Algebra i analiza matematyczna

Igor Nowicki

13 stycznia 2021

Spis treści

1 Zadania z egzaminów **1**

1 Zadania z egzaminów

Zadanie 1. Dla jakich parametrów $m \in \mathbb{R}$ funkcjonał liniowy

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + mx_1y_2 + mx_2y_1 + (3 - 2m)x_2y_2$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$? Dla $m = -1$ wyznaczyć bazę $\mathbb{R}^2$, w której f ma macierz diagonalną.

Rozwiązanie. Przedstawiony powyżej funkcjonał liniowy można opisać macierzą:

$$\mathcal{M}_f = \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & 3-2m \end{bmatrix}.$$

Aby forma liniowa mogła być iloczynem skalarnym, musi być dodatnio określona, tj. jej wyznacznik musi być większy od zera. Zatem:

$$\det \mathcal{M}_f = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 3-2m \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 2m) - m \cdot m > 0,$$

co sprowadza się do nierówności:

$$m^2 + 2m - 3 < 0,$$
$$(m + 3)(m - 1) < 0.$$

która ma rozwiązania dla $m \in (-3, 1)$.
Dalej - chcemy wyznaczyć bazę dla przypadku kiedy $m = -1$, to znaczy, kiedy macierz przyjmuje formę:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bazą jest minimalny układ wektorów które opisują nam przestrzeń w której się poruszamy - ponieważ funkcjonał liniowy działa na przestrzeni dwuwymiarowej, ożemy o bazie myśleć jako o dwóch wektorach: $x_1 = (1, 0)$ oraz $x_2 = (0, 1)$. Poszukujemy takiej nowej kombinacji wektorów, dla której nasza forma liniowa przyjmie postać diagonalną, tj. niezerowe wartości będą jedynie na przekątnej. Sprowadza się to do znalezienia takiej macierzy B, dla której:

$$B \cdot M \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Wartości λ_1, λ_2 możemy znaleźć przez szukanie rozwiązań równania:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

które przekształca się do równania kwadratowego $(1-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0$. Jego rozwiązaniami są $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$ oraz $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$.
Bazą diagonalizującą będzie układ takich wektorów, dla których spełnione będą równania:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda_1 \end{bmatrix} \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & -1 \\ -1 & 5-\lambda_2 \end{bmatrix} \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Rozwiązaniem będą wektory $v_1 = (2+\sqrt{5}, 1)$ oraz $v_2 = (2-\sqrt{5}, 1)$.
Algorytm postępowania do znalezienie parametru m dla którego funkcjonał liniowy jest iloczynem skalarnym:

1. Utworzyć macierz na podstawie funkcjonału,
2. sprawdzić w jakich warunkach wyznacznik macierzy przyjmuje wartość powyżej zera.

Algorytm postępowania do znalezienia bazy diagonalizującej:

1. Utworzyć macierz funkcjonału f,
2. znaleźć wartości własne macierzy,
3. znaleźć wektory własne odpowiadające wartościom własnym macierzy.

□

Zadanie 2. Wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ o równaniu $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Rozwiązanie. Pojedyncze równanie dla przestrzeni czterowymiarowej ogranicza nam podprzestrzeń do trzech wymiarów. Znalezienie bazy ortogonalnej oznacza znalezienie takich trzech wektorów które:

1. spełniają podane równanie (należą do *jądra* przekształcenia liniowego),
2. są wzajemnie prostopadłe, tj. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ dla $i \neq j$.

Pierwszy warunek pozwala nam na znalezienie całej masy wektorów - przykładem mogą być $v_1 = (2,1,0,0), v_2 = (0,1,1,0), v_3 = (0,0,1,1)$. Jedynym problemem jest fakt, że nie są to wektory wzajemnie prostopadłe - ich wzajemne iloczyny skalarne nie są równe zeru. Z pomocą może przyjść **ortogonalizacja Grama-Schmitda** - algorytm przekształcania dowolnego zestawu wektorów liniowo niezależnych do bazy ortogonalnej.
Dla zestawu trzech wektorów procedura przebiega następująco:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1,$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1,$$
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1.$$

□

Zadanie 3. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ na prostą $L \subset \mathbb{R}^3$ o równaniach:

$$x_1 - x_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Obliczyć odległość wektora $\mathbf{u}$ od tej prostej.

Rozwiązanie. Algorytm postępowania:

1. Znaleźć jądro przekształcenia liniowego - to będzie nasza baza podprzestrzeni liniowej, w tym wypadku prostej.
2. Przeprowadzić rzut ortogonalny wektora $\mathbf{u}$ na podprzestrzeń rozpinaną przez wektor $\mathbf{v}$ - będzie to opisane wzorem $P(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$.
3. Aby obliczyć odległość wektora od prostej, należy od wejściowego wektora u odjąć wektor uzyskany przez rzucenie na podprzestrzeń, a następnie wyliczyć jego długość.

□

Zadanie 4. Zbadać wypukłość zbioru $W \subset \mathbb{R}^2$ danego warunkami:

$$x^4 + y^2 \leqslant 1 y \geqslant \max\{e^{x^2} - 1, -\ln(x+1)\} x > -1.$$

Rozwiązanie. Przecięcie zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym. Możemy rozbić powyższe warunki na następujące:

- $x^4 + y^2 \leqslant 1$
- $y \geqslant e^{x^2} - 1$ dla $x > 0$
- $y \geqslant -\ln(x+1)$ dla $x \leqslant 0$.

(warunek $x > -1$ jest spełniany automatycznie przy konieczności pierwszego warunku). □

Zadanie 5. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

spełniające warunek $y(1) = 1$.

Rozwiązanie. Należy dokonać podstawienia:

$$y = vx,$$

rozwiązać równanie dla $v(x)$ a następnie podstawić y z powrotem. □

Zadanie 6. Podać rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}.$$

Rozwiązanie. Należy wykonać podstawienie $z = y' - 2y$. $\square$