Algebra i analiza matematyczna

Igor Nowicki

20 stycznia 2021

Spis treści

1 Zadania z egzaminów

1.1 Funkcjonały dwuliniowe

Zadanie 1. Dla jakich parametrów $m \in \mathbb{R}$ funkcjonał dwuliniowy

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + mx_1y_2 + mx_2y_1 + (3 - 2m)x_2y_2$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$? Dla $m = -1$ wyznaczyć bazę $\mathbb{R}^2$, w której f ma macierz diagonalną.

Rozwiązanie. Musimy wyznaczyć wartości parametru, dla którego funkcjonał dwuliniowy staje się iloczynem skalarnym. Z założenia, iloczyny skalarne mają szereg wymogów - to, by były symetryczne (tożsamość ze swoją transpozycją) oraz by były dodatnio określone (ich forma diagonalna musi zawierać same dodatnie liczby). Ponieważ obydwie forma jest symetryczna, pozostaje warunek dodatniej określoności. Warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym) dodatniej określoności jest by wyznacznik macierzy był dodatni. Dodatkowo, wszystkie wartości własne muszę być większe od zera.
Zatem:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & (3-2m) \end{bmatrix} > 0$$

Następnie - potrzebujemy wyznaczyć taką bazę, dla której

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ma macierz diagonalną. Polega to na szukaniu takiej macierzy P o wyznaczniku $\det P = 1$, dla której spełniony jest warunek:

$$P^T[f]P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

gdzie λ_1, λ_2 są **wartościami własnymi** macierzy. Otóż, wartości własne λ to rozwiązania równania:

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 5-\lambda\end{bmatrix} = 0,$$

co przekształca się do równania:

$$(1-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0,$$

o rozwiązaniach $\lambda_1 = 3-\sqrt{5}$ oraz $\lambda_2 = 3+\sqrt{5}$.
Dla tak znalezionych wartości należy teraz znaleźć wektory będące **jądrem** odpowiadających im macierzy. Dla $\lambda_1 = 3-\sqrt{5}$ mamy:

$$\ker\begin{bmatrix}-2+\sqrt{5} & -1\\ -1 & 2+\sqrt{5}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -2+\sqrt{5}\end{pmatrix} = \mathbf{v}_1,$$

oraz, dla drugiej wartości własnej $\lambda_2 = 3+\sqrt{5}$:

$$\ker\begin{bmatrix}-2-\sqrt{5} & -1\\ -1 & 2-\sqrt{5}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}2-\sqrt{5}\\ 1\end{pmatrix} = \mathbf{v}_2,$$

(można istotnie zauważyć, że $v_1 \circ v_2 = 0$, co oznacza że są wzajemnie ortogonalne, to znaczy prostopadłe). Mając już wektory własne, jesteśmy w stanie wyznaczyć macierz zmiany bazy P_{fe}. Będą to po prostu wektory własne ustawione obok siebie kolumnami. Narzucamy jeszcze warunek normalizacji, tj. nasza macierz powinna być podzielona przez taką liczbę, by jej wyznacznik był równy 1. W tym wypadku będzie to pierwiastek z wyznacznika:

$$P_{fe} = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\begin{bmatrix}1 & 2-\sqrt{5}\\ -2+\sqrt{5} & 1\end{bmatrix}.$$

Odwrotność tej macierzy to będzie nasza poszukiwana macierz zmiany bazy P_{ef}. Szczęśliwie się składa, że dla bazy macierzy symetrycznej będzie to po prostu transponowana macierz P_{fe} :

$$P_{ef} = P_{fe}^T = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\begin{bmatrix}1 & -2+\sqrt{5}\\ 2-\sqrt{5} & 1\end{bmatrix}.$$

Możemy sprawdzić, że istotnie ta macierz diagonalizuje naszą formę dwuliniową:

$$\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\begin{bmatrix}1 & 2-\sqrt{5}\\ -2+\sqrt{5} & 1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\begin{bmatrix}1 & -2+\sqrt{5}\\ 2-\sqrt{5} & 1\end{bmatrix}$$

co przekształca się do:

$$\frac{1}{10-4\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2-\sqrt{5}\\ -2+\sqrt{5} & 1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1 & -2+\sqrt{5}\\ 2-\sqrt{5} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-\sqrt{5} & 0\\ 0 & 3+\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

□

Zadanie 2. Dla jakich parametrów $k \in \mathbb{R}$ funkcjonał dwuliniowy $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dany wzorem:

$$f((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = (k-3)x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + kx_2y_2$$

jest iloczynem skalarnym? Dla $k = 1$ wyznaczyć macierz f w bazie $b_1 = (1, -1), b_2 = (0, 2)$.

Ponownie, zadanie wyznaczenia parametru sprowadza się do postawienia warunku wyznacznika większego niż zero. Jeśli chcemy uzyskać macierz przejścia do konkretnej bazy, to pamiętamy, że macierz przejścia z bazy b do bazy kanonicznej do postawione kolumnowo obok siebie wektory b_i.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aby uzyskać macierz funkcjonału dwuliniowego w nowej bazie, dokonujemy następujących przekształceń:

$$\left[f\right]_b = \frac{1}{\det P} P^T \circ \left[f\right]_e \circ P$$

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$f((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

wyznaczyć bazę ortogonalną $\mathbb{R}^3$, która zawiera bazę podprzestrzeni

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Podstawowe informacje:
Jeśli mamy funkcjonał liniowy wyrażony jako $F((x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, to można go przedstawić za pomocą macierzy:

$$\left[F\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jeśli chcemy narzucić warunek by funkcjonał liniowy był jednocześnie iloczynem skalarnym, to forma musi być symetryczna, oraz jej wyznacznik musi być większy od zera. Dla macierzy 2×2 z parametrami sprowadza się to do rozwiązywania równania kwadratowego.
Jeśli chcemy znaleźć bazę diagonalizującą, to musimy znaleźć takie wektory, które przemnożone przez macierz funkcjonału liniowego dają same siebie przemnożone przez liczbę - musimy znaleźć **wektory własne**.

1.2 Znajdywanie jądra

Zadanie 4. Wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V \in \mathbb{R}^4$ o równaniu $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Zadanie 5. Wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ o równaniu $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Rozwiązanie. Pojedyncze równanie dla przestrzeni czterowymiarowej ogranicza nam podprzestrzeń do trzech wymiarów. Znalezienie bazy ortogonalnej oznacza znalezienie takich trzech wektorów które:

1. spełniają podane równanie (należą do *jądra* przekształcenia liniowego),
2. są wzajemnie prostopadłe, tj. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ dla $i \neq j$.

Pierwszy warunek pozwala nam na znalezienie całej masy wektorów - przykładem mogą być $v_1 = (2, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1)$. Jedynym problemem jest fakt, że nie są to wektory wzajemnie prostopadłe - ich wzajemne iloczyny skalarne nie są równe zeru. Z pomocą może przyjść **ortogonalizacja Grama-Schmitda** - algorytm przekształcania dowolnego zestawu wektorów liniowo niezależnych do bazy ortogonalnej.
Dla zestawu trzech wektorów procedura przebiega następująco:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1, \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1.
\end{aligned}
$$

□

1.3 Rzuty ortogonalne

Zadanie 6. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ na prostą $L \subset \mathbb{R}^3$ o równaniach:

$$x_1 - x_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Obliczyć odległość wektora $\mathbf{u}$ od tej prostej.

Rozwiązanie. Algorytm postępowania:

1. Znaleźć jądro przekształcenia liniowego - to będzie nasza baza podprzestrzeni liniowej, w tym wypadku prostej.
2. Przeprowadzić rzut ortogonalny wektora $\mathbf{u}$ na podprzestrzeń rozpinaną przez wektor $\mathbf{v}$ - będzie to opisane wzorem $P(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}$.
3. Aby obliczyć odległość wektora od prostej, należy od wejściowego wektora u odjąć wektor uzyskany przez rzucenie na podprzestrzeń, a następnie wyliczyć jego długość.

□

1.4 Wypukłości zbiorów

Zadanie 7. Zbadać wypukłość zbioru $W \in \mathbb{R}^2$ danego warunkami

$$x^2 - 2x + 2y^2 \leqslant 1 \wedge y \leqslant \min\{\ln(x + e), \sqrt{1 - x}\} \wedge -e \leqslant x \leqslant 1.$$

Zadanie 8. Zbadać wypukłość zbioru $W \subset \mathbb{R}^2$ danego warunkami:

$$x^4 + y^2 \leqslant 1 \wedge y \geqslant \max\{e^{x^2} - 1, -\ln(x + 1)\} \wedge x > -1.$$

1.5 Równania różniczkowe

Zadanie 9. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego

$$y' + 2xy = \cos x e^{x^2} y^2$$

spełniające warunek początkowy $y(0) = 1$.

Rozwiązanie. Należy użyć funkcji pomocniczej, bądź dokonać podstawienia $z = ye^{x^2}$. □

Zadanie 10. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$y'' - 6y' + 9y = xe^x.$$

Zadanie 11. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

spełniające warunek $y(1) = 1$.

Rozwiązanie. Należy dokonać podstawienia:

$$y = vx,$$

rozwiązać równanie dla $v(x)$ a następnie podstawić y z powrotem. □

Zadanie 12. Podać rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}.$$

Rozwiązanie. Należy wykonać podstawienie $z = y' - 2y$. □

Zadanie 13. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} y' &= -y + 3z - 1, \\ z' &= 3y - z - 5. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Należy znaleźć wektory własne przekształcenia liniowego a następnie dokonać podstawienia. □