Matematyka

27 października 2017

Spis treści

1 Zadania

1.1 Zabawy z liczbami

Zadanie 1.1. Rok wydania dzieła Kopernika *O obrotach ciał niebieskich* jest liczbą czterocyfrową, której suma cyfr wynosi 13, cyfra dziesiątek stanowi 80% cyfry setek, a cyfra tysięcy jest 7 razy mniejsza od sumy jedności i dziesiątek. Znajdź tę datę.

Rozwiązanie. Są dwie metody rozwiązania tego zadania - formalne i przez zgadywanie. Zgadywanie jest zabawniejsze, ale warto też znać metodę formalną.

Szukaną liczbę czterocyfrową możemy zapisać jako $abcd$, gdzie litery a, b, c, d są liczbami z przedziału 0 do 9 (poza a, która nie może być zerem i z całą pewnością musi być równa 1). Mamy również zestaw informacji:

1. Suma cyfr wynosi 13:

   $$a + b + c + d = 13.$$

   Wrócimy do tej informacji później.

2. Cyfra dziesiątek stanowi 80% cyfry setek:

   $$c = \frac{4}{5} \cdot b.$$

   Ta wskazówka daje nam w istocie bardzo dużo informacji. 0.8 to $\frac{4}{5}$, czyli c do b ma się jak 4 do 5. To w zasadzie daje nam od razu informację, że $c = 4$ oraz $b = 5$.

3. Cyfra tysięcy jest 7 razy mniejsza od sumy jedności i dziesiątek:

   $$a = \frac{1}{7}(c + d).$$

   Nawet jeśli nie wiemy nic na temat a, to maksymalna wartość $c + d$ może być równa 18 - oznacza to, że jeśli a jest 7 razy mniejsze, to a może być równe 1 lub 2. Ponieważ już ustaliliśmy, że c jest równe 4, to aby $a = 2$, d musiałoby być równe 10. To nie jest możliwe. Zatem pozostaje nam możliwość $a = 1$. Oznacza to, że $(c + d) = 7$, z czego wynika, że $d = 3$.

Zbierając wszystkie informacje razem, uzyskujemy rok wydania równy 1543. Faktycznie, suma cyfr jest równa 13, co potwierdza pierwszą przesłankę. □

Zadanie 1.2. Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych równa się 29. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych mające tę własność.

Rozwiązanie. Różnicę kwadratów dwóch liczb możemy zapisać jako:

$$a^2 - b^2 = 29.$$

Zauważmy, że zarówno a jak i b może być dodatni lub ujemny, bez zmiany rozwiązania. Załóżmy na razie że a, b są dodatnie, reszta rozwiązań będzie kombinacjami $\pm a, \pm b$.

Ze wzorów skróconego mnożenia wiemy, że

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$(a + b)$ oraz $(a - b)$ pomnożone przez siebie mają dawać 29. Wiemy, że 29 jest liczbą pierwszą, zatem jedyny rozkład na czynniki pierwsze jaki możemy przeprowadzić to $29 = 29 \cdot 1$. Ponieważ założyliśmy, że a i b są dodatnie, sprowadza się to do możliwości:

$$a + b = 29$$

$$a - b = 1$$

(gdyby $a - b = 29$ i $a + b = 1$ prowadziłoby to do sprzeczności z założeniem o dodatniości). W ten sposób stwierdzamy, że $a = 15$ oraz $b = 14$. Kombinując resztę rozwiązań, otrzymujemy cztery pary liczb całkowitych:

1. (15,14),
2. (-15,14),
3. (-15,-14),
4. (15,-14).

□

Zadanie 1.3. Napisz wszystkie liczby trzycyfrowe, których suma cyfr wynosi 11. Cyfrą jedności tej liczby jest x, a cyfra dziesiątek jest o dwa większa od cyfry jedności.

Zadanie 1.4. Suma czterech różnych liczb wynosi 45. Jeżeli pierwszą liczbę powiększysz o 2, drugą zmniejszysz o 2, trzecią podwoisz, a czwartą zmniejszysz o jej połowę, to uzyskane w ten sposób liczby będą równe. Ile wynosi każda z czterech liczb?

Zadanie 1.5. Ile istnieje liczb dwucyfrowych nieujemnych mniejszych od 65 w których cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności?

Zadanie 1.6. Znajdź trzy liczby, z których druga jest większa od pierwszej o tyle, o ile trzecia jest większa od drugiej i o których wiadomo, że iloczyn dwóch mniejszych liczb jest równy 85, iloczyn zaś dwóch większych 115.

Zadanie 1.7. Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeżeli zaś podzielimy tę liczbę przez sumę cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. Znajdź tę liczbę.

Zadanie 1.8. Jeżeli cyfrę dziesiątek pewnej liczby dwucyfrowej zwiększymy o 4, a jej cyfrę jedności zmniejszymy o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 86. Jeżeli zaś cyfrę dziesiątek tej liczby zmniejszymy o 2, a cyfrę jedności powiększymy o 1, to otrzymamy liczbę większą od 27. Jaka to liczba?

Zadanie 1.9. Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 9 i żeby po przestawieniu jej cyfr otrzymać:

1. liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby,
2. liczbę większą od połowy szukanej liczby.

Podaj wszystkie rozwiązania w każdym przypadku.

Zadanie 1.10. Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 13 i żeby po przestawieniu tych cyfr otrzymać:

1. liczbę większą od szukanej,

2. liczbę mniejszą od szukanej.

Ile jest takich liczb?

Zadanie 1.11. Znajdź wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, które wzrastają 9 razy, gdy między cyfrę jedności i cyfrę dziesiątek wstawimy zero.

1.2 Podzielność liczb

Zadanie 1.12. Litera x w liczbie 28692x oznacza cyfrę jedności. Jaka to cyfra, jeżeli ta liczba jest podzielna jednocześnie przez 3 i przez 4?

Zadanie 1.13. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych podzielnych przez 15, w których cyfrą tysięcy jest 1, a cyfrą dziesiątek jest 2?

Zadanie 1.14. Ile jest liczb całkowitych od 0 do 999 włącznie, niepodzielnych ani przez 5 ani przez 7? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 1.15. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych takie, że suma liczb w każdej parze jest równa 168, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 24.

Zadanie 1.16. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 96, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 12. Znajdź te liczby.

Zadanie 1.17. Ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb naturalnych, z których żadna nie jest podzielna przez 5.

Zadanie 1.18. Przy dzieleniu liczb a, b, c przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty: $1, 2, 3$. Znajdź resztę z dzielenia sumy kwadratów liczb: a, b, c przez liczbę 5.

Zadanie 1.19. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych, z których największy wspólny dzielnik wynosi 13, a najmniejsza wspólna wielokrotność równa się 2002.Udowodnij, że jeżeli z dwóch liczb naturalych jedna przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga resztę 2, to ich iloczyn przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

2 Podstawowe twierdzenie arytmetyki

W tym miejscu dobrze będzie poświęcić chwilę na zbadanie natury liczb pierwszych:

Definicja 1. Liczbą pierwszą nazywamy każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie posiada dzielników innych niż 1 oraz siebie samej.

Wyposażeni w definicję możemy teraz zbadać...

Twierdzenie 1 (Podstawowe twierdzenie arytmetyki)**.** Każdą liczbę naturalną większą od 1, nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Dowód tego twierdzenia przebiegnie następująco - pokażemy że liczby naturalne możemy rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych. Potem założymy, że znaleźliśmy dwa takie rozkłady. Wykażemy następnie, że obydwa te rozkłady składają się dokładnie z takich samych czynników - znaczy się, że istnieje tylko jeden rozkład na liczby pierwsze.

Skąd jednak wiemy, że każdą liczbę możemy rozdzielić na zbiór liczb pierwszych? Otóż:

Lemat 1. Każda liczba naturalna większa od 1 posiada przynajmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą.

Dowód. Wiemy, że każda liczba n dzieli się na pewno przez samą siebie, więc zbiór dzielników nie jest pusty. Weźmy najmniejszy z dzielników, d. Załóżmy teraz że d nie jest pierwszy, co przekreślałoby prawdziwość twierdzenia. Jednakowoż niepierwszość d oznacza, że istnieje dzielnik d mniejszy od d i większy od 1. Z drugiej strony, jeśli jakaś liczba dzieli d to jednocześnie dzieli n - zatem d nie byłby wtedy najmniejszym z dzielników. Ów najmniejszy dzielnik (większy od 1) musi być zatem liczbą pierwszą, w przeciwnym wypadku... nie jest najmniejszy! □

Teraz wystarczy zauważyć, że dowolna liczba n podzielona przez jej dzielnik daje wynik mniejszy od n. Ponieważ siedzimy w liczbach naturalnych, istnieje skończona liczba elementów mniejszych od n i większych od 1. Powtarzając proces dzielenia na liczby pierwsze wystarczająco dużą liczbę razy w końcu zejdziemy do jedynki.

Mamy zatem rozkład n na zestaw liczb pierwszych. Nie wiemy jednak, czy to jedyny rozkład - może da się rozłożyć n na dwa sposoby? Pokażemy że nie - ale do tego będziemy potrzebowali Lematu 2:

Lemat 2. Jeśli a jest liczbą naturalną a p jest liczbą pierwszą, to albo p dzieli a, albo a, p są względnie pierwsze, tj. $NWD(a, p) = 1$.

Dowód. Istotnie, jeśli największy wspólny dzielnik jest większy niż 1 to oznacza to, że mamy liczbę dzielącą p - a to może być tylko p. □

Lemat 3. Jeśli a oraz b nie są podzielne przez p to ab również nie jest podzielne przez p.

Dowód. Załóżmy, że ab dzieli się przez p: iloczyn ab możemy zatem przedstawić jako:

$$ab = p \cdot z.$$

Oczywiście pz dzieli się dalej przez a oraz przez b. Zatem:

$$\frac{pz}{a} = b.$$

Ponieważ p nie ma wspólnych dzielników z a, możemy to zamienić na:

$$p\frac{z}{a} = b,$$

gdzie, oczywiscie, $\frac{z}{a}$ musi być liczbą naturalną. Jednak oznacza to, że b dzieli się przez p, co przeczy założeniom. Zatem iloczyn ab nie jest podzielny przez liczbę pierwszą p. □

Teraz możemy przeprowadzić faktyczny dowód podstawowego twierdzenia algebry. Otóż, załóżmy że mamy dwa rozkłady na liczby pierwsze:

$$n = p_1p_2...p_n,$$

$$n = q_1q_2...q_m,$$

gdzie p_i, q_i są liczbami pierwszymi. Dla porządku wszystkie czynniki są poustawiane od najniższego do najwyższego. Jeśli p_1 dzieli n, to p_1 musi dzielić któryś z q_i - może to się zdarzyć tylko wtedy, jeśli któryś z q_i jest równy p_1. Odwrotna relacja również zachodzi. Bycie dzielnikiem liczby pierwszej (większym niż 1) oznacza bycie tą liczbą pierwszą. Ponieważ p_1 jest najmniejszym dzielnikiem (a zarazem najmniejszym elementem) z liczb q_i oraz q_1 jest najmniejszym elementem z p_i, to $q_1 = p_1$.

Podzielmy zatem obydwa równania przez p_1. Mamy teraz identyczną sytuację:

$$m = p_2p_3...p_n,$$

$$m = q_2q_3...q_m.$$

Jeśli ilość dzielników jest taka sama, prowadzi to do wniosku, że dzielniki są identyczne. Jeśli ilość dzielników jest różna, to w którymś momencie dochodzimy do kuriozalnego wniosku, że:

$$p_r \cdot p_{r+1} \cdot ...p_{r+q} = 1,$$

tj. iloczyn liczb pierwszych jest równy jedynce. To jest oczywiście niemożliwe[1]. Ilości liczb pierwszych w obydwu przypadkach muszą być zatem równe, a co więcej, muszą to być te same liczby pierwsze.

[1]W przypadku nieskończonego zbioru liczb naturalnych.

3 Powrót do zadań

Zadanie 3.1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b prawdziwa jest następująca równość:

$$a \cdot b = \mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(a, b). \tag{1}$$

Rozwiązanie. a oraz b można rozłożyć na iloczyny liczb pierwszych:

$$a = p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_n,$$
$$b = r_1 r_2 \cdot ... \cdot r_m,$$

gdzie p_i, r_i są liczbami pierwszymi (lub 1 w przypadku a lub b równych 1). Najmniejsza wspólna wielokrotność musi oczywiście zawierać wszystkie liczby p_i oraz r_i. Jeśli żadna z liczb p_i nie powtarza się w zbiorze r_i, sprawa jest prosta - najmniejsza wspólna wielokrotność to iloczyn liczb $a \cdot b$, podczas gdy największy wspólny dzielnik to 1. Równanie 1 jest zachowane.

Załóżmy teraz, że część z liczb p_i powtarza się wśród liczb r_i. Dla przykładu:

$$a = p_1 p_2 p_3,$$
$$b = p_1 p_2 r_3,$$

albo, aby już przedstawić przykład w zupełnie żywy sposób:

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30,$$
$$b = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

Jeśli chcemy stworzyć teraz wielokrotność zarówno a jak i b, **muszą** się w niej pojawić czynniki $2, 3, 5$ oraz 7. Najmniejszą wspólną wielokrotność uzyskamy wtedy, gdy użyjemy tych czynników najmniejszą możliwą ilość razy - w tym wypadku:

$$NWW(a, b) = p_1 p_2 p_3 r_3.$$

Ok, co natomiast ze wzorem 1? Otóż jeśli chcemy iloczyn $a \cdot b$ zamienić na NWW, musimy wyrugować z iloczynu liczb powtarzające się elementy. W tym wypadku będą to p_1, p_2:

$$a \cdot b = p_1 p_2 p_3 p_1 p_2 r_3 = (p_1 p_2)(p_1 p_2 p_3 r_3).$$

Iloczyn powtarzających się elementów pierwszych jest - z założenia - największym wspólnym dzielnikiem liczb a oraz b.

□

Zadanie 3.2. Znajdź takie dwie liczby naturalne, których suma jest równa 696, a jednym ze wspólnych dzielników jest 58.

Rozwiązanie. Warunki zadania da się przetłumaczyć na zestaw równań:

$$a + b = 696,$$
$$58 \cdot p1 = a,$$
$$58 \cdot p2 = b.$$

Tzn. szukamy takich dwóch liczb naturalnych a, b, dla których ich suma wynosi 696, oraz dla których istnieją liczby naturalne p_1, p_2 takie, że $58p_21 = a$ oraz $58p_2 = b$. Pierwsze równanie możemy zatem sprowadzić przez podstawienie do:

$$58 \cdot (p_1 + p_2) = 696,$$
$$p_1 + p_2 = 12,$$

co sprowadza poszukiwanie do znalezienia wszystkich par liczb naturalnych, których suma jest równa 12. Łatwo możemy stwierdzić, że takich par jest tylko 6. □

3.1 Prędkość, droga, czas

Zadanie 3.3. Pociąg długości 600 m jechał z prędkością 48 km/h i miał przed sobą tunel. Od momentu wejścia czoła parowozu do tunelu do chwili, w której ostatni wagon opuścił tunel, upłynęło 2.5 minuty. Ile czasu jechał maszynista przez tunel? Jaka była długość tunelu?

Zadanie 3.4. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości, odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Ile okrążeń przebiegł zwycięzca do momentu zdublowania ostatniego zawodnika? Przyjmij, że każdy z zawodników biegł ze stałą prędkością.

Zadanie 3.5. Po zamkniętym torze jedzie cyklista, okrążając tor w ciągu 6 minut. W tym samym kierunku jedzie motocyklista, który okrąża tor w ciągu $1\frac{1}{2}$ minuty. Co ile minut będzie dopędzał motocyklista cyklistę?

Zadanie 3.6. Z przystani wypłynęły jednocześnie parowiec pasażerski i kuter. Oba statki płynęły w tym samym kierunku, pierwszy z prędkością 24 km na godzinę, drugi z prędkością 15 km na godzinę. Po upływie 3 godzin podróży parowiec osiadł na mieliźnie. Po pewnym czasie parowiec ruszył w dalszą drogę i po upływie 7 godzin dogonił kuter. Ile godzin parowiec siedział na mieliźnie?

Zadanie 3.7. Dwa pociągi jadą po równoległych torach naprzeciw siebie. Pierwszy z prędkością 60 km/h, drugi z prędkością 80 km/h. Pasażer jadący w drugim pociągu zauważył, że pierwszy pociąg mijał go przez 6 sekund. Oblicz długość pierwszego pociągu.

Zadanie 3.8. Wskazówka minutowa zegara ściennego ma 12 cm długości. Jaką długość drogi przebędzie koniec tej wskazówki w ciągu 5 minut?

Zadanie 3.9. O godzinie 9 wskazówki zegara duża i mała wyznaczają kąt prosty. Po jakim czasie wskazówki zegara znów wyznaczą kąt prosty?

Zadanie 3.10. Trzy miejscowości A, B, C leżą przy jednej drodze w podanej kolejności, przy czym od B do C jest o 6 km dalej niż od A do B. Samochód jadący z prędkością 70 km/h przebył drogę od A do C w czasie o 27 minut krótszym niż motocykl jadący z prędkością 40 km/h. Jak daleko jest od A do B i jak daleko jest od A do C?

Zadanie 3.11. Trzej kolejarze jadą po torze kołowym (każdy ze stałą prędkością). Pierwszy przebywa pełne okrążenie w ciągu 5 minut, drugi w ciągu 6 minut, a trzeci w ciągu 9 minut. Kolejarze wyruszyli jednocześnie z tej samej linii startowej o godzinie 13^{00}. Podaj najwcześniejszą godzinę następnego spotkania wszystkich kolejarzy na linii startu.

Zadanie 3.12. Droga z miejscowości A do miejscowości B biegnie po terenie równym oraz pod górę i z góry. Po drodze w terenie równym rowerzysta jedzie z prędkością 12 km/h, pod górę - 8 km/h, a z góry - 15 km/h. Drogę z A do B rowerzysta przejechał w ciągu 5 godzin, a powrotną przebył w 4 godziny i 39 minut. Oblicz odległość między miejscowościami A i B wiedząc, że długość drogi po terenie równym wynosi 28 km.

Zadanie 3.13. Pasażer idąc na stację, po przejściu w ciągu godziny 3.5 km zorientował się, że idąc dalej z tą samą prędkością, spóźni się na pociąg o 1 godzinę. Dlatego pozostałą drogę przeszedł z prędkością 5 km/h i przyszedł na stację 30 minut przed odejściem pociągu. Wyznacz długość drogi jaką przebył pasażer.

Zadanie 3.14. Odległość między miejscowościami A i B wynosi 19 km. Z A do B wyjechał kolarz z pewną stałą prędkością. W 15 minut po nim w tym samym kierunku wyjechał samochód i po 10 minutach jazdy dogonił kolarza. Samochód nie zatrzymując się, pojechał dalej do B i zaraz zawrócił. W drodze powrotnej, po upływie 50 minut od wyjazdu z A, spotkał powtórnie kolarza. Wyznacz prędkość kolarza i samochodu.

Zadanie 3.15. Z miasta A w kierunku miasta B, odległego od miasta A o 300 km, wyjechał samochód osobowy, a z B w kierunku A w tym samym czasie samochód ciężarowy. Gdyby samochód osobowy wyjechał o 48 minut wcześniej niż ciężarowy, to samochody minęłyby się po upływie 2 godzin jazdy samochodu ciężarowego. Gdyby zaś samochód ciężarowy wyjechał o 1 godzinę i 20 minut wcześniej niż osobowy, to samochody minęłyby się po upływie 2 godzin jazdy samochodu osobowego. Z jaką prędkością jechał samochód osobowy, a z jaką ciężarowy? Ile czasu upłynęło do chwili mijania się? Jak daleko od miasta A minęły samochody?

Zadanie 3.16. Zastęp harcerzy zaplanował przejechać na rowerach trasę 360 km przebywając dziennie taką samą liczbę kilometrów. Faktycznie jednak przejeżdżali każdego dnia o 4 km mniej i z tego powodu wycieczka przedłużyła się o 3 dni. Ile dni miała trwać ta wycieczka?

Zadanie 3.17. Dwie osoby wyruszają jednocześnie z tego samego miejsca i w tym samym kierunku. Pierwsza osoba przez $2\frac{1}{4}$ godziny idzie z prędkością 6 km/h, a następnie przez 25 minut odpoczywa i wraca z prędkością $5\frac{1}{2}$ km/h. Druga osoba idzie stale z prędkością $4\frac{1}{2}$ km/h. Wyznacz czas i miejsca spotkania tych osób.

Zadanie 3.18. Pomiędzy miastami A i B kursuje autobus. Droga między tymi miastami prowadzi przez wzgórze. Autobus jadąc pod górę rozwija prędkość 25 km/h, a z góry 50 km/h. Podróż z A do B trwa $3\frac{1}{2}$ godziny, a z B do A 4 godziny. Ile jest kilometrów z miasta A do miasta B?

Zadanie 3.19. Po okręgu o długości 80 cm poruszają się 2 punkty ze stałą prędkością. Jeżeli kierunku ruchów są zgodne, to punkt pierwszy wyprzedza punkt drugi co 5 sekund. Jeżeli zaś kierunki ruchów są przeciwne, to punkty mijają się co 2 sekundy. Oblicz prędkości tych punktów.

3.2 Praca i czas potrzebny na jej wykonanie

Zadanie 3.20. Trzy zespoły robotników mają zanitować przęsło mostu. Pierwszy zespół wykonałby taką pracę sam w ciagu 12 dni, drugi zespół w ciągu 15 dni, a trzeci zespół w ciągu 8 dni. W ciągu jakiego czasu zanitują to przęsło trzy zzespoły pracując jednocześnie?

Zadanie 3.21. Przy jednoczesnej pracy dwóch ciągników o różnej mocy pole może być zaorane w ciągu 8 dni. Gdyby silniejszym ciągnikiem zaorano połowę pola, a resztę obydwoma ciągnikami, to całą pracę wykonano by w ciągu 10 dni. W jakim czasie można zaorać pole każdym ciągnikiem oddzielnie?

Zadanie 3.22. Pierwsza brygada górników w ciągu jednej godziny wydobywa średnio o 10.5 ton Wegla więcej niż druga brygada. Pierwsza brygada w ciągu kilku godzin wydobyła 108 ton węgla, a druga w tym czasie 66 ton. Ile godzin musi pracować z tą samą wydajnością druga brygada, aby wydobyć 1485 ton węgla?

Zadanie 3.23. Zakłady przemysłowe A i B podjęły się wykonać wspólnie pewne zamówienie w ciągu 12 dni. Zakład A po dwóch dniach realizacji zamówienia z powodu remontu został zamknięty, więc pozostałą część zamówienia wykonał zakład B nie zwiększając dziennej produkcji. W ciągu ilu dni zostanie wykonane zamówienie, jeżeli dzienna produkcja zakładu B wynosi $66\frac{2}{3}\%$ dziennej produkcji zakładu A?

Zadanie 3.24. Statek ładowano za pomocą 3 dźwigów o tej samej mocy. Po jednej godzinie pracy uruchomiono dodatkowe 3 jednakowe dźwigi o większej mocy i ukończono załadunek statku po 2 godzinach wspólnej pracy wszystkich dźwigów. Gdyby uruchomiono wszystkie dźwigi jednocześnie, to załadunek statku trwałby tylko 2 godziny 24 minuty. Oblicz, w ciągu ilu godzin załadowałby statek jeden dźwig o mniejszej mocy, a w ciągu ilu godzin załadowałby statek jeden dźwig o większej mocy.

Zadanie 3.25. Dla wykonania pewnej ilości wyrobów fabrycznych przygotowano kilka jednakowych maszyn, z których każda miała pracować według planu taką samą liczbę godzin. Gdyby zwiększyć liczbę maszyn o jedną, wówczas dla wykonania tej samej pracy każda z maszyn musiałaby pracować o 1.5 godziny dłużej. Oblicz, ile przygotowano maszyn i ile godzin miała pracować każda z nich według planu.

Zadanie 3.26. Brygada złożona z 40 robotników miała zbudować pewien odcinek drogi w ciągu 8 dni (pracując z tą samą wydajnością. Po 3 dniach wspólnej pracy 10 robotników przeszło na inny odcinek, a pozostałą do wykonania pracę zmniejszono brygodzie o 10%. Ile dni trwała budowa przydzielonego brygadzie odcinka drogi?

3.3 Zadania różne

Zadanie 3.27. Piąta część pszczelej gromadki usiadła na kwiatach magnolii, trzecia część tej gromadki na kwiatach lotosu, potrojona różnica drugiej z tych liczb i pierwszej odleciała ku kwiatom jaśminu. Jedna tylko pszczółka, zwabiona pachnącym kwiatem koniczyny, krążyła nad nim. Ile pszczół było w tej gromadce?

Zadanie 3.28. Zapytano rybaka, ile waży złowiona przez niego ryba. Rybak odpowiedział: $\frac{2}{5}$ kg i jeszcze 2 razy po $\frac{2}{5}$ swojej masy. Ile ważyła ryba?

Zadanie 3.29. Wieśniaczka sprzedała pierwszej osobie $\frac{1}{2}$ całej ilości jajek i jeszcze 2 jajka. Drugiej osobie sprzedała połowę reszty jajek i jeszcze jedno jajko. po drugiej sprzedaży zostało wieśniaczce 8 jajek. Ile jajek przyniosła wieśniaczka na targowisko? Ile jajek kupiła pierwsza osoba, a ile druga?

Zadanie 3.30. Pamiętny w historii rok pewnego odkrycia wyraża się liczbą czterocyfrową. Znajdź tę liczbę na podstawie następujących danych:

1. Suma cyfr tej liczby wynosi 16;
2. Cyfra tysięcy jest cztery razy mniejsza od cyfry setek;
3. Cyfra setek jest dwa razy większa od cyfry jednosci;
4. Liczba trzycyfrowa utworzona z szukanej liczby przez skreślenie w niej cyfry jedności jest o 100 większa od liczby dwucyfrowej utworzonej z szukanej liczby przez skreślenie w niej cyfry jedności i cyfery tysięcy.

Zadanie 3.31. Codziennie z miejscowości A, w której mieści się urząd pocztowy, wyjeżdża motorowerem listonosz do miejscowości B, C, D, by dostarczyć listy. W jakiej kolejności powinien listonosz objeżdżać te miejscowości, aby trasa objazdu z A przez pozostałe miejscowości i z powrrotem do A była możliwie najkrótsza, jeśli długość drogi od A do B wynosi 5 km, od A do C - 7 km, od A do D - 7 km, od B do D - 8 km, od B do C - 10 km, od C do D - 6 km?

Zadanie 3.32. Na konkursie należało odpowiedzieć na 30 pytań. Za każdą poprawną odpowiedź na pytanie przyznawano 7 punktów, a za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi odejmowano 12 punktów. Na ile pytań odpowiedziała dobrze osoba, która uzyskała 77 punktów?

Zadanie 3.33. Siostra jest o 3 lata młodsza od brata. Brat ma obecnie 2 razy tyle lat, ile miała siotra wtedy, kiedy brat miał tyle, ile ma siostra teraz. Ile lat ma siostra, a ile brat?

Zadanie 3.34. Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, panowałby $\frac{1}{4}$ swojego życia, gdyby zaś żył o 9 lat dłużej, panowałby połowę swojego życia. Ile lat żył i ile lat panował?

Zadanie 3.35. Według legendy na płycie Diofantosa był taki napis ułozony przez Eutriopiusa: "Przechodniu! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który umarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego życia był dzieckiem, przez dwunastą część - młodzeińcem. Następnie upłynęła siódma część jego życia, zanim się ożenił. W pięć lat po zawarciu związku małżeńskiego urodził mu się syn, który żył dwa razy krócej od niego. W cztery lata po śmierci swego syna Diofantos, opłakiwany przez swych najbliższych, zasnął snem wiecznym. Powiedz, jeśli umiesz obliczyć, ile on miał lat, kiedy zmarł."

Zadanie 3.36. Kilku przyjaciół postanowiło kupić wspólnie łódź motorową. Gdyby każdy z nich wpłacił 7000 zł, to byłoby o 3000 za mało. Gdyby zaś każdy z nich wpłacił 8000 zł, to byłoby o 4000 za dużo. Ilu było przyjaciół, ile kosztowała łódź motorowa?

Zadanie 3.37. Gdy Jan zapytał Andrzeja, ile ma lat, usłyszał odpowiedź: Gdy byłem w twoim wieku, byłeś ode mnie cztery razy młodszy, a gdy ty będziesz w moim wieku, ja będę miał 40 lat. Ile lat ma Jan, a ile Andrzej?

Zadanie 3.38. Pewien chłopiec powiedział: "Mam tylu braci co sióstr", a jego siostra stwierdziła: "Mam trzy razy więcej braci niż sióstr". Ilu było chłopców, a ile dziewcząt w tej rodzinie?

Zadanie 3.39. Nazwijmy liczbą symetryczną taką liczbę naturalną, której cyfry stojące na miejscach pierwszym i ostatnim, drugim i przedostatnim itd. są takie same, np. 3553; 474. Ile jest liczb symetrycznych trzycyfrowych, a ile liczb symetrycznych czterocyfrowych?

3.4 Wielokąty

Zadanie 3.40. Ile przekątnych ma dowolny wielokąt wypukły? Ile przekątnych ma siedmiokąt wypukły?

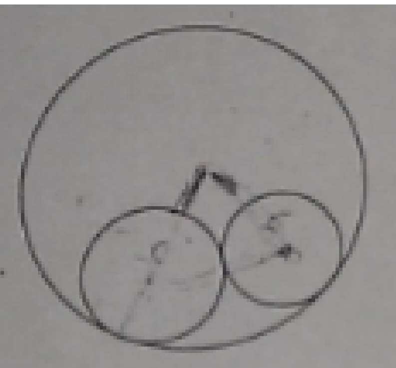
Zadanie 3.41. Ile boków ma wielokąt o 90 przekątnych?

Zadanie 3.42. Kąt wielokąta foremnego ma miarę $150°$. Ile boków ma ten wielokąt?

Zadanie 3.43. Ile boków ma wielokąt wypukły, którego suma miar kątów wynosi $1620°$?

Zadanie 3.44. Ile boków ma wielokąt wypukły, w którym suma kątów wewnętrznych ma miarę $1800°$?

Zadanie 3.45. W kąt wpisano okrąg. Punkty styczności dzielą okrąg na dwa łuki w stosunku 1:11. Oblicz miarę kąta, w który wpisano ten okrąg.



Rys. 2.14

Zadanie 3.46. Dwa okręgi styczne zewnętrznie są równocześnie styczne wewnętrznie do trzeciego okręgu o promieniu 3 cm, tak jak na rysunku. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów.

Rozwiązanie. Zadanie na pierwszy rzut oka wygląda na niewykonalne ze względu na zbyt małą ilość danych. Jednak, spójrzmy na informacje którymi dysponujemy:

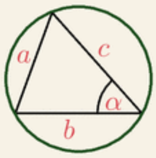
1. Duży okrąg ma promień $r = 3$ cm.
2. Pierwszy mały okrąg ma promień a.
3. Drugi mały okrąg ma promień b.
4. Obwód trójkąta wynosi:

$$a + b + (r - a) + r - b = 2r$$

...co kończy dowód. □

3.5 Trójkąty i okręgi

Okrąg opisany na trójkącie

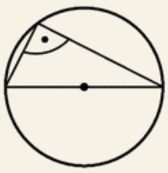


promień: $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

a – dowolny bok
α – kąt naprzeciw tego boku

$R = \dfrac{abc}{4P}$

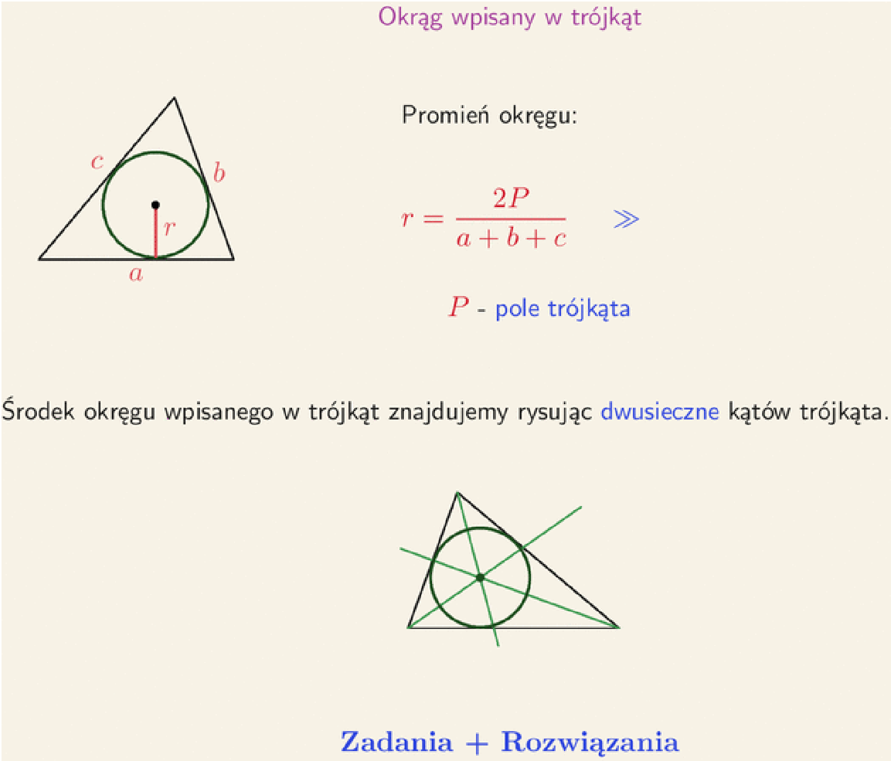
a, b, c – długości boków trójkąta
P – pole trójkąta



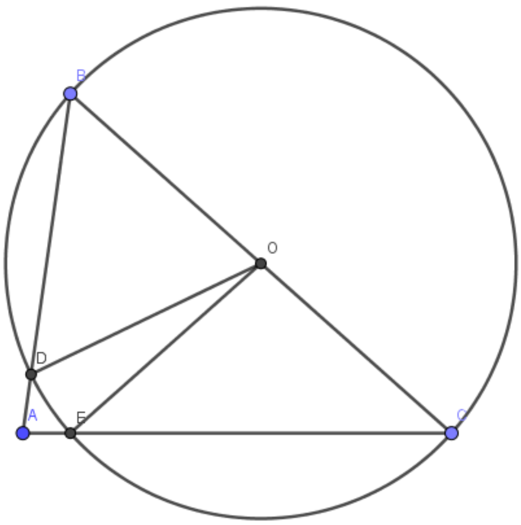
Trójkąt oparty na średnicy jest prostokątny.

Środek okręgu opisanego na trójkącie znajdujemy rysując symetralne boków trójkąta.

Zadania + Rozwiązania



Zadanie 3.47. W trójkącie ABC bok $|AB| = 8$ cm, bok $|AC| = 10$ cm, a bok $|BC| = 12$ cm. Z punktu O (środka boku BC) zakreślono promieniem OB okrąg przecinający bok AB w punkcie D i bok AC w punkcie E. Oblicz długość odcinków DB i EC.



Rozwiązanie. □

Zadanie 3.48. Suma długości boków AC i BC trójkąta ABC wynosi 20 cm. Miary kątów A i B są równe odpowiednio 30° i 45°. Oblicz długości boków AC i BC.

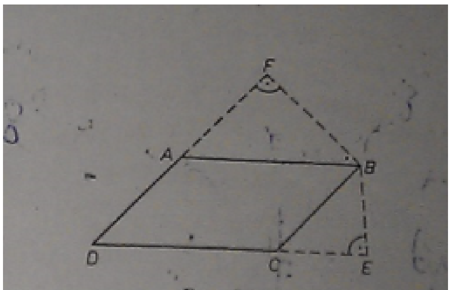
Zadanie 3.49. W trójkącie prostokątnym na dłuższej przyprostokątnej jako na średnicy opisano półokrąg. Wyznacz długości półokręgu, jeżeli krótsza przyprostokątna ma długość 30 cm, cięciwa łącząca wierzchołek kąta prostego z punktem przecięcia przeciwprostokątnej z półokręgiem ma długość 24 cm.

Zadanie 3.50. Długości boków trójkąta wynoszą 10 cm, 10 cm, 12 cm. Oblicz odległości środka okręgu wpisanego w ten trójkąt od każdego wierzchołka trójkąta.

Zadanie 3.51. Dane są dwa koła o promieniach długości 6 dm i 8 dm. Jaką długość ma promień koła, którego pole równa się sumie pól danych kół?

Zadanie 3.52. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości: 15 cm i 20 cm. Na krótszej przyprostokątnej jako na średnicy zbudowano okrąg. Oblicz długości odcinków na jakie ten okrąg podzielił przeciwprostokątną.

Zadanie 3.53. Oblicz wymiary równoległoboku ABCD, którego obwód wynosi 48 cm. $\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{5}{7}$.



Rys. 2.121

Zadanie 3.54. W trójkącie ABC, w którym miara kąta $C = 90°$, długość boku $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 10$ cm, obrano na boku BC punkt D tak, że miara kąta ADC równa się mierze kąta CAB. Oblicz długości CD i BD.

Zadanie 3.55. W trójkącie ABC, którego obwód wynosi 50 cm i $|AC| = |BC|$, poprowadzono środkowe AD i BE. Obwód trójkąta ABE jest o 8 cm większy od obwodu trójkąta ACD. Oblicz długość boków trójkąta ABC.

Zadanie 3.56. W trójkąt prostokątny wpisano półokrąg tak, że jego średnica zawarta jest w przeciwprostokątnej i środek tego półokręgu dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 15 cm i 20 cm. Oblicz długość łuku zawartego między punktami styczności półokręgu z przyprostokątnymi.

4 Bukiety matematyczne

4.1 Liczby niewymierne

Liczbą wymierną nazwiemy każdą liczbę dającą się zapisać w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ ([2]). Każdą liczbę nie dającą się zapisać w postaci ułamka $\frac{a}{b}$ wrzucimy zatem w zbiór liczb **niewymiernych**.

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$: załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest równe $\frac{a}{b}$, spróbujemy znaleźć ich wartości. Mamy cztery możliwości:

1. a oraz b są nieparzyste,
2. a jest parzyste, b jest nieparzyste,
3. a jest nieparzyste, b jest parzyste,
4. a oraz b są parzyste - w tym wypadku redukujemy przypadek do jednego z trzech poprzednich.

Załóżmy że a oraz b są nieparzyste. Wtedy $a^2 = 2b^2$ (po podniesieniu równania $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ do kwadratu), co jednak prowadzi do sprzeczności, bowiem kwadrat liczby nieparzystej jest parzysty. Usuwamy pierwszą możliwość.

Załóżmy zatem że a jest parzyste a b jest nieparzyste. a możemy przedstawić jako $2 \cdot x$. Po podniesieniu do kwadratu mamy $4x^2 = 2b^2$, co redukuje się do $2x^2 = b^2$. Ponownie, założyliśmy nieparzystość b, więc przypadek jest sprzeczny.

Ostatnia możliwość: a jest nieparzyste, b jest parzyste. Po podniesieniu do kwadratu równania $\sqrt{2} = \frac{a}{2x}$ dostajemy $a^2 = 8x^2$... ale a miało być nieparzyste. Znowu sprzeczność.

Przypadek czwarty możemy zredukować do jednego z trzech pozostałych, zatem nie ma co rozważać go osobno.

Zadanie dodatkowe: Spróbuj udowodnić w analogiczny sposób niewymierność liczby $\sqrt{3}$.

4.2 Ułamki łańcuchowe

Istnieje pewien intrygujący sposób przedstawiania liczb, nazywany **ułamkiem łańcuchowym**:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$$

Dla każdej liczby wymiernej istnieje skończona reprezentacja tej postaci (czynniki a, b, c, d są naturalne). Co interesujące, liczby niewymierne również można przedstawiać

[2] a, b należą do liczb całkowitych - w szkole często miesza się oznaczenie $\mathbb{Z}$ z $\mathbb{C}$, które oznacza liczby zespolone. Tutaj będziemy trzymali się notacji akademickiej.

w tej formie - będzie ona jednak nieskończona. Każdy ułamek łańcuchowy postaci nieskończonej będzie liczbą niewymierną.[3]

Zadanie 4.1. Oblicz wartość wyrażenia:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}$$

Zadanie 4.2. Znajdź liczby naturalne a, b, c, d spełniające równanie:

$$\frac{151}{115} = a + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c+\frac{1}{d}}}$$

Zadanie 4.3. Znajdź postać w reprezentacji ułamka łańcuchowego dla liczby $\frac{225}{157}$.

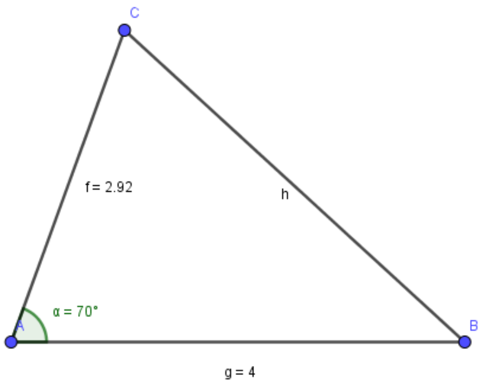
Zadanie 4.4. Znajdź reprezentację ułamka łańcuchowego dla $\sqrt{2}$.
Podpowiedź: $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

[3]Dowód możemy przeprowadzić pokazując, że liczba kroków dla liczby wymiernej $\frac{a}{b}$ musi być skończona. Dlatego każda liczba o nieskończonej liczbie kroków nie będzie miała postaci $\frac{a}{b}$.

5 Geometria

Na początek małe zadanie z trygonometrii:

Zadanie 5.1. Dane są długości dwóch przyległych boków trójkąta oraz kąt między nimi:



Oblicz pole trójkąta oraz długość trzeciego boku.

Zadanie 5.2. W trójkącie równobocznym geometryczny środek (będący równocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie) dzieli wysokość na dwa odcinki. Udowodnij, że proporcja między tymi odcinkami jest równa 1 : 2.

Zadanie 5.3 (Twierdzenie o kącie wpisanym)**.** Udowodnij, że relacja pomiędzy kątami CBA oraz CDB ma się jak 2 : 1.