KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów województwa mazowieckiego
w roku szkolnym 2017/2018

Model odpowiedzi i schematy punktowania

UWAGA

Za **każde poprawne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**D**	**B**	**C**	**C**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Uzasadnij, że nie istnieje liczba naturalna dodatnia n, dla której $16^n - 5^n = 14^n$

Uczeń: 1. określa cyfry jedności potęg w podanej równości: zauważa, że dla liczby dodatniej n cyfrą jedności liczby 16^n jest 6, cyfrą jedności liczby 5^n jest 5, cyfrą jedności liczby 14^n jest 4 lub 6 lub zauważa, że cyfra jedności różnicy $16^n - 5^n$ to 1 lub uzasadnia, że 14^n to liczba parzysta, a $16^n - 5^n$ to liczba nieparzysta	1p.
2. uzasadnia, że cyfrą jedności różnicy $16^n - 5^n$ jest 1, a cyfrą jedności liczby stojącej z prawej strony równości jest 4 lub 6 i wyciąga wniosek, że nie istnieje liczba n, dla której wynik odejmowania z lewej strony równości jest równy liczbie stojącej po prawej stronie równości lub uzasadnia, że liczba parzysta (stojąca po prawej stronie równości) nie może być równa liczbie nieparzystej (stojącej po lewej stronie równości)	1p.

Zadanie 6. (2 pkt)

W konkursie matematycznym uczestniczą dwie drużyny: Zielonych i Czarnych. Wszystkich zawodników jest mniej niż 30. Średnia liczba punktów zdobytych przez jednego zawodnika drużyny Zielonych jest równa 8. Średnia liczba punktów zdobytych przez jednego zawodnika drużyny Czarnych jest równa 12. Średnia liczba punktów zdobytych przez jednego zawodnika biorącego udział w tym konkursie jest równa 10,25. Oblicz, w której drużynie jest więcej zawodników i o ilu.

Uczeń: 1. zapisuje równość wynikającą z treści zadania, np. x – liczba zawodników drużyny Zielonych y – liczba zawodników drużyny Czarnych $\frac{8x+12y}{x+y}=10,25$ $(x=\frac{7}{9}y)$	1p.
2. zauważa, że liczba zawodników drużyny Czarnych musi być podzielna przez 9: dla y = 9, x = 7, zatem wszystkich zawodników jest 16<30 dla y = 18, x= 14, wszystkich zawodników jest 32 >30 <u>Podaje odpowiedź</u>: np. w drużynie Czarnych jest więcej zawodników niż w drużynie Zielonych o 2.	1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Samochód ciężarowy, autobus i samochód osobowy wyjechały z tego samego miasta i jadą tą samą drogą. Samochód ciężarowy wyruszył o godzinie 10.00, autobus o godzinie 15.00, samochód osobowy o godzinie 16.00. Samochód osobowy dogonił autobus o godzinie 17.00. Samochód osobowy dogonił samochód ciężarowy o godzinie 18.00. O której godzinie autobus dogoni samochód ciężarowy?

Uczeń: 1. zapisuje związek między prędkościami samochodu ciężarowego i autobusu, wynikający z treści zadania v_1 - prędkość samochodu ciężarowego w km/h v_2 - prędkość autobusu w km/h v_3 - prędkość samochodu osobowego w km/h $1\cdot v_3 = 2\cdot v_2 \Rightarrow v_3 = 2v_2$ $2v_3 = 8v_1, \Rightarrow v_3 = 4v_1$ stąd $v_2 = 2v_1$	1p.
2. zapisuje zależność między czasem jazdy i prędkością autobusu oraz czasem jazdy i prędkością samochodu ciężarowego	1p.

t - czas jazdy autobusu w h $t \cdot v_2 = (t+5)v_1$ i $v_2 = 2v_1$ lub $2tv_1 = (t+5)v_1$ oraz wyznacza czas jazdy autobusu: $t = 5$ h i godzinę, o której autobus dogoni samochód ciężarowy. Odpowiedź: o godz. 20.00	

Zadanie 8. (2 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ liczba $\sqrt{3+7n}$ jest niewymierna.

Uczeń: 1. zauważa, że aby liczba $\sqrt{3+7n}$ była wymierna, liczba 3+7n musi być kwadratem pewnej liczby naturalnej a, takiej, że kwadrat tej liczby w dzieleniu przez 7 daje resztę 3: $\sqrt{3+7n} = a$ $7n = a^2 - 3$	1p.
2. wnioskuje, że liczba $\sqrt{3+7n}$ jest niewymierna. Np. ustala, że liczba naturalna przy dzieleniu przez 7 daje resztę 0,1,2,3,4,5 lub 6, zatem kwadrat liczby naturalnej daje w dzieleniu przez 7 reszty takie same jak 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, czyli 0,1,2,4. Żadna z tych reszt nie jest równa 3, zatem liczba $3+7n$ nie jest kwadratem liczby wymiernej, czyli liczba $\sqrt{3+7n}$ jest niewymierna.	1p.

Zadanie 9. (2 pkt)

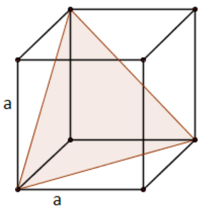
Do pierwszego pojemnika wlano ocet zmieszany z wodą w stosunku $1:3$. Do drugiego pojemnika wlano ocet zmieszany z wodą w stosunku $3:5$. Oblicz, ile kg roztworu należy wziąć z pierwszego pojemnika, a ile z drugiego, aby otrzymać 12 kg roztworu, w którym ocet z wodą będzie zmieszany w stosunku $1:2$. Zapisz obliczenia.

Uczeń: 1. zapisuje układ równań pozwalający na wyznaczenie mas roztworów lub zapisuje równanie z jedną niewiadomą pozwalające na wyznaczenie masy jednego z roztworów x - masa roztworu, którą należy wziąć z pierwszego pojemnika (w kg) y - masa roztworu, którą należy wziąć z drugiego pojemnika (w kg) $\begin{cases} x+y=12 \\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{8}y=12\cdot\frac{1}{3} \end{cases}$ lub np. $\frac{1}{4}(12-y)+\frac{3}{8}y=12\cdot\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}(12-x)=12\cdot\frac{1}{3}$	1p.
2. rozwiązuje zapisany układ równań bądź równanie i wyznacza masy roztworów:	1p.

$x = 4$ kg, $y = 8$ kg. Podaje odpowiedź np. należy wziąć z pierwszego pojemnika 4 kg, z drugiego pojemnika 8 kg.

Zadanie 10. (2 pkt)

Sześcian przecięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez trzy jego wierzchołki i nie zawierającą żadnej jego krawędzi. Określ stosunek objętości tak otrzymanych części. Zapisz obliczenia.



Uczeń:

1. zauważa, że jedną z części otrzymanych w wyniku przecięcia sześcianu płaszczyzną jest ostrosłup, oblicza jego objętość. — 1 p.

   Np.

   $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3$, gdzie a - długość boku sześcianu

2. oblicza objętość drugiej z otrzymanych części i określa stosunek objętości. — 1 p.

   Np.

   $V_2 = a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3$

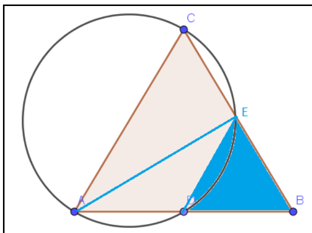
   $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$ lub $\frac{V_2}{V_1} = 5$

   Odpowiedź: 1:5 lub 5 :1

   Uwaga: uczeń może zapisać tylko jeden ze stosunków.

Zadanie 11. (2 pkt)

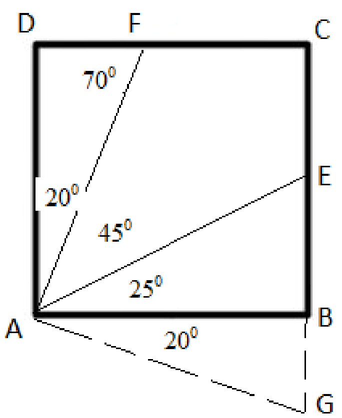
W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 2 cm, a wysokość CD ma długość 3 cm. Okrąg o średnicy AC przecina bok AB w punkcie D i bok BC w punkcie E. Oblicz pole trójkąta BDE.



Uczeń: 1. Oblicza długość boku *BC* trójkąta *ABC*, np. korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $\lvert BC\rvert = \sqrt{10}$ cm oraz oblicza długość jednego z boków: *BE* lub *AE* trójkąta *ABE*, np. zauważa, że kąt *AEC* jest prosty (jako oparty na średnicy) podobnie kąt *CDA*. Zatem kąt *CDB* jest prosty oraz *CD* jest wysokością trójkąta *ABC*. Uzasadnia, że trójkąty *ABE* i *CBD* są podobne (kąt *ABC* jest kątem wspólnym tych trójkątów), czyli $\frac{\lvert BE\rvert}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\lvert BE\rvert = \frac{1}{5}\sqrt{10}$ cm.	1p.
2. Oblicza pole trójkąta *BDE*, *np.* oblicza długość drugiego boku (*AE* lub *BE*) trójkąta *ABE*, $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\lvert AE\rvert = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2$, $\lvert AE\rvert = \frac{3}{5}\sqrt{10}$ cm, stąd pole trójkąta *ABE*: $\frac{3}{5}$ cm^2, zatem pole trójkąta *BDE*, jako połowa pola trójkąta *ABE* (trójkąty mają równe wysokości), jest równe $\frac{3}{10}$ cm^2. <u>Podaje odpowiedź:</u> $\frac{3}{10}$ cm^2.	1p.

Zadanie 12. (2 pkt)

Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$, punkt F leży na boku CD tego kwadratu. Kąt AFD ma miarę 70^0, a kąt FAE ma miarę 45^0. Wysokość *AH* trójkąta AEF jest równa 2. Oblicz długość boku kwadratu $ABCD$.



Uczeń: 1. wykorzystuje własności trójkątów przystających do trójkąta *AEF*: np. dobudowuje trójkąt *AGB* przystający do trójkąta *AFD* (uzasadnia, że trójkąty *AEG* i *AEF* są przystające)	1 p.
2. ustala, że wysokość *AB* trójkąta *AEG* jest równa wysokości *AH* trójkąta *AEF*, czyli $\lvert AB\rvert = 2$. <u>Podaje odpowiedź:</u> 2.	1 p.