Sposób III.



- Na czym polega każdy z przedstawionych sposobów?
- Dla każdego ze sposobów zbudujcie schemat blokowy, opisujący sposób postępowania przy rysowaniu wykresu funkcji liniowej.
- Wykorzystując zbudowane schematy blokowe, narysujcie wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- Który sposób wydaje się Wam najlepszy?

7. Narysuj wykres funkcji liniowej opisanej podanym wzorem.

a) $y = -x + 4$ **b)** $y = 0{,}4x - 2$ **c)** $y = -2x - 6$

d) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **e)** $y = \frac{1}{2}x + 1$ **f)** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

g) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **h)** $y = 3x + \frac{1}{2}$ **i)** $y = -\,3x - \frac{1}{3}$

8. Punkt o współrzędnych (2, 7) należy do wykresu funkcji $y = 3x + 1$, ponieważ równość $7 = 3 \cdot 2 + 1$ jest prawdziwa. Punkt (3, 1) nie należy do wykresu tej funkcji, ponieważ równość $1 = 3 \cdot 3 + 1$ jest fałszywa. Sprawdź, które z podanych punktów należą do wykresu funkcji $y = 3x + 1$.

$A = (0, 1)$ $B = (3, 10)$ $C = (-3, -10)$

$D = (-17, -50)$ $E = (\frac{2}{3}, 3)$ $F = (3\frac{5}{6}, 12\frac{1}{2})$

9. Punkty o współrzędnych $(2, t)$ i $(k, 8)$ należą do wykresu funkcji $y = 4x - 2$. Wyznacz t i k.

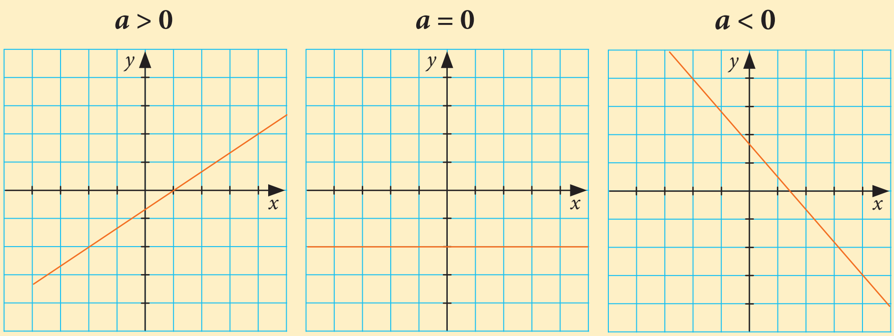
10. Punkt o współrzędnych (1, 1) należy do wykresu funkcji $y = ax - 4$ oraz do wykresu funkcji $y = -4x + b$. Wyznacz a i b.

71

11. Dane są funkcje liniowe $y = -3x + 6$, $y = 3$ oraz $y = 2x - 6$.

- Jakie są współczynniki kierunkowe a prostych będących wykresami tych funkcji?
- Sporządźcie tabelki przedstawiające te funkcje dla argumentów: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.
- Narysujcie wykresy tych funkcji. Opiszcie ich położenie w układzie współrzędnych.
- Dla każdej z funkcji określcie, jak zmieniają się wartości funkcji wraz ze wzrostem argumentów.
- Dla każdej z funkcji określcie, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy stała.
- Zbadajcie, jak od współczynnika a zależy to, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy stała.

Funkcja liniowa $y = ax + b$



Funkcja rosnąca **Funkcja stała** **Funkcja malejąca**

12. Która funkcja jest rosnąca, która – malejąca, a która – stała?

a) $y = 7x - 12$ **b)** $y = -1 + 100x$

c) $y = -0{,}01x + 28$ **d)** $y = -\frac{3}{5}x$

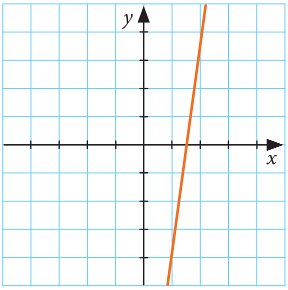
e) $y = 2\frac{5}{12}$ **f)** $y = 12 - x$

g) $y = \pi$ **h)** $y = -\pi x$

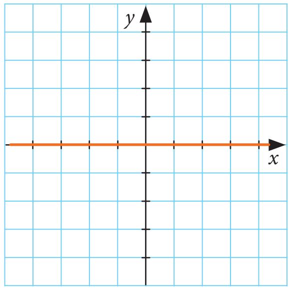
i) $y = \pi - x$ **j)** $y = (1 - \pi)x$

13. Na podstawie wykresu funkcji liniowej określ, czy jest to funkcja rosnąca, malejąca, czy stała.

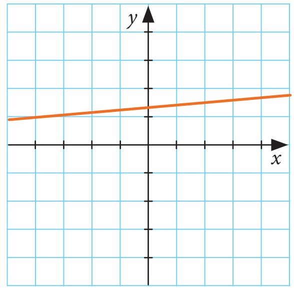
a)



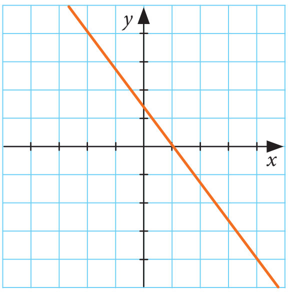
b)



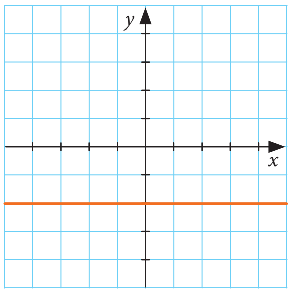
c)



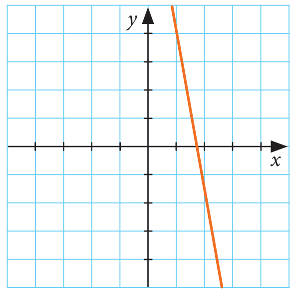
d)



e)

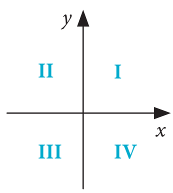


f)



14. Wykres funkcji liniowej przechodzi tylko przez wskazane ćwiartki układu współrzędnych. Określ, czy funkcja liniowa jest rosnąca, malejąca, czy stała.

a) I, II, IV **b)** I, II, III **c)** III, IV **d)** II, IV



15. Wykres funkcji liniowej $y = \frac{1}{4}x - 2$ jest prostą przechodzącą przez punkt o współrzędnych $(m, 0)$. Oblicz m. Narysuj wykres tej funkcji i zaznacz punkt $(m, 0)$.

72

16. Wyznaczcie miejsca zerowe funkcji

I. $y = 3x + 2$. **II.** $y = 7x + 5$. **III.** $y = -9x + 4$.

→ Co zauważacie?

→ Wyprowadźcie wzór na miejsce zerowe funkcji $y = ax + b$, gdy $a \neq 0$.

Dla funkcji liniowej $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ **miejsce zerowe** jest rozwiązaniem równania $ax + b = 0$ i wyraża się wzorem $x_0 = -\frac{b}{a}$.

17. Wyznacz miejsce zerowe funkcji, rozwiązując odpowiednie równanie.

Przykład: $y = 0{,}5x + 1$, $\quad 0 = 0{,}5x + 1$, $\quad x = -2$

a) $y = x - 10$ **b)** $y = 6 - 3x$ **c)** $y = -5x - 9$

→ Dla każdej funkcji podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią y.

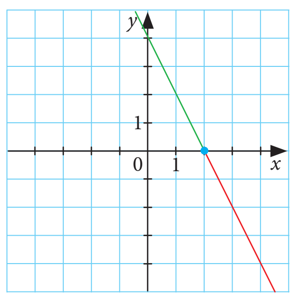
18. Wyznacz miejsce zerowe funkcji, korzystając z odpowiedniego wzoru.

Przykład: $y = 0{,}5x + 1$, $\quad x_0 = -\frac{1}{0{,}5} = -2$

a) $y = 2\frac{2}{3}x + 8$ **b)** $y = 1\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x$ **c)** $y = 3{,}6x - 1{,}2$

19. Podaj wzór funkcji liniowej, której miejsce zerowe jest równe -2, a wykres jest prostą przechodzącą przez punkt $(0, 4)$.

20. Na wykresie funkcji $y = -2x + 4$ kolorem czerwonym zaznaczono punkty odpowiadające wartościom ujemnym, kolorem niebieskim wartościom równym 0, a kolorem zielonym wartościom dodatnim.



→ Przerysujcie ten wykres do zeszytu.

→ Odczytajcie z wykresu argument odpowiadający wartości 0. Jak nazywa się ten argument?

→ Jak na podstawie wykresu odczytać miejsce zerowe funkcji?

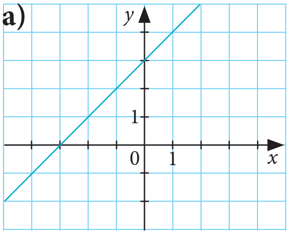
→ Zaznaczcie na osi x kolorem zielonym argumenty odpowiadające zielonym punktom wykresu.

→ Kolorem czerwonym zaznaczcie argumenty odpowiadające czerwonym punktom wykresu.

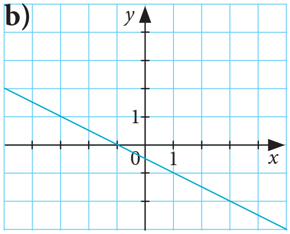
→ Przedstawcie za pomocą nierówności, dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich – ujemne.

21. Na podstawie wykresu funkcji liniowej podaj jej miejsce zerowe oraz określ, dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich – ujemne.

a)



b)



22. Justyna chciała wyznaczyć argumenty, dla których funkcja $y = 9x - 27$ przyjmuje wartości dodatnie. Stwierdziła, że nie narysuje wykresu funkcji, tylko rozwiąże nierówność $9x - 27 > 0$.

→ Wyjaśnij, na czym polega sposób Justyny.

→ Rozwiąż tę nierówność.

→ Dla jakich argumentów funkcja $y = 9x - 27$ przyjmuje wartości ujemne?

23. Zbadaj, nie rysując wykresu funkcji, dla jakich argumentów podana funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich dodatnie.

a) $y = -7x + 35$ **b)** $y = \frac{9}{16}x - \frac{3}{4}$ **c)** $y = -2001 - \frac{1}{3}x$

24. Narysuj wykres podanej funkcji liniowej i określ jej własności.

a) $y = -3x - 9$ **b)** $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ **c)** $y = 2 - 5x$

Przykład: $y = 0{,}5x + 1$

1) Dziedzina: zbiór liczb rzeczywistych.

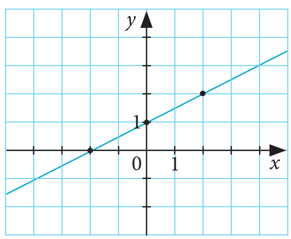
2) Zbiór wartości: zbiór liczb rzeczywistych.

3) Miejsce zerowe: -2.

4) Funkcja jest rosnąca.

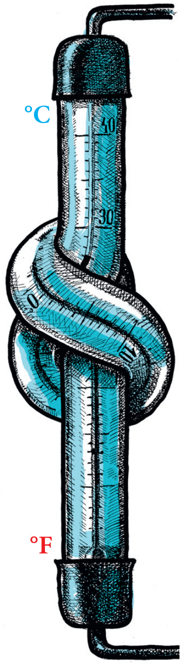
5) Dla argumentów mniejszych od -2 funkcja przyjmuje wartości ujemne.

6) Dla argumentów większych od -2 funkcja przyjmuje wartości dodatnie.



Podając własności funkcji, trzeba wskazać: jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe oraz określić, czy jest to funkcja rosnąca, malejąca, czy stała i dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich ujemne.

25. Napisz wzór funkcji liniowej, która przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów mniejszych od -1, a wartości ujemne dla argumentów większych od -1 oraz której wykres jest prostą przechodzącą przez punkt $(0, -4)$.



ILE STOPNI?

Aby przeliczyć temperaturę wyrażoną w stopniach Celsjusza na stopnie Fahrenheita, trzeba: pomnożyć liczbę stopni Celsjusza przez 9, następnie ten iloczyn podzielić przez 5 i do otrzymanego wyniku dodać 32. Odwrotnie, odejmując od liczby stopni Fahrenheita 32 i mnożąc różnicę przez 5, a potem dzieląc przez 9, otrzymamy liczbę stopni Celsjusza.

WEJŚCIE stopnie Celsjusza → $\cdot 9$ → $: 5$ → $+ 32$ → **WYJŚCIE stopnie Fahrenheita**

→ Narysuj maszynkę przeliczającą stopnie Fahrenheita na stopnie Celsjusza.

→ Narysuj wykres ilustrujący zamianę stopni Celsjusza na stopnie Fahrenheita.

I. Czy obie zależności opisują funkcje liniowe?

II. W jakiej temperaturze wyrażonej w stopniach Fahrenheita wrze woda?

III. W jakiej temperaturze wyrażonej w stopniach Fahrenheita woda zamarza?

IV. Czy powiedziałbyś, że w mieszkaniu jest ciepło, jeśli temperatura wynosi 60°F? Jaka to temperatura wyrażona w stopniach Celsjusza?

V. Czy temperatura ciała człowieka wynosząca 100°F oznacza chorobę? Jaka to temperatura wyrażona w stopniach Celsjusza?

Sprawdź sam siebie

A. Sprawdź, czy punkt $(-12, -43)$ należy do wykresu funkcji $y = 5x - 17$.

B. Narysuj wykres funkcji $y = -3x + 6$. Czy jest to funkcja rosnąca?

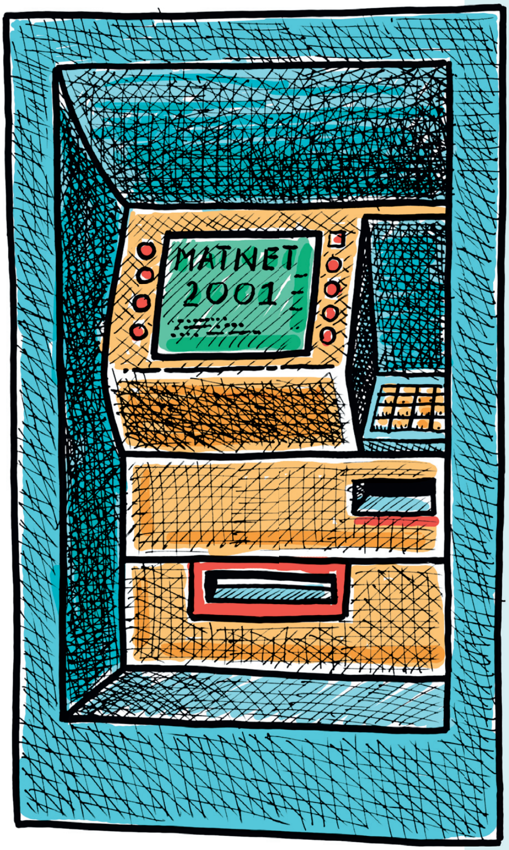
C. Oblicz miejsce zerowe podanej funkcji oraz oblicz, dla jakich argumentów wartości tej funkcji są dodatnie.

a) $y = -x - 1$ **b)** $y = 3$ **c)** $y = 2 + \frac{2}{5}x$

D. Napisz wzór funkcji, której wykres jest prostą przechodzącą przez punkt $(2\frac{2}{3}, 3)$ i równoległą do wykresu funkcji $y = 3x - 7$.

Ile banknotów?

Bankomat banku MATNET 2001 wypłaca pieniądze w banknotach 50 zł i 100 zł. Pani Maria wybiera z bankomatu kwotę 900 zł.



➜ Oznacz literą x liczbę banknotów pięćdziesięciozłotowych, a literą y – liczbę banknotów stuzłotowych. Zapisz zależność pomiędzy liczbami banknotów o nominałach 50 zł i 100 zł a wypłacaną kwotą.

➜ Bankomat wypłacił pani Marii żądaną kwotę, wydając 2 banknoty pięćdziesięciozłotowe, a pozostałą część kwoty banknotami stuzłotowymi. Ile banknotów stuzłotowych wypłacił bankomat?

➜ Podaj wszystkie możliwe sposoby wypłacenia przez bankomat tej kwoty. Zapisz to w tabeli.

1. Justyna i jej bracia bliźniacy mają łącznie 20 lat.

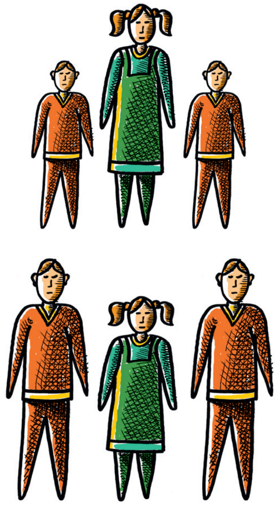
→ Oznaczcie wiek Justyny literą x, a wiek każdego z braci literą y.

→ Opiszcie równaniem sytuację przedstawioną w zadaniu.

→ Ile lat mieliby bracia Justyny, gdyby ona miała 12 lat?

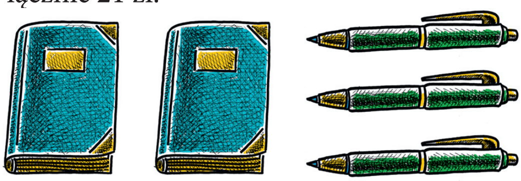
→ Ile lat miałaby Justyna, gdyby bliźniacy mieli po 7 lat?

→ Przyjmując, że wiek rodzeństwa wyraża się liczbami naturalnymi, podajcie wszystkie wartości x i y spełniające warunki zadania.

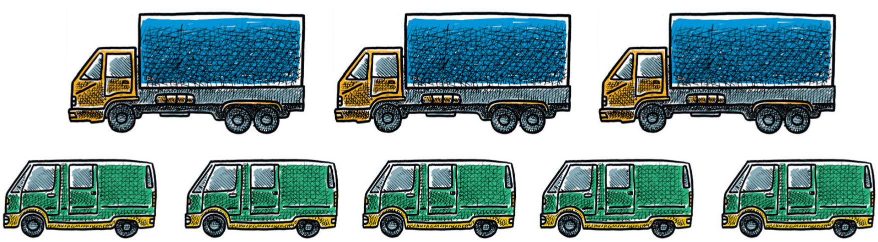


2. Przedstawioną sytuację opiszcie równaniem, oznaczając niewiadome przez x i y.

a) Za dwa jednakowe zeszyty i trzy jednakowe długopisy zapłacono łącznie 21 zł.



b) Towar o masie 50 ton załadowano do trzech jednakowych ciężarówek o większej ładowności i pięciu jednakowych ciężarówek o mniejszej ładowności.



c) Suma dwóch liczb jest równa -1.

d) Obwód równoległoboku wynosi 17 cm.

→ Co oznaczyliście przez x, a co przez y?

→ Podajcie przykłady par liczb spełniających warunki zadania.

3. Różnica dwóch liczb całkowitych jest równa 1.

→ Ile jest takich par liczb?

→ Oznacz pierwszą z nich literą x, a drugą literą y. Zapisz równanie opisujące zależność między tymi liczbami.

→ Oblicz x, jeżeli $y = 9$. Oblicz y, jeżeli $x = -2$.

4. Obwód trójkąta równoramiennego o podstawie a i ramieniu b jest równy 12.

→ Opisz tę sytuację równaniem z niewiadomymi a i b.

→ Sprawdź, czy liczby $a = 5$ i $b = 3{,}5$ mogą wyrażać długości boków tego trójkąta.

→ Sprawdź to samo dla liczb $a = 2$ i $b = 10$.

→ Oblicz b, jeżeli $a = 1{,}5$.

!

Równaniem stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy każde równanie, które można przedstawić w postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C są dowolnymi liczbami oraz $A^2 + B^2 > 0$.

Przykłady:

$3x - 5y + 12 = 0$ $\qquad$ $-3x = 5y$ $\qquad$ $0{,}4x + 18y = -7$

Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi jest **równaniem liniowym**. Równaniem liniowym jest każde równanie, którego wykresem jest prosta, np. $y = 5$, $x = 4$, $2y - x = 0$.

Para liczb spełnia równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, jeśli po podstawieniu tych liczb do równania w miejsce niewiadomych otrzymamy równość prawdziwą.

Przykłady:

Para liczb $x = 4$ i $y = 0$ spełnia równanie $3x - 5y = 12$, ponieważ $3 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 12$. Parę liczb $x = 4$ i $y = 0$ zapisujemy $(4, 0)$.

Rozwiązaniem równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą parę liczb spełniających to równanie.

Zbiorem rozwiązań równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi nazywamy zbiór wszystkich par liczb spełniających to równanie.

Równaniami równoważnymi nazywamy równania mające taki sam zbiór rozwiązań.

5. Spośród podanych równań wybierz równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi. Uzasadnij swój wybór.

I. $\frac{3}{4}x^2 - 5y - 2 = 0$ **II.** $\frac{3}{4}x - 5y - 2 = 0$

III. $\frac{3}{4} - 5y + 2 = 0$ **IV.** $\frac{3}{4}x^2 - 5y^2 - 2 = 0$

6. Sprawdź, która para liczb spełnia podane równanie.

a) $x - \frac{1}{2}y - 2 = 0$, $(10, 16)$, $(-1, -2)$, $(\frac{1}{2}, -3)$

b) $3x + 2y - 5 = 0$, $(-1, -1)$, $(-2, -2)$, $(100, -65)$

c) $1{,}5x - y + 6 = 0$, $(0, 6)$, $(-4, 0)$, $(2, 8)$

7. Podaj trzy przykłady równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, których rozwiązaniem jest para $(1, 5)$.

!

Równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi można przekształcać, korzystając z takich samych reguł jak przy przekształcaniu równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Aby otrzymać **równania równoważne**, można:

→ dowolną stronę równania przekształcić, stosując prawa działań,

→ dodać do obu stron równania tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,

→ odjąć od obu stron równania tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,

→ pomnożyć obie strony równania przez tę samą liczbę różną od 0,

→ podzielić obie strony równania przez tę samą liczbę różną od 0.

8. Z których reguł korzystano przy przekształcaniu równań?

a)
$$2x = y - 4$$
$$2x - y = y - y - 4$$
$$2x - y = -4$$
$$2x - y + 4 = -4 + 4$$
$$2x - y + 4 = 0$$

b)
$$\frac{1}{3}x - 4 - y = y - y$$
$$\frac{1}{3}x - 4 - y = 0$$
$$\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$$

c)
$$y = \frac{1}{3}x - 4$$
$$-\frac{1}{3}x + y = -4$$
$$-\frac{1}{3}x + y + 4 = 0$$

9. Przekształć podane równanie do postaci $Ax + By + C = 0$.

a) $x = y$ **b)** $7x = y + 5$ **c)** $y = 0{,}3x + 2$

d) $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y - 1$ **e)** $-0{,}8y - 3{,}2 = -2{,}4x$ **f)** $x = -1{,}7y + \frac{7}{10}y$

10. Przekształć podane równanie do postaci $y = ax + b$.

a) $x + y = 0$ **b)** $11x - y = 5$ **c)** $3x - 5y + 2 = 0$

d) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{21}y = \frac{5}{7}$ **e)** $-0{,}4y - 1{,}6 = -2{,}4x$ **f)** $2\frac{2}{5} - 1{,}4x = -1{,}7 + \frac{7}{10}y$

11. Porównajcie dwa sposoby wyznaczania par liczb spełniających równanie $2x - 4y + 5 = 0$.

$2x - 4y + 5 = 0 \quad | -5 + 4y$
$2x = -5 + 4y \quad | :2$
$x = -2{,}5 + 2y$
Dla $y = 1$
$x = -2{,}5 + 2 \cdot 1 = -0{,}5.$
Dla $y = 2$
$x = -2{,}5 + 2 \cdot 2 = 1{,}5.$
Dla $y = 3$
$x = -2{,}5 + 2 \cdot 3 = 3{,}5.$
Pary liczb: $(-0{,}5, 1)$, $(1{,}5, 2)$, $(3{,}5, 3)$ spełniają równanie $2x - 4y + 5 = 0$.

$2x - 4y + 5 = 0 \quad | -5 - 2x$
$-4y = -5 - 2x \quad | :(-4)$
$y = 1{,}25 + 0{,}5x$
Dla $x = -0{,}5$
$y = 1{,}25 + 0{,}5 \cdot (-0{,}5) = 1.$
Dla $x = 1{,}5$
$y = 1{,}25 + 0{,}5 \cdot 1{,}5 = 2$
Dla $x = 3{,}5$
$y = 1{,}25 + 0{,}5 \cdot 3{,}5 = 3.$
Pary liczb: $(-0{,}5, 1)$, $(1{,}5, 2)$, $(3{,}5, 3)$ spełniają równanie $2x - 4y + 5 = 0$.

→ Na czym polega różnica między tymi sposobami?

→ Postępując podobnie jak w przykładach, wyznaczcie pięć par liczb spełniających podane równanie.

a) $x - 5y - 4 = 0$ **b)** $-3x + y = 6$ **c)** $\frac{1}{2}x + 4 = 3y$

12. Trójkąt równoramienny o podstawie x i ramieniu y ma obwód 18.

→ Podajcie wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $x + 2y = 18$.

→ Czy wszystkie pary liczb naturalnych spełniających to równanie mogą być długościami podstawy i ramion trójkąta? Zapiszcie warunek, jaki musi być spełniony.

13. Kupiono czekolady po 2 zł za sztukę i batony po 1,50 zł za sztukę. Za zakupy zapłacono 35 zł. Na ile sposobów można było dokonać tych zakupów?

14. Znajdźcie parę liczb spełniających równanie $x + y - 5 = 0$.

→ Zaznaczcie w układzie współrzędnych punkt (x, y), gdzie x i y to wyznaczona para liczb.

→ Zaznaczcie w układzie współrzędnych jeszcze sześć innych punktów (x, y), których współrzędne spełniają to równanie.

→ Jak położone są te punkty?

→ Narysujcie w tym samym układzie współrzędnych wykres funkcji $y = -x + 5$.

→ Co zauważacie?

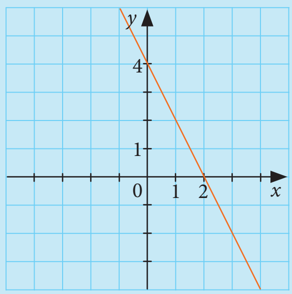
→ Porównajcie równania $x + y - 5 = 0$ i $y = -x + 5$.

→ Co zauważacie?

Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi można zilustrować w układzie współrzędnych.

Przykład:

Równanie $2x + y = 4$ można przedstawić w układzie współrzędnych jako prostą, do której należą punkty (x, y), gdzie $y = -2x + 4$.



Zbiorem rozwiązań równania $2x + y = 4$ jest zbiór wszystkich par liczb, które są współrzędnymi punktów należących do prostej $y = -2x + 4$.

Aby rozwiązać graficznie równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, rysujemy prostą, do której należą punkty spełniające to równanie.

15. Rozwiążcie graficznie równanie, przekształcając je najpierw do postaci $y = ax + b$.

a) $3x - y - 1 = 0$ **b)** $6x + y - 13 = 0$

Ze względu na niedokładności rysunków należy sprawdzać, czy odczytana para liczb spełnia równanie.

→ Odczytajcie z wykresu kilka par liczb należących do narysowanej prostej.

→ Czy odczytana para liczb spełnia równanie?

16. Rozwiąż graficznie równanie, przekształcając je najpierw do postaci $y = ax + b$.

a) $x - y = 2$ **b)** $3x - 6y = 12$

c) $4 + 2y = -6x$ **d)** $3{,}9x - 2{,}6 + 1{,}3y = 0$

e) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{5}{8} = 0$ **f)** $3\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3} = -1\frac{2}{3}y$

→ Podaj trzy pary liczb spełniających to równanie.

17. Suma jednej liczby i trzykrotności drugiej jest równa 12.

→ Przedstaw w układzie współrzędnych rozwiązanie tego zadania.

→ Wskaż trzy pary liczb spełniających warunki tego zadania.

18. Obwód trapezu równoramiennego o bokach y, x, x, x jest równy 12.

→ Zapisz zależność między obwodem a bokami tego trapezu za pomocą równania i przedstaw w układzie współrzędnych jego rozwiązanie. Pamiętaj, że długości x i y nie mogą być dowolne.

→ Co jest wykresem równania opisującego tę sytuację?

→ Wskaż trzy pary liczb spełniających warunki tego zadania.

19. Dane jest równanie $x - \frac{1}{2}y - 2 = 0$.

→ Znajdź rozwiązanie tego równania dla $x = 0$. Zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadający mu punkt.

→ Znajdź rozwiązanie tego równania dla $y = 0$. Zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadający mu punkt.

→ Narysuj prostą przechodzącą przez te punkty.

→ Co możesz powiedzieć o tej prostej?

→ Sporządź schemat blokowy, który przedstawia sposób rysowania prostej będącej wykresem równania $Ax + By + C = 0$.

!

Zbiorem rozwiązań równania $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$, $B \neq 0$) jest zbiór wszystkich par liczb, które są współrzędnymi punktów należących do prostej przechodzącej przez punkty $(0, \frac{-C}{B})$ oraz $(\frac{-C}{A}, 0)$.

20. Znajdź współrzędne punktów przecięcia z osią x i osią y prostej opisanej podanym równaniem, a następnie narysuj tę prostą.

a) $3x - y = -2$ **b)** $2y - 4x + 6 = 0$ **c)** $x + 2y = -4$

21. Doprowadź równanie do prostszej postaci i rozwiąż je graficznie.

a) $3(2x + 1) - 2y = -3(y + 1) + 5(x + 2) - 8$

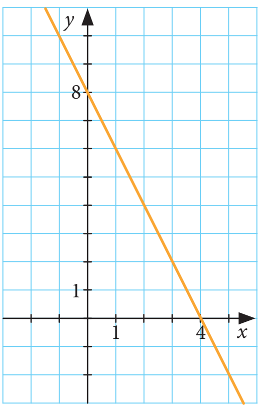
b) $(x - 2)(x + 2) - (x - 2)^2 = -y$

c) $(y + 1)^2 - x(4x + 2) = (y + 2x)(y - 2x) + 3x$

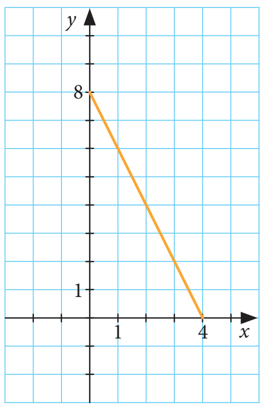
22. Pole trapezu o podstawach x i y i wysokości 4 jest równe 12. Opisz tę sytuację równaniem. Rozwiązanie przedstaw graficznie w układzie współrzędnych.

Zaproponuj sytuacje opisane równaniem, którego rozwiązanie graficzne przedstawiono na wykresach.

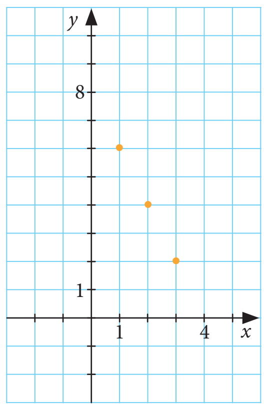
I.



II.



III.



Sprawdź sam siebie

A. Cztery kartony cukierków i trzy kartony ciastek ważą 50 kg. Ile może ważyć karton cukierków, a ile karton ciastek?

B. Które równanie spełnia para liczb $(-1, 2)$?

I. $y - x = 1$ **II.** $y - x = 3$

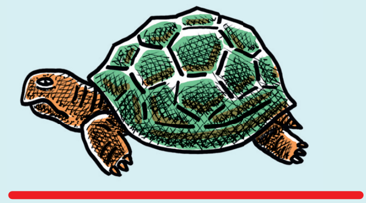
III. $y + 2x = 0$ **IV.** $x + 2y = 3$

C. Wyznacz trzy pary liczb spełniających równanie $1\frac{1}{2}x - y = 4$.

D. Rozwiąż graficznie równanie $-y - 3x - 6 = 0$.

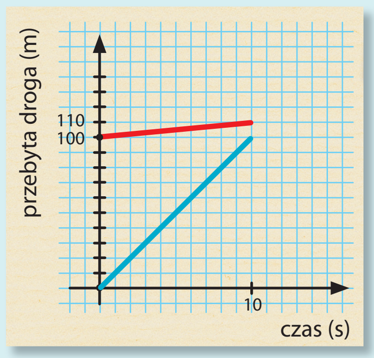
Gdzie się spotkają?

Starożytny filozof grecki Zenon z Elei słynął z wymyślania łamigłówek i paradoksów.
Najbardziej znana była łamigłówka o żółwiu i Achillesie.



Achilles, ścigając się z żółwiem, biegł 10 razy szybciej niż żółw. Aby dać szansę żółwiowi, Achilles wystartował, gdy żółw był 100 m przed nim. Po pokonaniu przez Achillesa stu metrów żółw oddalił się o dziesiątą część drogi przebytej przez Achillesa i wyprzedzał go o 10 metrów. I znowu po pokonaniu tych 10 metrów przez Achillesa żółw oddalił się o dziesiątą część drogi przebytej przez Achillesa itd.

Stąd Zenon twierdził, że Achilles nigdy nie dogoni żółwia. Wszyscy wiedzieli, że tak nie jest, ale nie potrafili znaleźć błędu w rozumowaniu Zenona.



Problem ten można rozwiązać graficznie, przedstawiając drogę pokonaną przez żółwia i drogę pokonaną przez Achillesa w zależności od czasu.

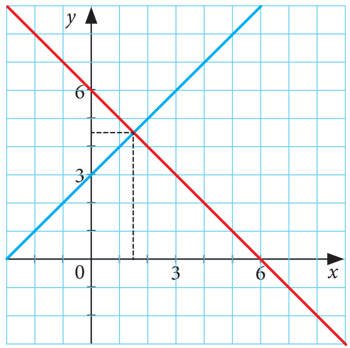
➜ Jaką odległość przebiegał Achilles w czasie, gdy żółw przemieszczał się o 1 metr?

➜ Zaznacz na wykresie drogę pokonywaną przez żółwia i przez Achillesa.

➜ Oszacuj, w jakiej odległości od startu Achilles przegoni żółwia.

1. *Suma dwóch liczb pomniejszona o 6 wynosi 0. Jedna z nich jest o 3 większa od drugiej. Jakie to liczby?*

Zadanie to można przedstawić graficznie w układzie współrzędnych.



→ Która prosta przedstawia informację: *Suma dwóch liczb wynosi 6*?

→ Podaj trzy punkty, których współrzędne spełniają warunek: *Suma dwóch liczb wynosi 6.*

→ Jaką informację z zadania opisuje równanie $y = x + 3$?

→ Który warunek zadania spełniają współrzędne punktu $(-1, 2)$?

→ Jakie liczby są rozwiązaniem zadania? Jak to sprawdzić?

!

Układ dwóch równań liniowych tworzą dwa równania liniowe,

np. $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x = 6 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 6 \end{cases}$

Rozwiązaniem układu równań nazywamy parę liczb spełniającą oba równania.

Przykład:

Para liczb $(-1, 3)$ nie jest rozwiązaniem układu równań

$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$, ponieważ $(-1, 3)$ nie spełnia drugiego równania.

$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 3 + 5 \stackrel{?}{=} 0 \\ -1 + 3 \cdot 3 + 5 \stackrel{?}{=} 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} -2 - 3 + 5 \stackrel{?}{=} 0 \\ -1 + 9 + 5 \stackrel{?}{=} 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 0 \stackrel{?}{=} 0 \\ 13 \neq 0 \end{cases}$

Interpretacją graficzną układu równań liniowych nazywamy przedstawienie wykresów obu równań w jednym układzie współrzędnych. Pary liczb spełniające układ równań są współrzędnymi wspólnych punktów obu wykresów.

Aby rozwiązać graficznie układ równań, należy wykonać jego graficzną interpretację, odczytać współrzędne wspólnych punktów obu wykresów. Zawsze warto sprawdzić rachunkiem, czy odczytane współrzędne spełniają ten układ równań.

2. Sprawdź, czy para liczb (5, 7) jest rozwiązaniem podanego układu równań.

a) $\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ 2x + y - 17 = 0 \end{cases}$

3. Dane są trzy układy równań.

I. $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ **III.** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

→ Przedstaw interpretację graficzną każdego z układów równań w osobnym układzie współrzędnych.

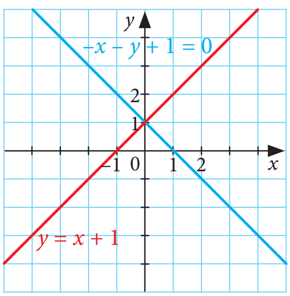
→ Odczytaj rozwiązanie każdego z układów równań.

→ Sprawdź dla każdego układu równań, czy odczytana para liczb spełnia oba równania.

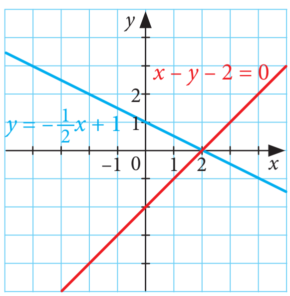
Niedokładności rysunku mogą spowodować, że odczytana para liczb nie jest rozwiązaniem układu równań. Warto zawsze sprawdzić poprawność odczytu.

4. Napisz układ równań, który ilustrują narysowane proste, i podaj jego rozwiązanie. Pamiętaj o sprawdzeniu, czy para liczb spełnia oba równania.

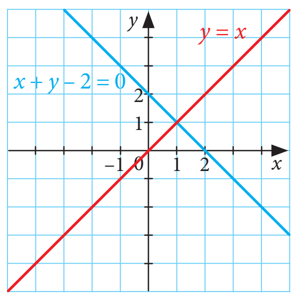
a)



b)



c)



5. Rozwiąż graficznie podany układ równań.

a) $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y - 6 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -2x + y + 4 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 3 = 0 \end{cases}$

6. Zinterpretuj graficznie podane układy równań.

I. $\begin{cases} -3x - y - 4 = 0 \\ 8x + y - 6 = 0 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ 9x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$ **III.** $\begin{cases} x - 5y + 2 = 0 \\ -2x + 10y - 2 = 0 \end{cases}$

→ Ile wspólnych punktów mają wykresy równań w poszczególnych układach?

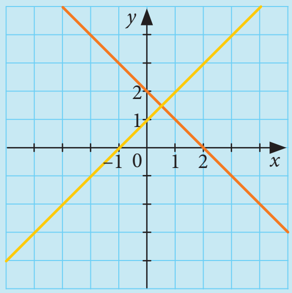
→ Ile punktów wspólnych mogą mieć dwie proste? Zilustruj to rysunkiem.

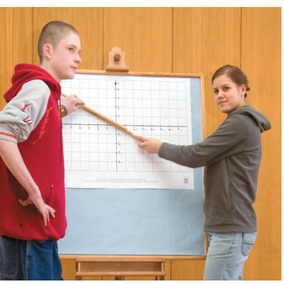
→ Ile punktów wspólnych mogą mieć wykresy dwóch równań liniowych?

!

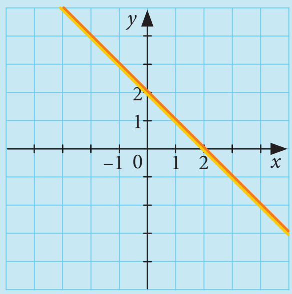
Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi mogą ilustrować:

I. Dwie przecinające się proste. Taki układ równań nazywamy **układem oznaczonym**. Układ oznaczony ma tylko jedno rozwiązanie.

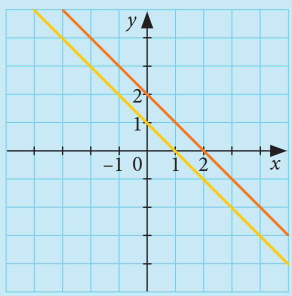




II. Dwie pokrywające się proste. Taki układ równań nazywamy **układem nieoznaczonym**. Układ nieoznaczony ma nieskończenie wiele rozwiązań.



III. Dwie proste równoległe, niemające punktu wspólnego. Taki układ równań nazywamy **układem sprzecznym**. Układ sprzeczny nie ma rozwiązania.



7. Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste opisane układem równań $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y - x = 3 \end{cases}$ i podaj jego rozwiązanie.

8. Rozwiąż graficznie układ równań i określ, jaki to układ.

a) $\begin{cases} -6x + 4y - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 10y - 4 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{3}{5}x + y = 3 \end{cases}$

9. Który z podanych układów jest oznaczony, który nieoznaczony, a który sprzeczny?

I. $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} -\frac{3}{4}x - 2y - 5= 0 \\ -3x - 8y - 20 = 0 \end{cases}$ **III.** $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$

79

10. W układzie współrzędnych dana jest prosta *a* o równaniu $-3x - 2y + 3 = 0$. Narysuj trzy proste *k*, *l* i *m*, takie że:

I. prosta *k* ma z prostą *a* dokładnie jeden punkt wspólny,

II. prosta *l* jest równoległa do prostej *a*,

III. prosta *m* ma z prostą $-3x - 2y + 3 = 0$ nieskończenie wiele punktów wspólnych.

→ Podaj równanie każdej z narysowanych prostych.

11. Wstaw w miejsce *a* i *b* takie liczby, aby układ równań
$\begin{cases} x - y = 2 \\ 5x - ay = b \end{cases}$

a) miał nieskończenie wiele rozwiązań.

b) miał jedno rozwiązanie.

c) nie miał rozwiązań.

12. Suma dwóch liczb wynosi 12, a ich różnica 2. Jakie to liczby?

13. Iloraz dwóch liczb wynosi 2, a ich różnica 3. Jakie to liczby?

14. Założenie instalacji gazowej w samochodzie z silnikiem benzynowym kosztuje 2000 zł. Koszt benzyny zużytej na dystansie 100 km wynosi 40 zł, a koszt gazu potrzebnego do przejechania 100 km wynosi 25 zł. Ile kilometrów trzeba przejechać, aby założenie instalacji gazowej było opłacalne?

15. Obwód prostokąta jest równy 28 cm. Różnica długości dwóch boków wychodzących z jednego wierzchołka wynosi 2 cm. Jakie są długości boków prostokąta?

16. Odległość z Londynu do Edynburga wynosi 400 mil. Pociąg wyjeżdża z Londynu do Edynburga o godzinie 13.00, jedzie z prędkością 40 mil na godzinę. Drugi pociąg wyjeżdża godzinę później i jedzie z prędkością 60 mil na godzinę. O której godzinie drugi pociąg wyprzedzi pierwszy?

80

Jaki warunek muszą spełniać liczby: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 oraz C_2, aby układ $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

a) był oznaczony? **b)** był nieoznaczony? **c)** był sprzeczny?

Sprawdź sam siebie

A. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -3x + y + 1 = 0 \end{cases}$.

B. Sprawdź, czy układ równań $\begin{cases} 6y - x + 2 = 0 \\ -3y - 1 = -\frac{1}{2}x \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

C. Wstaw w miejsce a i b takie liczby, aby układ równań
$\begin{cases} x - y = 0 \\ ax - 3y = b \end{cases}$

a) miał nieskończenie wiele rozwiązań.

b) miał jedno rozwiązanie.

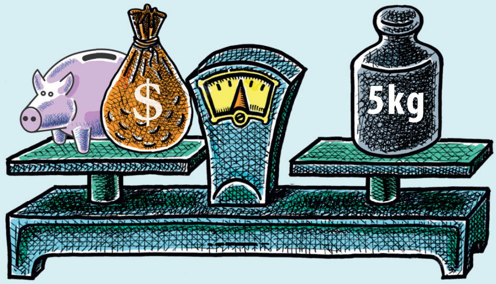
c) nie miał rozwiązań.

D. Przedstaw graficznie w układzie współrzędnych ilustrację zadania: „Suma dwóch liczb jest równa 16, a ich różnica 7. Jakie to liczby?”. Podaj rozwiązanie tego zadania.

Jak ciężkie są pieniądze?

Zagadka 1.

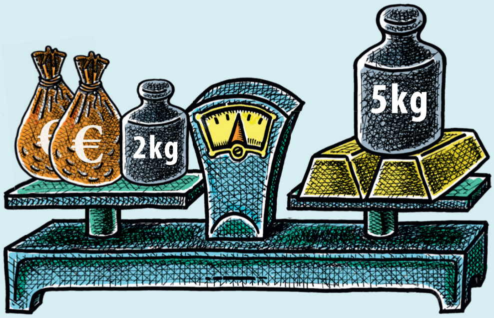
Ile waży worek z pieniędzmi, a ile skarbonka?



➜ Opisz sposób rozwiązania tej zagadki.

Zagadka 2.

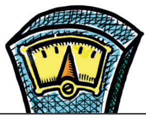
Ile waży worek z pieniędzmi, a ile sztabka złota?



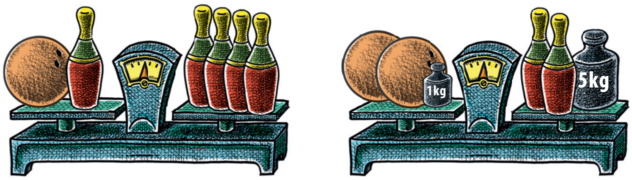
➜ Opisz sposób rozwiązania tej zagadki.

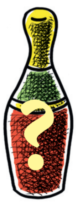
1. Przeanalizujcie plakat ilustrujący rozwiązanie kolejnej zagadki.

Ile waży kula, a ile waży kręgiel do gry dla dzieci?

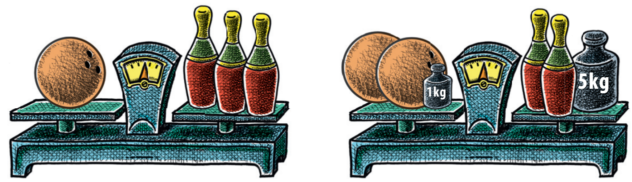


Wagi są
w równowadze.

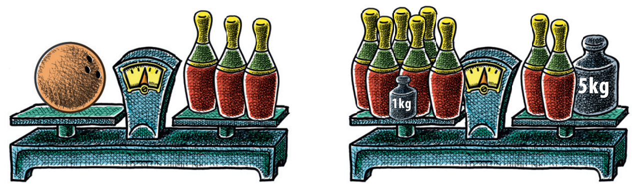




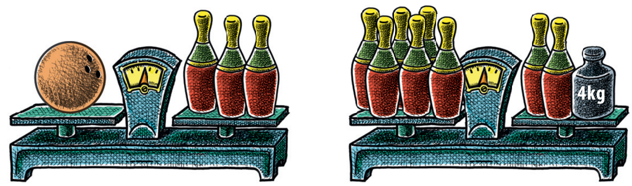
I.



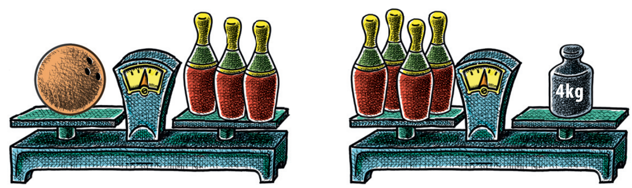
II.



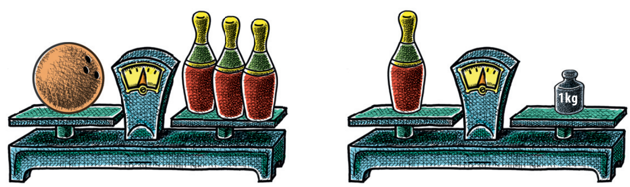
III.



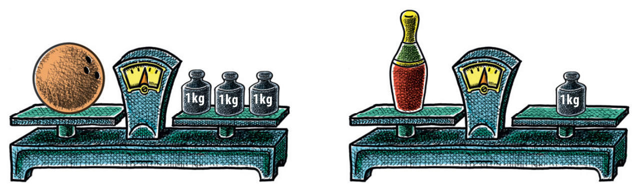
IV.



V.



VI.



→ Jakie czynności wykonano na kolejnych etapach rozwiązania?

→ Pierwszy rysunek można opisać układem równań:
$$\begin{cases} x + y = 4y \\ 2x + 1 = 2y + 5 \end{cases}$$

→ Co oznaczono przez x, a co przez y?

→ Opiszcie w ten sam sposób kolejne rysunki etapy rozwiązania zagadki.

→ Jak przekształcane były równania na kolejnych etapach rozwiązania?

→ Opiszcie ogólne zasady postępowania.

2. Przyjrzyjcie się poniższym układom równań i opisom czynności.

→ Podajcie, w jakiej kolejności należy ułożyć tabliczki od **A** do **E**, aby odpowiadały kolejnym czynnościom, doprowadzającym do rozwiązania układu równań: $\begin{cases} y + x - 5 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} y = -x + 5 \\ 2x - x + 5 - 8 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x + 5 - 8 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x + 5 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$

E. $\begin{cases} y = -3 + 5 \\ x = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = -x + 5 \\ 2x + (-x + 5) - 8 = 0 \end{cases}$

1. Wyznacz y z pierwszego równania.

2. Podstaw do drugiego równania w miejsce y wyrażenie wyznaczone z pierwszego równania.

3. Wyznacz x, rozwiązując otrzymane równanie.

4. Wstaw obliczoną wartość x do równania otrzymanego w punkcie 1.

5. Oblicz y i odczytaj, jakie otrzymano wartości x i y.

→ Zapiszcie rozwiązanie tego układu równań.

→ Postępując zgodnie ze schematem, wyznaczcie rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} y - 2x - 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$.

→ Zbudujcie podobne instrukcje rozwiązania tego układu równań, rozpoczynające się od polecenia:

I. **1.** Wyznacz x z pierwszego równania.

II. **1.** Wyznacz y z drugiego równania.

III. **1.** Wyznacz x z drugiego równania.

→ Wykorzystując zbudowane instrukcje, rozwiążcie podany układ równań.

→ Zbudujcie instrukcję, która może zastąpić wszystkie cztery utworzone instrukcje. Rozpocznijcie ją od polecenia:

1. Wyznacz jedną z niewiadomych z wybranego równania.

3. Wykorzystując zbudowaną instrukcję, rozwiążcie podany układ równań i sprawdźcie, czy otrzymana para liczb spełnia ten układ.

a) $\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x = y - 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 4y - 14 = 0 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$

!

Metodą podstawiania nazywamy jedną z algebraicznych metod rozwiązywania układów dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Zgodnie z tą metodą należy:

1. Wyznaczyć jedną niewiadomą z jednego z równań.

2. Podstawić wyznaczone wyrażenie w miejsce odpowiedniej niewiadomej do drugiego równania z układu.

3. Rozwiązać otrzymane równanie z jedną niewiadomą.

4. Podstawić wyliczoną wartość w miejsce odpowiedniej niewiadomej do dowolnego równania, w którym występują dwie niewiadome.

5. Rozwiązać równanie z drugą niewiadomą.

6. Podać rozwiązanie.

4. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania i sprawdź, czy wyznaczona para liczb spełnia ten układ.

a) $\begin{cases} 2x - y - 9 = 0 \\ x - 4y - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 5x - 7 = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania i sprawdź, czy znaleziona para liczb spełnia ten układ.

81

a) $\begin{cases} 2x - 5y - 6 = 0 \\ 3x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3y + 5x = 0 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + 8y = 9 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

6. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania i sprawdź, czy wyznaczona para liczb spełnia ten układ.

a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y + 1 = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2{,}5x + 0{,}2y - 2{,}8 = 0 \\ x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}25y = 4 \\ 0{,}25x + y = 7 \end{cases}$

7. Doprowadź każde z równań do najprostszej postaci i rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x - 3(y - 3x) = 3x - 4 \\ 2(2x - y) = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(2 + y) = -2x - 1 \\ 2(x + 1) = 2 - 10y \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2(x + 2) + 3y = -y - 4 \\ 5(x - 1) = x - 3(x + y) - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x - 4y) = 4x - y \\ 4x - 4y = -8 \end{cases}$

8. Rozwiążcie układy równań metodą podstawiania.

I. $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} 2x - 4y - 4 = 0 \\ 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$

→ Czy udało się Wam znaleźć rozwiązania tych układów?

→ Rozwiążcie graficznie te układy równań. Co zauważacie? Jakie to układy równań?

9. Rozwiążcie układy równań metodą podstawiania i graficznie.

I. $\begin{cases} 6x + 8y - 12 = 0 \\ -3x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} 4y = -8 + 6x \\ -3x + 2y = -2 \end{cases}$

10. Rozwiąż metodą podstawiania i graficzną układy równań.

I. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 8 - 4x = -2y \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} 6x - 5 = 4y \\ 2 - 4y = -6x \end{cases}$ **III.** $\begin{cases} x - 5y - 5 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases}$

→ Który z tych układów ma dokładnie jedno rozwiązanie, który ma ich nieskończenie wiele, a który nie ma wcale?

11. Do równania $-5x + 2y - 4 = 0$ dopisz drugie, tak aby powstały układ równań był

a) sprzeczny. **b)** oznaczony. **c)** nieoznaczony.

12. Ania i Kasia mają łącznie 30 lat. Ania jest młodsza od Kasi o 4 lata. Ile lat ma każda z dziewcząt? Rozwiąż zadanie za pomocą układu równań. Sprawdź otrzymane wyniki z warunkami zadania.

13. Suma dwóch liczb jest równa 16, a ich różnica 8. Jakie to liczby?

14. Różnica dwóch liczb jest równa 30, a ich iloraz 7. Jakie to liczby?

15. W trójkącie różnica miar dwóch kątów wynosi 20°, a rozwartość trzeciego 36°. Jakie kąty ma ten trójkąt?

16. Znajdź liczbę dwucyfrową, której suma cyfr jest równa 9, a suma tej liczby i liczby równej podwojonej cyfrze jedności jest równa 62.

17. Jeżeli w trójkącie prostokątnym zmniejszymy każdą z jego przyprostokątnych o 2 cm, to jego pole zmniejszy się o 8 cm^2. Natomiast pole trójkąta zwiększy się o 24 cm^2, jeżeli jedną przyprostokątną zwiększymy o 4 cm, a drugą o 3 cm. Jakie są długości boków tego trójkąta?

82

18. Ułóż układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem będzie para liczb (3, 5). Ile jest takich układów?

Sprawdź sam siebie

A. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania i sprawdź, czy wyznaczona para liczb spełnia ten układ.

$$\begin{cases} -2x - y - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

B. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} -x + 4y + 7 = 0 \\ 0{,}3x - 0{,}4y + 0{,}5 = 0 \end{cases}$.

83 czytanka

C. Jaki to układ równań: oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny?

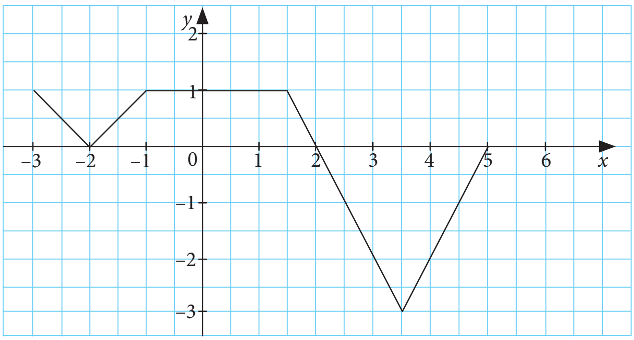
a) $\begin{cases} -2x - 4y - 5 = 0 \\ -6x - 12y - 15 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 6 - 3x \\ 3x - 6 = -2y \end{cases}$

84 czytanka

D. Suma dwóch liczb jest równa 58, a ich różnica 28. Jakie to liczby? Zadanie rozwiąż za pomocą układu równań.

Jak to rozwiązać? nr 5

1. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji *f*.

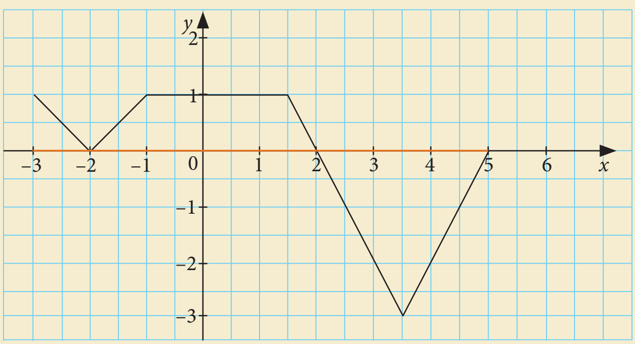


Odczytaj z podanego wykresu

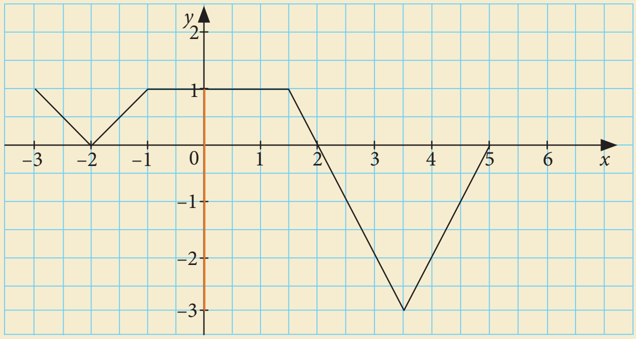
a) dziedzinę funkcji *f*.

b) zbiór wartości funkcji *f*.

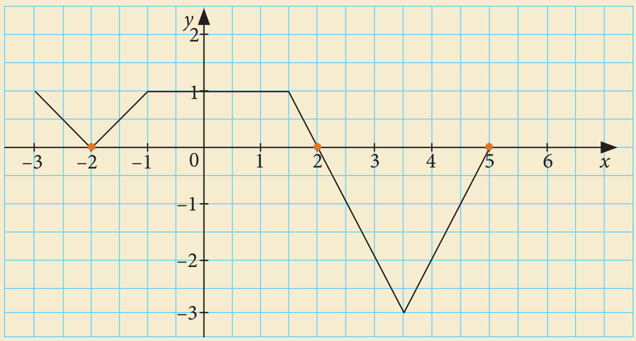
c) miejsca zerowe funkcji *f*.

<table>
<tr><td>a) W układzie współrzędnych wskaż zbiór argumentów, dla których określona jest ta funkcja.</td><td>Zbiór argumentów danej funkcji odczytujemy zawsze na osi x. Najmniejszym argumentem, dla którego istnieje wartość funkcji, jest $x = -3$, a największym $x = 5$.


Zbiór argumentów na osi x można wyróżnić kolorem.</td></tr>
<tr><td>Określ dziedzinę funkcji.</td><td>Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x, dla których $-3 \leqslant x \leqslant 5$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>b) W układzie współrzędnych wskaż zbiór wartości, które przyjmuje ta funkcja.</td><td>Zbiór wartości danej funkcji odczytujemy zawsze na osi y.
Najmniejszą wartością funkcji jest $y = -3$, a największą $y = 1$.


Zbiór wartości na osi y można wyróżnić kolorem.</td></tr>
<tr><td>Określ zbiór wartości funkcji.</td><td>Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór tych liczb y, dla których $-3 \leqslant y \leqslant 1$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>c) Wskaż punkty wspólne wykresu funkcji z osią x.</td><td>Punkty wspólne wykresu funkcji z osią x mają współrzędne: $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(5, 0)$.


</td></tr>
<tr><td>Podaj miejsca zerowe funkcji.</td><td>Miejscem zerowym funkcji jest argument (element dziedziny), dla którego wartość funkcji wynosi zero.
Oznacza to, że miejscem zerowym funkcji jest zawsze pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu funkcji z osią x. Skoro punkty te mają współrzędne: $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(5, 0)$, to miejscami zerowymi funkcji f są: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.</td></tr>
</table>

2. Czy wielkości x i y, opisane w tabeli, zmieniają się proporcjonalnie?

x	6	4	3,6	2
y	15	10	9	5

Sprawdź, czy iloraz $\frac{y}{x}$ jest taki sam w każdym przypadku.	$\frac{y}{x} = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2{,}5$	$\frac{y}{x} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4} = 2{,}5$
	$\frac{y}{x} = \frac{9}{3{,}6} = 2{,}5$	$\frac{y}{x} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$
Porównaj otrzymane wyniki. Ustal, czy wielkości są proporcjonalne.	Wszystkie ilorazy $\frac{y}{x}$ są równe 2,5. To oznacza, że wielkości podane w tabeli są wielkościami proporcjonalnymi.	

3. Funkcja określona równaniem $3y - 2x = 0$ jest proporcjonalnością prostą. Wyznacz współczynnik proporcjonalności prostej tej funkcji.

Przedstaw równanie prostej w postaci równania kierunkowego $y = ax$. Z równania $3y - 2x = 0$ wyznacz y.	$3y - 2x = 0 \mid + 2x$ $3y - 2x + 2x = 0 + 2x$ $3y = 2x \mid : 3$ $y = \frac{2}{3}x$
Podaj wartość współczynnika a.	$a = \frac{2}{3}$
Podaj odpowiedź.	Współczynnik proporcjonalności prostej jest równy $\frac{2}{3}$.

4. Dana jest funkcja $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Znajdź

a) miejsce zerowe tej funkcji.

b) współrzędne punktu przecięcia jej wykresu z osią y.

c) argument, dla którego wartość funkcji jest równa -2.

a) Oblicz, dla jakiego argumentu *x* wartość funkcji jest równa 0.	Ponieważ y ma być równe 0, to wstawiamy 0 w miejsce y w równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 4$ i rozwiązujemy równanie ze względu na x: $0 = -\frac{1}{2}x + 4 \mid -4$ $-4 = -\frac{1}{2}x \mid \cdot(-2)$ $8 = x$.
Podaj odpowiedź.	Miejscem zerowym funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 4$ jest liczba 8.

b) Oblicz wartość *y* tej funkcji, gdy argument *x* = 0.	Punkt, w którym wykres funkcji przecina oś y, ma pierwszą współrzędną równą 0. Obliczamy niewiadomą y, gdy x jest równe 0, czyli wstawiamy 0 w miejsce x i rozwiązujemy równanie: $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4$ $y = 4$.
Podaj odpowiedź.	Współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 4$ z osią y to: $x = 0$ i $y = 4$, czyli szukany punkt przecięcia wykresu z osią y to $(0, 4)$.

c) Oblicz, dla jakiego argumentu *x* wartość funkcji jest równa –2.	Ponieważ y ma być równe -2, zatem wstawiamy -2 w miejsce y i rozwiązujemy powstałe równanie ze względu na x: $-2 = -\frac{1}{2}x + 4 \mid +(-4)$ $-6 = -\frac{1}{2}x \mid :(-\frac{1}{2})$ $12 = x$.
Podaj odpowiedź.	Funkcja $y = -\frac{1}{2}x + 4$ przyjmuje wartość -2 dla argumentu 12.

5. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3y + 6x = -6 \end{cases}$.

Przekształć każde równanie układu do postaci $y = ax + b$ i zapisz układ równoważny danemu, wykorzystując otrzymane równania.

Przekształcamy równanie $2x - 2y = 4$ do postaci $y = ax + b$.	Przekształcamy równanie $3y + 6x = -6$ do postaci $y = ax + b$.
$2x - 2y = 4 \mid -2x$	$3y + 6x = -6 \mid -6x$
$-2y = -2x + 4 \mid :(-2)$	$3y = -6x - 6 \mid :3$
$y = x - 2$	$y = -2x - 2$

Po przekształceniach otrzymujemy równoważny układ równań
$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$

Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych tworzących równania układu.

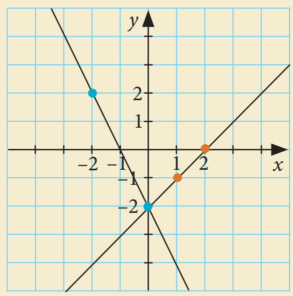
Do wyznaczenia każdej prostej wystarczą dwa różne punkty. Sporządzamy tabelki do każdego równania układu.

x	1	2
$y = x - 2$	-1	0

x	-2	0
$y = -2x - 2$	2	-2

Prosta $y = x - 2$ przechodzi przez punkty $(1, -1)$ i $(2, 0)$.
Prosta $y = -2x - 2$ przechodzi przez punkty $(-2, 2)$ i $(0, -2)$.

Rysujemy proste
$y = x - 2$ i $y = -2x - 2$
w jednym układzie współrzędnych.



Odczytaj współrzędne punktu przecięcia obu prostych.

Proste przecinają się w jednym punkcie $(0, -2)$.
Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Podaj odpowiedź.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3y + 6x = -6 \end{cases}$ jest para liczb $x = 0$ i $y = -2$.

6. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązując układ równań, zastępuj kolejno dany układ układami równoważnymi aż do otrzymania układu, z którego można odczytać rozwiązanie lub określić, że układ nie ma rozwiązań. Na początku z jednego z równań układu wyznacz niewiadomą *x* lub *y*.	Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \mid -6y \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = -6y + 12 \mid :3 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$	Wyznaczamy niewiadomą y z pierwszego równania. $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \mid -3x \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} 6y = -3x + 12 \mid :6 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$
W drugim równaniu układu zastąp niewiadomą przez wyrażenie wyznaczone z pierwszego równania.	Otrzymaną wartość $x = -2y + 4$ wstawiamy do drugiego równania. $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ 4(-2y + 4) + 7y = 15 \end{cases}$	Otrzymaną wartość $y = -0{,}5x + 2$ wstawiamy do drugiego równania. $\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ 4x + 7(-0{,}5x + 2) = 15 \end{cases}$
Przekształć w sposób równoważny drugie równanie i oblicz niewiadomą.	$\begin{cases} x = -2y + 4 \\ -8y + 16 + 7y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ -y + 16 = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ -y = 15 - 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ -y = -1 \mid :(-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ 4x - 3{,}5x + 14 = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ 0{,}5x = 15 - 14 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ 0{,}5x = 1 \mid \cdot 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ x = 2 \end{cases}$
Wstaw otrzymany wynik do pierwszego równania i znajdź rozwiązanie układu równań.	Wstawiamy do pierwszego równania $y = 1$. $\begin{cases} x = -2 \cdot 1 + 4 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 + 4 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	Wstawiamy do pierwszego równania $x = 2$. $\begin{cases} y = -0{,}5 \cdot 2 + 2 \\ x = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 + 2 \\ x = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$
Podaj rozwiązanie układu równań i sformułuj odpowiedź.	Para liczb $x = 2$ i $y = 1$ jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 4x + 7y = 15. \end{cases}$	

1. Dane są przyporządkowania:

I. Każdej liczbie naturalnej nieparzystej mniejszej od 16 przyporządkowuję liczbę o 2 od niej większą.

II. Każdej liczbie naturalnej mniejszej od 10 przyporządkowuję liczbę o 3 mniejszą.

III. Każdej literze polskiego alfabetu przyporządkowuję jej kolejny numer w alfabecie.

IV. Każdej literze z wyrazu MATEMATYKA przyporządkowuję liczbę 1, jeżeli litera jest na miejscu parzystym, lub liczbę 2, jeśli litera jest na miejscu nieparzystym.

Każde z przyporządkowań przedstaw za pomocą

a) grafu. **b)** tabeli.

2. Dane są dwa zbiory $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Przedstaw za pomocą grafów różne przyporządkowania elementom zbioru A elementów ze zbioru B. Które z tych przyporządkowań są funkcjami?

3. Przepisz do zeszytu i uzupełnij tabelkę, tak aby przedstawione w niej przyporządkowanie określało funkcję.

a)

x	3		5	6		
y	5	6	7		9	10

b)

x	-3	0		3		9
y		0	2	6	12	

c)

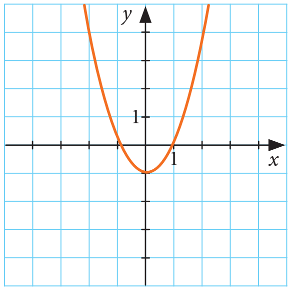
x	-2		0	1	4	
y	-1	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3

d)

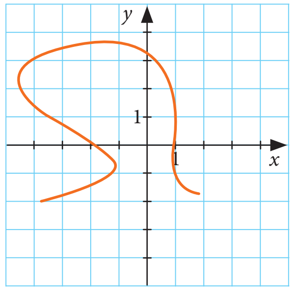
x	-4		0		5	
y	16	4	0	1	25	36

4. Który z wykresów przedstawia funkcję? Uzasadnij odpowiedź.

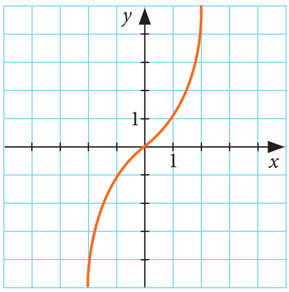
I.



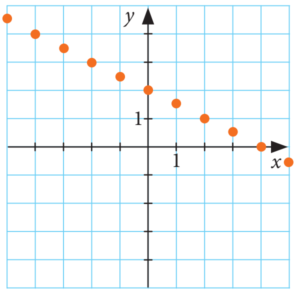
II.



III.

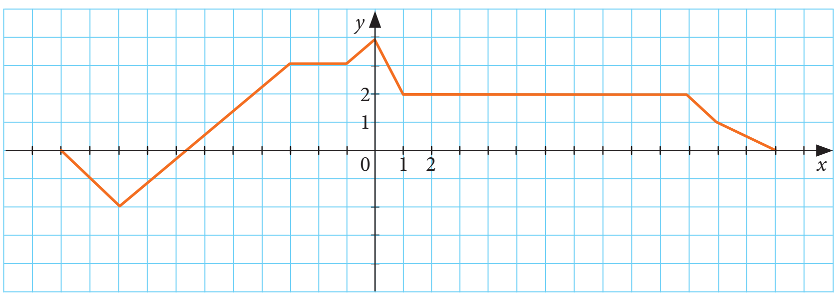


IV.



5. Oto wykres pewnej funkcji. Podaj jej

a) dziedzinę.
b) zbiór wartości.
c) wartości dla argumentów: −2, 11 i 13.



6. Sporządź wykres funkcji, która została przedstawiona za pomocą tabelki.

a)

x	-2	-1	0	1	4	6
y	6	3	0	-3	-12	-18

b)

x	-2	-1	1	2	4	6
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

7. Która z tabelek przedstawia proporcjonalność prostą?

I.

x	−3	−4	4	−6	−9	−11
y	6	8	−8	12	18	22

II.

x	3	4	5	6	7	8
y	4	5	6	7	8	10

III.

x	−2,5	−2	$-\frac{1}{2}$	4	6	27
y	10	8	2	−16	−24	−9

IV.

x	−5	6	−7	8	9	10
y	5	6	7	−8	−9	−10

8. Jaki jest współczynnik proporcjonalności prostej, gdy zależność między zmiennymi x i y ma postać

a) $y = 3x$? **b)** $3y = 3x$? **c)** $4y - 2x = 0$? **d)** $6y + 3x = 0$?

9. Narysuj wykres funkcji $y = 2x$, jeżeli x należy do zbioru $\{-1, 0, 2, 4\}$.

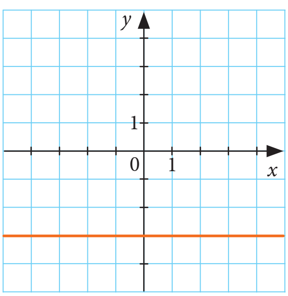
10. Narysuj wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x$, gdy x jest liczbą całkowitą dodatnią.

11. Narysuj wykres funkcji

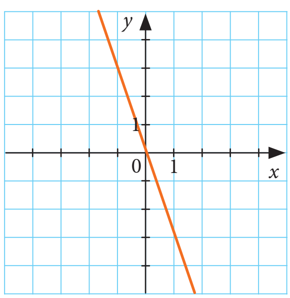
a) $y = x$. **b)** $y = 3x$. **c)** $y = -\frac{1}{2}x$. **d)** $y = -6x$.

12. Który z rysunków przedstawia wykres funkcji $y = -3x$?

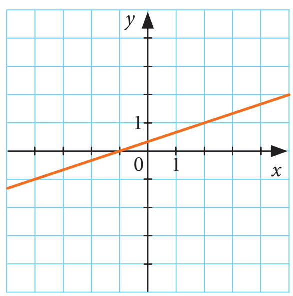
a)



b)



c)



13. Sprawdź, czy podane punkty należą do wykresu funkcji $y = 4x$.

$A = (1, 4)$ $B = (\frac{1}{2}, 2)$ $C = (-\frac{1}{4}, -1)$ $D = (\frac{1}{8}, -2)$

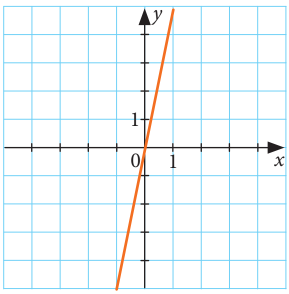
14. Jak położony jest wykres funkcji $y = -3$ względem osi y układu współrzędnych?

15. Jaki jest współczynnik kierunkowy podanej prostej?

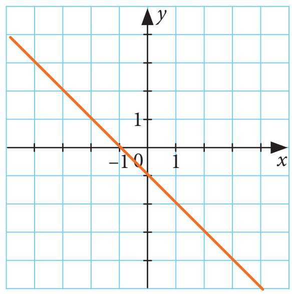
a) $y = -x$ **b)** $y = -8x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x$ **d)** $y = -\frac{3}{4}x$

16. Podaj wzór przedstawionej na wykresie funkcji, określ jej dziedzinę, miejsce zerowe oraz podaj, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

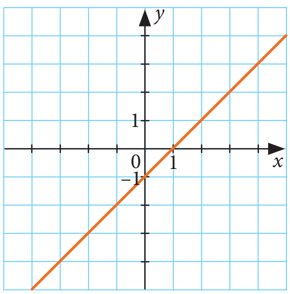
a)



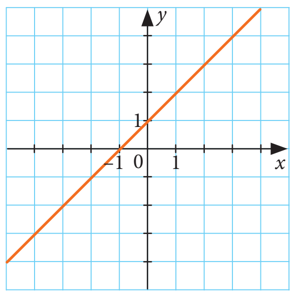
b)



c)



d)



17. Oblicz miejsce zerowe funkcji

a) $y = -6x + 1$. **b)** $y = 4x - 1$. **c)** $y = -\frac{1}{4}x + 1$. **d)** $y = -\frac{1}{8}x - 2$.

18. Napisz wzór takiej funkcji liniowej, której wykres z częścią ujemną osi y tworzy kąt ostry.

19. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś y w punkcie $(0, 1)$, a współczynnik kierunkowy jest równy $\frac{1}{2}$.

20. Znajdź po trzy pary liczb, które należą do zbioru rozwiązań podanego równania.

a) $y - 3x = 1$ **b)** $-\frac{1}{2}x + y = -2$ **c)** $y + 4x = -1$ **d)** $x + y = 2$

21. Znajdź dwie liczby, takie że ich suma jest pięć razy większa od ich różnicy.

22. Podany układ równań rozwiąż graficznie.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ 5y - x = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ -y + x = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

23. Podany układ równań rozwiąż metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x = 6 - 4y \\ 2x + 3 = y \end{cases}$

24. Suma dwóch liczb wynosi 89, a ich różnica 57. Jakie to liczby?

25. Jeden z kątów w trójkącie ma miarę 30°. Jakie miary mają dwa pozostałe kąty, jeśli różnica ich miar wynosi 12°?

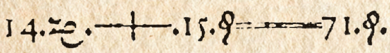
Wystarczą dwie kreski

Obecnie używany znak równości = pojawił się po raz pierwszy w druku w roku 1557 w angielskim podręczniku arytmetyki *The Whetstone of Witte* Roberta Recorde'a.

Znak równości

Skąd wziął się pomysł wprowadzenia nowego symbolu? Autor tłumaczy to następująco:

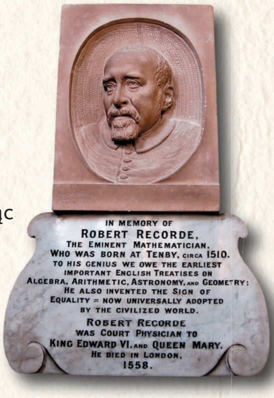
Aby uniknąć nudnego powtarzania tych słów – jest równe – będę wstawiał, tak jak zwykle to robię w moich pracach, parę równoległych bliźniaczych kresek jednakowej długości, w taki sposób ======, ponieważ żadne dwie rzeczy nie mogą być bardziej równe.



Pierwsze równanie, które występuje na reprodukowanej stronie, obecnie należałoby zapisać w formie $14x + 15 = 71$. Widoczny znak φ odnosi się do jednostki, w której były wyrażone wielkości związane równaniem; mogły to być funty, łokcie, uncje itp. Znak niewiadomej obejmował nie tylko liczbę, ale i jednostkę.

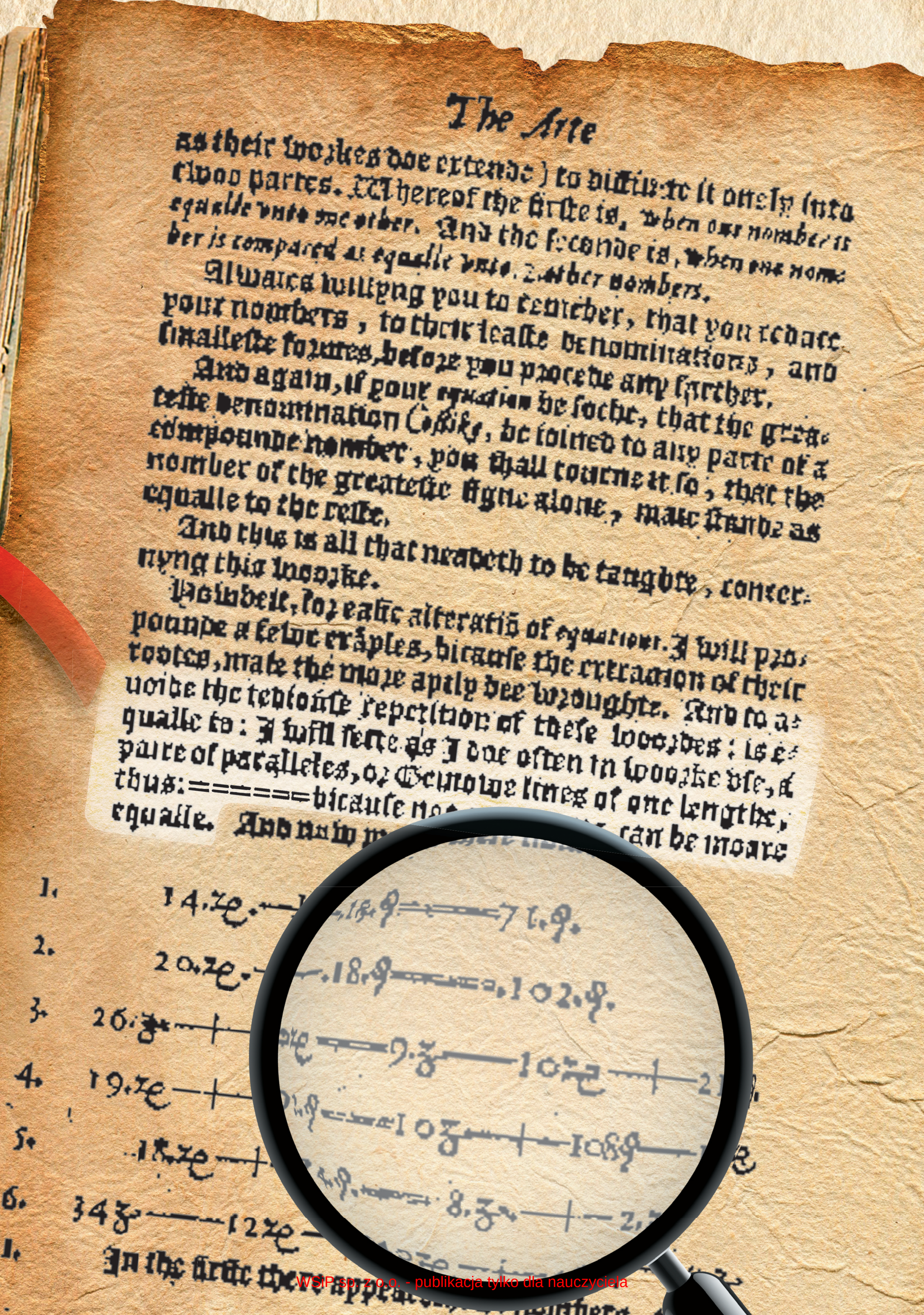
Robert Recorde (1510–1558)

Urodził się w Walii. Studiował w Oksfordzie i Cambridge, gdzie w 1545 roku uzyskał tytuł doktora medycyny. Był praktykującym lekarzem, m.in. nadwornym lekarzem Edwarda VI; powołany przez króla nadzorował prace w mennicach w Bristolu i Dublinie oraz w kopalni srebra w Irlandii. Zasłynął jako autor elementarnych podręczników matematyki. Aby poszerzyć krąg odbiorców, pisał po angielsku (a nie po łacinie), posługując się prostym, jasnym językiem. Ogromne wyczucie dydaktyczne, którym się wykazał w swoich pracach – większość miała postać dialogu między nauczycielem i uczniem – wskazuje na to, że prawdopodobnie zajmował się też nauczaniem. Ogromny sukces odniosła *The Grounde of Artes*, pierwsza angielska książka dotycząca algebry, wydana w roku 1543 (*The Whetstone of Witte* było jej kontynuacją).



+ −

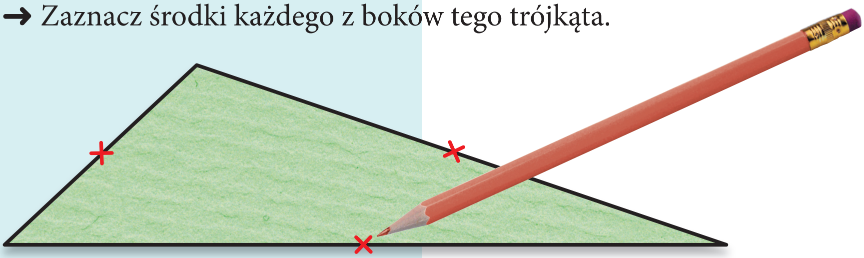
Symbole + i − po raz pierwszy pojawiły się w podręczniku z zakresu ekonomii autorstwa Johannesa Widmanna, wydanym w Lipsku w 1489 roku. Znak zbliżony kształtem do znaku plusa pojawił się już w dziele Mikołaja Oresme (1323–1382) *Algorismus proportionum* (1356). Pochodzi prawdopodobnie od słowa ***et*** (znaczy: i), które – napisane niestarannie – gubi ***e*** (samo ***t*** przypomina krzyżyk).


The Arte
as their workes doe extende) to diuide it onely into twoo partes. Whereof the firste is, when one nomber is equalle unto one other. And the seconde is, when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.
Alwaies willyng you to remeber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.
And again, if your equation be soche, that the greateste denomination Cosike, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.
And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.
Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle.

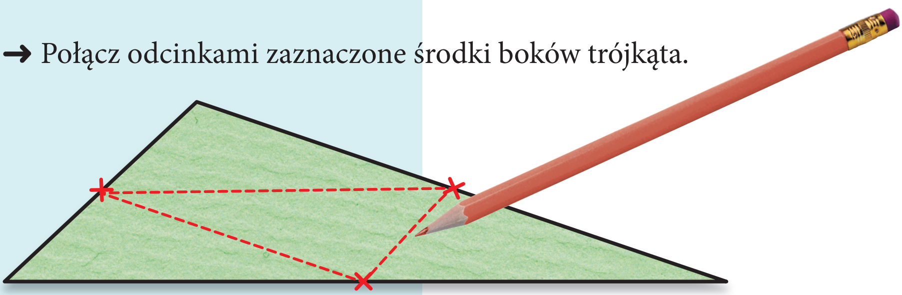
Składamy trójkąty

→ Z kartki papieru wytnij dowolny trójkąt.

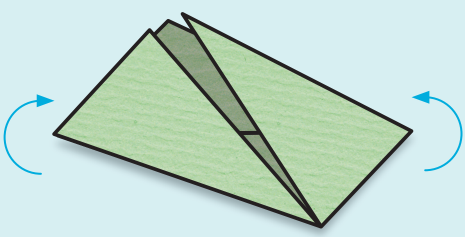
→ Zaznacz środki każdego z boków tego trójkąta.



→ Połącz odcinkami zaznaczone środki boków trójkąta.



→ Zegnij trójkąt wzdłuż narysowanych odcinków.



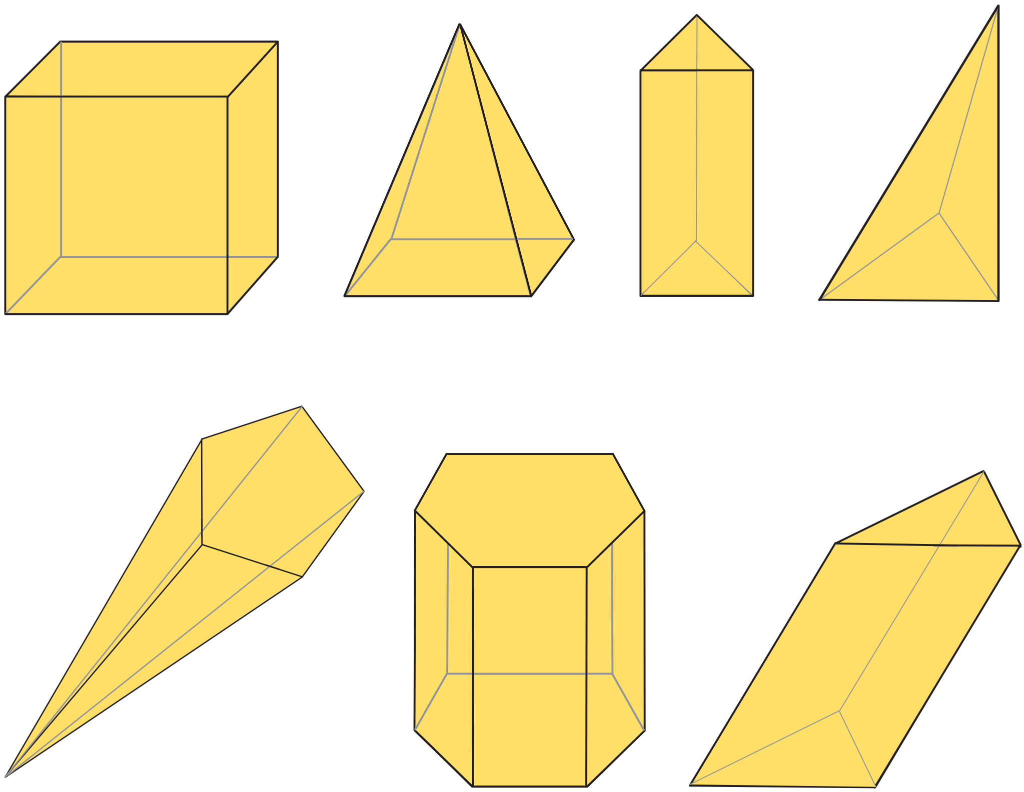
→ Ile ścian ma powstały wielościan?

→ Jakimi figurami są ściany powstałego wielościanu?

→ Wskaż krawędzie i wierzchołki tego wielościanu.

→ Czy uzyskany wielościan ma równoległe ściany?

1. Przyjrzyjcie się naszkicowanym wielościanom.



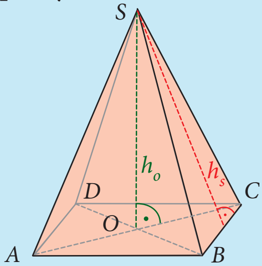
- Które z narysowanych brył są graniastosłupami?
- Wskażcie graniastosłupy proste i graniastosłupy pochyłe.
- Jakie wielokąty są ścianami bocznymi w graniastosłupach pochyłych, a jakie w graniastosłupach prostych?
- Jakie własności ma graniastosłup?
- Podajcie związki między liczbą boków podstawy graniastosłupa, liczbą jego ścian oraz liczbą krawędzi i liczbą wierzchołków.
- Przyjrzyjcie się pozostałym wielościanom.
- Wskażcie w wielościanach niebędących graniastosłupami: podstawy, ściany boczne, krawędzie, wierzchołki.
- Jakie wielokąty są ścianami bocznymi tych wielościanów?
- Jakie wielokąty są ich podstawami?

Niezależnie od położenia ostrosłupa w przestrzeni wielokątna ściana nazywa się **podstawą**, a trójkątne ściany o wspólnym wierzchołku nazywane są **ścianami bocznymi**.

Tylko w ostrosłupie trójkątnym każda ściana może być podstawą.

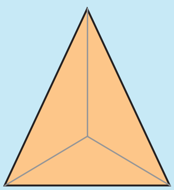
OSTROSŁUPY

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

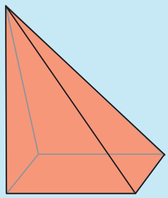


Wierzchołek ostrosłupa: *S*.
Wierzchołki podstawy: *A*, *B*, *C*, *D*.
Podstawa: *ABCD*.
Krawędzie podstawy: *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.
Krawędzie boczne: *AS*, *BS*, *CS*, *DS*.
Ściany boczne: *ABS*, *BCS*, *CDS*, *ADS*.
Wysokość ostrosłupa: $OS = h_o$.
Wysokość ściany bocznej: h_s.

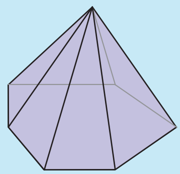
Przykłady:



Ostrosłup **trójkątny**, bo w podstawie ma trójkąt.

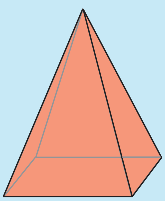


Ostrosłup **czworokątny**, bo w podstawie ma czworokąt.

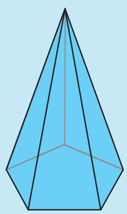


Ostrosłup **sześciokątny**, bo w podstawie ma sześciokąt.

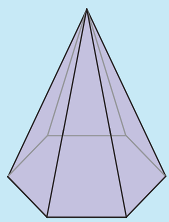
Ostrosłupem prawidłowym nazywamy taki ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.



Ostrosłup prawidłowy czworokątny

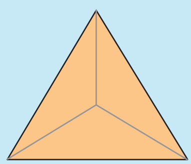


Ostrosłup prawidłowy pięciokątny

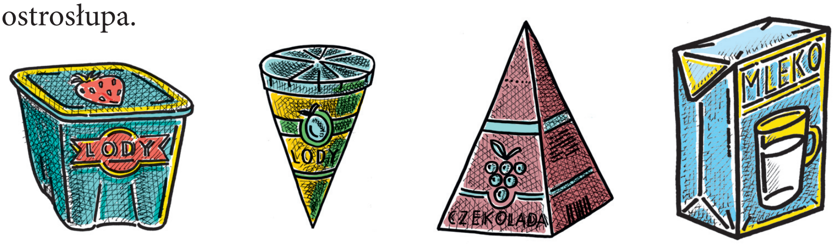


Ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Czworościanem nazywamy taki wielościan, który ma cztery ściany. Ostrosłup trójkątny jest czworościanem.
Czworościanem foremnym nazywamy taki czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.



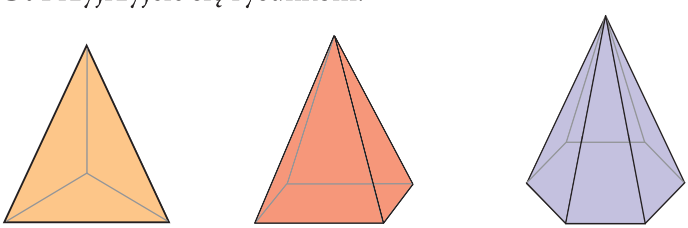
2. Wśród narysowanych przedmiotów wskaż te, które mają kształt ostrosłupa.



3. Na zdjęciach wskaż te budowle lub ich fragmenty, które mają kształt ostrosłupa.

4. Ile najmniej ścian może mieć ostrosłup? Jaki wielokąt jest wtedy jego podstawą?

5. Przyjrzyjcie się rysunkom.



→ Jaki jest związek między liczbą boków w podstawie ostrosłupa a liczbą jego ścian, krawędzi i wierzchołków?

→ Czy istnieje ostrosłup, który ma 101 krawędzi?

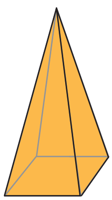
6. Oblicz długość krawędzi czworościanu foremnego, wiedząc że suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 54 cm.

7. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, wiedząc że suma długości wszystkich krawędzi wynosi 60 cm, a krawędź boczna ma 1 dm.

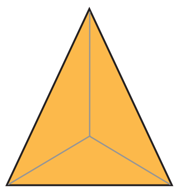
8. Oblicz długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, wiedząc że suma długości wszystkich krawędzi wynosi 90 cm, a krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.

9. Dobierz w pary szkic ostrosłupa i jego siatkę.

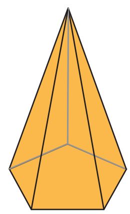
I.



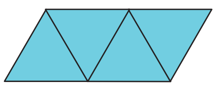
II.



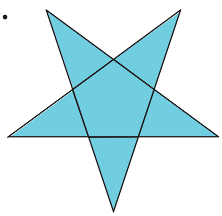
III.



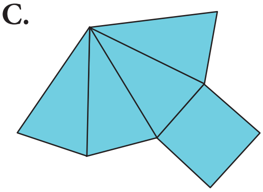
A.



B.



C.



10. Narysuj różne siatki czworościanu foremnego o krawędzi 3 cm.

11. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

a) o krawędzi podstawy 3 cm i krawędzi bocznej 4 cm.

b) o krawędzi podstawy 3 cm i wysokości ściany bocznej 4 cm.

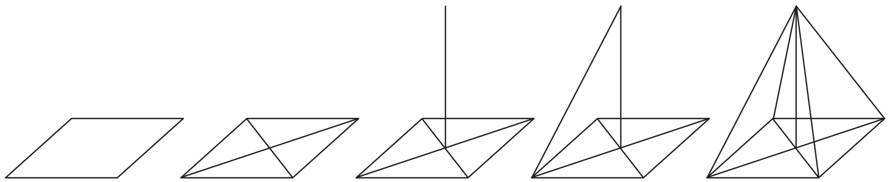
12. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 cm i krawędzi bocznej 5 cm.

13. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, wiedząc że przekątna jego podstawy ma 6 cm, a wysokość jego ściany bocznej 4 cm.

14. Narysujcie siatkę ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Czy długość krawędzi bocznej może być równa długości krawędzi podstawy? Uzasadnijcie odpowiedź.

85

15. Przeanalizujcie sposób rysowania ostrosłupa czworokątnego.



→ Opiszcie kolejne etapy szkicowania tego wielościanu.

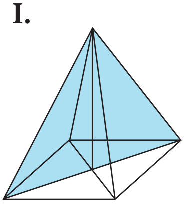
16. Naszkicuj ostrosłup prawidłowy

a) trójkątny. **b)** pięciokątny. **c)** sześciokątny.

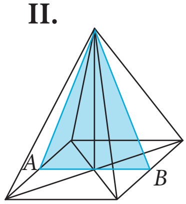
Szkicując bryłę, pamiętaj, aby jej odcinki równoległe i równej długości były na rysunku także równoległe i równej długości. Zwróć także uwagę, aby na rysunkach ważne odcinki się nie pokrywały.

17. Dobierz w pary zaznaczony przekrój z jego opisem.

I.

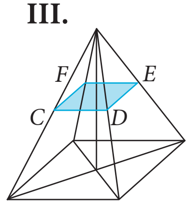


II.



A, *B* – środki krawędzi

III.



C, *D*, *E*, *F* – środki krawędzi

A. Przekrój wyznaczony przez środki krawędzi bocznych.

B. Przekrój wyznaczony przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa.

C. Przekrój wyznaczony przez wysokości dwóch przeciwległych ścian bocznych.

18. Naszkicuj ostrosłup prawidłowy trójkątny *ABCS*. Narysuj przekrój wyznaczony przez wysokość podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Jaką figurą jest ten przekrój?

19. Naszkicuj ostrosłup prawidłowy trójkątny *ABCS*. Zaznacz środki krawędzi bocznych. Narysuj przekrój wyznaczony przez te punkty. Jaką figurą jest uzyskany przekrój?

20. Naszkicuj ostrosłup prawidłowy trójkątny *ABCS*. Narysuj przekrój wyznaczony przez wysokość ściany bocznej i przeciwległą krawędź boczną. Jaką figurę tworzy ten przekrój?

WZÓR EULERA

I. Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma ostrosłup

a) trójkątny? **b)** pięciokątny? **c)** dziesięciokątny?

II. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, który ma

a) 6 ścian? **b)** 12 krawędzi? **c)** 13 wierzchołków?

III. Ostrosłup ma 20 ścian bocznych. Ile ma wierzchołków, wszystkich ścian i krawędzi?

IV. W pewnym ostrosłupie wszystkich ścian, krawędzi i wierzchołków jest łącznie

a) 30. **b)** 62. **c)** 802.

→ Jaki wielokąt jest jego podstawą?

V. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, gdy

a) suma liczby jego ścian i liczby wierzchołków wynosi 20?

b) suma liczby jego krawędzi i liczby ścian wynosi 31?

c) różnica między liczbą krawędzi a liczbą wierzchołków wynosi 15?

d) liczba ścian jest równa liczbie wierzchołków?

VI. Podstawą ostrosłupa jest dowolny n-kąt. Zapiszcie wzór na

a) liczbę wszystkich ścian.

b) liczbę krawędzi.

c) liczbę wierzchołków.

d) sumę liczby wszystkich ścian, liczby krawędzi i liczby wierzchołków tego ostrosłupa.

VII. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, w którym liczba krawędzi jest o 6, o 9, o k większa od liczby wierzchołków?

VIII. Sprawdź na kilku przykładach, czy dla ostrosłupów prawdziwy jest wzór Eulera: $w - k + s = 2$, gdzie w oznacza liczbę wierzchołków, s – liczbę ścian, a k – liczbę krawędzi. Sformułuj słownie podaną zależność.

Przekrój czworościanu foremnego płaszczyzną równoległą do podstawy jest trójkątem równobocznym. Jakie inne wielokąty mogą być przekrojami czworościanu foremnego? Wykonaj plakat.

Czy można otrzymać czworościan, „odcinając” z czworościanu część zawierającą jeden z jego wierzchołków?

Sprawdź sam siebie

A. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa mającego

a) trzynaście ścian?
b) piętnaście wierzchołków?
c) dziesięć krawędzi bocznych?
d) czterdzieści krawędzi?

B. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym suma długości krawędzi podstawy oraz krawędzi bocznych jest równa 240 cm. Krawędź podstawy jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej.

C. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego

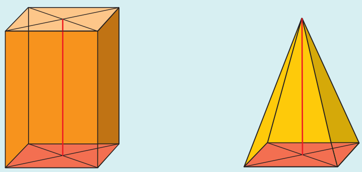
a) podstawą jest trójkąt równoboczny o boku 2 cm, a krawędzie boczne mają po 4 cm.

b) podstawą jest kwadrat o przekątnej 6 cm, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o ramionach 4 cm.

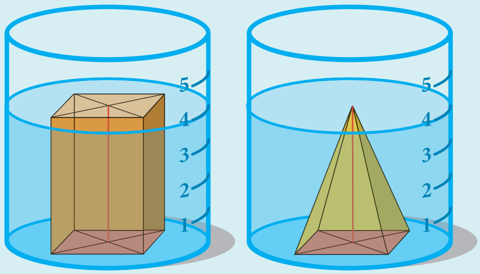
D. Naszkicuj ostrosłup prawidłowy sześciokątny i zaznacz w nim przekrój wyznaczony przez wierzchołek ostrosłupa i najdłuższą przekątną podstawy.

Trzy w jednym

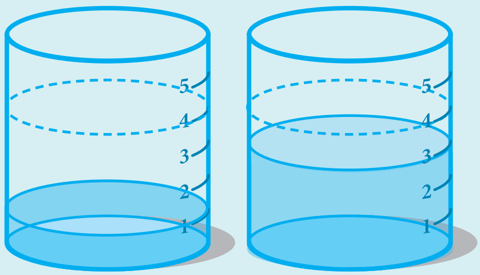
Uczniowie klasy 2c na lekcji matematyki przeprowadzili doświadczenie.



Do doświadczenia wykorzystali model graniastosłupa i ostrosłupa. Obie bryły miały jednakowe podstawy i równe wysokości.



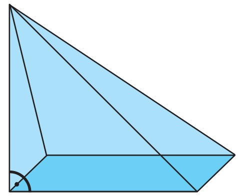
Uczniowie umieścili bryły w dwóch jednakowych menzurkach i nalali wody do poziomu wysokości brył. Wysokość słupa wody w obu menzurkach była jednakowa.



Następnie wyjęli bryły z wody.

- → Jaki był poziom wody w menzurkach przed wyjęciem brył?
- → Jaki był poziom wody w każdej z menzurek po wyjęciu brył?
- → Jaka jest objętość graniastosłupa? A jaka ostrosłupa?
- → Ile razy objętość ostrosłupa jest mniejsza od objętości graniastosłupa?

1. Wytnijcie z zeszytu ćwiczeń trzy składanki i zbudujcie z nich modele brył.

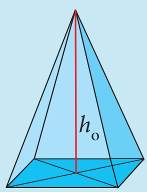


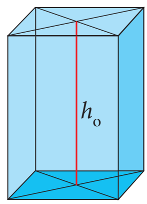
- → Opiszcie powstałe modele ostrosłupów.
- → Jakie wielokąty są podstawami tych ostrosłupów, a jakie wielokąty tworzą ściany boczne?
- → Czy te ostrosłupy są ostrosłupami foremnymi?
- → Wskażcie w każdym z ostrosłupów krawędź prostopadłą do podstawy.
- → Porównajcie długość tej krawędzi z długością krawędzi podstawy.
- → Wskażcie w każdym z tych ostrosłupów ściany boczne prostopadłe do podstawy.
- → Ułóżcie z tych trzech ostrosłupów sześcian.
- → Jaką długość ma krawędź tego sześcianu?
- → Ile razy mniejsza jest objętość jednego z tych ostrosłupów od objętości powstałego sześcianu?

2. Zaprojektujcie siatki graniastosłupa i ostrosłupa o tej samej podstawie i wysokości. Zbudujcie z tych siatek bryły. Sprawdźcie doświadczalnie, że objętość powstałego ostrosłupa jest trzy razy mniejsza od objętości zbudowanego graniastosłupa. Do wymierzenia objętości graniastosłupa możecie użyć soli lub piasku.

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynu pola podstawy P_p i wysokości ostrosłupa h_o.

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h_o$$





$V = P_p \cdot h_o$

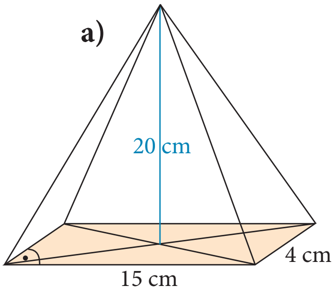
3. Graniastosłup i ostrosłup mają jednakowe pola podstawy i objętości. Jaka jest wysokość ostrosłupa, jeżeli wysokość graniastosłupa wynosi 10 cm?

4. Graniastosłup i ostrosłup mają jednakowe wysokości i objętości. Jakie jest pole podstawy ostrosłupa, jeżeli pole podstawy graniastosłupa wynosi 25 cm^2?

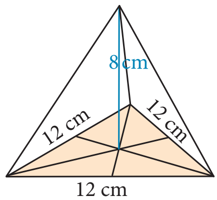
5. Objętość graniastosłupa wynosi 60 cm^3, a pole podstawy jest równe 20 cm^2. Oblicz, jaką wysokość musi mieć ostrosłup o takiej samej podstawie i objętości.

6. Oblicz objętość ostrosłupa. Potrzebne wymiary odczytaj z rysunku.

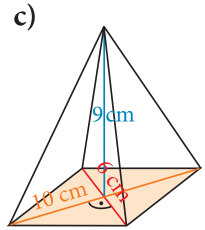
a)



b)



c)



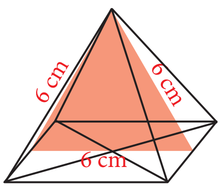
7. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości odpowiednio 6 cm i 8 cm. Jedna z krawędzi bocznych wychodzących z tego samego wierzchołka co przyprostokątne jest prostopadła do podstawy i ma długość 1,5 dm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

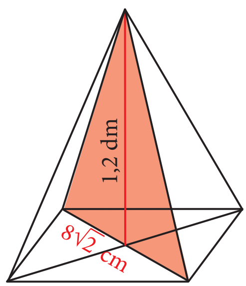
8. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekrój przedstawiony na rysunku jest

a) trójkątem równobocznym o boku 6 cm.

87

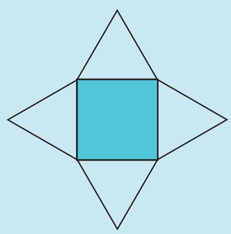
b) trójkątem równoramiennym o podstawie $8\sqrt{2}$ cm i wysokości 1,2 dm.



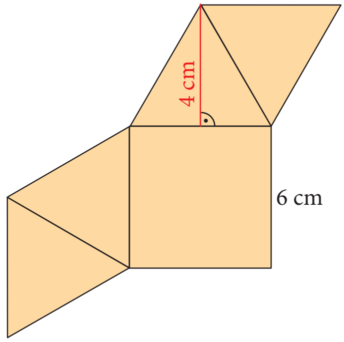


Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa P_c jest sumą pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b.

$$P_c = P_p + P_b$$



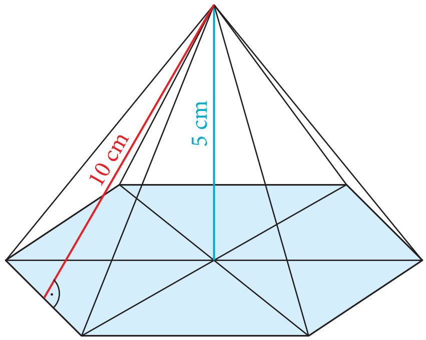
9. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



10. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi 8 cm.

11. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym każda krawędź ma długość 10 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

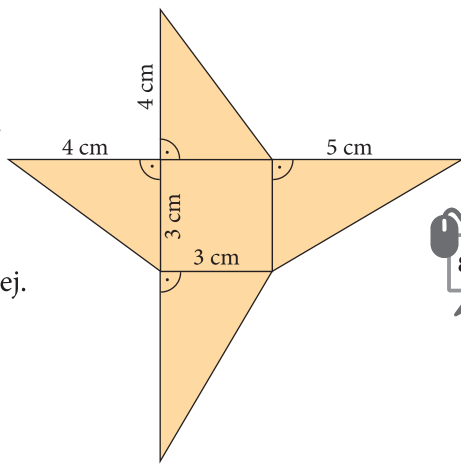
12. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Potrzebne wymiary odczytaj z rysunku.



13. Czy istnieje ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest równe 144 cm^2, a krawędź podstawy ma 12 cm? Uzasadnijcie odpowiedź.

14. Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości 12 cm, polu powierzchni całkowitej 360 cm^2 i polu powierzchni bocznej równym 260 cm^2.

15. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku. Wyznacz dla każdej ściany bocznej długość wysokości opuszczonej do przeciwprostokątnej.



88

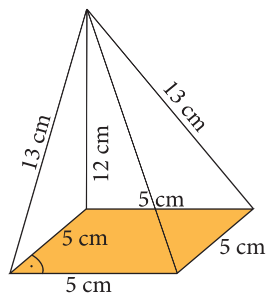
Sprawdź sam siebie

A. Objętość graniastosłupa wynosi 120 cm^3. Ile wynosi objętość ostrosłupa o tej samej podstawie i wysokości?

B. Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie będącej trójkątem prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 4 cm i 6 cm, jeśli krawędź boczna prostopadła do podstawy ma długość 8 cm.

C. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 3 cm, wysokości ściany bocznej 5 cm i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

D. Oblicz pole powierzchni i objętość ostrosłupa przedstawionego na rysunku.

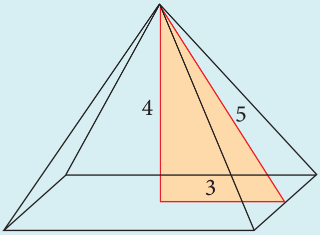


Pitagoras w Egipcie

Największą piramidą w Egipcie jest piramida Cheopsa.

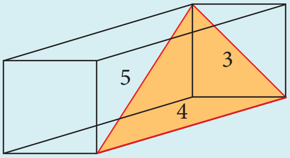
→ Jaki kształt ma piramida Cheopsa?

Przyjmując pewne przybliżenia zależności między wymiarami piramidy, można w niej dostrzec trójkąt egipski.



→ Które odcinki piramidy Cheopsa tworzą trójkąt egipski?

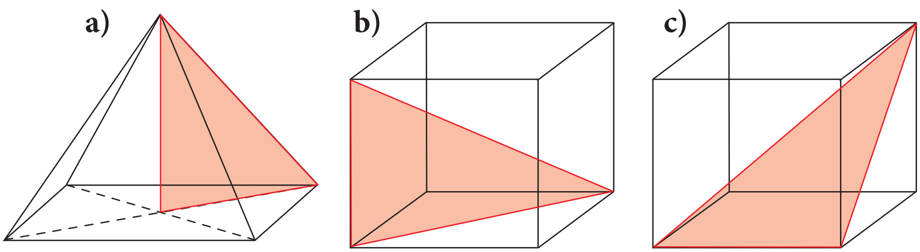
W piramidzie Cheopsa znajduje się komnata, nazywana Komnatą Królewską. W niej również można dostrzec trójkąt egipski.



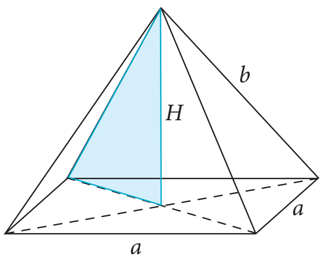
→ Jaki kształt ma Komnata Królewska w piramidzie Cheopsa?

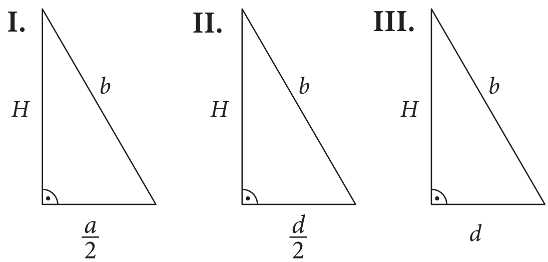
→ Które odcinki w Komnacie Królewskiej tworzą trójkąt egipski? Które z nich wyznaczają kąt prosty?

1. Na rysunku zaznaczono trójkąt prostokątny. Które odcinki bryły wyznaczają kąt prosty w zaznaczonym trójkącie?



2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości H, krawędzi podstawy a, przekątnej podstawy d i krawędzi bocznej b zaznaczono trójkąt prostokątny.

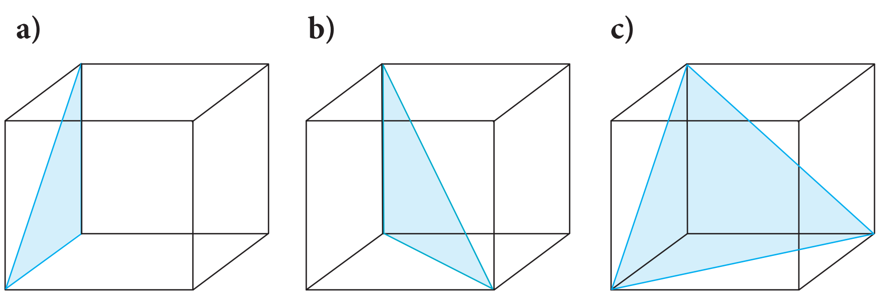




→ Który z trójkątów przedstawia trójkąt zaznaczony na modelu bryły?

→ Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, opisz zależność między długościami boków wskazanego trójkąta.

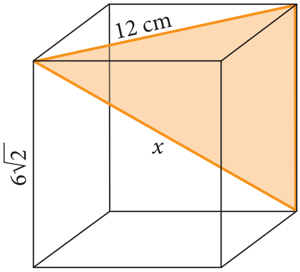
3. W sześcianie o krawędzi a, przekątnej ściany d i przekątnej sześcianu k zaznaczono trójkąt. Narysuj ten trójkąt i wyznacz długości jego boków.



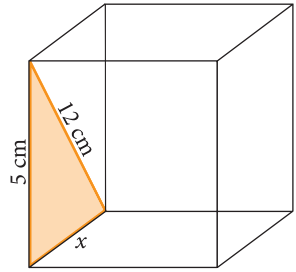
→ Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, opisz zależność między długościami boków narysowanego trójkąta.

4. Na modelu prostopadłościanu mającego w podstawie kwadrat zaznaczono trójkąt. Narysuj ten trójkąt. Wyznacz długości jego boków oraz x.

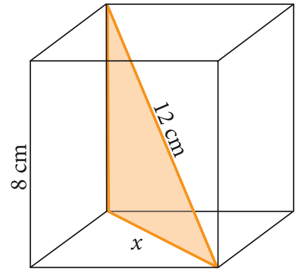
a)



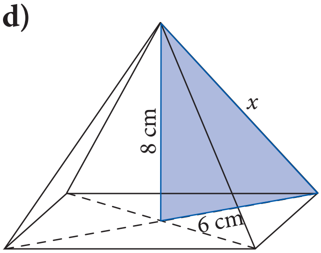
b)



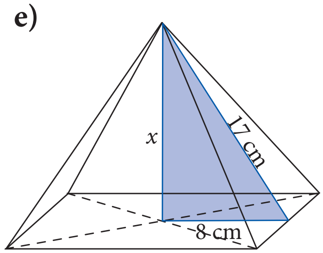
c)



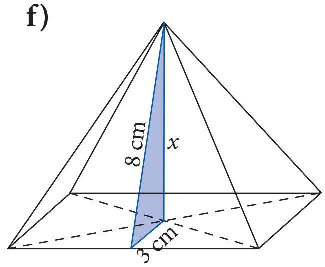
d)



e)



f)



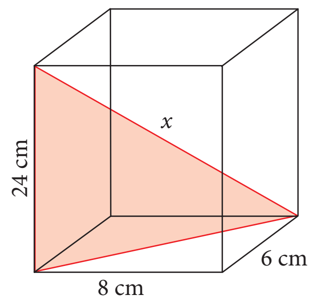
5. W prostopadłościanie o wymiarach 6 cm × 8 cm × 24 cm zaznaczono trójkąt prostokątny.

→ Narysuj ten trójkąt.

→ Które odcinki tego prostopadłościanu są przyprostokątnymi zaznaczonego trójkąta? Wyznacz ich długości.

→ Zapisz zależność między długościami boków narysowanego trójkąta.

→ Wyznacz długość przekątnej prostopadłościanu.



6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ma 10 cm, krawędź podstawy 8 cm, a krawędź boczna jest równa b.

→ Jaką figurą jest podstawa ostrosłupa?

→ Naszkicuj ten ostrosłup.

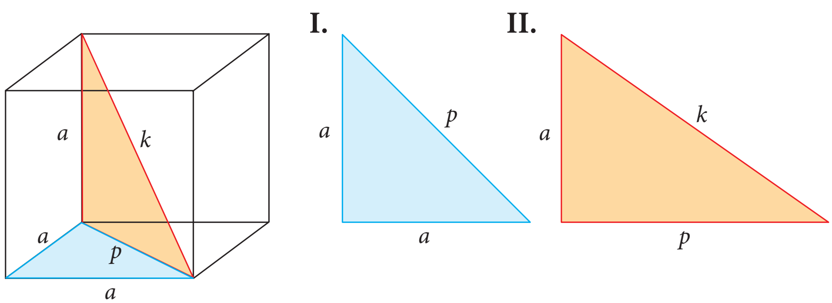
→ Oblicz długość przekątnej podstawy ostrosłupa.

- Zaznacz trójkąt prostokątny, w którym jednym z boków jest krawędź boczna b, a drugim wysokość ostrosłupa.
- Narysuj ten trójkąt i opisz jego boki.
- Opisz równaniem zależność między długościami boków narysowanego trójkąta.
- Wyznacz długość krawędzi bocznej b.

7. Podstawa prostopadłościanu ma boki długości 12 cm i 16 cm. Przekątna prostopadłościanu ma 29 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu.

8. Oblicz wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma 16 cm, a wysokość ostrosłupa 15 cm.

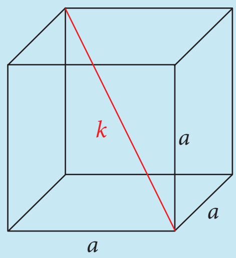
9. Przyjrzyjcie się rysunkom.



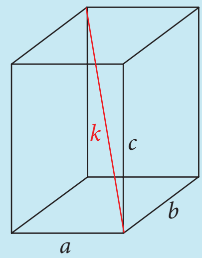
- Które odcinki sześcianu oznaczono przez a, p i k?
- Opiszcie równaniem zależność między długościami boków w każdym z trójkątów.
- Z równania dla I trójkąta wyznaczcie p^2 i podstawcie otrzymane wyrażenie do równania dla II trójkąta.
- Podajcie wzór na k.

a) Przeprowadźcie analogiczne rozumowanie dla prostopadłościanu i wyznaczcie wzór na długość przekątnej prostopadłościanu.

b) Wyznaczcie długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach: x, $2x$, $4x$.



$k = a\sqrt{3}$



$k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

W sześcianie o krawędzi a przekątna ma długość $a\sqrt{3}$.

W prostopadłościanie o wymiarach $a \times b \times c$ przekątna ma długość $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

10. Oblicz długość przekątnej sześcianu o krawędzi

a) 2 cm. **b)** 3 cm.

11. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach

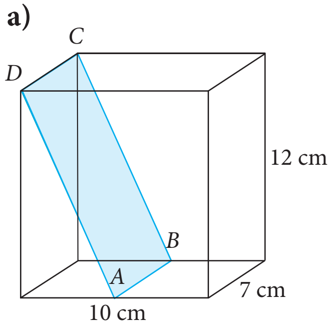
a) 2 cm × 2 cm × 1 cm. **b)** 2 cm × 4 cm × 7 cm.

12. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma 14 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, jeśli jego wysokość wynosi 6 cm.

13. Oblicz krawędź sześcianu, wiedząc że jego przekątna ma 9 cm.

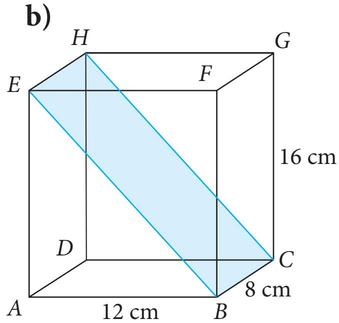
14. Oblicz pole zaznaczonego przekroju prostopadłościanu.

a)



Punkty A i B są środkami krawędzi podstawy. Punkty C i D to wierzchołki prostopadłościanu.

b)

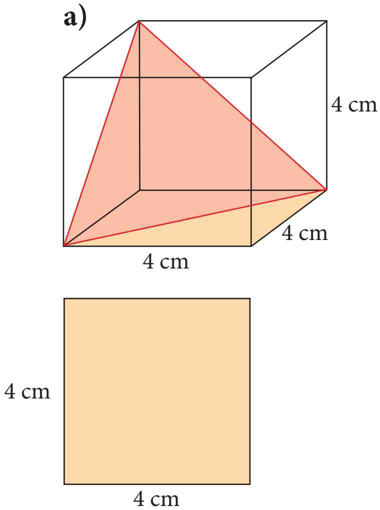


Punkty B, C, E i H są wierzchołkami prostopadłościanu.

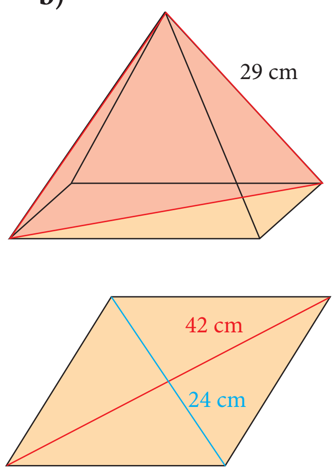
15. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma 6 cm, a krawędź boczna 12 cm. Oblicz pole przekroju wyznaczonego przez najdłuższą przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa.

16. Na rysunku przedstawiono bryłę i jej podstawę. Oblicz pole zaznaczonego przekroju.

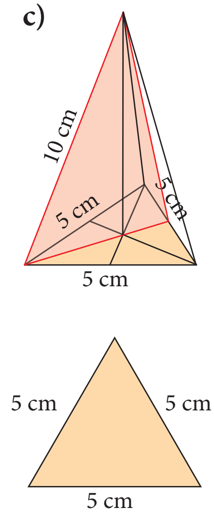
a)



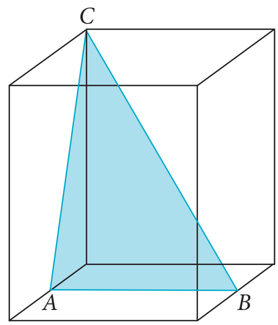
b)



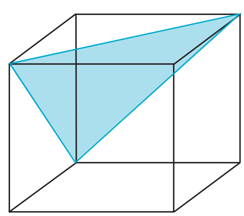
c)



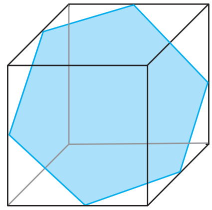
17. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma 5 cm, a wysokość 9 cm. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli punkty A i B są środkami przeciwległych boków podstawy dolnej, a punkt C wierzchołkiem podstawy górnej.



18. Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 8 cm. Podstawą tego graniastosłupa jest romb o przekątnych 24 cm i 18 cm. Oblicz pole i obwód przekroju wyznaczonego przez dłuższą przekątną podstawy górnej i wierzchołek przy kącie rozwartym podstawy dolnej.



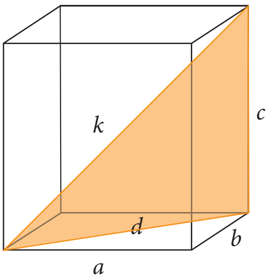
Sześciokąt jest przekrojem sześcianu wyznaczonym przez środki krawędzi. Ile razy większe jest pole powierzchni tego sześcianu od pola zaznaczonego przekroju?



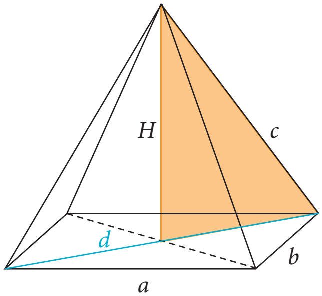
Sprawdź sam siebie

Rysunki przedstawiają modele brył mających w podstawach prostokąty. Na każdym zaznaczo pewien trójkąt prostokątny.

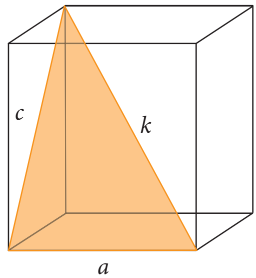
I.



II.



III.



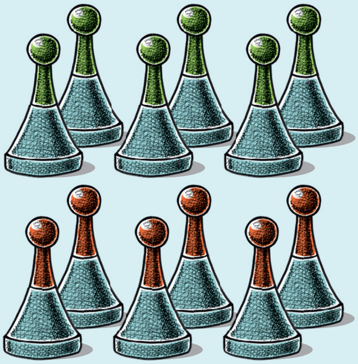
A. Narysuj trójkąty zaznaczone na każdym z rysunków. Dla każdego trójkąta opisz równaniem zależność między długościami jego boków.

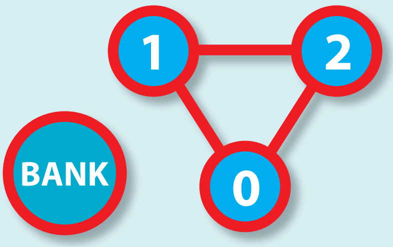
B. Oblicz długość przekątnej k prostopadłościanu przedstawionego na rysunku I, jeżeli $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm.

C. Oblicz pole trójkąta zaznaczonego na rysunku II, jeżeli $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 13$ cm.

D. Oblicz długość odcinka c bryły na rysunku III, jeżeli $a = 3$ cm, a $k = 9$ cm.

Wyścigi pionków





Rezultat rzutu	Wynik
Dwie reszki	0
Orzeł i reszka	1
Dwa orły	2

Tabela 1

		I moneta	
			
II moneta		**0**	**1**
		**1**	**2**

Tabela 2

„Wyścig pionków” to gra dla 3 osób.

Każdy gracz ma 6 pionków.
Pierwszy wybiera jedno pole (z numerem 1, 2 lub 0) i stawia na nim wszystkie swoje pionki.
Drugi gracz umieszcza swoje pionki na jednym z wolnych pól.
Trzeci gracz stawia na ostatnim wolnym polu.

Gracze rzucają kolejno dwiema monetami i odczytują wynik z tabeli 1.
Jeśli pionki rzucającego stoją na polu z takim numerem jak uzyskany wynik, to gracz przesuwa jeden pionek do banku. Wygrywa ten, który jako pierwszy umieści wszystkie swoje pionki w banku.
Po rozgrywce gracze zamieniają się rolami i grają tak długo, aż każdy z nich będzie pierwszy, drugi i trzeci w tej grze.

➜ Na którym polu najkorzystniej jest ustawić swoje pionki?

➜ Zagrajcie w tę grę.

➜ Czy sprawdziły się wasze przypuszczenia?

Schemat wyników w pojedynczym rzucie monetą pokazuje tabela 2.

➜ Ile układów monet powoduje ruch pionka z pola 1?

➜ A ile układów monet powoduje ruch pionka z pola 2?

➜ Na którym polu należałoby postawić pionki, aby mieć największe szanse na wygraną?

1. Przed meczem piłkarskim kapitanowie wybierają stronę monety. Sędzia rzuca monetą. Kapitan, który trafnie odgadł wynik rzutu monetą, ma prawo wyboru części boiska lub pierwszeństwa w grze.

a) Czy o tym, jakim wynikiem zakończy się rzut monetą, decyduje przypadek?

b) Czy rzut monetą jest doświadczeniem losowym?

c) Czy zdarzenie „wypadnie orzeł" oraz zdarzenie „wypadnie reszka" są jednakowo prawdopodobne?

2. Często o pierwszeństwie w grze decyduje rzut kostkami. Pewną grę rozpoczyna ten, kto w rzucie dwiema kostkami wyrzuci łącznie najwięcej oczek.

a) Jakie wyniki można uzyskać w rzucie dwiema kostkami?

b) Czy o tym, kto pierwszy rozpocznie grę, decyduje przypadek?

c) Czy rzut dwiema tradycyjnymi kostkami jest doświadczeniem losowym?

d) Jakie rzuty sprzyjają zdarzeniu „wypadło 12 oczek", a jakie – „wypadło 7 oczek"?

e) Które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne: „wypadło łącznie 12 oczek" czy „wypadło łącznie 7 oczek"?

Jeśli kilku graczy wyrzuci najwyższą liczbę oczek, to gracze ci muszą powtórzyć rzuty.

Doświadczeniami losowymi nazywamy takie zjawiska i eksperymenty, których wynik zależy od przypadku.

Zdarzeniem nazywamy wynik lub wyniki doświadczenia losowego.

Na przykład w doświadczeniu losowym polegającym na dwukrotnym rzucie monetą wszystkie możliwe wyniki to:
(o, o), (o, r), (r, o), (r, r), przy czym o oznacza, że wypadł orzeł, r – wypadła reszka.
Zdarzeniem A – „co najmniej raz wypadł orzeł" – są wyniki: (o, o), (o, r), (r, o).
O każdym z tych wyników mówimy, że **sprzyja zdarzeniu** $\boldsymbol{A}$.

Zdarzeniem niemożliwym nazywamy zdarzenie, któremu nie sprzyja żaden wynik doświadczenia.

Zdarzeniem pewnym nazywamy zdarzenie, któremu sprzyjają wszystkie wyniki doświadczenia.

3. Doświadczenie polega na rzucie sześcienną kostką do gry.

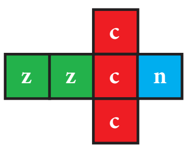
→ Wypisz wszystkie wyniki tego doświadczenia.

→ Wypisz wszystkie wyniki sprzyjające zdarzeniu polegającemu na otrzymaniu parzystej liczby oczek.

→ Jakie zdarzenie jest zdarzeniem pewnym, a jakie – niemożliwym?

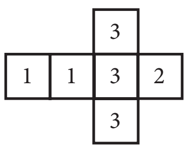
4. Z sześcianu, oprócz typowej kostki do gry, można utworzyć inne kostki, np. przez pokolorowanie ścian albo rozmieszczenie na ścianach różnych liczb. Rysunki przedstawiają siatki różnych kostek. Kolory lub liczby na ściankach oznaczają umownie typ kostki, który opisano pod każdą z narysowanych siatek.

I.



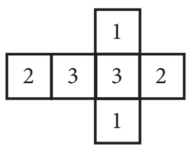
n-z-z-c-c-c

II.



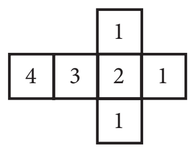
1-1-2-3-3-3

III.



1-1-2-2-3-3

IV.



1-1-1-2-3-4

→ Wypiszcie wszystkie możliwe wyniki jednokrotnego rzutu kostką każdego typu.

→ Oceńcie, jakie są szanse wyrzucenia

a) koloru niebieskiego kostką typu n-z-z-c-c-c.

b) liczby 2 kostką typu 1-1-2-3-3-3.

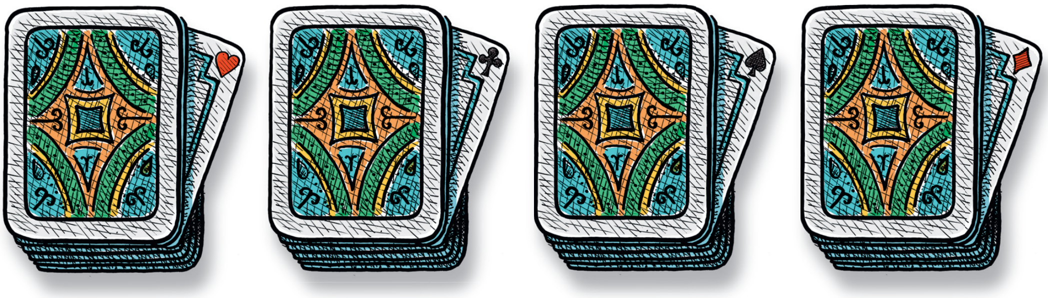
→ Podajcie przykłady zdarzeń jednakowo prawdopodobnych w doświadczeniach polegających na rzucie kostką I oraz rzucie kostką II.

→ Co jest najbardziej prawdopodobne: wyrzucenie liczby 1 kostką II, III czy IV?

→ Narysujcie kolorową siatkę kostki, aby szansa wylosowania nią koloru niebieskiego była taka jak liczby 1 na kostce IV, koloru czerwonego – jak liczby 2 na kostce IV, a koloru zielonego – jak liczby 3 na kostce IV.

5. Losujemy jedną kartę z pełnej talii.

Talia składa się z 52 kart.



a) Ile jest możliwych wyników wylosowania jednej karty z talii?

b) Kasia chce wylosować kartę z sercem, czyli kierową. Ile jest wyników sprzyjających temu zdarzeniu? Jakie są szanse wylosowania karty w tym kolorze?

c) Jacek chce wylosować kartę czarną, czyli pik lub trefl. Ile jest wyników sprzyjających temu zdarzeniu? Jakie są szanse wylosowania takiej karty?

Kolory w kartach to: kier, trefl, pik i karo. Figury to: as, król, dama i walet.

! Jeżeli wszystkie wyniki pewnego doświadczenia losowego są tak samo prawdopodobne, to możemy określić szanse zajścia pewnej sytuacji, wyznaczając liczbę wyników sprzyjających i dzieląc ją przez liczbę wszystkich wyników.

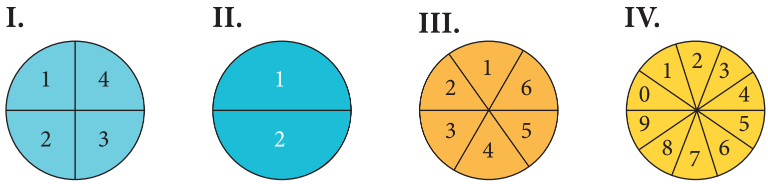
Przykład:

Doświadczenie polega na wylosowaniu jednej karty z talii 52 kart. Wszystkie wyniki są tak samo prawdopodobne i jest ich 52.

Są 2 wyniki sprzyjające zdarzeniu „wylosowano waleta czerwonego koloru”: wylosowano waleta kier i wylosowano waleta karo. Stąd szanse wylosowania wynoszą $\frac{2}{52}$, czyli $\frac{1}{26}$.

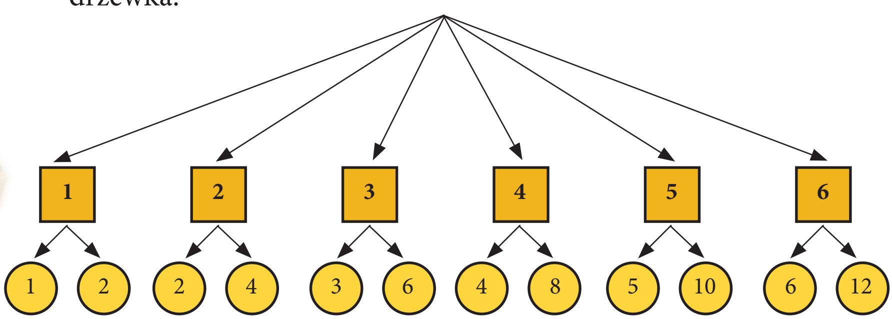
6. W loterii przygotowanej przez klasę 2a jest 20 losów, w tym 2 wygrywające, a w loterii przygotowanej przez klasę 2b jest 50 losów, w tym 5 wygrywających. Na której loterii mamy większą szansę wygrać, jeśli kupimy 1 los?

7. Rysunki przedstawiają różne rodzaje ruletek. W każdej ruletce tarczę koła podzielono na części, a wokół środka tej tarczy swobodnie obraca się wskazówka. Po wprawieniu w ruch wskazówki obserwujemy, na której liczbie się zatrzyma.



- Jakie są wszystkie możliwe wyniki losowań przy użyciu każdej z ruletek?
- Z jakim doświadczeniem losowym można skojarzyć losowanie za pomocą ruletki z rysunku II? A z jakim z rysunku III?
- Jakie są szanse wylosowania liczby 6 w przypadku ruletki z rysunku III, a jakie – w przypadku ruletki z rysunku IV?
- Jakie są szanse wylosowania za pomocą tych ruletek liczby nieparzystej?
- Jakie są szanse wylosowania za pomocą tych ruletek liczby mniejszej od 4?
- Jakie są szanse wylosowania liczby większej niż 4 za pomocą ruletki I, III, IV?

8. Rzucamy kostką do gry i monetą. Jeśli wypadnie orzeł, mnożymy wynik z kostki przez 2, jeśli reszka – pozostawiamy go bez zmian. Wyniki tego doświadczenia przedstawiono przy użyciu drzewka:



a) Zastanów się, co opisuje każda z „gałęzi” drzewka.

b) Ile jest wszystkich wyników? Ile jest wyników sprzyjających otrzymaniu liczby parzystej? Jakie są szanse otrzymania w tym doświadczeniu liczby parzystej?

c) Ile jest wyników sprzyjających otrzymaniu liczby nieparzystej? Jakie są szanse otrzymania w tym doświadczeniu liczby nieparzystej?

9. Na początku masz 0 punktów. Teraz rzucasz monetą. Jeśli wypadnie orzeł, dodajesz 2 punkty, jeśli reszka, mnożysz zdobyte punkty przez 2. Rzucasz drugi raz. Jeśli wypadnie orzeł, dodajesz 2 punkty, jeśli reszka, mnożysz zgromadzone punkty przez 2.

→ Narysuj drzewko ilustrujące to doświadczenie.

→ Wypisz wszystkie możliwe do uzyskania wyniki. Który z nich jest najbardziej prawdopodobny? Wyznacz szanse tego wyniku.

→ Czy możesz po obu rzutach mieć nadal 0 punktów? Jakie są szanse tego zdarzenia?

10. Doświadczenie polega na wielokrotnym rzucie monetą. Rzucamy 10 razy. Jeśli 3 razy wypadł orzeł, to powiemy, że częstość względna wystąpienia orła wynosi $\frac{3}{10}$. W dwudziestokrotnym rzucie orzeł wypadł 13 razy. Wynika z tego, że częstość względna wystąpienia orła wynosi $\frac{13}{20}$. Ogólnie możemy powiedzieć, że jeśli n razy rzucamy monetą i k razy wypadł orzeł, to częstość wystąpienia orła wynosi k, a częstość względna $\frac{k}{n}$.

Wyniki rzutów monetą przedstawiono w poniższej tabeli.

Liczba rzutów monetą *n*	10	20	30	40	80		120
Liczba uzyskanych orłów *k*	3	13	18		42	49	61
Częstość względna wystąpienia orła $\frac{k}{n}$	0,3	0,65		0,5	0,525	0,49	

a) Jakie liczby można wpisać w puste pola tabeli?

b) Jak zmienia się, wraz ze wzrostem liczby rzutów, częstość względna otrzymania orła $\frac{k}{n}$?

c) Wykonaj 100 rzutów monetą i sporządź tabelę, w której zanotujesz: liczbę orłów, częstość oraz częstość względną otrzymywania orła po 10, 20, 30, ..., 100 rzutach.

11. Wykonajcie 30 razy rzut monetą. Ile otrzymaliście reszek? Wynik zapiszcie w tabeli.

Liczba reszek w rzucie monetą to częstość reszki. W tym doświadczeniu stosunek częstości reszki do liczby wszystkich wyników to częstość względna reszki.

Liczba rzutów	Liczba reszek	Częstość względna

→ Porównajcie swoje wyniki. Co można powiedzieć o uzyskanych częstościach względnych?

→ Jaka jest częstość względna otrzymania reszki po wykonaniu 40 rzutów monetą? A jaka po 80 rzutach?

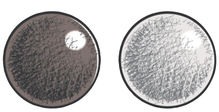
→ Do jakiej liczby zbliżone są częstości względne otrzymania reszki?

Notując wyniki doświadczeń, możemy badać częstości względne doświadczalne występowania pewnych zdarzeń. Jeśli przeprowadzimy odpowiednio dużo doświadczeń, to częstości względne doświadczalne powinny dać wynik zbliżony do szans obliczonych teoretycznie.

12. Wykonaj 20 rzutów dwiema kostkami do gry i sporządź odpowiednią tabelę. Za każdym razem zapisz, czy suma wyrzuconych oczek jest parzysta, czy nieparzysta. Oblicz częstość względną występowania nieparzystej liczby oczek. Porównaj wyniki z wynikami kolegów.

13. Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane 1, 2 i 3 losujemy najpierw jedną kulę, a potem drugą. Zapisane w kolejności numery kul tworzą liczbę dwucyfrową.
Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego losowania, jeśli wylosowanej kuli nie zwracamy do urny. Przedstaw przebieg tego losowania za pomocą drzewka.
Oceń, jakie są szanse, że utworzona liczba będzie

a) parzysta. **b)** nieparzysta.
c) pierwsza. **d)** podzielna przez 3.



94

14. W urnie znajdują się 2 kule czarne i 1 biała. Losujemy dwie kule bez zwracania. Która szansa jest większa: szansa wylosowania dwóch kul czarnych czy szansa wylosowania dwóch kul różnokolorowych?

LOTTO

Popularną w Polsce grą liczbową jest Duży Lotek – Lotto. Gracz wybiera sześć liczb spośród 49 (od 1 do 49). Odpowiednia maszyna losuje sześć kul. Przebieg tego doświadczenia transmituje telewizja. Numer wylosowanej kuli jest wylosowaną liczbą.
Tabela przedstawia, jak często była wylosowana dana liczba w Dużym Lotku w okresie od 1 X 1990 do 1 X 2005 roku. Liczba losowań w podanym okresie wyniosła 1565.

Wylosowana liczba	Ile razy	Wylosowana liczba	Ile razy	Wylosowana liczba	Ile razy	Wylosowana liczba	Ile razy
1	187	14	188	26	202	38	203
2	208	15	182	27	213	39	185
3	177	16	174	28	195	40	174
4	193	17	211	29	210	41	208
5	168	18	201	30	196	42	184
6	195	19	189	31	201	43	174
7	182	20	200	32	193	44	164
8	182	21	226	33	177	45	195
9	188	22	197	34	227	46	201
10	184	23	209	35	171	47	175
11	197	24	215	36	195	48	172
12	175	25	200	37	182	49	180
13	191						

źródło: www.lotto.pl

- Oblicz częstość względną występowania każdej z liczb. Wyniki podaj z dokładnością do części setnych, a następnie przedstaw je w procentach. (Dokonaj podziału uczniów klasy na 5 grup, tak aby I grupa wykonała obliczenia dla liczb 1–10, II grupa 11–20 itd.).
- Jaka jest częstość względna wylosowania w podanym okresie liczb: 1, 7, 15, 28, 39, 45?
- Do jakiej liczby są zbliżone częstości względne wylosowania pozostałych liczb?
- Co zauważasz?

Koledzy proponują Ci udział w następującej grze.
Wpłacasz 1 zł i otrzymujesz możliwość rzutu trzema kostkami do gry. Jeśli wyrzucisz przynajmniej jedną szóstkę, to otrzymujesz zwrot wpłaconej złotówki i dodatkowo 2 złote za każdą wyrzuconą szóstkę. Jeżeli nie ma szóstki, przegrywasz swoją złotówkę.
Czy warto grać w tę grę?

Sprawdź sam siebie

A. Wskaż na poniższej liście eksperyment lub zjawisko, które można nazwać doświadczeniem losowym.

1. Losowanie uczestników dziecięcej zabawy za pomocą wyliczanki.

2. Losowanie zapałki bez główki spośród podanej liczby zapałek.

3. Zajęcie miejsca w teatrze na podstawie kupionego biletu.

B. Zapis przedstawia zestaw wyników rzutów kostką do gry.

4 2 3 3 2 5 1 6 1 3 6 5 4 2 5 2 3 6 1 4 1 4 2 6 5

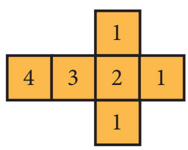
Ile wykonano rzutów?

Jaka jest częstość wystąpienia liczby 3? A częstość względna?

Jaka jest częstość względna wystąpienia liczby nieparzystej?

C. Dwie identyczne kule mają być rozmieszczone w szufladach oznaczonych I i II. Każdą kulę będzie umieszczać inna osoba w tajemnicy przed drugą. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

D. Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką, której siatkę przedstawia rysunek.



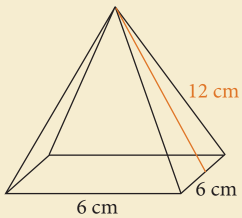
a) Jakie są szanse wylosowania liczby 1?

b) Jakie są szanse wylosowania liczby parzystej?

c) Jakie są szanse wylosowania liczby pierwszej?

Jak to rozwiązać? nr 6

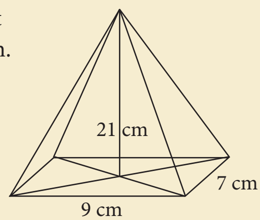
1. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości ściany bocznej 12 cm.

Wykonaj rysunek do zadania.	
Określ, jaki wielokąt jest podstawą tego ostrosłupa.	Podstawą analizowanego ostrosłupa jest kwadrat o boku 6 cm.
Oblicz pole podstawy ostrosłupa.	Ze wzoru na pole kwadratu otrzymujemy, że: $P_p = 6 \cdot 6$ $P_p = 36.$ Pole podstawy tego ostrosłupa jest równe 36 cm^2.
Określ, jakie trójkąty są ścianami bocznymi tego ostrosłupa.	Każda z czterech ścian bocznych tego ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym o podstawie 6 cm i wysokości 12 cm.
Oblicz pole powierzchni każdej ściany bocznej ostrosłupa. **Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.**	Pole jednej ściany bocznej jest równe: $P_s = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12$ $P_s = 3 \cdot 12$ $P_s = 36.$ W danym ostrosłupie wszystkie ściany boczne są jednakowe, zatem pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest sumą pól jego czterech ścian. $P_b = 4 \cdot 36$ $P_b = 144$ Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 144 cm^2.
Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.	Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest sumą pól podstawy i powierzchni bocznej. $P_c = P_p + P_b$ $P_c = 36 + 144$ $P_c = 180$
Zapisz odpowiedź.	Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe 180 cm^2.

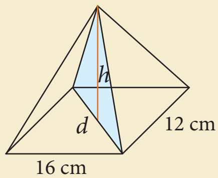
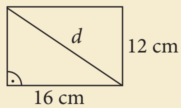
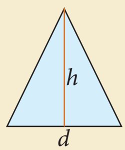
2. Suma długości krawędzi w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym jest równa 88 cm. Jaka jest długość krawędzi bocznej, jeżeli krawędź podstawy ma 8 cm?

Określ, jakim wielokątem jest podstawa ostrosłupa.	Podstawą analizowanego ostrosłupa jest kwadrat.
Ustal liczbę krawędzi bocznych i liczbę krawędzi podstawy.	W ostrosłupie liczba krawędzi bocznych jest równa liczbie krawędzi podstawy. W tym ostrosłupie są 4 krawędzie podstawy i 4 krawędzie boczne.
Opisz za pomocą równania sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.	Jeżeli za x przyjmiemy długość krawędzi bocznej, to: $4x + 4 \cdot 8 = 88$.
Rozwiąż otrzymane równanie.	$4x + 32 = 88$ $4x = 56$ $x = 14$
Zapisz odpowiedź.	Długość krawędzi bocznej ostrosłupa wynosi 14 cm.

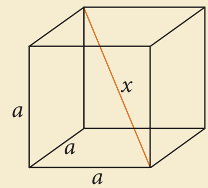
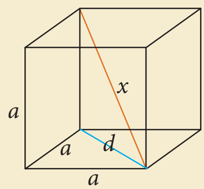
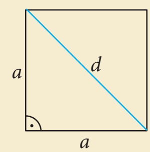
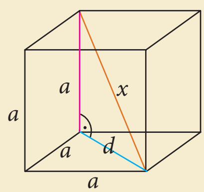
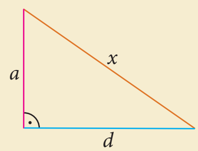
3. Jaka jest objętość ostrosłupa, który w podstawie ma prostokąt o bokach długości 7 cm i 9 cm, a jego wysokość jest równa 21 cm?

Określ, jaki wielokąt jest podstawą tego ostrosłupa.	Podstawą analizowanego ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 7 cm i 9 cm. 
Oblicz pole podstawy ostrosłupa.	Ze wzoru na pole prostokąta otrzymujemy, że: $P_p = 7 \cdot 9$ $P_p = 63$. Pole podstawy ostrosłupa jest równe 63 cm^2.
Oblicz objętość ostrosłupa.	Korzystając ze wzoru $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$, otrzymujemy: $V = \frac{1}{3} \cdot 63 \cdot 21$ $V = 21 \cdot 21$ $V = 441$.
Zapisz odpowiedź.	Objętość ostrosłupa jest równa 441 cm^3.

4. Dany jest ostrosłup, którego podstawą jest prostokąt o wymiarach 12 cm i 16 cm. Przekrój ostrosłupa, wyznaczony przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa, jest trójkątem równoramiennym o polu 120 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wykonaj rysunek do zadania.	
Oblicz długość wysokości ostrosłupa.	Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnej podstawy. $d^2 = 12^2 + 16^2$ $d^2 = 144 + 256$ $d^2 = 400$ $d = 20$  Przekątna podstawy ma 20 cm. Pole przekroju jest równe 120 cm^2; ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h$ wynika, że: $120 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot h$ $120 = 10 \cdot h$ $12 = h$.  Wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm.
Oblicz pole podstawy ostrosłupa.	Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 12 cm i 16 cm, zatem: $P_p = 12 \cdot 16$ $P_p = 192$. Pole podstawy jest równe 192 cm^2.
Oblicz objętość ostrosłupa.	Korzystając ze wzoru $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$, otrzymujemy: $V = \frac{1}{3} \cdot 192 \cdot 12$ $V = 64 \cdot 12$ $V = 768$.
Zapisz odpowiedź.	Objętość ostrosłupa wynosi 768 cm^3.

5. Oblicz długość przekątnej sześcianu, jeśli jego objętość jest równa 1331 cm^3.

Wykonaj rysunek do zadania.	Na rysunku kolorem zaznaczono przekątną sześcianu. 
Oblicz długość krawędzi sześcianu.	Ze wzoru na objętość sześcianu $V = a^3$ wynika, że: $a^3 = 1331$ $a = 11$. Długość krawędzi sześcianu wynosi 11 cm.
Oblicz długość przekątnej podstawy sześcianu.	Ze wzoru na przekątną kwadratu $d = a\sqrt{2}$ wynika, że przekątna podstawy ma długość $d = 11\sqrt{2}$.  
Oblicz długość przekątnej sześcianu.	Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zapisujemy zależność $d^2 + a^2 = x^2$. Po podstawieniu do zapisanego równania wyznaczonych wielkości otrzymujemy, że: $(11\sqrt{2})^2 + 11^2 = x^2$ $242 + 121 = x^2$ $363 = x^2$ $\sqrt{363} = x$ $11\sqrt{3} = x$.  
Zapisz odpowiedź.	Długość przekątnej tego sześcianu wynosi $11\sqrt{3}$ cm.

1. Jaka to bryła, której podstawą jest prostokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku?

2. Krawędź podstawy czworościanu foremnego ma 12 cm. Jaka jest łączna długość wszystkich jego krawędzi?

3. Przepisz do zeszytu i uzupełnij.

Podstawa ostrosłupa	Długość krawędzi podstawy	Wysokość ostrosłupa	Objętość ostrosłupa
kwadrat		11	33
prostokąt	4 i 3		28
trójkąt równoboczny	7	8	

4. Oblicz pole podstawy ostrosłupa o objętości 18 cm^3 i wysokości 2 cm.

5. Wyznacz wysokość ostrosłupa o polu podstawy 9 cm^2 i objętości 45 cm^3.

6. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 3 cm i krawędzi bocznej 5 cm.

7. Oblicz objętość piramidy Cheopsa, jeśli krawędź podstawy piramidy ma ok. 227 m, a jej wysokość ok. 137 m. Przyjmij, że podstawą piramidy jest kwadrat.

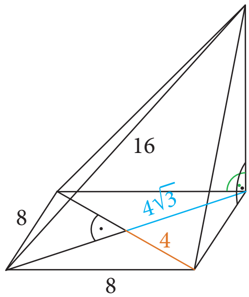
8. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 7 cm × 13 cm. Jedna z krawędzi bocznych ma długość 18 cm i jest prostopadła do podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

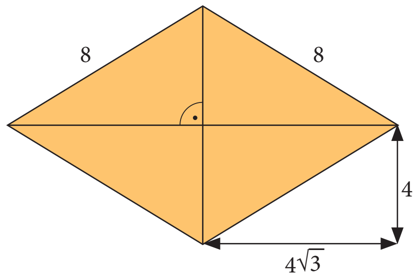
9. Narysuj w skali 1 : 2 siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt o wymiarach 6 cm × 8 cm, a wysokości ścian bocznych mają długości 4 cm i 3 cm.

10. W sześcianie o krawędzi 6 cm odcięto jeden narożnik płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz objętość odciętego narożnika.

11. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości ściany bocznej 15 cm.

12. Oblicz pole podstawy i objętość narysowanego ostrosłupa, wiedząc że jego podstawą jest romb.





13. Z graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości 648 cm^3 wycięto ostrosłup o takiej samej podstawie i wysokości. Oblicz objętość powstałej bryły.

14. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 5 i objętości 60.

15. Dwa jednakowe czworościany foremne o krawędzi 4 cm połączono ze sobą podstawami. Oblicz pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.

16. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe 60 cm^2. Pole jego podstawy wynosi $4\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wysokość ściany bocznej.

17. Na sześcianie o objętości 216 cm^3 ustawiono ostrosłup o wysokości 4 cm i podstawie identycznej jak ściana sześcianu. Oblicz pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.

18. W losowaniu bez zwracania trzech kul z urny z pięcioma kulami ponumerowanymi od 1 do 5 podaj przykład zdarzenia

a) możliwego. **b)** niemożliwego. **c)** pewnego.

19. W loterii przygotowanej przez klasę 2a jest 120 losów, w tym 18 wygrywających. W loterii przygotowanej przez klasę 2b jest 150 losów, w tym 21 wygrywających. Na której loterii mamy większe szanse wygrania, jeśli kupimy 1 los?

20. Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane 3, 4 i 6 losujemy najpierw jedną kulę, a potem drugą. Zapisane w kolejności numery kul tworzą liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego losowania, jeśli wylosowanej kuli nie zwracamy do urny. Przedstaw przebieg tego losowania za pomocą drzewka.

Oceń, jakie są szanse, że utworzona liczba będzie

a) parzysta.

b) nieparzysta.

c) podzielna przez 3.

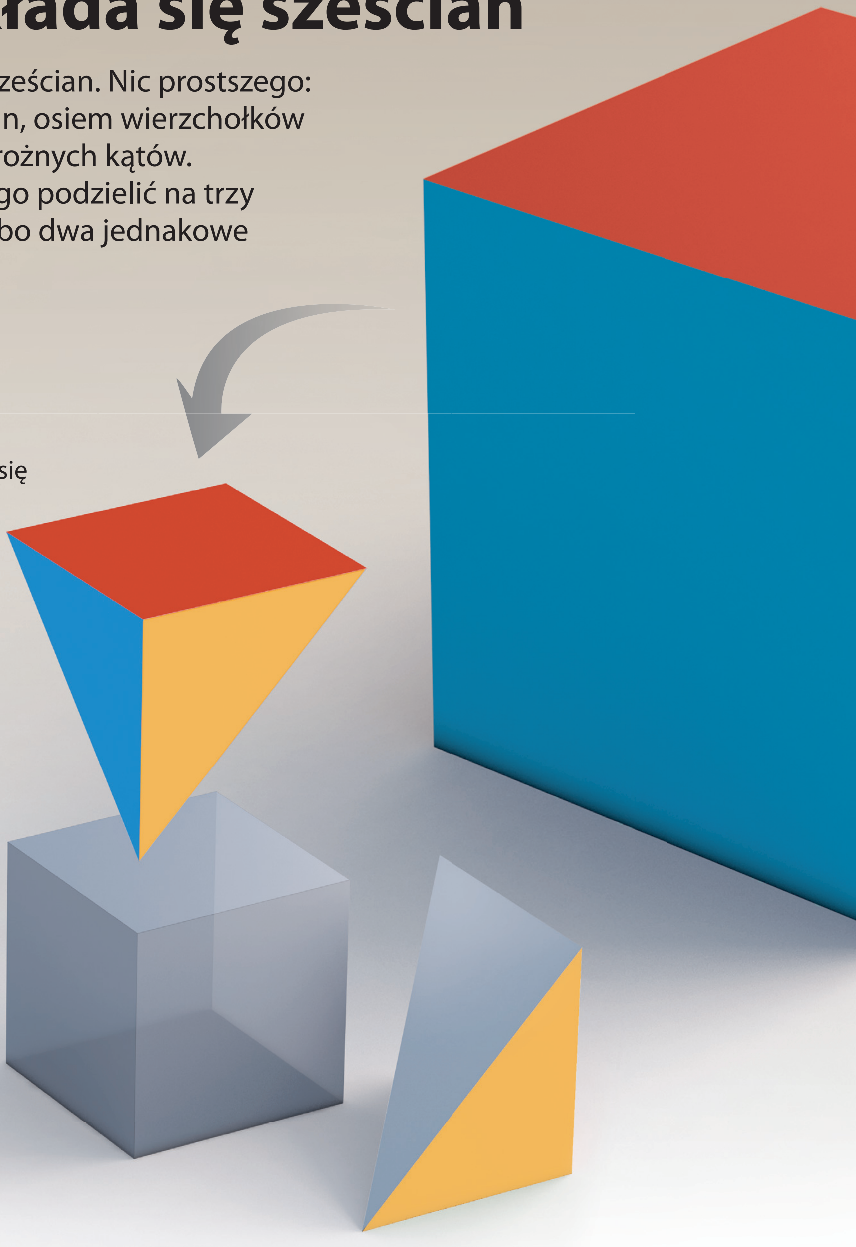
d) podzielna przez 6.

Z czego składa się sześcian

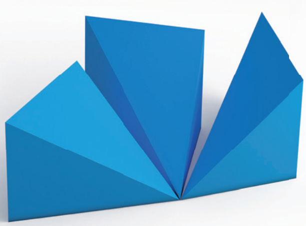
Każdy wie, jak wygląda sześcian. Nic prostszego: sześć kwadratowych ścian, osiem wierzchołków i osiem jednakowych narożnych kątów. Ale czy wiesz, że można go podzielić na trzy jednakowe ostrosłupy albo dwa jednakowe jedenastościany?

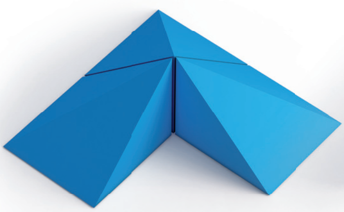
Trzy ostrosłupy – geometryczny tryptyk

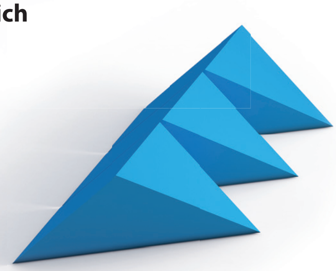
Z pozoru taki podział wydaje się niemożliwy, a jednak… Wystarczy wybrać trzy ściany, które mają wspólny wierzchołek, a następnie ze wspólnego wierzchołka poprowadzić przekątne tych ścian oraz przekątną bryły. Odcinki te wyznaczają płaszczyzny cięcia.



Z tych trzech ostrosłupów można utworzyć ciekawe kompozycje. Trudno w nich rozpoznać nasz sześcian…



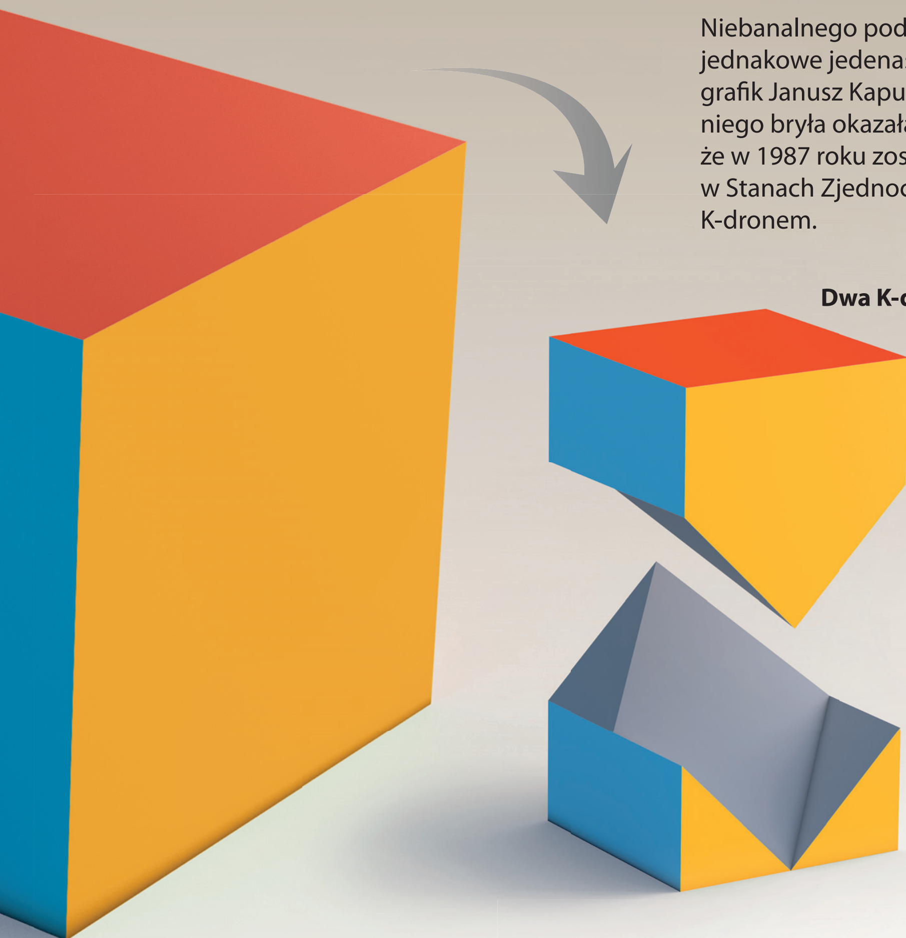




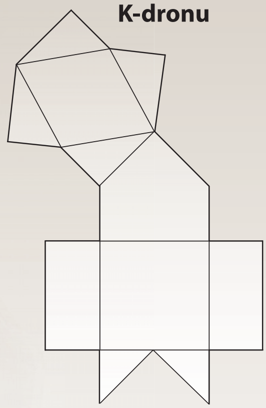
Niezwykły jedenastościan

Niebanalnego podziału sześcianu na dwa jednakowe jedenastościany dokonał polski grafik Janusz Kapusta. Stworzona przez niego bryła okazała się na tyle wyjątkowa, że w 1987 roku została opatentowana w Stanach Zjednoczonych i nazwana K-dronem.

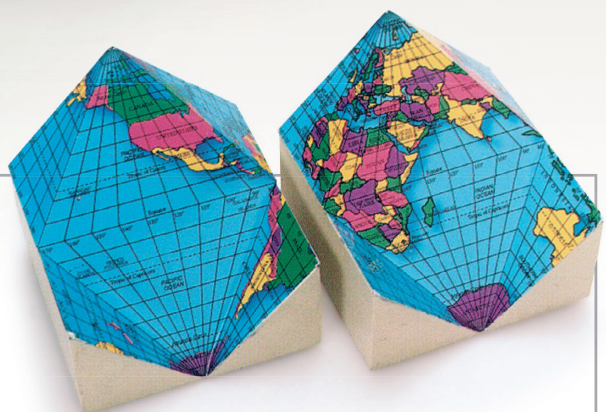
Dwa K-drony



Siatka K-dronu



K-dronowy blok budowlany



K-dronowy globus

K-dronowy świat

K-dron może być wykonany z różnych materiałów, np. połączenie kształtu K-dronu z materią betonu stworzyło blok budowlany, który oprócz walorów estetycznych ma właściwości rozpraszania dźwięku.

Poza produkcją przedmiotów użytkowych, takich jak zegarki czy biżuteria, największe zastosowanie znalazł w tworzeniu zabawek-układanek.

Jak działa bank?

Dwaj bracia, Jan i Jacek, zbierali pieniądze na wyprawę w Himalaje. Szukając najlepszych sposobów przechowywania przez dwa lata posiadanych pieniędzy, znaleźli dwie reklamy lokat.

Jan postanowił wpłacić 10 000 zł na lokatę *Kapitalną*, a Jacek – 10 000 zł na *Lokatę dla stałych klientów*.

- ➜ Która lokata jest, według Ciebie, atrakcyjniejsza?
- ➜ Jaką kwotę odsetek otrzymał Jan po dwóch latach?
- ➜ Jaką kwotę odsetek otrzymał Jacek po pierwszym roku? Ile złotych miał Jacek po pierwszym roku?
- ➜ Jacek zdecydował się pozostawić na drugi rok na tej lokacie wszystkie pieniądze, zarówno te, które wpłacił na początku, jak i otrzymane odsetki. Od tej kwoty bank naliczył mu odsetki po drugim roku. Jaką kwotę odsetek otrzymał Jacek po drugim roku?
- ➜ Ile złotych otrzymał łącznie Jacek jako odsetki po pierwszym i po drugim roku?
- ➜ Kto dostał więcej odsetek – Jan czy Jacek? Czy było to zgodne z Twoimi przypuszczeniami?

1. Piotr wpłacił do banku 200 zł.

a) Po roku bank doliczył mu odsetki w wysokości 5% wkładu. Jaką kwotę odsetek otrzymał Piotr? Ile złotych miał po roku? Jaki to procent wpłaconej kwoty?

b) Ile złotych miałby Piotr po roku, gdyby wpłacił taką samą kwotę na lokatę roczną o oprocentowaniu 10% w skali roku? Jaki to procent wpłaconej kwoty?

2. Ania wpłaciła do banku 300 zł.

a) Po roku otrzymała 4,50 zł odsetek od tej kwoty. Jakim procentem wpłaconej kwoty są odsetki?

b) Gdyby Ania wpłaciła taką samą kwotę na lokatę roczną, otrzymałaby 12 zł odsetek. Jakie oprocentowanie w skali roku jest oferowane dla lokaty rocznej?

3. Henryk rok temu wpłacił pieniądze na lokatę roczną. Jego bank zaoferował mu oprocentowanie w wysokości 14% w skali roku. Ile pieniędzy wpłacił, jeżeli otrzymał 280 zł odsetek?

4. Klient wpłacił pewien kapitał do banku. Po roku na koncie dodano mu 9% odsetek. Jaki procent wpłaconego kapitału stanowiły wówczas pieniądze na koncie tego klienta?

5. Po roku od wpłacenia pieniędzy na lokatę bank wypłacił Kasi pieniądze wraz z odsetkami. Miała wtedy 105% kwoty, którą wpłaciła. Ile procent odsetek otrzymała Kasia po roku?

95

Aby wynik miał sens, kwoty odsetek powinny być zaokrąglane do 1 grosza.

6. Zbyszek planuje wpłacić do banku pieniądze na lokatę roczną oprocentowaną w wysokości 9% w skali roku. Ile pieniędzy planuje wpłacić Zbyszek, jeżeli obliczył, że za rok będzie miał wraz z odsetkami 1199 zł?

!

Jeśli klient wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy na ustalony okres, to po tym okresie stan jego konta powiększy się o odsetki.

Przykład:

Przy wpłacie 120 zł na 1 rok do banku, który oferuje 5% odsetek, po roku kwota zostaje powiększona o $0{,}05 \cdot 120$ zł $= 6$ zł odsetek. Stan konta będzie wynosił 120 zł $+ 6$ zł $= 126$ zł, co można policzyć krócej: $1{,}05 \cdot 120$ zł $= 126$ zł.

Kapitalizacja odsetek polega na tym, że po pewnym okresie odsetki są doliczane do kapitału.

7. Pani Ola rok temu wpłaciła 1000 zł do banku, który oferuje odsetki w wysokości 5% rocznie.

→ Jaką kwotę dopisano jej do rachunku? Ile ma na koncie?

→ Pani Ola zdecydowała się pozostawić wszystkie pieniądze w banku na drugi rok. Ile odsetek otrzyma po drugim roku? O ile więcej odsetek otrzyma po drugim roku niż po pierwszym? Skąd wynika ta różnica?

8. Przerysuj i uzupełnij tabelkę przedstawiającą kwoty odsetek i stany konta po kolejnych latach przechowywania pieniędzy w banku.

	Po roku	Po 2 latach	Po 3 latach	Po 4 latach	Po 5 latach
Otrzymane odsetki	100 zł	100 + 110 zł	?	?	?
Stan konta z odsetkami	1100 zł	1210 zł	?	?	?

Sposób naliczania kapitału w kolejnych latach

Wpłata do banku 150 zł na 6% w skali roku zapewnia:

– po roku **1,06 · 150 zł =**

106% ze 150 zł to 1,06 · 150 zł

– po dwóch latach **1,06 · 1,06 · 150 zł =**

– po trzech latach **1,06 · 1,06 · 1,06 · 150 zł**

– po czterech latach **$(1{,}06)^4$ · 150 zł**

– po dziesięciu latach **$(1{,}06)^{10}$ · 150 zł**.

Sposób naliczania odsetek w kolejnych latach nosi nazwę procentu składanego.

Na odsetki w kolejnych latach składają się:
– odsetki od kwoty wpłaconej na początku,
– odsetki od odsetek ze wszystkich lat poprzednich.

9. Dwóch przyjaciół oszczędza w tym samym banku. Oprocentowanie w skali roku dla lokaty rocznej wynosi w nim 7%. Jeden z nich wpłacił 2000 zł i postanowił pozostawić je na dwa lata. Drugi wpłacił także 2000 zł, ale po roku wybrał odsetki, pozostawiając w banku znowu 2000 zł.

- Jaką kwotę odsetek otrzyma każdy z nich za drugi rok oszczędzania? Ile każdy z nich zarobił przez dwa lata na swojej lokacie?
- O jaką kwotę różniłyby się otrzymane odsetki za trzeci rok takiego oszczędzania?

10. Oprocentowanie w banku wynosi 20% w skali roku.

- Zaproponujcie kwotę, jaką wpłacono do banku.
- Zróbcie w zeszycie tabelkę pokazującą ilość pieniędzy na koncie w kolejnych latach.
- Zapiszcie wzorem zależność opisującą, jak zmienia się kwota pieniędzy na koncie po kolejnych kapitalizacjach (w kolejnych latach).
- Po jakim czasie pieniądze na koncie podwoją się, a po jakim potroją?

Jeżeli podając oprocentowanie nie określamy czasu, to mamy na myśli okres jednego roku.

11. Janka musi pożyczyć 10 000 zł. Bank oferuje kredyty oprocentowane 14% w skali roku. Janka nie będzie spłacać kredytu przez dwa lata, po czym chce spłacić całą kwotę w jednej racie.

- Ile złotych długu będzie miała Janka po roku?
- Ile złotych będzie musiała wpłacić do banku po drugim roku?

Po każdym roku kwota zadłużenia wzrasta o 14%.

12. Karolina wpłaca na konto raz na kwartał 50 zł. W jej banku odsetki na koncie trzymiesięcznym są stałe – wynoszą 2% na kwartał i są dopisywane co kwartał.

- Jaką kwotą będzie rozporządzać pod koniec roku?
- Narysujcie wykres ilustrujący, jak zmieniała się kwota na koncie Karoliny w pierwszych ośmiu kwartałach oszczędzania.

KREDYT BANKOWY

Pan Tomasz musi pożyczyć 30 000 zł, aby założyć swoją firmę. Bank oferuje kredyty oprocentowane 12% w skali roku. W tym samym czasie jego brat Krzysztof chce wpłacić do banku 30 000 zł na lokatę roczną o oprocentowaniu wynoszącym 5%.

I. Ile odsetek musiałby zapłacić Tomasz za korzystanie z 30 000 zł przez rok?

II. Jaką kwotę odsetek otrzymałby Krzysztof, gdyby złożył pieniądze na konto?

III. Napiszcie, co mogliby zrobić bracia.

IV. Jakie są dobre i złe strony każdego z rozwiązań?

V. Jaką kwotę odsetek musiałby zapłacić po dwóch latach (nie płacąc nic po roku) Tomasz za korzystanie z pożyczonych od banku pieniędzy?

VI. Jaką kwotę odsetek otrzymałby Krzysztof, gdyby trzymał pieniądze w banku przez dwa lata?

98 **VII.** Ile złotych zyskaliby bracia, gdyby porozumieli się i Krzysztof pożyczył Tomaszowi potrzebną kwotę na dwa lata, zamiast lokować ją w banku?

Małe banki istniały już w starożytnym Egipcie, a prowadzili je Fenicjanie. W średniowiecznej Europie czeki (listy bankierskie) zostały rozpowszechnione przez templariuszy podczas wypraw krzyżowych. Dzięki tym czekom pielgrzymi nie musieli przewozić pieniędzy.

→ Poszukaj w różnych źródłach informacji o historii banków. Przygotuj prezentację zebranych materiałów.

Sprawdź sam siebie

A. Pan Janek wpłacił do banku 400 zł. Jaką kwotę odsetek otrzyma po roku i ile będzie miał w sumie pieniędzy, jeśli bank oferuje 15% odsetek rocznie?

B. Pan Zenek wpłacił do banku pewną sumę pieniędzy na konto oprocentowane 2,5% w skali roku. Po roku odebrał 4100 zł. Jaką sumę wpłacił i jaka była kwota odsetek?

C. Pan Edward trzymał przez dwa lata na koncie 950 zł. Konto jest oprocentowane w wysokości 4% w skali roku. Ile pieniędzy wraz z odsetkami miał po pierwszym roku? A ile po drugim?

D. Po jakim czasie podwoi się kwota wkładu, jeżeli oprocentowanie wynosi 10% rocznie?

Moduł 1 **1.** Mercedes; co dwudziesty; Peugeot; Volkswagen, BMW, Mercedes; 87%; na wykresie nie uwzględniono wszystkich marek, a tylko te, które miały przynajmniej 2% wskazań; BMW, Porsche, Mercedes; Mitsubishi; Audi; 2; nie **2. a)** 42 **b)** 27 **3.** $\frac{59}{16}$ **4. a)** 816; 867 **b)** 97,5; $98\frac{1}{3}$ **c)** 846,6; 98 **d)** II A, I B **5.** 6:15 **7. a)** 3,6 **b)** 4 **9. a)** 5 **b)** a **10.** na szóstym; tak; 6 **11. a)** 7; 3 **b)** 4; 4 **c)** 2; 2 **d)** 5; 4 **12.** a), b) trzeba wybrać wynik znajdujący się pośrodku uporządkowanego zbioru wyników c), d) trzeba obliczyć średnią arytmetyczną dwóch wyników znajdujących się pośrodku uporządkowanego zbioru wyników. **13. a)** 4,7 **b)** 5 **c)** 5 **14. a)** 38,4 **b)** 38 i 39 **c)** 38 **15. a)** 4; 4 **b)** 3; 3 **16.** 3,6; 3; 3,5 **17. b)** 162, 173, 178, 182; 175,5; 173,1 **c)** 155, 160; 159; 159,7 **d)** 160; 162; 165,04
Sprawdź sam siebie A. 1 1 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 **B.** 3,8 **C.** 5 **D.** 4

Moduł 2 **2. a)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **b)** $7 \cdot 7 \cdot 7$ **c)** $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$ **d)** $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$ **3.** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^9$; 2^5; $(-8)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ **5. a)** 6^{13} **b)** $(-18)^{21}$ **c)** $1{,}4^{55}$ **d)** $\left(2\frac{3}{4}\right)^{13}$ **e)** 71^9 **f)** $\left(1\frac{2}{3}\right)^6$ **6. a)** 2^{10} **b)** $(-1)^{25}$ **c)** $2{,}08^{60}$ **d)** a^{18} **e)** c^{10} **f)** d^{27} **7.** Np. $4^7 = 4 \cdot 4^6 = 4^2 \cdot 4^5$ **8.** $(6^4)^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot$ $\cdot\, 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{12}$; tak; 2^6; 7^{10} **10. a)** 8^{12} **b)** $(-10)^{42}$ **c)** $(0{,}6)^{28}$ **d)** $\left(2\frac{2}{3}\right)^{27}$ **e)** x^{150} **f)** z^{240} **11.** Np. $(7^2)^{24}$ **12. a)** 5^1 **b)** 2^5 **c)** 3^6 **d)** 10^2 **e)** 7^4 **13. a)** 9^4 i 9^8 **b)** $1{,}1^5$ i $1{,}1^9$ **14. a)** 8^2 **b)** 5^3 **c)** 3^4 **d)** 10^3 **e)** $(-5)^4$ **f)** $(-3)^3$ **g)** $(-4)^4$ **h)** $(-2)^3$ **i)** $(1{,}5)^2$ **j)** $(-0{,}2)^3$ **k)** $\left(\frac{7}{9}\right)^2$ **l)** $\left(2\frac{2}{3}\right)^2$ **15. a)** $5^5 = 3125$ **b)** 9 **c)** 128 **d)** 0,0001 **e)** -27 **f)** $-2{,}5$ **16.** Np. $7^5 : 7$; $7^{15} : 7^{11}$; $7^{10} : 7^6$ itp. **17. a)** 100 **b)** 64 **c)** 1 **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{32\,768}$ **e)** 1 **f)** $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ **18.** 1 **WZ I.** 10^5 m; 10^6 dm; 10^7 cm; 10^8 mm **II.** 10^7 m^2; 10^9 dm^2; 10^{11} cm^2 **III.** 10^{10} m^3; 10^{13} dm^3; 10^{16} cm^3 **IV.** $144 \cdot 10^6$ km
Sprawdź sam siebie A. a) 3^{15} **b)** $(-2)^{11}$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ **d)** $(0{,}2)^{24}$ **B. a)** 5^4 **b)** $(-13)^9$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ **d)** $1{,}8^5$ **C. a)** 6^6 **b)** $(-3)^2$ **c)** $0{,}4^4$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$ **D. a)** $5^6 = 15\,625$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

Moduł 3 **5. a)** 45^3 **b)** $(-24)^6$ **c)** 12^8 **d)** $(0{,}9)^7$ **e)** $\left(-\frac{12}{35}\right)^{12}$ **f)** $(0{,}288)^4$ **g)** $(2a)^5$ **h)** $(-7c)^{11}$ **i)** $(ef)^{15}$ **6. a)** $5^4 \cdot 7^4$ **b)** $9^3 \cdot 16^3$ **c)** $(-12)^2 \cdot 8^2$ **d)** $1{,}2^7 \cdot 0{,}8^7$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{13}{21}\right)^6$ **f)** $\left(\frac{18}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{11}{19}\right)^5$ **g)** $2713 \cdot x^{13}$ **h)** $(-5)^{17} \cdot z^{17}$ **i)** $c^{14} \cdot d^{14}$ **7. a)** $23\,436^5$ **b)** $(-96x)^6$ **c)** $(1638yz)^{17}$ **8. a)** $35^8 \cdot 36^8 \cdot 37^8$ **b)** $(-24)^9 \cdot a^9 \cdot b^9$ **c)** $x^{10} y^{10} z^{10}$ **9. a)** $1^{2001} = 1$ **b)** $10^6 = 1\,000\,000$ **c)** $10^4 = 10\,000$ **10.** Np. $4^6 \cdot 6^6$; $3^6 \cdot 8^6$; $2^6 \cdot 12^6$ **11.** Np. $(4 \cdot 6)^6$; $(1{,}5 \cdot 2 \cdot 8)^6$; $(3 \cdot 2 \cdot 4)^6$ **13. I.** 16 **II.** 5 **III.** 11, 11 **14. a)** $\left(\frac{14}{7}\right)^7$ **b)** $\left(\frac{-48}{8}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{81}{27}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{25}{5}\right)^4$ **e)** $\left(\frac{-26}{13}\right)^3$ **f)** $\left(\frac{42}{7}\right)^2$ **g)** $\left(\frac{7}{12}\right)^5$ **h)** $\left(\frac{10}{9}\right)^6$ **i)** $\left(\frac{10}{9}\right)^5$ **15. a)** $\left(\frac{7}{9}\right)^{13}$ **b)** $\left(-\frac{3}{6}\right)^{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$ **c)** $\left(\frac{-0{,}8}{-2{,}4}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{3}{8}\right)^4$ **e)** $\left(\frac{49}{72}\right)^3$ **f)** $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ **g)** $\left(\frac{a}{9}\right)^{15}$ **h)** $\left(\frac{b}{6}\right)^{14}$ **i)** $\left(\frac{c}{5}\right)^{13}$ **16. a)** $5^4 : 7^4$ **b)** $9^3 : 17^3$ **c)** $(-15)^2 : 8^2$ **d)** $1{,}5^7 : 0{,}7^7$ **e)** $\left(\frac{2}{5}\right)^6 : \left(\frac{13}{23}\right)^6$ **f)** $\left(\frac{22}{9}\right)^5 : \left(\frac{13}{17}\right)^5$ **g)** $2^8 : 7^8$ **h)** $(-6)^9 : 11^9$ **i)** $(-9)^{10} : 13^{10}$ **j)** $b^{15} : 7^{15}$ **k)** $c^{21} : 3^{21}$ **l)** $a^2 : 3^2$ **17. a)** 256 **b)** 625 **c)** 27 **d)** 1 000 000 **e)** 1 000 000 000 **f)** 64 **18. a)** 3125 **b)** 6561 **c)** 1 **d)** 0,000001 **e)** $\frac{1}{8}$ **f)** 1 **19. a)** x^5 **b)** y^6 **c)** $a^0 = 1$ **d)** $\left(\frac{c}{12d}\right)^4$ ZAGADKA $11^{22} > 22^{11}$
Sprawdź sam siebie A. a) 100 000 **b)** $\frac{1}{64}$ **c)** 1 **d)** 810 000 **B. a)** 256 **b)** 625 **c)** $\frac{27}{125}$ **d)** $\frac{125}{8}$ **C. a)** $(abc)^8$ **b)** $\left(\frac{a}{2}\right)^9$ **c)** $\left(\frac{a}{d}\right)^7$ **d)** $\left(\frac{2x}{3z}\right)^5$ **D. a)** a^{45} i $a \neq 0$ **b)** x^{180} i $x \neq 0$

Moduł 4 **2. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $-\frac{1}{10}$ **d)** $\frac{1}{100}$ **e)** 3 **f)** $\frac{4}{17}$ **g)** $\frac{4}{5}$ **h)** $-\frac{5}{12}$ **i)** 10 **j)** 100 **k)** $-\frac{10}{32}$ **l)** $\frac{10}{11}$ **3. a)** 11^{-1} **b)** $(-101)^{-1}$ **c)** $\left(\frac{4}{327}\right)^{-1}$ **d)** $\left(-\frac{7}{16}\right)^{-1}$ **e)** $\left(\frac{10}{4}\right)^{-1}$ **f)** $\left(\frac{10}{48}\right)^{-1}$ **g)** $\left(\frac{10}{125}\right)^{-1}$ **h)** $\left(-\frac{10}{137}\right)^{-1}$ **5. a)** 2^{-15} **b)** 10^{-9} **c)** $(-4)^{-6}$ **d)** $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$ **e)** $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-20}$ **f)** 5^{-5} **6. a)** $\frac{1}{32}$ **b)** $\frac{1}{144}$ **c)** 27 **d)** $-\frac{125}{64}$ **e)** $\frac{32}{243}$ **f)** $\frac{125}{216}$ **g)** $\frac{16}{625}$ **h)** $\frac{49}{576}$ **i)** 1 000 000 **j)** 1 000 000 **k)** $\frac{4}{9}$ **l)** $-\frac{1000}{1728} = -\frac{125}{216}$ **7. a)** -3 **b)** -4 **c)** -4 **d)** -6 **8. a)** $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ **b)** $3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, 3^{-4}, 3^{-5}$ **c)** $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ **9. a)** są równe **b)** są równe **c)** są równe **d)** są równe

10. a) 27 **b)** 125 **c)** 16 **d)** 0,2 **e)** 0,25 **f)** 10^{14} **11. a)** a^7 **b)** x^{-21} **c)** y^5 **d)** a^5 **e)** b^{-13} **f)** c^{-12} **12. a)** 25 **b)** $\frac{1}{49}$ **c)** 1,21 **d)** $\frac{27}{64}$ **e)** $\frac{4}{9}$ **f)** $\frac{9}{16}$ **13. a)** a^{21} **b)** x^{82} **c)** y^{190} **d)** k^{-5} **e)** m^{15} **f)** z^{30} **14. a)** 4^{11} **b)** $(-1)^{10}$ **c)** 3^{33} **15. a)** $\left(\frac{1}{7}\right)^7$ **b)** 3^5 **c)** $(-3)^{-15}$ **16. a)** 3^{-2} **b)** $(0{,}1)^{-12}$ **c)** $(2{,}3)^{20}$ **d)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ **f)** $\left(2\frac{2}{3}\right)^{-6}$ **17. a)** 10^{-4} **b)** $(-3)^3$ **c)** 2 **d)** 5^{-18} **e)** x^{-1} **f)** y^{14} **g)** z^{-26} **h)** d^{-38} **18. a)** $\frac{7}{12}$ **b)** $\frac{13}{27}$ **c)** 14 **d)** $\frac{11}{24}$ **e)** 174 **f)** $51\frac{3}{4}$

19. a) 1 mm = 10^{-1} cm = 10^{-3} m = 10^{-6} km, 1 cm = 10^{-2} m = 10^{-5} km **b)** 1 mm² = 10^{-2} cm² = 10^{-6} m² = 10^{-12} km², 1 cm² = 10^{-4} m² = 10^{-10} km²; 1 m² = 10^{-6} km² **32.** $37843200k \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ m³, gdzie k jest liczbą oddechów na minutę **33.** 12 000 m **WZ I.** $10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}$ **IV. a)** 5432,679 **b)** 70502,1402 **c)** 800402,0305 **d)** 60000020,00703 **V. a)** 975,3 **b)** 863,2 **c)** 9843,52 **d)** 321433,025

Sprawdź sam siebie A. a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{4}{11}$ **c)** $-\frac{10}{48} = -\frac{5}{24}$ **B. a)** $\frac{1}{81}$ **b)** $\frac{25}{49}$ **c)** $\frac{8}{125} = 0{,}064$ **C. a)** 1 **b)** a^{-34} **D. a)** 2 980 000, 0,000512 **b)** $3{,}91 \cdot 10^6$, $2{,}67 \cdot 10^{-3}$

Trening przed klasówką nr 1 **1. a)** $4\frac{5}{27}$ **b)** 4 **c)** 4 **2. a)** 125, 256, –243, 121, 160 000 **b)** 0,25, –0,00032, –0,0000001, 0,000027, 0,000000000016 **c)** $\frac{1}{32}, \frac{16}{81}, 5\frac{23}{64}, -411\frac{127}{243}, -18\frac{26}{27}$ **3. a)** $\frac{1}{64}, \frac{1}{3125}, \frac{1}{1000000000}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{10000}{81}$, –8, 312 500 000, 625, –125 000 000 000 **c)** $\frac{64}{27}, \frac{125}{27}, -\frac{27}{1000}, \frac{49}{16}, \frac{81}{625}$ **4. a)** $5^{12}, (-2)^{15}$ **b)** $(0{,}2)^{10}, (-3{,}2)^{42}$ **c)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{21}, \left(-5\frac{2}{3}\right)^{30}$ **5. a)** $4^1, 5^{-2}, 2^5, 3^{-35}$ **b)** $a^{-3}, b^{-3}, c^{-3}, d^{-42}$ **6. a)** 6^{12} **b)** $(-5)^{24}$ **c)** 2^{60} **d)** $(-3)^{120}$ **7. a)** $4^3, 5^4, 6^8, 9^{45}$ **b)** $10^{12}, 25^{15}, 100^{80}, 45^7$ **c)** $a^9, b^{72}, c^{36}, d^{13}$ **8. a)** $5^{-3}, 7^{16}, 2^{-12}, 10^0$ **b)** $9^{-4}, 12^{22}, 7^{-14}, 12^5$ **c)** $a^{-5}, b^{18}, c^{-18}, d^{20}$ **9. a)** 16 **b)** 25 **c)** 1 000 000 000 **d)** 0,0001 **e)** –27 **f)** –1,5 **10. a)** 25 **b)** 81 **c)** 1 **d)** 1 **e)** 1 **f)** $2\frac{1}{2}$ **11. a)** 168^9 **b)** $(900a)^4$ **c)** $(1120ab)^{20}$ **12. a)** $120^{12} \cdot 56^{12} \cdot 73^{12}$ **b)** $(-64)^{15} \cdot x^{15} \cdot y^{15}$ **c)** $a^{12} \cdot b^{12} \cdot c^{12}$ **13. a)** 1 **b)** 1 **c)** 160 000 **14. a)** 1^8 **b)** $(-6)^3$ **c)** $(4)^5$ **d)** 5^5 **e)** $(-3)^6$ **f)** 7^2 **g)** $\left(\frac{2}{5}\right)^5$ **h)** $\left(\frac{6}{7}\right)^9$ **i)** $\left(1\frac{1}{8}\right)^5$ **15. a)** 3^9 **b)** $\left(-\frac{1}{6}\right)^{12}$ **c)** $\left(\frac{1}{9}\right)^6$ **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ **e)** $\left(1\frac{2}{3}\right)^5$ **f)** $(0{,}1)^8$ **16. a)** $\left(\frac{a}{7}\right)^{25}$ **b)** $\left(\frac{b}{10}\right)^{20}$ **c)** $(c:5)^{15}$ **17. a)** $8^7 : 9^7$ **b)** $5^4 : 12^4$ **c)** $(-12)^5 : 7^5$ **d)** $(3{,}2)^8 : (0{,}9)^8$ **e)** $\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{15}{22}\right)^5$ **f)** $\left(3\frac{5}{8}\right)^5 : \left(\frac{12}{23}\right)^5$ **18. a)** 64 **b)** 100 000 **c)** 1 **d)** $\frac{1}{64}$
19. a) $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$ **b)** $2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$ **c)** $2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$ **d)** $0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$ **e)** $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$ **f)** $0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6}$ **20. a)** 62 312,34 **b)** 5,4003 **c)** 0,702 **d)** 0,020508 **21. a)** $17 \cdot 10^{-5}$ km, $3 \cdot 10^{-4}$ km, $42 \cdot 10^{-3}$ m **b)** $8 \cdot 10^{-6}$ m², $12 \cdot 10^{-4}$ m², $14 \cdot 10^{-2}$ m² **c)** $6 \cdot 10^{-9}$ m³, $25 \cdot 10^{-6}$ m³, $34 \cdot 10^{-3}$ m³

Moduł 5 **1.** Powstał trójkąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na tym okręgu. **2.** Okręgiem opisanym na trójkącie nazywamy taki okrąg, do którego należą wszystkie wierzchołki tego trójkąta. **3.** I, III **4.** Każdy z narysowanych trójkątów jest wpisany w dany okrąg. **5.** Wierzchołki A, B, C są tak samo odległe od O. Punkty jednakowo odległe od końców odcinka tworzą symetralną tego odcinka. **8. I.** prawda **II.** prawda **III.** prawda **12.** na **II.** **13. I.** Na kwadracie można opisać okrąg. **II.** Na prostokącie można opisać okrąg. **III.** Nie na każdym równoległoboku można opisać okrąg. **IV.** Nie na każdym trapezie można opisać okrąg. **14.** Na trapezie równoramiennym można opisać okrąg. **15.** Jest to trapez równoramienny i można na nim opisać okrąg. **16.** np. trapez prostokątny **18.** 8; jest wiele takich prostokątów **22.** na **I.** i **IV.** **23.** tak **24.** Środek okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki wielokąta jest punktem przecięcia symetralnych boków wielokąta.
Sprawdź sam siebie A. a) tak **b)** nie **c)** nie **D.** Tak, można na nim opisać okrąg. To kwadrat.

Moduł 6 **7. a)** 2 **b)** 1 **c)** 0 **8. a)** 3 cm **b)** mniej niż 3 cm **c)** więcej niż 3 cm **12.** nieskończenie wiele **14. a)** 70° **b)** 150° **c)** 60° **d)** 40° **15.** 35°, 70°, 35°, 220° **17.** półprostą, która jest dwusieczną narysowanego kąta
Sprawdź sam siebie A. a) AC, AB, BC **b)** AL, CK, BM **B. a)** 7 cm **b)** mniej niż 7 cm **c)** więcej niż 7 cm **C. a)** $\alpha = 28°$ **b)** $\beta = 56°$

Moduł 7 **2.** Na rys. III **8.** Nie może. **10. a)** 24 **b)** 52 **11.** $\sphericalangle CAK = 75°$, $\sphericalangle KCA = 75°$, $\sphericalangle BAL = 55°$, $\sphericalangle LBA = 55°$, $\sphericalangle MCB = 50°$, $\sphericalangle MBC = 50°$; $\sphericalangle BAC = 50°$, $\sphericalangle ACB = 55°$, $\sphericalangle CBA = 75°$ **12. a)** $\alpha = 70°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 70°$ **b)** $\alpha = 120°$, $\beta = 125°$, $\gamma = 115°$ **13.** Osoba trzymająca linkę powinna stać w środku kwadratu. Boki kwadratu są styczne do okręgu. **14.** Na rys. III **15.** w kwadracie i rombie; w kwadrat i romb **16.** W deltoid można wpisać okrąg. **18. a)** nie **b)** tak **c)** nie **19.** 10 cm, 10 cm **20.** Sumy długości boków przeciwległych w równoległoboku, niebędącym rombem są różne. **21.** 110 **22.** W rombie (kwadrat też jest rombem) punkt przecięcia przekątnych jest środkiem okręgu wpisanego w ten czworokąt. **24.** Na rys. III **WZ I. a)** 540 cm^2 **b)** 4 cm

II. $P = \frac{O \cdot r}{2}$ **a)** 6 cm^2 **b)** 36 cm **III.** $P = \frac{O \cdot r}{2}$ **a)** 20 cm^2 **b)** $\frac{120}{7}$ cm

Sprawdź sam siebie A. Na rys. II i III **C.** nie **D.** 14 cm

Moduł 8 **3. a)** 6π **b)** 14π **c)** $2{,}4\pi$ **d)** $1{,}8\pi$ **4. a)** 5π **b)** 16π **c)** $2{,}4\pi$ **d)** $0{,}2\pi$ **5. a)** $d = 28$, $r = 14$ **b)** $d = 12$, $r = 6$ **c)** $d = 1{,}4$, $r = 0{,}7$ **d)** $d = 6$, $r = 3$ **6. a)** 15 **b)** 15,5 **c)** 15,70 **d)** 15,7075 **7. a)** 12,56 cm **b)** 1,57 m **c)** 39,25 cm **d)** 7,85 dm **8. a)** $d = 2$, $r = 1$ **b)** $d = 4$, $r = 2$ **c)** $d = 10$, $r = 5$ **d)** $d = 15$, $r = 7{,}5$ **9.** 3 razy **10.** małe koło: $0{,}5\pi$, duże koło: 2π; 4 obroty **11.** małą **12.** 518,1 m **13.** 83333,(3) **14.** 9π m **15.** duża: 236555,04 m, mała: 12377,88 m **17. a)** 81π cm^2 **b)** $0{,}25\pi$ m^2 **c)** $6{,}25\pi$ dm^2 **d)** 225π mm^2 **18. a)** 4 cm **b)** 5 m **c)** 8 dm **d)** 70 mm **19.** 50,2656 cm^2 **20. a)** 18 cm **b)** 40 mm **c)** 0,2 m **d)** 6 dm **21.** 12π cm **22. a)** 25π cm^2 **b)** 64π m^2 **c)** $0{,}81\pi$ mm^2 **d)** $6{,}25\pi$ dm^2 **23. a)** 49,6 cm^2 **b)** 77,5 mm^2 **c)** 151,9 dm^2 **d)** 0,124 m^2 **25. a)** 65π cm^2 **b)** 28π cm^2 **c)** $13{,}75\pi$ cm^2 **26. a)** 5 zł: 144π mm^2, 2 zł: $115{,}5625\pi$ mm^2; o $28{,}4375\pi$ mm^2; 1,2461 razy **b)** 5 zł: srebrna to 80π mm^2, złota to 64π mm^2; 2 zł: srebrna to 36π mm^2, złota to $79{,}5625\pi$ mm^2 **27. a) I.** $\frac{1}{4}$ **II.** $\frac{1}{6}$ **III.** $\frac{1}{10}$ **b) I.** $\frac{3}{4}$ **II.** $\frac{1}{18}$ **III.** $\frac{41}{360}$ **28.** $\frac{1}{5}$, 20π cm^2, $\frac{1}{5}$, 4π cm

29. a) $l = \pi$ cm, $P = 3\pi$ cm^2 **b)** $l = 1{,}5\pi$ cm, $P = 4{,}5\pi$ cm^2 **c)** $l = 4\pi$ cm, $P = 12\pi$ cm^2 **d)** $l = 8\pi$ cm, $P = 24\pi$ cm^2

30. $r = \sqrt{30}$ cm; $\alpha = 216°$; $l = 1{,}2\sqrt{30}\pi$ cm **31. a)** $P = 20 - 4\pi$, $O = 10 + 4\pi$ **b)** $P = 8\pi$, $O = 4 + 8\pi$ **c)** $P = 0{,}5\pi + 0{,}5$, $O = 2\pi$ **d)** $P = 1 + 0{,}25\pi$, $O = 2\pi$ **32.** koło

WZ I. 40 040 km **II.** $111\frac{2}{9}$ km **III.** $1668\frac{1}{3}$ km **IV.** 9°

Sprawdź sam siebie A. a) $P = 6{,}25\pi$ cm^2; $O = 5\pi$ cm **b)** $P = 1{,}44\pi$ cm^2; $O = 2{,}4\pi$ cm **B.** $P \approx 154$ cm^2

C. 587,18 cm^2 **D. a)** $P = \left(64 - 10\frac{2}{3}\pi\right)$ cm^2, $O = \left(32 + \frac{8}{3}\pi\right)$ cm **b)** $P = (32\pi - 64)$ cm^2, $O = 8\pi$ cm

Trening przed klasówką nr 2 **5.** 135°, 112,5°, 112,5° **6. a)** dł. okręgu 16π cm, pole 64π cm^2 **b)** dł. okręgu 15π cm, pole $56{,}25\pi$ cm^2 **c)** dł. okręgu 9π dm, pole $20{,}25\pi$ dm^2 **7.** 36π cm^2 **8.** 4 razy

9. dokładny: $\frac{62}{\pi}$ cm, przybliżony 19,75 cm **10. a)** $6 + \frac{1}{2}\pi$ **b)** $9 - \frac{1}{4}\pi$ **c)** $9 - \frac{5}{4}\pi$ **d)** $1{,}25\pi$ **e)** $1\frac{11}{16}\pi$ **f)** $9 - 2{,}25\pi$ **11. a)** $6 + \pi$ **b)** $2(2 + \pi)$ **c)** 6π **d)** $6 + \pi$ **e)** $8 + 2\pi$) **f)** 6π **12.** pole wycinka kołowego: $6{,}125\pi$ cm^2, długość łuku: $1{,}75\pi$ cm **13.** pole koła od wpisanego kwadratu o $(196\pi - 392)$ cm$^2 \approx 223{,}44$ cm^2, a od opisanego o $(784 - 196\pi)$ cm$^2 \approx 168{,}56$ cm^2 **14. a)** $\alpha = 44°$, $\beta = 68°$ **b)** $\alpha = 55°$, $\beta = 35°$ **15.** tak **16.** $8\pi r^2$

Moduł 9 **1. a)** $-2 + w + x + y$ **b)** $13pqr$ **c)** $(z - w)^2$ **d)** $-5(a - b)$ **e)** $a^2 - 3bc$ **f)** $(3 - a) : (a + b)$ **2. a)** $-x - y$ **b)** $13a + 3ab - 3b$ **c)** $-7e + 2f$ **d)** $-a - b + ab$ **3. a)** $-2x$; 6 **b)** $-3x - 3y - 3z$; $-2{,}4$ **c)** $0{,}8a - 0{,}2b - 0{,}2c$; 6 **4. I.** $5(a + b)$; $5a + 5b$ **II.** $3(2c + d)$; $3c + 3c + 3d$ **III.** $4(x + 3y)$; $4x + 4y + 4y + 4y$ **IV.** $z(p + 1)$; $pz + z$ **5. a)** $2x + xb$ **b)** ab **c)** $-a^2 + 4ab - 7a$ **6.** 3 cm **7.** $a = 3$ cm, $b = 8$ cm **8. a)** $7(2x + 3y + 1)$ **b)** $2b(-a + 2{,}3 - 3c)$

9. a) $4(4x + 3y + 2)$ **b)** $-2(a - 2b + 3c)$ **c)** $5a(2b + 1 + 5a)$ **d)** $0{,}5(a + 5b + 3ab)$ **e)** $0{,}3(-2y + 3x - 4xy)$ **f)** $7z(0{,}2a + 0{,}3b - 0{,}5)$ **g)** $-\frac{1}{6}(u - \frac{5}{2}w + \frac{5}{3}y)$ **h)** $\frac{11}{7}(\frac{1}{3}u - \frac{2}{5}w - \frac{3}{6}y)$ **11. a)** $xb + x + bz + z$ **b)** $12a - ab + 12b - b^2$ **c)** $5ab - 9a - 5b^2 + 9b$ **d)** $bx - 11x + 5bz - 55z$ **e)** $-8a - 13ab + 48b + 78b^2$ **f)** $2ab - 7a^2 - 8b^2 + 28ab$ **12. a)** $xz + x + 2z + 2 + yz + y$ **b)** $7a - ab + 4ac + 7b - b^2 + 4bc$ **c)** $5p^2 - 3p - 10ps + 6s + 25pt - 15t$ **13. a)** $3bc + 2c - b - 2$ **b)** $8b - 4 - b^2$ **c)** $7a^2 + 2b^2 - 5ab$ **d)** $-10b + 12$ **e)** $-6a + 11b - 5ab + 10$ **f)** $4xy + 14x - y^2$

+ 16 **16. a)** $x = -\frac{1}{2}$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 0{,}8$ **d)** $x = -0{,}0625$ **17.** $x = 2$ cm **18.** $x = 4$ cm **19. a)** $(c + d)(a + b)$ **b)** $(c + 2)(a + b)$ **c)** $(3c + d)(a - b)$ **d)** $(c - 1)(a - b)$

Sprawdź sam siebie A. a) $xy + xz + y + z$ **b)** $5a - ab + 15 - 3b$ **c)** $ab - 5a - 2b^2 + 10b$ **B. a)** $2xy + x - 4y - 4$ **b)** $4p - 3p^2 - 4$ **c)** $2k^2 - 0{,}5kl + 6k - 3l$ **d)** $-1{,}5c^2 - 6c$ **C. a)** $x = 2$ **b)** $x = 7$ **c)** $x = 7$ **d)** $x = 2{,}5$ **D.** $x = 5$ cm

Moduł 10 **1.** $(x + 5)^2$; $x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2$; $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2$ **2. a)** $a^2 + 2az + z^2$ **b)** $y^2 + 4y + 4$ **c)** $16 + 8a + a^2$ **d)** $9x^2 + 6x + 1$ **e)** $16x^2 + 16x + 4$ **f)** $\frac{1}{4} + 5b + 25b^2$ **g)** $a^2 + 4ab + 4b^2$ **h)** $9x^2 + 30xy + 25y^2$ **i)** $16x^2 + \frac{16}{3}xy + \frac{4}{9}y^2$ **3. a)** 3 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $30xy$ **d)** $128ab$ **4. a)** $(5 + a)^2$ **b)** $(b + 4)^2$ **c)** $(2c + 3d)^2$ **5. a)** $4b^2$ **b)** $5xy$ **c)** $4x^2$ **d)** $25x^2$ **6. a)** $5xy$ **b)** $6a^2$ **c)** $-4b^2$ **d)** $-0{,}2ab$ **7. a)** $x = -1$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = -8$ **d)** $x = -\frac{2}{7}$ **8.** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **9. a)** $4x^2 - 4x + 1$ **b)** $9b^2 - 12b + 4$ **c)** $\frac{1}{16} - 2a + 16a^2$ **d)** $x^2 - 8xy + 16y^2$ **e)** $9x^2 - 30xy + 25y^2$ **f)** $0{,}25a^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{4}{9}b^2$ **10. a)** $(x - y)^2$ **b)** $(2a - 3d)^2$ **c)** $(4b - c)^2$ **11. a)** 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $56xy$ **d)** $48ab + 9b^2$ **12. a)** $2x + 3$ **b)** $-4a + 8$ **c)** $2x^2 + 32$ **d)** $-8a$ **15. a)** $x = 1$ **b)** $x = -\frac{1}{2}$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = -1\frac{1}{9}$ **16. a)** $x > 3$ **b)** x – dowolna liczba **WZ I. a)**169 **b)** 961 **c)** 1764 **d)** 42 025 **II. a)** 324 **b)** 1369 **c)** 9604 **d)** 39 601 **III. a)** 9801 **b)** 9604

Sprawdź sam siebie A. a) $n^2 + 10n + 25$ **b)** $9c^2 + 12c + 4$ **c)** $25 - 10x + x^2$ **d)** $4a^2 - 12ac + 9c^2$ **B. a)** $(c + 2)^2$ **b)** $(x - 3)^2$ **c)** $(7u - 3p)^2$ **C. a)** $14z + 9$ **b)** $5s^2 + 32s + 12$ **D. a)** $x = \frac{1}{2}$ **b)** $x = \frac{5}{4}$

Moduł 11 **2. a)** $x^2 - 1$ **b)** $4 - a^2$ **c)** $9t^2 - 25$ **d)** $100 - 16y^2$ **3.** $a^2 - b^2$ **4.** $(a + b)(a - b)$; $a(a - b)$ i $(a - b)b$; $(a + b)(a - b)$; $a^2 - b^2$ **5. a)** $49 - 4x^2$ **b)** $a^2 - 25b^2$ **c)** $4p^2 - 9q^2$ **d)** $121x^2 - 16y^2$ **6. a)** $0{,}04 - 4x^2$ **b)** $0{,}09a^2 - 0{,}25b^2$ **c)** $0{,}01p^2 - 5{,}29q^2$ **d)** $7{,}84x^2 - 1{,}21y^2$ **e)** $\frac{4}{9}r^2 - \frac{1}{16}s^2$ **f)** $2\frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{9}m^2$ **7. a)** $4x^4$ **b)** $25x^6$ **c)** $\frac{9}{16}x^4$ **d)** $1{,}44x^4$ **8. a)** $1 - a^4$ **b)** $p^4 - q^2$ **c)** $4x^4 - y^6$ **d)** $0{,}04p^4 - 25q^2$ **9. a)** 2491 **b)** 9900 **c)** 7500 **d)** 39 999 **10. a)** 9996 **b)** 391 **c)** 2475 **d)** 48,99 **11. a)** $(3 - x)(3 + x)$ **b)** $(2a - 1)(2a + 1)$ **c)** $(t - 5k)(t + 5k)$ **d)** $(\frac{1}{2}x - 0{,}1y)(\frac{1}{2}x + 0{,}1y)$ **e)** $(4a^2 - 6b^3)(4a^2 + 6b^3)$ **f)** $(x^3y^4 - x^2y^6)(x^3y^4 + x^2y^6)$ **12. a)** 33 **b)** 400 **c)** 28 **d)** 95 **13. a)** $-80x^2 + 5$ **b)** $\frac{1}{8}x^4 - 2$ **14. a)** $-0{,}03x^2 + 6x - 300$ **b)** $0{,}243x^2 + 16{,}2xy + 270y^2$ **15. a)** $2a^2 + 2b^2$ **b)** $2b^2 - 2ab$ **c)** $5x^2 - 12x + 8$ **d)** $-8x^2 - 20x + 125$ **e)** $\frac{19}{6}x^2 - 2xy + 2y^2 + 6$ **f)** $-1\frac{4}{5}x^2 + 6xy - 4y^2$ **16. a)** $x = \frac{34}{6}$ **b)** $a = \frac{1}{2}$ **c)** $x = -\frac{1}{2}$ **d)** $x = 3$ **17.** 5 cm **18. a)** zmniejszyło się o 4 **b)** zmniejszyło się o 9 **c)** dwa zwiększono o 6 i dwa zmniejszono o 6

Sprawdź sam siebie A. a) 4899 **b)** 9999 **c)** 15,96 **B. a)** $(25 - 9a)(25 + 9a)$ **b)** $(0{,}6x - 0{,}5y)(0{,}6x + 0{,}5y)$ **C. a)** $50 - 50a$ **b)** $-16a$ **D.** zmniejszyło się o 144

Moduł 12 **1.** $L = 4a$, $a = \frac{L}{4}$ **2. a)** $P = 8x$ **b)** $x = \frac{P}{8}$ **3.** $b = \frac{P}{a}$ **4.** $r = \frac{l}{2\pi}$ **5. a)** $n = 3$ **b)** $K = 900$ **c)** $n = 8$ **d)** $n = 2 + \frac{K}{180^\circ}$ **6.** $P = 20$ cm^2 **7.** $b = \frac{2P}{h} - a$ **8. a)** $p = \frac{P}{r}$ **b)** $r = \frac{P}{p}$ **9.** $P = \frac{abc}{4R}$; $a = \frac{4PR}{bc}$; $b = \frac{4PR}{ac}$; $c = \frac{4PR}{ab}$ **10. a)** 100 **b)** $a = \frac{100b}{p}$ **11. a)** 360 **b)** $p = \frac{-100(c - a)}{a}$ **12. a)** 72 kg **b)** $55\frac{1}{4}$ kg **c)** $h = 100 + \frac{W}{0{,}9}$; $h = 100 + \frac{20W}{17}$ **13.** $N = m \cdot k$; $k = \frac{N}{m}$; $m = \frac{N}{k}$ **14.** $R = 50 - (5x + 3y)$ **15.** $z = \frac{1}{2}(L - 2t + 90)$ **16.** $n = \frac{0{,}7 + m}{k}$; $m = nk - 0{,}7$ **17.** $a = \frac{V}{bc}$; $b = \frac{V}{ac}$; $c = \frac{V}{ab}$ **18.** $w = 2 - s + k$; $k = s + w - 2$; $s = 2 + k - w$ **19.** $P = 2a^2 + 4ah$; $h = \frac{P}{4a} - \frac{1}{2}a$ **20.** $P = \frac{1}{4}\pi d^2$ **21.** $P = \frac{1}{2}d_1d_2$; $d_2 = \frac{2P}{d_1}$

22. $W = Pt$; $t = \frac{W}{P}$ **23.** $m = \frac{E}{gh}$; $h = \frac{E}{mg}$; **24.** $S = \frac{F}{p}$ **25.** $m = \rho V$; $V = \frac{m}{\rho}$ **26. a)** 303 **b)** $t = T - 273$ **c)** $t = -273°C$ **27.** $a = \frac{v_1 - v_0}{t}$

Sprawdź sam siebie A. $P = ah$; $a = \frac{P}{h}$ **B. a)** $L = 10\pi$ cm **b)** $L = 0{,}4\pi$ dm **c)** $d = \frac{L}{\pi}$ **C. a)** 7,10 zł **b)** $m = k - \frac{z}{100}$ **c)** $k = m + \frac{z}{100}$ **D.** $m = \frac{F}{a}$; $a = \frac{F}{m}$

Trening przed klasówką nr 3 **1. a)** $10x + 5y$ **b)** $-3x - 17y - 3$ **c)** $24x - 26$ **d)** $14y - 71$ **2. a)** np. $x + x + x$ **b)** np. $-6x^2y^2 - x^2y^2 - 11x^2y^2$ **c)** np. $6ab + 39ab + ab$ **d)** np. $5xy^2 - 0{,}5xy^2 - 5xy^2$ **3. a)** 20,75 **b)** $-0{,}5$ **c)** -576 **d)** 18 **4. a)** $(4x + \frac{1}{2})(3 - y)$ **b)** $(2x - 1)(1 + 11)$ **c)** $(-6 + 20)(\frac{1}{2}x + y)$ **d)** $(-\frac{3}{4}x - 1)(y + 5)$ **5. a)** $16x^2 + 56x + 49$ **b)** $16x^2 + 8xy + y^2$ **c)** $36a^2 - 6a + \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{4}{25}x^2 - \frac{8}{5}x + 4$ **e)** $0{,}09x^2 + 0{,}6x + 1$ **f)** $x^2 + 2xy^2 + y^4$ **6. a)** $(a + b)^2$ **b)** $(3a + 9b)^2$ **c)** $(a + 10b)^2$ **d)** $(4a + b)^2$ **e)** $(10a + 4b)^2$ **f)** $(a + 6)^2$ **8. a)** $4x^2 - 28x + 49$ **b)** $9x^2 + 12xy + 4y^2$ **c)** $25a^2 + 25a + 6{,}25$ **d)** $0{,}09x^2 - 4{,}2x + 49$ **e)** $5{,}29 - 4{,}6x + x^2$ **f)** $x^4 - 2x^2 + 1$ **9. a)** $(a - 2b)^2$ **b)** $(3a - 5b)^2$ **c)** $(10a - 9b)^2$ **d)** $(6a - 2b)^2$ **e)** $(0{,}5a - 10b)^2$ **f)** $(3a - 6)^2$ **10.** $(x - 3)^2$ **11. a)** $(x - y)(x + y)$ **b)** $(x - 12)(x + 12)$ **c)** $(3x + 6y)(3x - 6y)$ **d)** $(2x + 9)(2x - 9)$ **e)** $(7ax - 8)(7ax + 8)$ **f)** $(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y)$ **12. a)** $x^2 - y^2$ **b)** $25x^2 - 9y^2$ **c)** $20{,}25x^2 - y^2$ **d)** $0{,}25x^2 - 0{,}25y^2$ **e)** $100x^2 - 4y^2$ **f)** $y^2 - x^2$ **13.** tak **14. a)** 899 **b)** 9999 **c)** 2304 **d)** 3249 **15. a)** -2 **b)** $-\frac{1}{9}$ **c)** $14\frac{3}{4}$ **d)** $3\frac{1}{8}$ **16.** -7 **17.** -3 **19.** 3 i 0 **20.** $36a - 54$, dla $a = 7$ to 198

Moduł 13 **1. a)** 125 **b)** 40 **c)** 130 **d)** 81 **e)** 4 **f)** 22 **2. a)** 45 **b)** 74 **c)** 370 **d)** 317 **3. a)** 10 **b)** 5 **c)** 7,25 **d)** 10 **e)** 8 **f)** 4,25 **6.** 25, 16, 9; 4, 3; 5 **7. b) I.** 10; 8; 6 **II.** 13; 12; 5 **c)** $10^2 = 8^2 + 6^2$; $13^2 = 12^2 + 5^2$ **8. a)** tak **b)** drugi **c)** pierwszy **9. a)** tak **b)** nie **c)** tak **d)** nie **10. a)** tak **b)** nie **c)** nie **d)** tak **11. a)** $36 + 64 < x^2$ **b)** $36 + 64 > y^2$ **12. a)** np. 6; 8; 11 **b)** np. 6; 8; 9 **13. a)** ostrokątny **b)** rozwartokątny **c)** rozwartokątny **d)** ostrokątny **e)** ostrokątny **f)** prostokątny

Sprawdź sam siebie A. a) 53 **b)** 36 **c)** 19 **B. a)** 5 cm^2 **b)** 8 cm^2 **c)** 7,25 cm^2 **C. a)** $25^2 = 24^2 + 7^2$ **b)** $130^2 = 50^2 + 120^2$ **c)** $125^2 = 100^2 + 75^2$ **D. a)** tak **b)** tak **c)** nie

Moduł 14 **1.** 11; 15; 21; 25 **2. a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{6}{7}$; **c)** $\frac{8}{9}$; **d)** $\frac{14}{10}$ **e)** 0,5 **f)** 0,4 **g)** 0,1 **h)** 1,2 **3. a)** 4 **b)** 6 **c)** 14 **d)** 30 **4. a)** 1 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 11 **f)** 30 **g)** 50 **h)** 0 **5.** $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{5}{6}$; **d)** $\frac{8}{9}$ **6. a)** $1\frac{1}{10}$; **b)** $1\frac{1}{7}$; **c)** $1\frac{1}{13}$; **d)** $2\frac{1}{3}$ **7. a)** 0,1 **b)** 0,6 **c)** 0,7 **d)** 1,5 **8. a)** 18 **b)** 22 **c)** 24 **d)** 28 **e)** 31 **f)** 36 **g)** 3,7 **h)** 3,8 **9. a)** 49 **b)** 64 **c)** 100 **d)** 196 **e)** 0,01 **f)** 0,25 **g)** 1,44 **h)** 2,56 **10.** $\sqrt{2}$ **13.** między 5 i 6; między 9 i 10 **14. a)** 44 i 45 **b)** 54 i 55 **c)** 63 i 64 **d)** 70 i 71 **15. a)** 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **16.** 1 i 4; 1,4; 1,41; 1,4142; 1,7; 2,2 **17. a)** 2,4; 3,2; 9,5; 31,6 **b)** 32; 51; 48; 79 **18.** $\sqrt[3]{a}$; 4; 5; -5; $b^3 = a$ **19. a)** 1 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8 **f)** 10 **g)** 20 **h)** 0 **i)** -1 **j)** -4 **k)** -5 **l)** -9 **20. a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 1,1 **d)** $\frac{4}{3}$ **e)** $-\frac{2}{3}$ **f)** $-\frac{1}{2}$ **g)** $-1\frac{1}{5}$ **h)** $-1\frac{1}{9}$ **21. a)** 0,1 **b)** 0,3 **c)** 0,5 **d)** 1,1 **e)** $-0{,}1$ **f)** $-0{,}3$ **g)** $-0{,}6$ **h)** $-0{,}9$ **22. a)** 12 **b)** 18 **c)** 1,4 **d)** 1,7 **23. a)** 2 mm **b)** 10 cm **c)** 0,3 dm **d)** 0,3 m

Sprawdź sam siebie A. a) 13 **b)** 1,6 **c)** $\frac{5}{7}$ **d)** $1\frac{1}{9}$ **B.** 7 i 8; 9 i 10 **C.** 2, 8 **D. a)** 10 **b)** 0,5 **c)** $-\frac{4}{7}$ **d)** $-\frac{3}{2}$

Moduł 15 **2. I.** 8 i 8 **II.** 12 i 12 **III.** 10 i 10 **IV.** 40 i 40 **V.** 20 i 20 **VI.** 25 i 25 **3. a)** 2 i 2 **b)** 3 i 3 **c)** 6 i 6 **d)** 4 i 4 **4.** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$; $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}$, gdy $b \neq 0$ **5. a)** $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{42}$ **c)** $\sqrt{65}$ **6. a)** 4 **b)** 1 **c)** 0,8 **d)** $\frac{2}{7}$ **e)** $\frac{1}{6}$ **f)** 2 **g)** 5 **h)** 4 **i)** 0,2 **j)** 0,3 **k)** $-\frac{1}{2}$ **l)** -2 **7. a)** 2 **b)** 6 **c)** 0,8 **d)** 3 **e)** $\frac{2}{5}$ **f)** $\frac{6}{7}$ **g)** 2 **h)** 0,5 **i)** 20 **j)** $\frac{3}{2}$ **k)** $-\frac{7}{5}$ **l)** $-\frac{1}{2}$ **8. a)** 2 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** 2 **e)** $-\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{3}{4}$ **9. a)** 4 **b)** 33 **c)** 15 **d)** 8 **e)** 2 **f)** 45 **g)** 26 **h)** 11 **i)** 9 **j)** 31 **k)** 63 **l)** 6 **10. a)** 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 32 **e)** 107 **f)** 86 **g)** 2 **h)** 3 **i)** -4 **11. a)** 7 **b)** 19 **c)** 63 **d)** 11 **e)** 21 **f)** 78 **12. a)** 9 **b)** 4 **c)** 4 **d)** 4 **e)** 9 **f)** -2 **13. I.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **II.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **III.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; $\sqrt{7}$; **I.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **II.** $\frac{9\sqrt{11}}{11}$ **III.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

14. a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; **b)** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$; **c)** $2\sqrt{7}$; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$; **e)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; **f)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **15. I.** $\sqrt{2}$ **II.** $\sqrt{5}$ **III.** $\sqrt{13}$; $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, gdy $a > 0$
16. $\sqrt{20}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{27}$; **I.** 2 **II.** 5 **III.** $3\sqrt{5}$ **17. a)** $2\sqrt{6}$; $2\sqrt{7}$; $4\sqrt{5}$; $5\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[3]{6}$; $3\sqrt[3]{4}$
18. a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{405}$; $\sqrt{1440}$ **b)** $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{270}$; $\sqrt[3]{128}$; $\sqrt[3]{375}$ **19. a)** 4 **b)** 5 **c)** 432 **d)** 6 **e)** 7 **f)** 320
20. a) $2\sqrt{3}$; **b)** $5\sqrt{6}$; **c)** $10\sqrt{11}$; **d)** $3\sqrt[3]{7}$; **e)** $8\sqrt[3]{12}$; **f)** $13\sqrt[3]{9}$; **g)** $\sqrt{13}$; **h)** $-5\sqrt[3]{9}$; **i)** $\sqrt[3]{12}$ **21. a)** $9\sqrt{2}$; **b)** $3\sqrt{7}$; **c)** $8\sqrt{3}$; **d)** $3\sqrt[3]{12}$; **e)** $5\sqrt[3]{9}$; **f)** $35\sqrt[3]{6}$ **22. a)** 10 **b)** -1 **c)** $-1{,}1$ **d)** 3 **e)** 8 **f)** 4 **25.** $3\sqrt{2}$; **b)** $7\sqrt{5}$; **c)** $11\sqrt{3}$; **d)** $22\sqrt{3}$ **26. a)** 1 **b)** -3 **c)** 2,1 **d)** 1 **e)** 2 **f)** $\sqrt[3]{55}$ **27. a)** 6 **b)** -3 **c)** 3 **d)** -18
Sprawdź sam siebie A. a) 6 **b)** 2,7 **c)** 3 **d)** $\frac{4}{9}$ **e)** $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{2}{5}$ **B. a)** 3 **b)** 8 **c)** $\frac{1}{7}$ **d)** 12,4 **e)** 78 **f)** 65
C. a) 15 **b)** 21 **c)** 5 **D. a)** $4\sqrt{7}$ **b)** $10\sqrt{5}$ **c)** $8\sqrt{13}$ **d)** $8\sqrt[3]{4}$ **e)** $18\sqrt[3]{6}$ **f)** $7\sqrt[3]{6}$

Moduł 16 **1.** $c = 0{,}5$, $m = 10$, $d = 13$ **2.** $t = \sqrt{146}$, $p = \sqrt{130}$, $k = 25$ **9. a)** $b = \sqrt{45}$ cm $= 3\sqrt{5}$ cm, **b)** $a = \sqrt{525}$ cm $= 5\sqrt{21}$ cm **c)** $b = \sqrt{1{,}25}$ dm $= 0{,}5\sqrt{5}$ dm **d)** $a = 2$ dm **10. a)** $b = \sqrt{3}$ **b)** $a = \sqrt{6}$ **c)** $b = \sqrt{6}$ **d)** $a = \sqrt{2}$ **e)** $b = 3$ **f)** $a = 4$ **g)** $b = \sqrt{10}$ **h)** $a = \sqrt{5}$ **11. a)** np. 1 i 3; $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$; $\sqrt{3}$ i $\sqrt{7}$; 2 i $\sqrt{6}$; $\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$ **b)** np. 1 i $\sqrt{52}$; $\sqrt{2}$ i $\sqrt{51}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{50}$; 2 i 7; $\sqrt{5}$ i $\sqrt{48}$ ... $\sqrt{26}$ i $\sqrt{27}$ **c)** np. 1 i $\sqrt{54}$; $\sqrt{2}$ i $\sqrt{53}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{52}$; 2 i $\sqrt{51}$; $\sqrt{5}$ i $\sqrt{50}$; $\sqrt{6}$ i 7; ... $\sqrt{27}$ i $\sqrt{28}$ **13.** nie a), d), e), f); tak b), c); **14.** nie a)–f)
Sprawdź sam siebie A. a) $\sqrt{34}$ **b)** $\sqrt{6}$ **c)** $\sqrt{11}$ **d)** $\sqrt{22}$ **B. a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{7}$ **c)** 2 **D. a)** nie **b)** tak **c)** tak

Moduł 17 **1.** 15 cm **2. a)** $c = \sqrt{5}$ **b)** $c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ **c)** $c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ **d)** $c = \sqrt{85}$ **3.** $c = 13$ cali **5. a)** $\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** $4\sqrt{2}$ **6. a)** 5 **b)** 13 **c)** 2 **d)** $\sqrt{2}$ **7. a)** $p = 4$ **b)** $p = 4\sqrt{2}$ **c)** $p = 5\sqrt{2}$ **d)** $p = \sqrt{34}$ **10. a)** $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dm **b)** $h = \sqrt{3}$ cm **c)** $h = 7\sqrt{3}$ dm **d)** $h = 12\sqrt{3}$ cm **11. a)** $a = 2$ cm **b)** $a = 4$ cm **c)** $a = 4\sqrt{3}$ cm **d)** $a = \sqrt{3}$ cm **12. a)** $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dm **b)** $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ dm **c)** $h = 6\sqrt{3}$ dm **d)** $h = 8\sqrt{3}$ cm **15. a)** $P = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **b)** $P = \sqrt{3}$ **c)** $P = 4\sqrt{3}$ **d)** $P = 16\sqrt{3}$ **16. a)** 3 cm **b)** 4 cm **c)** $2\sqrt{2}$ cm **d)** $\sqrt{2}$ cm **18.** 6 cm **19.** $a = 18$ cm **20.** 10 cm **21.** $2\sqrt{3}$ cm **22.** ramię 6 cm, $Ob = 18 + \sqrt{20} = 18 + 2\sqrt{5} = 2(9 + \sqrt{5})$ **23.** $P = 21\text{ cm}^2$, $Ob = 22$ cm **24.** $P = 12\text{ cm}^2$ **25.** 4,44 m **26.** 3 m **28.** ≈ 2,96 m, ≈ 2,83 m, ≈ 2,60 m, ≈ 2,24 m, ≈ 1,66 m
Sprawdź sam siebie A. $d = 7\sqrt{2}$ cm **B.** $h = \frac{3}{2}$ cm **C.** $P = 18\sqrt{3}\text{ cm}^2$, $Ob = 24$ cm **D.** 1,98 m

Moduł 18 **1. a)** $\sqrt{145}$ **b)** $\sqrt{145}$ **c)** $\sqrt{145}$ **2. a)** 10 **b)** 13 **c)** 15 **d)** 25 **4. a)** 5 **b)** 5 **c)** 20 **d)** 10 **e)** $6\sqrt{2}$ **f)** $2\sqrt{2}$ **g)** 6 **h)** 18 **5.** $|AB| = 2\sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{58}$, $|CD| = 11$, $|DA| = \sqrt{61}$, $|DB| = 5$ **6.** $|AB| = \sqrt{26}$, $|BC| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|CA| = 2\sqrt{2}$, jest **7.** $|AB| = \sqrt{26}$, $|BC| = \sqrt{13}$, $|CA| = \sqrt{13}$, Trójkąt jest trójkątem prostokątnym. **8.** $P = 10$ **9.** $P = 13$ **10.** $|AD| = 10$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4\sqrt{2}$, $|BC| = 5$, trapez, $|AC| = 2\sqrt{13}$, $|BD| = \sqrt{65}$, $P = 26$ **11.** $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 5$, $|AC| = 7\sqrt{2}$, $|BD| = \sqrt{2}$, $P = 7$ **12.** $|AD| = 8$, $|BF| = |CE| = 4$, $|BE| = |CF| = 4\sqrt{2}$, $|AE| = |AC| = |DB| = |DF| = \sqrt{40}$, $Ob = 8(1 + \sqrt{2})$, $P = 24$
13. $|AC| = |AG| = |CE| = |EG| = 3\sqrt{2}$, $|AD| = |AF| = |BE| = |BG| = |CF| = |CH| = |DG| = |EH| = \sqrt{17}$, $|AE| = |CG| = 6$, $|BD| = |BH| = |DF| = |FH| = 2$, $|BF| = |DH| = 2\sqrt{2}$, $Ob = 8\sqrt{5}$, $P = 12$
Sprawdź sam siebie A. a) 25 **b)** 13 **c)** 25 **B. a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{74}$ **c)** $\sqrt{2}$ **C. a)** $|AB| = 5$, $|BC| = 2\sqrt{5}$, $|AC| = \sqrt{5}$ **b)** jest **D.** $P = 15$, $O = \sqrt{65} + 5\sqrt{5}$

Trening przed klasówką nr 4 **1. a)** 5 **b)** 4 **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** 9 **e)** 3 **f)** $\frac{3}{2}$ **g)** 8 **h)** 1 **2. a)** $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$, $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$, $\sqrt{7{,}5} = 5\sqrt{0{,}3}$, $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2{,}7} = 3\sqrt[3]{0{,}1}$, $\sqrt[3]{\frac{81}{64}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{3}$ **3.** Istnieje 6 pierwiastków większych od 3 i mniejszych od 4. Istnieje 36 pierwiastków trzeciego stopnia większych od 3 i mniejszych od 4. **4.** $5\sqrt{2}$ cm **5. a)** $2\frac{1}{4}$ **b)** $8\frac{1}{7}$ **c)** $-0{,}9$ **d)** $\frac{1}{8}$ **6. a)** $5\sqrt{7} = \sqrt{175}$, $\frac{2}{3}\sqrt{27} = \sqrt{12}$, $0{,}2\sqrt{15} = \sqrt{0{,}6}$, $3\sqrt{\frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

b) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$, $0{,}6\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2{,}16}$, $8\sqrt[3]{\frac{1}{256}} = \sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2}$ **7.** $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$, $\frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$, $\frac{1}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{35}$, $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

8. a) $4\sqrt{5} - 4$ **b)** $-6\sqrt[3]{2} - 5$ **c)** $-4\sqrt{2}$ **d)** $3\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$ **e)** $14\frac{24}{25}$ **f)** $143\frac{17}{18}$ **9. a)** 25 cm **b)** 9,9 m **c)** 0,63 m

10. a) $x = \sqrt{10}$ **b)** $x = 10$ **c)** $x = 5$ **d)** $x = \frac{\sqrt{11}}{2}$ **e)** $x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ **f)** $x = 1$ **11. a)** nie jest prostokątny **b)** jest prostokątny **c)** jest prostokątny **d)** jest prostokątny **12.** Trzeci bok może mieć 5 cm lub $\sqrt{7}$ cm

13. $h = 1\frac{1}{2}$ cm, $P = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $r = \frac{1}{2}$, $R = 1$ **14.** $Ob = (20 + 5\sqrt{2})$ cm **15.** $Ob = 2(\sqrt{15} + \sqrt{3})$ cm **16.** $Ob = 30$ cm

17. $P = 88\ \text{cm}^2$ **18.** $144\sqrt{3}$ **19.** 283 m **20.** $Ob_{BDC} = 84$ cm, $Ob_{ABD} = 91{,}4$ cm **21.** $r = \frac{1}{2}\sqrt{21}$ cm **22. a)** $|AB| = 2\sqrt{5}$ **b)** $|AB| = 4\sqrt{2}$ **c)** $|AB| = 7\sqrt{2}$, $|AB| = 17\sqrt{2}$ **23.** Trójkąt jest prostokątny, $P = 15$, $Ob = 2(5 + 2\sqrt{10})$ **24.** $|AB| = 2\sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{10}$, $|AC| = 5\sqrt{2}$ **25. a)** $D = (3, -2)$ **b)** jest rombem **c)** $P = 15$ **26. a)** w symetrii względem osi y **b)** w symetrii względem początku układu współrzędnych **c)** w symetrii względem osi x **27.** $B = (-1, -3)$, $C = (1, -3)$, $P = 6$, $Ob = 8 + 2\sqrt{10}$

Moduł 19 **3. a)** Kino Maxi: bilet do kina → Shrek, Kino Bajka: bilet do kina → Harry Poter, Kino Bambino: bilet do kina → *Opowieści z Narnii* **b)** Kino Maxi: bilet do kina → 02.04., Kino Bajka: bilet do kina → 23.04., Kino Bambino: bilet do kina → 21.04. **c)** Kino Maxi: bilet do kina → 4, Kino Bajka: bilet do kina → 4, Kino Bambino: bilet do kina → 5, **d)** Maxi → 13 zł, Bajka → 20 zł, Bambino → 19 zł **e)** *Shrek* → Maxi, *Harry Potter* → Bajka, *Opowieści z Narnii* → Bambino **5. a)** np. znaczek → cena **b)** np. koszula → rozmiar **c)** np. kod kreskowy → cena towaru **d)** np. bilet → miasto docelowe podróży
Sprawdź sam siebie A. a) 25 → 5,5; **b)** 25 → 39 **B. a)** $D = \{22{,}5; 23; 23{,}5; 24; 24{,}5; 25; 25{,}5; 26; 26{,}5; 27\}$, Przeciwdziedzina $\{3; 3{,}5; 4; 4{,}5; 5; 5{,}5; 6; 6{,}5; 7; 8;\}$ **b)** $D = \{22{,}5; 23; 23{,}5; 24; 24{,}5; 25; 25{,}5; 26; 26{,}5; 27\}$, Przeciwdziedzina $\{35; 36; 36{,}5; 37; 38; 39; 39{,}5; 40; 41; 42\}$

Moduł 20 **1. a)** A – I, II, VI; B – I, III, V; C – I, II, VI; D – I, III, IV, V **3. a)** tak **b)** tak **c)** nie **d)** tak **e)** tak **f)** tak **g)** tak **5.** I, III **6.** Funkcją jest przyporządkowanie I i III. Dla I dziedzina = {a, b, c}, przeciwdziedzina = {1, 2, 3, 4}, zbiór wartości = {1, 3, 4}, dla III dziedzina = {1, 2, 3, 4}, przeciwdziedzina = {m, n}, zbiór wartości = {m, n} **7.** Druga. Dziedzina = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, zbiór wartości = {1, 2, 3, 0} Ta sama wartość przyporządkowana jest parom argumentów: 1 i 5, 2 i 6, 3 i 7, 4 i 8. **8. a)** tak **b)** nie **c)** tak **9. a)** Dziedzina = {0, 1, 2, 3, 4}, zbiór wartości = {–3, –2, –1, 0, 1}, dla 4 funkcja przyjmuje 1, dla 4 funkcja przyjmuje 1, dla 0 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą **b)** Dziedzina = {1, 2, 3, 4}, zbiór wartości = {0, 1}, dla 4 funkcja przyjmuje 1, dla 2 i dla 4 funkcja przyjmuje 1, dla 1 i dla 3 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą **c)** Dziedzina = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, zbiór wartości = {0, 1, 2}, dla 4 funkcja przyjmuje 1, dla 1, 4, 7 funkcja przyjmuje 1, dla 3, 6, 9 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą **10.** Każdej liczbie ze zbioru {–3, –2, –1, 0, 1, 2} przyporządkowano liczbę o 1 większą. Dziedzina = {–3, –2, –1, 0, 1, 2}, zbiór wartości = {–2, –1, 0, 1, 2, 3}, $y = x + 1$ **15.** $f(0) = 0{,}5$, $f(1{,}5) = 2$, $f(0) = f(-2{,}5) = 0{,}5$, max = 3, min = –2, Dziedzina = {–2,5, –1, 0, 1, 1,5, 3} **17. a)** Dziedzina = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}, zbiór wartości = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3} **b)** Dziedzina = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}, zbiór wartości = {3} **c)** Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych x takich, że $-2 \leqslant x \leqslant 1$, zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych y takich, że $1 \leqslant y \leqslant 4$ **18.** $f(21) = 3$, $f(25) = 7$, $f(30) = 3$, dla 24 wartość funkcji jest równa 6, $f(21) = f(30) = 3$ **19.** Przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. $f(-3) = 11$, $f(0) = 5$, $f(2\frac{1}{2}) = 0$, $f(2) = 1$, $f(-47\frac{1}{2}) = 100$ **20. a)** tak **b)** nie **c)** tak **d)** nie **21. a)** 0 **b)** liczby ujemne **c)** –5 **21. a)** liczby ujemne **b)** 0 **c)** liczby ujemne **23. a)** $f(-2) = -2$, $f(0) = 2$, $f(3) = -2$. Wartość 0 funkcja przyjmuje dla $x = -1$ i $x = 1$

24. a) nie **b)** tak **c)** nie **d)** tak
Sprawdź sam siebie A. ludzie → grupa krwi, bryły → objętość, ludzie → data urodzenia **B.** II
C. a) wartość najmniejsza to $y = -4$, wartość największa to $y = 4$ **b)** $f(0) = 1{,}5$, $f(-1) = 4$ **c)** $f(-3) = 2$

Moduł 21 **2.** I – maleje II – rośnie III – stała IV – maleje V – maleje VI – rośnie **4. a)** –1, 0, 1 3, 5 **b)** –1, 0, 1, 2, 4 **6. a)** stała **b)** malejąca **c)** rosnąca **8. a)** gdy $x \geqslant -2$ i $x \leqslant -1$ oraz $x \geqslant 1$ i $x \leqslant 2$ wartości maleją, gdy $x \geqslant -1$ i $x \leqslant 0$ wartości rosną, gdy $x \geqslant 0$ i $x \leqslant 1$ wartości są stałe **b)** gdy $x \geqslant -2$ i $x \leqslant -1$ oraz $x \geqslant 0{,}5$ wartości maleją, gdy $x \geqslant 0$ i $x \leqslant 0{,}5$ wartości rosną, gdy $x \geqslant -1$ i $x \leqslant 0$ wartości są stałe **c)** gdy $x \geqslant 0{,}5$ i $x \leqslant 2$ wartości maleją, gdy $x \geqslant -2$ i $x \leqslant 0{,}5$ wartości rosną **13.** gdy $x = 5$ **16.** 7 dni jest w podróży

Sprawdź sam siebie A. $y = x^2$, gdy $x \geqslant 0$, rosnąca **B.** gdy $x \leqslant 0$ maleją, gdy $x \geqslant 0$ i $x \leqslant 1$ rosną, gdy $x \geqslant 1$ maleją **C.** $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$, $x = 1{,}5$

Moduł 22 **4.** II, III, V i VI **7. a)** I i III **b)** II i IV **c)** I i III **d)** II i IV **e)** I i III **f)** II i IV **8. a)** $y = 2x$ **b)** $y = \frac{1}{2}x$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = -4x$ **e)** $y = \frac{1}{4}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$ **g)** $y = x$ **h)** $y = -4x$ **9.** tylko $A = (-1, 2)$

WZ I. morska – 1,9 km, angielska – 1,6 km, admiralska – 1,9 km, fińska – 10,7 km, geograficzna – 7,4 km, londyńska – 1,5 km, niemiecka – 7,5 km, norweska – 11,3 km, polska – 7,1 km, od 1819 r. – 8,5 km, pruska – 7,5 km, rzymska – 1,5 km, szwedzka – 10,7 km, wrocławska – 10,3 km. **IV.** y – odległość w kilometrach, x – odległość w milach $y = 1{,}609x$, $x = \frac{y}{1{,}609}$ **V.** ≈ 0,54 mili morskiej, ≈ 0,14 mili polskiej sprzed 1819 r., ≈ 0,12 mili polskiej od 1819 r. **VI.** x – odległość w kilometrach, y – odległość w milach angielskich, $y = \frac{x}{1{,}609}$, x – odległość w kilometrach, y – odległość w milach morskich, $y = \frac{x}{1{,}853}$

VII. Tak **VIII.** Tak

Sprawdź sam siebie B. a) II i IV **b)** I i III **c)** I i III **d)** II i IV **C. a)** $y = -\frac{1}{5}x$ **b)** $y = 4x$ **c)** $y = \frac{1}{6}x$ **d)** $y = -8x$ **D.** C

Moduł 23 **2. a)** $a = 2$, $b = 5$ **b)** $a = 3$, $b = 6$ **c)** $a = -1$, $b = -1$ **d)** $a = \frac{2}{5}$, $b = -0{,}75$ **e)** $a = 1$, $b = 0$ **f)** $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ **3.** I i III, II i IV **4.** II i VI, IV i V **5.** $y = \frac{3}{5}x - 3$ **8.** A, B, D, E, F **9.** $t = 6$, $k = 2{,}5$

12. rosnąca: **a)** i **b)**, malejąca: **c)**, **d)**, **f)**, **h)**, **i)**, **j)**, stała: **e)**, **g)** **13. a)**, **c)** – rosnąca , **d)**, **f)** – malejąca, **b)**, **e)** – stała **14. a)** malejąca **b)** rosnąca **c)** stała **d)** malejąca **15.** $m = 8$ **16.** I $x = -\frac{2}{3}$ II $x = -\frac{5}{7}$ III $x = \frac{4}{9}$ **17. a)** $x = 10$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = -\frac{9}{5} = -1\frac{4}{5}$ **18. a)** $x = -3$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = \frac{1}{3}$ **19.** $y = 2x + 4$ **21. a)** $x = -3$, wartości ujemne funkcja osiąga dla $x < -3$, dodatnie dla $x > -3$ **b)** $x = -1$, wartości ujemne funkcja osiąga dla $x > -1$, dodatnie dla $x < -1$ **23. a)** dodatnie dla $x < 5$, ujemne dla $x > 5$ **b)** dla $x > \frac{4}{3}$ dodatnie, dla $x < \frac{4}{3}$ ujemne **c)** dodatnie dla $x < -6003$, ujemne dla $x > -6003$ **25.** $y = -4x - 4$ **WZ I.** Tak **II.** 212°F **III.** 32°F **IV.** około 15,6°C **V.** około 37,8°C

Sprawdź sam siebie A. nie **B.** nie **C. a)** $x = -1$, dodatnie dla $x < -1$ **b)** brak miejsca zerowego, dla wszystkich argumentów wartości funkcji są dodatnie **c)** $x = -5$, dodatnie dla $x > -5$ **D.** $y = 3x - 5$

Moduł 24 **5.** II **6. a)** (10, 16), (0,5, –3) **b)** żadna **c)** (0, 6) i (–4, 0) **7.** np. $2x - 5y + 23 = 0$, $6x + y = 11$, $3x - 2y + 7 = 0$ **9. a)** $x - y = 0$ **b)** $7x - y - 5 = 0$ **c)** $0{,}3x - y + 2 = 0$ **d)** $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$ **e)** $2{,}4x - 0{,}8y - 3{,}2 = 0$ **f)** $x + y = 0$ **10. a)** $y = -x$ **b)** $y = 11x - 5$ **c)** $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$ **d)** $y = -2{,}8x + 3$ **e)** $y = 6x - 4$ **f)** $y = -2x + 5\frac{6}{7}$

13. 6 sposobów **20. a)** $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ (0, 2) **b)** $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (0, –3) **c)** (–4, 0), (0, –2) **21. a)** $y = -x - 4$ **b)** $y = -4x + 8$ **c)** $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ **22.** $12 = 0{,}5(x + y) \cdot 4$, czyli $y = -x + 6$

Sprawdź sam siebie A. $4x + 3y = 50$, np. $x = 5$ kg, $y = 10$ kg **B.** II, III, IV **C.** np. $x = 2$, $y = -1$ lub $x = 4$, $y = 2$ lub $x = 0$, $y = -4$

Moduł 25 **2. a)** nie **b)** nie **c)** tak **7.** $\left(-\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$ **8. a)** nieoznaczony **b)** oznaczony **c)** oznaczony **9.** I – sprzeczny, II – nieoznaczony, III – oznaczony **11. a)** $a = 5$, $b = 10$ **b)** $a \neq 5$, b – dowolne, np. $a = -1$, $b = 4$ **c)** $a = 5$, $b \neq 10$ **12.** 7 i 5 **13.** 6 i 3 **14.** co najmniej 13 334 km **15.** 8 i 6 **16.** o 16.00

Sprawdź sam siebie B. nieoznaczony **C. a)** $a = 3$, $b = 0$ **b)** np. $a = 1$, $b = 4$, $a \neq 3$ **c)** $a = 3$, $b \neq 0$ **D.** $y = 16 - xy = x - 7$ szukane liczby to: 11,5 i 4,5

Moduł 26 **4. a)** $x = 5, y = 1$ **b)** $x = 1, y = 2$ **c)** $x = 7, y = 1$ **5. a)** $x = -2, y = -2$ **b)** $x = -12, y = 20$ **c)** $x = -1, y = 2$ **6. a)** $x = 3, y = -1$ **b)** $x = 2, y = -11$ **c)** $x = 10\frac{2}{3}, y = 4\frac{4}{9}$ **7. a)** $x = -10, y = -22$ **b)** $x = -5, y = 1$ **c)** $x = \frac{8}{17}, y = \frac{4}{17}$ **d)** $x = -1\frac{5}{9}, y = \frac{4}{9}$ **10. I.** nieskończenie wiele **II.** nie ma rozwiązania **III.** dokładnie jedno rozwiązanie **11. a)** np. $-5x + 2y - 5 = 0$ **b)** np. $5x + 6y - 8 = 0$ **c)** np. $-10x + 4y - 8 = 0$ **12.** Ania: 13 lat, Kasia: 17 lat **13.** 12 i 4 **14.** 35 i 5 **15.** $82^\circ, 62^\circ, 36^\circ$ **16.** 54 **17.** 4 cm, 6 cm, $\sqrt{52}$ cm **18.** nieskończenie wiele, np. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Sprawdź sam siebie A. $x = -3{,}4, y = 2{,}8$ **B.** $x = -6, y = -3{,}25$ **C. a)** nieoznaczony **b)** oznaczony **D.** 43 i 15

Trening przed klasówką nr 5 **1. a) I.** $1 \to 3; 3 \to 5; 5 \to 7; 7 \to 9; 9 \to 11; 11 \to 13; 13 \to 15; 15 \to 17$
II. $0 \to -3; 1 \to -2; 2 \to -1; 3 \to 0; 4 \to 1; 5 \to 2; 6 \to 3; 7 \to 4; 8 \to 5; 9 \to 6$
III. A → 1; Ą → 2; … Ż → 32 **IV.** M → 1; A → 2; T → 1; E → 2; Y → 2; K → 1

b)

I.

1	3	5	7	9	11	13	15
3	5	7	9	11	13	15	17

II.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6

III.

A	Ą	B	...	Ż
1	2	3	...	32

IV.

M_1	A_1	T_1	E	M_2	A_2	T_2	Y	K	A_3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

3. a) np. $y = x + 2$

x	3	4	5	6	7	8
y	5	6	7	8	9	10

b) np. $y = 2x$

x	−3	0	1	3	6	9
y	−6	0	2	6	12	18

c) np. $y = \frac{x}{2}$

x	−2	−1	0	1	4	6
y	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	3

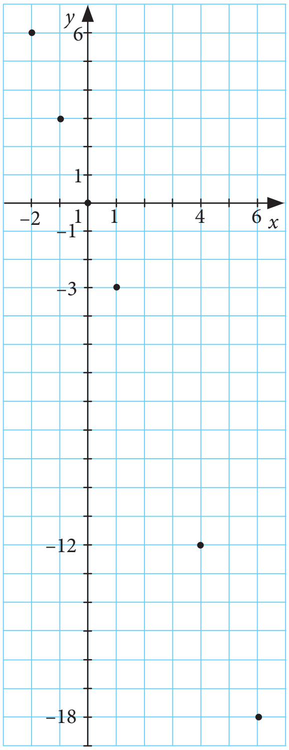
d) np. $y = x^2$

x	−4	−2	0	1	5	6
y	16	4	0	1	25	36

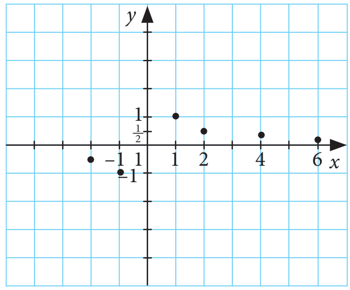
4. I, III, IV **5. a)** liczby rzeczywiste nie mniejsze od −11 i nie większe od 14 **b)** liczby rzeczywiste nie mniejsze od −2 i nie większe od 4 **c)** $-2 \to 3, 11 \to 2, 13 \to 0{,}5$ **6.** Patrz rysunki 6A i 6B **7.** I **8. a)** 3 **b)** 1 **c)** 0,5 **d)** −0,5 **9.** Patrz rysunek 9 **10.** Patrz rysunek 10 **11.** Proste przechodzące przez początek układu współrzędnych **a)**, **b)** ćw. I, III, **c)**, **d)** ćw. II, IV **12. b)** **13.** A, B, C – tak, D – nie **14.** prostopadle **15. a)** −1 **b)** −8 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{3}{4}$ **16. a)** $y = 5x$, $D = \boldsymbol{R}$, $x = 0$, dla $x > 0$ wart. dodatnie, dla $x < 0$ wart. ujemne **b)** $y = -x - 1$, $D = \boldsymbol{R}$, $x = -1$, dla $x < -1$ wart. dodatnie, dla $x > -1$ wart. ujemne **c)** $y = x - 1$, $D = \boldsymbol{R}$, $x = 1$, dla $x > 1$ wart. dodatnie, dla $x < 1$ wart. ujemne **d)** $y = x + 1$, $D = \boldsymbol{R}$, $x = -1$, dla $x > -1$ wart. dodatnie, dla $x < -1$ wart. ujemne **17. a)** $x = \frac{1}{6}$ **b)** $x = \frac{1}{4}$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = -16$ **19.** $y = \frac{1}{2}x + 1$
20. a) np. (1, 4); (2, 7); (3, 10) **b)** np. (0, −2); (2, −1); (4, 0) **c)** np. (0, −1); (1, −5); (2, −9) **d)** np. (0, 2); (1, 1); (2, 0) **21.** np. (3, 2); (6, 4); (9, 6) **23. a)** $\begin{cases} x = 8 \\ y = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = -0{,}5 \\ y = 2 \end{cases}$

24. 73 i 16 **25.** 81° i 69°

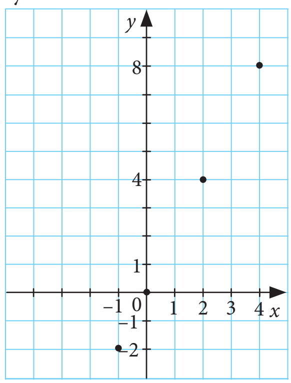
rysunek 6 – A



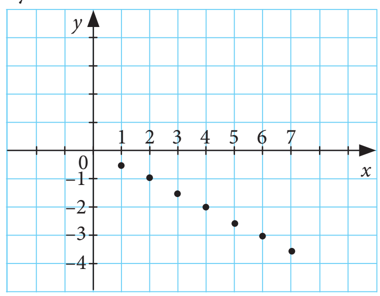
rysunek 6 – B



rysunek 9



rysunek 10



Moduł 27 **4.** 4 ściany, trójkąt **6.** 9 cm **7.** 5 cm **8.** 5 cm i 10 cm **9.** II A, I C, III B **17.** III A, I B, II C
WZ. I. a) 4, 6, 4 **b)** 6, 10, 6 **c)** 11, 20, 11 **II. a)** pięciokąt **b)** sześciokąt **c)** dwunastokąt **III.** 21, 21, 40
IV. a) siedmiokąt **b)** piętnastokąt **c)** dwustukąt **V. a)** dziewięciokąt **b)** dziesięciokąt **c)** szesnastokąt
d) w każdym ostrosłupie liczba ścian jest równa liczbie wierzchołków **VI. a)** $n + 1$ **b)** $2n$ **c)** $n + 1$ **d)** $4n + 2$
VII. siedmiokąt, dziesięciokąt, $(k + 1)$ – kąt
Sprawdź sam siebie A. a) dwunastokąt **b)** czternastokąt **c)** dziesięciokąt **d)** dwudziestokąt **B.** 10 cm i 30 cm

Moduł 28 **3.** 30 cm **4.** 75 cm^2 **5.** 9 cm **6. a)** 400 cm^3 **b)** $96\sqrt{3}$ cm^3 **c)** 90 cm^3 **7.** 120 cm^3
8. a) $36\sqrt{3}$ cm^3 **b)** 256 cm^3 **9.** 84 cm^2 **10.** $64\sqrt{3}$ cm^2 **11.** $100(1 + \sqrt{3})$ cm^2 **12.** $150(\sqrt{3} + 2)$ cm^2
14. 400 cm^3 **15.** $V = 12$ cm^3, $P = 36$ cm^2
Sprawdź sam siebie A. 40 cm^3 **B.** 32 cm^3 **C.** $P = 39$ cm^2 **D.** $V = 100$ cm^3, $P = 150$ cm^2

Moduł 29 **3. a)** $a^2 + a^2 = d^2$ **b)** $a^2 + d^2 = k^2$ **c)** trójkąt nie jest prostokątny (jest równoboczny) **4. a)** $x = 6\sqrt{6}$ cm
b) $x = \sqrt{119}$ cm **c)** $x = 4\sqrt{5}$ cm **d)** $x = 10$ cm **e)** $x = 15$ cm **f)** $x = \sqrt{55}$ cm **7.** 21 cm **8.** 11 cm **10. a)** $2\sqrt{3}$ cm
b) $3\sqrt{3}$ cm **11. a)** 3 cm **b)** $\sqrt{69}$ cm **12.** $4\sqrt{5}$ cm **13.** $3\sqrt{3}$ cm **14. a)** 91 cm^2 **b)** 160 cm^2 **15.** $36\sqrt{3}$ cm^2
16. a) $8\sqrt{3}$ cm^2 **b)** 420 cm^2 **c)** $6{,}25\sqrt{11}$ cm^2 **17.** $2{,}5\sqrt{87{,}25}$ cm^2 **18.** $P = 12\sqrt{145}$ cm^2, $L = 58$ cm
Sprawdź sam siebie A. a) $d^2 + c^2 = k^2$ **b)** $H^2 + \frac{1}{4}d^2 = c^2$ **c)** $a^2 + c^2 = k^2$ **B.** $k = 6$ cm **C.** $P = 30$ cm^2
D. $c = 6\sqrt{2}$ cm

Moduł 30 **1. a)** tak **b)** tak **c)** tak **2. a)** 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 **b)** tak **c)** tak **d)** 12:(6, 6); 7:(1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) (6, 1) **e)** bardziej prawdopodobne jest wypadnięcie łącznie 7 oczek **4. a)** 1 na 6 **b)** 1 na 6 **5. a)** 52 **b)**13; 1 na 4 **c)** 26; 1 na 2 **6.** w obu loteriach szanse są równe: 1 na 10 **8. b)** 12; liczbie parzystej sprzyja 9 wyników; szanse: 3 na 4 **c)** liczbie nieparzystej sprzyjają 3 wyniki; szanse: 1 na 4 **10. a)** 0,6; 20; 100; 0,51 **b)** są bliskie 0,5 **13.** możliwe wyniki: 12, 13, 21, 23, 31, 32 **a)** 2 na 6 **b)** 4 na 6 **c)** 3 na 6 **d)** 2 na 6 **14.** Szanse wylosowania dwóch kul różnokolorowych: 2 na 3.

Sprawdź sam siebie A. a) tak **b)** tak **c)** nie **B.** 25 rzutów; 4; $\frac{4}{25}$; $\frac{12}{25}$ **C.** IIbc, IIb Ic, IIc Ib, Ibc **D. a)** 3 na 6 **b)** 2 na 6 **c)** 2 na 6

Trening przed klasówką nr 6 **1.** ostrosłup czworokątny **2.** 72 cm **3.** dla kwadratu krawędź podstawy 3, dla prostokąta wys. ostrosłupa 7, dla trójkąta objętość ostrosłupa $\frac{98\sqrt{3}}{3}$ **4.** $P = 27\ cm^2$ **5.** $H = 15$ cm **6.** $V = 18\sqrt{3}\ cm^3$ **7.** $V = 2353157\frac{2}{3}\ m^3$ **8.** $V = 546\ cm^3$ **10.** $4{,}5\ cm^3$ **11.** $P_b = 225\ cm^2$ **12.** $P_p = 32\sqrt{3}\ cm^2$, $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}\ cm^3$ **13.** $V_{ostr.} = 216\ cm^3$, pozostałej $V = 432\ cm^3$ **14.** 6 cm **15.** $P = 24\sqrt{3}\ cm^2$ **16.** $h = 10$ cm **17.** $P = 240\ cm^2$ **18. a)** np. wylosowano kule z nr 1, 3, 5 **b)** wylosowano kule z nr 1, 4, 4 **c)** wylosowane kule nie będą miały nr 6 **19.** kl. IIa 0,15; kl. IIb 0,14; więc kl. IIa **20.** 34, 36, 43, 46, 63, 64 **a)** $\frac{4}{6}$ **b)** $\frac{2}{6}$ **c)** $\frac{2}{6}$ **d)** $\frac{1}{6}$

Moduł 31 **1. a)** 10 zł; 210 zł; 105% **b)** 220 zł; 110% **2. a)** 1,5% **b)** 4% **3.** 2000 zł **4.** 109% **5.** 5% **6.** 1100 zł **9.** odsetki za 2. rok: 149,80 zł i 140 zł, zysk po 2 latach: 289,80 zł i 280 zł; za 3. rok różnica między odsetkami: 20,29 zł **11.** 11 400 zł, 12 996 zł **12.** 208,10 zł **WZ. I.** 3600 zł **II.** 1500 zł **V.** 7632 zł **VI.** 3075 zł **VII.** 4557 zł

Sprawdź sam siebie A. 60 zł; 460 zł **B.** 4000 zł; 100 zł **C.** 988 zł, 1027,52 zł **D.** po 8 latach

Źródła ilustracji i fotografii

Okładka i strona tytułowa: (płyta CD-ROM) Jonas Staub/Shutterstock.com

Tekst główny: s. 6 (kalkulatory) Grażyna Bryk/WSiP ; s. 7 (lody) Ingram Publishing/ThETA; s. 14 (kostka) Ingram Publishing/ThETA ; s. 26 (gracze) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 33 (chłopiec), (kredka) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 46 (chłopiec), (dziewczyna – g.) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/ WSiP, (dziewczyna – d.) Wojciech Wójtowicz/Putto/WSiP, (kościół) Jakub Sowiński; s. 53 (stacja kosmiczna) NASA, (globus) Central Stock/Theta; s. 70 (talerz), (taśma) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 73 (pizza), (diabelski młyn) Ingram Publishing/ThETA, (bicykl) PAP/Andrzej Rybczyński; s. 75 (podkładka pod śrubę) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP, (tarcza hamulcowa) Jakub Sowiński; s. 84 (kartka papieru w rękach) Natalia Siverina/Shutterstock.com, (kartka papieru z pinezką) greenland/ Shutterstock.com; s. 85 (kartka papieru) J. Helgason/Shutterstock.com, (koperta) Thanida/Shutterstock.com; s. 93 (zmięta kartka) Jakub Sowiński; s. 94 (materiał) Jakub Sowiński; s. 99 (nożyczki) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/ WSiP; s. 119 (znaczek) Hellenic Post; s. 141 (ołówek) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 145 (kalkulatory) Grażyna Bryk/WSiP; s. 158 (ołówek) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 169 (kwiaty) Ingram Publishing/ThETA , (koszula) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 173 (pióro) Jakub Sowiński; s. 184 (bankomat) PAP/Andrzej Rybczyński; s. 185 (samochód) EPA; s. 203 (przy tablicy) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 216 (przy tablicy – 3 zdjęcia) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/ WSiP; s. 224 (dziewczyna – l.) Ingram Publishing/ThETA , (dziewczyna – p.) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 236 (detektyw z lupą) patrimonio designs limited/Shutterstock.com, (tablica pamiątkowa) Wales DVD.com/Flickr, (stara kartka – d.) Tropper 2000/Shutterstock.com, (stara kartka – ś. i tło) caesart/ Shutterstock.com; s. 237 (stara książka) Valentin Agapov/Shutterstock.com, (lupa) DVARG/Shutterstock.com; s. 238 (nożyczki) Grażyna Bryk, Małgorzata Kozioł/WSiP; s. 241 (Zespół Szkół Handlowych w Braniewie), (zamek w Malborku) Zbigniew Błażejczyk/WSiP, (Pułtusk, Rynek i Dom Polonii) Igor Straburzyński/WSiP, (katedra w Kwidzynie) Sergiej Tarasow/WSiP, (katedra we Wrocławiu), (kościół w Bejscu) Paweł Pierściński/ WSiP; s. 251 (piramida) Leszek Sczaniecki/WSiP; s. 259 (kostki) Ingram Publishing/ThETA; s. 262 (kostka) Ingram Publishing/ThETA; s. 274–275 (sześcian), (geometryczny tryptyk), (3 kompozycje ostrosłupów), (2 K-drony) rys. Maciej Tomala, (pustak) Bolek Ryziński/K-DRON Inc., (globus) Michał Mutor/Agencja Gazeta; s. 276 (kalkulator) Ingram Publishing/ThETA, (mężczyzna) Comstock

* Objaśnienia: g. – góra, d. – dół, l. – lewa, ś. – środek, p. – prawa.

Płyta CD-ROM

Scenariusz: Anna Bazyluk, Anna Dubiecka, Barbara Dubiecka-Kruk, Zbigniew Góralewicz, Tomasz Malicki, Piotr Piskorski, Henryk Sienkiewicz, Andrzej Ziemieńczuk

Opracowanie informatyczne i graficzne: vm.pl

Wymagania systemowe i sprzętowe:
System operacyjny Windows XP/Vista/ 7
Procesor Pentium
1 GB RAM (dla Windows XP min. 512 MB)
5 MB wolnego miejsca na dysku
Karta graficzna o rozdzielczości 1024 × 768
Karta dźwiękowa, głośniki, drukarka
Pomoc techniczna: pomocmult@wsip.com.pl