Algebra i analiza matematyczna

Igor Nowicki

19 stycznia 2021

Spis treści

1 Zadania z egzaminów

1.1 Funkcjonały dwuliniowe

Zadanie 1. Dla jakich parametrów $m \in \mathbb{R}$ funkcjonał dwuliniowy

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + mx_1y_2 + mx_2y_1 + (3 - 2m)x_2y_2$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$? Dla $m = -1$ wyznaczyć bazę $\mathbb{R}^2$, w której f ma macierz diagonalną.

Rozwiązanie. Musimy wyznaczyć wartości parametru, dla którego funkcjonał dwuliniowy staje się iloczynem skalarnym. Z założenia, iloczyny skalarne mają szereg wymogów - to, by były symetryczne (tożsamość ze swoją transpozycją) oraz by były dodatnio określone (ich forma diagonalna musi zawierać same dodatnie liczby). Ponieważ obydwie forma jest symetryczna, pozostaje warunek dodatniej określoności - który w wypadku macierzy 2×2 sprowadza się do warunku dodatniego wyznacznika.
Zatem:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & (3 - 2m) \end{bmatrix} > 0$$

Następnie - potrzebujemy wyznaczyć taką bazę, dla której

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ma macierz diagonalną. Polega to na szukaniu takiej macierzy P o wyznaczniku $\det P = 1$, dla której spełniony jest warunek:

$$P^T [f] P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

gdzie λ_1, λ_2 są **wartościami własnymi** macierzy. Otóż, wartości własne λ to rozwiązania równania:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

co przekształca się do równania:

$$(1-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0,$$

o rozwiązaniach $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$ oraz $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$.
Dla tak znalezionych wartości należy teraz znaleźć wektory będące **jądrem** odpowiadających im macierzy. Dla $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$ mamy:

$$\ker \begin{bmatrix} -2+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 2+\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1,$$

oraz, dla drugiej wartości własnej $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$:

$$\ker \begin{bmatrix} -2-\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2,$$

(można istotnie zauważyć, że $v_1 \circ v_2 = 0$, co oznacza że są wzajemnie ortogonalne, to znaczy prostopadłe). Mając już wektory własne, jesteśmy w stanie wyznaczyć macierz zmiany bazy P_{fe}. Będą to po prostu wektory własne ustawione obok siebie kolumnami. Narzucamy jeszcze warunek normalizacji, tj. nasza macierz powinna być podzielona przez taką liczbę, by jej wyznacznik był równy 1. W tym wypadku będzie to pierwiastek z wyznacznika:

$$P_{fe} = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1 & 2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Odwrotność tej macierzy to będzie nasza poszukiwana macierz zmiany bazy P_{ef}. Szczęśliwie się składa, że dla bazy macierzy symetrycznej będzie to po prostu transponowana macierz P_{fe} :

$$P_{ef} = P_{fe}^T = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Możemy sprawdzić, że istotnie ta macierz diagonalizuje naszą formę dwuliniową:

$$\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1 & 2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}$$

co przekształca się do:

$$\frac{1}{10-4\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2-\sqrt{5} \\ -2+\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

□

Zadanie 2. Dla jakich parametrów $k \in \mathbb{R}$ funkcjonał dwuliniowy $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dany wzorem:

$$f((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = (k-3)x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + kx_2y_2$$

jest iloczynem skalarnym? Dla $k = 1$ wyznaczyć macierz f w bazie $b_1 = (1, -1), b_2 = (0, 2)$.

Ponownie, zadanie wyznaczenia parametru sprowadza się do postawienia warunku wyznacznika większego niż zero. Jeśli chcemy uzyskać macierz przejścia do konkretnej bazy, to pamiętamy, że macierz przejścia z bazy b do bazy kanonicznej do postawione kolumnowo obok siebie wektory b_i.

$$B_{be} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Musimy znaleźć macierz odwrotną. Możemy to zrobić przez algorytm odwracania macierzy:

$$B_{eb} = B_{be}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Potrzebujemy znormalizowanej macierzy zmiany bazy - będzie ona miała postać:

$$P = \frac{1}{\sqrt{|B_{eb}|}} B_{eb} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Aby uzyskać macierz funkcjonału dwuliniowego w nowej bazie, dokonujemy następujących przekształceń:

$$[f]_b = P^T \circ [f]_e \circ P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$f((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

wyznaczyć bazę ortogonalną $\mathbb{R}^3$, która zawiera bazę podprzestrzeni

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Podstawowe informacje:
Jeśli mamy funkcjonał liniowy wyrażony jako $F((x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, to można go przedstawić za pomocą macierzy:

$$\Big[F\Big] = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jeśli chcemy narzucić warunek by funkcjonał liniowy był jednocześnie iloczynem skalarnym, to forma musi być symetryczna, oraz jej wyznacznik musi być większy od zera. Dla macierzy 2×2 z parametrami sprowadza się to do rozwiązywania równania kwadratowego.
Jeśli chcemy znaleźć bazę diagonalizującą, to musimy znaleźć takie wektory, które przemnożone przez macierz funkcjonału liniowego dają same siebie przemnożone przez liczbę - musimy znaleźć **wektory własne**.

1.2 Liczenie jądra

Zadanie 4. Wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V \in \mathbb{R}^4$ o równaniu $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Zadanie 5. Wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ o równaniu $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Rozwiązanie. Pojedyncze równanie dla przestrzeni czterowymiarowej ogranicza nam podprzestrzeń do trzech wymiarów. Znalezienie bazy ortogonalnej oznacza znalezienie takich trzech wektorów które:

1. spełniają podane równanie (należą do *jądra* przekształcenia liniowego),
2. są wzajemnie prostopadłe, tj. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ dla $i \neq j$.

Pierwszy warunek pozwala nam na znalezienie całej masy wektorów - przykładem mogą być $v_1 = (2,1,0,0), v_2 = (0,1,1,0), v_3 = (0,0,1,1)$. Jedynym problemem jest fakt, że nie są to wektory wzajemnie prostopadłe - ich wzajemne iloczyny skalarne nie są równe zeru. Z pomocą może przyjść **ortogonalizacja Grama-Schmitda** - algorytm przekształcania dowolnego zestawu wektorów liniowo niezależnych do bazy ortogonalnej.
Dla zestawu trzech wektorów procedura przebiega następująco:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1,\\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1,\\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1.
\end{aligned}$$

□

1.3 Rzuty ortogonalne

Zadanie 6. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ na prostą $L \subset \mathbb{R}^3$ o równaniach:

$$x_1 - x_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Obliczyć odległość wektora **u** od tej prostej.

Rozwiązanie. Algorytm postępowania:

1. Znaleźć jądro przekształcenia liniowego - to będzie nasza baza podprzestrzeni liniowej, w tym wypadku prostej.
2. Przeprowadzić rzut ortogonalny wektora **u** na podprzestrzeń rozpinaną przez wektor **v** - będzie to opisane wzorem $P(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$.
3. Aby obliczyć odległość wektora od prostej, należy od wejściowego wektora u odjąć wektor uzyskany przez rzucenie na podprzestrzeń, a następnie wyliczyć jego długość.

□

1.4 Wypukłości zbiorów

Zadanie 7. Zbadać wypukłość zbioru $W \in \mathbb{R}^2$ danego warunkami

$$x^2 - 2x + 2y^2 \leqslant 1y \leqslant \min\{\ln(x+e, \sqrt{1-x})\} - e \leqslant x \leqslant 1.$$

Zadanie 8. Zbadać wypukłość zbioru $W \subset \mathbb{R}^2$ danego warunkami:

$$x^4 + y^2 \leqslant 1y \geqslant \max\{e^{x^2} - 1, -\ln(x+1)\}x > -1.$$

Rozwiązanie. Przecięcie zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym. Możemy rozbić powyższe warunki na następujące:

- $x^4 + y^2 \leqslant 1$
- $y \geqslant e^{x^2} - 1$ dla $x > 0$
- $y \geqslant -\ln(x+1)$ dla $x \leqslant 0$.

(warunek $x > -1$ jest spełniany automatycznie przy konieczności pierwszego warunku). □

1.5 Równania różniczkowe

Zadanie 9. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego

$$y' + 2xy = \cos x e^{x^2} y^2$$

spełniające warunek początkowy $y(0) = 1$.

Zadanie 10. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$y'' - 6y' + 9y = xe^x.$$

Zadanie 11. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

spełniające warunek $y(1) = 1$.

Rozwiązanie. Należy dokonać podstawienia:

$$y = vx,$$

rozwiązać równanie dla $v(x)$ a następnie podstawić y z powrotem. □

Zadanie 12. Podać rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}.$$

Rozwiązanie. Należy wykonać podstawienie $z = y' - 2y$. □

Zadanie 13. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} y' & = -y + 3z - 1, \\ z' = 3y - z - 5. \end{cases}$$