KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych w roku szkolnym 2013/214

III stopień zawodów (wojewódzki)

1 lutego 2014 r.

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga:

Za każde poprawne rozwiązanie, inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
odpowiedź	D	A	C	B	B	D	D	A

Zadanie 9. ***(4 pkt)***
Oblicz sumę wszystkich liczb czterocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (cyfry nie mogą się powtarzać).

I sposób rozwiązania
Zauważamy, że wszystkich liczb czterocyfrowych, których cyfry wybrane są ze zbioru $\{1,2,3,4\}$ i w których cyfry się nie powtarzają jest 24.
Pierwszą cyfrę możemy wybrać na 4 sposoby spośród cyfr 1, 2, 3 i 4, drugą na 3 sposoby (cyfry nie mogą się powtarzać), trzecią na 2 sposoby.
Wypisujemy wszystkie liczby spełniające warunki zadania i dodajemy je, np.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321
7998	13776	19554	25332

Suma wszystkich liczb jest równa: 7998 + 13776 + 19554 + 25332 = 66660.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że wszystkich liczb czterocyfrowych, których cyfry wybrane są ze zbioru $\{1,2,3,4\}$ i w których cyfry się nie powtarzają jest 24.

Pierwszą cyfrę możemy wybrać na 4 sposoby spośród cyfr 1, 2, 3 i 4 drugą na 3 sposoby (cyfry nie mogą się powtarzać), trzecią na 2 sposoby.
Każda z cyfr 1, 2, 3, 4 jako cyfra jedności występuje w sześciu liczbach czterocyfrowych.
Dodając cyfry jedności tych liczb otrzymujemy 6 $*$ (1+2+3+4)=60.
Tyle samo wynoszą sumy wszystkich cyfr dziesiątek, setek i tysięcy tych czterocyfrowych liczb.
Wnioskujemy zatem, że suma liczb czterocyfrowych jest równa: $60+60\cdot10+60\cdot100+60\cdot1000=66660$

Odpowiedź:
Suma wszystkich liczb czterocyfrowych spełniających warunki zadania jest równa 66660.

Sposób oceniania rozwiązania

1pkt – za zapisanie, że istnieją 24 liczby czterocyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (przy czym cyfry nie powtarzają się).

1pkt – za wypisanie wszystkich liczb czterocyfrowych, które można zapisać wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (przy czym cyfry nie powtarzają się).
albo
zapisanie sum „tysięcy”, „setek”, „dziesiątek”, „jedności”.

1pkt – wypisanie liczb spełniających warunki zadania z pominięciem co najwyżej trzech liczb i obliczenie ich sumy
albo
zapisanie sumy „tysięcy” lub „setek” lub „dziesiątek” lub „jedności” z jednym błędem rachunkowym i obliczenie ich sumy.

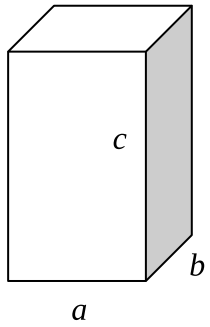
1pkt – za obliczenie sumy liczb czterocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (przy czym cyfry nie mogą sie powtarzać): 66660.

Uwaga

Jeżeli uczeń wypisze liczby spełniające warunki zadania z pominięciem co najwyżej trzech liczb i nie obliczy ich sumy albo zapisze sumy „tysięcy” lub „setek” lub „dziesiątek” lub „jedności” z jednym błędem rachunkowym i nie obliczy ich sumy, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 pkt.**

Zadanie 10. ***(4 pkt)***
W pewnym prostopadłościanie iloczyn pól trzech ścian o wspólnym wierzchołku jest równy 576. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Przykładowe rozwiązanie



Wprowadzamy oznaczenia:
- *a, b, c* – długości krawędzi prostopadłościanu,
- P_1, P_2, P_3 – pola powierzchni ścian o wspólnym wierzchołku.

Z warunków zadania wiemy, że $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 576$.
Zapisujemy pola poszczególnych ścian prostopadłościanu w zależności od długości krawędzi: $P_1 = ab$, $P_2 = bc$, $P_3 = ac$.
Zapisujemy iloczyn $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ w zależności od długości krawędzi prostopadłościanu: $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = ab \cdot bc \cdot ac = 576$
Zależność $ab \cdot bc \cdot ac = 576$ zapisujemy w postaci: $(abc)^2 = 576$ i wyznaczamy iloczyn abc: $abc = 24$.
Iloczyn abc jest równy objętości prostopadłościanu o krawędziach *a*, *b*, *c* zatem $V = abc = 24$.

Odp.: Objętość tego prostopadłościanu jest równa 24.

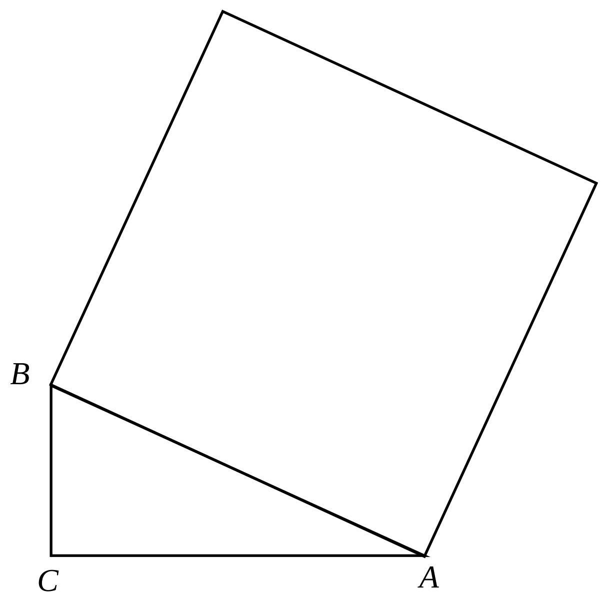
Sposób oceniania rozwiązania

1pkt – za zapisanie pola poszczególnych ścian prostopadłościanu w zależności od długości krawędzi: $P_1 = ab$, $P_2 = bc$, $P_3 = ac$.
1pkt – za zapisanie zależności $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 576$ w postaci: $ab \cdot bc \cdot ac = 576$.
1pkt – za zapisanie iloczynu pól powierzchni ścian w postaci $(abc)^2 = 576$.
1pkt – za wyznaczenie wartości iloczynu abc: $abc = 24$ i zapisanie, że objętość prostopadłościanu $V = abc = 24$.

Uwaga
Jeśli uczeń zakończy rozwiązanie zapisem $abc = 24$, to takie rozwiązanie oceniamy jak rozwiązanie pełne i przyznajemy **4 pkt.**

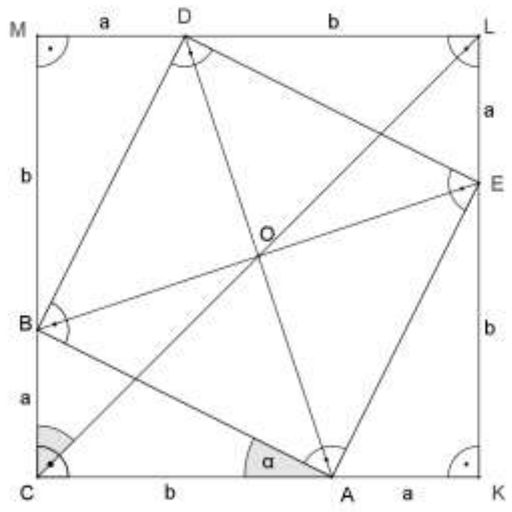
Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym przyprostokątna *BC* ma długość *a*, natomiast długość przyprostokątnej *AC* jest równa *b*. Na przeciwprostokątnej na zewnątrz trójkąta zbudowano kwadrat o boku *AB* (zobacz rysunek). Punkt *O* jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu. Oblicz miarę kąta *OCB* i zapisz wszystkie obliczenia.



Rozwiązanie

Rysujemy półproste *CB* i *CA*. Następnie kreślimy proste prostopadłe do tych półprostych *LM* i *KC* i przechodzące przez wierzchołki kwadratu *A* i *D*. Następnie rysujemy prostą prostopadłą do prostej *CK* i przechodzącą przez wierzchołek kwadratu *E*.
W ten sposób zbudowaliśmy kwadrat *CKLM* o boku długości $a+b$.



Wprowadzamy oznaczenie: $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, stąd i z własności miar kątów w trójkącie prostokątnym otrzymujemy $|\sphericalangle CBA| = 90° - \alpha$.

Z własności miar kątów przyległych wnioskujemy, że $|\sphericalangle DBM| = \alpha$, a $|\sphericalangle BDM| = 90° - \alpha$. Odcinki *AB* i *BD* są równe, ponieważ są bokami kwadratu *ABDE*, stąd trójkąt *BDM* jest przystający do trójkąta *ABC*.
Podobnie pokazujemy, że trójkąt *DEL* i trójkąt *AKE* są przystające do trójkąta *ABC*.
Punkt *O* jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu *ABDE* i jednocześnie punktem przecięcia przekątnych kwadratu *CKLM*.
Zatem miara kąta *OCB* jest równa 45^0.

<u>Sposób oceniania rozwiązania</u>

1 pkt – za pokazanie metody rozwiązania, np. zbudowanie czworokąta *CKLM.*
1 pkt – za wykazanie, że czworokąt *CKLM* jest kwadratem, np. uzasadnienie przystawania odpowiednich trójkątów.
1 pkt – za zapisanie, że punkt *O* jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu *CKLM*
lub
za zapisanie, że odcinek *OC* zawiera się w przekątnej *CL* kwadratu *CKLM*.
1 pkt – za zapisanie wraz z uzasadnieniem, że miara kąta *OCB* jest równa 45^0.

<u>Uwaga:</u>
Jeśli uczeń zbuduje czworokąt *CKLM* i poda odpowiedź bez uzasadnienia, że *CKLM* jest kwadratem, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 pkt** .

Wyciąg z Regulamin Konkursów Przedmiotowych dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów województwa mazowieckiego w roku szkolnym 2013/2014

§ 11
(…)
3.Uczestnicy etapu wojewódzkiego mogą uzyskać tytuł laureata lub finalisty. Laureatami zostają uczestnicy etapu wojewódzkiego, którzy uzyskali co najmniej 80 % punktów możliwych do zdobycia. Finalistami zostają uczestnicy etapu wojewódzkiego, którzy uzyskali co najmniej 60% punktów możliwych do zdobycia.

Maksymalna liczba punktów	20 pkt
Tytuł laureata	16 - 20 pkt
Tytuł finalisty	12 - 15 pkt