KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów w roku szkolnym 2013/14
Etap I - szkolny

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga1.

Łącznie uczeń może zdobyć **20 punktów.**

Do etapu rejonowego zakwalifikowani będą uczniowie, którzy w etapie szkolnym uzyskają **co najmniej 85% punktów** możliwych do zdobycia (co najmniej 17 punktów).

Uwaga2.

Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Odpowiedź poprawna	**B**	**C**	**B**	**C**	**D**

Zadanie 6 *(3 pkt.)*

Uzasadnij, że liczba $2015^{2015} + 4 \cdot 2015^{2014} + 4 \cdot 2015^{2013}$ dzieli się przez 2017.

Uczeń: • zapisuje wyrażenie w postaci iloczynu, • stosuje wzór skróconego mnożenia, • uzasadnia podzielność przez 2017.	 1 p 1 p 1 p

$$2015^{2013}\left(2015^2 + 4 \cdot 2015 + 4\right) =$$
$$= 2015^{2013} \cdot (2015 + 2)^2 =$$
$$= 2015^{2013} \cdot 2017^2$$

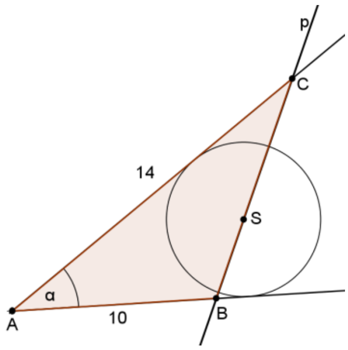
Odp. Liczbę $2015^{2015} + 4 \cdot 2015^{2014} + 4 \cdot 2015^{2013}$ można przedstawić w postaci $2015^{2013} \cdot 2017^2$, czyli w postaci iloczynu liczby naturalnej i liczby 2017, a więc dana liczba jest podzielna przez 2017.

Zadanie 7 *(4 pkt.)*

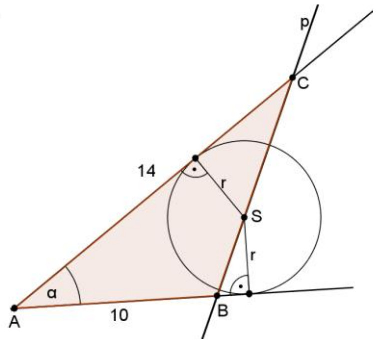
Prosta p przecina ramiona kąta α o wierzchołku w punkcie A w punktach B i C, przechodzi również przez punkt S – środek okręgu stycznego do ramion kąta α. Wyznaczone odcinki mają długości: $|AC| = 14$ cm, $|AB| = 10$ cm, zaś pole trójkąta ABC jest równe 60 cm^2. Jaką długość ma promień okręgu o środku w punkcie S, stycznego do ramion kąta α?

Uczeń: • przeprowadza analizę, wykonuje rysunek zaznaczając podane elementy • wykorzystując własności stycznych zaznacza promienie okręgu • zapisuje zależności między polami trójkątów • rozwiązuje równanie i wyznacza długość promienia okręgu	 1 p 1 p 1 p 1 p

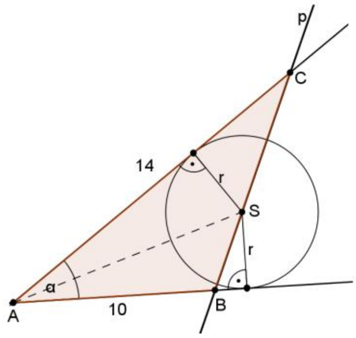
1. analiza – rysunek



2. zaznaczenie promieni okręgu z wykorzystaniem własności stycznych



3. zapisanie zależności między polami trójkątów:



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta ASC}$$

4. wyznaczenie r:

$$60 = \frac{10 \cdot r}{2} + \frac{14 \cdot r}{2}$$

$$60 = 5r + 7r$$

$$r = 5[cm]$$

Odp. Promień okręgu ma długość 5 cm.

Zadanie 8. ***(4 pkt)***

Szkolny etap Konkursu Matematycznego polegał na rozwiązywaniu 10 zadań łatwiejszych oraz 10 zadań trudniejszych. Każdy uczestnik na starcie otrzymał 30 punktów premii. Za każde poprawne rozwiązanie zadania łatwiejszego można było uzyskać 2 punkty, a trudniejszego – 5 punktów. Jednak za błędne rozwiązanie zadania można było stracić punkty: za zadanie łatwiejsze –1 punkt; za trudniejsze – 2 punkty.
Danka uzyskała w Konkursie 63 punkty, a Wojtek uzyskał 67 punktów. Okazało się, że rozwiązali poprawnie po tyle samo zadań, jednak liczba zadań trudniejszych rozwiązanych przez Wojtka jest równa liczbie zadań łatwiejszych rozwiązanych przez Dankę.
Ile zadań rozwiązała poprawnie Danka, a ile Wojtek?

Uczeń:	
• przeprowadza analizę i opisuje związki między niewiadomymi	1 p
• układa układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi	1 p
• przekształca układ równań do otrzymania równania z jedną niewiadomą	1 p
• wyznacza, ile zadań rozwiązała poprawnie Danka, a ile Wojtek	1 p

1. analiza, układ równań

   Odkrycie, że za poprawne rozwiązanie zadania trudniejszego uzyskuje się (5+2) punktów, a za poprawne rozwiązanie zadania łatwiejszego zyskuje się (2+1) punkty.

2. ułożenie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi

   w – liczba zadań trudniejszych poprawnie rozwiązanych przez Wojtka,
   d – liczba zadań trudniejszych poprawnie rozwiązanych przez Dankę,

$$\begin{cases} 63 = 7d + 3w \\ 67 = 3d + 7w \end{cases}$$

3. przekształcenie układu równań do równania z jedną niewiadomą

$$\begin{cases} 63 = 7d + 3w \, / \cdot (-3) \\ 67 = 3d + 7w \, / \cdot (7) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -189 = -21d - 9w \\ 469 = 21d + 49w \end{cases}$$

$$\begin{cases} 280 = 40w \\ 3d = 67 - 7w \end{cases}$$

4. wyznaczenie, ile zadań rozwiązała poprawnie Danka, a ile Wojtek

$$\begin{cases} w = 7 \\ d = \dfrac{67 - 7 \cdot 7}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} w = 7 \\ d = 6 \end{cases}$$

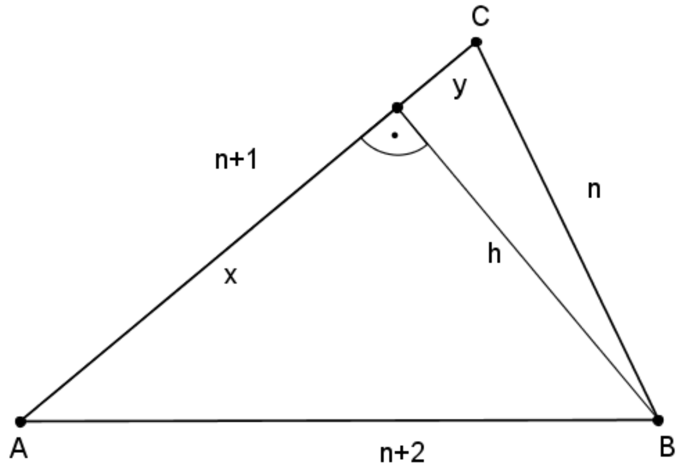
<u>**Odp.**</u> Danka rozwiązała poprawnie 6 zadań trudniejszych i 7 łatwiejszych,
a Wojtek rozwiązał poprawnie 7 zadań trudniejszych i 6 łatwiejszych.

Zadanie 9. ***(4 pkt)***

Długości boków pewnego trójkąta ostrokątnego są kolejnymi liczbami naturalnymi większymi od 2. Wysokość opuszczona na średni co do długości bok dzieli go na dwa odcinki x i y (dłuższy z tych odcinków oznacz x, a krótszy – y). Oblicz, wartość różnicy $x-y$.

Uczeń: • przeprowadza analizę, wykonuje rysunek z oznaczeniami • zapisuje zależności wynikające z zastosowania twierdzenia Pitagorasa • wykorzystuje wzory skróconego mnożenia do przekształcenia zależności • oblicza różnicę $x-y$	 1 p 1 p 1 p 1 p

1. analiza – rysunek



2. zapisanie zależności wynikających z zastosowania twierdzenia Pitagorasa

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = (n+2)^2 \\ y^2 + h^2 = n^2 \end{cases}$$

3. wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia do przekształcenia zależności

$$x^2 - y^2 = (n+2)^2 - n^2$$

$$(x-y)(x+y) = (n+2)^2 - n^2 \ / : (x+y)$$

oraz: $x + y = n + 1$

$$x - y = \frac{(n+2)^2 - n^2}{n+1}$$

$$x - y = \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2}{n+1}$$

4. obliczenie różnicy:

$$x - y = \frac{4(n+1)}{n+1}$$

$$x - y = 4$$

<u>**Odp.**</u> Różnica $x-y$ ma wartość 4.