1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

wyznaczyć bazę ortogonalną $\mathbb{R}^3$, która zawiera bazę podprzestrzeni

$$V = \{x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

2. Niech L_1, L_2 będą prostymi w $\mathbb{R}^3$

$$L_1 = \mathcal{L}((1,-1,2)), \quad L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0 \wedge x - 3z = 0\}.$$

   (a) Znaleźć wektor na prostej L_2, którego rzut ortogonalny na prostą L_1 jest równy $(-1,1,-2)$.

   (b) Obliczyć cosinus kąta między prostymi L_1, L_2.

3. Zbadać wypukłość zbioru $W \subset \mathbb{R}^2$

$$W : y \leq \min\{\text{arctg}(x+2), \sqrt{2-x}\} \wedge \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

4. Podać rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$(xy' - y)e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = \sqrt{xy}$$

5. Podać rozwiązanie ogólne układu (podwójna wartość własna)

$$\begin{cases} y' &= 3y - z - 1 \\ z' &= y + z - 3 \end{cases}$$