1. Rozwiązać równania różniczkowe

$$(y'+2)e^{\sqrt{2x+y}} = \sqrt{2x+y}$$

$$(y'+2)\sin\frac{1}{2x+y} = (2x+y)^2$$

$$(y'+2)(2x+y) = e^{(2x+y)^2}$$

$$xyy' = x^2 e^{(\frac{y}{x})^2} + y^2$$

$$xyy' = x^2 + 2y^2$$

$$(xy'-y)e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = \sqrt{xy}$$

2. Rozwiązać równania Bernoulliego

$$y' - \frac{y}{x} = y^2\sin(x^2)$$

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2+1}$$

$$y' - \frac{y}{x} = y^2 e^{x^2}$$

3. Rozwiązać równania zupełne

$$\big(2xy^2e^{-x^2} + \frac{1}{x}\big) + (e^{-y} - 2e^{-x^2}y)y' = 0$$

$$\big(\frac{y^2}{1+x^2} + \frac{1}{x}\big) + (2y\mathrm{arctg}x + y^2)y' = 0$$

$$\big(2xy^2\sin(x^2) + \frac{1}{x}\big) + (e^{-y} - 2y\cos(x^2))y' = 0$$

4. Rozwiązać układ równań (rzeczywiste wartości własne)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 5y-3z-1 \\ z' & = & 4y-2z-2 \end{array}\right.$$

5. Rozwiązać układ równań (podwójna wartość własna)

$$\begin{cases} y' &= 3y - z - 1 \\ z' &= y + z - 3 \end{cases}$$

6. Rozwiązać równanie

$$y''' + 4y' = 8\cos 2x$$

7. Niech $W_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ będzie przestrzenią wielomianów z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Wyznaczyć bazę ortogonalnę podprzestrzeni

$$V = \{f \in W_2(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}.$$

8. Niech $W_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ będzie przestrzenią wielomianów z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Wyznaczyć rzut ortogonalny x na podprzestrzeń

$$V = \{f \in W_2(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}.$$

9. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ wyznaczyć bazę ortogonalną $\mathbb{R}^3$ zawierającą bazę podprzestrzeni $V = \{x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

10. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $u = (1, 0, 1)$ na podprzestrzeń $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

11. Niech L_1, L_2 będą prostymi w $\mathbb{R}^3$

$$L_1 = \mathcal{L}((1, -1, 2)), \quad L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0 \wedge x - 3z = 0\}.$$

   (a) Znaleźć wektor na prostej L_2, którego rzut ortogonalny na prostą L_1 jest równy $(-1, 1, -2)$.

   (b) Obliczyć cosinus kąta między prostymi L_1, L_2.

12. Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią daną równaniami

$$V : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć bazę ortogonalną V względem standardowego iloczynu skalarnego.

13. Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią daną równaniami

$$V : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $u = (1, 0, 1, 0)$ na V względem standardowego iloczynu skalarnego.

14. Zbadać wypukłość zbioru $W \subset \mathbb{R}^2$

$$W : y \leq \min\{\operatorname{arctg}(x + 2), \sqrt{2 - x}\} \wedge 3|x| + 2|y| \leq 6$$

15. Zbadać wypukłość zbioru $W \subset \mathbb{R}^2$

$$W : y \leq \min\{\ln(4 - x), \sqrt{x + 4}\} \wedge \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$