Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga1.

Łącznie uczeń może zdobyć **25 punktów.**

Laureatem konkursu zostaje uczeń, który w etapie wojewódzkim uzyska **co najmniej 80% punktów** możliwych do zdobycia **(co najmniej 20 punktów).**

Finalistą konkursu zostaje uczeń, który w etapie wojewódzkim uzyska **co najmniej 60% punktów** możliwych do zdobycia **(co najmniej 15 punktów).**

Uwaga2.

Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

Nr zadania	**1.**
Maks. liczba punktów	1 pkt
Odpowiedź poprawna	**D**

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Znajdź wszystkie liczby całkowite *x*, dla których $\sqrt{4-4x+x^2}=2-x$ oraz $\sqrt{(-x)^2}=x$.
Opisz sposób rozumowania.

Uczeń:	
• poprawnie wyłącza pierwiastek w pierwszym wyrażeniu	1 p
• wyznacza liczby całkowite spełniające pierwszy warunek	1 p
• wyznacza liczby całkowite spełniające drugi warunek	1 p
• wyciąga wnioski i podaje poprawną odpowiedź	1 p

Rozwiązanie:

1. $\sqrt{4-4x+x^2}=\sqrt{(2-x)^2}=|2-x|$

2. $[|2-x|=2-x] \Leftrightarrow [2-x\geq 0] \Leftrightarrow [x\leq 2]$
$[(x\leq 2)\wedge(x\in C)] \Leftrightarrow x\in\{\ldots,-2,-1,0,1,2\}$

3. $\left[\sqrt{(-x)^2}=x\right] \Leftrightarrow [x\geq 0]$
$[(x\geq 0)\wedge(x\in C)] \Leftrightarrow x\in\{0,1,2,3,4\ldots\}$

4. **Wniosek:** liczby całkowite spełniające powyższe warunki to 0, 1 i 2.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Wyznacz wszystkie liczby całkowite *m*, dla których funkcja liniowa $f(x)=(3-m)\cdot x+|m-1|-4$ jest rosnąca i jednocześnie wykres tej funkcji przecina oś OY w punkcie $(0,2)$.

Uczeń:	
• zapisuje warunek dla współczynnika kierunkowego funkcji liniowej rosnącej	1 p
• zapisuje warunek dla wyrazu *b* we wzorze funkcji $f(x)=ax+b$	1 p
• rozwiązuje zapisane nierówności	**1** p
• wskazuje liczby całkowite spełniające obie nierówności	1 p

Rozwiązanie:

1. funkcja liniowa rosnąca:
   $[(3-m>0)\wedge m\in C]\Leftrightarrow[(m<3)\wedge m\in C]\Leftrightarrow m\in\{\ldots,-2,-1,0,1,2\}$
2. wykres funkcji *f* przecina oś OY w punkcie $(0,2)$:
   $[|m-1|-4=2\wedge m\in C]\Leftrightarrow[|m-1|=6\wedge m\in C]\Leftrightarrow(m=-5\vee m=7)$
3. liczba *m* spełnia jednocześnie: $m\in\{\ldots,-2,-1,0,1,2\}$ i $(m=-5\vee m=7)$
4. **Wniosek:** funkcja *f* spełnia podane warunki dla $m=-5$.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Majster i dwaj robotnicy malują ściany w nowym budynku. W ciągu godziny pierwszy robotnik wykonuje $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{2}{3}$ pracy wykonywanej w tym samym czasie przez majstra. Gdyby majster pracował sam pomalowałby wszystkie ściany w ciągu 10 godzin. Ile godzin potrzebuje trzyosobowa ekipa (majster + dwaj robotnicy) na pomalowanie wszystkich ścian w tym budynku?

Uczeń:	
• ustala, jaką część pracy wykona ekipa w ciągu jednej godziny	1 p
• układa zależność między ilością wykonanej pracy i czasem pracy	1 p
• układa równanie wykorzystując proporcjonalność odwrotną	1 p
• oblicza, po ilu dniach ekipa wykona pracę.	1 p

Rozwiązanie:

1. *p* – ilość pracy, jaką majster wykona w ciągu jednej godziny

$p+\frac{5}{6}p+\frac{2}{3}p=\frac{5}{2}p$ – ilość pracy, jaką w ciągu jednej godziny wykona trzyosobowa ekipa

2.	ilość pracy wykonanej w ciągu godziny	czas na wykonanie całej pracy
majster	p	10 [godzin]
ekipa	2,5 p	x [godzin]

3. te dwie wielkości (ilość pracy i czas) są odwrotnie proporcjonalne, więc

$$p \cdot 10 = \frac{5}{2} p \cdot x$$

4. $x = 10p \cdot \frac{2}{5p}$

$x = 4[godziny]$

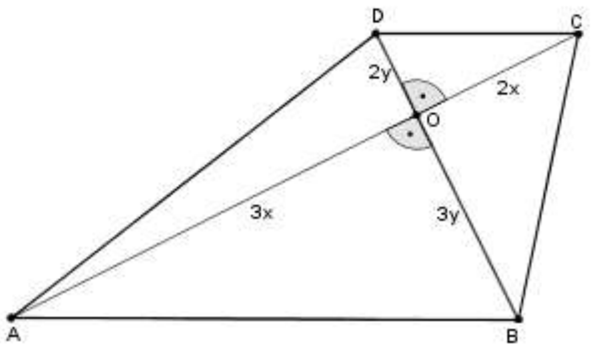
<u>Odp.</u> Trzyosobowa ekipa potrzebuje 4 godzin na pomalowanie wszystkich ścian.

Zadanie 5. ***(4 pkt.)***

W czworokącie *ABCD* przekątne *AC* i *BD* przecinają się w punkcie *O* pod kątem prostym w taki sposób, że $\frac{CO}{AO} = \frac{DO}{BO} = \frac{2}{3}$. Uzasadnij, że czworokąt *ABCD* jest trapezem. Oblicz pole tego czworokąta przyjmując: $|AC| = 20cm,\ |BD| = 14cm.$

Uczeń:	
• uzasadnia podobieństwo trójkątów *AOB* i *COD*, wskazując odpowiadające boki i kąt prosty	1 p
• wskazuje w trójkątach podobnych kąty przystające, które są jednocześnie kątami naprzemianległymi	1 p
• z równości kątów naprzemianległych wnioskuje o równoległości pary przeciwległych boków czworokąta	1 p
• oblicza pole trapezu	1 p

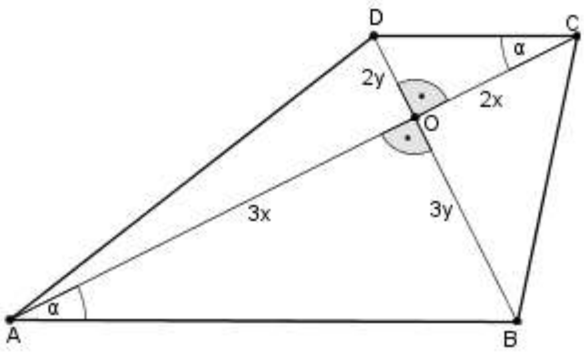
<u>Rozwiązanie:</u>



1. trójkąty *AOB* i *COD* są podobne, ponieważ:

$$\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{3x}{3y} = \frac{x}{y} \qquad \frac{|CO|}{|DO|} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

$$|\angle AOB| = 90° = |\angle COD|$$



2. w trójkątach podobnych *AOB* i *COD* są kąty przystające: $\angle OAB \equiv \angle OCD$ (kąty naprzemianległe)

3. przy dwóch prostych przeciętych trzecią prostą kąty naprzemianległe są równe $\Leftrightarrow$ te proste są równoległe $\Leftrightarrow$ czworokąt, który ma parę boków równoległych jest trapezem

4. pole trapezu jest równe sumie pól trójkątów: ΔACD i ΔACB:

$$P_{ABCD} = \frac{|AC|\cdot|OD|}{2} + \frac{|AC|\cdot|OB|}{2} = \frac{|AC|\cdot|BD|}{2} = \frac{20\cdot 14}{2} = 140cm^2$$

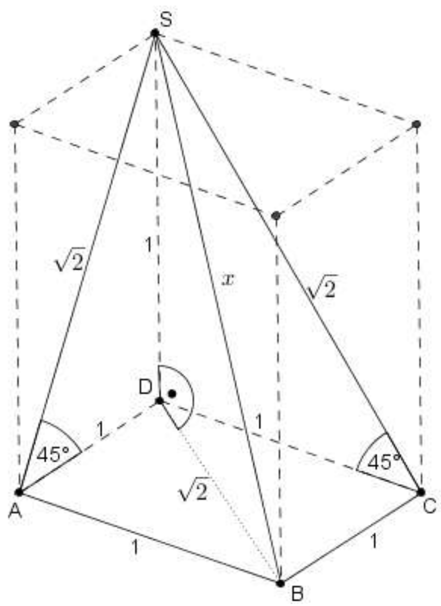
Zadanie 6. ***(4 pkt)***

W ostrosłupie *ABCDS*, o podstawie kwadratowej *ABCD*, krawędź *DS* o długości 10 cm jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Kąty nachylenia ścian bocznych *ABS* i *BCS* do płaszczyzny podstawy są równe 45°. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa oraz pole jego powierzchni bocznej.

Uczeń:	
• rysuje model (lub siatkę) ostrosłupa	1 p
• zauważa, że trójkąty: ΔABS i ΔBCS są prostokątne	1 p
• oblicza długości krawędzi i ich sumę	1 p
• oblicza pole powierzchni bocznej ostrosłupa	1 p

Rozwiązanie:

1. rysunek, np. z wykorzystaniem modelu graniastosłupa



2. w trójkącie BCS: $|BC|^2 = 100,\ |CS|^2 = 200,\ |BS|^2 = 300$

   w trójkącie ABS: $|AB|^2 = 100,\ |AS|^2 = 200,\ |BS|^2 = 300$

   Wniosek: na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąty ΔABS i ΔBCS są prostokątne

3. w trójkącie prostokątnym *ADS*: $|AS| = \sqrt{10^2 + 10^2}$
   $|AS| = 10\sqrt{2}$

   analogicznie: $|CS| = 10\sqrt{2}$

w trójkącie prostokątnym *BDS*: $$|BS|^2 = x^2 = 100 + 100 \cdot 2$$ $$|BS| = x = 10\sqrt{3}$$

<u>Wniosek:</u> suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa:

$$5 \cdot 10 + 20\sqrt{2} + 10\sqrt{3} = 10\left(5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\ [cm]$$

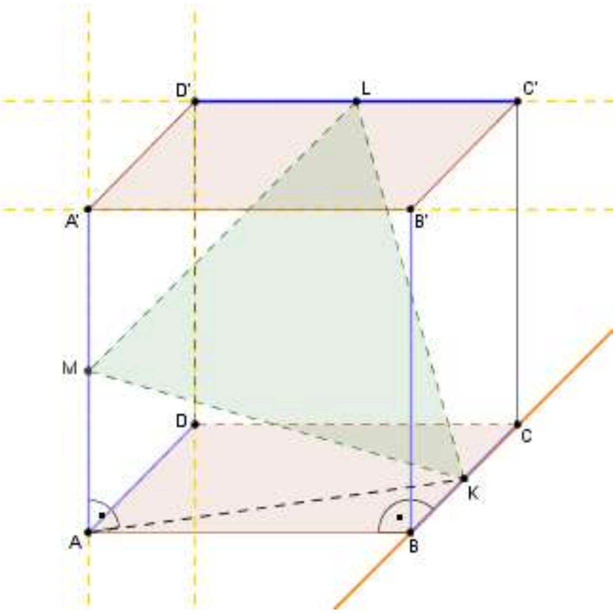
4. pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 10\sqrt{2}}{2} = 100\left(1 + \sqrt{2}\right)[cm^2]$$

Zadanie 7.
W sześcianie o krawędzi długości 1 dm wyznaczono punkty *K, L i M*, które są środkami trzech, parami skośnych, krawędzi sześcianu. Oblicz pole trójkąta *KLM*.

Uczeń:	
• rysuje model sześcianu i zaznacza na krawędziach parami skośnych punkty K, L, M	1 p
• uzasadnia, że trójkąt *KLM* jest równoboczny	1 p
• oblicza długość boku trójkąta *KLM*	1 p
• oblicza pole trójkąta *KLM*	1 p

1. Rysunek z zaznaczonymi punktami *K, L, M* na trzech parami skośnych krawędziach sześcianu



2. Trójkąt *KLM* to trójkąt równoboczny – jego boki są przeciwprostokątnymi trójkątów prostokątnych *MAK, KC'L* i *LD'M.*

3. W trójkącie prostokątnym *ABK*:

$$|AK| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

W trójkącie prostokątnym *MAK*:

$$|MK| = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{5})^2} = \sqrt{25 + 125} = 5\sqrt{6}$$

4. Pole trójkąta równobocznego *KLM*:

$$P_{\Delta KLM} = \frac{(5\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

<u>**Odp.**</u> Pole trójkąta *KLM* jest równe $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm^2.