

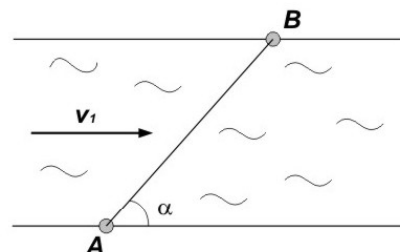
3. Kinematyka ruchu jednostajnego, zmiennego, jednostajnie zmiennego, rzuty.

Wybór i opracowanie zadań 3.1-3.22: Barbara Kościelska, zadań 3.23-3.25: Ryszard J. Barczyński

3.1. Zależność drogi przebytej przez punkt materialny od czasu można opisać równaniem: $x(t) = At + Bt^2 + Ct^3$, gdzie A, B i C są wielkościami stałymi wyrażonymi w odpowiednich jednostkach. Znaleźć zależność prędkości i przyspieszenia tego punktu od czasu.

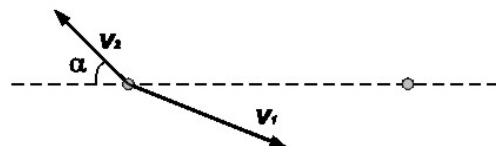
3.2.* Rakieta ustawiona jest na wysokości h nad powierzchnią ziemi. Po starcie porusza się pionowo w górę, a jej przyspieszenie zmienia się zgodnie z zależnością $a = kt^2$, gdzie k jest stałą wyrażoną w odpowiednich jednostkach. Znaleźć zależność prędkości oraz drogi rakiety od czasu.

3.3. Prom kursuje pomiędzy punktami A i B leżącymi na przeciwnych brzegach rzeki. Odległość między punktami A i B wynosi d , a linia AB tworzy kąt α z brzegiem rzeki. Prędkość v_1 wody w rzece jest stała na całej szerokości rzeki. Jakie powinny być wartość i kierunek prędkości v_2 promu względem wody, aby przebył on drogę d w czasie t ?



3.4.* Prędkość wody w rzece zmienia się wraz z szerokością rzeki według równania: $v = 4x^2 + 4x + 0,5$ [m/s], gdzie $x = a/b$ (a jest odległością od brzegu a b szerokością rzeki). O jaki odcinek prąd wody w rzece zniesie łódkę przy przeprawie na drugi brzeg, jeżeli prędkość v_l łódki względem wody jest stała i ma kierunek prostopadły do brzegu rzeki. szerokość rzeki wynosi d .

3.5. Znaleźć czas przelotu samolotu między dwoma punktami odległymi od siebie o L , jeżeli prędkość samolotu względem powietrza wynosi v_1 , a prędkość przeciwnego wiatru skierowanego pod kątem α względem kierunku ruchu samolotu wynosi v_2 .



3.6. Ciało rzucono pod kątem α do poziomu nadając mu prędkość v_0 . (a) Napisać kinematyczne równania ruchu ciała. (b) Napisać równania toru ciała. (c) obliczyć czas lotu ciała. (d) Obliczyć zasięg rzutu. (e) Znaleźć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się ciało.

3.7. Na jakiej wysokości wektor prędkości ciała wyrzuconego z prędkością początkową v_0 pod kątem α do poziomu, utworzy kąt β ($\alpha > \beta$) ? Nie uwzględniać oporu powietrza. Napisać kinematyczne równania ruchu ciała.

3.8. Z jaką prędkością poziomą v_1 powinien lecieć lotnik na wysokości h nad torami, w chwili gdy przelatuje on nad punktem A, aby puszczonej przez niego ładunek trafił w uciekający z prędkością v_2 pociąg, który znajduje się w odległości d od A (samolot i pociąg poruszają się w tym samym kierunku)?

3.9. Dwa ciała wyrzucono jednocześnie z dwóch różnych punktów. Jedno ciało zostało rzucone poziomo z prędkością v_{0x} z wieży o wysokości h , drugie wyrzucono pionowo z prędkością v_{0y} z miejsca odległego o x_0 od podnóża wieży. Jaka powinna być prędkość v_{0y} , aby ciała zderzyły się w powietrzu?

3.10. Ciało spada swobodnie z wieży. W chwili, gdy przebyło ono drogę równą L , z punktu położonego o h metrów niżej od wierzchołka wieży zaczyna spadać drugie ciało. Oba ciała spadają na ziemię w tej samej chwili. Znaleźć wysokość wieży.

3.11. Z samolotu lecącego na wysokości h ze stałą prędkością poziomą v zostaje zrzucona bomba. Napisać równania ruchu, prędkości i przyspieszenia bomby względem obserwatora stojącego na ziemi oraz względem pilota samolotu.

3.12. W wagonie pociągu jadącego ze stałą prędkością v , jeden z pasażerów upuścił z wysokości h względem podłogi wagonu pudełko zapalek. Napisać równanie toru tego pudełka, w układzie odniesienia związanym z: (a) wagonem, (b) szynami.

3.13. Koło zamachowe wykonujące $n_0 = 240$ obr/min zatrzymuje się w czasie $t_1 = 0,5$ min. Przyjmując, że ruch jest jednostajnie zmienny obliczyć, ile obrotów koło wykonało do chwili zatrzymania się.

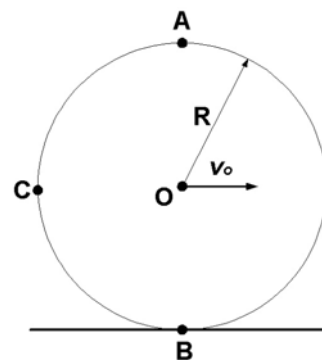
3.14. Równania ruchu punktu znajdującego się na obwodzie koła toczącego się bez poślizgu wzdłuż osi x mają postać:

$$x = R \sin \omega t + \omega R t$$

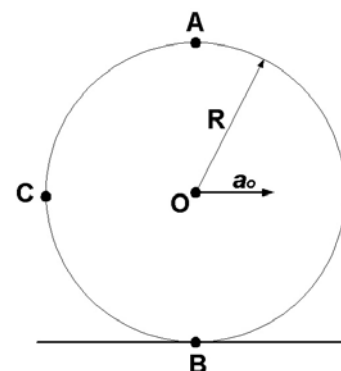
$$y = R \cos \omega t + R.$$

Oblicz prędkość i przyspieszenie punktu na obwodzie w chwili, gdy współrzędna y ma wartość (a) minimalną, (b) maksymalną, (c) $y = y_{\max}/2$.

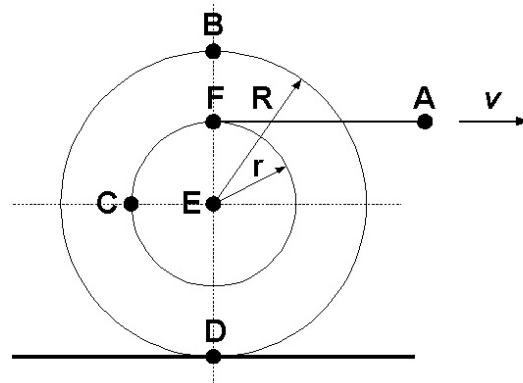
3.15. Obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po prostej. Prędkość środka O obręczy jest stała i wynosi v_0 . Oblicz wartości oraz wskaż kierunki i zwroty chwilowych prędkości i przyspieszeń tych punktów tarcz, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literami A, B i C.



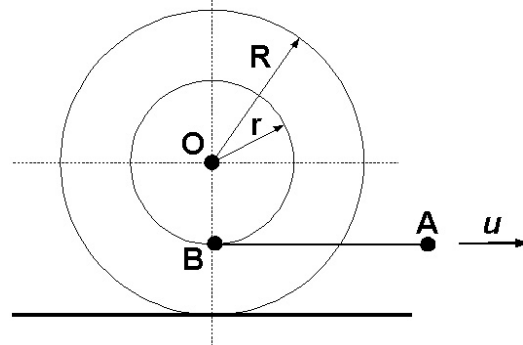
3.16. Obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po prostej. Przyspieszenie środka O obręczy jest stałe i wynosi a_0 . Oblicz wartości oraz wskaż kierunki i zwroty chwilowych przyspieszeń tych punktów tarcz, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literami A, B i C.



3.17. Koniec liny (A) przesuwają się ze stałą prędkością v skierowaną w prawo. Lina nawinięta jest na układ współśrodkowych, kołowych tarcz pokazanych na rysunku (promień małego koła $= r$, dużego $= R$). Oblicz wartości oraz wskaż kierunki i zwroty chwilowych prędkości i przyspieszeń tych punktów tarcz, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literami B, C, D, E i F.



3.18. Na szpulę o promieniach R i r nawinięto linę, której koniec A ma stałą prędkość u . Obliczyć, jaką drogę S_B przebędzie koniec A liny, gdy odcinek AB liny nawinie się na szpulę.



3.19. Koło obraca się wokół swojej osi. Znaleźć jego przyspieszenie kątowe jeżeli wiadomo, że po upływie czasu t od rozpoczęcia ruchu jednostajnie przyspieszonego, wektor całkowitego przyspieszenia punktu położonego na obwodzie tworzy kąt α z kierunkiem prędkości liniowej tego punktu.

3.20. Punkt materialny zaczyna poruszać się po okręgu z przyspieszeniem stycznym a_s . Znaleźć jego wypadkowe przyspieszenie a_w po $u = 0,1$ obrotu.

3.21.* Taśma magnetofonowa jest przewijana z drugiej szpulki na pierwszą, która obraca się ze stałą prędkością kątową ω_1 . W chwili początkowej promienie krążków nawiniętej taśmy były odpowiednio równe R_{01} i R_{02} . grubość taśmy wynosi a . Znaleźć: (a) zależność długości nawiniętej taśmy od czasu, (b) zależność prędkości przesuwu taśmy od czasu.

3.22. Ciało rzucono z pewnej wysokości z prędkością v_0 w kierunku poziomym. Obliczyć jego prędkość, przyspieszenie styczne i normalne oraz promień krzywizny toru po czasie t . Opory powietrza pominać.

3.23. Narciarz na nartach wodnych porusza się częstokroć znacznie szybciej niż ciągnąca go motorówka. Jak to jest możliwe?

3.24. System napędu samochodu posiada w torze przeniesienia napędu tak zwany mechanizm różnicowy, który pozwala obracać się kołom samochodu z różną prędkością. Dlaczego jest to konieczne?

3.25. Ciało porusza się wzdłuż osi x według zależności $x = A \sin(\omega t)$, gdzie A i ω są wielkościami stałymi. Narysuj wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu. Jakie są maksymalne wartości prędkości i przyspieszenia?

Rozwiązania:

3.1.R. Korzystając z definicji prędkości chwilowej oraz przyspieszenia chwilowego otrzymamy następujące równania opisujące zależność prędkości v i przyspieszenia a od czasu:

$$v = \frac{dx}{dt} = A + 2Bt + 3Ct^2 ,$$

oraz

$$a = \frac{dv}{dt} = 2B + 6Ct .$$

3.2.R.* Przyspieszenie rakiety dane jest równaniem:

$$(1) \quad a = kt^2 .$$

Przyspieszenie chwilowe:

$$(2) \quad a = \frac{dv}{dt} .$$

Z (1) i (2):

$$\frac{dv}{dt} = kt^2 ,$$

$$dv = kt^2 dt ,$$

$$(3) \quad v = \int kt^2 dt = \frac{1}{3}kt^3 + C_1 ,$$

gdzie C_1 jest stałą. Wiadomo, że w chwili czasu $t = 0$, $v = 0$. Po podstawieniu tych wartości do równania (3) otrzymamy stałą $C_1 = 0$, czyli zależność prędkości rakiety od czasu:

$$(4) \quad v = \frac{1}{3}kt^3 .$$

Prędkość chwilowa:

$$(5) \quad v = \frac{ds}{dt} .$$

Z (4) i (5):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}kt^3 ,$$

$$ds = \frac{1}{3}kt^3 dt ,$$

$$(6) \quad s = \int \frac{1}{3}kt^3 dt = \frac{1}{12}kt^4 + C_2 ,$$

gdzie C_2 jest stałą. Wiadomo, że w chwili czasu $t = 0$ rakietę znajdowała się na wysokości h nad powierzchnią ziemi, czyli $s = h$. Podstawiając te wartości do równania (6) otrzymamy stałą $C_2 = h$, czyli zależność drogi przebytej przez raketę od czasu:

$$s = h + \frac{1}{12}kt^4 \quad .$$

3.3.R. Prędkość v promu względem brzegu jest wypadkową prędkości v_1 wody w rzece i prędkości v_2 promu względem wody.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad .$$

Wektor prędkości v_2 można rozłożyć na dwie składowe: równoległą (v'_2) i prostopadłą do brzegu rzeki (v''_2). Wartości tych składowych można zapisać:

$$(1) \quad \begin{aligned} v'_2 &= v \cos \alpha - v_1 \quad , \\ v''_2 &= v \sin \alpha \quad . \end{aligned}$$

Wiadomo, iż prom musi pokonać drogę d w czasie t , czyli jego prędkość v :

$$v = \frac{d}{t} \quad .$$

Równania (1) przybiorą wówczas postać:

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{d}{t} \cos \alpha - v_1 \quad , \\ v''_2 &= \frac{d}{t} \sin \alpha \quad . \end{aligned}$$

Z rysunku wynika, że:

$$v_2 = \sqrt{v'^2_2 + v''^2_2} = \sqrt{\left(\frac{d}{t} \cos \alpha - v_1\right)^2 + \left(\frac{d}{t} \sin \alpha\right)^2} \quad .$$

Kierunek wektora prędkości v_2 znajdziemy znajdując wartość kąta β :

$$\tan \beta = \frac{v''_2}{v'_2} = \frac{d \sin \alpha}{d \cos \alpha - v_1 t} \quad .$$

3.4.R.* Odcinek s o jaki prąd wody w rzece zniesie łódkę w czasie t_1 jej przeprawy na drugą stronę rzeki:

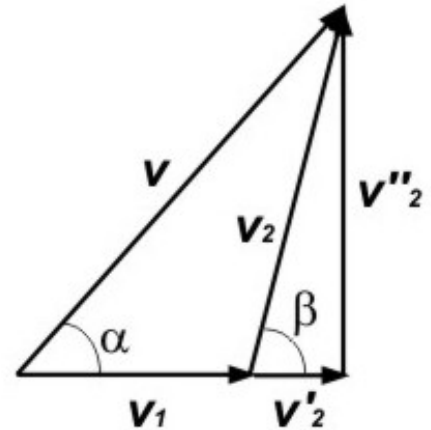
$$(1) \quad s = \int_0^{t_1} v dt \quad ,$$

gdzie:

$$v = 4x^2 + 4x + 0,5 \quad ,$$

$$x = a/b \quad .$$

Czas przeprawy można zdefiniować jako:



$$t_1 = \frac{b}{v_l}.$$

Czas t , w którym łódka znajduje się w odległości a od brzegu:

$$t = \frac{a}{v_l} = \frac{bx}{v_l},$$

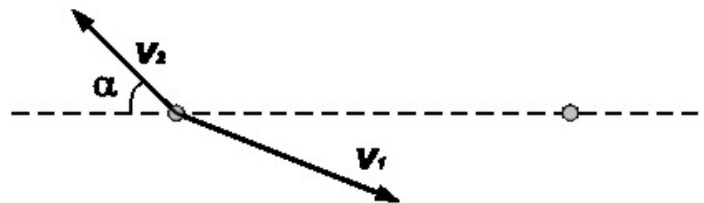
skąd:

$$dt = \frac{b}{v_l} dx.$$

Wówczas równanie (1):

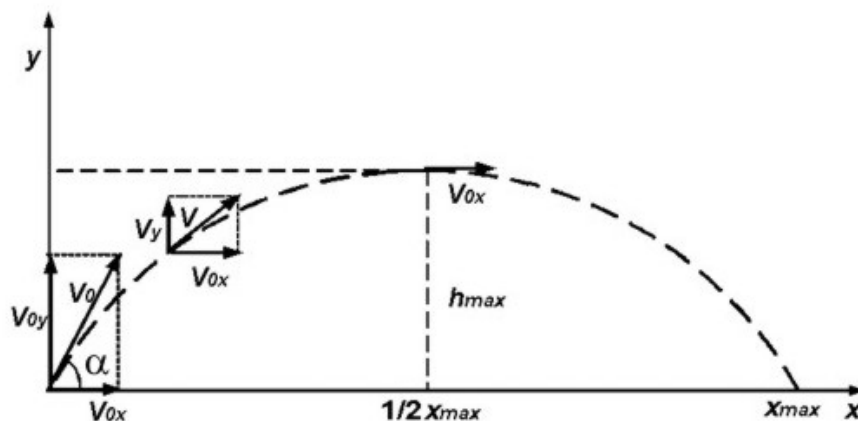
$$s = \frac{b}{v_l} \int_0^1 (-4x^2 + 4x + 0,5) dx = \frac{b}{v_l} \left(-\frac{4}{3} + 2 + 0,5 \right) \cong 1,17 \frac{b}{v_l}.$$

3.5.R. Wskazówka: Prędkość samolotu względem ziemi jest wypadkową prędkości samolotu względem powietrza oraz prędkości wiatru. Wówczas czas przelotu samolotu między dwoma punktami odległymi od siebie o L wynosi:



$$t = \frac{L}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2 \sin^2 \alpha} - v_2 \cos \alpha}.$$

3.6.R.



(a) Równania ruchu mają postać:

$$(1) \quad x = v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha,$$

$$(2) \quad y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

(b) Równanie toru ciała:

Wyznaczając czas z równania (1):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

i podstawiając do równania (2) otrzymamy równanie toru ciała:

$$y = \tan \alpha \, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Torem ciała jest parabola skierowana ramionami w dół.

(c) Czas lotu ciała, t_z , można obliczyć podstawiając w równaniu (2) $y = 0$:

$$0 = v_0 t_z \sin \alpha - \frac{g t_z^2}{2}.$$

Czyli:

$$t_{z1} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{lub} \quad t_{z2} = 0.$$

Czas $t_{z2} = 0$ oznacza moment, w którym dopiero rozpoczyna się lot kamienia, czyli czas lotu ciała $t_z = t_{z1}$:

$$(3) \quad t_z = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

(d) Zasięg rzutu, z , można obliczyć podstawiając w równaniu (1) $t = t_z$ (czyli czas całego lotu opisany równaniem (3)). Wówczas współrzędna x będzie równa zasięgowi rzutu, $x = z$:

$$z = v_0 t_z \cos \alpha.$$

Otrzymamy wówczas:

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

(e) Czas w jakim ciało wzniesie się na maksymalną wysokość jest równy połowie czasu t_z (równanie (3)). Podstawiając w równaniu (2) $t = \frac{1}{2}t_z$ otrzymamy maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się ciało:

$$h_{\max} = v_0 \frac{1}{2} t_z \sin \alpha - \frac{g \left(\frac{1}{2} t_z \right)^2}{2},$$
$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

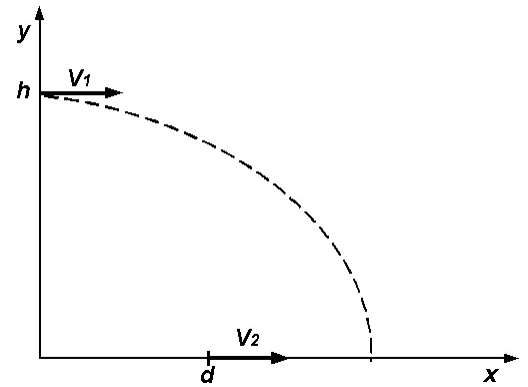
3.7.R. Odpowiedź: Równania ruchu są takie same jak w zadaniu 3.6, a szukana wysokość wynosi:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \beta)$$

3.8.R. Równania ruchu pocisku (1) i pociągu (2) w przedstawionym na rysunku układzie współrzędnych mają postać:

$$(1) \begin{cases} x_1 = v_1 t \\ y_1 = h - \frac{gt^2}{2} \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} x_2 = d + v_2 t \\ y_2 = 0 \end{cases}.$$



Współrzędne x_1 i y_1 pocisku muszą w momencie trafienia być równe współrzędnym x_2 i y_2 pociągu. W rezultacie otrzymujemy:

$$v_1 = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} + v_2.$$

3.9.R. Odpowiedź:

$$v_{0y} = \frac{h}{x_0} v_{0x}.$$

3.10.R. Odpowiedź:

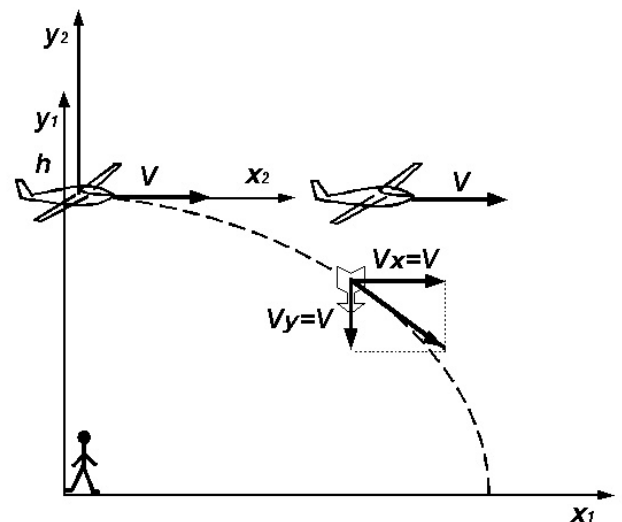
$$H = \frac{(L + h)^2}{4L}.$$

3.11.R. Z punktu widzenia obserwatora stojącego na ziemi prędkość bomby w kierunku poziomym jest równa prędkości samolotu v i pozostaje stała. Równania ruchu bomby w układzie odniesienia (x_1, y_1) , związanym z obserwatorem stojącym na ziemi mają postać:

$$x_1 = vt,$$

$$y_1 = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Różniczkując powyższe równania ruchu otrzymujemy równania prędkości:



$$v_{1x} = v ,$$

$$v_{1y} = -gt .$$

Różniczkując równania opisujące prędkość otrzymamy przyspieszenia:

$$a_{1x} = 0 ,$$

$$a_{1y} = -g .$$

W układzie odniesienia (x_2, y_2) związanym z pilotem równania ruchu bomby w przyjętym układzie współrzędnych mają postać:

$$x_2 = 0 ,$$

$$y_2 = -\frac{gt^2}{2} .$$

Różniczkując powyższe równania ruchu otrzymujemy równania prędkości:

$$v_{2x} = 0 ,$$

$$v_{2y} = -gt .$$

Różniczkując równania opisujące prędkość otrzymamy przyspieszenia:

$$a_{2x} = 0 ,$$

$$a_{2y} = -g .$$

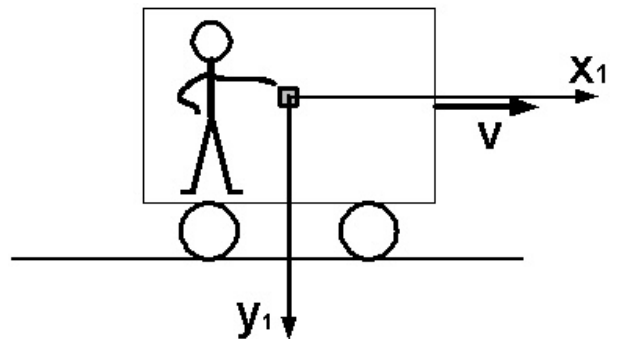
3.12.R. (a) W układzie odniesienia (x_1, y_1) związanym z wagonem równania ruchu mają postać:

$$x_1 = 0 ,$$

$$y_1 = \frac{gt^2}{2} ,$$

czyli równanie toru:

$$x_1 = 0 .$$



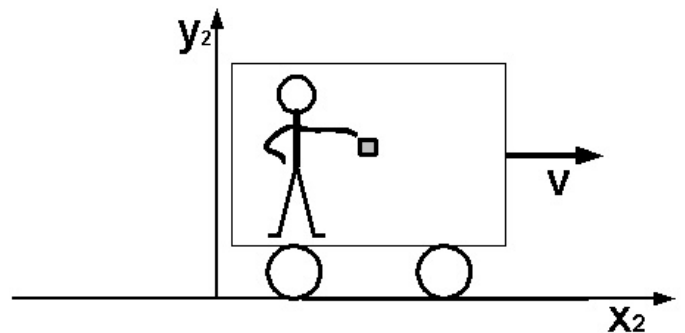
(b) W układzie odniesienia (x_2, y_2) związanym z szynami:

$$x_2 = vt ,$$

$$y_2 = h - \frac{gt^2}{2} .$$

Równanie toru:

$$y_2 = h - \frac{g}{2v^2} x_2^2 .$$



3.13.R. Ilość obrotów można zdefiniować jako stosunek drogi kątovej φ , którą przebył dowolny punkt znajdujący się na obwodzie koła w czasie t_1 , do kąta 2π :

$$(1) \quad N = \frac{\varphi_1}{2\pi}.$$

Ruch koła jest ruchem jednostajnie opóźnionym, czyli droga kątovej przebyta przez wybrany punkt znajdujący się na jego obwodzie:

$$(2) \quad \varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{2}.$$

Ponieważ po czasie t_1 koło się zatrzymuje, więc:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t_1 = 0,$$

czyli:

$$(3) \quad \omega_0 = \varepsilon t_1 = 2\pi n_0.$$

Z (2) i (3) otrzymamy:

$$(4) \quad \varphi_1 = \pi n_0 t_1.$$

Podstawiając (4) do (1) otrzymamy:

$$N = \frac{n_0 t_1}{2} = 60 \text{ obrotów}.$$

3.14.R. Równania ruchu punktu mają postać:

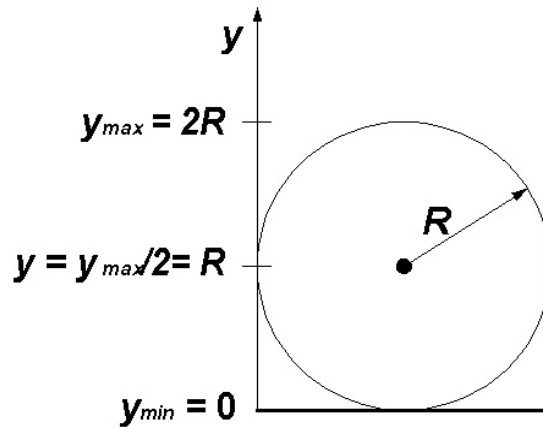
$$(1) \quad \begin{aligned} x &= R \sin \omega t + \omega R t, \\ y &= R \cos \omega t + R. \end{aligned}$$

Różniczkując równania ruchu otrzymamy prędkość:

$$(2) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = R\omega \cos \omega t + \omega R, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -R\omega \sin \omega t, \end{aligned}$$

Różniczkując równania prędkości otrzymamy przyspieszenie:

$$(3) \quad \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$



(a) Z równań ruchu (1) wynika, że współrzędna y ma wartość minimalną (czyli $y = 0$), gdy $\cos(\omega t) = -1$. Prędkość (2) i przyspieszenie (3) punktu są wówczas odpowiednio równe:

$$v_x = 0 ,$$

$$v_y = 0 .$$

$$a_x = 0 ,$$

$$a_y = R\omega^2 .$$

(b) Z równań ruchu (1) wynika, że współrzędna y ma wartość maksymalną (czyli $y = 2R$), gdy $\cos(\omega t) = 1$. Prędkość (2) i przyspieszenie (3) punktu są wówczas odpowiednio równe:

$$v_x = 2\omega R ,$$

$$v_y = 0 .$$

$$a_x = 0 ,$$

$$a_y = -R\omega^2 .$$

(c) Z równań ruchu (1) wynika, że współrzędna y ma wartość równą połowie wartości maksymalnej (czyli $y = R$), gdy $\cos(\omega t) = 0$. Prędkość (2) i przyspieszenie (3) punktu są wówczas odpowiednio równe:

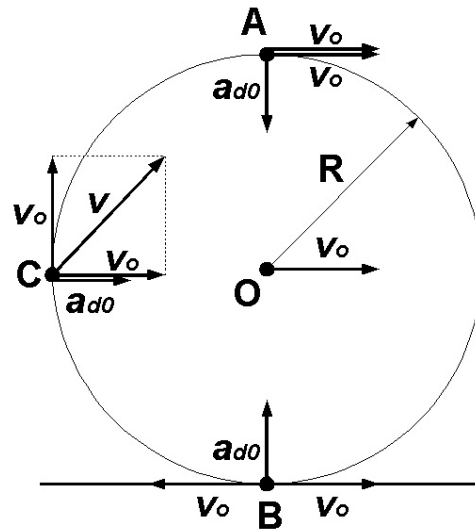
$$v_x = \omega R ,$$

$$v_y = -\omega R .$$

$$a_x = -R\omega^2 ,$$

$$a_y = 0 .$$

3.15.R.



Punkt A:

Prędkość w punkcie A jest sumą prędkości v_0 z jaką porusza się środek obręczy oraz prędkości stycznej do obręczy, wynikającej z jej ruchu obrotowego. W rozważanym przypadku wartość prędkości stycznej jest równa v_0 .

$$v_A = v_0 + v_0 = 2v_0.$$

Prędkość kątowna ω punktów znajdujących się na obręczy:

$$\omega = \frac{v_0}{R}.$$

Przyspieszenie punktu A jest przyspieszeniem dośrodkowym:

$$a_A = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}.$$

Przyspieszenie wszystkich punktów znajdujących się na obręczy jest takie samo.

Punkt B:

$$v_B = v_0 - v_0 = 0,$$

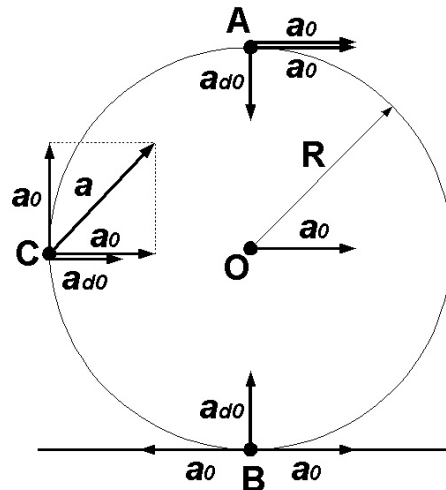
$$a_B = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}.$$

Punkt C:

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = v_0 \sqrt{2},$$

$$a_C = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}.$$

3.16.R.



Przyspieszenie styczne w punkcie A jest sumą przyspieszeń a_0 z jakim porusza się środek obręczy oraz przyspieszenia stycznego, wynikającego z jej ruchu obrotowego. Wartość przyspieszenia stycznego wynosi a_0 .

$$a_A = a_0 + a_0 = 2a_0.$$

Przyspieszenie kątowe ε punktów znajdujących się na obręczy:

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R}.$$

Przyspieszenie kątowe wszystkich punktów znajdujących się na obręczy jest takie samo.

Przyspieszenie dośrodkowe punktu A w danej chwili czasu t :

$$a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(a_0 t)^2}{R}.$$

Przyspieszenie dośrodkowe wszystkich punktów znajdujących się na obręczy jest takie samo.

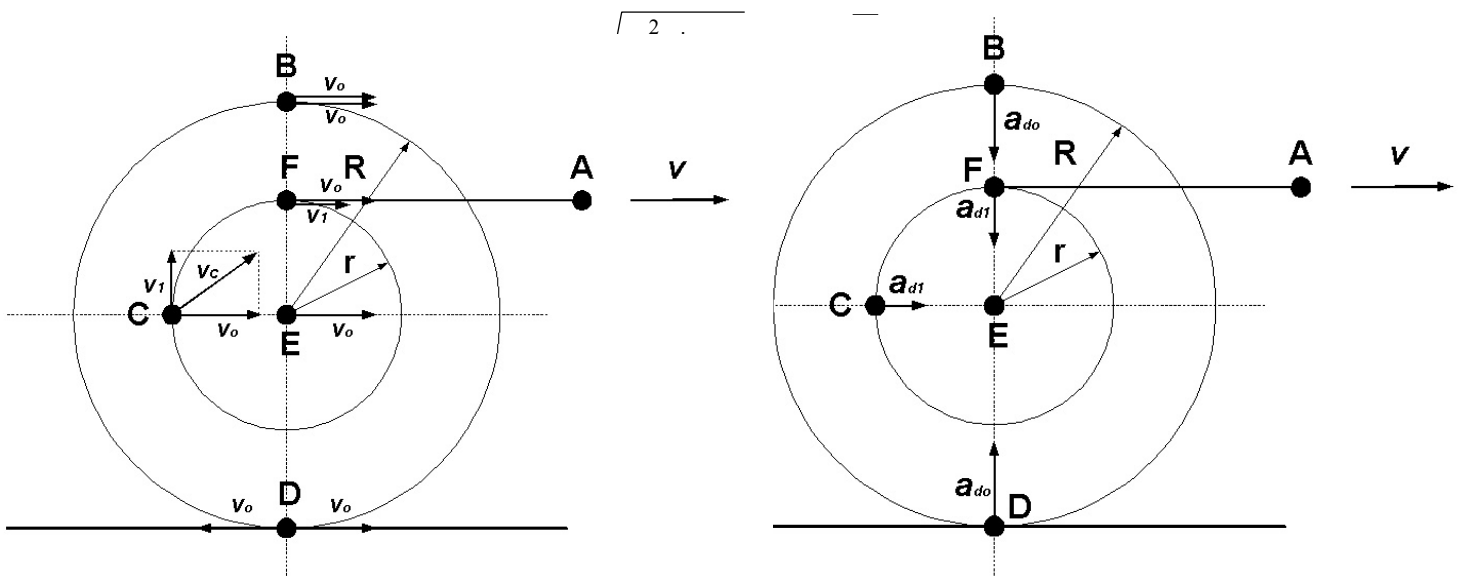
Punkt B:

$$a_A = a_0 - a_0 = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R},$$

$$a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(a_0 t)^2}{R}.$$

Punkt C:



Punkt F:

Wypadkowa prędkość punktu F jest równa prędkości v , z którą przesuwa się punkt A:

$$v_F = v,$$

Prędkość v w punkcie F można rozłożyć na dwie składowe: prędkość v_0 , która jest prędkością ruchu postępowego szpuli oraz prędkość v_1 wynikającą z ruchu obrotowego szpuli wokół punktu E:

$$v = v_0 + v_1 = \omega R + \omega r = \omega(R + r),$$

skąd

$$\omega = \frac{v}{R + r}.$$

Przyspieszenie dośrodkowe a_F punktu F wynosi:

$$a_F = a_{d1} = \omega^2 r = \frac{v^2 r}{(R + r)^2}.$$

Punkt E:

$$v_E = v_0 = \omega R = \frac{vR}{R + r},$$

$$a_E = 0.$$

Punkt D:

$$v_D = v_0 - v_0 = 0$$

$$a_D = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v^2 R}{(R + r)^2}.$$

Punkt B:

$$v_B = v_0 + v_0 = 2v_0 = 2\omega R = \frac{2vR}{R + r},$$

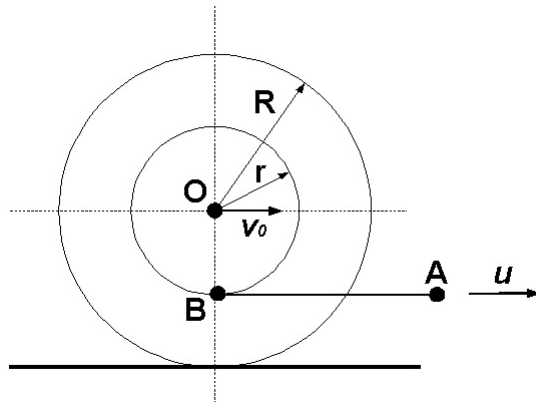
$$a_B = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v^2 R}{(R + r)^2}.$$

Punkt C:

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{(\omega R)^2 + (\omega r)^2} = \frac{v}{R + r} \sqrt{R^2 + r^2},$$

$$a_C = a_{d1} = \omega^2 r = \frac{v^2 r}{(R + r)^2}.$$

3.18.R.



Wskazówka: W jednakowym czasie t droga (S_0) środka O szpuli będzie większa o odcinek AB od drogi (S_B) punktów, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literą B:

$$S_0 = S_B + AB,$$

gdzie:

$$S_0 = v_0 t,$$

$$S_B = ut.$$

Odpowiedź:

$$S_B = \frac{AB(R-r)}{r}.$$

3.19.R. Wypadkowy wektor przyspieszenia a_w jest sumą wektorów przyspieszeń stycznego i dośrodkowego, a jego wartość można zapisać jako:

$$(1) \quad a_w^2 = a_d^2 + a_s^2.$$

Przyspieszenie styczne a_s :

$$(2) \quad a_s = a_w \cos \alpha,$$

oraz

$$(3) \quad a_s = \varepsilon R,$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym. Z (2) i (3):

$$(4) \quad a_w = \frac{\varepsilon R}{\cos \alpha}.$$

Przyspieszenie dośrodkowe a_d :

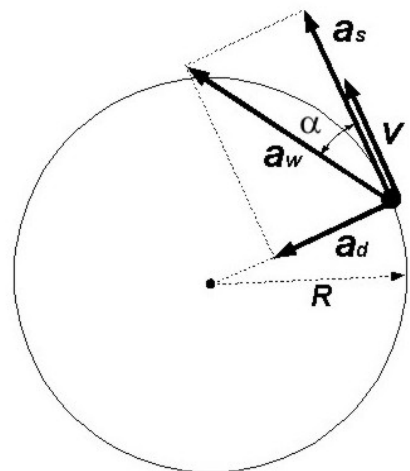
$$(5) \quad a_d = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R.$$

Podstawiając (3), (4) i (5) do (1) otrzymamy:

$$\frac{\varepsilon^2 R^2}{\cos^2 \alpha} = \varepsilon^4 t^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2,$$

skąd

$$\varepsilon = \frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{t^2}.$$



3.20.R. Odpowiedź:

$$a_w = a_s \sqrt{1 + 4\pi u}.$$

3.21^{*}.R. (a) Promień szpulki przy jej obrocie o kąt φ można opisać równaniem:

$$R = R_0 \pm a \frac{\varphi}{2\pi},$$

gdzie znak $+$ dotyczy nawijania a $-$ odwijania się taśmy. Zatem długość taśmy nawiniętej po obrocie szpulki o pewien kąt φ_1 :

$$s = \int_0^{\varphi_1} \left(R_{01} + \frac{a\varphi}{2\pi} \right) d\varphi = R_{01}\varphi_1 + \frac{a}{4\pi} \varphi_1^2.$$

Ponieważ szpulki obracają się ze stałą prędkością, to:

$$\varphi_1 = \omega_1 t,$$

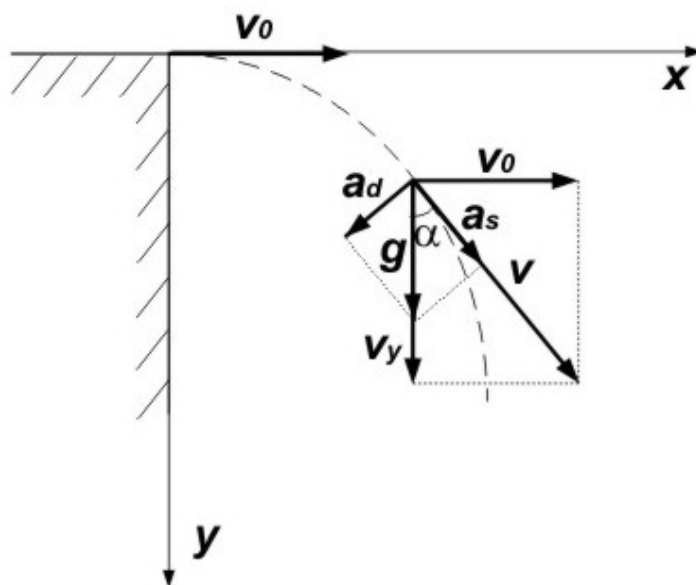
gdzie t oznacza czas, w ciągu którego szpulka obróciła się o kąt φ_1 . Wówczas długość taśmy s wynosi:

$$s = R_{01}\omega_1 t + \frac{a}{4\pi} \omega_1^2 t^2.$$

(b) Prędkość przesuwu taśmy:

$$v = \frac{ds}{dt} = R_{01}\omega_1 + \frac{a}{2\pi} \omega_1^2 t.$$

3.22.R.



Prędkość v kamienia w chwili czasu t jest wypadkową prędkości v_0 w kierunku poziomym i prędkości v_y w kierunku pionowym. Jej wartość wynosi:

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Przyspieszenie styczne:

$$a_s = g \cos \alpha = g \frac{v_y}{v} = g \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

Przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = g \sin \alpha = g \frac{v_0}{v} = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

3.23.R. Jeżeli założymy, że lina łącząca narciarza i motorówkę jest cały czas napięta, to w każdym momencie jedynie rzut chwilowej prędkości narciarza i łodzi na kierunek liny musi być jednakowy. Wartość każdej z prędkości będzie zależała od kąta pomiędzy jej kierunkiem, a kierunkiem liny.

3.24.R. Na zakręcie koła wewnętrzne pokonują mniejszą drogę niż zewnętrzne. Jeżeli koła byłyby związane na sztywno, musiałby wystąpić poślizg jednego z kół. Mechanizm różnicowy, który pozwala obracać się kołom samochodu z różną prędkością, zapobiega temu poślizgowi. (Tramwaje starego typu nie posiadały mechanizmu różnicowego i na zakrętach powodowały spory hałas).

3.25.R. Odpowiedź:

Maksymalna wartość prędkości: $v_{max} = A\omega$, maksymalna wartość przyspieszenia: $a_{max} = A\omega^2$.