Witold Bednarek

Konkurs matematyczny w gimnazjum

Przygotuj się sam!

Opole 2007

Witold Bednarek: **Konkurs matematyczny w gimnazjum. Przygotuj się sam!**

Redakcja: Krystyna Nowik
Projekt okładki: Michał Nowik

ISBN-10: 83-89848-28-7
ISBN-13: 978-83-89848-28-4

Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
Opole 2007
Wydanie czwarte rozszerzone

Druk i oprawa: WZDZ – Drukarnia LEGA
45-301 Opole, ul. Małopolska 18, tel. (0-77) 455 30 59

Dystrybucja:
Biuro Handlowe Wydawnictwa NOWIK Sp.j.
45-061 Opole, ul. Katowicka 39 p. 110
tel./fax: (077) 454 36 04
www.nowik.com.pl **e-mail:** matma@nowik.com.pl

Spis treści

Od autora 4

Rozgrzewka 5

Równania w liczbach całkowitych 5

Zasada szufladkowa Dirichleta w arytmetyce 7

Nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną 8

Konstrukcje geometryczne 9

Zestawy zadań 11

Wskazówki 32

Rozwiązania 49

Zadania sprawdzające 129

Skorowidz tematyczny 140

Od AUTORA

Książka przeznaczona jest dla uczniów klas gimnazjalnych, którzy zamierzają wziąć udział w konkursach matematycznych. Prezentowany zbiór umożliwia samodzielne przygotowanie się do zawodów, gdyż wszystkie zadania mają pełne rozwiązania. Zadania są pogrupowane w zestawy po 5 zadań. Każdy z nich zawiera tematy związane z arytmetyką, algebrą i geometrią. W każdym zestawie są zadania z gwiazdką o podwyższonym stopniu trudności. Gdyby rozwiązanie któregoś zadania sprawiało kłopoty, to należy w pierwszej kolejności skorzystać z podanej wskazówki i spróbować jeszcze raz. Dopiero wtedy, gdy to zawiedzie, można zapoznać się z przedstawionym rozwiązaniem, którego przeczytanie ze zrozumieniem będzie na pewno wiązaniem, którego przeczytanie ze zrozumieniem będzie na pewno kształcące. Na końcu książki znajdują się zadania sprawdzające, których rozwiązanie całkowicie zależy od Czytelnika.

Życzę Czytelnikowi systematyczności, wytrwałości i matematycznych sukcesów.

Witold Bednarek

ROZGRZEWKA

Równania w liczbach całkowitych

Przykład 1.

Rozwiąż równanie $xy = x + y$ w liczbach całkowitych x i y.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$xy - x - y = 0,\ xy - x - y + 1 = 1,\ (x-1)(y-1) = 1.$$

Stąd $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1. \end{cases}$

Zatem $(x,\ y) = (2,\ 2)$ lub $(x,\ y) = (0,\ 0)$.

Przykład 2.

Rozwiąż równanie $2xy = x + y + 1$ w liczbach całkowitych x i y.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$2xy - x - y = 1,$$

$$4xy - 2x - 2y = 2,$$

$$(2x-1)(2y-1) = 3.$$

Stąd $\begin{cases} 2x-1=1 \\ 2y-1=3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} 2x-1=3 \\ 2y-1=1, \end{cases}$

lub $\begin{cases} 2x-1=-1 \\ 2y-1=-3, \end{cases}$ lub $\begin{cases} 2x-1=-3 \\ 2y-1=-1. \end{cases}$

Zatem $(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1), (0, -1), (-1, 0)\}$.

Przykład 3.

Rozwiąż równanie $xyz = x + y + z$ w zbiorze liczb naturalnych x, y, z.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $x \le y \le z$. Dane równanie dzielimy przez xyz. Wówczas $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{yx}$. Gdyby $x \ge 2$, to $y \ge 2$ i $z \ge 2$.

Wtedy $\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{yx} \le \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$, wbrew równaniu.

Zatem $x = 1$. Mamy więc równanie:

$$yz = 1 + y + z,$$

$$yz - y - z = 1,$$

$$yz - y - z + 1 = 2,$$

$$(y-1)(z-1) = 2.$$

Stąd $y - 1 = 1$ i $z - 1 = 2$, czyli $y = 2$ i $z = 3$.

Sprawdzamy, że trójka liczb $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ spełnia wyjściowe równanie. Pozostałe trójki (x, y, z) to: $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Zasada szufladkowa Dirichleta w arytmetyce

Jeżeli $n+1$ przedmiotów umieścić w n szufladach, to w pewnej szufladzie będą co najmniej dwa przedmioty.

Przykład 1.

Wykaż, że spośród trzech dowolnych liczb całkowitych można wybrać liczbę podzielną przez 3 lub kilka liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie

Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi. Rozważmy liczby $0, a, a+b, a+b+c$. Liczb tych jest cztery, a więc pewne dwie z nich dają przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę. Zatem ich różnica będzie podzielna przez 3. Zauważmy, że różnice te wynoszą:

$$a - 0 = a,$$

$$a + b - 0 = a + b,$$

$$a + b + c - 0 = a + b + c,$$

$$a + b - a = b,$$

$$a + b + c - a = b + c,$$

$$(a + b + c) - (a + b) = c,$$

a więc którąś z tych liczb: a, $a+b$, $a+b+c$, b, $b+c$, c — jest podzielna przez 3.

Przykład 2.

Wykaż, że dla pewnej liczby naturalnej n liczba $9^n - 1$ jest podzielna przez 1000.

Rozwiązanie

Rozważmy liczby $9^1, 9^2, \ldots, 9^{1000}$.

Reszty z dzielenia tych liczb przez 1000 należą do zbioru $\{1, 2, \ldots, 999\}$. Ponieważ rozważanych liczb jest 1000, a reszt co najwyżej 999, więc pewne dwie liczby 9^i i 9^j, gdzie $1 \le i < j \le 1000$, dają przy dzieleniu przez 1000 tę samą resztę. Zatem różnica $9^j - 9^i$ jest podzielna przez 1000.

Mamy $9^j - 9^i = 9^i(9^{j-i} - 1)$. Ponieważ liczby 9^i i 1000 nie mają wspólnego dzielnika (oprócz 1), więc liczba 1000 dzieli $9^{j-i} - 1$. Za n przyjmujemy $j - i$.

Nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną

Niech $a, b > 0$. Wówczas $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Istotnie: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$.

Niech $a, b, c, d > 0$.

Mamy wtedy:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \ge \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \ge \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Niech $a, b, c > 0$. Przyjmijmy $s = \frac{a+b+c}{3}$.

Mamy $\frac{a+b+c+s}{4} \ge \sqrt[4]{abcs}$, stąd kolejno wynika, że $\frac{3s+s}{4} \ge \sqrt[4]{abcs}$,

$s^4 \ge abcs$, $s^3 \ge abc$, $s \ge \sqrt[3]{abc}$, $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

Konstrukcje geometryczne

Przykład 1.

Dany jest odcinek AB, którego długość równa jest różnicy przekątnej i boku kwadratu K. Skonstruuj kwadrat K.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez b długość odcinka AB, a przez a długość boku kwadratu K. Zgodnie z warunkami zadania mamy równość $b = a\sqrt{2} - a$, skąd kolejno wynika, że:

$$b = a(\sqrt{2} - 1),\ a = \frac{b}{\sqrt{2}-1},\ a = b(\sqrt{2}+1),\ a = \sqrt{2}b + b.$$

Wystarczy więc skonstruować odcinek o długości $\sqrt{2}b$ i dodać do niego konstrukcyjnie odcinek o długości b.

Dokończenie rozwiązania pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 2.

Podziel konstrukcyjnie dany kąt o mierze $\frac{180^\circ}{7}$ na trzy równe kąty.

Rozwiązanie

Mamy skonstruować kąt o mierze $\frac{60^\circ}{7}$, mając dany kąt o mierze $\frac{180^\circ}{7}$. Zauważmy, że $\frac{60^\circ}{7} = 60^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ}{7}$. Wystarczy więc konstrukcyjnie wyznaczyć kąt 60°, a następnie odjąć od niego podwojony kąt $\frac{180^\circ}{7}$.

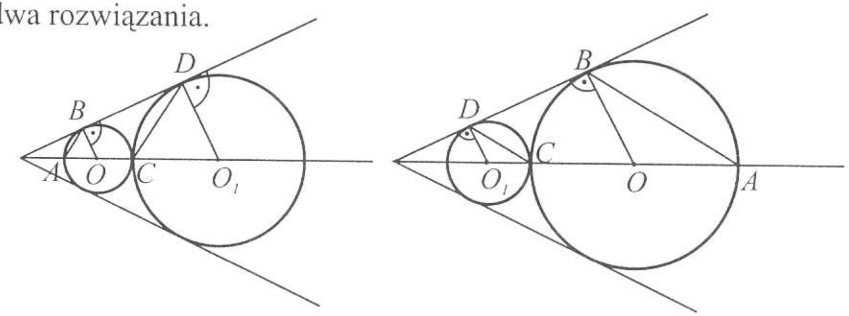
Dokończenie rozwiązania pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 3.

W kąt wypukły wpisany jest okrąg. Skonstruuj okrąg wpisany w ten kąt, styczny do danego okręgu.

Rozwiązanie

O jest środkiem danego okręgu, punkt B jest punktem styczności danego okręgu z ramieniem kąta. Konstruujemy odcinek CD równoległy do odcinka AB. Następnie wyznaczamy odcinek DO_1 prostopadły do ramienia kąta. O_1 jest środkiem poszukiwanego okręgu. Zadanie ma dwa rozwiązania.



ZESTAWY ZADAŃ

I

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.
2. Niech k będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że liczba $4k$ jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.
3. Funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(1) = 3$ i $f(3) = 1$. Oblicz $f(4)$.

★4. Pewien kwadrat i półkole mają równe obwody. Która z tych figur ma większe pole?

5. Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

II

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $4n^4 + 1$ jest pierwsza.
2. Niech k będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że liczba $4k + 1$ jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.
3. Rozwiąż równanie $|x - 1| = |2x - 3|$.

★4. Dla jakich m wykres funkcji $f(x) = mx + 2 - m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z kwadratem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

★★5. Wykaż, że ze środkowych dowolnego trójkąta można zbudować trójkąt i pole tego trójkąta jest równe $\frac{3}{4}$ pola danego trójkąta.

III

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^4 + n^2 + 1$ jest pierwsza.

2. Niech $ABCDEF$ będzie liczbą sześciocyfrową taką, że $A + D = B + E = C + F = 9$.
Wykaż, że liczba $ABCDEF$ jest podzielna przez 37.

★3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ||x-1|-2|$.

★4. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości 6 cm, 8 cm i 10 cm.

5. Wykaż, że w żadnym trójkącie jego dwie dwusieczne kątów nie są prostopadłe.

IV

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2 - 6q^2 = 1$.

★★2. Niech n będzie liczbą naturalną. Wykaż, że liczby 12^n i $12^n + 2^n$ mają taką samą liczbę cyfr.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt{5-x} + \sqrt{x} = 3$.

4. Liczby a i b są dodatnie oraz $ab = 1$. Wykaż, że $a + b \geq 2$.

5. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt o bokach 13 cm, 13 cm i 10 cm.

V

★1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych k, l, m liczba $10^{3k} + 10^{3l+1} + 10^{3m+2}$ jest podzielna przez 37.

2. Niech k będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że liczba $4k + 3$ jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

★3. Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x} = 3$.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \dfrac{|x| + x}{x}$.

★5. Jakie maksymalne pole może mieć czworokąt o kolejnych bokach długości 1 cm, 5 cm, 5 cm i 7 cm?

VI

1. Wyznacz dwie ostatnie cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby 7^{1999}.

2. Liczby a, b, c, d są dodatnie i $abcd = 1$. Wykaż, że $a + b + c + d \geq 4$.

★3. Rozwiąż równanie $[x] = \frac{2}{3}x$ gdzie symbol $[l]$ oznacza „część całkowitą" liczby l, na przykład $\left[5\frac{1}{3}\right] = 5$, $[4] = 4$, $\left[-5\frac{1}{2}\right] = -6$.

4. Oblicz pole koła wpisanego w romb o przekątnych długości 6 cm i 8 cm.

5. Wykaż, że jeżeli przekątne trapezu są równej długości, to ten trapez jest równoramienny.

VII

1. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $3^n + 7^n$ jest podzielna przez 10?

★2. Wykaż, że $(2-\sqrt{3})^8 + (2+\sqrt{3})^8 = 37634$.

3. Wykaż, że $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d.

4. Funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(1)+f(2)+f(3)=15$ i $f(4)+f(5)+f(6)=42$. Oblicz $f(7)+f(8)+f(9)$.

5. Trzy koła o jednakowym promieniu r są parami styczne zewnętrznie. Oblicz promień koła, do którego te trzy koła są styczne:
a) wewnętrznie, **b)** zewnętrznie.

VIII

1. Wykaż, że liczba dziewięciocyfrowa postaci $ABCABCABC$ jest podzielna przez 333667.

2. Która z liczb jest większa: $\frac{1}{1998}+\frac{1}{2001}$ czy $\frac{1}{1999}+\frac{1}{2000}$?

★★3. Znajdź wszystkie liczby naturalne x, y, z takie, że $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=1$.

★4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{|x-1|+|x+1|}{x}$.

5. Wyznacz wszystkie trójkąty prostokątne, których boki są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi parzystymi.

IX

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba n^2+2n+7 jest podzielna przez liczbę $n+1$.

2. Która z liczb jest większa: $\sqrt{1998}+\sqrt{2001}$ czy $\sqrt{1999}+\sqrt{2000}$?

★★3. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne x, y, z, t, że $xyzt = x+y+z+t$.

4. Wyznacz największe pole prostokąta wpisanego w okrąg o promieniu R.

5. Czy z odcinków o długościach $\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}$ cm, $\left(\frac{3}{2}\right)^{1999}$ cm i $\left(\frac{3}{2}\right)^{2000}$ cm można zbudować trójkąt?

X

★1. Wyznacz wszystkie liczby czterocyfrowe postaci $AABB$, które są kwadratami liczb naturalnych.

★2. Rozwiąż równanie $|x-1|\cdot|x-4|=|x-2|\cdot|x-3|$

3. Dla jakich m wykres funkcji $f(x)=(m-1)x+2m$ przechodzi przez odcinek AB, gdzie $A=(1, 0)$ i $B=(3, 0)$?

★4. Wykaż, że pole trapezu prostokątnego jest nie większe od $\frac{1}{4}$ sumy kwadratów długości jego przekątnych.

5. Oblicz pole koła wpisanego w ośmiokąt foremny o boku długości 1 cm.

XI

★1. Znajdź wszystkie liczby całkowite m takie, że liczba $m^2 + m + 4$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Wiadomo, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Wykaż, że $a = b = c = d$.

★3. Duża i mała wskazówka zegara o godzinie 9^{00} tworzą kąt prosty. O której godzinie wskazówki utworzą kąt prosty następnym razem?

4. Dla jakich a miejsca zerowe funkcji $y = 2x + a$ i $y = x + a + 2$ należą do przedziału $\langle 0; 1\rangle$?

5. Wykaż, że kąt środkowy ma miarę dwa razy większą od kąta wpisanego, opartego na tym samym łuku okręgu.

XII

1. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $n^2 + 2n - 3$ jest pierwsza?

★2. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Wykaż, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

3. Wyznacz przepis funkcji liniowej f, jeżeli wiadomo, że $f(x+1) + f(x-1) = f(x) + 2x$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

4. Na podstawie rozważań geometrycznych wykaż, że $\pi < 4$.

★5. Ile najwięcej kątów prostych może mieć sześciokąt wypukły?

XIII

★★1. Wyznacz cztery ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby 5^{1024}.

2. Wykaż, że suma liczb czterocyfrowych
$ABCD + BCDA + CDAB + DABC$
nie jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite x i y takie, że
$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(2 - \frac{1}{y}\right) = 3.$

4. Średnia wieku grupy dziewięciu uczniów wynosi 16 lat. Do tej grupy przybyła osoba A i wówczas średnia wieku grupy obniżyła się do 15 lat. Ile lat ma osoba A?

5. Połączono odcinkami środki kolejnych boków czworokata wypukłego. Wykaż, że odcinki te są bokami równoległoboku.

XIV

★1. Wykaż, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest kwadratem liczby całkowitej.

★2. Wykaż, że $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

★3. Rozwiąż równanie $[x] = \frac{9}{10}x + 1$.

4. Niech $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Oblicz $f(f(f(1999)))$.

5. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, których stosunek obwodów wynosi 5 : 4. Jaki jest stosunek pól tych prostokątów?

XV

1. Wykaż, że liczba 5^{100} ma nie więcej niż 70 cyfr.
2. Wykaż, że liczba sześciocyfrowa $AABBCC$ jest podzielna przez 121 tylko wtedy, gdy liczba $A+B+C$ jest podzielna przez 11.
3. Która podwyżka ceny jest większa: o 4%, a następnie o 6% czy dwukrotnie o 5%?

★★4. Rozwiąż równanie $x=\sqrt{6+\sqrt{6+x}}$.

★★5. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te podzieliły przekątną na trzy równe części. Znajdź stosunek boków tego prostokąta.

XVI

★1. Wykaż, że liczba 2525252525 nie jest kwadratem liczby naturalnej.

★2. Wykaż, że jeżeli $3^n+4^n=5^n$, to $n=2$.

★3. Wykaż, że $|a+b|+|a-b|\geq|a|+|b|$.

4. Która obniżka ceny jest większa: o 4%, a następnie o 6% czy dwukrotnie o 5%?
5. Dwa okręgi o jednakowych promieniach są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do trzech boków równoległoboku. Wykaż, że $\sin\alpha=\frac{a-b}{b}$, gdzie a i b $(a>b)$ są długościami boków równoległoboku i α jest jego kątem ostrym.

XVII

1. Wykaż, że liczba ośmiocyfrowa postaci $ABABABAB$ jest podzielna przez 101.
2. Wykaż, że $\sqrt{9+\sqrt{80}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}=4$.

★★3. Wykaż, że jeżeli $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, to $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$.

★4. W kongresie matematycznym brało udział 100 naukowców: 90 z nich władało językiem angielskim, 75 — językiem niemieckim, 70 — językiem francuskim, 66 — językiem rosyjskim. Czy wśród uczestników kongresu był matematyk, który władał czterema językami?

5. W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano koło K. Oblicz pole koła stycznego zewnętrznie do koła K i do dwóch boków trójkąta.

XVIII

★1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $p+12$, $p+24$, $p+36$ i $p+48$ są również liczbami pierwszymi.

2. Rozwiąż równanie $|x-1|+3x=x^2+2$.
3. Wykaż, że jeżeli $a,\ b,\ c>0$ i $(a+bc)(b+ca)=4abc$ to $a=b$ i $c=1$.

★★4. W sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 67 innych. Wykaż, że w tej sali jest taka czwórka osób, w której każde dwie osoby się znają. (*Zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A.*)

★5. Niech r i R oznaczają odpowiednio promień okręgu wpisanego i opisanego na ośmiokącie foremnym. Wykaż, że $\frac{R}{r}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

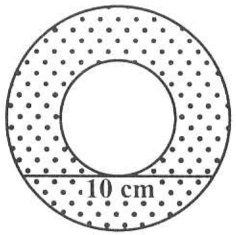
XIX

★★**1.** Wykaż, że dla pewnej liczby naturalnej n zapis dziesiętny potęgi 3^n kończy się cyframi $\underbrace{000\ldots00}_{100\text{ zer}}1$.

★**2.** Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$

★**3.** Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|x+1|-|x-1|}{x}$.

4. Oblicz pole zakropkowanej figury:



5. Pewien wielokąt wypukły ma 54 przekątne. Ile wynosi suma kątów wewnętrznych tego wielokąta?

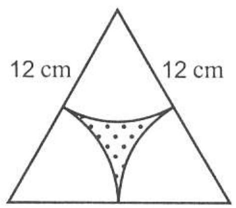
XX

★**1.** Wykaż, że dla pewnej liczby naturalnej n liczba $\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ cyfr}}$ jest podzielna przez 1999.

★★**2.** Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$ i $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 3$, to $a = b = c$.

★**3.** Wiadomo, że $x - \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^5 - \frac{1}{x^5}$.

4. Oblicz pole zakropkowanej figury:



5. W kwadrat o boku długości a wpisano koło K. Oblicz pole koła stycznego zewnętrznie do koła K i do dwóch boków kwadratu.

XXI

★**1.** Wykaż, że liczba 101010101 jest liczbą złożoną.

2. Rozwiąż równanie $2^x + 2^y = 2^{100}$ dla $x, y \in N$.

★**3.** Wyznacz przepis funkcji liniowej f takiej, że $f(2) = 1$ i $f(f(x)) = x$, dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

★★**4.** Wykaż, że jeśli a, b, m są liczbami dodatnimi, to
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

★**5.** Jakie jest największe pole prostokąta wpisanego w trójkąt o podstawie a i wysokości h.

XXII

★**1.** Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $2^n + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

★**2.** Rozwiąż równanie $3^x + 3^y + 3^z = 3^{100}$ w zbiorze liczb naturalnych x, y, z.

3. Rozwiąż równanie $||x-3|-2| = 1$.

★**4.** Wiadomo, że $a+b+c = 6$. Wykaż, że $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

5. Kwadrat o przekątnej d pocięto na n prostokątów o przekątnych $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Wykaż, że $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \geq d^2$.

XXIII

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AA + AA = BBC$.

★2. Wykaż, że $\underbrace{33...33}_{n \text{ cyfr}} < \sqrt{\underbrace{11...11}_{2n \text{ cyfr}}} < \underbrace{33...34}_{n \text{ cyfr}}$.

3. Znajdź przepis funkcji f takiej, że $2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x + 3$ dla $x \in \mathbf{R}$.

★4. Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi nierówność $3\sin\alpha + 4\cos\alpha \le 5$.

5. Pole pewnego rombu wynosi 4 cm^2. Wykaż, że bok tego rombu ma długość co najmniej 2 cm.

XXIV

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AA + BB = AAC$.

★2. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.

3. Rozwiąż równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$ dla $x, y \in \mathbf{N}$.

4. Poprowadzono prostą a równoległą do podstawy trójkąta. Prosta a podzieliła ten trójkąt na dwie równe figury o równych polach. W jakim stosunku prosta a podzieliła ramiona trójkąta?

★5. Sześcian o przekątnej d pocięto na n prostopadłościanów o przekątnych $d_1, d_2, ..., d_n$. Wykaż, że $d_1^3 + d_2^3 + ... + d_n^3 \ge d^3$.

XXV

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AB + BA = CAC$.

★2. Niech $n \in \mathbf{N}$. Wykaż, że ułamek $\frac{5n+3}{3n+2}$ jest nieskracalny.

3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x. \end{cases}$

4. Wykaż, że jeśli funkcja f spełnia równanie
$f^2(x) + f^2(y) = f^2(x+y)$
dla $x, y \in \mathbf{R}$, to f jest funkcją tożsamościowo równą zero.

5. Wykaż, że jeśli przekątne czworokąta wypukłego są prostopadłe, to sumy kwadratów przeciwległych boków czworokąta są równe.

XXVI

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AB + AAB = BCA$.

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p + 1$ jest sześcianem liczby naturalnej.

★3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} xy = z \\ yz = x \\ zx = y. \end{cases}$

★4. Mając dane odcinki o długościach a i b, skonstruuj odcinek o długości $c = \sqrt{ab}$.

★5. Wykaż, że kwadrat można podzielić na dowolną, większą od 5, liczbę kwadratów.

XXVII

★★**1.** Znajdź cyfry A, B, C takie, że $\underbrace{AA...A}_{n\text{ cyfr}}\underbrace{BB...B}_{n\text{ cyfr}} = \underbrace{CC...C}_{n\text{ cyfr}} \cdot (\underbrace{CC...C}_{n\text{ cyfr}} + 1)$ dla każdej liczby naturalnej n.

2. Niech p i $p+2$ będą liczbami pierwszymi większymi od 3. Wykaż, że liczba $p+1$ jest podzielna przez 6.

★**3.** Rozwiąż równanie $\left[\frac{x-1}{2}\right] = \frac{x+1}{3}$.

★**4.** Turysta X wyrusza z miasta A do miasta B, a w tym samym czasie turysta Y wyrusza z miasta B do miasta A. W momencie spotkania turysta X miał do miasta B jeszcze 40 minut marszu, a turysta Y miał do miasta A 90 minut. Ile trwał marsz turysty X, a ile turysty Y?

5. Oblicz odległość wierzchołka A sześcianu o krawędzi a od przekątnej sześcianu (której punkt A nie jest końcem).

XXVIII

★**1.** Wykaż, że liczba $\underbrace{100...001}_{2n\text{ zer}}$ jest złożona.

★**2.** Rozwiąż równanie $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$ dla $x, y \in \boldsymbol{C}$.

3. Znajdź wszystkie funkcje f takie, że
$f(x+|x|) + f(x-|x|) = 4x^2$ dla $x \in \boldsymbol{R}$.

4. Wyznacz długość odcinka dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego trójkąta o przyprostokatnych a i b.

★**5.** W rzędzie 10 krzeseł siada w sposób losowy 10 osób, wśród których są osoby A i B. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą siedziały obok siebie.

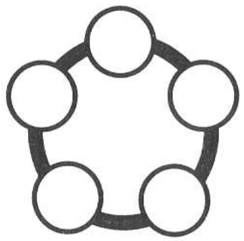
XXIX

★**1.** Rozwiąż równanie $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} = 1$ dla $x, y, z \in \boldsymbol{N}$.

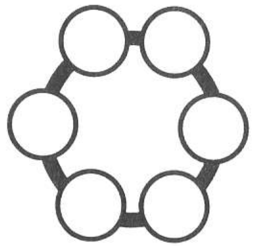
★**2.** Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

★**3.** Czy w puste pola można wpisać liczby całkowite różne od zera, aby każda liczba w pustym polu była sumą liczb sąsiadujących?

a)



b)



★**4.** Czy wielokąt wypukły, który ma cztery kąty proste musi być prostokątem?

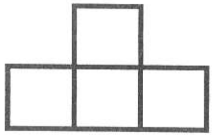
5. W pudełku znajduje się 10 kul białych, 10 kul czerwonych i 10 kul niebieskich. Losujemy po kolei trzy kule:
a) ze zwrotem,
b) bez zwrotu.
Oblicz prawdopodobieństwo, że będą to kule różnych kolorów.

XXX

1. Ile zer ma na końcu zapisu dziesiętnego liczba $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000$?

2. Czy wśród liczb: 44, 444, 4444, 44444, ..., itd. znajduje się kwadrat liczby naturalnej?

★★3. Czy szachownicę 10×10 można pokryć 25 kostkami o kształcie przedstawionym poniżej

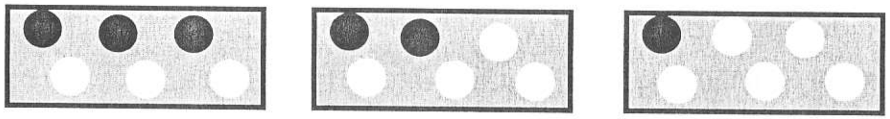


★★4. Oblicz promień kuli:

a) wpisanej, b) opisanej

na czworościanie foremnym o krawędzi a.

5. Są trzy pudełka, w których znajdują sie kule:



I pudełko II pudełko III pudełko

Rzucamy trzema monetami:

a) jeśli wypadną trzy orły, losujemy kulę z I pudełka,
b) jeśli wypadną trzy reszki, losujemy kulę z III pudełka,
c) jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł i co najmniej jedna reszka, losujemy kulę z II pudełka.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

XXXI

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AB + BA = BBC$.

★2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $2p - 1$ i $2p + 1$ są również liczbami pierwszymi.

★3. Rozwiąż równanie $|x+1| + |x-1| = x^2$.

4. W jakim stosunku należy zmieszać dwa roztwory o stężeniach 7% i 18%, aby otrzymać roztwór o stężeniu 13%?

5. Podziel prostokąt o wymiarach 9×16 na cztery prostokąty, z których można złożyć kwadrat.

XXXII

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AA + BB = CAC$.

2. Czy wśród liczb: 66, 666, 6666, 66666, ..., itd. znajduje się liczba będąca kwadratem liczby natyralnej?

★★3. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie a i b takie, że liczby

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \quad \text{i} \quad \sqrt{b+\sqrt{a}}$$

są wymierne?

4. Wykaż, że jeżeli w trójkącie dwie jego środkowe są równe, to trójkąt jest równoramienny.

5. Podziel prostokąt o wymiarach 4×25 na cztery prostokąty, z których można złożyć kwadrat.

XXXIII

1. Znajdź cyfry A, B, C takie, że $AA + BA = CBB$.

★2. Niech $a \neq 1$ będzie taką liczbą, że liczba $\frac{1}{a-1}$ jest całkowita. Wykaż, że istnieją różne liczby całkowite m i n spełniające równanie $\frac{a^m}{m} = \frac{a^n}{n}$.

★3. Rozwiąż nierówność $||x-5|-3| < 1$.

★★4. Wykaż, że jeśli środkowa i wysokość trojkąta poprowadzone z tego samego wierzchołka dzielą kat przy tym wierzchołku na trzy równe kąty, to trójkąt ten jest prostokątny.

5. Podziel prostokąt o wymiarach 9×25 na pięć prostokątów, z których można złożyć kwadrat.

XXXIV

1. Znajdź cyfry A i B takie, że suma $AB + BA$ jest kwadratem liczby naturalnej.
2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p^2 + 8$ jest również liczbą pierwszą.
3. Rozwiąż nierówność $|x^2 - 5| \leq 4$.
4. Rzucamy monetą dopóki nie pojawi się orzeł, nie więcej jednak niż trzy razy. Za wyrzucenie reszki otrzymujemy 1 punkt, a za wyrzucenie orła — 2 punkty. Oblicz prawdopodobieństwo zdobycia 3 punktów.
5. Oblicz pole kwadratu wpisanego w półkole o promieniu r.

XXXV

1. Znajdź cyfry A, B, C, D takie, że $ABCD = (A + B + C + D)^4$.
2. Rozwiąż równanie $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$ w zbiorze liczb naturalnych.
3. Rozwiąż nierówność $||x|-2| > 4$.
4. W pudełku są trzy kule białe i jedna kula czarna. Losujemy kolejno trzy kule (bez zwrotu do pudełka). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej za trzecim razem.

★5. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a i tworzy z krawędzią boczną ostrosłupa kat α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

XXXVI

★1. Niech m będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że liczba $m^5 - m$ jest podzielna przez 30.

2. Czy suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych może być sześcianem liczby naturalnej?
3. Rozwiąż nierówność $|x^2 - 10| \geq 6$.
4. Narysowano cieciwę okręgu, która ma długość 12 cm. Odległość środka łuku, na której oparta jest cięciwa od tej cieciwy wynosi 2 cm. Oblicz promień tego okręgu.

★5. Oblicz promień kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość a.

XXXVII

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, q, r takie, że $pqr = 5(p+q+r)$.

★2. Wykaż, że liczba postaci $3\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}5$ jest podzielna przez 7.

3. Zamień ułamek okresowy 0,135135135... na ułamek zwykły.

★4. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $(a+b)(a^5+b^5) \geq (a^2+b^2)(a^4+b^4)$.

5. W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC. Punkt M dzielący bok AB na połowy połączono z wierzchołkami C i D. Wykaż, że kąt CMD jest prosty.

XXXVIII

★1. Niech m i n będą liczbami całkowitymi takimi, że $m-n=2$. Wykaż, że liczba $m^4 - n^4$ jest podzielna przez 16.

2. Niech $x \neq 0$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczba $x + \frac{1}{x}$ jest całkowita. Wykaż, że liczba $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jest również całkowita.

3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} |x-y| = 1 \\ |x+y| = 3. \end{cases}$

★★4. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Wykaż, że $a = b = c$.

5. Czy długość wszystkich krawędzi i przekątnych prostopadłościanu mogą być liczbami całkowitymi?

XXXIX

★★1. Czy istnieje liczba naturalna większa od 1 równa sumie kwadratów swoich cyfr?

2. Liczby naturalne K *i* L są zapisane przy pomocy tych samych cyfr (w innej kolejności). Wykaż, że różnica $K - L$ jest podzielna przez 9.

3. Czy istnieją liczby a, b, c (różne od zera) takie, że $a+b+c=0$ oraz $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$?

★★4. Rozwiąż równanie $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+13} = \sqrt{x-2}+\sqrt{x+22}$.

5. Pewien kwadrat i koło mają równe obwody. W kwadrat wpisujemy koło, a w koło — kwadrat. Która z wpisanych figur ma większy obwód?

XL

1. Czy istnieje liczba naturalna większa od 1 równa sumie sześcianów swoich cyfr?

★2. Wyznacz sumę wszystkich liczb ośmiocyfrowych utworzonych z różnych cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, .

★3. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych takie, że po dodaniu: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu tych liczb otrzymamy 150.

4. Pewien kwadrat i koło mają równe pola. W kwadrat wpisujemy koło, a w koło — kwadrat. Która z wpisanych figur ma większe pole?

★★5. Cztery kule o jednakowym promieniu R są parami styczne. Oblicz promień kuli stycznej:

a) wewnętrznie, **b)** zewnętrznie

do każdej z tych czterech kul.

Wskazówki

I

1. $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$.
2. Wykorzystaj wzór na różnicę kwadratów.
3. Przyjmij, że $f(x) = ax + b$ i z podanych warunków oblicz a i b.
4. Oznacz przez l wspólny obwód obu figur.
5. Skorzystaj z cechy *kąt – bok – kąt* przystawania trójkątów.

II

1. $4n^4 + 1 = (4n^4 + 4n^2 + 1) - 4n^2$.
2. Wykorzystaj wzór na różnicę kwadratów.
3. Kiedy wartości bezwzględne dwóch liczb są równe?
4. Zauważ, że każdy wykres funkcji f przechodzi przez punkt $P(1, 2)$.
5. Środkowe dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku 2 : 1. Na zewnątrz trójkąta dorysuj odpowiedni równoległobok.

III

1. $n^4 + n^2 + 1 = (n^4 + 2n^2 + 1) - n^2$.
2. $ABCDEF = ABC000 + DEF$ i $ABC + DEF = 999$.
3. Rozpatrz kolejno funkcje: $f_1(x) = |x-1|$, $f_2(x) = |x-1| - 2$, $f_3(x) = ||x-1|-2|$.

4. Zauważ, że trójkąt o bokach 6, 8 i 10 jest prostokątny.
5. Oznacz przez α, β i γ kąty trójkąta, o których wiadomo, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Następnie załóż, że dwie dwusieczne są prostopadłe i wyprowadź stąd wniosek, który jest jawnie fałszywy.

IV

1. Liczba p musi być nieparzysta, tj. $p = 2n + 1$, gdzie $n \in N$. Po podstawieniu $p = 2n + 1$ do równania wywnioskuj, że $q = 2$.
2. Oznacz przez k liczbę cyfr liczby 12^n i załóż, że liczba $12^n + 2^n$ ma więcej niż k cyfr. Liczba naturalna A k-cyfrowa spełnia nierówności $10^{k-1} \le A < 10^k$.
3. Podnieś obie strony równania do kwadratu; można to zrobić, gdyż są one dodatnie.
4. Wykaż, że różnica lewej i prawej strony nierówności jest nieujemna.
5. Oblicz wysokość h trójkąta i wykorzystaj trójkąt prostokątny o bokach r, $h - r$ i 8.

V

1. $10^{3n} - 1 = \underbrace{999 \ldots 999}_{3n\,\text{cyfr}} = 9 \cdot \underbrace{111 \ldots 111}_{3n\,\text{cyfr}}$ i liczba $\underbrace{111 \ldots 111}_{3n\,\text{cyfr}}$ jest podzielna przez 111.
2. Wykorzystaj wzór na różnicę kwadratów.
3. Podnieś obie strony równania do sześcianu.
4. Rozważ przypadki $x > 0$ i $x < 0$.
5. Podziel czworokąt przekątną na dwa trójkąty. Kiedy pole trójkąta o danych dwóch bokach jest największe?

VI

1. Zauważ, że dwie ostatnie cyfry potęg 7^n powtarzają się co cztery.
2. Dla $A, B > 0$ mamy $A + B = (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 + 2\sqrt{AB} \geq 2\sqrt{AB}$.
3. Oznacz $[x] = m$. Wówczas liczba m jest całkowita i $m \leq x < m + 1$.
4. Oblicz wysokość rombu, korzystając dwukrotnie ze wzoru na pole.
5. Wykorzystaj przystawanie odpowiednich trójkątów.

VII

1. Rozpatrz końcówki jednocyfrowe kolejnych potęg trójki i siódemki.
2. Oznacz $a = 2 - \sqrt{3}$ i $b = 2 + \sqrt{3}$. Wówczas $a + b = 4$ i $ab = 1$. Następnie wielokrotnie skorzystaj ze wzoru na kwadrat sumy.
3. Wykaż, że różnica prawej i lewej strony nierówności jest nieujemna.
4. Oznacz $f(x) = ax + b$. Z podanych warunków oblicz a i b.
5. Połącz odcinkami środki kół. Poszukiwane koła styczne mają środki w środku ciężkości trójkąta równobocznego o boku $2r$.

VIII

1. Zapisz rozważaną liczbę w postaci
$10^8 A + 10^7 B + 10^6 C + 10^5 A + 10^4 B + 10^3 C + 10^2 A + 10B + C$.
2. Dodaj ułamki, a następnie porównaj mianowniki.
3. Załóż, że $x \leq y \leq z$. Następnie wykaż, że nierówność $x \geq 4$ prowadzi do fałszu. Rozważ dalej trzy przypadki: $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$. Pozbądź się ułamków. Zastosuj rozkład na czynniki.
4. Rozważ trzy przypadki: $x < -1$, $-1 \leq x < 1$, $x \geq 1$.
5. Oznacz boki trójkąta przez $2a - 2$, $2a$ i $2a + 2$, gdzie a jest liczbą całkowitą.

IX

1. $n^2 + 2n + 7 = (n^2 + n) + (n + 1) + 6 = n(n + 1) + (n + 1) + 6$.
2. Oznacz $a = \sqrt{1998} + \sqrt{2001}$ i $b = \sqrt{1999} + \sqrt{2000}$. Następnie porównaj liczby a^2 i b^2.
3. Załóż, że $x \leq y \leq z \leq t$. Następnie podziel obie strony równania przez $xyzt$. Wykaż, że nie może być $x \geq 2$, czyli musi być $x = 1$. Wykaż, że nie może być również $y \geq 2$, czyli $y = 1$. Zatem wyjściowe równanie przyjmie postać $zt = 2 + z + t$. Zastosuj rozkład na czynniki.
4. Oznacz boki prostokąta przez x i y. Skorzystaj z faktu, że $2xy \leq x^2 + y^2$ dla dowolnych x i y.
5. Wykaż, że najdłuższy bok jest krótszy niż suma pozostałych boków.

X

1. $AABB = 1000A + 100A + 10B + B = 11(100A + B)$.
Liczba $100A + B$ musi być podzielna przez 11.
2. $|(x-1)(x-4)| = |(x-2)(x-3)|$.
3. Wszystkie wykresy przechodzą przez punkt $P(-2, 2)$.
4. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa i z nierówności $x^2 + y^2 \geq 2xy$ prawdziwej dla dowolnych x i y.
5. Wpisz ośmiokąt w kwadrat.

XI

1. Załóż, że $m^2 + m + 4 = k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Następnie przekształć podane równanie do postaci $(2m+1)^2 + 15 = (2k)^2$.

2. Pomnóż obie strony równania przez 2 i skorzystaj ze wzoru na kwadrat różnicy.

3. Prędkość małej wskazówki zegara wynosi $\frac{360°}{720\,\text{min}}$, a dużej $\frac{360°}{60\,\text{min}}$.

4. Rozwiąż równania $2x_1 + a = 0$ i $x_2 + a + 2 = 0$.

5. Narysuj taki kąt środkowy, aby jego ramię było zawarte w ramieniu kąta wpisanego.

XII

1. Rozłóż wyrażenie $n^2 + 2n - 3$ na czynniki.

2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Następnie skorzystaj z nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ prawdziwej dla dodatnich wartości x i y.

3. Zapisz $f(x) = ax + b$, a następnie skorzystaj z faktu, że jeżeli $Ax + B = 0$ dla każdego x, to $A = 0$ i $B = 0$.

4. Wpisz koło o promieniu 1 w kwadrat.

5. Podpowiedź: 3.

XIII

1. Wykaż, że iloczyn dwóch liczb naturalnych zakończonych na 0625 kończy się na 0625. Wykorzystaj równość $5^{1024} = (5^8)^{128} = 390625^{128}$.

2. Zapisz daną sumę w postaci rozwiniętej. Suma $A + B + C + D$ powinna być podzielna przez 101.

3. Pozbądź się ułamków. Zastosuj rozkład na czynniki.

4. Średnia wieku jest równa $\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n}$, gdzie k_i — liczba lat osoby A_i.

5. Wykaż, że odcinek łączący środki boków czworokąta jest równoległy do przekątnej i ma długość równą połowie długości przekątnej.

XIV

1. Oznacz cztery kolejne liczby całkowite przez $m-1$, m, $m+1$, $m+2$. Pogrupuj czynnik $m-1$ z czynnikiem $m+2$, a czynnik m z czynnikiem $m+1$.

2. Oznacz $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$ i $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101}$. Uzasadnij, że $A < B$. Oblicz AB.

3. Oznacz $[x] = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Skorzystaj z nierówności $m \leq x < m + 1$.

4. Oblicz $f(f(x))$ i $f(f(f(x)))$.

5. Oznacz bok kwadratu przez a, natomiast boki prostokątów przez a i x oraz a i $a - x$.

XV

1. Skorzystaj z nierówności $5^3 = 125 < 128 = 2^7$.

2. Rozwiń zapis dziesiętny liczby $AABBCC$.

3. Oznacz cenę początkową towaru przez c.

4. Liczba $x = 3$ spełnia dane równanie. Wykaż, że innych rozwiązań równanie nie ma. W tym celu załóż, że liczba $x_1 \neq 3$ jest rozwiązaniem i dojdź do równania sprzecznego.

5. Oznacz przez x i y boki prostokąta, jego przekątną przez $3a$, przez t — długość odcinka prostopadłego do przekątnej. Zapisz trzy równania wynikające z twierdzenia Pitagorasa.

XVI

1. $2525252525 = 25 \cdot 101010101$. Wykaż, że liczba 101010101 nie jest kwadratem liczby naturalnej metodą „do sprzeczności".

2. Wykaż, że: jeśli $n > 2$, to $3^n + 4^n < 5^n$, a jeśli $n < 2$, to $3^n + 4^n > 5^n$.

3. Skorzystaj z nierówności $|x| + |y| \geq |x + y|$ prawdziwej dla dowolnych x i y.

4. Oznacz przez c cenę początkową towaru.

5. Niech r oznacza promień jednego z dwóch kół. Wykaż, że $a - b = 2r$.

XVII

1. Rozwiń zapis dziesiętny liczby $ABABABAB$.

2. Oznacz $x = \sqrt{9 + \sqrt{80}} - \sqrt{9 - \sqrt{80}}$. Oblicz x^2.

3. Wykaż, że $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

4. Podpowiedź: tak.

5. Niech r i R oznaczają odpowiednio promień małego i dużego koła. Wykaż, że $\frac{R - r}{R + r} = \sin 30°$.

XVIII

1. Rozważ przypadki $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$ i $p > 5$.
W ostatnim przypadku p jest postaci $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$ lub $5k + 4$, gdzie $k \in N$.

2. Rozważ przypadki $x \geq 1$, $x < 1$.

3. Wykaż, że $ab(c - 1)^2 + c(a - b)^2 = 0$.

4. Niech A oznacza wybraną osobę. Niech z sali wyjdą wszystkie osoby nie znające osoby A. W sali wówczas pozostanie co najmniej 68 osób ...

5. Wpisz ośmiokąt w kwadrat.

XIX

1. Rozważ reszty z dzielenia liczb $3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^m$ przez $m = 10^{101}$. Pewne dwie reszty muszą być równe, zatem różnica pewnych dwóch liczb 3^i i 3^j jest podzielna przez m.

2. Skorzystaj z nierówności $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ prawdziwej dla liczb dodatnich x i y.

3. Rozważ przypadki: $x < -1$, $-1 \leq x < 1$, $x \geq 1$.

4. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.

5. Wykaż, że n-kąt wypukły ma $\frac{n(n - 3)}{2}$ przekątnych.

XX

1. Rozważmy reszty z dzielenia liczb: $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{2000\,\text{cyfr}}$ przez 1999. Pewne dwie reszty muszą być równe, a zatem różnica pewnych dwóch liczb $\underbrace{11\dots1}_{i\,\text{cyfr}}$ i $\underbrace{11\dots1}_{j\,\text{cyfr}}$ jest podzielna przez 1999.

2. Przekształć podane równanie do postaci $A^2 + B^2 + 2C^2 = 0$.

3. Oblicz kolejno: $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$, $x^3 - \frac{1}{x^3}$.

4. Rozważane pole jest różnicą pola trójkąta równobocznego i pola trzech wycinków kołowych o kącie środkowym 60°.

5. Niech r i R oznaczają odpowiednio promień małego i dużego koła. Wykaż, że $\frac{R-r}{R+r} = \sin 45°$.

XXI

1. Oznacz $A = 101010101$. Oblicz $11A$. Liczba 11111 jest dzielnikiem liczby $11A$.

2. Wykaż, że zachodzi równość $x = y$.

3. Zapisz $f(x) = kx + m$. Wykaż, że $k^2 = 1$ i $km + m = 0$.

4. Zastosuj nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną: $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$. Wykaż, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

5. Bok prostokąta znajduje się na podstawie, pozostałe dwa wierzchołki na ramionach trójkata. Skorzystaj z podobieństwa trójkątów.

XXII

1. Jeśli liczba $2^n + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej, to jest kwadratem liczby naturalnej nieparzystej.

2. Załóż, że $x \leq y \leq z$. Wykaż, że $x = y$, a następnie, że $x = y = z$.

3. Jeśli $a \rangle 0$, to $|t| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = a$ lub $t = -a$.

4. Swoje rozważania zacznij od nierówności $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

5. Niech x_i i y_i będą bokami i-tego prostokąta. Mamy $d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \geq 2x_i y_i$.

XXIII

1. Wykaż najpierw, że $C = 0$.

2. $\underbrace{11...11}_{2n\,\text{cyfr}} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99...99}_{2n\,\text{cyfr}} = \frac{1}{9}(10^{2n} - 1) = \frac{1}{9}(10^n - 1)(10^n + 1)$.

3. Do danego równania podstaw $-x$ zamiast x.

4. Swoje rozważania rozpocznij od przekształcenia prawej strony nierówności $(3\sin\alpha + 4\cos\alpha)^2 \leq (3\sin\alpha + 4\cos\alpha)^2 + (3\sin\alpha - 4\cos\alpha)^2$.

5. Oznacz przez a i h bok i wysokość rombu. Mamy $h \leq a$.

XXIV

1. Wykaż najpierw, że $C = 0$.

2. Liczba pierwsza większa od 3 nie jest podzielna przez 2 i przez 3, a więc jest postaci $6k + 1$ lub $6k + 5$ ($k = 0, 1, 2, ...$).

3. Pomnóż obie strony równania przez xy. Zastosuj rozkład na czynniki.

4. Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

5. Oznacz przez x_i, y_i, z_i, V_i, krawedzie i objętość i-tego prostopadłościanu. Skorzystaj z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb x_i^2, y_i^2, z_i^2: $\frac{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}{3} \geq \sqrt[3]{x_i^2 y_i^2 z_i^2}$.

XXV

1. Wykaż najpierw, że $C = 1$.

2. Oznacz $d = \text{NWD}(5n + 3, 3n + 2)$. Wówczas $5n + 3 = kd$ i $3n + 2 = ld$. Z tych równości pozbądź się n.

3. Dodaj stronami wszystkie równania.

4. Podstaw $x = y = 0$, a następnie $y = -x$.

5. Skorzystaj czterokrotnie z twierdzenia Pitagorasa.

XXVI

1. Wywnioskuj, że C dzieli się przez 7.

2. Skorzystaj ze wzoru na różnicę sześcianów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3. Rozważ przypadki: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, a następnie załóż, że $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Pomnóż stronami wszystkie równania. Wywnioskuj, że $xyz = 1$.

4. W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach x i y takich, że $xy = h^2$.

5. Wykaż najpierw, że kwadrat można podzielić na: sześć, siedem, osiem kwadratów. Jeśli kwadrat jest podzielony na k kwadratów, to dzieląc jeden z kwadracików podziału na cztery kwadraty zwiększamy liczbę kwadratów o 3, więc mamy $k + 3$ kwadraty.

XXVII

1. Oznacz $l_n = \underbrace{11...11}_{n \text{ cyfr}}$.

2. Liczba pierwsza wieksza od 3 jest postaci $6k + 1$ lub $6k + 5$.

3. Oznacz $\left[\frac{x-1}{2}\right] = m$. Wówczas m jest liczbą całkowitą oraz

$m \le \frac{x-1}{2} < m + 1$.

4. Oznacz przez t czas, który upłynął od chwili wyruszania turystów do momentu ich spotkania. Wprowadź jeszcze oznaczenia: $s = |AB|$, u — prędkość turysty X, v — prędkość turysty Y. Ułóż trzy równania.

5. Rozważ trójkąt prostokątny o bokach a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$.

XXVIII

1. Wykaż, że liczba $\underbrace{100...001}_{2n \text{ zer}}$ jest podzielna przez 11.

2. Skorzystaj z nierówności $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|\cdot|y|} + \frac{1}{y^2} \ge \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}$. Wnioskujemy, że $|x| = 1$ lub $|y| = 1$.

3. Rozważ przypadki: $x \ge 0$, $x < 0$.

4. Niech CD będzie odcinkiem dwusiecznej kąta prostego $\angle C$ w trójkącie ABC. Oblicz pola trójkątów ACD i BCD, których suma jest równa polu trójkąta ABC.

5. Ponumeruj krzesła liczbami od 1 do 10.

XXIX

1. Załóż, że $x \le y \le z$. Wywnioskuj, że $x = 1$.

2. Wykaż, że różnica lewej oraz prawej strony nierówności jest nieujemna.

3. a) Oznacz liczby w pustych polach przez A, B, C, D, E. Napisz układ pięciu równań. Wyniknie z niego, że $A=B=C=D=E=0$.
b) Odp. Można w trzy kolejne pola wpisz liczby 1, 3, 2.

4. Suma kątów n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180°$. Załóż, że $n \geq 5$. Cztery kąty są proste, a pozostałych $n-4$ ma miarę mniejszą od 180° (każdy).

5. Ponumeruj kule.

XXX

1. Wykaż, że rozwinięcie na czynniki pierwsze liczby $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000$ zawiera 249 piątek.

2. Zastosuj metodę „do sprzeczności", zakładając, że pewna z wypisanych liczb jest kwadratem.

3. Ponumeruj pola szachownicy liczbami 0 i 1 na przemian.

4. Oblicz wysokość H czworościanu . Z podobieństwa odpowiednich trójkątów wyniknie, że $r=\frac{1}{4}H$ i $R=\frac{3}{4}H$.

XXXI

1. Wykaż, że $C=0$.

2. Rozważ liczby $2p-1$, $2p$, $2p+1$. Są to trzy kolejne liczby naturalne, a więc dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3. Rozważ trzy przypadki.

3. Rozważ przypadki: $x<-1$, $-1\leq x<1$, $x\geq 1$.

4. Ilość substancji w obu roztworach w sumie musi być taka sama przed i po zmieszaniu.

5. Bok kwadratu wynosi 12. (*Dlaczego*?)

XXXII

1. Wykaż, że $C=1$.

2. Załóż, że $66\ldots66=(2m)^2$, gdzie $m\in N$.

3. Oznacz $u=\sqrt{a+\sqrt{b}}$, gdzie u jest liczbą wymierną. Wykaż, że b jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej. I podobnie: a jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

4. Środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 2 : 1.

5. Bok kwadratu wynosi 10. (*Dlaczego*?)

XXXIII

1. Wykaż, że $C=1$.

2. Przyjmij $m=\frac{1}{a-1}$ i $n=m+1$.

3. Zauważ, że $|t|<1$ wtedy, gdy $-1<t<1$.

4. Oznacz kąty, które powstały przez α, α, α. Zauważ, że są trzy trójkąty prostokątne o kącie ostrym α, które są przystające.

5. Bok kwadratu wynosi 15. (*Dlaczego*?)

XXXIV

1. Niech $AB+BA=m^2$, gdzie $m\in N$. Mamy stąd $11(A+B)=m^2$. Zatem liczba m jest podzielna przez 11.

2. Rozważ przypadki: $p=2$, $p=3$, $p>3$. Dla $p>3$ mamy $p=3k+1$ lub $p=3k+2$.

3. Zauważ, że $|t|\leq 4$ wtedy, gdy $-4\leq t\leq 4$.

4. Narysuj „drzewko" prawdopodobieńdstwa.

5. Środek pewnego boku kwadratu jest jednocześnie środkiem półkola.

XXXV

1. Rozważ wszystkie czterocyfrowe czwarte potęgi liczb naturalnych.
2. Pozbądź sie ułamków. Zastosuj rozkład na czynniki.
3. Zauważ, że $|t| > 4$ wtedy, gdy $t > 4$ lub $t < -4$.
4. Narysuj „drzewko" prawdopodobieństwa.
5. Wyznacz wysokość ściany bocznej korzystajac z funkcji tangens, a następnie wysokość ostrosłupa z twierdzenia Pitagorasa.

XXXVI

1. Mamy $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1)(m^2 + 1) =$ $= m(m-1)(m+1)(m^2+1)$. Zauważ, że $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
2. Podpowiedź: tak.
3. Zauważ, że $|t| \geq 6$ wtedy, gdy $t \geq 6$ lub $t \leq -6$.
4. Wykorzystaj twierdzenie Pitagorasa.
5. Rozważ trójkąt prostokątny WSP, gdzie W — górny wierzchołek ostrosłupa, S — środek podstawy, P — środek krawędzi bocznej. Mamy $O \in WS$ oraz $T \in WP$ i $OT \perp WP$, gdzie O — środek wpisanej kuli, T — punkt styczności kuli ze ścianą boczną.

XXXVII

1. Jedna z liczb p, q lub r jest równa 5.
2. Oznacz $m = \underbrace{11...11}_{n \text{ cyfr}}$. Zauważ, że $9m + 1 = 10^n$.
3. Oznacz $x = 0,135135135...$. Oblicz $1000x$.

4. Wykaż, że róznica lewej i prawej strony nierówności jest nieujemna. Zastosuj rozkład na czynniki. Skorzystaj ze wzoru na różnicę sześcianów: $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$
5. Zauważ, że pewne trójkąty są równoramienne.

XXXVIII

1. Rozpatrz przypadki: $m = 2k$ i $m = 2k + 1$, gdzie $k \in C$.
2. Oznacz $x + \frac{1}{x} = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Oblicz $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$.

   Zastosuj wzór na sześcian sumy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
3. Zauważ, że $|t| = a$ $(a > 0)$ wtedy, gdy $t = a$ lub $t = -a$.
4. Oznacz $t = a + b + c$. Stąd $t - c = a + b$, $(t-c)^3 = (a+b)^3$. Następnie wykorzystaj równość podaną w treści zadania. Podziel obie strony równania przez t $(t > 0)$.
5. Podpowiedź: tak. Wyprowadź wzór na długość przekątnej prostopadłościanu stosując dwukrotnie twierdzenie Pitagorasa.

XXXIX

1. Załóż, że taka liczba istnieje i oznacz ją przez $A_1 A_2 \ldots A_n$. Mamy

   $A_1 A_2 \ldots A_n = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2$,

   $A_1 A_2 \ldots A_n \geq 1\underbrace{00...0}_{n-1 \text{ zer}}$,

   $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \leq \underbrace{9^2 + 9^2 + \ldots + 9^2}_{n \text{ składników}} = 81n$.
2. Niech $S(A)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej A. Wówczas różnica $A - S(A)$ jest podzielna przez 9.

3. Załóż, że takie liczby a, b, c istnieją. Wyruguj c. Dojdź do wniosku $a = 0$ i $b = 0$, co jest niemożliwe.

4. Podnieś obie strony równania do kwadratu i postępuj dalej tak, aby pozbyć się pierwiastków.

5. Oznacz przez l wspólny obwód.

XL

1. Podpowiedź: tak. Poszukaj wśród liczb trzycyfrowych.

2. Rozważanych liczb ośmiocyfrowych jest $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Poustawiaj je w pary o sumie odpowiednich cyfr równej 9, np.: 13452768 i 86547231.

3. Niech m i n będą poszukiwanymi liczbami całkowitymi. Wówczas mamy równanie $(m+n)+(m-n)+m\cdot n+\frac{m}{n}=150$.

4. Oznacz przez S wspólne pole.

5. Środki czterech rozważanych kul są wierzchołkami czworościanu foremnego o krawędzi $2R$.

Rozwiązania

I

1. Mamy

$$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2 = (n^2+2)^2-(2n)^2 =$$
$$=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n) = ((n-1)^2+1)\cdot(n^2+2n+2).$$

Jeżeli $n>1$, to oba czynniki powyższego iloczynu są większe od 1, a więc liczba n^4+4 jest w tym przypadku złożona.
Jeżeli $n=1$, to $n^4+4=5$ i jest to liczba pierwsza.

2. Wynika to z tożsamości $4k=(k+1)^2-(k-1)^2$.

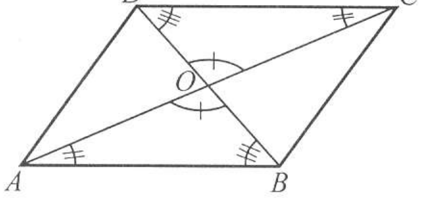
3. Niech $f(x)=ax+b$ będzie przepisem rozważanej funkcji liniowej.
Mamy $a+b=3$ i $3a+b=1$, skąd $a=-1$ i $b=4$.
Zatem $f(x)=-x+4$ i stąd $f(4)=0$.

4. Niech a, r i l oznaczają odpowiednio: bok kwadratu, promień półkola i wspólny obwód obu figur.
Mamy $4a=l$ i $\frac{1}{2}(2\pi r)+2r=l$, skąd $a=\frac{l}{4}$ i $r=\frac{l}{\pi+2}$.
Wobec tego pole kwadratu wynosi $P_1=\frac{l^2}{16}$, a pole półkola to $P_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{l}{\pi+2}\right)^2$.
Obliczamy

$$P_1-P_2=\frac{l^2}{16}-\frac{\pi l^2}{2(\pi+2)^2}=\frac{(\pi+2)^2-8\pi}{16(\pi+2)^2}l^2=$$
$$=\frac{\pi^2+4\pi+4-8\pi}{16(\pi+2)}l^2=\frac{\pi^2-4\pi+4}{16(\pi+2)^2}l^2=\frac{(\pi-2)^2}{16(\pi+2)^2}l^2>0.$$

Wobec tego pole kwadratu jest większe.

5. Ponieważ trójkąty ABO i CDO mają równe kąty (patrz rysunek) i $|AB|=|CD|$, więc te trójkąty są przystające.
W konsekwencji $|AO|=|CO|$ i $|BO|=|DO|$.



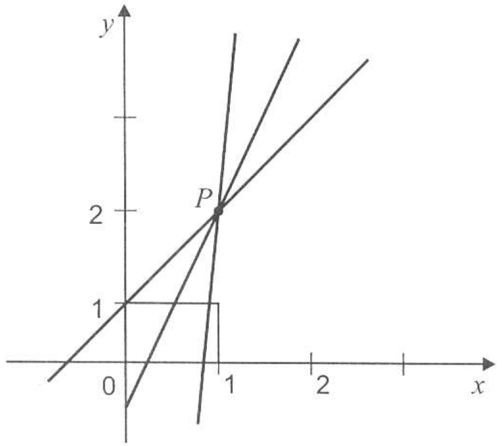
II

1. Mamy $4n^4+1=(4n^4+4n^2+1)-4n^2=(2n^2+1)^2-(2n)^2=$
$=(2n^2+1-2n)\cdot(2n^2+1+2n)=(2n(n-1)+1)(2n^2+2n+1)$.
Jeżeli $n>1$, to oba czynniki powyższego iloczynu są większe od 1, a więc liczba $4n^4+1$ jest w tym przypadku złożona.
Jeżeli $n=1$, $4n^4+1=5$ i jest to liczba pierwsza.

2. Wynika to z tożsamości $4k+1=(2k+1)^2-(2k)^2$.

3. Dwie liczby mają równe wartości bezwzględne wtedy, gdy liczby te są równe lub przeciwne: $x-1=2x-3$ lub $x-1=-(2x-3)$.
Odpowiedź: $x=2$ lub $x=1\frac{1}{3}$.

4. Zauważmy, że $f(1)=m\cdot 1+2-m=2$.
Zatem wykres każdej funkcji przechodzi przez punkt $P(1, 2)$.
Wykresy funkcji spełniającej warunki zadania:



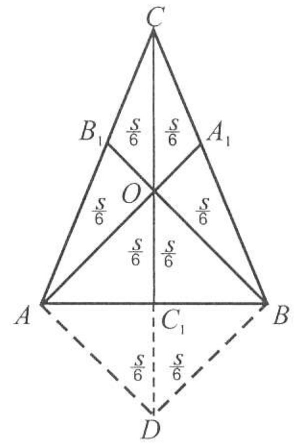
Z rysunku wynika, że współczynnik kierunkowy m musi być większy lub równy m_0, gdzie prosta $y=m_0x+2-m_0$ przechodzi przez punkt $(0, 1)$.
Mamy $1=m_0\cdot 0+2-m_0$, skąd $m_0=1$.
Odpowiedź: $m\geq 1$.

5. Wiadomo, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku 2 : 1.
AA_1, BB_1, CC_1— środkowe trójkąta ABC.
Punkt D jest takim punktem, że czworokąt $AOBD$ jest równoległobokiem.
Oznaczmy
$m_a=|AA_1|$, $m_b=|BB_1|$,
$m_c=|CC_1|$.
Wówczas

$$|AO|=\frac{2}{3}m_a,$$

$$|AD|=|BO|=\frac{2}{3}m_b,$$

$$|OD|=2\cdot|OC_1|=2\cdot\frac{1}{3}m_c=\frac{2}{3}m_c.$$



Przekształcając trójkąt ADO w podobieństwie o skali $\frac{3}{2}$, otrzymujemy trójkąt o bokach długości m_a, m_b, m_c.
Wykazaliśmy w ten sposób pierwszą część zadania. Każdy z trójkątów AOC_1, BOC_1, BOA_1, COA_1, COB_1 i AOB_1 ma jednakowe pole (równe $\frac{1}{6}$ pola trójkąta ABC).

Czytelnik zechce to udowodnić.
Oznaczając przez S pole trójkąta ABC, a przez T pole trójkąta o bokach m_a, m_b i m_c, możemy zapisać:

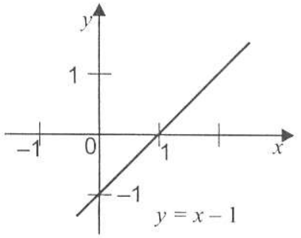
$$T=\left(\frac{3}{2}\right)^2 S_{ADO}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{S}{6}+\frac{S}{6}\right)=\frac{3}{4}S.$$

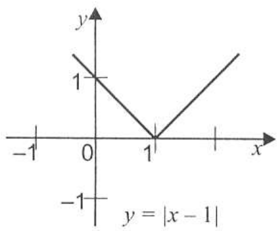
III

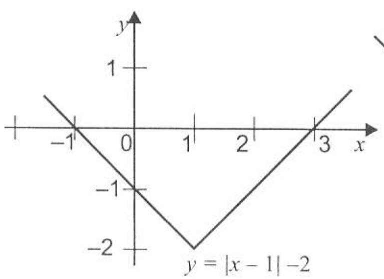
1. Mamy
$n^4 + n^2 + 1 = (n^4 + 2n^2 + 1) - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 =$
$= (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = (n(n-1) + 1)(n^2 + n + 1).$
Jeżeli $n > 1$, to oba czynniki powyższego iloczynu są większe od 1, a więc liczba $n^4 + n^2 + 1$ jest w tym przypadku złożona. Jeżeli $n = 1$, to $n^4 + n^2 + 1 = 3$ i jest to liczba pierwsza.

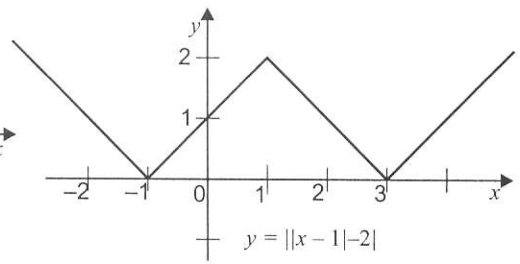
2. Zauważmy, że $ABC + DEF = 999$. Tak więc
$ABCDEF = ABCOOO + DEF = 1000 \cdot ABC + 999 - ABC =$
$= 999 \cdot ABC + 999 = 999 \cdot (ABC + 1) = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (ABC + 1).$

3. Rysunki przedstawiają kolejne fazy powstawania wykresu funkcji f:

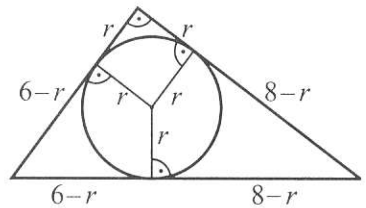




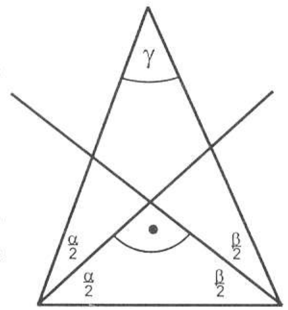




4. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że rozważany trójkąt jest prostokątny:
$6^2 + 8^2 = 10^2$.
Mamy równanie
$(6 - r) + (8 - r) = 10$, skąd $r = 2$.



5. Załóżmy wbrew temu, co mamy udowodnić, że pewne dwie dwusieczne w trójkącie są prostopadłe.
Mamy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 90° = 180°$.
Z drugiej równości mamy $\alpha + \beta = 180°$, co w połączeniu z pierwszą równością daje $\gamma = 0°$. Jest to oczywiście niemożliwe.



IV

1. Z danego równania wynika, że p jest liczbą nieparzystą: $p = 2n + 1$, gdzie $n \in N$.
Zatem $(2n + 1)^2 - 6q^2 = 1$, skąd kolejno otrzymujemy:
$4n^2 + 4n + 1 - 6q^2 = 1$, $4n^2 + 4n = 6q^2$, $2n^2 + 2n = 3q^2$.
Zatem q jest parzyste. Ponieważ q jest liczbą pierwszą, więc $q = 2$.
Następnie z równania wyznaczamy $p = 5$ i jest to liczba pierwsza.

2. Niech k będzie liczbą cyfr zapisu dziesiętnego liczby 12^n.
Wówczas $10^{k-1} < 12^n < 10^k$.
Stąd $12^n < 12^k$, czyli $n < k$ oraz $2^n \cdot 6^n < 2^k \cdot 5^k$, skąd
(★) $6^n < 2^{k-n} \cdot 5^k$.
Pokażemy, że liczba $12^n + 2^n$ ma również k cyfr.
Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli że liczba $12^n + 2^n$ ma więcej niż k cyfr. Wówczas $12^n + 2^n \geq 10^k$, skąd $2^n \cdot 6^n + 2^n \geq 2^k \cdot 5^k$, czyli
(★★) $6^n + 1 \geq 2^{k-n} \cdot 5^k$.
Ponieważ $k > n$, więc liczba $2^{k-n} \cdot 5^k$ jest naturalna.
Z nierówności (★) i (★★) wynika, że $6^n + 1 = 2^{k-n} \cdot 5^k$.

Jest to jednak niemożliwe, gdyż liczba $2^{k-n}\cdot 5^k$ jest parzysta ($k > n$), a liczba $6^n + 1$ jest nieparzysta.

3. Założenia: $5 - x \geq 0$ i $x \geq 0$, a więc $x \in \langle 0, 5\rangle$. Podnosimy obie strony równania do kwadratu, uzyskując równanie równoważne (*dlaczego*?):

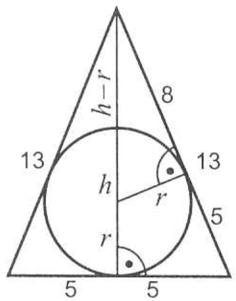
$$5 - x + 2\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{x} + x = 9,$$
$$2\sqrt{(5-x)x} = 4,$$
$$\sqrt{(5-x)x} = 2,$$
$$(5-x)x = 4,$$
$$5x - x^2 = 4,$$
$$-4 + 4x + x - x^2 = 0,$$
$$4(-1+x) + x(1-x) = 0,$$
$$4(x-1) - x(x-1) = 0,$$
$$(x-1)(4-x) = 0.$$

Zatem $x - 1 = 0$ lub $4 - x = 0$, czyli $x = 1$ lub $x = 4$. Liczby te spełniają założenia.

4.
$$(a+b) - 2 = (a+b) - 2\sqrt{1} =$$
$$= (a+b) - 2\sqrt{ab} =$$
$$= (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 =$$
$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

5. Mamy $h^2 + 5^2 = 13$, skąd $h = 12$.
Ponadto
$$r^2 + 8^2 = (h-r)^2, \text{ czyli}$$
$$r^2 + 64 = (12-r)^2, \text{ skąd}$$
$$r = \frac{10}{3}.$$

Odpowiedź: $\frac{100\pi}{9}$ cm^2.



V

1. Niech n będzie liczbą naturalną.

Mamy $10^{3n} - 1 = \underbrace{999...999}_{3n \text{ cyfr}} = 9\cdot\underbrace{111...111}_{3n \text{ cyfr}}$. Liczba $\underbrace{111...111}_{3n \text{ cyfr}}$ jest podzielna przez 111. (*Dlaczego*?)

Wobec tego mamy
$$10^{3k} - 1 = 111a, 10^{3l} - 1 = 111b, 10^{3m} - 1 = 111c,$$
gdzie liczby a, b, c są całkowite.

Zatem
$$10^{3k} + 10^{3l+1} + 10^{3m+2} = 10^k + 10\cdot 10^{3l} + 100\cdot 10^{3m} =$$
$$= (111a + 1) + 10(111b + 1) + 100\cdot(111c + 1) =$$
$$= 111(a + 10b + 100c) + 111 = 111(a + 10b + 100c + 1) =$$
$$= 37\cdot 3\cdot(a + 10b + 100c + 1).$$

2. Wynika to z tożsamości $4k + 3 = (2k+2)^2 - (2k+1)^2$.

3. Skorzystamy ze wzoru na sześcian sumy
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Mamy
$$(\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x})^3 = 3^3,$$
$$9 - x + 3(\sqrt[3]{9-x})^2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{9-x}(\sqrt[3]{x})^2 + x = 27,$$
$$3\sqrt[3]{9-x}\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x}) = 18,$$
$$3\sqrt[3]{(9-x)x}\cdot 3 = 18,$$
$$\sqrt[3]{(9-x)x} = 2,$$
$$(9-x)x = 8,$$
$$9x - x^2 - 8 = 0,$$
$$8x - 8 + x - x^2 = 0,$$
$$8(x-1) + x(1-x) = 0,$$
$$8(x-1) - x(x-1) = 0,$$
$$(x-1)(8-x) = 0.$$

Stąd $x - 1 = 0$ lub $8 - x = 0$, czyli $x = 1$ lub $x = 8$.

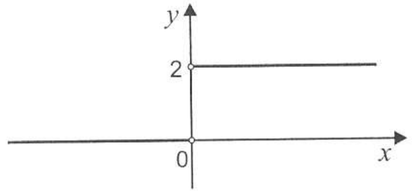
4. Dla $x > 0$ mamy

$$f(x) = \frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = 2.$$

Dla $x < 0$ mamy

$$f(x) = \frac{-x+x}{x} = \frac{0}{x} = 0.$$

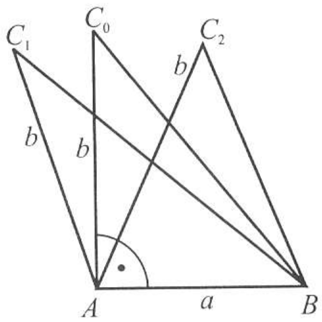
(*Nie może być* $x = 0$). Wykres funkcji f przedstawia rysunek.



5. Trójkąt o dwóch bokach danych będzie miał największe pole, gdy boki te będą prostopadłe.

Oto uzasadnienie.

Trójkąt ABC_0 ma największe pole, gdyż przy danej podstawie AB ma największą wysokość.



Patrząc na rysunki, możemy stwierdzić, że pole czworokąta o kolejnych bokach 1, 5, 5, i 7 będzie największe, gdy pola przedstawionych trójkątów będą największe. To z kolei będzie spełnione, gdy kąty między odpowiednimi bokami będą proste. Ale czy będzie można wówczas z tych trójkątów złożyć czworokąt, tj. czy $a = b$?

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

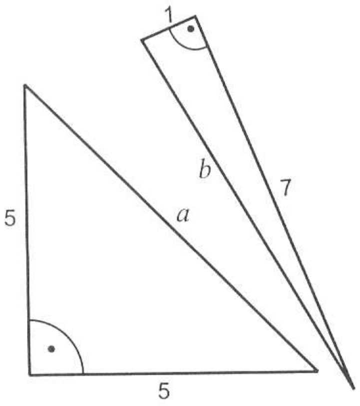
$a^2 = 5^2 + 5^2$ i $b^2 = 1^2 + 7^2$, czyli

$a^2 = 50$ i $b^2 = 50$.

Zatem $a = b$ i nasza konstrukcja jest możliwa.

Wobec tego poszukiwane maksymalne pole wynosi

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 7 = 16\ \text{cm}^2.$$



VI

1. Obliczając kolejne potęgi $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \ldots$ itd., stwierdzamy, że ostatnie dwie cyfry powtarzają się, co cztery: $\underbrace{07,\ 49,\ 43,\ 01}$, $\underbrace{07,\ 49,\ 43,\ 01}$, ...

Należy więc wyznaczyć resztę z dzielenia liczby 1999 przez 4. Jak się okazuje, reszta ta wynosi 3. Zatem dwie końcowe cyfry potęgi 7^{1999} są takie same jak potęgi 7^3, czyli równe 4 i 3.

2. Mamy

$$a+b+c+d = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{d})^2 + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} \ge$$
$$\ge 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) =$$
$$= 2((\sqrt{ab} - \sqrt{cd})^2 + 2\cdot\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}) \ge$$
$$\ge 2\cdot 2\cdot\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = 4\cdot\sqrt[4]{abcd} = 4\cdot\sqrt[4]{1} = 4.$$

3. Oznaczmy $[x] = m$. Wówczas liczba m jest całkowita oraz $m \le x < m+1$.

Z danego równania mamy $m = \frac{2}{3}x$, skąd $x = \frac{2}{3}m$.

Zatem $m \le \frac{3}{2}m < m+1$, $2m \le 3m < 2m+2$, $0 \le m < 2$.

Ponieważ m jest liczbą całkowitą, więc $m = 0$ lub $m = 1$. Wobec tego $x = \frac{3}{2}\cdot 0$ lub $x = \frac{3}{2}\cdot 1$, czyli $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}$.

Sprawdzenie, że otrzymane liczby spełniają wyjściowe równanie pozostawiamy Czytelnikowi.

4. Pole rombu wynosi $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24\ \text{cm}^2$.

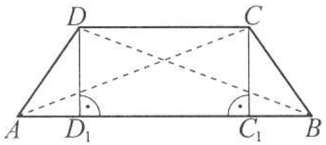
Niech a i h oznaczają odpowiednio bok i wysokość rombu. Z twierdzenia Pitagorasa mamy $a^2 = 3^2 + 4^2$, skąd $a^2 = 25$, czyli $a = 5$ cm. Mamy dalej $ah = 24$, czyli $5h = 24$, skąd $h = \frac{24}{5}$.

Niech r oznacza promień koła wpisanego w dany romb.

Ponieważ $r = \frac{1}{2}h$ (*dlaczego?*), więc $r = \frac{12}{5}$ cm.

Odpowiedź: $\frac{144}{25}\pi$ cm^2.

5. Ponieważ $|CC_1| = |DD_1|$ i $|AC| = |BD|$, więc trójkąty prostokątne AC_1C i BD_1D są przystające. Zatem $|AC_1| = |BD_1|$.



Wobec tego $|AD_1| = |AC_1| - |D_1C_1| = |BD_1| - |D_1C_1| = |C_1B|$. Ponadto $|DD_1| = |CC_1|$. Zatem trójkąty prostokątne AD_1D i BC_1C są przystające. W konsekwencji $|AD| = |BC|$.

VII

1. Ostatnie cyfry potęg $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ tworzą ciąg okresowy: $\underbrace{3, 9, 7, 1}, \underbrace{3, 9, 7, 1}, \dots$ itd.

Również ostatnie cyfry potęg $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, \dots$ tworzą ciąg okresowy: $\underbrace{7, 9, 3, 1}, \underbrace{7, 9, 3, 1}, \dots$ itd.

Zatem ostatnie cyfry sum potęg $3^1 + 7^1, 3^2 + 7^2, 3^3 + 7^3, 3^4 + 7^4, \dots$ wynoszą odpowiednio: $\underbrace{0, 8, 0, 2}, \underbrace{0, 8, 0, 2} \dots$ itd.

Widać, że suma potęg $3^n + 7^n$ kończy się na zero, gdy n jest liczbą nieparzystą.

2. Oznaczmy $a = 2 - \sqrt{3}$ i $b = 2 + \sqrt{3}$.

Mamy

$a + b = 4$ i $ab = 1$, stąd kolejno wynika, że

$(a+b)^2 = 4^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 16$, $a^2 + 2 + b^2 = 16$,

$a^2 + b^2 = 14$, $(a^2 + b^2)^2 = 14^2$, $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 196$,

$a^4 + 2 + b^4 = 196$, $a^4 + b^4 = 194$,

$a^8 + 2a^4b^4 + b^8 = 37636$, $a^8 + 2 + b^8 = 37636$,

$a^8 + b^8 = 37634$.

3. Wykażemy, że różnica lewej i prawej strony nierówności jest nieujemna:

$(a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2) - (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) =$

$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd = (ad - bc)^2 \geq 0.$

4. Oznaczmy $f(x) = ax + b$. Mamy

$(a+b) + (2a+b) + (3a+b) = 15$

i $(4a+b) + (5a+b) + (6a+b) = 42$. Stąd $a = 3$ i $b = -1$.

Wobec tego $f(x) = 3x - 1$. W konsekwencji

$f(7) + f(8) + f(9) = 20 + 23 + 26 = 69.$

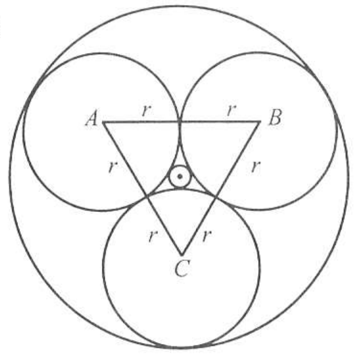
5. Wysokość trójkąta równobocznego ABC wynosi $h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

Promień dużego okręgu wynosi

$\frac{2}{3}h + r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}r.$

Promień małego okręgu wynosi

$\frac{2}{3}h - r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} - r = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}r.$



VIII

1. Mamy $ABCABCABC = 1001001 \cdot ABC = 333667 \cdot 3 \cdot ABC$.

2. Mamy $\frac{1}{1998} + \frac{1}{2001} = \frac{3999}{1998 \cdot 2001}$ i $\frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} = \frac{3999}{1999 \cdot 2000}$. Ponieważ liczniki obu ułamków są równe, więc wystarczy porównać mianowniki:

$1998 \cdot 2001 = (1999 - 1) \cdot (2000 + 1) =$

$= 1999 \cdot 2000 + 1999 - 2000 - 1 = 1999 \cdot 2000 - 2 < 1999 \cdot 2000.$

Zatem pierwsza suma jest większa.

3. Załóżmy, że $x \leq y \leq z$. Gdyby $x \geq 4$, to $y \geq 4$ i $z \geq 4$. Wówczas $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{49}{64}$, wbrew równaniu.

1° $x=3$. Wtedy

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{3yz}=1\ /\cdot 3yz$$

$yz+3z+3y+1=3yz,$
$2yz-3y-3z-1=0,$
$4yz-6y-6z-2=0,$
$4yz-6y-6z+9=11,$
$(2y-3)(2z-3)=11.$

Zatem $2y-3=1$ i $2z-3=11$, skąd $y=2$ i $z=7$.
Jest to jednak niezgodne z założeniem, że $x \le y$.

2° $x=2$. Wtedy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2yz}=1\ /\ 2yz$$

$yz+2z+2y+1=2yz,$
$yz-2z-2y-1=0,$
$yz-2z-2y+4=5,$
$(y-2)(z-2)=5.$

Zatem $y-2=1$ i $z-2=5$, skąd $y=3$ i $z=7$.
Otrzymujemy więc rozwiązanie $(x, y, z)=(2, 3, 7)$. Pozostałe rozwiązania to: $(3, 2, 7)$, $(2, 7, 3)$, $(3, 7, 2)$, $(7, 2, 3)$, $(7, 3, 2)$.

3° $x=1$. Wówczas równanie nie ma rozwiązania. (*Dlaczego*?)

4. Rozważmy trzy przypadki.

a) $x \in (-\infty, -1)$. Wówczas

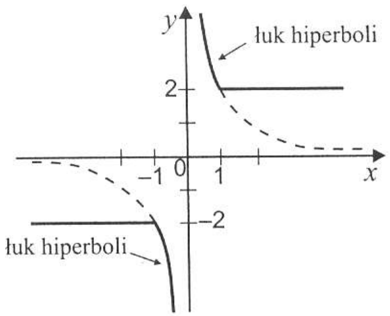
$$f(x)=\frac{-(x-1)-(x+1)}{x}=\frac{-2x}{x}=-2.$$

b) $x \in \langle -1, 1) \setminus \{0\}$. Wówczas

$$f(x)=\frac{-(x-1)+(x+1)}{x}=\frac{2}{x}.$$

c) $x \in \langle 1, \infty)$. Wówczas

$$f(x)=\frac{(x-1)+(x+1)}{x}=\frac{2x}{x}=2.$$



Końcowy wykres przedstawia rysunek.

5. Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2a-2$, $2a$, $2a+2$, gdzie a jest liczbą naturalną większą od 1.
Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa mamy równanie

$(2a-2)^2+(2a)^2=(2a+2)^2$, skąd
$4a^2-8a+4+4a^2=4a^2+8a+4,$
$4a^2-16a=0,$
$a^2-4a=0,$
$a(a-4)=0.$

Zatem $a=0$ lub $a=4$.
Przypadek $a=0$ odrzucamy. (*Dlaczego*?)
Dla $a=4$ otrzymujemy boki $2a-2=6$, $2a=8$, $2a+2=10$.

IX

1. Mamy $n^2+2n+7=(n^2+2n+1)+6=(n+1)^2+6$.
Stąd wynika, że liczba $n+1$ musi dzielić liczbę 6.
Zatem $n+1=2$ lub $n+1=3$, lub $n+1=6$.
Odpowiedź: $n=1$ lub $n=2$, lub $n=5$.

2. Oznaczmy: $a=\sqrt{1998}+\sqrt{2001}$ i $b=\sqrt{1999}+\sqrt{2000}$.

Mamy $\quad a^2=1998+2\sqrt{1998}\cdot\sqrt{2001}+2001,$
czyli $\quad a^2=3999+2\sqrt{1998\cdot 2001},$
oraz $\quad b^2=1999+2\sqrt{1999}\cdot\sqrt{2000}+2000,$
czyli $\quad b^2=3999+2\sqrt{1999\cdot 2000}.$

Wystarczy teraz porównać liczby $1998\cdot 2001$ i $1999\cdot 2000$.
Łatwo stwierdzamy, że $1998\cdot 2001<1999\cdot 2000$.
Zatem $a^2<b^2$ i w konsekwencji $a<b$.

3. Załóżmy, że $x \le y \le z \le t$.
Po podzieleniu przez $xyzt$ obu stron równania otrzymujemy

$$(\bigstar)\ 1=\frac{1}{yzt}+\frac{1}{xzt}+\frac{1}{xyt}+\frac{1}{xyz}.$$

Gdyby $x \ge 2$, to $y \ge 2$, $z \ge 2$ i $t \ge 2$.

Wówczas $\frac{1}{yzt}+\frac{1}{xzt}+\frac{1}{xyt}+\frac{1}{xyz}\le\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$, wbrew równaniu. Zatem $x=1$.

Równanie (★) przyjmuje teraz postać $1=\frac{1}{yzt}+\frac{1}{zt}+\frac{1}{yt}+\frac{1}{yz}$.

Gdyby $y\ge 2$, to $z\ge 2$ i $t\ge 2$.

Wówczas $\frac{1}{yzt}+\frac{1}{zt}+\frac{1}{yt}+\frac{1}{yz}\le\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$, wbrew równaniu. Zatem $y=1$.

Wiedząc, że $x=1$ i $y=1$, równanie wyjściowe możemy zapisać w postaci

$$zt=z+t+2,$$

czyli $zt-z-t+1=3$,

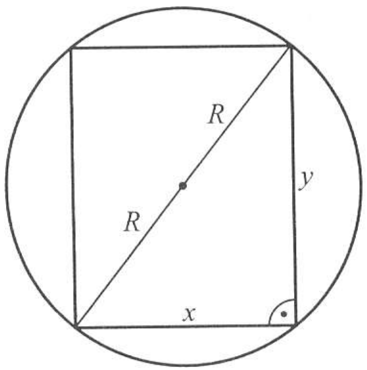
$$(z-1)(t-1)=3,$$

skąd $z-1=1$ i $t-1=3$, a więc $z=2$ i $t=4$.

Wobec tego mamy rozwiązanie $(x,\ y,\ z,\ t)=(1,1,2,4)$.

Pozostałe rozwiązania to: $(1,1,4,2)$, $(1,2,1,4)$, $(1,4,1,2)$, $(1,2,4,1)$, $(1,4,2,1)$, $(2,1,1,4)$, $(4,1,1,2)$, $(2,4,1,1)$, $(4,2,1,1)$, $(2,1,4,1)$, $(4,1,2,1)$.

4. Niech x i y będą długościami boków prostokąta wpisanego w okrąg o promieniu R.



Z rysunku mamy $x^2+y^2=(2R)^2$.

Oczywiście $(x-y)^2\ge 0$, skąd

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2},\ \text{czyli}\ xy\le 2R^2.$$

Zatem pole xy będzie największe wtedy, gdy $xy=2R^2$, czyli wtedy, gdy $x=y$ (prostokąt jest wtedy kwadratem).

Odpowiedź: $2R^2$.

5. Wystarczy sprawdzić, czy długość najdłuższego boku jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.

Mamy

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}+\left(\frac{3}{2}\right)^{1999}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}\left(1+\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}\cdot\frac{5}{2}>\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}\cdot\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2000}$$

Odpowiedź: Trójkąt można zbudować.

X

1. Załóżmy, że $AABB=m^2$, gdzie m jest liczbą naturalną.

Mamy $11(100A+B)=m^2$, skąd wynika, że liczba m jest podzielna przez 11: $m=11l$, gdzie $l\in N$.

$$11(100A+B)=121l^2,$$
$$100A+B=11l^2,$$
$$11\cdot 9\cdot A+(A+B)=11l^2.$$

Wobec tego liczba $A+B$ jest podzielna przez 11.

Zatem ($A=2$ i $B=9$) lub ($A=3$ i $B=8$), lub ($A=4$ i $B=7$), lub ($A=5$ i $B=6$), lub ($A=6$ i $B=5$), lub ($A=7$ i $B=4$), lub ($A=8$ i $B=3$), lub ($A=9$ i $B=2$).

Ponieważ cyfrą jedności liczby będącej kwadratem liczby naturalnej może być 0, 1, 4, 5, 6 lub 9, więc przypadki, w których $B=8$, $B=7$, $B=3$ i $B=2$ należy odrzucić.

Może być

($A=2$ i $B=9$) lub ($A=5$ i $B=6$), lub ($A=7$ i $B=4$).

Sprawdzamy, czy liczby 2299, 5566 lub 7744 są kwadratami liczb naturalnych.

Okazuje się, że tylko liczba 7744 jest kwadratem: $7744=88^2$.

2. Mamy kolejno:

$$|(x-1)(x-4)|=|(x-2)(x-3)|,$$
$$|x^2-5x+4|=|x^2-5x+6|,$$

$x^2-5x+4=x^2-5x+6$ lub $x^2-5x+4=-(x^2-5x+6)$,

$4=6$ lub $2x^2-10x+10=0$,

równanie sprzeczne,

$$4x^2-20x+20=0,$$
$$4x^2-20x+25=5,$$
$$(2x-5)^2=5,$$

$2x-5=\sqrt{5}$ lub $2x-5=-\sqrt{5}$,

$x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ lub $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

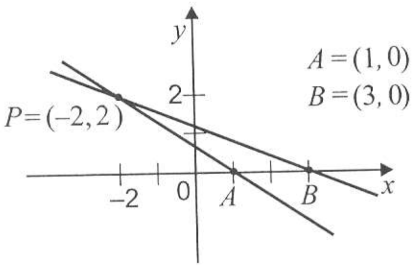
3. Zauważmy, że $f(-2)=(m-1)(-2)+2m=2$.
Zatem wszystkie rozważane wykresy przechodzą przez punkt $P(-2, 2)$.
Wyznaczymy równania prostych przechodzących przez punkty P i A oraz P i B.

1° $f(1)=0$; $(m-1)\cdot 1+2m=0$, skąd $m=\frac{1}{3}$.

2° $f(3)=0$; $(m-1)\cdot 3+2m=0$, skąd $m=\frac{3}{5}$.

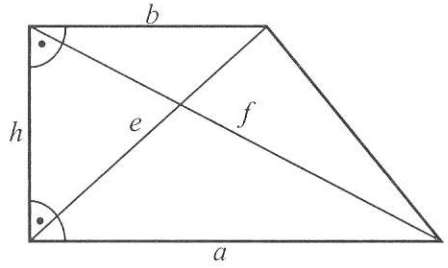
Aby wykres funkcji $f(x)=(m-1)x+2m$ przechodził przez odcinek AB, współczynnik m musi spełniać nierówności $\frac{1}{3}\le m\le\frac{3}{5}$.

(*Uzasadnij dlaczego*?)



4. e, f — przekątne.
Pole trapezu wynosi

$$S=\frac{a+b}{2}h.$$



Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$a^2+h^2=f^2 \text{ i } b^2+h^2=e^2.$$

Ponieważ

$$(a-h)^2\ge 0 \quad \text{i} \quad (b-h)^2\ge 0,$$

to $a^2+h^2\ge 2ah$ i $b^2+h^2\ge 2bh$,

czyli $f^2\ge 2ah$ i $e^2\ge 2bh$.

Po dodaniu stronami powyższych nierówności otrzymujemy

$$f^2+e^2\ge 2ah+2bh,$$

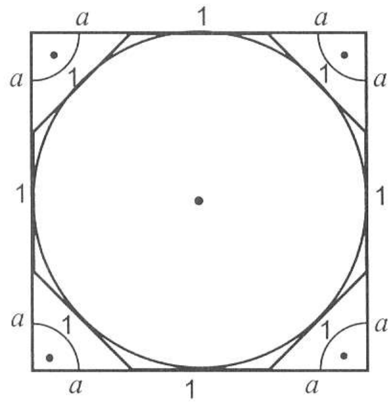
czyli $f^2+e^2\ge 2(a+b)h$,

skąd $\frac{a+b}{2}h\le\frac{1}{4}(e^2+f^2)$,

czyli $S\le\frac{1}{4}(e^2+f^2)$.

To mieliśmy udowodnić.

5. Wpiszmy rozważany ośmiokąt foremny w kwadrat, jak na rysunku. Bok rozważanego kwadratu wynosi $2a+1$, gdzie a spełnia równanie $a^2+a^2=1^2$, skąd $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Wobec tego bok kwadratu jest równy $\sqrt{2}+1$, a promień wpisanego koła $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$.



Zatem pole wpisanego koła wynosi

$$\pi\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\right)^2=\frac{\pi}{4}(3+2\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2.$$

XI

1. Załóżmy, że $m^2+m+4=k_1^2$, gdzie k_1 jest liczbą całkowitą. Wówczas mamy kolejno

$4m^2+4m+16=k^2$, $\qquad$ gdzie $k=2k_1$
$(4m^2+4m+1)+15=k^2$,
$(2m+1)^2+15=k^2$,
$k^2-(2m+1)^2=15$,
$(k-(2m+1))(k+(2m+1))=15$.

Stąd otrzymujemy

$$\begin{cases} k-(2m+1)=1 \\ k+(2m+1)=15 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=15 \\ k+2m+1=1, \end{cases}$$

$$\text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=3 \\ k+(2m+1)=5, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=5 \\ k+(2m+1)=3, \end{cases}$$

$$\text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=-1 \\ k+(2m+1)=-15, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=-15 \\ k+(2m+1)=-1, \end{cases}$$

$$\text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=-3 \\ k+(2m+1)=-5, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k-(2m+1)=-5 \\ k+(2m+1)=-3. \end{cases}$$

$$\text{Stąd} \quad \begin{cases} k=8 \\ m=3 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k=8 \\ m=-4, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k=4 \\ m=0, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k=4 \\ m=-1, \end{cases}$$

$$\text{lub} \quad \begin{cases} k=-8 \\ m=-4, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k=-8 \\ m=3, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k=-4 \\ m=-1, \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} k=-4 \\ m=0. \end{cases}$$

Odpowiedź: $m=3$ lub $m=-4$, lub $m=0$, lub $m=-1$.

2. Mamy kolejno

$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2=2ab+2bc+2cd+2da$,
$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+$
$+(c^2-2cd+d^2)+(d^2-2da+a^2)=0$,
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$.

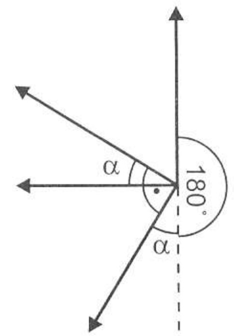
Wobec tego $a-b=0$, $b-c=0$, $c-d=0$ i $d-a=0$, czyli $a=b=c=d$.

3. Oznaczmy: u — prędkość dużej wskazówki w stopniach na minutę, v — prędkość małej wskazówki w stopniach na minutę.

Mamy $u=\dfrac{360°}{60\text{ min}}=6\,°/\text{min}$ i $v=\dfrac{360°}{12\text{ godz}}=\dfrac{360°}{720\text{ min}}=\dfrac{1}{2}\,°/\text{min}$.

Nietrudno zauważyć, że duża i mała wskazówka następnym razem utworzą kąt prosty kilka minut po wpół do dziesiątej.

Niech t będzie liczbą minut, która upłynie od dziewiątej do tej właśnie godziny. Wówczas duża wskazówka przesunie się o kąt $6t°$, a mała o kąt $\frac{1}{2}t°$.



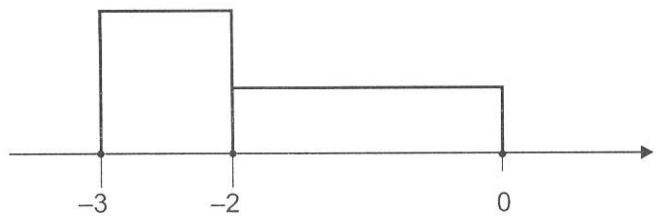
Z rysunku mamy: $\alpha=\frac{1}{2}t°$ i $180°+\alpha=6t°$. Stąd $180°+\frac{1}{2}t°=6t°$. Zatem $t=32\frac{8}{11}$.

Odpowiedź: O godzinie dziewiątej i $32\frac{8}{11}$ minuty.

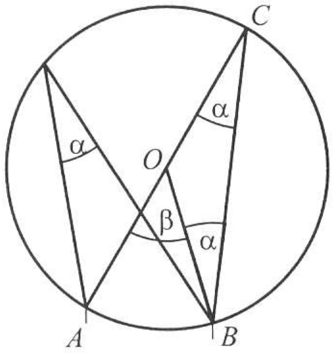
4. Z równań $2x_1+a=0$ i $x_2+a+2=0$ wyznaczamy miejsca zerowe: $x_1=\frac{-a}{2}$ i $x_2=-a-2$.

Zgodnie z warunkami zadania mamy $0\le x_1\le 1$ i $0\le x_2\le 1$, czyli $0\le\frac{-a}{2}\le 1$ i $0\le -a-2\le 1$, skąd $0\ge a\ge -2$ i $-2\ge a\ge -3$.

Odpowiedź: $a=-2$.



5. Skorzystamy z faktu, że dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Trójkąt BCO jest równoramienny. Zatem $\angle OBC = \alpha$.
Kąt $\angle COB$ wynosi $180° - \beta$.
Suma kątów trójkąta BCO spełnia równanie: $\alpha + \alpha + (180° - \beta) = 180°$, skąd $\beta = 2\alpha$.
A to mieliśmy udowodnić.



XII

1. Mamy

$$n^2 + 2n - 3 = (n^2 - n) + (3n - 3) = n(n-1) + 3(n-1) =$$
$$= (n-1)(n+3).$$

Zatem rozważana liczba będzie pierwsza wtedy, gdy $n - 1 = 1$ i liczba $n + 3$ będzie pierwsza.
Stąd $n = 2$ i liczba $n + 3 = 5$ jest pierwsza.

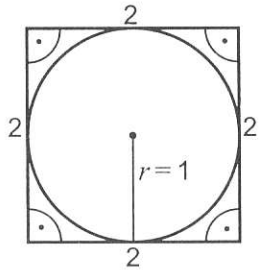
2. Mamy

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 = (a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 =$$
$$= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 - 9 =$$
$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 6 =$$
$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) =$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ba} + \frac{a^2 + c^2 - 2ca}{ca} + \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{cb} =$$
$$= \frac{(a-b)^2}{ba} + \frac{(a-c)^2}{ca} + \frac{(b-c)^2}{cb} \ge 0.$$

3. Niech $f(x) = ax + b$.
Wówczas

$$a(x+1) + b + a(x-1) + b = ax + b + 2x, \text{ skąd}$$
$$(a + a - a - 2)x + (a + b - a + b - b) = 0, \text{ czyli}$$
$$(a-2)x + b = 0$$

dla $x \in \boldsymbol{R}$.
Zatem $a - 2 = 0$ i $b = 0$.
Odpowiedź: $f(x) = 2x$.

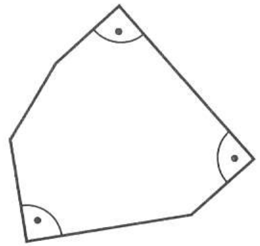


4. W kwadrat o boku 2 wpisujemy koło. Pole kwadratu wynosi 4, a pole koła π. Ponieważ pole kwadratu jest większe, to $\pi < 4$.

5. Suma kątów wewnętrznych sześciokąta wypukłego wynosi $4 \cdot 180° = 720°$. Zatem sześciokąt wypukły nie może mieć wszystkich kątów prostych, bo $6 \cdot 90° = 540° < 720°$.
Niech k oznacza liczbę kątów prostych; $6 - k$ jest wówczas liczbą kątów nieprostych. Ponieważ sześciokąt jest wypukły, kąty nieproste mają miarę mniejszą od $180°$.
Wobec tego

$$k \cdot 90° + (6-k) \cdot 180° > 720°, \text{ skąd}$$
$$k < 4, \text{ czyli } k \le 3.$$

Sześciokąt wypukły o trzech kątach prostych przedstawia rysunek.



XIII

1. Wykażemy najpierw, że iloczyn dwóch liczb naturalnych kończących się w zapisie na 0625 kończy się również na 0625.
Niech więc

$$A_1 = 10000K_1 + 625 \text{ i } A_2 = 10000K_2 + 625,$$

gdzie $K_1, K_2 \ge 0$ są liczbami całkowitymi.

Mamy

$$A_1 A_2 = (10000K_1 + 625)\cdot(10000K_2 + 625) =$$
$$= 100000000K_1K_2 + 6250000K_1 + 6250000K_2 + 390625 =$$
$$= 10000\cdot(10000K_1K_2 + 625K_1 + 625K_2 + 39) + 625,$$

co oznacza, że liczba A_1A_2 kończy się na 0625.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Mamy $5^{1024} = (5^8)^{128} = (390625)^{128}$.

Ponieważ liczba 390625 kończy się na 0625, to na podstawie udowodnionej własności iloczyn $\underbrace{390625\cdot390625\cdot\ldots\cdot390625}_{128\text{ czynników}}$ kończy się na 0625.

2. Mamy

$$ABCD + BCDA + CDAB + DABC = 1111(A+B+C+D) =$$
$$= 11\cdot101\cdot(A+B+C+D).$$

Gdyby rozważana liczba była kwadratem liczby naturalnej, to z uwagi na to, że jest podzielna przez liczbę pierwszą 101, musiałaby być podzielna przez 101^2.

W konsekwencji liczba $A+B+C+D$ powinna być podzielna przez 101, co jest niemożliwe, gdyż $4 \le A+B+C+D \le 36$.

3. Mamy kolejno

$$\frac{2x-1}{x}\cdot\frac{2y-1}{y} = 3,$$
$$(2x-1)(2y-1) = 3xy,$$
$$4xy - 2x - 2y + 1 = 3xy,$$
$$xy - 2x - 2y + 1 = 0,$$
$$xy - 2x - 2y + 4 = 3,$$
$$(x-2)(y-2) = 3.$$

Stąd $\begin{cases} x-2=1 \\ y-2=3, \end{cases}$ lub $\begin{cases} x-2=3 \\ y-2=1, \end{cases}$

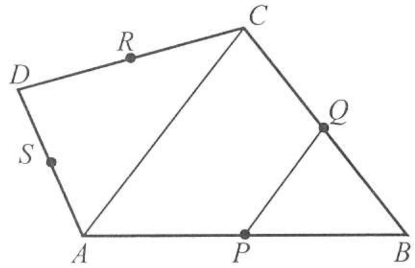
lub $\begin{cases} x-2=-1 \\ y-2=-3, \end{cases}$ lub $\begin{cases} x-2=-3 \\ y-2=-1. \end{cases}$

Odpowiedź: $(x, y) \in \{(3, 5), (5, 3), (1, -1), (-1, 1)\}$.

4. Niech x oznacza liczbę lat osoby A. Suma liczby lat grupy dziesięciu osób wynosić będzie $9\cdot16 + x$.

Mamy więc równanie $\frac{9\cdot16+x}{10} = 15$, skąd $x = 6$.

5. P, Q, R, S — środki boków czworokąta $ABCD$.



Mamy $\frac{|AP|}{|BP|} = 1 = \frac{|CQ|}{|BQ|}$.

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $AC \parallel PQ$.

Wobec tego trójkąty PBQ i ABC są podobne i skala tego podobieństwa wynosi 2.

Wiemy więc, że $PQ \parallel AC$ i $|PQ| = \frac{1}{2}|AC|$. Analogicznie stwierdzamy, że $RS \parallel AC$ i $|RS| = \frac{1}{2}|AC|$. Wobec tego mamy $PQ \parallel RS$ i $|PQ| = |RS|$. Analogicznie dowodzimy, że $SP \parallel RQ$ i $|SP| = |RQ|$. Wobec tego czworokąt $PQRS$ jest rzeczywiście równoległobokiem.

XIV

1. Niech $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ będą czterema kolejnymi liczbami całkowitymi. Mamy

$$((m-1)(m+2))(m(m+1)) + 1 =$$
$$= (m^2 + 2m - m + 2)(m^2 + m) + 1 =$$
$$= ((m^2 + m) + 2)(m^2 + m) + 1 =$$
$$= (m^2 + m)^2 + 2(m^2 + m) + 1 = \left((m^2 + m) + 1\right)^2.$$

2. Oznaczmy $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$ i $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$.

Ponieważ $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \ldots, \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$, to:

(1) $A < B$.

Mamy

(2) $AB = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 100\cdot 101} = \dfrac{1}{101}$

Z (1) i (2) wynika, że $A^2 = A\cdot A < A\cdot B = \dfrac{1}{101} < \dfrac{1}{100}$.

Zatem $A^2 < \dfrac{1}{100}$, czyli $A < \dfrac{1}{10}$, a to mieliśmy wykazać.

3. Niech $m = [x]$.
Wówczas liczba m jest całkowita oraz $m \le x < m+1$.
Ponadto

$m = \dfrac{9}{10}x + 1$, skąd $x = \dfrac{10}{9}(m-1)$.

Wobec tego

$m \le \dfrac{10}{9}(m-1) < m+1$, czyli

$9m \le 10m - 10 < 9m + 9$, skąd

$10 \le m < 19$.

Ponieważ liczba m jest całkowita, więc

$m \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 18\}$.

Ponieważ $x = \dfrac{10}{9}(m-1)$, to

$$x \in \left\{10, 11\tfrac{1}{9}, 12\tfrac{2}{9}, 13\tfrac{3}{9}, 14\tfrac{4}{9}, 15\tfrac{5}{9}, 16\tfrac{6}{9}, 17\tfrac{7}{9}, 18\tfrac{8}{9}\right\}.$$

Sprawdzenie, że powyższe liczby spełniają dane równanie pozostawiamy Czytelnikowi.

4. Obliczamy kolejno

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{(1-x)-1} = \frac{1-x}{-x},$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1-\frac{1-x}{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x+1-x} = x.$$

Zatem $f(f(f(1999))) = 1999$.

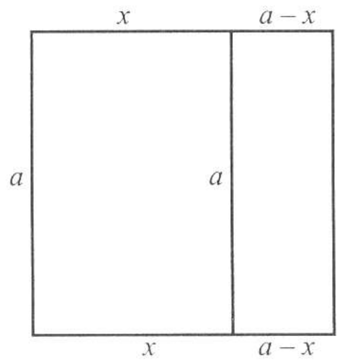
5. Zgodnie z warunkami zadania mamy równanie

$\dfrac{2x+2a}{2(a-x)+2a} = \dfrac{5}{4}$, skąd $x = \dfrac{2}{3}a$.

Pola rozważanych prostokątów wynoszą odpowiednio:

$a\cdot\dfrac{2}{3}a = \dfrac{2a^2}{3}$ i $a\cdot\dfrac{1}{3}a = \dfrac{a^2}{3}$,

a więc ich stosunek jest równy 2 : 1.



XV

1. Mamy nierówność $5^3 = 125 < 128 = 2^7$. Stąd kolejno wynika, że
$5^7\cdot 5^3 < 5^7\cdot 2^7$, $5^{10} < 10^7$, $(5^{10})^{10} < (10^7)^{10}$, $5^{100} < 10^{70}$.
Zatem rzeczywiście liczba 5^{100} ma nie więcej niż 70 cyfr.

2. Mamy

$AABBCC = 11\cdot(10000A + 100B + C) =$
$= 11\cdot(9999A + 99B + A + B + C) =$
$= 11\cdot(11(909A + 9B) + A + B + C) =$
$= 121\cdot(909A + 9B) + 11(A + B + C)$.

Zatem 121 dzieli $AABBCC$ wtedy, gdy 121 dzieli $11(A+B+C)$, czyli gdy 11 dzieli $A+B+C$.

3. Niech c oznacza początkową cenę towaru.
I podwyżka: $1{,}06\cdot(1{,}04c) = 1{,}1024c$.
II podwyżka: $1{,}05\cdot(1{,}05c) = 1{,}1025c$.
Zatem II wariant podwyżki daje cenę końcową większą o 0,01% niż wariant I.

4. Liczba $x_0 = 3$ spełnia dane równanie.
Pokażemy, że innych rozwiązań nie ma. W tym celu załóżmy, że $x_1 \ne 3$ i $x_1 = \sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}$.

Wykażemy, że jest to niemożliwe.

Mamy kolejno

$$x_1 - x_0 = \sqrt{6+\sqrt{6+x_1}} - \sqrt{6+\sqrt{6+x_0}},$$

$$x_1 - x_0 = \frac{(6+\sqrt{6+x_1})-(6+\sqrt{6+x_0})}{\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+\sqrt{6+\sqrt{6+x_0}}},$$

$$x_1 - x_0 = \frac{\sqrt{6+x_1}-\sqrt{6+x_0}}{\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+\sqrt{6+\sqrt{6+x_0}}},$$

$$x_1 - x_0 = \frac{(6+x_1)-(6+x_0)}{(\sqrt{6+x_1}+\sqrt{6+x_0})\left(\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+\sqrt{6+\sqrt{6+x_0}}\right)},$$

$$x_1 - x_0 = \frac{x_1-x_0}{(\sqrt{6+x_1}+\sqrt{6+x_0})\left(\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+\sqrt{6+\sqrt{6+x_0}}\right)} \quad /:(x_1-x_0),$$

$$1 = \frac{1}{(\sqrt{6+x_1}+\sqrt{6+x_0})\left(\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+\sqrt{6+\sqrt{6+x_0}}\right)},$$

$$(\sqrt{6+x_1}+\sqrt{6+x_0})\left(\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+\sqrt{6+\sqrt{6+x_0}}\right)=1$$

$$(\sqrt{6+x_1}+3)\left(\sqrt{6+\sqrt{6+x_1}}+3\right)=1$$

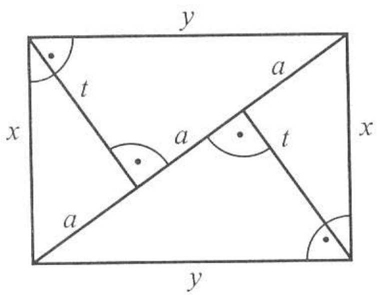
co jest niemożliwe, gdyż oba czynniki powyższego iloczynu są większe od 3.

5. Zastosujemy trzy razy twierdzenie Pitagorasa:

$a^2+t^2=x^2,$

$(2a)^2+t^2=y^2,$

$x^2+y^2=(3a)^2.$



Z dwóch pierwszych równań mamy

$$((2a)^2+t^2)-(a^2+t^2)=y^2-x^2, \text{ czyli } 3a^2=y^2-x^2.$$

Biorąc pod uwagę trzecie równanie, otrzymujemy $x^2=3a^2$ i $y^2=6a^2$. Stąd $\frac{y^2}{x^2}=2$, czyli $\frac{y}{x}=\sqrt{2}$.

XVI

1. Mamy $2525252525=25\cdot 101010101$.

Gdyby liczba 2525252525 była kwadratem liczby naturalnej, to liczba 101010101 też byłaby kwadratem liczby naturalnej.

Pokażemy, że jest to niemożliwe. Załóżmy, że tak nie jest, czyli $101010101=m^2$ dla pewnej liczby naturalnej m. Wówczas liczba m jest nieparzysta: $2k+1$, gdzie $k\in N$.

Możemy więc zapisać, że $101010101=(2k+1)^2$, $101010101=4k^2+4k+1$, $101010100=4k(k+1)$, co jest niemożliwe, gdyż liczba $4k(k+1)$ jest podzielna przez 8 (jedna z liczb k lub $k+1$ jest parzysta), natomiast liczba 101010100 nie jest podzielna przez 8. (*Dlaczego*?)

2. Załóżmy, że $n<2$. Wówczas

$$2-n>0 \text{ i } 3^n+4^n=\frac{3^2}{3^{2-n}}+\frac{4^2}{4^{2-n}}>\frac{3^2}{5^{2-n}}+\frac{4^2}{5^{2-n}}=$$

$$=\frac{3^2+4^2}{5^{2-n}}=\frac{25}{5^{2-n}}=5^n.$$

Załóżmy, że $n>2$. Wówczas

$n-2>0$

i $3^n+4^n=3^2\cdot 3^{n-2}+4^2\cdot 4^{n-2}<3^2\cdot 5^{n-2}+4^2\cdot 5^{n-2}=25\cdot 5^{n-2}=5^n$.

Zatem istotnie $n=2$.

3. Udowodnimy najpierw, że

(✶) $|x|+|y|\geq|x+y|$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

Załóżmy, że $|x|+|y|<|x+y|$ dla pewnych x i y.

Wówczas

$$(|x|+|y|)^2 < |x+y|^2$$
$$|x|^2+2|x||y|+|y|^2 < (x+y)^2,$$
$$x^2+2|xy|+y^2 < x^2+2xy+y^2,$$
$$2|xy| < 2xy, \quad |xy| < xy,$$

co jest niemożliwe, bo $|c| \geq c$ dla dowolnego $c \in \boldsymbol{R}$.

Połóżmy teraz w nierówności (★) $x = a+b$ i $y = a-b$.

Mamy wtedy

(★★) $|a+b|+|a-b| \geq |2a|$.

Połóżmy z kolei $x = a+b$ i $y = b-a$. Mamy wówczas

(★★★) $|a+b|+|b-a| \geq |2b|$.

Dodajemy stronami nierówności (★★) i (★★★):

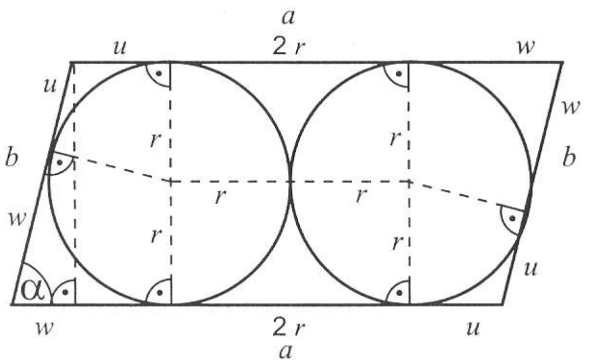
$$|a+b|+|a-b|+|a+b|+|b-a| \geq |2a|+|2b|$$

czyli $2|a+b|+2|a-b| \geq 2|a|+2|b|$.

Po podzieleniu przez 2 otrzymujemy żądaną nierówność.

4. Niech c oznacza cenę początkową towaru.
I obniżka: $0{,}94 \cdot (0{,}96c) = 0{,}9024c$.
II obniżka: $0{,}95 \cdot (0{,}95c) = 0{,}9025c$.
Zatem I wariant daje większą obniżkę niż wariant II — o 0,01%.

5. Mamy $a = u+2r+w$ i $b = u+w$. Stąd $a-b = 2r$.
Ponadto $\sin\alpha = \frac{2r}{b}$, wobec tego $\sin\alpha = \frac{a-b}{b}$.



XVII

1. Mamy $ABABABAB = 1010101 \cdot AB = 101 \cdot 10001 \cdot AB$.

2. Oznaczmy $x = \sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}$.

Mamy kolejno

$$x^2 = 9+\sqrt{80} - 2\sqrt{9+\sqrt{80}}\sqrt{9-\sqrt{80}} + 9 - \sqrt{80},$$
$$x^2 = 18 - 2\sqrt{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})},$$
$$x^2 = 18 - 2\sqrt{81-80},$$
$$x^2 = 18 - 2\sqrt{1},$$
$$x^2 = 16,$$

skąd $x = -4$ lub $x = 4$.
Ponieważ $x > 0$, więc $x = 4$.

3. Przekształcamy podaną równość:

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} = 1,$$
$$1 + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + 1 + \frac{a+b}{c} + 1 = 1,$$
$$\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} + 2 = 0 \; / \cdot abc,$$
$$bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b) + 2abc = 0,$$
$$bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b+2c) = 0,$$
$$bc(b+c) + ac(a+c) + ab((a+c)+(b+c)) = 0,$$
$$(b+c)(bc+ab) + (a+c)(ac+ab) = 0,$$
$$(b+c)b(c+a) + (a+c)a(c+b) = 0,$$
$$(b+c)(c+a)(b+a) = 0.$$

Wobec tego $b+c=0$ lub $c+a=0$, lub $b+a=0$,
czyli $b=-c$ lub $c=-a$, lub $b=-a$.
Niech np. $b=-c$ (w pozostałych dwóch przypadkach dalsze przekształcenia wyglądają podobnie).

Mamy $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(-c)^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}-\frac{1}{c^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}$

oraz $\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{a^3+(-c)^3+c^3}=\frac{1}{a^3-c^3+c^3}=\frac{1}{a^3}$,

a więc stąd wynika żądana równość.

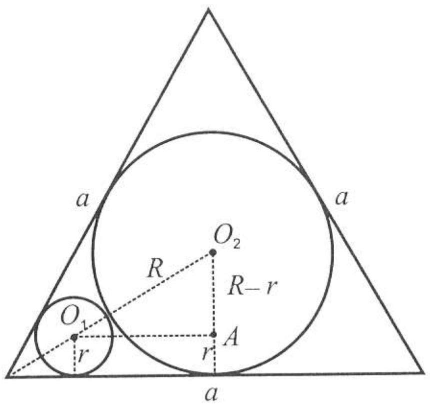
4. Każdemu z uczestników kongresu wręczamy karteczki z literami A, N, F lub R, oznaczające, jakim językiem włada. Łącznie rozdaliśmy $90+75+70+66=301$ karteczek. Gdyby każdy z matematyków władał nie więcej niż trzema językami, to wszystkich karteczek byłoby nie więcej niż $100\cdot 3=300$, co jest niezgodne z faktem, że karteczek jest 301.
Zatem co najmniej jeden z uczestników włada czterema językami.

5. R — promień dużego koła,
r — promień małego koła.
Ponieważ
$\angle O_2O_1A=30°$
(*dlaczego?*), to

$\frac{R-r}{R+r}=\sin 30°$, czyli

$\frac{R-r}{R+r}=\frac{1}{2}$, skąd

$r=\frac{1}{3}R$.



Ponieważ

$R=\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (h — wysokość trójkąta równobocznego), więc

$r=\frac{a\sqrt{3}}{18}$.

Odpowiedź: $\frac{\pi a^2}{108}$.

XVIII

1. Jeżeli $p=2$, to $p+12=14$, $p+24=26$, $p+36=38$, $p+48=50$ i są to liczby złożone.
Jeżeli $p=3$, to $p+12=15$, $p+24=27$, $p+36=39$, $p+48=51$ i są to liczby złożone.
Jeżeli $p=5$, to $p+12=17$, $p+24=29$, $p+36=41$, $p+48=53$ i są to liczby pierwsze.
Załóżmy dalej, że $p>5$. Wówczas p jest liczbą postaci $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ lub $5k+4$, gdzie k jest liczbą naturalną.
Jeżeli $p=5k+1$, to $p+24=5k+25=5(k+5)$ i jest to liczba złożona.
Jeżeli $p=5k+2$, to $p+48=5k+50=5(k+10)$ i jest to liczba złożona.
Jeżeli $p=5k+3$, to $p+12=5k+15=5(k+3)$ i jest to liczba złożona.
Jeżeli $p=5k+4$, to $p+36=5k+40=5(k+8)$ i jest to liczba złożona.
Odpowiedź: $p=5$.

2. Jeżeli $x\geq 1$, to mamy równanie $x-1+3x=x^2+2$, skąd

$x^2-4x+3=0$,
$x^2-3x-x+3=0$,
$x(x-3)-1(x-3)=0$,
$(x-3)(x-1)=0$.

Stąd $x-3=0$ lub $x-1=0$, czyli $x=3$ lub $x=1$. Obie liczby spełniają założenie $x\geq 1$.
Jeżeli $x<1$, to mamy równanie $-(x-1)+3x=x^2+2$, skąd

$x^2-2x+1=0$,
$(x-1)^2=0$,
$x-1=0$,
$x=1$.

Liczba 1 nie spełnia założenia $x<1$.
Odpowiedź: $x=3$ lub $x=1$.

3. $ab + ca^2 + cb^2 + abc^2 = 4abc,$

$ab(1 + c^2 - 2c) + c(a^2 + b^2 - 2ab) = 0,$

$ab(c-1)^2 + c(a-b)^2 = 0.$

Ponieważ $a, b, c > 0$, więc powyższa równość zachodzi tylko wtedy, gdy $c - 1 = 0$ i $a - b = 0$, czyli $c = 1$ i $a = b$.

4. Niech A będzie wybraną osobą spośród 100 osób.
Niech z sali wyjdą wszystkie osoby nie znające osoby A. Wówczas pozostanie co najmniej 68 osób. Niech B będzie wybraną osobą spośród tych 68 osób. Niech teraz z sali wyjdą wszystkie osoby nie znające osoby B. Wtedy pozostanie co najmniej $68 - 32 = 36$ osób. Niech C będzie wybraną osoba spośród tych 36 osób. Niech teraz z sali wyjdą wszystkie osoby nie znające osoby C. Wówczas pozostaną co najmniej 4 osoby. Na pewno wśród tych 4 osób będą osoby A, B, C oraz pewna osoba D. Wówczas czwórka osób A, B, C, D stanowi rozwiązanie zadania, gdyż A zna B, C i D, B zna C i D oraz C zna D.

5. Mamy $b^2 + b^2 = a^2$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$ i $r = \frac{a+2b}{2}$.

Z równań tych kolejno mamy

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ r = \frac{1+\sqrt{2}}{2}a,$

$a = 2(\sqrt{2}-1)r,$

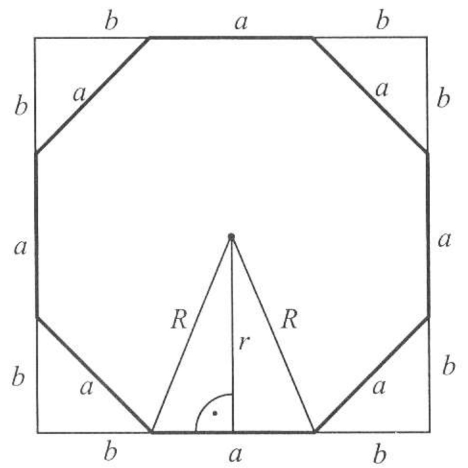
$((\sqrt{2}-1)r)^2 + r^2 = R^2,$

$(2 - 2\sqrt{2} + 1)r^2 + r^2 = R^2,$

$(4 - 2\sqrt{2})r^2 = R^2,$

$\frac{R^2}{r^2} = 4 - 2\sqrt{2},$

$\frac{R}{r} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$



XIX

1. Oznaczmy $m = 10^{101}$. Rozważmy reszty z dzielenia liczb $3^1, 3^2, \ldots, 3^m$ przez m. Należą one do zbioru $\{1, 2, \ldots, m-1\}$. Ponieważ możliwych reszt jest co najwyżej $m - 1$, więc pewne dwie spośród m liczb $3^1, 3^2, \ldots, 3^m$ dają przy dzieleniu przez m tę samą resztę. Niech będą to liczby 3^i i 3^j, gdzie $i < j$.
Mamy więc

$3^i = am + r$ i $3^j = bm + r$,

gdzie $a < b$ są liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że

$3^j - 3^i = (bm + r) - (am + r)$, czyli

$3^i(3^{j-i} - 1) = (b - a)m.$

Ponieważ liczby $m = 10^{101}$ i 3^i są względnie pierwsze, to z powyższej równości wynika, że liczba m jest dzielnikiem liczby $3^{j-i} - 1$. Przyjmijmy $n = j - i$. Wtedy $3^n - 1 = sm$ (s — liczba naturalna). Stąd

$3^n = sm + 1 = s \cdot 10^{101} + 1 = s\underbrace{000\ldots00}_{100\text{ zer}}1.$

2. Wykażemy najpierw, że jeżeli $x, y > 0$, to $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$.

Istotnie

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \ge 0$$

Zatem

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = 8 \cdot \frac{a + \frac{1}{b}}{2} \cdot \frac{b + \frac{1}{c}}{2} \cdot \frac{c + \frac{1}{a}}{2} \ge$$

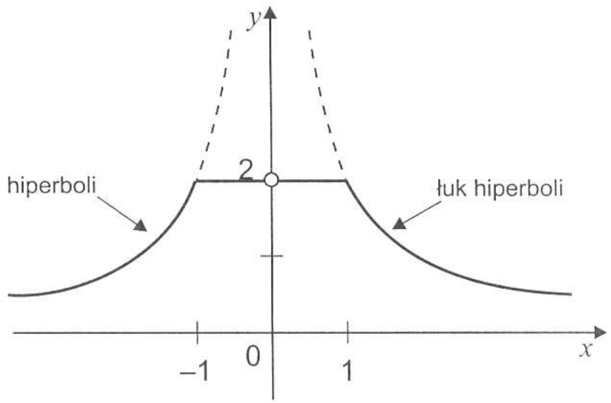
$$\ge 8\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}} \cdot \sqrt{b \cdot \frac{1}{c}} \cdot \sqrt{c \cdot \frac{1}{a}} = 8\sqrt{a \cdot \frac{1}{b} \cdot b\frac{1}{c} \cdot c \cdot \frac{1}{a}} = 8\sqrt{1} = 8.$$

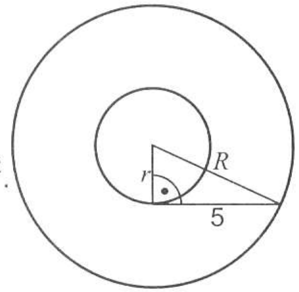
3. Dla $x \in (-\infty, -1)$ mamy $f(x) = \frac{-(x+1)+(x-1)}{x} = \frac{-2}{x}$.

Dla $x \in \langle -1, 1) \setminus \{0\}$ mamy $f(x) = \frac{(x+1)+(x-1)}{x} = \frac{2x}{x} = 2$.

Dla $x \in \langle 1, \infty)$ mamy $f(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{x} = \frac{2}{x}$.

Wykres funkcji f przedstawia rysunek:





4. Poszukiwane pole wynosi:
$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\ \text{cm}^2$.

5. Niech n oznacza liczbę boków rozważanego wielokąta. Z każdego wierzchołka można poprowadzić $n-1$ odcinków do pozostałych wierzchołków. Łączna liczba tych odcinków wynosi więc $\frac{n(n-1)}{2}$ (dzielimy przez 2, gdyż każdy odcinek został policzony dwukrotnie, np. z A do B i z B do A). Ponieważ n z tych odcinków to boki, więc n-kąt wypukły ma $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

Zatem mamy równanie

$\frac{n(n-3)}{2} = 54$, czyli

$n(n-3) = 108$,

$n(n-3) = 12 \cdot 9$, skąd

$n = 12$.

Suma kątów wewnętrznych n-kąta wynosi $(n-2) \cdot 180°$.
Zatem mamy odpowiedź: $(12-2) \cdot 180° = 1800°$.

XX

1. Rozważmy liczby $1, 11, 11, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{2000\,\text{cyfr}}$.

Reszty z dzielenia tych liczb przez 1999 należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 1998\}$. Ponieważ rozważanych liczb jest 2000, a reszt co najwyżej 1999, to dwie spośród liczb

$1, 11, 11, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{2000\,\text{cyfr}}$

dają przy dzieleniu przez 1999 tę samą resztę.
Niech będą to liczby $\underbrace{11\ldots1}_{i\,\text{cyfr}}$ i $\underbrace{11\ldots1}_{j\,\text{cyfr}}$, gdzie $i < j$.

Mamy więc

$\underbrace{11\ldots1}_{i\,\text{cyfr}} = 1999a + r$ i $\underbrace{11\ldots1}_{j\,\text{cyfr}} = 1999b + r$,

gdzie $a < b$ są liczbami całkowitymi.
Stąd

$\underbrace{11\ldots1}_{j\,\text{cyfr}} - \underbrace{11\ldots1}_{i\,\text{cyfr}} = (1999b + r) - (1999a + r)$, czyli

$\underbrace{11\ldots1}_{j-i\,\text{cyfr}}\underbrace{00\ldots0}_{i\,\text{cyfr}} = 1999(b-a)$,

$\underbrace{11\ldots1}_{j-i\,\text{cyfr}} \cdot 10^i = 1999(b-a)$.

Stąd wynika, że liczba 1999 dzieli liczbę $\underbrace{11\ldots1}_{j-i\,\text{cyfr}}$, a to mieliśmy wykazać.

2. Przekształcamy dane równanie do postaci

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-1\right)^2+2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{a}}-\sqrt[4]{\frac{a}{c}}\right)^2=0.$$

Powyższa równość może zajść jedynie wtedy, gdy

$$\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{c}}=0,\ \sqrt{\frac{c}{a}}-1=0 \text{ i } \sqrt[4]{\frac{c}{a}}-\sqrt[4]{\frac{a}{c}}=0.$$

Wynika stąd, że $a=b=c$.

3. Mamy kolejno:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=3^2,\ x^2-2+\frac{1}{x^2}=9,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=11,\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=11^2,$$

$$x^4+2+\frac{1}{x^4}=121,\ x^4+\frac{1}{x^4}=119,$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)=3\cdot 119,\ x^5+\frac{1}{x^3}-x^3-\frac{1}{x^5}=357,$$

$$(\bigstar)\ x^5-\frac{1}{x^5}=357+x^3-\frac{1}{x^3}.$$

Wyliczymy teraz $x^3-\frac{1}{x^3}$:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=11\cdot 3,$$

$$x^3-x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=33,$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=33+x-\frac{1}{x},$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=33+3$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=36.$$

Stąd i z ($\bigstar$) mamy $x^5-\frac{1}{x^5}=393.$

4. Pole trójkąta równobocznego wynosi $\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}.$

Pole trzech wycinków kołowych jest równe polu półkola o promieniu 6 i wynosi $\frac{1}{2}\pi 6^2=18\pi.$

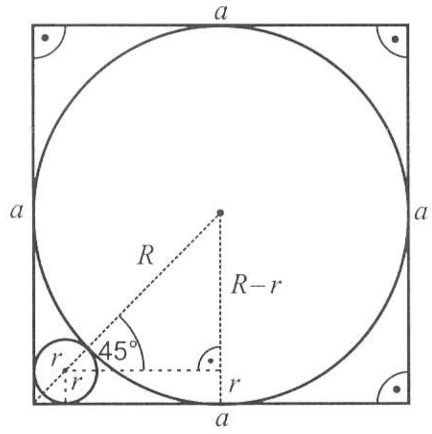
Odpowiedź: $36\sqrt{3}-18\pi\ \text{cm}^2.$

5. R — promień dużego koła,
r — promień małego koła.
Na podstawie rysunku mamy

$$\sin 45^\circ=\frac{R-r}{R+r},\text{ czyli}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{R-r}{R+r},\text{ skąd}$$

$$r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}R=(3-2\sqrt{2})R.$$



Po uwzględnieniu faktu, że

$R=\frac{a}{2}$, otrzymujemy $r=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a.$

Odpowiedź: $\frac{17-12\sqrt{2}}{4}\pi a^2.$

XXI

1. Oznaczmy $A=101010101$. Wówczas

$10A=1010101010.$

Stąd

$A+10A=101010101+1010101010,$

$11A=1111111111,$

$11A=11111\cdot 100001.$

Z ostatniej równości wynika, że liczba $11A$ jest podzielna przez 11111. Ponieważ NWD(11111, 11) = 1 (*dlaczego*?), więc liczba A jest podzielna przez 11111. Zatem liczba A jest rzeczywiście złożona.

2. Zauważmy na początku, że $x < 100$ i $y < 100$. Wykażemy równość $x = y$. Załóżmy, że tak nie jest. Niech na przykład $x < y$. Po podzieleniu obu stron równania przez 2^x otrzymujemy $1 + 2^{y-x} = 2^{100-x}$. Ponieważ $y - x \geq 1$ i $100 - x \geq 1$, więc prawa strona jest parzysta, a lewa nieparzysta. Wobec tego przypuszczenie, że $x \neq y$, okazało się błędne. Zatem $x = y$ i równanie wyjściowe przyjmuje postać:

$$2^x + 2^x = 2^{100},$$
$$2 \cdot 2^x = 2^{100},$$
$$2^{x+1} = 2^{100},$$
$$x + 1 = 100,$$
$$x = 99.$$

Zatem mamy rozwiązanie $(x, y) = (99, 99)$.

3. Niech $f(x) = kx + m$ będzie przepisem funkcji liniowej, którą będziemy rozważać. Mamy kolejno:

$$f(f(x)) = x,$$
$$kf(x) + m = x,$$
$$k(kx + m) + m = x,$$
$$k^2x + (km + m) = x.$$

Skoro równość zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, to $k^2 = 1$ i $km + m = 0$. Stąd $k = 1$ i $m = 0$ lub $k = -1$ i $m \in \boldsymbol{R}$. Wobec tego $f(x) = x$ lub $f(x) = -x + m$.

Ponieważ mamy dodatkowy warunek $f(2) = 1$, więc nie może być $f(x) = x$. W drugim przypadku mamy $1 = -2 + m$, skąd $m = 3$. Zatem $f(x) = -x + 3$.

4. Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną: $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$, gdzie $A, B \geq 0$, mamy

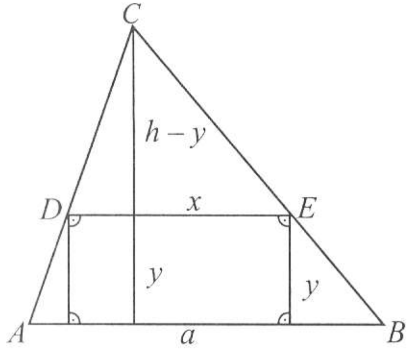
$$\frac{\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m}{2} \geq \sqrt{\left(\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m} = \sqrt{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)^m} =$$

$$= \sqrt{\left(4+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\right)^m} = \sqrt{\left(4+\frac{(b-a)^2}{ab}\right)^m} \geq \sqrt{4^m} = 2^m.$$

Wystarczy teraz pomnożyć przez 2 obie strony nierówności

$$\frac{\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m}{2} \geq 2^m.$$

5. Niech x i y będą bokami wpisanego prostokąta. Z podobieństwa trójkątów DEC i ABC mamy:



$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$
$$x = \frac{a}{h}(h-y).$$

Pole prostokąta wynosi

$$xy = \frac{a}{h}(h-y)\,y.$$

Należy wyznaczyć takie y, aby wyrażenie $(h-y)y$ przyjmowało najwieksza wartość.

Mamy

$$(h-y)y = hy - y^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - hy + y^2\right) =$$

$$= \frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - y\right)^2 \leq \frac{h^2}{4}.$$

Zatem maksymalna wartość wyrażenia $(h-y)y$ jest równa $\frac{h^2}{4}$ i jest osiągalna dla $y = \frac{h}{2}$.

Największe pole prostokąta wpisanego w trójkąt wynosi $\frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right)\frac{h}{2} = \frac{a}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{ah}{4}$ (i jak widać, jest równe połowie pola trójkąta).

XXII

1. Załóżmy, że liczba $2^n + 1$ dla $n \in N$ jest kwadratem liczby naturalnej, a więc nieparzystej $2^n + 1 = (2m+1)^2$, gdzie $m \in N$.
Stąd kolejno otrzymujemy:

$$2^n + 1 = 4m^2 + 4m + 1,$$
$$2^n = 4m(m+1),$$
$$(\bigstar)\ 2^{n-2} = m(m+1).$$

Liczby m i $m+1$ muszą być potęgami dwójki. Ponieważ liczby m i $m+1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc jedyna możliwość to: $m = 2^0 = 1$ i $m+1 = 2^1 = 2$. Wówczas równość ($\bigstar$) przyjmuje postać $2^{n-2} = 1 \cdot 2 = 2^1$, skąd $n-2=1$, czyli $n=3$. Sprawdzamy: $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9 = 3^2$.

2. Załóżmy bez zmniejszania ogólności rozważań, że $x \leq y \leq z$. Mamy oczywiście $x < 100$, $y < 100$, $z < 100$. Przypuśćmy, że $x < y$. Po podzieleniu obu stron równania przez 3^x otrzymujemy

$$(\bigstar)\ 1 + 3^{y-x} + 3^{z-x} = 3^{100-x},$$

co jest możliwe, gdyż prawa strona jest podzielna przez 3, lewa nie.
Zatem $x = y$. Równanie ($\bigstar$) przyjmuje postać:

$$1 + 3^0 + 3^{z-x} = 3^{100-x},$$
$$2 + 3^{z-x} = 3^{100-x}.$$

Gdyby $x < z$, to lewa strona byłaby niepodzielna przez 3, a prawa jest podzielna przez 3. Zatem $z = x$. Stąd mamy:

$$2 + 3^0 = 3^{100-x},$$
$$3 = 3^{100-x}.$$

Zatem $100 - x = 1$, czyli $x = 99$.
Wobec tego mamy rozwiązanie $(x, y, z) = (99, 99, 99)$.

3. Mamy kolejno:

$$
\begin{array}{ccccccc}
& |x-3|-2=1 & & \text{lub} & & |x-3|-2=-1 & \\
& |x-3|=3 & & \text{lub} & & |x-3|=1 & \\
x-3=3 & \text{lub} & x-3=-3 & \text{lub} & x-3=1 & \text{lub} & x-3=-1, \\
x=6 & \text{lub} & x=0 & \text{lub} & x=4 & \text{lub} & x=2.
\end{array}
$$

4. Oczywiście $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Stąd kolejno otrzymujemy:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0,$$
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca,$$
$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$
$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq (a+b+c)^2,$$
$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 6^2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 12.$$

5. Niech x_i i y_i będą bokami prostokąta o przekątnej d_i, P_i polem prostokąta o i-tym numerze. Mamy $d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \geq 2x_i y_i = 2P_i$.
Stąd otrzymujemy:

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \geq 2P_1 + 2P_2 + \ldots + 2P_n =$$
$$= 2(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) = 2P = 2 \cdot \frac{1}{2} d^2 = d^2,$$

gdzie P — pole całego kwadratu.

XXIII

1. Mamy

$$(10A + A) + (10A + A) = 100B + 10B + C,$$
$$22A = 110B + C.$$

Ponieważ 22 dzieli 110, więc dzieli również C. Wobec tego musi być $C = 0$ i w konsekwencji $22A = 110B$, czyli $A = 5B$. Ostatnia równość może zajść jedynie wtedy, gdy $B = 1$ i $A = 5$. (*Dlaczego?*) Mamy więc rozwiązanie $55 + 55 = 110$.

2. Mamy $\underbrace{11\ldots11}_{2n\text{ cyfr}} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2n\text{ cyfr}} = \frac{1}{9}(10^{2n} - 1)$.

Pierwsza nierówność:

$$\sqrt{\frac{1}{9}(10^{2n} - 1)} = \sqrt{\frac{1}{9}(10^n - 1)(10^n + 1)} > \sqrt{\frac{1}{9}(10^n - 1)(10^n - 1)} =$$
$$= \frac{1}{3}(10^n - 1) = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{n\text{ cyfr}} = \underbrace{33\ldots3}_{n\text{ cyfr}}.$$

Druga nierówność:

$$\sqrt{\frac{1}{9}(10^{2n}-1)} = \sqrt{\frac{1}{9}(10^n-1)(10^n+1)} < \sqrt{\frac{1}{9}(10^n+1)(10^n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}(10^n+1) = \frac{1}{3}(\underbrace{99...9}_{n\text{ cyfr}}+2) = \underbrace{33...3}_{n\text{ cyfr}}\frac{2}{3} < \underbrace{33...34}_{n\text{ cyfr}}.$$

3. Mamy równanie:

$(\bigstar)\quad 2f(x)+f(-x)=3x^2+x+3$, dla $x \in \boldsymbol{R}$.

Podstawmy $-x$ zamiast x. Wówczas otrzymamy równanie:

$(\bigstar\bigstar)\ 2f(-x)+f(x)=3x^2-x+3.$

Z równania $(\bigstar)$ wyznaczamy $f(-x)$ i podstawiamy do równania $(\bigstar\bigstar)$:

$$2(3x^2+x+3-2f(x))+f(x)=3x^2-x+3,$$
$$6x^2+2x+6-3f(x)=3x^2-x+3.$$

Stąd $f(x)=x^2+x+1$.

4. Zauważmy, że

$$(3\sin\alpha+4\cos\alpha)^2 \le (3\sin\alpha+4\cos\alpha)^2+(4\sin\alpha-3\cos\alpha)^2 =$$
$$=(9\sin^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+16\cos^2\alpha)+$$
$$+(16\sin^2\alpha-24\sin\alpha\cos\alpha+9\cos^2\alpha)=$$
$$=25\sin^2\alpha+25\cos^2\alpha=25(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=25\cdot 1=25.$$

Stąd $(3\sin\alpha+4\cos\alpha)^2 \le 25$, a więc $3\sin\alpha+4\cos\alpha \le 5$.

5. Oznaczmy przez a i h bok i wysokość rombu. Mamy $ah=4$ i $h \le a$. Zatem $a^2 \ge ah=4$, skąd $a^2 \ge 4$, czyli $a \ge 2$.

XXIV

1. Mamy

$$(10A+A)+(10B+B)=100A+10A+C,$$
$$11B=99A+C.$$

Widać, że C musi być podzielne przez 11. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $C=0$. Zatem $11B=99A$, czyli $B=9A$. Ostatnia równość może zajść jedynie wtedy, gdy $A=1$ i $B=9$. (*Dlaczego*?) Zatem mamy rozwiązanie $11+99=110$.

2. Liczba pierwsza większa od 3 nie jest podzielna przez 2 i przez 3. Zatem $p=6k+1$ lub $p=6k+5$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną. (*Dlaczego*?)

W pierwszym przypadku mamy:

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=6k(6k+2)=12k(3k+1)$$

i jest to liczba podzielna przez 24, gdyż $k(3k+1)$ jest liczbą parzystą. (*Dlaczego*?)

W drugim przypadku mamy:

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=(6k+4)(6k+6)=12(3k+2)(k+1)$$

i jest to liczba podzielna przez 24, gdyż $(3k+2)(k+1)$ jest liczbą parzystą. (*Dlaczego*?)

3. Mnożymy obie strony równania przez xy, otrzymując:

$$y+x+1=xy.$$

Stąd kolejno otrzymujemy:

$$xy-x-y=1,$$
$$xy-x-y+1=2,$$
$$(x-1)(y-1)=2.$$

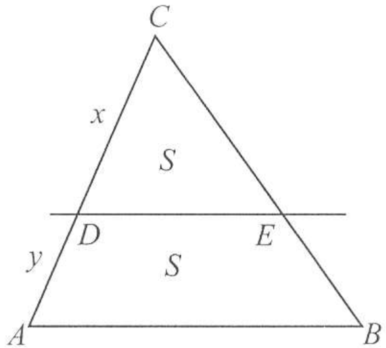
Stąd $x-1=1$ i $y-1=2$ lub $x-1=2$ i $y-1=1$.

Zatem $(x,y)=(2,3)$ lub $(x,y)=(3,2)$.

4. Niech $x=|CD|$, $y=|AD|$. Trójkąty ABC i DEC są podobne. Oznaczmy przez k skalę tego podobieństwa.

Mamy

$(\bigstar)\ k=\dfrac{x+y}{x}.$



Wiadomo, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Zatem

$$\frac{2S}{S}=k^2,$$
$$2=k^2,$$
$$k=\sqrt{2}.$$

Stąd i z (★) otrzymujemy:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{y}{x},$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{2} - 1.$$

5. Oznaczmy przez x_i, y_i, z_i, V_i odpowiednio krawędzie i objętość i-tego prostopadłościanu dla $i = 1, 2, ..., n$. Mamy $d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ oraz $V_i = x_i y_i z_i$. (*Dlaczego*?) Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla trzech liczb dodatnich:

$$\frac{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}{3} \geq \sqrt[3]{x_i^2 y_i^2 z_i^2}$$

$$\frac{d_i^2}{3} \geq \sqrt[3]{V_i^2},$$

$$d_i^2 \geq 3\sqrt[3]{V_i^2},$$

$$d_i^6 \geq 27V_i^2,$$

$$d_i^3 \geq 3\sqrt{3}V_i.$$

Oznaczmy przez a i V krawędź i objętość sześcianu. Mamy

$$d_1^3 + d_2^3 + ... + d_n^3 \geq 3\sqrt{3}(V_1 + V_2 + ... V_n) = 3\sqrt{3}V =$$

$$= 3\sqrt{3}a^3 = 3\sqrt{3}\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 = d^3,$$

gdzie $d = a\sqrt{3}$. (*Dlaczego*?)

XXV

1. Mamy

$$(10A + B) + (10B + A) = 100C + 10A + C,$$

$$11B + A = 101C.$$

Prawa, a więc i lewa strona jest podzielna przez 101. Ponieważ $12 \leq 11B + A \leq 108$, więc $11B + A = 101$ i w konsekwencji $C = 1$. Nie może być $B \leq 8$, bo wtedy $11B + A \leq 11 \cdot 8 + 9 = 97 < 101$. Zatem $B = 9$ i w konsekwencji $A = 2$. Stąd rozwiązanie $29 + 92 = 121$.

2. Niech $d = \text{NWD}(5n + 3, 3n + 2)$. Wówczas

$$5n + 3 = kd \quad \text{i} \quad 3n + 2 = ld,$$

gdzie k i l są liczbami naturalnymi. Stąd

$$15n + 9 = 3kd \quad \text{i} \quad 15n + 10 = 5ld.$$

Po odjęciu stronami powyższych równości otrzymujemy:

$$1 = 5ld - 3kd,$$

$$1 = (5l - 3k)d.$$

Zatem $d = 1$, czyli $\text{NWD}(5n + 3, 3n + 2) = 1$ i rzeczywiście ułamek $\frac{5n+3}{3n+2}$ jest nieskracalny.

3. Dodajemy stronami wszystkie równania:

$$x^2 + 1 + y^2 + 1 + z^2 + 1 = 2y + 2z + 2x,$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0,$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0.$$

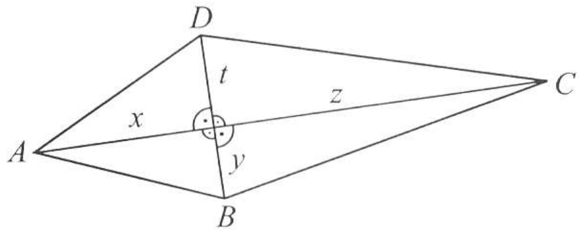
Stąd $x = 1, y = 1, z = 1$.

Sprawdzamy, że $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ jest rozwiązaniem układu.

4. Połóżmy $x = 0$ i $y = 0$. Wówczas mamy $f^2(0) + f^2(0) = f^2(0)$, skąd $f^2(0) = 0$, czyli $f(0) = 0$.

Połóżmy $y = -x$. Wówczas mamy $f^2(x) + f^2(-x) = f^2(0)$, $f^2(x) + f^2(-x) = 0$. Stąd $f(x) = 0$ i $f(-x) = 0$.

5.



Mamy

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (x^2 + y^2) + (z^2 + t^2)$$

oraz

$$|BC|^2 + |AD|^2 = (y^2 + z^2) + (t^2 + x^2).$$

Zatem $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$.

XXVI

1. Mamy

$(10A+B)+(100A+10A+B)=100B+10C+A,$

$119A=98B+10C.$

Ponieważ 7 dzieli 119 i 98, więc również dzieli $10C$. Zatem $C=0$ lub $C=7$. Gdyby $C=0$, to $119A=98B$, czyli $17A=14B$, co dla niezerowych cyfr A i B jest niemożliwe. Wobec tego $C=7$. Mamy więc $119A=98B+70$, czyli $17A=14B+10$. Zatem A jest cyfrą parzystą. Podstawiwjąc kolejno $A=2, 4, 6, 8$ przekonujemy się, że tylko dla $A=8$ otrzymujemy B całkowite: $B=9$.
Zatem mamy rozwiązanie $89+889=978$.

2. Niech $p+1$ będzie sześcianem liczby naturalnej n, czyli $p+1=n^3$.
Stąd $p=n^3-1$, $p=(n-1)(n^2+n+1)$.
Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $n-1=1$ i $n^2+n+1=p$. Stąd $n=2$ i w konsekwencji $p=7$.

3. Niech $x=0$, wówczas mamy $y=0$ i $z=0$.
Podobnie, jeśli $y=0$, to $x=0$ i $z=0$, a jeśli $z=0$, to $x=0$ i $y=0$.
Mamy więc rozwiązanie $(x, y, z)=(0, 0, 0)$.
Załóżmy dalej, że $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Mnożymy stronami wszystkie równania:

$xy\cdot yz\cdot zx=z\cdot x\cdot y,$

$(xyz)^2=xyz.$

Dzielimy przez $xyz\neq 0$ otrzymując $xyz=1$. Korzystając z pierwszego równania mamy:

$z\cdot z=1,$

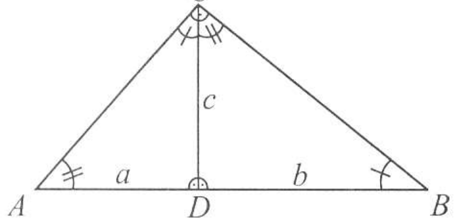
$z^2=1.$

Stąd $z=1$ lub $z=-1$.

1. $z=1$. Na podstawie pierwszego i drugiego równania mamy $xy=1$ i $y=x$. Stąd $x=1$ i $y=1$ lub $x=-1$ i $y=-1$.
2. $z=-1$. Na podstawie pierwszego i drugiego równania mamy $xy=-1$ i $-y=x$. Stąd $x=1$ i $y=-1$ lub $x=-1$ i $y=1$.

Ostatecznie stwierdzamy, że nasz układ ma pięć rozwiązań:
$(0, 0, 0), (1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, -1)$.

4. Na podstawie podobieństwa trójkątów ADC i BDC mamy:



$\frac{c}{a}=\frac{b}{c},$

$c^2=ab,$

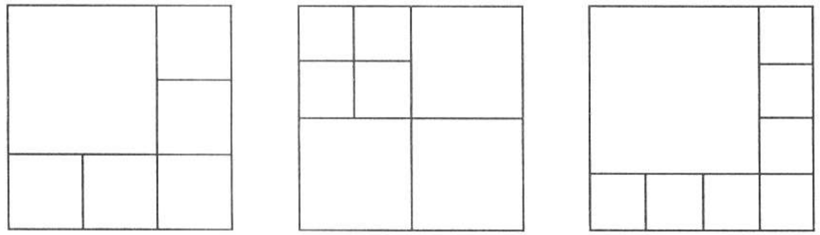
$c=\sqrt{ab}.$

Opis konstrukcji:

1. Odkładamy obok siebie współliniowe odcinki o długościach a i b.
2. Kreślimy okrąg o średnicy AB; $|AB|=a+b$.
3. Z punktu D kreślimy prostą prostopadłą do AB przecinającą okrąg w punkcie C.

Kąt $\angle ACB$ jako oparty na średnicy AB jest prosty. Odcinek CD jest poszukiwanym odcinkiem.

5. Kwadrat można podzielić na 6, 7 lub 8 kwadratów, co pokazują poniższe rysunki:



Jeśli kwadrat jest podzielony na k kwadratów, to dzieląc jeden z tych kwadratów na 4 kwadraty, otrzymamy podział wyjściowego kwadratu na $k+3$ kwadraty. Załóżmy, że mamy podział początkowy na a kwadratów. Z tego podziału możemy uzyskać podział na: $a+3, a+6, a+9, a+12, \ldots$ kwadratów. Ogólnie na $a+3l$ kwadratów dla $l=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.
Dla $a=6$ mamy $a+3l=6+3l=3(2+l)$.
Dla $a=7$ mamy $a+3l=7+3l=3(2+l)+1$.
Dla $a=8$ mamy $a+3l=8+3l=3(2+l)+2$.

Ponieważ każda liczba naturalna przy dzieleniu przez 3 daje tylko reszty 0,1 lub 2, więc powyższe wzory wyczerpują wszystkie liczby naturalne większe od 5.

XXVII

1. Niech $l_n = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cyfr}}$. Wówczas dane równanie przyjmuje postać

$$A \cdot l_n \cdot 10^n + B \cdot l_n = C \cdot l_n \cdot (C \cdot l_n + 1).$$

Dzielimy obie strony przez l_n, otrzymując $A \cdot 10^n + B = C(Cl_n + 1)$. I dalej mamy:

$$A \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cyfr}} + 1) + B = C(Cl_n + 1),$$

$$A \cdot (9l_n + 1) + B = C(Cl_n + 1),$$

$$(9A - C^2)l_n + A + B - C = 0.$$

Skoro powyższa równość ma zachodzić dla każdej liczby l_n, to

$$9A - C^2 = 0 \quad \text{i} \quad A + B - C = 0,$$

$$9A = C^2 \quad \text{i} \quad B = C - A.$$

Widać, że C dzieli się przez 3, a więc $C \in \{3, 6, 9\}$. Zatem A odpowiednio równa się 1, 4, 9 i w konsekwencji $B \in \{2, 2, 0\}$. Tak, więc $(A, B, C) \in \{(1, 2, 3); (4, 2, 6); (9, 0, 9)\}$. Wobec tego otrzymujemy równości:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cyfr}}\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{33\ldots34}_{n \text{ cyfr}}.$$

$$\underbrace{44\ldots4}_{n \text{ cyfr}}\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{66\ldots67}_{n \text{ cyfr}}.$$

$$\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cyfr}}\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ cyfr}}.$$

2. Liczba pierwsza większa od 3 nie jest podzielna przez 2 i przez 3, a więc jest postaci $6k + 1$ lub $6k + 5$ (dlaczego?). Gdyby $p = 6k + 1$, to $p + 2 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ i byłaby to liczba złożona, wbrew założeniu. Zatem $p = 6k + 5$ i w konsekwencji $p + 1 = 6k + 6 = 6(k + 1)$.

3. Oznaczmy $\left[\frac{x-1}{2}\right] = m$. Wówczas m jest liczbą całkowitą oraz

$$m \le \frac{x-1}{2} < m + 1, \text{ skąd}$$

$$2m + 1 \le x < 2m + 3.$$

Z danego równania mamy

$$m = \frac{x+1}{3}, \text{ skąd}$$

$$x = 3m - 1.$$

Zatem

$$2m + 1 \le 3m - 1 < 2m + 3, \text{ skąd}$$

$$2 \le m < 4.$$

Ponieważ m jest liczbą całkowitą, więc $m = 2$ lub $m = 3$. Skoro $x = 3m - 1$, to $x = 5$ lub $x = 8$. Czytelnik zechce dokonać sprawdzenia.

4. Niech t oznacza czas (w minutach), który upłynął od momentu wyruszenia turystów do chwili ich spotkania. Oznaczmy przez s odległość między miastami A i B (np. w metrach). Niech u oznacza prędkość turysty X, a v — prędkość turysty Y. Mamy:

$$ut + vt = s,$$

$$u(t + 40) = s \quad \text{i} \quad v(t + 90) = s.$$

Stąd kolejno otrzymujemy:

$$u = \frac{s}{t + 40} \quad \text{i} \quad v = \frac{s}{t + 90},$$

$$\frac{s}{t + 40}t + \frac{s}{t + 90}t = s.$$

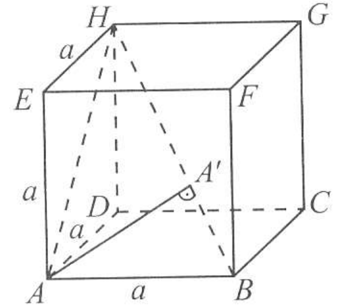
Dzielimy obie strony równania przez s: $\frac{t}{t + 40} + \frac{t}{t + 90} = 1.$

Mnożymy obie strony równania przez $(t + 40)(t + 90)$:

$$t(t + 90) + t(t + 40) = (t + 40)(t + 90).$$

Stąd $t^2 = 3600$, czyli $t = 60$. Marsz turysty X trwał $60 + 40 = 100$ (minut), a marsz turysty Y trwał $60 + 90 = 150$ (minut).

5.



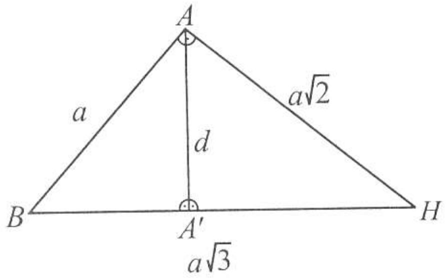
Wyznaczymy odległość wierzchołka A od przekątnej BH.

$|AH| = a\sqrt{2}$ (*dlaczego?*),

$|BH| = a\sqrt{3}$ (*dlaczego?*),

$|AA'| = d$,

$\angle BAH = 90^\circ$ (*dlaczego?*).



Pole trójkąta BHA wynosi $\frac{1}{2}a\sqrt{3}d$.

Z drugiej strony, pole to wynosi $\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2}$. Zatem $\frac{1}{2}a\sqrt{3}d = \frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2}$, stąd $d = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

XXVIII

1. Zauważmy, że

$$\underbrace{100\ldots001}_{2n\text{ zer}} = \underbrace{100\ldots000}_{2n+1\text{ zer}} + 1 = 10\cdot\underbrace{100\ldots00}_{2n\text{ zer}} + 1 =$$

$$= 10\cdot(\underbrace{99\ldots99}_{2n\text{ cyfr}} + 1) + 1 = 10\cdot\underbrace{99\ldots99}_{2n\text{ cyfr}} + 11 = 10\cdot 9\cdot\underbrace{11\ldots11}_{2n\text{ cyfr}} + 11.$$

Otrzymana suma jest podzielna przez 11, gdyż liczba $\underbrace{11\ldots11}_{2n\text{ cyfr}}$ jest podzielna przez 11 (*dlaczego?*), a więc suma ta jest liczbą złożoną.

2. Mamy

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|\cdot|y|} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1, \text{ skąd}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|\cdot|y|} + \frac{1}{y^2} \geq 1.$$

Gdyby $|x| \geq 2$ i $|y| \geq 2$, to $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|\cdot|y|} + \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Jest to niemożliwe.

Zatem $|x| = 1$ lub $|y| = 1$.

Niech na przykład $|x| = 1$, czyli $x = 1$ lub $x = -1$.

1. $x = 1$. Mamy równanie $\frac{1}{1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1$, skąd $y = -1$.

2. $x = -1$. Mamy równanie $\frac{1}{1} + \frac{1}{-y} + \frac{1}{y^2} = 1$, skąd $y = 1$.

Zatem $(x, y) = (1, -1)$ lub $(x, y) = (-1, 1)$.

3. Niech $x \geq 0$. Wówczas $|x| = x$ i mamy równanie $f(2x) + f(0) = 4x^2$. W szczególności dla $x = 0$ mamy $f(0) + f(0) = 0$, skąd $f(0) = 0$, a więc $f(2x) = 4x^2$. Połóżmy $t = 2x$. Wtedy dla $t \geq 0$

($\bigstar$) $f(t) = t^2$.

Niech $x < 0$. Wówczas $|x| = -x$ i mamy równanie

$f(0) + f(2x) = 4x^2$,

$0 + f(2x) = 4x^2$,

$f(2x) = 4x^2$.

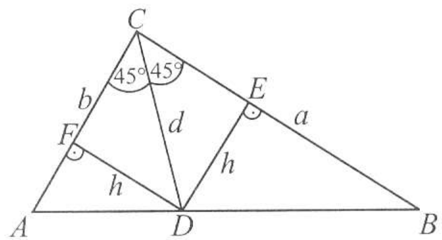
Połóżmy $t = 2x$. Wtedy dla $t < 0$ mamy $f(t) = t^2$. Stąd i z ($\bigstar$) otrzymujemy $f(t) = t^2$ dla $t \in \boldsymbol{R}$. Czytelnik zechce dokonać sprawdzenia.

4. Mamy

$|CD| = d$,

$|DE| = h$,

$|DF| = h$.



Suma pól trójkątów ADC i BDC jest równa polu trójkąta ABC, a więc

$$\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=\frac{ab}{2},$$

$$h=\frac{ab}{a+b}.$$

Ponieważ czworokąt $FCED$ jest kwadratem (*dlaczego*?), więc

$$d=\sqrt{2}h=\sqrt{2}\frac{ab}{a+b}.$$

5. Ponumerujemy krzesła liczbami od 1 do 10. Na pierwszym krześle może usiąść jedna z dziesięciu osób, na drugim jedna z dziewięciu, na trzecim jedna z ośmiu, itd. Zatem mamy $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ możliwości. Załóżmy, że osoby A i B siedzą obok siebie. Możliwe jest to, gdy A siedzi na pierwszym krześle i B na drugim, A siedzi na drugim i B na trzecim, ..., A na dziewiątym i B na dziesiątym, bądź też B siedzi na pierwszym i A na drugim, B na drugim i A na trzecim, ..., B na dziewiątym i A na dziesiątym. Mamy więc 18 możliwości. Przy ustaleniu osób A i B, pozostałe osiem osób może usiąść na $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ sposobów. Mamy więc $18\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ możliwości, w których osoby A i B siedzą obok siebie. Szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{18\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{5}.$$

XXIX

1. Załóżmy bez zmniejszania ogólności rozważań, że $x\le y\le z$. Gdyby $x\ge 2$, to $y\ge2$ i $z\ge2$. Wówczas

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

wbrew równaniu. Zatem $x=1$ i dane równanie przyjmuje postać

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{z}+\frac{1}{yz}=1.$$

Mnożymy obie strony przez yz

$$z+1+y+1=yz,$$
$$yz-z-y=2,$$
$$yz-z-y+1=3,$$
$$(y-1)(z-1)=3.$$

Wobec tego $y-1=1$ i $z-1=3$, czyli $y=2$ i $z=4$.
Mamy więc rozwiązanie $(x,y,z)=(1,2,4)$. Pozostałe rozwiązania to: $(1,4,2)$, $(2,1,4)$, $(2,4,1)$, $(4,1,2)$, $(4,2,1)$.

2. Pokażemy, że różnica lewej i prawej strony nierówności jest nieujemna.
Mamy

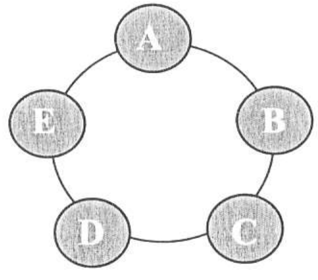
$$\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}-\frac{b+a}{ab}=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}-\frac{(b+a)ab}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}=\frac{(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{a^2(a-b)+b^2(b-a)}{a^2b^2}=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{(a-b)(a-b)(a+b)}{a^2b^2}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}\ge0.$$

3. **a)** Załóżmy, że istnieją liczby całkowite A, B, C, D, E spełniające warunki zadania (patrz rysunek). Wówczas

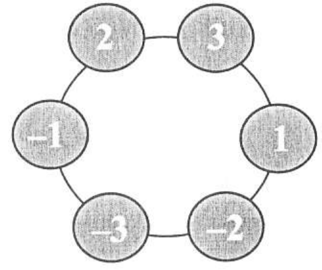


1. $A=B+E$,
2. $B=A+C$,
3. $C=B+D$,
4. $D=C+E$,
5. $E=A+D$.

Z (1) mamy $E=A-B$ i z (2) mamy $C=B-A$. Podstawiamy do równości (3), (4), (5):

3'. $B-A=B+D$, to   **3''.** $-A=D$,
4'. $D=B-A+A-B$, to   **4''.** $D=0$,
5'. $A-B=A+D$, to   **5''.** $-B=D$.

Zatem $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ oraz $E = 0$ i $C = 0$. Wobec tego liczb całkowitych różnych od zera nie da się wpisać w puste pola tak, aby spełnione były warunki zadania.



b) Odpowiedź jest pozytywna, co przedstawia rysunek.

4. Pokażemy, że odpowiedź na postawione pytanie jest twierdząca. Rozważmy n-kąt wypukły dla $n \geq 5$ i załóżmy, że ma on cztery kąty proste. Suma kątów n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180°$. Cztery kąty są proste, a więc suma ich miar wynosi 360°, pozostałe $n - 4$ kąty mają sumę miar mniejszą od $(n-4)\cdot 180°$ (każdy ma miarę mniejszą od 180°, bo n-kąt jest wypukły). Zatem

$$(n-2)\cdot 180° < 360° + (n-4)\cdot 180°.$$

Dzielimy obie strony przez 180°, otrzymując

$$n-2 < 2+n-4,$$
$$n-2 < n-2,$$

a więc sprzeczność. Zatem dla $n \geq 5$ nie istnieje n-kąt wypukły, który ma cztery kąty proste. Wobec tego $n = 4$, czyli mamy prostokąt.

5. Numerujemy kule białe, czerwone i niebieskie liczbami od 1 do 10.

a) Za pierwszym razem mamy 30 możliwości wylosowania kuli. Podobnie za drugim i trzecim razem. Zatem jest $30\cdot 30\cdot 30$ możliwych losowań. Ile jest możliwości otrzymania kul różnych kolorów?

I losowanie	**II losowania**	**III losowanie**
biała	niebieska	czerowna
biała	czerwona	niebieska
niebieska	czerwona	biała
niebieska	biała	czerwona
czerwona	biała	niebieska
czerwona	niebieska	biała

W każdym z tych sześciu przypadków mamy $10\cdot 10\cdot 10$ losowań sprzyjających. (*Dlaczego*?)

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{6\cdot 10\cdot 10\cdot 10}{30\cdot 30\cdot 30} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222.$

b) Za pierwszym mamy 30, za drugim 29 i za trzecim 28 możliwości. Zatem jest $30\cdot 29\cdot 28$ możliwych losowań. Losowań sprzyjających jest tyle, ile w punkcie **a**). (*Dlaczego*?)

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{6\cdot 10\cdot 10\cdot 10}{30\cdot 29\cdot 28} = \frac{50}{203} \approx 0{,}246.$

XXX

1. Liczba zer na końcu liczby $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000$ jest równa liczbie czynników $5\cdot 2 = 10$. Liczba $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000$ w rozwinięciu na czynniki pierwsze zawiera mniej piątek niż dwójek. Wystarczy więc policzyć liczbę piątek.

Piątki występują w czynnikach: 5, 10, 15, 20, ..., 1000. Tych czynników jest 200.

Piątka występuje co najmniej dwukrotnie w czynnikach: 25, 50, 75, 100, ..., 1000. Tych czynników jest 40.

Piątka występuje co najmniej trzykrotnie w czynnikach: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, 1000. Tych czynników jest 8.

Piątka występuje czterokrotnie w czynniku 625. Łącznie w liczbie $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000$ jest $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ czynników równych 5.

Zatem liczba $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000$ ma w rozwinięciu dziesiętnym na końcu 249 zer.

2. Niech $\underbrace{44\ldots 44}_{n+1 \text{ cyfr}}$ będzie n-tą z kolei liczbą w podanym ciągu liczb.

Przypuśćmy, że liczba ta jest kwadratem liczby naturalnej, a więc liczby naturalnej parzystej:

$$\underbrace{44\ldots 44}_{n+1 \text{ cyfr}} = (2m)^2, \qquad \text{gdzie } m \in N,$$

$$\underbrace{44\ldots 44}_{n+1 \text{ cyfr}} = 4m^2,$$

$$\underbrace{11\ldots 11}_{n+1 \text{ cyfr}} = m^2.$$

Widzimy, że m musi być liczbą nieparzystą:

$$\underbrace{11\ldots11}_{n+1 \text{ cyfr}} = (2k+1)^2, \qquad \text{gdzie } k \in N,$$

$$\underbrace{11\ldots11}_{n+1 \text{ cyfr}} = 4k^2 + 4k + 1,$$

$$\underbrace{11\ldots10}_{n+1 \text{ cyfr}} = 4(k^2 + k).$$

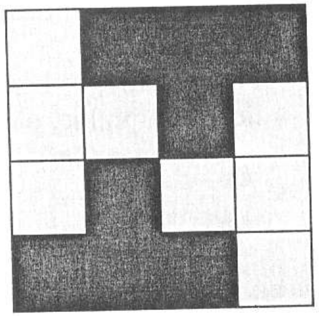
Prawa strona podzielna jest przez 4, a lewa nie. Zatem w podanym ciągu liczb nie ma kwadratu liczby naturalnej.

3. Ponumerujemy pola szachownicy tak, jak to przedstawia rysunek.

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Załóżmy, że możliwe jest żądane pokrycie. Kostka opisana w treści zadania zawsze pokryje pola z liczbami 1, 1, 1, 0 albo z liczbami 0, 0, 0, 1. W pierwszym przypadku suma liczb na kostce wynosi 3, natomiast w drugim 1. Niech k oznacza liczbę kostek z sumą 3, a l liczbę kostek z sumą 1.

Mamy oczywiście $k + l = 25$ oraz $3k + l = 50$, bo suma liczb na szachownicy wynosi 50. Po odjęciu stronami powyższych równości otrzymujemy $2k = 25$, co jest sprzeczne, bo $2k$ jest liczbą parzystą. Zatem żądane pokrycie jest niemożliwe.



U w a g a: W ten sam sposób można pokazać ogólnie, że szachownicy

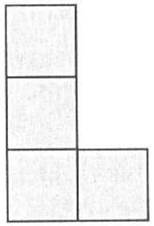
$(4n+2)\times(4n+2)$ dla $n \in N$,

nie można pokryć $(2n+1)^2$ kostkami opisanymi w treści zadania. Szachownic

$(4n+1)\times(4n+1)$ i $(4n+3)\times(4n+3)$

oczywiście nie można pokryć takimi kostkami, gdyż mają nieparzystą liczbę pól.

Natomiast szachownicę $4n \times 4n$ można pokryć takimi kostkami, gdyż składa się ona z n^2 kwadratów o wymiarach 4×4, a każdy taki kwadrat można pokryć opisanymi kostkami, co przedstawia rysunek.



Czytelnik zechce się zastanowić dla jakich naturalnych m szachownicę $m \times m$ można pokryć kostkami w kształcie litery L, jak to przedstawia rysunek.

W s k a z ó w k a: Należy rozważyć cztery przypadki: $m = 4n$, $m = 4n+1$, $m = 4n+2$, $m = 4n+3$ dla $n \in N$. Najtrudniejszy przypadek, to $m = 4n+2$. W celu jego rozwiązania, należy pola szachownicy oznaczyć liczbami 0 i 1 tak, jak przedstawia rysunek.

0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1

4. O — środek kuli wpisanej,

r — promień kuli wpisanej,

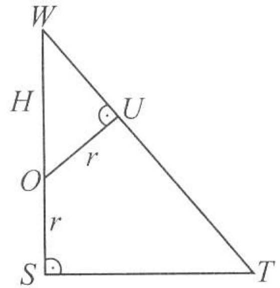
$r = |OS| = |OU|$,

$H = |WS|$ — wysokość czworościanu,

h — wysokość ściany,

$h = |WT|$,

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. *(Dlaczego?)*



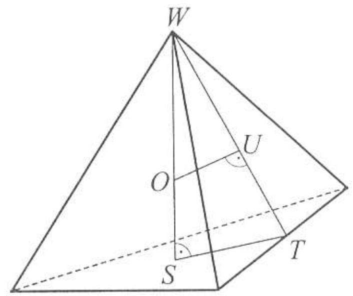
Z podobieństwa trójkątów WOU i WST mamy:

$$\frac{|OU|}{|ST|} = \frac{|WO|}{|WT|}, \text{ czyli}$$

$$\frac{r}{\frac{1}{3}h} = \frac{H-r}{h}, \text{ skąd}$$

$$3r = H - r,$$

$$(\bigstar) \quad r = \frac{1}{4}H.$$



Wysokość H obliczamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta WST:

$|WS|^2 + |ST|^2 = |WT|^2$, czyli

$$H^2 + \left(\frac{1}{3}h\right)^2 = h^2,$$

$$H^2 = \frac{8}{9}h^2,$$

$$H = \frac{2\sqrt{2}}{3}h,$$

$$H = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

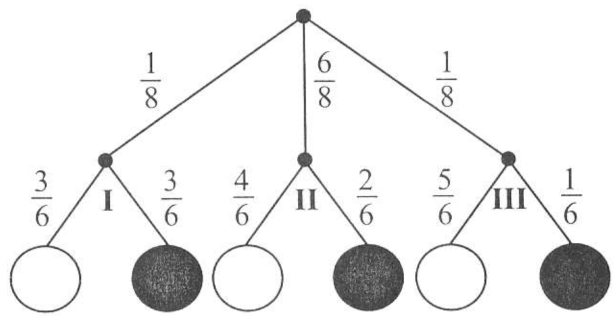
Stąd i z (★) otrzymujemy $r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{a}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}a.$

Przypadek b) pozostawiam Czytelnikowi. Odpowiedź: $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

5. Jest osiem wyników rzutów trzema monetami: (O, O, O); (O, R, O); (R, O, O); (O, O, R); (R, R, O); (R, O, R); (O, R, R); (R, R, R).

Prawdopodobieństwo, że będziemy losować: z I pudełka — $\frac{1}{8}$; z II pudełka — $\frac{6}{8}$, z III pudełka — $\frac{1}{8}$.

Rysujemy „drzewko" prawdopodobieństwa:



Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej zgodnie ze schematem: $\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{6} + \frac{6}{8}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{6} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}.$

XXXI

1. Mamy

$$(10A + B) + (10B + A) = 100B + 10B + C,$$

$$11(A + B) = 110B + C.$$

Ponieważ 11 dzieli 110, więc dzieli również C. Wobec tego $C = 0$ i w koneswencji $11(A + B) = 110B$, czyli $A = 9B$. Ostatnia równość może zajść jedynie wtedy, gdy $B = 1$ i $A = 9$. (*Dlaczego*?)
Zatem mamy rozwiązanie $91 + 19 = 110$.

2. Rozważmy liczby $2p - 1$, $2p$, $2p + 1$. Są to trzy kolejne liczby naturalne, a zatem dokładnie jedna spośród nich jest podzielna przez 3. Mogą więc zajść następujące przypadki:

1. $2p - 1$ jest podzielne przez 3. Wówczas $2p - 1 = 3$, bo $2p - 1$ jest liczbą pierwszą. Stąd $p = 2$. Jest to liczba pierwsza. Sprawdzamy, czy liczba $2p + 1$ jest pierwsza. Mamy

$$2p + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$$

i jest to liczba pierwsza.

2. $2p$ jest podzielne przez 3. Wówczas p jest podzielne przez 3, a ponieważ jest to liczba pierwsza, więc $p = 3$. Sprawdzamy, czy liczby $2p - 1$ i $2p + 1$ są pierwsze. Mamy

$$2p - 1 = 2\cdot 3 - 1 = 5 \text{ i } 2p + 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$$

i są to liczby pierwsze.

3. $2p + 1$ jest podzielne przez 3. Wówczas $2p + 1 = 3$, bo $2p + 1$ jest liczbą pierwszą. Stąd $p = 1$ i nie jest to liczba pierwsza.

Zatem $p = 2$ lub $p = 3$.

3. Rozważmy trzy przypadki:

1. $x < -1$. Wówczas równanie przyjmuje postać

$-(x+1)-(x-1)=x^2$,

$-2x = x^2$,

$x(x+2)=0$.

Stąd $x = 0$ lub $x = -2$.

Tylko $x = -2$ spełnia założenie $x < -1$.

2. $-1 \le x < 1$. Wówczas równanie przyjmuje postać

$(x+1)-(x-1)=x^2$,

$2 = x^2$.

Stąd $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$. Żadna z powyższych liczb nie spełnia założenia $-1 \le x < 1$.

Zatem równanie nie ma więc w tym przypadku rozwiązania.

3. $x \ge 1$. Wówczas równanie przyjmuje postać

$(x+1)+(x-1)=x^2$,

$2x = x^2$,

$x(x-2)=0$.

Stąd $x = 0$ lub $x = 2$.

Tylko $x = 2$ spełnia założenie $x \ge 1$.

Zatem $x = -2$ lub $x = 2$.

4. Niech m oznacza ilość roztworu 7-procentowego, a n — ilość roztworu 18-procentowego.

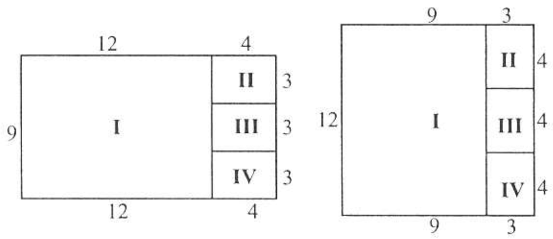
Przed zmieszaniem mamy $0{,}07m + 0{,}18n$ substancji.

Po zmieszaniu natomiast jest $0{,}13(m+n)$ substancji w roztworze.

Zatem mamy równanie $0{,}07m + 0{,}18n = 0{,}13(m+n)$.

Stąd $0{,}05\,n = 0{,}06\,m$, czyli $\frac{n}{m} = \frac{6}{5}$.

5.



XXXII

1. Mamy

$(10A + A)+(10B + B) = 100C + 10A + C$,

$A + 11B = 101C$.

Rozumując identycznie, jak w rozwiązaniu zadania 1. z zestawu XXV otrzymujemy $C = 1$, $A = 2$ i $B = 9$. Zatem mamy rozwiązanie: $22 + 99 = 121$.

2. Załóżmy, że liczba $6...66$ jest kwadratem liczby naturalnej, a więc parzystej, czyli

$6..66 = (2m)^2$,

gdzie m jest liczbą naturalną. Stąd otrzymujemy kolejno

$6..66 = 4m^2$,

$3..33 = 2m^2$.

Prawa strona dzieli się przez 2, a lewa nie. Wobec tego żadna z wypisanych liczb nie jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Oznaczmy $u = \sqrt{a+\sqrt{b}}$ i załóżmy, że u jest liczbą wymierną.

Otrzymujemy kolejno

$u^2 = a + \sqrt{b}$,

$\sqrt{b} = u^2 - a$,

$b = (u^2 - a)^2$.

Stąd b jest kwadratem liczby wymiernej, a ponieważ b jest liczbą całkowitą, więc b musi być kwadratem liczby całkowitej. Zatem $b = k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Analogicznie $a = l^2$, gdzie l jest liczbą całkowitą dodatnią.

Mamy

$u = \sqrt{a+k}$,

($\bigstar$) $u^2 = a + k = l^2 + k$.

Ponieważ u jest liczbą wymierną i u^2 jest liczbą całkowitą, więc u jest liczbą całkowitą. Ponieważ $k > 0$, więc $u > l$, czyli $u \ge l+1$. Zatem $(l+1)^2 \le u^2$, czyli $(l+1)^2 \le l^2 + k$.

Analogicznie $(k+1)^2 \le k^2 + l$.

Po dodaniu powyższych nierówności otrzymujemy

$$(l+1)^2+(k+1)^2 \le l^2+k+k^2+l.$$

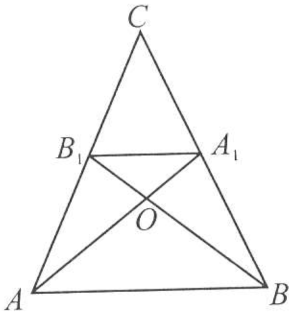
Stąd po przekształceniach otrzymujemy $k+l\le -2$, co jest niemożliwe, bo liczby k i l są dodatnie. Tak więc odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

4. A_1 — środek boku BC,
B_1 — środek boku AC.
Ponieważ środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 2 : 1, więc

$$|AO|=\frac{2}{3}|AA_1|=\frac{2}{3}|BB_1|=|BO|$$

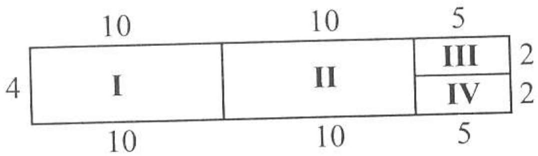
i podobnie

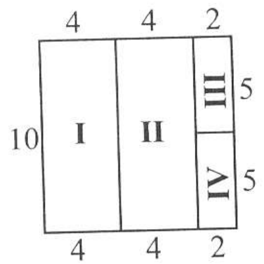
$$|A_1O|=\frac{1}{3}|AA_1|=\frac{1}{3}|BB_1|=|B_1O|.$$



Zatem trójkąty AOB_1 i BOA_1 są przystające. W konsekwencji $|AB_1|=|BA_1|$ i stąd $2|AB_1|=2|BA_1|$, czyli $|AC|=|BC|$.

5.





XXXIII

1. Mamy

$$(10A+A)+(10B+A)=100C+10B+B,$$
$$12A-B=100C.$$

Prawa, a więc i lewa strona jest podzielna przez 100. Ponieważ $3\le 12A-B\le 108$, więc $12A-B=100$ i w konsekwencji $C=1$. Nie może być $A\le 8$, bo wtedy $12A-B\le 12\cdot 8+0=96<100$. Zatem $A=9$ i w konsekwencji $B=8$.
Zatem mamy rozwiązanie 99 + 89 = 188.

2. Zgodnie z założeniem, liczba $\frac{1}{a-1}$ jest całkowita. Pokażemy, że liczby całkowite $m=\frac{1}{a-1}$ i $n=m+1$ spełniają podane równanie.
Istotnie

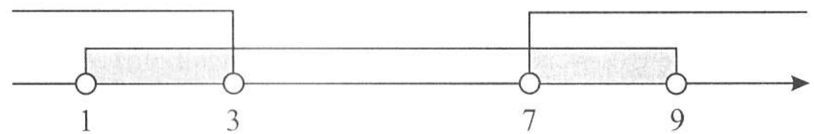
$$P=\frac{a^n}{n}=\frac{a^{m+1}}{m+1}=\frac{a^m\cdot a}{\frac{1}{a-1}+1}=a^m\cdot(a-1)=a^m\cdot\frac{1}{m}=\frac{a^m}{m}=L.$$

Zatem $L=P$.

3. Mamy kolejno

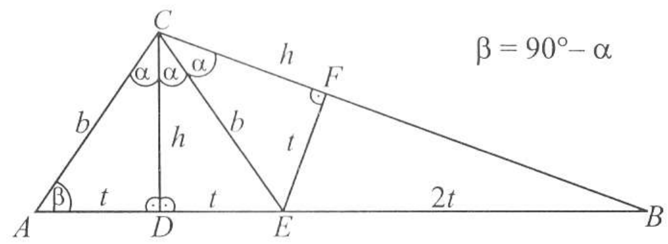
$$-1<|x-5|-3<1$$
$$2<|x-5|<4,$$

$$\begin{array}{lcr} 2<|x-5| & \text{i} & |x-5|<4, \\ x-5>2 \text{ lub } x-5<-2 & \text{i} & -4<x-5<4, \\ x>7 \text{ lub } x<3 & \text{i} & 1<x<9. \end{array}$$



Zatem $x\in(1,3)\cup(7,9)$.

4.



CD — wysokość ΔABC,
E — środek AB,
$|AD|=t$,
$|CD|=h$,
$EF\perp BC$.
$\beta=90°-\alpha$

Trójkąty ADC i EDC są prostokątne, mają ten sam kąt ostry α i wspólną przyprostokatną CD. Zatem trójkąty te są przystające. W konsekwencji $|DE|=|AD|$. Ponieważ E jest środkiem AB, więc $|EB|=|AE|=2t$.

Trójkąt CEF jest przystający do trójkąta CED. (*Dlaczego*?) Zatem $|CF|=h$ i $|EF|=t$. Mamy

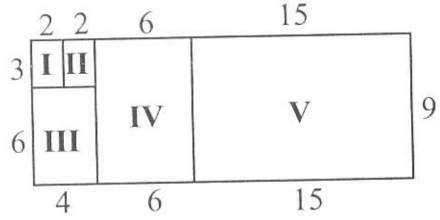
$$S(\Delta BEF) = S(\Delta BEC) - S(\Delta CEF) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot h - \frac{1}{2}h\cdot t = \frac{1}{2}ht = S(\Delta CEF).$$

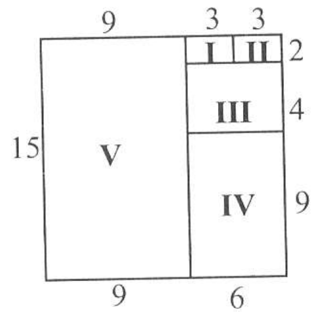
Zatem $\frac{|BF|\cdot|FE|}{2} = \frac{|CF|\cdot|FE|}{2}$, stąd $|BF|=|CF|$. Trójkąt BEC jest więc równoramienny i w konsekwencji $\angle EBC = \alpha$. Suma kątów trójkąta ABC wynosi $180°$, a zatem mamy równanie

$$(90° - \alpha) + \alpha + 3\alpha = 180°,$$
$$\alpha = 30°.$$

Wobec tego $\angle ACB = 3\alpha = 3\cdot 30° = 90°$.

5.





XXXIV

1. Niech $AB + BA = m^2$, gdzie m jest liczbą naturalną. Stąd

$$(10A + B) + (10B + A) = m^2,$$
$$11(A + B) = m^2.$$

Wynika stąd, że liczba m jest podzielna przez 11, czyli $m = 11k$, gdzie k jest liczbą naturalną. Mamy dalej

$$11(A + B) = (11k)^2,$$
$$A + B = 11k^2.$$

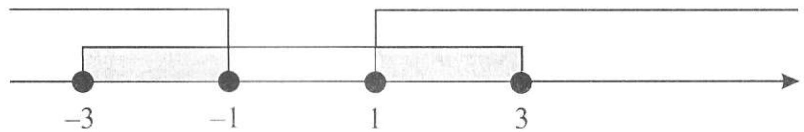
Jeśli $k = 1$, to $A + B = 11$.
Jeśli $k \geq 2$, to $11k^2 \geq 44$, co jest niemożliwe, bo $A + B \leq 18$.
Z równania $A + B = 11$ wynika, że ($A = 2$ i $B = 9$) lub ($A = 3$ i $B = 8$) lub ($A = 4$ i $B = 7$) lub ($A = 5$ i $B = 6$) lub ($A = 6$ i $B = 5$) lub ($A = 7$ i $B = 4$) lub ($A = 8$ i $B = 3$) lub ($A = 9$ i $B = 2$).
Sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi.

2. Jeśli $p = 2$, to $p^2 + 8 = 12$ i jest to liczba złożona.
Jeśli $p = 3$, to $p^2 + 8 = 17$ i jest to liczba pierwsza.
Jeśli $p > 3$, to p jako liczba pierwsza nie jest podzielna przez 3, a więc jest postaci $3k + 1$ lub $3k + 2$ ($k \in N$).
Rozważmy przypadki
   1. $p = 3k + 1$. Wówczas
   $$p^2 + 8 = (3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 1 + 8 = 3(3k^2 + 2k + 3)$$
   i jest to liczba złożona.
   2. $p = 3k + 2$. Wówczas
   $$p^2 + 8 = (3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 4 + 8 = 3(3k^2 + 4k + 4)$$
   i jest to liczba złożona.

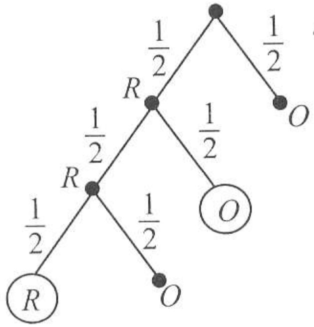
Zatem $p = 3$.

3.
$$-4 \leq x^2 - 5 \leq 4,$$
$$1 \leq x^2 \leq 9,$$

$x^2 \geq 1$	i	$x^2 \leq 9$,
$x \geq 1$ lub $x \leq -1$	i	$-3 \leq x \leq 3$.



Zatem $x \in \langle -3, -1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$.

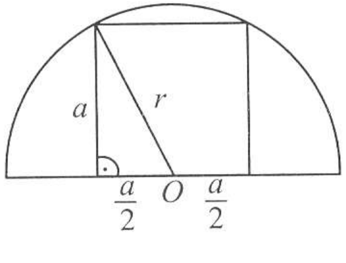


4. Rysujemy „drzewko" prawdopodobieństwa.
Zdobędziemy 3 punkty wtedy, gdy wyniki rzutu będą następujące: (reszka, orzeł) albo (reszka, reszka, reszka).
Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

5. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=r^2, \text{ skąd}$$

$$P=a^2=\frac{4}{5}r^2.$$



XXXV

1. Czterocyfrowe czwarte potęgi to: $1296=6^4$, $2401=7^4$, $4096=8^4$, $6561=9^4$.
Po obliczeniu sumy cyfr, stwierdzamy, że tylko liczba 2401 spełnia podane równanie, bo $(2+4+0+1)^4=7^4=2401$.
Zatem $A=2$, $B=4$, $C=0$, $D=1$.

2. Załóżmy, że para liczb naturalnych x i y spełnia podane równanie.
Po pomnożeniu obu stron przez xy otrzymujemy

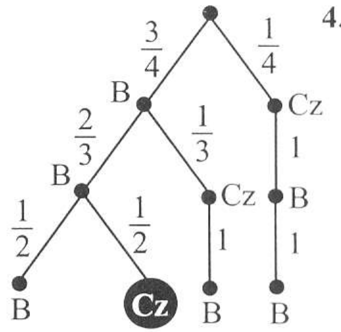
$$2y+3x=2xy,$$
$$2xy-3x-2y=0 \quad |\cdot 2,$$
$$4xy-6x-4y=0,$$
$$(2x-2)(2y-3)=6.$$

Zatem uwzględniając, że $2x-2$ jest parzyste, a $2y-3$ nieparzyste, mamy

$$\begin{cases}2x-2=2\\2y-3=3\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}2x-2=6\\2y-3=1\end{cases}.$$

Stąd $(x, y)=(2, 3)$ lub $(x, y)=(4, 2)$.
Sprawdzenie pozostawiam Czytelnikowi.

3. $|x|-2>4$ lub $|x|-2<-4$
$|x|>6$ lub $|x|<-2$,
$x>6$ lub $x<-6$ lub $x\in\varnothing$ (nierówność sprzeczna)
Zatem $x\in(-\infty; -6)\cup(6; \infty)$.



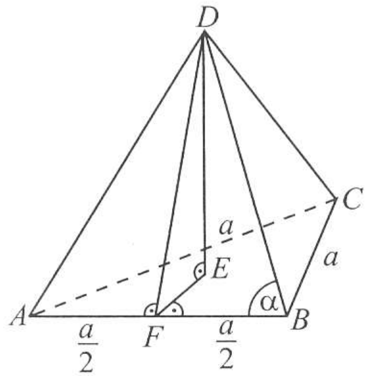
4. Rysujemy „drzewko" prawdopodobieństwa:
Szukane prawopodobieństwo wynosi
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

5. $|DE|=H$ — wysokość ostrosłupa,
$|DF|=h$ — wysokość ściany bocznej.
Oczywiście pole podstawy ostrosłupa wynosi

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

W trójkącie prostokątnym FBD mamy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{\frac{1}{2}a}$, skąd

$(\star)$ $h=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEF mamy

$$|DE|^2+|EF|^2=|DF|^2,$$

$$H^2+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=h^2,$$

$$H^2=h^2-\frac{a^2}{12}.$$

Stąd i z (★) otrzymujemy

$$H^2=\left(\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)^2-\frac{a^2}{12},$$

$$H=a\cdot\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}{12}}.$$

Wobec tego

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\cdot\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}{12}}=\frac{a^3}{24}\cdot\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

XXXVI

1. Mamy

$$m^5-m=m(m^4-1)=m(m^2-1)(m^2+1)=$$
$$=m(m-1)(m+1)(m^2+1)$$

Iloczyn $m(m-1)$ jest podzielny przez 2, ponieważ występują w nim dwie kolejne liczby całkowite.

Iloczyn $m(m-1)(m+1)$ jest podzielny przez 3, ponieważ występują w nim trzy kolejne liczby całkowite.

Zatem liczba m^5-m jest podzielna przez $2\cdot 3=6$. Należy więc jeszcze pokazać, że liczba m^5-m jest podzielna przez 5. Rozważmy teraz pięć przypadków.

1. $m=5k$ (k — całkowite). Wówczas oczywiście mamy czynnik 5.

2. $m=5k+1$. Wówczas $m-1=5k$ i mamy czynnik 5.

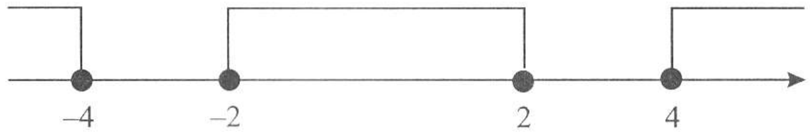
3. $m=5k+2$. Wówczas
$m^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5=5(5k^2+4k+1)$.

4. $m=5k+3$. Wówczas
$m^2+1=(5k+3)^2+1=25k^2+30k+10=5(5k^2+6k+2)$.

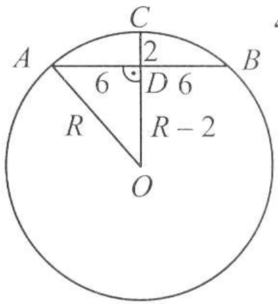
5. $m=5k+4$. Wówczas $m+1=5k+5=5(k+1)$.

2. Odpowiedź jest pozytywna, mamy bowiem $3^3+4^3+5^3=6^3$, co łatwo sprawdzić.

3. $x^2-10\ge 6$ lub $x^2-10\le -6$,
$x^2\ge 16$ lub $x^2\le 4$,
$x\ge 4$ lub $x\le -4$ lub $-2\le x\le 2$.



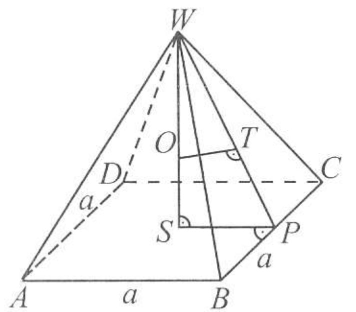
Zatem $x\in(-\infty;-4\rangle\cup\langle -2;2\rangle\cup\langle 4;\infty)$.



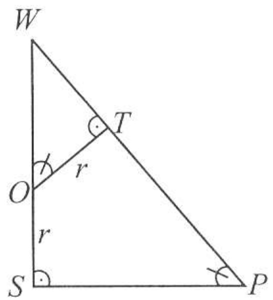
4. $|AB|=12$,
$|CD|=2$,
$|AO|=|CO|=R$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADO mamy
$(R-2)^2+6^2=R^2$, skąd
$R=10$.

5. W — wierzchołek ostrosłupa,
S — środek podstawy,
O — środek wpisanej kuli,
WP — wysokość ściany bocznej,
T — punkt styczności kuli ze ścianą boczną.

Niech r oznacza promień wpisanej kuli. Mamy $|OS|=r=|OT|$.



Rozważymy ΔWSP. Trójkąty WOT i WSP są podobne (*dlaczego*?), a zatem



$$\frac{|OT|}{|SP|}=\frac{|WO|}{|WP|}, \text{ czyli}$$

$$\frac{r}{\frac{a}{2}}=\frac{H-r}{h},$$

gdzie H jest wysokością ostrosłupa, a h — wysokością ściany bocznej. Stąd

$$(\bigstar)\ r=\frac{Ha}{2h+a}.$$

Ponieważ trójkąt BCW jest równoboczny, więc

$$(\bigstar\bigstar)\ h=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta WSP mamy

$$|WS|^2+|SP|^2=|WP|^2, \text{ czyli}$$

$$H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2, \text{ skąd}$$

$$(\bigstar\bigstar\bigstar)\ H=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Wobec tego z $(\bigstar)$, $(\bigstar\bigstar)$ i $(\bigstar\bigstar\bigstar)$ mamy

$$r=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot a}{a\sqrt{3}+a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}+1}a=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a.$$

XXXVII

1. Widać, że jedna z liczb p, q lub r musi być równa 5. Niech np. $p=5$. Wówczas mamy równanie

$$5qr=5(5+q+r),$$
$$qr=5+q+r,$$
$$qr-q-r=5,$$

$$qr-q-r+1=6,$$
$$(q-1)(r-1)=6.$$

Zatem

$$\begin{cases}q-1=1\\ r-1=6\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}q-1=2\\ r-1=3\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}q-1=3\\ r-1=2\end{cases} \text{ lub } \begin{cases}q-1=6\\ r-1=1\end{cases}.$$

Stąd $(q, r)\in\{(2, 7); (3, 4); (4, 3); (7, 2)\}$. Ponieważ q i r są liczbami pierwszymi, więc pary $(3, 4)$ i $(4, 3)$ odrzucamy.
Zatem $(p, q, r)\in\{(5, 2, 7); (5, 7, 2)\}$. Pozostałe rozwiązania otrzymujemy przez przestawienie liczb 5, 2, 7 między sobą.

2. Oznaczmy $m=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}}$. Wówczas $9m+1=10^n$. Mamy

$$\underbrace{3111\ldots15}_{n\text{ cyfr}}=30\cdot10^n+\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cyfr}}\cdot10+5=30(9m+1)+m\cdot10+5=$$
$$=7(40m+5).$$

3. Oznaczmy $x=0{,}135135135\ldots$. Wówczas

$$1000x-x=135{,}135135135\ldots-0{,}135135135\ldots,$$
$$999x=135,$$
$$x=\frac{135}{999},$$
$$x=\frac{5}{37}.$$

4. Wykażemy, że różnica lewej i prawej strony nierówności jest nieujemna:

$$(a+b)(a^5+b^5)-(a^2+b^2)(a^4+b^4)=$$
$$=(a^6+ab^5+ba^5+b^6)-(a^6+a^2b^4+b^2a^4+b^6)=$$
$$=ab^5+ba^5-a^2b^4-b^2a^4=(ab^5-a^2b^4)-(b^2a^4-ba^5)=$$
$$=ab^4(b-a)-ba^4(b-a)=(b-a)(ab^4-ba^4)=$$
$$=(b-a)ab(b^3-a^3)=(b-a)ab(b-a)(b^2+ba+a^2)=$$
$$=(b-a)^2ab(b^2+ba+a^2)\geq 0.$$

5. Mamy

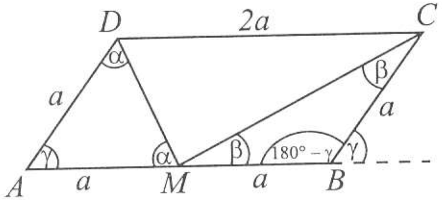
$\alpha+\alpha+\gamma=180°$

oraz

$\beta+\beta+180°-\gamma=180°.$

Stąd

$\gamma=180°-2\alpha$ i $\gamma=2\beta$.



Zatem $180°-2\alpha=2\beta$, skąd $\alpha+\beta=90°$. W konsekwencji

$\angle CMD=180°-(\alpha+\beta)=180°-90°=90°.$

XXXVIII

1. Jeśli m jest liczbą parzystą, to n jest również liczbą parzystą. (*Dlaczego?*) Zatem w tym przypadku mamy $m=2k$ i $n=2l$ (k,l — liczby całkowite). W konsekwencji

$$m^4-n^4=(2k)^4-(2l)^4=16k^4-16l^4=16(k^4-l^4),$$

a to mieliśmy udowodnić.

Jeśli m jest liczbą nieparzystą, to $m=2k+1$ (k — liczba całkowita) i w konsekwencji $n=2k-1$. Zatem

$$m^4-n^4=(m^2-n^2)(m^2+n^2)=(m-n)(m+n)(m^2+n^2)=$$
$$=2\cdot4k\cdot((2k+1)^2+(2k-1)^2)=$$
$$=8k\cdot(4k^2+4k+1+4k^2-4k+1)=8k\cdot(8k^2+2)=$$
$$=16k\cdot(4k^2+1),$$

a to mieliśmy udowodnić.

2. Niech $x+\frac{1}{x}=m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Zastosujemy wzór na sześcian sumy $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Mamy

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=m^3,$$

$$x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=m^3,$$

$$x^3+3x+3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=m^3,$$

$$x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=m^3,$$

$$x^3+3m+\frac{1}{x^3}=m^3,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=m^3-3m.$$

Zatem liczba $x^3+\frac{1}{x^3}$ jest całkowita, bo m jest liczbą całkowitą.

3. Dany układ równań jest równoważny alternatywnie układów:

$$\begin{cases}x-y=1\\x+y=3\end{cases}\text{ lub }\begin{cases}x-y=-1\\x+y=3\end{cases}\text{ lub }\begin{cases}x-y=1\\x+y=-3\end{cases}\text{ lub }\begin{cases}x-y=-1\\x+y=-3\end{cases}.$$

Stąd $(x,y)\in\{(2,1);(1,2);(-1,-2);(-2,-1)\}$.

4. Oznaczmy $t=a+b+c$.

Mamy kolejno

$t-c=a+b,$

$(t-c)^3=(a+b)^3,$

$t^3-3ct^2+3c^2t-c^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

$t^3-3ct^2+3c^2t=(a^3+b^3+c^3)+3ab(a+b),$

$t^3-3ct^2+3c^2t=3abc+3ab(t-c),$

$t^3-3ct^2+3c^2t=3abt\mid:t>0,$

$t^2-3ct+3c^2=3ab,$

$(a+b+c)^2-3c(a+b+c)+3c^2=3ab,$

$(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-3c(a+b+c)+3c^2=3ab,$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\mid\cdot2,$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0,$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, stąd

$a-b=0$ i $b-c=0$ i $c-a=0$, czyli

$a=b=c.$

5. Nich będą dane krawędzie:

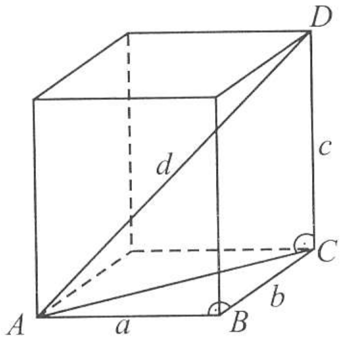
$|AB| = a$,

$|BC| = b$,

$|CD| = c$

oraz przekątna

$|AD| = d$.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC mamy

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$,

$(\star)\ a^2 + b^2 = |AC|^2$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC mamy

$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2$,

$|AC|^2 + c^2 = d^2$.

Stąd i z $(\star)$ otrzymujemy $(\star\star)\ a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Przyjmijmy np. $a = 1, b = 2, c = 2$. Wówczas $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 = 3^2$. Zatem $d = 3$. Tak, więc odpowiedź na postawione pytanie jest pozytywna.

U w a g a: Równanie $(\star\star)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych a, b, c, d. Na przykład

$m^2 + (2m)^2 + (2m)^2 = (3m)^2$

dla dowolnej liczby naturalnej m.

XXXIX

1. Niech $A_1A_2 \ldots A_n$ będzie liczbą naturalną większą od 1 (o cyfrach $A_1, A_2, \ldots, A_n$). Załóżmy, że

$(\star)\ A_1A_2 \ldots A_n = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2$.

Mamy nierówności

$$A_1A_2 \ldots A_n \geq \underbrace{100\ldots0}_{n-1 \text{ zer}} = 10^{n-1} \text{ oraz}$$

$$A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \leq \underbrace{9^2 + 9^2 + \ldots + 9^2}_{n \text{ składników}} = 81n.$$

Zatem, jeśli zachodzi równość $(\star)$, to $10^{n-1} \leq 81n$.

Stąd otrzymujemy

$\frac{10^n}{10} \leq 81n$, czyli

$(\star\star)\ \frac{10^n}{n} \leq 810$.

Podstawiając kolejno $n = 1, 2, 3, \ldots$ stwierdzamy, że licznik rośnie szybciej niż mianownik. To pozwala wywnioskować, że nierówność $(\star\star)$ zachodzi tylko dla początkowych liczb naturalnych.

n	1	2	3	4	>4
$\frac{10^n}{n}$	10	50	$333\frac{1}{3}$	2500	>2500

Tymi liczbami naturalnymi mogą być tylko: $n = 1$ lub $n = 2$ lub $n = 3$.

Zatem można brać pod uwagę tylko liczby co najwyżej trzycyfrowe. W dalszej części rozważania najlepiej skorzystać z kalkulatora badając, czy:

$A_1 = A_1^2$, (jeśli $A_1 > 1$, to $A_1 < A_1^2$ i nie ma rozwiązania),

$A_1A_2 = A_1^2 + A_2^2$,

$A_1A_2A_3 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$.

Jeśli Czytelnik wykonał poprawne obliczenia, to okaże się, że odpowiedź jest negatywna.

2. Niech $S(A)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej A. Liczba $A - S(A)$ jest podzielna przez 9. (*Jak to uzasadnić*?) W szczególności dla liczb K i L możemy więc zapisać, że

$K - S(K) = 9a$ i $L - S(L) = 9b$,

gdzie a, b są liczbami całkowitymi.

Uwzględniając fakt, że $S(K) = S(L)$ (*dlaczego*?) mamy

$K - L = (9a + S(K)) - (9b + S(L)) = 9(a - b)$.

Zatem istotnie różnica $K - L$ jest podzielna przez 9.

3. Załóżmy, że takie liczby a, b, c istnieją. Wówczas z drugiej równości mamy

$$\frac{bc+ca+ab}{abc}=0,$$
$$bc+ca+ab=0,$$
$$c(b+a)+ab=0.$$

Uwzględniając pierwszą równość $c=-(a+b)$ mamy

$$-(a+b)(b+a)+ab=0,$$
$$-a^2-2ab-b^2+ab=0,$$
$$-a^2-ab-b^2=0\,|\cdot(-1),$$
$$a^2+ab+b^2=0\,|\cdot 2,$$
$$2a^2+2ab+2b^2=0,$$
$$(a^2+2ab+b^2)+a^2+b^2=0,$$
$$(a+b)^2+a^2+b^2=0.$$

Stąd $a+b=0$ i $a=0$ i $b=0$, co jest niemożliwe. Tak, więc odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

4. Założenie: $x+1\geq 0, x+13\geq 0, x-2\geq 0, x+22\geq 0$. Stąd otrzymujemy $x\geq 2$.
Załóżmy, że liczba x spełnia podane równanie. Wówczas kolejno otrzymujemy

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+13})^2=(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+22})^2,$$
$$x+1+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+13}+x+13=,$$
$$=x-2+2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+22}+x+22=$$
$$2\sqrt{(x+1)(x+13}=6+2\sqrt{(x-2)(x+22)}\quad|:2,$$
$$\sqrt{(x+1)(x+13)}=3+\sqrt{(x-2)(x+22)},$$
$$(\sqrt{(x+1)(x+13)})^2=(3+\sqrt{(x-2)(x+22)})^2,$$
$$(x+1)(x+13)=9+6\sqrt{(x-2)(x+22)}+(x-2)(x+22),$$
$$x^2+14x+13=9+6\sqrt{(x-2)(x+22)}+x^2+20x-44,$$
$$48-6x=6\sqrt{(x-2)(x+22)}\,|:6,$$
$$8-x=\sqrt{(x-2)(x+22)},$$

$$(8-x)^2=(\sqrt{(x-2)(x+22)})^2,$$
$$64-16x+x^2=(x-2)(x+22),$$
$$64-16x+x^2=x^2+20x-44,$$
$$-36x=-108,$$
$$x=3.$$

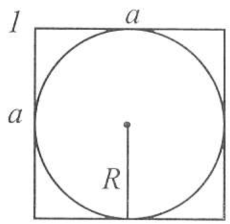
Zatem założenie $x\geq 2$ jest spełnione.
Ponieważ nie stosowaliśmy metody równań równoważnych (a podnoszenie obu stron równania do kwadratu nie jest operacją równoważną) należy dokonać sprawdzenia:

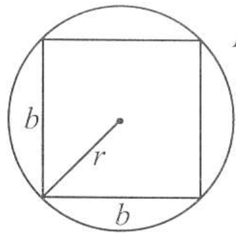
$$L=\sqrt{3+1}+\sqrt{3+13}=2+4=6,$$
$$P=\sqrt{3-2}+\sqrt{3+22}=1+5=6.$$

Odpowiedź: $x=3$.

5.

Rys. 1





Rys. 2

Niech l oznacza wspólny obwód kwadratu o boku a i koła o promieniu r. Mamy

$$4a=l \quad \text{i} \quad 2\pi r=l,$$
$$a=\frac{l}{4} \quad \text{i} \quad r=\frac{l}{2\pi}.$$

Mamy $R=\frac{a}{2}$ i $r=\frac{1}{2}b\sqrt{2}$. (*Dlaczego*?) Zatem

$$L_1=2\pi R=2\pi\cdot\frac{a}{2}=\pi a=\pi\frac{l}{4}=\frac{\pi}{4}l \quad \text{(rys. 1)}.$$
$$L_2=4b=4\cdot\frac{2r}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}r=4\sqrt{2}\cdot\frac{l}{2\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}l \quad \text{(rys. 2)}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{\pi}{4}l}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}l} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} < 1.$$

Sprawdź obliczenia kalkulatorem. Zatem $L_1 < L_2$.

XL

1. Takimi liczbami są:

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$,
$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$,
$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$,
$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

2. Liczb ośmiocyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, jest $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$, co wyjaśnia rysunek.

8	7	6	5	4	3	2	1

Liczba możliwości wpisania cyfry.

Utworzone liczby ustawiamy w pary tak, aby suma odpowiednich cyfr wynosiła dziewięć. Zatem liczby: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ i $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ stanowią parę, jeśli $A_1 + B_1 = 9$, $A_2 + B_2 = 9$, $A_3 + B_3 = 9$, $A_4 + B_4 = 9$, $A_5 + B_5 = 9$, $A_6 + B_6 = 9$, $A_7 + B_7 = 9$, $A_8 + B_8 = 9$.

Na przykład liczby 86741532 i 13258467 stanowią parę. Wszystkich par jest $\frac{40320}{2} = 20160$, a suma liczb w parze wynosi 99999999.

Zatem poszukiwana suma wynosi

$$20160 \cdot 99999999 = 20160 \cdot (100000000 - 1) =$$
$$= 2016000000000 - 20160 = 2015999979840.$$

3. Niech m i n będą liczbami całkowitymi spełniającymi warunki zadania ($n \neq 0$). Mamy równanie

$$(m+n) + (m-n) + m \cdot n + \frac{m}{n} = 150,$$

$$2m + mn + \frac{m}{n} = 150.$$

Widać, że liczba $\frac{m}{n}$ musi być całkowita, a więc $m = kn$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Po podstawieniu $m = kn$ otrzymujemy

$2kn + kn^2 + k = 150$,
$k \cdot (2n + n^2 + 1) = 150$,
$k \cdot (n+1)^2 = 150$.

Zauważmy, że $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Zatem

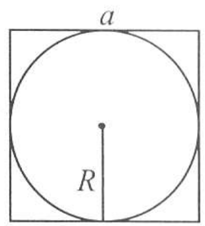
$$\begin{cases} (n+1)^2 = 25 \\ k = 6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} (n+1)^2 = 1 \\ k = 150 \end{cases}.$$

Stąd $(n, k) \in \{(4, 6); (-6, 6); (-2, 150)\}$ (przypadek, gdy $n = 0$ odrzuciliśmy).

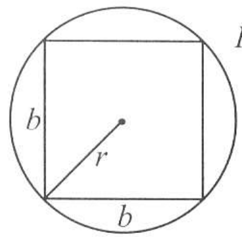
Ponieważ $m = kn$, więc ostatecznie otrzymujemy rozwiązania $(n, m) \in \{(4, 24); (-6, -36); (-2, -300)\}$.

4.

Rys. 1



Rys. 2



Niech S oznacza wspólne pole kwadratu o boku a i koła o promieniu r.

Mamy

$a^2 = S$ i $\pi r^2 = S$,

$a = \sqrt{S}$ i $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Mamy $R = \frac{a}{2}$ i $r = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$. Zatem

$$P_1 = \pi R^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi S}{4} \quad \text{(rys. 1)}.$$

$$P_2 = b^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4r^2}{2} = 2r^2 = \frac{2S}{\pi} \quad \text{(rys. 2)}.$$

Stąd otrzymujemy $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{\pi S}{4}}{\frac{2S}{\pi}} = \frac{\pi^2}{8} > 1$, skąd $P_1 > P_2$.

5. Środki rozważanych kul są wierzchołkami czworościanu foremnego o krawędzi $2R$. Środek kuli stycznej (wewnętrznie lub zewnętrznie) jest punktem przecięcia się wysokości czworościanu. Czytelnik zechce samodzielnie wykazać następujące stwierdzenia:
— wysokości czworościanu foremnego dzielą się w stosunku 3 : 1,
— wysokość czworościanu foremnego o krawędzi a wynosi
$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$
Niech r_w i r_z oznaczają odpowiednio promień kuli stycznej zewnętrznie i wewnetrznie do czterech kul o promieniu R. Czytelnik wykonując rysunek bez trudu stwierdzi, że $R + r_w = \frac{3}{4}H$ oraz $\frac{3}{4}H + R = r_z$. Stąd

$$r_w = \frac{3}{4}H - R = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 2R - R = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)R$$

oraz

$$r_z = \frac{3}{4}H + R = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right)R.$$

Zadania sprawdzające

Rozwiązania poniższych zadań zależą wyłącznie od Czytelnika. Nie podajemy wskazówek ani ostatecznego rozwiązania, aby Czytelnik mógł w pełni samodzielnie spróbować swoich sił i ocenić, czy jest już należycie przygotowany do uczestnictwa w zawodach matematycznych.

1. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, że liczby $p + 10$ i $p + 20$ są również liczbami pierwszymi.

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których $n^2 - 2n - 3$ jest liczbą pierwszą.

★3. Liczba m jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wykaż, że tę własność mają liczby:
a) $2m$; **b)** $5m$; **c)** $8m$.

★4. Liczba m jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wykaż, że tę własność mają liczby:
a) $3m$; **b)** $5m$; **c)** $7m$.

5. Czy suma kwadratów:
a) dwóch; **★b)** trzech
kolejnych liczb naturalnych może być kwadratem liczby naturalnej?

★★6. Niech m i n oznaczają liczbę cyfr zapisu dziesiętnego odpowiednio potęg 2^{2001} i 5^{2001}. Wyznacz sumę $m + n$.

★7. Wykaż, że:

a) $\underbrace{11...1}_{n+1 \text{ cyfr}}\underbrace{55...5}_{n \text{ cyfr}}6 = \underbrace{33...3}_{n \text{ cyfr}}4^2$;

b) $\underbrace{44...4}_{n+1 \text{ cyfr}}\underbrace{88...8}_{n \text{ cyfr}}9 = \underbrace{66...6}_{n \text{ cyfr}}7^2$.

★8. Znajdź cyfry $A_1, A_2, ..., A_n$ spełniające warunek $1A_1A_2 ... A_n2 : 2A_1A_2 ... A_n1 = 12 : 21$.

9. Rozwiąż równanie $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 2$ w liczbach naturalnych x, y, z.

10. Rozwiąż równanie $x^2 = |x|$.

★★11. Wykaż, że $|a-b| + |a+b| = |a| + |b| + ||a| - |b||$.

★12. Wykaż, że jeśli $a^2 + b^2 = 1$ i $c^2 + d^2 = 1$, to $|ac + bd| \leq 1$.

★13. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to:

a) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$;

b) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$.

14. Narysuj wykres funkcji $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$.

15. Podaj przykład funkcji f, takiej że $f(x) + f(1-x) = x^2 - x + 1$.

★★16. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} < 2$.

17. W pewnym trójkącie środkowa jest dwa razy krótsza od boku, do którego została poprowadzona. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.

18. Wykaż, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta jest nie większa od połowy przeciwprostokątnej.

19. Ramiona pewnego trapezu są zawarte w prostych prostopadłych. Wykaż, że suma kwadratów ramion jest równa kwadratowi różnicy podstaw.

★20. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Punkt S jest punktem styczności tego okręgu z przeciwprostokątną AB. Wykaż, że iloczyn $|AS| \cdot |BS|$ jest równy polu trójkąta ABC.

★21. Dwa okręgi o promieniach odpowiednio 2 cm i 8 cm są styczne zewnętrznie. Oblicz długość odcinka stycznej do tych okręgów.

22. Wykaż, że jeśli wielokąt wypukły ma wszystkie kąty proste, to jest prostokątem.

★23. Wyznacz największą objętość, jaką może mieć prostopadłościan o przekątnej d.

★24. Wykaż, że $\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$.

25. W jednym stopie metali szlachetnych stosunek wagowy srebra do złota wynosi 2 : 3, a w drugim stopie stosunek ten wynosi 2 : 5. W jakim stosunku wagowym należy wziąć te stopy, aby po stopieniu stosunek wagowy srebra do złota wynosił 1 : 2?

26. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna suma wyrzuconych oczek?

★27. Wykaż, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 16.

★28. Wykaż, że wśród dowolnych sześciu kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba niepodzielna przez 2, 3 i 5.

29. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których liczba n^2+1 jest podzielna przez 13.

★30. Czy istnieją cztery kolejne liczby nieparzyste będące liczbami pierwszymi?

31. Niech p będzie daną liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie takie pary liczb naturalnych x i y, że:
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$.

★32. Niech p i q będą danymi liczbami pierwszymi. Znajdź wszystkie takie pary liczb naturalnych x i y, że:
$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=1$.

33. Wykaż, że każdą liczbę naturalną większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.

★34. Wykaż, że liczba 81000009000001 jest złożona.

★35. Wykaż, że liczba $4\underbrace{00\ldots0}_{99\text{ zer}}1$ jest złożona.

36. Znajdź sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby $10^{2007}-2007$.

37. Oblicz $\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ dziewiątek}}1 \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ zer}}9$.

38. Ile dziewiątek ma na początku zapis dziesiętny liczby $\sqrt{\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cyfr}}}$?

39. Wykaż, że liczba $9\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ zer}}6\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ zer}}1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

★40. Wykaż, że żadna liczba sześciocyfrowa postaci:
a) $ABCABC$; **b)** $AAABBB$; **c)** $ABABAB$
nie jest kwadratem liczby naturalnej.

★41. Liczby $7k$ i $12k$ są całkowite. Wykaż, że liczba k jest całkowita.

42. Liczby $9k$ i $12k$ są całkowite. Czy liczba k musi być całkowita?

43. Pewna liczba całkowita przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, a przy dzieleniu przez 4 – resztę 3. Znajdź resztę z dzielenia tej liczby przez 12.

★44. Wykaż, że $\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ cyfr}} \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ cyfr}} \geq \underbrace{11\ldots1}_{m+n-1\text{ cyfr}}$. Kiedy zachodzi równość?

★45. Niech a i b będą liczbami naturalnymi. Wykaż, że
$NWD(a,b)+NWW(a,b)\geq a+b$. Kiedy zachodzi równość?

★46. Niech m i n będą liczbami naturalnymi. Wykaż, że jeżeli liczba $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{n^2}$ jest całkowita, to $m=1$ i $n=1$.

47. Czy liczbę 1 można przedstawić w postaci sumy odwrotności:
a) trzech; **b)** czterech; **c)** pięciu
różnych liczb naturalnych?

48. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne x, y, z, że
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$.

49. Wskaż największy z ułamków:
$\frac{11}{12}, \frac{1111}{1212}, \frac{111111}{121212}, \frac{11111111}{12121212}, \frac{1111111111}{1212121212}$.

★50. Który z ułamków jest większy:

$$\frac{\overbrace{11\ldots13}^{n\text{ cyfr}}}{\underbrace{22\ldots23}_{n\text{ cyfr}}} \quad \text{czy} \quad \frac{\overbrace{44\ldots43}^{n\text{ cyfr}}}{\underbrace{88\ldots83}_{n\text{ cyfr}}}?$$

51. Wykaż, że $2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{98}+2^{99}=2^{100}-2$.

52. Wykaż, że:
a) $\sqrt{27}+\sqrt{48}=\sqrt{147}$; b) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{250}$.

★53. Wykaż, że $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

54. Wykaż, że liczba $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ jest całkowita.

★55. Czy liczba $\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{7+\sqrt{48}}$ jest niewymierna?

56. Wykaż, że $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}<2$.

57. Wykaż, że $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}>1$.

58. Wykaż, że $0{,}\underbrace{33...3}_{n\text{ cyfr}}<\sqrt{0{,}\underbrace{11...11}_{n\text{ cyfr}}}<\frac{1}{3}$.

★★59. Wykaż, że $18<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}}<19$.

★60. Oblicz wartość wyrażenia $a^2+b^2+c^2-abc$
dla $a=99\frac{1}{99}$, $b=101\frac{1}{101}$, $c=9999\frac{1}{9999}$.

61. Wiadomo, że $\frac{a+2b}{a-2b}=7$. Oblicz $\frac{a+3b}{a-3b}$.

★62. Wykaż, że jeżeli a, b, $c>0$, to $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$.

63. Dla jakich wartości b funkcje $y=x+b$ i $y=2x-b+1$ mają to samo miejsce zerowe?

64. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkty $A(a, b)$ i $B(a, b)$, gdzie $a\neq b$. Wykaż, że liczba $a+b$ jest miejscem zerowym tej funkcji.

★65. Czy z odcinków o długościach: 999^{999}, 1000^{1000}, 1001^{1001} można zbudować trójkąt?

★66. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Wykaż, że $(a+b+c)^2>2(a^2+b^2+c^2)$.

67. Niech h_1, h_2, h_3 będą długościami wysokości trójkąta. Wykaż, że $h_3>\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$.

68. Wykaż, że jeżeli wysokości trójkąta o długościach h_1, h_2, h_3 spełniają równanie $(h_1h_3)^2+(h_2h_3)^2=(h_1h_2)^2$, to ten trójkąt jest prostokątny.

69. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta, a h_1, h_2, h_3 – jego wysokościami. Wykaż, że
$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_1+h_2+h_3)\cdot\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right).$$

70. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i b. Wykaż, że $a+b\leq\sqrt{2}c$, gdzie c jest długością przeciwprostokątnej.

★71. Przez punkt leżący wewnątrz trójkąta poprowadzono trzy proste równoległe do boków trójkąta. Proste te podzieliły trójkąt na sześć części, z których trzy są trójkątami o polach 1 cm², 4 cm², 9 cm². Oblicz pole trójkąta.

★72. Wyznacz pole trójkąta o bokach długości 13 cm, 14 cm, 15 cm.

73. Niech α, β, γ będą miarami kątów trójkąta. Wykaż, że jeżeli $\alpha > \beta + \gamma$, to ten trójkąt jest rozwartokątny.

74. Każdy bok pewnego prostokąta zwiększono o 2 cm, otrzymując prostokąt o polu 20 cm^2 większym. O ile zwiększyłoby się pole danego prostokąta, gdyby każdy jego bok zwiększyć o 3 cm?

★75. Wyznacz pole rombu o boku długości 2 cm, jeżeli suma długości jego przekątnych jest równa 5 cm.

76. Dany jest równoległobok o obwodzie 6 cm i polu 2 cm^2. Oblicz $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$, gdzie h_1 i h_2 są wysokościami równoległoboku.

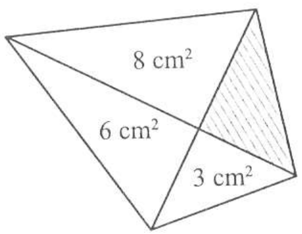
★77. Podstawy trapezu mają długości 10 cm i 20 cm, a ramiona 10 cm i $4\sqrt{5}$ cm. Wyznacz pole tego trapezu.

★78. W trapezie $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O. Pola trójkątów AOB i COD są równe odpowiednio 4 cm^2 i 9 cm^2. Wyznacz pole tego trapezu.

★★79. W trapezie o podstawach długości a i b poprowadzono odcinek łączący jego ramiona i dzielący trapez na dwa trapezy o równych polach. Wyznacz długość tego odcinka.

★★80. Niech a, b, c, d będą długościami kolejnych boków czworokąta wypukłego o polu S. Wykaż, że $S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

81. Oblicz pole zakreskowanego trójkąta:



82. Wykaż, że długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wyraża się wzorem $r = \frac{a+b-c}{2}$,

gdzie a, b i c oznaczają długości przyprostokątnych i długość przeciwprostokątnej.

83. Wykaż, że długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o obwodzie l i polu S wyraża się wzorem $r = \frac{2S}{l}$.

84. W trójkąt o wysokościach h_1, h_2, h_3 wpisano okrąg o promieniu r. Wykaż, że $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$.

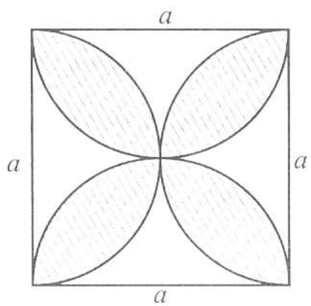
85. Dany jest wielokąt foremny $A_1 A_2 \ldots A_{10}$. P jest dowolnym punktem okręgu opisanego na wielokącie $A_1 A_2 \ldots A_{10}$. Wykaż, że
$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_{10}|^2 = 20R^2$,
gdzie R jest promieniem tego okręgu.

86. W trapez równoramienny o podstawach długości 4 cm i 9 cm wpisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu.

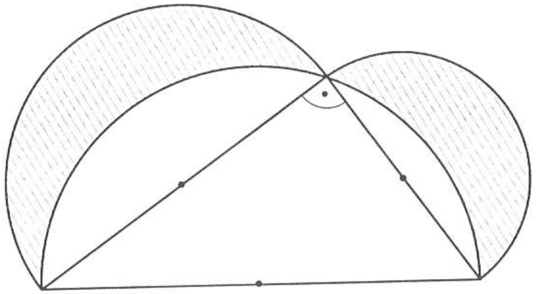
87. W trapez prostokątny o podstawach długości 4 cm i 12 cm wpisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu.

88. Punkty A, B, C dzielą okrąg na łuki, których stosunek długości wynosi 3 : 4 : 5. Wyznacz kąty trójkata ABC.

★89. Wyznacz pole zakreskowanej figury:



★**90.** Ze środków boków trójkąta prostokątnego zakreślono trzy półokręgi (patrz poniższy rysunek). Wykaż, że suma pól zakreskowanych figur (są to tzw. księżyce Hipokratesa) jest równa polu trójkąta.



91. Wyznacz objętość prostopadłościanu, którego pola trzech wzajemnie prostopadłych ścian są równe 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2.

92. Niech W, S, K oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, ścian, krawędzi wielościanu. Oblicz $W + S - K$, gdy wielościan jest:

a) graniastosłupem n-kątnym;

b) ostrosłupem n-kątnym.

93. Jaką objętość ma stożek, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest półkolem o promieniu 16 cm?

94. Kropla wody w kształcie kuli rozpadła się na tysiąc jednakowych kropelek. Ile razy suma pól powierzchni małych kropelek jest większa od pola powierzchni dużej kropli?

95. Dziesięciu uczniów ma razem 50 znaczków pocztowych. Wykaż, że co najmniej dwóch uczniów posiada tę samą liczbę znaczków.

96. Spośród 30 uczniów pewnej klasy 15 zna język angielski, 10 – język francuski, a 6 nie zna żadnego z tych języków. Ilu uczniów zna język angielski i francuski?

97. W pewnym mieście w Szwajcarii 80% ludności umie mówić po niemiecku, a 70% – po francusku. Jaki procent ludności tego miasta umie mówić w obu językach?

98. Za trzy długopisy zapłacono mniej niż 1 zł. Za pięć takich samych długopisów zapłacono więcej niż 1,6 zł. Ile kosztował jeden długopis?

★**99.** W pola szachownicy 8×8 wpisano w sposób przypadkowy liczby ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Obliczono sumy liczb w wierszach, w kolumnach i na przekątnych. Wykaż, że pewne dwie spośród tych sum są równe.

100. W pola szachownicy 3×3 wpisz liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, aby sumy liczb w wierszach, w kolumnach i na przekątnych były równe.

Skorowidz tematyczny

Liczby pierwsze: I 1, II 1, III 1, IV 1, XII 1, XVIII 1, XXIV 2, XXVI 2, XXVII 2, XXXI 2, XXXIV 2, XXXVII 1.
Podzielność: III 2, V 1, VII 2, VIII 1, IX 1, XV 2, XVII 1, XX 1, XXI 1, XXIV 2, XXVII 2, XXVIII 1, XXXVI 1, XXXVI 3, XXXVIII 1.
Liczby całkowite: I 2, II 2, V 2, XI 1, XIV 1, XVI 1, XXI 2, XXII 2, XXIV 3, XXV 2, XXVIII 1, XXIX 1, XXX 1, XXX 2, XXXII 2, XXXIII 2, XXXIV 1, XXXV 2, XXXVI 2, XXXIX 2, XL 1, XL 2, XL 3.
Zapis dziesiętny: IV 2, VI 1, X 1, XIII 1, XV 1, XIX 1, XXIII 1, XXIV 1, XXV 1, XXVI 1, XXVII 1, XXXI 1, XXXII 1, XXXIII 1, XXXV 1.
Liczby rzeczywiste: VII 2, VIII 2, IX 3, XVII 2, XXXII 3, XXXVII 3, XXXVIII 2.
Wyrażenia algebraiczne: XI 2, XIV 4, XVII 2, XVII 3, XXXVIII 4, XXXIX 3.
Równania: II 3, IV 3, V 3, VI 3, VIII 3, X 2, XIII 3, XIV 3, XV 4, XVIII 2, XXI 2, XXII 2, XXII 3, XXIV 3, XXV 3, XXVI 3, XXVII 3, XXVIII 2, XXIX 1, XXXI 3, XXXV 2, XXXVIII 3, XXXIV 4.
Nierówności: IV 4, VI 2, VII 3, XII 2, XIV 2, XVI 3, XIX 2, XXI 4, XXII 4, XXII 5, XXIII 3, XXIII 4, XXXIV 5, XXIX 2, XXXIII 3, XXXIV 3, XXXV 2, XXXVI 3, XXXVII 4.
Funkcja liniowa: I 3, II 4, VII 4, X 3, XI 4, XII 3, XX 3.
Funkcje z wartością bezwględną: III 3, V 4, VIII 4, XIX 2, XXIII 3, XXV 4, XXVIII 3.

Zadania tekstowe: XI 3, XIII 4, XV 4, XVII 4, XVIII 4, XXVII 4, XXXI 4.
Trójkąty: II 5, III 4, III 5, IV 5, VIII 5, IX 5, XXI 5, XXIV 4, XXVI 4, XXVIII 4, XXXII 4, XXXIII 4.
Wielokąty: I 5, VI 4, VI 5, IX 4, X 4, X 5, XII 5, XIII 5, XIV 5, XV 5, XIX 5, XXI 5, XXII 5, XXIII 5, XXV 5, XXVI 5, XXIX 4, XXXI 5, XXXII 5, XXXIII 5, XXXVII 5.
Okręgi i koła: I 4, III 4, IV 5, VI 4, VII 5, IX 5, X 5, XI 4, XI 5, XVI 5, XVII 5, XVIII 5, XIX 4, XX 4, XX 5, XXXIV 5, XXXVI 4, XXXIX 5, XL 4.
Bryły: I 5, XXVII 5, XXX 4, XXXV 5, XXXVI 5, XL 5.
Prawdopodobieństwo: XXVIII 5, XXIX 5, XXX 5, XXXIV 4, XXXV 4.
Zadania różne: XXIX 3, XXX 3, XXXVIII 5.

Notatki

Wydawnictwo NOWIK

poleca nauczycielom i uczniom gimnazjum

E. Lodzińska:
Zbiór zadań konkursowych z matematyki dla gimnazjum
Wydanie II rozszerzone

Zbiory zadań dla uczniów gimnazjum umożliwiające samodzielne przygotowanie się do konkursów matematycznych.

Stanisław Kalisz, Jan Kulbicki, Henryk Rudzki:
Egzamin gimnazjalny. Część matematyczno-przyrodnicza

Zbiór zadań przeznaczony dla uczniów gimnazjum przygotowujących się do egzaminu końcowego. Zadania przedmiotowe i zintegrowane zostały tak dobrane, by uczeń, rozwiązując je, zdobywał i doskonalił umiejętności opisane w standardach wymagań egzaminacyjnych oraz utrwalał wiedzę i umiejętności z przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. Obok przykładowych arkuszy egzaminacyjnych znajduje się „mapa zadań", która ułatwi opracowanie dodatkowych arkuszy.

B. Biernat, S. Biernat, M. Bierówka, I. Rutkowska:
Zbiór zadań z matematyki dla gimnazjum

Wydanie II rozszerzone

Zbiór zadań dla klas I – III, uzupełniony krótkim przypomnieniem najważniejszych pojęć i własności pomocnych przy rozwiązywaniu zadań. Zbiór zawiera m.in. 100 zadań ukazujących praktyczne wykorzystanie matematyki. Są to jednocześnie zadania, z jakimi uczeń spotka się na egzaminie gimnazjalnym.

Cezary Sosnowski:
Egzamin z matematyki w gimnazjum. Kurs przygotowawczy

Zbiór zadań w formie repetytorium z matematyki, ułatwiający przygotowanie się do egzaminu końcowego. W książce znajduje się wiele zadań o charakterze integracyjnym, międzyprzedmiotowym oraz przykładowe testy matematyczno-przyrodnicze.

Teresa Czerklańska:
Metoda biograficzna. Prace projektowe i inscenizacje

Metoda biograficzna to jedna z metod aktywizujących uczniów. Szczególnie polecana jest w sytuacji, gdy chcemy „odformalizować" matematykę przez badanie biografii ludzi tworzących i rozwijających naukę. Metoda jest użyteczna na każdym poziomie nauczania, a ze względu na opis metody i przykłady książka jest przydatna nauczycielom wszystkich przedmiotów szkolnych. To bardzo atrakcyjna metoda, niezbyt trudna do przygotowania dla nauczyciela, ale wymagająca sporo pracy przygotowawczej od uczniów.

Zdzisława Szkotak, Lucyna Dzikiewicz-Niski:
Potyczki ze statystyką

Ze statystyką spotykamy się bardzo często. Zadania sprawdzające wiedzę ze statystyki są też w sprawdzianie na zakończenie szkoły podstawowej i na egzaminie w gimnazjum. Zebrane w książce zadania i prace projektowe uczniów związane z konkursami pod hasłem *Potyczki ze statystyką* pozwolą poznać bliżej zastosowania statystyki, interpretować napotykane informacje statystyczne, przedstawiać informacje w formach stosowanych przez statystyków, przygotować się do egzaminu w gimnazjum

Bożena Prystupa:
Inscenizacje matematyczne
Statystyczny człowiek i Tales człowiek z cienia

Autorka w kolejnej książce proponuje, aby podczas szkolnych przedstawień uczniowie dowiedzieli się, kim był Tales i co mu zawdzięczamy oraz jaką siłę w matematyce mają wskaźniki statystyczne, przy pomocy których można opisać życie człowieka, wyciągać odpowiednie wnioski, a nawet zmieniać przyszłość.

Książki można kupić w księgarniach lub zamówić w Wydawnictwie

Biuro Handlowe **Wydawnictwa NOWIK Sp.j.**
45-061 Opole, ul. Katowicka 39 p. 110, tel./fax (0-77) 454 36 04
www.nowik.com.pl **e-mail:** matma@nowik.com.pl
