

Matematyka

18 lutego 2018

Spis treści

1	Zadania	2
1.1	Zabawy z liczbami	2
1.2	Podzielność liczb	4
2	Podstawowe twierdzenie arytmetyki	5
3	Powrót do zadań	7
3.1	Prędkość, droga, czas	8
3.2	Praca i czas potrzebny na jej wykonanie	10
3.3	Zadania różne	11
3.4	Wielokąty	12
3.5	Trójkąty i okręgi	14
4	Bukiety matematyczne	17
4.1	Liczby niewymierne	17
4.2	Ułamki łańcuchowe	17
5	Geometria	19
6	Konstrukcje geometryczne	19
6.1	Trójkąty przystające	20
6.2	Zadania	21
7	Egzamin próbny	23
8	Geometria	31
9	Algebra	33

1 Zadania

1.1 Zabawy z liczbami

Zadanie 1.1. Rok wydania dzieła Kopernika *O obrotach ciał niebieskich* jest liczbą czterocyfrową, której suma cyfr wynosi 13, cyfra dziesiątek stanowi 80% cyfry setek, a cyfra tysięcy jest 7 razy mniejsza od sumy jedności i dziesiątek. Znajdź tę datę.

Rozwiązanie. Są dwie metody rozwiązania tego zadania - formalne i przez zgadywanie. Zgadywanie jest zabawniejsze, ale warto też znać metodę formalną.

Szukaną liczbę czterocyfrową możemy zapisać jako $abcd$, gdzie litery a, b, c, d są liczbami z przedziału 0 do 9 (poza a , która nie może być zerem i z całą pewnością musi być równa 1). Mamy również zestaw informacji:

1. Suma cyfr wynosi 13:

$$a + b + c + d = 13.$$

Wróćmy do tej informacji później.

2. Cyfra dziesiątek stanowi 80% cyfry setek:

$$c = \frac{4}{5} \cdot b.$$

Ta wskazówka daje nam w istocie bardzo dużo informacji. 0.8 to $\frac{4}{5}$, czyli c do b ma się jak 4 do 5. To w zasadzie daje nam od razu informację, że $c = 4$ oraz $b = 5$.

3. Cyfra tysięcy jest 7 razy mniejsza od sumy jedności i dziesiątek:

$$a = \frac{1}{7}(c + d).$$

Nawet jeśli nie wiemy nic na temat a , to maksymalna wartość $c + d$ może być równa 18 - oznacza to, że jeśli a jest 7 razy mniejsze, to a może być równe 1 lub 2. Ponieważ już ustaliliśmy, że c jest równe 4, to aby $a = 2$, d musiałoby być równe 10. To nie jest możliwe. Zatem pozostaje nam możliwość $a = 1$. Oznacza to, że $(c + d) = 7$, z czego wynika, że $d = 3$.

Zbierając wszystkie informacje razem, uzyskujemy rok wydania równy 1543. Faktycznie, suma cyfr jest równa 13, co potwierdza pierwszą przesłankę. \square

Zadanie 1.2. Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych równa się 29. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych mające tę własność.

Rozwiązanie. Różnicę kwadratów dwóch liczb możemy zapisać jako:

$$a^2 - b^2 = 29.$$

Zauważmy, że zarówno a jak i b może być dodatni lub ujemny, bez zmiany rozwiązania. Załóżmy na razie że a, b są dodatnie, reszta rozwiązań będzie kombinacjami $\pm a, \pm b$. Ze wzorów skróconego mnożenia wiemy, że

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$(a + b)$ oraz $(a - b)$ pomnożone przez siebie mają dawać 29. Wiemy, że 29 jest liczbą pierwszą, zatem jedyny rozkład na czynniki pierwsze jaki możemy przeprowadzić to $29 = 29 \cdot 1$. Ponieważ założyliśmy, że a i b są dodatnie, sprowadza się to do możliwości:

$$a + b = 29$$

$$a - b = 1$$

(gdyby $a - b = 29$ i $a + b = 1$ prowadziłyby to do sprzeczności z założeniem o dodatniości). W ten sposób stwierdzamy, że $a = 15$ oraz $b = 14$. Kombinując resztę rozwiązań, otrzymujemy cztery pary liczb całkowitych:

1. (15,14),
2. (-15,14),
3. (-15,-14),
4. (15,-14).

□

Zadanie 1.3. Napisz wszystkie liczby trzycyfrowe, których suma cyfr wynosi 11. Cyfrą jedności tej liczby jest x , a cyfra dziesiątek jest o dwa większa od cyfry jedności.

Zadanie 1.4. Suma czterech różnych liczb wynosi 45. Jeżeli pierwszą liczbę powiększysz o 2, drugą zmniejszysz o 2, trzecią podwoisz, a czwartą zmniejszysz o jej połowę, to uzyskane w ten sposób liczby będą równe. Ile wynosi każda z czterech liczb?

Zadanie 1.5. Ile istnieje liczb dwucyfrowych nieujemnych mniejszych od 65 w których cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności?

Zadanie 1.6. Znajdź trzy liczby, z których druga jest większa od pierwszej o tyle, o ile trzecia jest większa od drugiej i o których wiadomo, że iloczyn dwóch mniejszych liczb jest równy 85, iloczyn zaś dwóch większych 115.

Zadanie 1.7. Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeżeli zaś podzielimy tę liczbę przez sumę cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. Znajdź tę liczbę.

Zadanie 1.8. Jeżeli cyfrę dziesiątek pewnej liczby dwucyfrowej zwiększymy o 4, a jej cyfrę jedności zmniejszymy o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 86. Jeżeli zaś cyfrę dziesiątek tej liczby zmniejszymy o 2, a cyfrę jedności powiększymy o 1, to otrzymamy liczbę większą od 27. Jaka to liczba?

Zadanie 1.9. Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 9 i żeby po przestawieniu jej cyfr otrzymać:

1. liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby,
2. liczbę większą od połowy szukanej liczby.

Podaj wszystkie rozwiązania w każdym przypadku.

Zadanie 1.10. Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 13 i żeby po przestawieniu tych cyfr otrzymać:

1. liczbę większą od szukanej,
2. liczbę mniejszą od szukanej.

Ile jest takich liczb?

Zadanie 1.11. Znajdź wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, które wzrastają 9 razy, gdy między cyfrę jedności i cyfrę dziesiątek wstawimy zero.

1.2 Podzielność liczb

Zadanie 1.12. Litera x w liczbie $28692x$ oznacza cyfrę jedności. Jaka to cyfra, jeżeli ta liczba jest podzielna jednocześnie przez 3 i przez 4?

Zadanie 1.13. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych podzielnych przez 15, w których cyfrą tysięcy jest 1, a cyfrą dziesiątek jest 2?

Zadanie 1.14. Ile jest liczb całkowitych od 0 do 999 włącznie, niepodzielnych ani przez 5 ani przez 7? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 1.15. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych takie, że suma liczb w każdej parze jest równa 168, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 24.

Zadanie 1.16. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 96, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 12. Znajdź te liczby.

Zadanie 1.17. Ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb naturalnych, z których żadna nie jest podzielna przez 5.

Zadanie 1.18. Przy dzieleniu liczb a, b, c przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty: 1, 2, 3. Znajdź resztę z dzielenia sumy kwadratów liczb: a, b, c przez liczbę 5.

Zadanie 1.19. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych, z których największy wspólny dzielnik wynosi 13, a najmniejsza wspólna wielokrotność równa się 2002. Udowodnij, że jeżeli z dwóch liczb naturalnych jedna przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga resztę 2, to ich iloczyn przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

2 Podstawowe twierdzenie arytmetyki

W tym miejscu dobrze będzie poświęcić chwilę na zbadanie natury liczb pierwszych:

Definicja 1. Liczbą pierwszą nazywamy każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie posiada dzielników innych niż 1 oraz siebie samej.

Wyposażeni w definicję możemy teraz zbadać...

Twierdzenie 1 (Podstawowe twierdzenie arytmetyki). Każdą liczbę naturalną większą od 1, nie będącą liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Dowód tego twierdzenia przebiegnie następująco - pokażemy że liczby naturalne możemy rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych. Potem założymy, że znaleźliśmy dwa takie rozkłady. Wykażemy następnie, że obydwa te rozkłady składają się dokładnie z takich samych czynników - znaczy się, że istnieje tylko jeden rozkład na liczby pierwsze.

Skąd jednak wiemy, że każdą liczbę możemy rozdzielić na zbiór liczb pierwszych? Otóż:

Lemat 1. Każda liczba naturalna większa od 1 posiada przynajmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą.

Dowód. Wiemy, że każda liczba n dzieli się na pewno przez samą siebie, więc zbiór dzielników nie jest pusty. Weźmy najmniejszy z dzielników, d . Załóżmy teraz że d nie jest pierwszy, co przekreślałoby prawdziwość twierdzenia. Jednakowoż niepierwszość d oznacza, że istnieje dzielnik d mniejszy od d i większy od 1. Z drugiej strony, jeśli jakaś liczba dzieli d to jednocześnie dzieli n - zatem d nie byłby wtedy najmniejszym z dzielników. Ów najmniejszy dzielnik (większy od 1) musi być zatem liczbą pierwszą, w przeciwnym wypadku... nie jest najmniejszy! \square

Teraz wystarczy zauważyć, że dowolna liczba n podzielona przez jej dzielnik daje wynik mniejszy od n . Ponieważ siedzimy w liczbach naturalnych, istnieje skończona liczba elementów mniejszych od n i większych od 1. Powtarzając proces dzielenia na liczby pierwsze wystarczająco dużą liczbę razy w końcu zejdziemy do jedynki.

Mamy zatem rozkład n na zestaw liczb pierwszych. Nie wiemy jednak, czy to jedyny rozkład - może da się rozłożyć n na dwa sposoby? Pokażemy że nie - ale do tego będziemy potrzebowali Lematu 2:

Lemat 2. Jeśli a jest liczbą naturalną a p jest liczbą pierwszą, to albo p dzieli a , albo a, p są względnie pierwsze, tj. $NWD(a, p) = 1$.

Dowód. Istotnie, jeśli największy wspólny dzielnik jest większy niż 1 to oznacza to, że mamy liczbę dzielącą p - a to może być tylko p . \square

Lemat 3. Jeśli a oraz b nie są podzielne przez p to ab również nie jest podzielne przez p .

Dowód. Załóżmy, że ab dzieli się przez p : iloczyn ab możemy zatem przedstawić jako:

$$ab = p \cdot z.$$

Oczywiście pz dzieli się dalej przez a oraz przez b . Zatem:

$$\frac{pz}{a} = b.$$

Ponieważ p nie ma wspólnych dzielników z a , możemy to zamienić na:

$$p \frac{z}{a} = b,$$

gdzie, oczywiście, $\frac{z}{a}$ musi być liczbą naturalną. Jednak oznacza to, że b dzieli się przez p , co przeczy założeniom. Zatem iloczyn ab nie jest podzielny przez liczbę pierwszą p . \square

Teraz możemy przeprowadzić faktyczny dowód podstawowego twierdzenia algebry. Otóż, załóżmy że mamy dwa rozkłady na liczby pierwsze:

$$n = p_1 p_2 \dots p_n,$$

$$n = q_1 q_2 \dots q_m,$$

gdzie p_i, q_i są liczbami pierwszymi. Dla porządku wszystkie czynniki są poustawiane od najniższego do najwyższego. Jeśli p_1 dzieli n , to p_1 musi dzielić któryś z q_i - może to się zdarzyć tylko wtedy, jeśli któryś z q_i jest równy p_1 . Odwrotna relacja również zachodzi. Bycie dzielnikiem liczby pierwszej (większym niż 1) oznacza bycie tą liczbą pierwszą. Ponieważ p_1 jest najmniejszym dzielnikiem (a zarazem najmniejszym elementem) z liczb q_i oraz q_1 jest najmniejszym elementem z p_i , to $q_1 = p_1$.

Podzielimy zatem obydwa równania przez p_1 . Mamy teraz identyczną sytuację:

$$m = p_2 p_3 \dots p_n,$$

$$m = q_2 q_3 \dots q_m.$$

Jeśli ilość dzielników jest taka sama, prowadzi to do wniosku, że dzielniki są identyczne. Jeśli ilość dzielników jest różna, to w którymś momencie dochodzimy do kuriozalnego wniosku, że:

$$p_r \cdot p_{r+1} \cdot \dots \cdot p_{r+q} = 1,$$

tj. iloczyn liczb pierwszych jest równy jedynce. To jest oczywiście niemożliwe¹. Ilości liczb pierwszych w obydwu przypadkach muszą być zatem równe, a co więcej, muszą to być te same liczby pierwsze.

¹W przypadku nieskończonego zbioru liczb naturalnych.

3 Powrót do zadań

Zadanie 3.1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b prawdziwa jest następująca równość:

$$a \cdot b = \text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b). \quad (1)$$

Rozwiązanie. a oraz b można rozłożyć na iloczyny liczb pierwszych:

$$\begin{aligned} a &= p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n, \\ b &= r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_m, \end{aligned}$$

gdzie p_i, r_i są liczbami pierwszymi (lub 1 w przypadku a lub b równych 1). Najmniejsza wspólna wielokrotność musi oczywiście zawierać wszystkie liczby p_i oraz r_i . Jeśli żadna z liczb p_i nie powtarza się w zbiorze r_i , sprawa jest prosta - najmniejsza wspólna wielokrotność to iloczyn liczb $a \cdot b$, podczas gdy największy wspólny dzielnik to 1. Równanie 1 jest zachowane.

Założmy teraz, że część z liczb p_i powtarza się wśród liczb r_i . Dla przykładu:

$$\begin{aligned} a &= p_1 p_2 p_3, \\ b &= p_1 p_2 r_3, \end{aligned}$$

albo, aby już przedstawić przykład w zupełnie żywy sposób:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, \\ b &= 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42. \end{aligned}$$

Jeśli chcemy stworzyć teraz wielokrotność zarówno a jak i b , **muszą** się w niej pojawić czynniki 2, 3, 5 oraz 7. Najmniejszą wspólną wielokrotność uzyskamy wtedy, gdy użyjemy tych czynników najmniejszą możliwą ilość razy - w tym wypadku:

$$\text{NWW}(a, b) = p_1 p_2 p_3 r_3.$$

Ok, co natomiast ze wzorem 1? Otóż jeśli chcemy iloczyn $a \cdot b$ zamienić na NWW , musimy wyrugować z iloczynu liczb powtarzające się elementy. W tym wypadku będą to p_1, p_2 :

$$a \cdot b = p_1 p_2 p_3 p_1 p_2 r_3 = (p_1 p_2)(p_1 p_2 p_3 r_3).$$

Iloczyn powtarzających się elementów pierwszych jest - z założenia - największym wspólnym dzielnikiem liczb a oraz b . □

Zadanie 3.2. Znajdź takie dwie liczby naturalne, których suma jest równa 696, a jednym ze wspólnych dzielników jest 58.

Rozwiązanie. Warunki zadania da się przetłumaczyć na zestaw równań:

$$a + b = 696,$$

$$58 \cdot p_1 = a,$$

$$58 \cdot p_2 = b.$$

Tzn. szukamy takich dwóch liczb naturalnych a, b , dla których ich suma wynosi 696, oraz dla których istnieją liczby naturalne p_1, p_2 takie, że $58p_1 = a$ oraz $58p_2 = b$. Pierwsze równanie możemy zatem sprowadzić przez podstawienie do:

$$58 \cdot (p_1 + p_2) = 696,$$

$$p_1 + p_2 = 12,$$

co sprowadza poszukiwanie do znalezienia wszystkich par liczb naturalnych, których suma jest równa 12. Łatwo możemy stwierdzić, że takich par jest tylko 6. \square

3.1 Prędkość, droga, czas

Zadanie 3.3. Pociąg długości 600 m jechał z prędkością 48 km/h i miał przed sobą tunel. Od momentu wejścia czoła parowozu do tunelu do chwili, w której ostatni wagon opuścił tunel, upłynęło 2.5 minuty. Ile czasu jechał maszynista przez tunel? Jaka była długość tunelu?

Zadanie 3.4. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości, odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Ile okrążeń przebiegł zwycięzca do momentu zdublowania ostatniego zawodnika? Przyjmij, że każdy z zawodników biegł ze stałą prędkością.

Zadanie 3.5. Po zamkniętym torze jedzie cyklista, okrążając tor w ciągu 6 minut. W tym samym kierunku jedzie motocyklista, który okrąża tor w ciągu $1\frac{1}{2}$ minuty. Co ile minut będzie dopędzał motocyklista cyklistę?

Zadanie 3.6. Z przystani wypłynęły jednocześnie parowiec pasażerski i kuter. Oba statki płynęły w tym samym kierunku, pierwszy z prędkością 24 km na godzinę, drugi z prędkością 15 km na godzinę. Po upływie 3 godzin podróży parowiec osiadł na mieliźnie. Po pewnym czasie parowiec ruszył w dalszą drogę i po upływie 7 godzin dogonił kuter. Ile godzin parowiec siedział na mieliźnie?

Zadanie 3.7. Dwa pociągi jadą po równoległych torach naprzeciw siebie. Pierwszy z prędkością 60 km/h, drugi z prędkością 80 km/h. Pasażer jadący w drugim pociągu zauważył, że pierwszy pociąg mijał go przez 6 sekund. Oblicz długość pierwszego pociągu.

Zadanie 3.8. Wskazówka minutowa zegara ściennego ma 12 cm długości. Jaką długość drogi przebędzie koniec tej wskazówki w ciągu 5 minut?

Zadanie 3.9. O godzinie 9 wskazówki zegara duża i mała wyznaczają kąt prosty. Po jakim czasie wskazówki zegara znów wyznaczą kąt prosty?

Zadanie 3.10. Trzy miejscowości A, B, C leżą przy jednej drodze w podanej kolejności, przy czym od B do C jest o 6 km dalej niż od A do B . Samochód jadący z prędkością 70 km/h przebył drogę od A do C w czasie o 27 minut krótszym niż motocykl jadący z prędkością 40 km/h. Jak daleko jest od A do B i jak daleko jest od A do C ?

Zadanie 3.11. Trzej kolejarze jadą po torze kołowym (każdy ze stałą prędkością). Pierwszy przebywa pełne okrążenie w ciągu 5 minut, drugi w ciągu 6 minut, a trzeci w ciągu 9 minut. Kolejarze wyruszyli jednocześnie z tej samej linii startowej o godzinie 13⁰⁰. Podaj najwcześniejszą godzinę następnego spotkania wszystkich kolejarzy na linii startu.

Zadanie 3.12. Droga z miejscowości A do miejscowości B biegnie po terenie równym oraz pod górę i z góry. Po drodze w terenie równym rowerzysta jedzie z prędkością 12 km/h, pod górę - 8 km/h, a z góry - 15 km/h. Drogę z A do B rowerzysta przejechał w ciągu 5 godzin, a powrotną przebył w 4 godziny i 39 minut. Oblicz odległość między miejscowościami A i B wiedząc, że długość drogi po terenie równym wynosi 28 km.

Zadanie 3.13. Pasażer idąc na stację, po przejściu w ciągu godziny 3.5 km zorientował się, że idąc dalej z tą samą prędkością, spóźni się na pociąg o 1 godzinę. Dlatego pozostałą drogę przeszedł z prędkością 5 km/h i przyszedł na stację 30 minut przed odejściem pociągu. Wyznacz długość drogi jaką przebył pasażer.

Zadanie 3.14. Odległość między miejscowościami A i B wynosi 19 km. Z A do B wyjechał kolarz z pewną stałą prędkością. W 15 minut po nim w tym samym kierunku wyjechał samochód i po 10 minutach jazdy dogonił kolarza. Samochód nie zatrzymując się, pojechał dalej do B i zaraz zawrócił. W drodze powrotnej, po upływie 50 minut od wyjazdu z A , spotkał powtórnie kolarza. Wyznacz prędkość kolarza i samochodu.

Zadanie 3.15. Z miasta A w kierunku miasta B , odległego od miasta A o 300 km, wyjechał samochód osobowy, a z B w kierunku A w tym samym czasie samochód ciężarowy. Gdyby samochód osobowy wyjechał o 48 minut wcześniej niż ciężarowy, to samochody minęłyby się po upływie 2 godzin jazdy samochodu ciężarowego. Gdyby zaś samochód ciężarowy wyjechał o 1 godzinę i 20 minut wcześniej niż osobowy, to samochody minęłyby się po upływie 2 godzin jazdy samochodu osobowego. Z jaką prędkością jechał samochód osobowy, a z jaką ciężarowy? Ile czasu upłynęło do chwili mijania się? Jak daleko od miasta A minęły samochody?

Zadanie 3.16. Zastęp harcerzy zaplanował przejechać na rowerach trasę 360 km przebywając dziennie taką samą liczbę kilometrów. Faktycznie jednak przejeżdżali każdego dnia o 4 km mniej i z tego powodu wycieczka przedłużyła się o 3 dni. Ile dni miała trwać ta wycieczka?

Zadanie 3.17. Dwie osoby wyruszają jednocześnie z tego samego miejsca i w tym samym kierunku. Pierwsza osoba przez $2\frac{1}{4}$ godziny idzie z prędkością 6 km/h, a następnie przez 25 minut odpoczywa i wraca z prędkością $5\frac{1}{2}$ km/h. Druga osoba idzie stale z prędkością $4\frac{1}{2}$ km/h. Wyznacz czas i miejsca spotkania tych osób.

Zadanie 3.18. Pomiędzy miastami A i B kursuje autobus. Droga między tymi miastami prowadzi przez wzgórze. Autobus jadąc pod górę rozwija prędkość 25 km/h, a z góry 50 km/h. Podróż z A do B trwa $3\frac{1}{2}$ godziny, a z B do A 4 godziny. Ile jest kilometrów z miasta A do miasta B?

Zadanie 3.19. Po okręgu o długości 80 cm poruszają się 2 punkty ze stałą prędkością. Jeżeli kierunku ruchów są zgodne, to punkt pierwszy wyprzedza punkt drugi co 5 sekund. Jeżeli zaś kierunki ruchów są przeciwne, to punkty mijają się co 2 sekundy. Oblicz prędkości tych punktów.

3.2 Praca i czas potrzebny na jej wykonanie

Zadanie 3.20. Trzy zespoły robotników mają zanitować przęsło mostu. Pierwszy zespół wykonałby taką pracę sam w ciągu 12 dni, drugi zespół w ciągu 15 dni, a trzeci zespół w ciągu 8 dni. W ciągu jakiego czasu zanitują to przęsło trzy zespoły pracując jednocześnie?

Zadanie 3.21. Przy jednoczesnej pracy dwóch ciągników o różnej mocy pole może być zaorane w ciągu 8 dni. Gdyby silniejszym ciągnikiem zaorano połowę pola, a resztę obydwojema ciągnikami, to całą pracę wykonano by w ciągu 10 dni. W jakim czasie można zaorać pole każdym ciągnikiem oddzielnie?

Zadanie 3.22. Pierwsza brygada górników w ciągu jednej godziny wydobywa średnio o 10.5 ton Węgla więcej niż druga brygada. Pierwsza brygada w ciągu kilku godzin wydobyła 108 ton węgla, a druga w tym czasie 66 ton. Ile godzin musi pracować z tą samą wydajnością druga brygada, aby wydobyć 1485 ton węgla?

Zadanie 3.23. Zakłady przemysłowe A i B podjęły się wykonać wspólnie pewne zamówienie w ciągu 12 dni. Zakład A po dwóch dniach realizacji zamówienia z powodu remontu został zamknięty, więc pozostałą część zamówienia wykonał zakład B nie zwiększając dziennej produkcji. W ciągu ilu dni zostanie wykonane zamówienie, jeżeli dzienna produkcja zakładu B wynosi $66\frac{2}{3}\%$ dziennej produkcji zakładu A?

Zadanie 3.24. Statek ładowano za pomocą 3 dźwigów o tej samej mocy. Po jednej godzinie pracy uruchomiono dodatkowe 3 jednakowe dźwigi o większej mocy i ukończono załadunek statku po 2 godzinach wspólnej pracy wszystkich dźwigów. Gdyby uruchomiono wszystkie dźwigi jednocześnie, to załadunek statku trwałby tylko 2 godziny 24 minuty. Oblicz, w ciągu ilu godzin załadowałby statek jeden dźwig o mniejszej mocy, a w ciągu ilu godzin załadowałby statek jeden dźwig o większej mocy.

Zadanie 3.25. Dla wykonania pewnej ilości wyrobów fabrycznych przygotowano kilka jednakowych maszyn, z których każda miała pracować według planu taką samą liczbę godzin. Gdyby zwiększyć liczbę maszyn o jedną, wówczas dla wykonania tej samej pracy każda z maszyn musiałaby pracować o 1.5 godziny dłużej. Oblicz, ile przygotowano maszyn i ile godzin miała pracować każda z nich według planu.

Zadanie 3.26. Brygada złożona z 40 robotników miała zbudować pewien odcinek drogi w ciągu 8 dni (pracując z tą samą wydajnością. Po 3 dniach wspólnej pracy 10 robotników przeszło na inny odcinek, a pozostałą do wykonania pracę zmniejszono brygodzie o 10%. Ile dni trwała budowa przydzielonego brygadzie odcinka drogi?

3.3 Zadania różne

Zadanie 3.27. Piąta część pszczelej gromadki usiadła na kwiatach magnolii, trzecia część tej gromadki na kwiatach lotosu, potrojona różnica drugiej z tych liczb i pierwszej odleciała ku kwiatom jaśminu. Jedna tylko pszczółka, zwabiona pachnącym kwiatem koniczyzny, krążyła nad nim. Ile pszczół było w tej gromadce?

Zadanie 3.28. Zapytano rybaka, ile waży złowiona przez niego ryba. Rybak odpowiedział: $\frac{2}{5}$ kg i jeszcze 2 razy po $\frac{2}{5}$ swojej masy. Ile ważyła ryba?

Zadanie 3.29. Wieśniaczka sprzedawała pierwszej osobie $\frac{1}{2}$ całej ilości jajek i jeszcze 2 jajka. Drugiej osobie sprzedawała połowę reszty jajek i jeszcze jedno jajko. po drugiej sprzedaży zostało wieśniaczce 8 jajek. Ile jajek przyniosła wieśniaczka na targowisko? Ile jajek kupiła pierwsza osoba, a ile druga?

Zadanie 3.30. Pamiętny w historii rok pewnego odkrycia wyraża się liczbą czterocyfrową. Znajdź tę liczbę na podstawie następujących danych:

1. Suma cyfr tej liczby wynosi 16;
2. Cyfra tysięcy jest cztery razy mniejsza od cyfry setek;
3. Cyfra setek jest dwa razy większa od cyfry jedności;
4. Liczba trzycyfrowa utworzona z szukanej liczby przez skreślenie w niej cyfry jedności jest o 100 większa od liczby dwucyfrowej utworzonej z szukanej liczby przez skreślenie w niej cyfry jedności i cyfry tysięcy.

Zadanie 3.31. Codziennie z miejscowości A, w której mieści się urząd pocztowy, wyjeżdża motorowerem listonosz do miejscowości B, C, D, by dostarczyć listy. W jakiej kolejności powinien listonosz objeżdżać te miejscowości, aby trasa objazdu z A przez pozostałe miejscowości i z powrotem do A była możliwie najkrótsza, jeśli długość drogi od A do B wynosi 5 km, od A do C - 7 km, od A do D - 7 km, od B do D - 8 km, od B do C - 10 km, od C do D - 6 km?

Zadanie 3.32. Na konkursie należało odpowiedzieć na 30 pytań. Za każdą poprawną odpowiedź na pytanie przyznawano 7 punktów, a za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi odejmowano 12 punktów. Na ile pytań odpowiedziała dobrze osoba, która uzyskała 77 punktów?

Zadanie 3.33. Siostra jest o 3 lata młodsza od brata. Brat ma obecnie 2 razy tyle lat, ile miała siostra wtedy, kiedy brat miał tyle, ile ma siostra teraz. Ile lat ma siostra, a ile brat?

Zadanie 3.34. Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, panowałby $\frac{1}{4}$ swojego życia, gdyby zaś żył o 9 lat dłużej, panowałby połowę swojego życia. Ile lat żył i ile lat panował?

Zadanie 3.35. Według legendy na płycie Diofantosa był taki napis ułożony przez Eutriopiusa: “Przechodniu! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który umarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego życia był dzieckiem, przez dwunastą część - młodzieńcem. Następnie upłynęła siódma część jego życia, zanim się ożenił. W pięć lat po zawarciu związku małżeńskiego urodził mu się syn, który żył dwa razy krócej od niego. W cztery lata po śmierci swego syna Diofantos, opłakiwany przez swych najbliższych, zasnął snem wiecznym. Powiedz, jeśli umiesz obliczyć, ile on miał lat, kiedy zmarł.”

Zadanie 3.36. Kilku przyjaciół postanowiło kupić wspólnie łódź motorową. Gdyby każdy z nich wpłacił 7000 zł, to byłoby o 3000 za mało. Gdyby zaś każdy z nich wpłacił 8000 zł, to byłoby o 4000 za dużo. Ilu było przyjaciół, ile kosztowała łódź motorowa?

Zadanie 3.37. Gdy Jan zapytał Andrzeja, ile ma lat, usłyszał odpowiedź: Gdy byłem w twoim wieku, byłeś ode mnie cztery razy młodszy, a gdy ty będziesz w moim wieku, ja będę miał 40 lat. Ile lat ma Jan, a ile Andrzej?

Zadanie 3.38. Pewien chłopiec powiedział: “Mam tylu braci co siostr”, a jego siostra stwierdziła: “Mam trzy razy więcej braci niż siostr”. Ilu było chłopców, a ile dziewcząt w tej rodzinie?

Zadanie 3.39. Nazwijmy liczbą symetryczną taką liczbę naturalną, której cyfry stojące na miejscach pierwszym i ostatnim, drugim i przedostatnim itd. są takie same, np. 3553; 474. Ile jest liczb symetrycznych trzycyfrowych, a ile liczb symetrycznych czterocyfrowych?

3.4 Wielokąty

Zadanie 3.40. Ile przekątnych ma dowolny wielokąt wypukły? Ile przekątnych ma siedmiokąt wypukły?

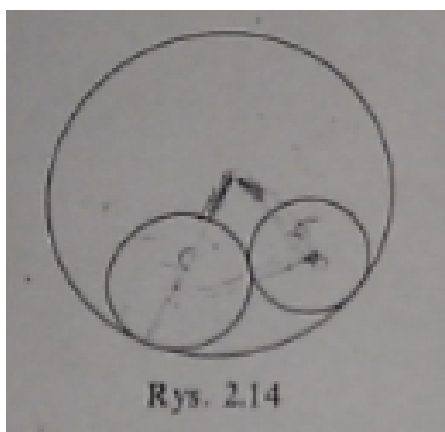
Zadanie 3.41. Ile boków ma wielokąt o 90 przekątnych?

Zadanie 3.42. Kąt wielokąta foremnego ma miarę 150° . Ile boków ma ten wielokąt?

Zadanie 3.43. Ile boków ma wielokąt wypukły, którego suma miar kątów wynosi 1620° ?

Zadanie 3.44. Ile boków ma wielokąt wypukły, w którym suma kątów wewnętrznych ma miarę 1800° ?

Zadanie 3.45. W kąt wpisano okrąg. Punkty styczności dzielą okrąg na dwa łuki w stosunku 1:11. Oblicz miarę kąta, w który wpisano ten okrąg.



Zadanie 3.46. Dwa okręgi styczne zewnętrznie są równocześnie styczne wewnętrznie do trzeciego okręgu o promieniu 3 cm, tak jak na rysunku. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów.

Rozwiązanie. Zadanie na pierwszy rzut oka wygląda na niewykonalne ze względu na zbyt małą ilość danych. Jednak, spójrzmy na informacje którymi dysponujemy:

1. Duży okrąg ma promień $r = 3$ cm.
2. Pierwszy mały okrąg ma promień a .
3. Drugi mały okrąg ma promień b .
4. Obwód trójkąta wynosi:

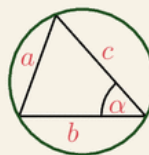
$$a + b + (r - a) + r - b = 2r$$

...co kończy dowód.

□

3.5 Trójkąty i okręgi

Okrąg opisany na trójkącie

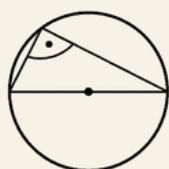


promień: $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

a – dowolny bok
 α – kąt naprzeciw tego boku

$$R = \frac{abc}{4P}$$

a, b, c – długości boków trójkąta
 P – pole trójkąta



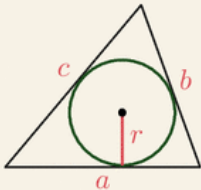
Trójkąt **oparty** na średnicy jest prostokątny.

Środek okręgu opisanego na trójkącie znajdujemy rysując **symetralne** boków trójkąta.



Zadania + Rozwiązania

Okrąg wpisany w trójkąt




Promień okręgu:

$$r = \frac{2P}{a + b + c} \gg$$

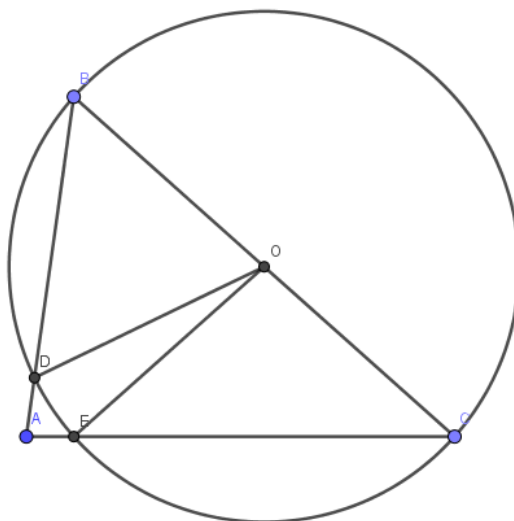
P - pole trójkąta

Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajdujemy rysując **dwusieczne** kątów trójkąta.



Zadania + Rozwiązania

Zadanie 3.47. W trójkącie ABC bok $|AB| = 8$ cm, bok $|AC| = 10$ cm, a bok $|BC| = 12$ cm. Z punktu O (środek boku BC) zakreślono promieniem OB okrąg przecinający bok AB w punkcie D i bok AC w punkcie E. Oblicz długość odcinków DB i EC.



Rozwiązanie.

□

Zadanie 3.48. Suma długości boków AC i BC trójkąta ABC wynosi 20 cm. Miary kątów A i B są równe odpowiednio 30° i 45° . Oblicz długości boków AC i BC.

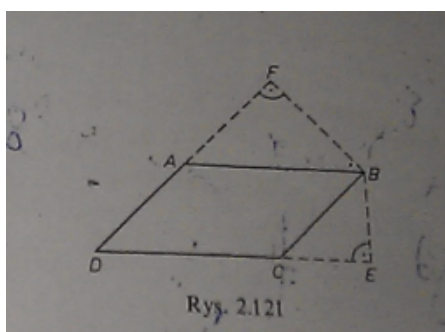
Zadanie 3.49. W trójkącie prostokątnym na dłuższej przyprostokątnej jako na średnicy opisano półokrąg. Wyznacz długości półokręgu, jeżeli krótsza przyprostokątna ma długość 30 cm, cięciwa łącząca wierzchołek kąta prostego z punktem przecięcia przeciwprostokątnej z półokręgiem ma długość 24 cm.

Zadanie 3.50. Długości boków trójkąta wynoszą 10 cm, 10 cm, 12 cm. Oblicz odległości środka okręgu wpisanego w ten trójkąt od każdego wierzchołka trójkąta.

Zadanie 3.51. Dane są dwa koła o promieniach długości 6 dm i 8 dm. Jaką długość ma promień koła, którego pole równa się sumie pól danych kół?

Zadanie 3.52. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości: 15 cm i 20 cm. Na krótszej przyprostokątnej jako na średnicy zbudowano okrąg. Oblicz długości odcinków na jakie ten okrąg podzielił przeciwprostokątną.

Zadanie 3.53. Oblicz wymiary równoległoboku ABCD, którego obwód wynosi 48 cm.
 $\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{5}{7}$.



Zadanie 3.54. W trójkącie ABC, w którym miara kąta $C = 90^\circ$, długość boku $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 10$ cm, obrano na boku BC punkt D tak, że miara kąta ADC równa się mierze kąta CAB. Oblicz długości CD i BD.

Zadanie 3.55. W trójkącie ABC, którego obwód wynosi 50 cm i $|AC| = |BC|$, poprowadzono środkowe AD i BE. Obwód trójkąta ABE jest o 8 cm większy od obwodu trójkąta ACD. Oblicz długość boków trójkąta ABC.

Zadanie 3.56. W trójkąt prostokątny wpisano półokrąg tak, że jego średnica zawarta jest w przeciwprostokątnej i środek tego półokręgu dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 15 cm i 20 cm. Oblicz długość łuku zawartego między punktami styczności półokręgu z przyprostokątnymi.

4 Bukiety matematyczne

4.1 Liczby niewymierne

Liczbą wymierną nazwiemy każdą liczbę dającą się zapisać w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ (²). Każdą liczbę nie dającą się zapisać w postaci ułamka $\frac{a}{b}$ wrzucimy zatem w zbiór liczb **niewymiernych**.

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$: założmy, że $\sqrt{2}$ jest równe $\frac{a}{b}$, spróbujemy znaleźć ich wartości. Mamy cztery możliwości:

1. a oraz b są nieparzyste,
2. a jest parzyste, b jest nieparzyste,
3. a jest nieparzyste, b jest parzyste,
4. a oraz b są parzyste - w tym wypadku redukujemy przypadek do jednego z trzech poprzednich.

Założmy że a oraz b są nieparzyste. Wtedy $a^2 = 2b^2$ (po podniesieniu równania $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ do kwadratu), co jednak prowadzi do sprzeczności, bowiem kwadrat liczby nieparzystej jest parzysty. Usuwamy pierwszą możliwość.

Założmy zatem że a jest parzyste a b jest nieparzyste. a możemy przedstawić jako $2 \cdot x$. Po podniesieniu do kwadratu mamy $4x^2 = 2b^2$, co redukuje się do $2x^2 = b^2$. Ponownie, założyliśmy nieparzystość b , więc przypadek jest sprzeczny.

Ostatnia możliwość: a jest nieparzyste, b jest parzyste. Po podniesieniu do kwadratu równania $\sqrt{2} = \frac{a}{2x}$ dostajemy $a^2 = 8x^2 \dots$ ale a miało być nieparzyste. Znowu sprzeczność.

Przypadek czwarty możemy zredukować do jednego z trzech pozostałych, zatem nie ma co rozważać go osobno.

Zadanie dodatkowe: Spróbuj udowodnić w analogiczny sposób niewymierność liczby $\sqrt{3}$.

4.2 Ułamki łańcuchowe

Istnieje pewien intrygujący sposób przedstawiania liczb, nazywany **ułamkiem łańcuchowym**:

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$$

Dla każdej liczby wymiernej istnieje skończona reprezentacja tej postaci (czynniki a, b, c, d są naturalne). Co interesujące, liczby niewymierne również można przedstawiać

² a, b należą do liczb całkowitych - w szkole często miesza się oznaczenie \mathbb{Z} z \mathbb{C} , które oznacza liczby zespolone. Tutaj będziemy trzymali się notacji akademickiej.

w tej formie - będzie ona jednak nieskończona. Każdy ułamek łańcuchowy postaci nieskończonej będzie liczbą niewymierną.³

Zadanie 4.1. Oblicz wartość wyrażenia:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}$$

Zadanie 4.2. Znajdź liczby naturalne a, b, c, d spełniające równanie:

$$\frac{151}{115} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$$

Zadanie 4.3. Znajdź postać w reprezentacji ułamka łańcuchowego dla liczby $\frac{225}{157}$.

Zadanie 4.4. Znajdź reprezentację ułamka łańcuchowego dla $\sqrt{2}$.

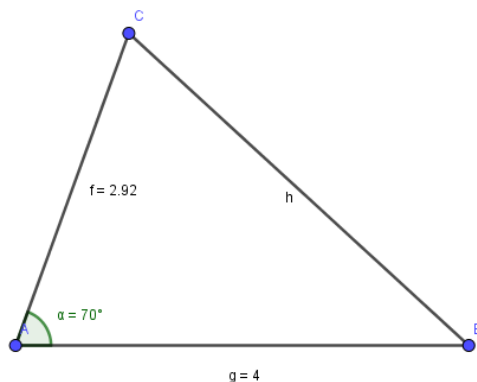
Podpowiedź: $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

³Dowód możemy przeprowadzić pokazując, że liczba kroków dla liczby wymiernej $\frac{a}{b}$ musi być skończona. Dlatego każda liczba o nieskończonej liczbie kroków nie będzie miała postaci $\frac{a}{b}$.

5 Geometria

6 Konstrukcje geometryczne

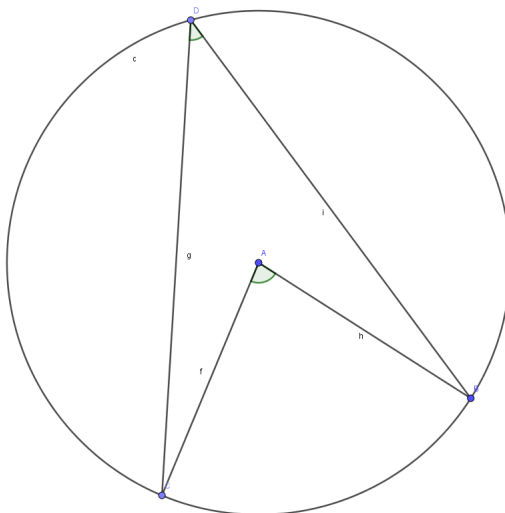
Zadanie 6.1. Dane są długości dwóch przyległych boków trójkąta oraz kąt między nimi:



Oblicz pole trójkąta oraz długość trzeciego boku.

Zadanie 6.2. W trójkącie równobocznym geometryczny środek (będący równocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie) dzieli wysokość na dwa odcinki. Udowodnij, że proporcja między tymi odcinkami jest równa $1 : 2$.

Zadanie 6.3 (Twierdzenie o kącie wpisanym). Udowodnij, że relacja pomiędzy kątami CBA oraz CDB ma się jak $2 : 1$.

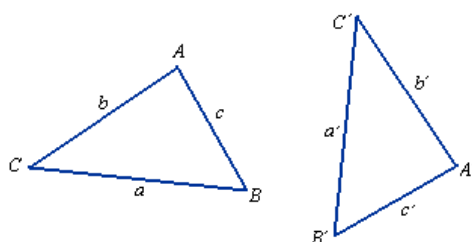


6.1 Trójkąty przystające

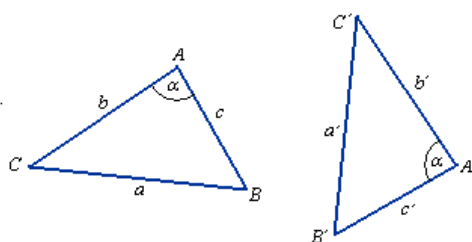
Trójkąty są przystające, jeśli istnieje izometria przekształcająca jeden z nich w drugi.⁴

Cechy przystawiania trójkątów:

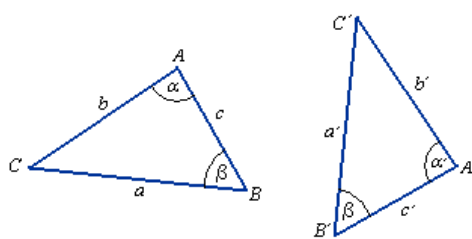
- BBB. Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to dwa trójkąty są przystające.



- BKB. Jeśli dwa boki i kąt między nimi zawarty w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to te dwa trójkąty są przystające.



- KBK. Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to te dwa trójkąty są przystające.



Przystawianie trójkątów ABC i DEF oznacza się zapisem: $\triangle ABC = \triangle DEF$.

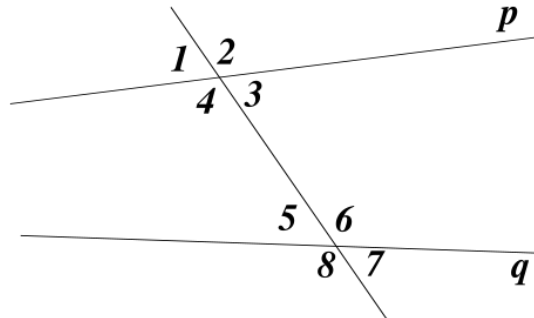
Figurami przystającymi nazywamy wszystkie figury, które mają taką samą liczbę boków, o takiej samej długości a kąty między nimi mają takie same wartości. Dlatego o

⁴<http://www.naukowiec.org/wiedza/matematyka.html>

figurach przystających mówimy, wtedy gdy jedna figura stanowi odbicie lustrzane drugiej lub wtedy, kiedy jedną można otrzymać za pomocą symetrii i skończonej liczby obrotów oraz przesunięć drugiej z nich. Figury te mają takie samo pole powierzchni i można nałożyć jedną na drugą.

Podsumowując figury przystające są to takie same figury, mają taki sam kształt i wielkość są tylko przesunięte lub obrócone lub przesunięte i obrócone.

Do rozwiązywania zadań przyda nam się powtórzenie jeszcze relacji kątów między prostymi:



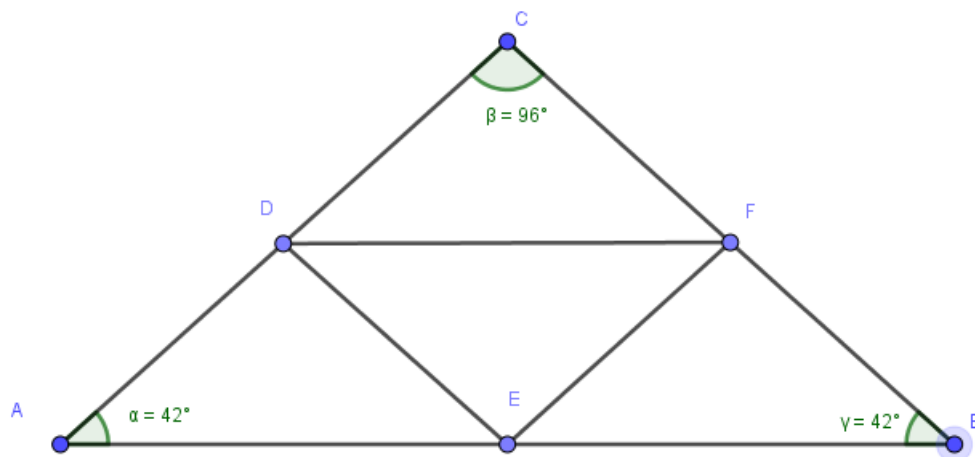
- Kąty naprzemianległe leżą po przeciwnych stronach prostej (pary 1 i 7 - naprzemianległe zewnętrzne, pary 4,6 oraz 3 i 5 - kąty naprzemianległe wewnętrzne). Jeśli proste p, q są równoległe, to kąty naprzemianległe są sobie równe.
- Kąty odpowiadające leżą po tej samej stronie prostej (pary (1,5), (4,8), (2,6), (3,7)). Jeżeli proste p, q są równoległe to kąty odpowiadające są sobie równe.
- Kąty jednostronnie wewnętrzne (pary (4,5) oraz (3,6) i kąty jednostronnie zewnętrzne (pary (1,8) oraz (2,7)). Jeśli proste p, q są równoległe to kąty jednostronnie wewnętrzne (oraz zewnętrzne) sumują się do 180° .

6.2 Zadania

Zadanie 6.4. Punkty D, E, F są środkami boków trójkąta równoramiennego ABC. Boki trójkąta DEF są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC. Uzasadnij, że trójkąty EBF, DEF i DFC są przystające do trójkąta AED.

Rozwiązanie. Zadanie dostarcza nam dodatkowych informacji które znacznie ułatwiają proces rozwiązywania.

1. Z warunków zadania wiemy, że odcinki DF oraz AB są do siebie równoległe. Z relacji kątów odpowiadających wiemy zatem, że:
 - Kąt CFD jest równy kątowi FBE.
 - Kąt CDF jest równy kątowi DAE.



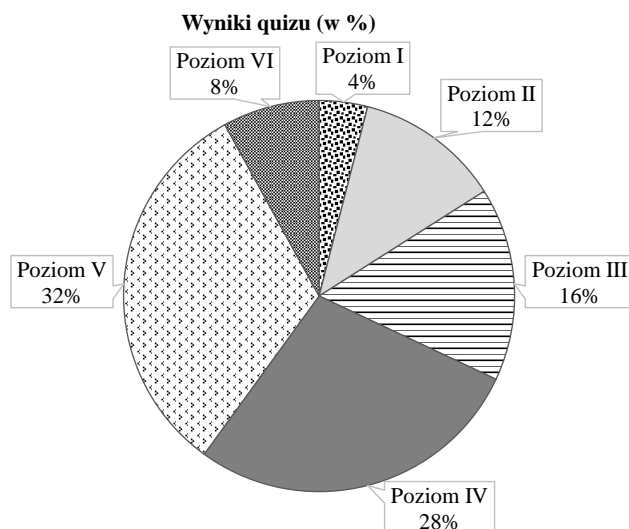
2. Ponieważ odcinki DE oraz CB są do siebie równoległe, to z relacji kątów odpowiadających wiemy, że kąt ADE jest równy kątowi DCF.
3. Analogicznie znajdujemy równość kąta EFB z kątem DCF z równoległości EF oraz AC.
4. Wiedząc, że suma kątów w trójkącie wynosi 180° znajdujemy kąty DEA oraz FEB.
5. Wiedząc że kąt półprosty ma miarę 180° znajdujemy miary kątów w trójkącie DEF.
6. Ponieważ punkty DEF są środkami boków, wiemy, że bok AD jest równy DC oraz CF jest równy FB. Z relacji trójkąta równoramiennego wiemy również że boki AC i CB są równe, zatem $|AD| = |DC| = |CF| = |FB|$.
7. Z relacji KBK stwierdzamy, że trójkąty ADE, EFB oraz CDF są przystające.
8. Z relacji BBB pomiędzy trójkątami ADE, EFB oraz CDF stwierdzamy, że $|DE| = |FB| = |EF| = |AD|$ oraz $|AE| = |EB| = |DF|$.
9. Z relacji BBB wiemy, że jeśli trzy boki trójkąta EFD są równe trzem bokom trójkąta ADE to trójkąty są przystające.

□

7 Egzamin próbny

Zadanie 1. (0–1)

Z okazji Światowego Dnia Książki uczniowie klasy VII zorganizowali quiz wiedzy o postaciach literackich. Quiz można było zakończyć na jednym z poziomów, które zaliczało się kolejno od I do VI. Na diagramie przedstawiono, ile procent uczniów zakończyło quiz na danym poziomie. Na poziomach niższych niż Asia quiz zakończyło dokładnie 32% uczniów biorących w nim udział.



Ile procent uczniów zakończyło ten quiz na poziomach wyższych niż Asia? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 40% B. 32% C. 28% D. 8%

Zadanie 2. (0–1)

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $4,5 : 0,75$ jest równa wartości wyrażenia **A / B**.

- A. $\frac{450}{75}$ B. $\frac{45}{75}$

Wartość wyrażenia $1,25 \cdot 0,4$ jest równa wartości wyrażenia **C / D**.

- C. $\frac{125 \cdot 4}{100}$ D. $\frac{125 \cdot 4}{1000}$

Zadanie 3. (0–1)

Tata Bartka przed wyjazdem z Krakowa do Warszawy analizuje niektóre bezpośrednie połączenia między tymi miastami. Do wyboru ma cztery połączenia przedstawione w poniższej tabeli.

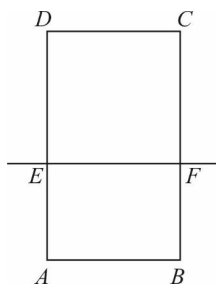
Godzina wyjazdu z Krakowa	Godzina przyjazdu do Warszawy	Środek transportu	Długość trasy	Cena biletu
1:35	6:30	autobus	298 km	27 zł
2:32	5:12	pociąg	293 km	60 zł
5:00	8:48	pociąg	364 km	65 zł
5:53	8:10	pociąg	293 km	49 zł

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Za przejazd w najkrótszym czasie należy zapłacić 49 zł.	P	F
Zgodnie z rozkładem jazdy tylko przejazd autobusem trwa dłużej niż 4 godziny.	P	F

Zadanie 4. (0–1)

Prosta EF dzieli prostokąt $ABCD$ na kwadrat $EFCD$ o obwodzie 32 cm i prostokąt $ABFE$ o obwodzie o 6 cm mniejszym od obwodu kwadratu $EFCD$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka AE jest równa

A. 2 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 8 cm

Zadanie 5. (0–1)

Narysowany kwadrat należy wypełnić tak, aby iloczyny liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i na obu przekątnych kwadratu były takie same.

5^6	5	5^8
5^7	5^5	
5^2		

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn liczb na przekątnej kwadratu jest równy 5^{15} .	P	F
W zacieniowane pole kwadratu należy wpisać liczbę 5^9 .	P	F

Zadanie 6. (0–1)

Jacek i Ola testują swoje elektryczne deskorolki. W tym celu zmierzili czasy przejazdu na trasie 400 m. Ola pokonała tę trasę w czasie 160 s, a Jacek – w czasie 100 s.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica średnich prędkości uzyskanych przez Jacka i przez Olę jest równa

- A. $1,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $5,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zadanie 7. (0–1)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

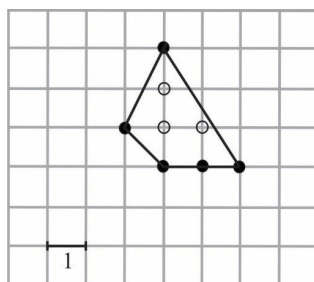
W pięciu rzutach standardową sześcienną kostką do gry, jeżeli wynik każdego rzutu będzie inny, można otrzymać łącznie dokładnie 20 oczek.	P	F
W 16 rzutach standardową sześcienną kostką do gry można otrzymać łącznie ponad 100 oczek.	P	F

Informacje do zadań 8. i 9.

Punkt kratowy to miejsce przecięcia się linii kwadratowej siatki. Pole wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach kratowych kwadratowej siatki na płaszczyźnie, można obliczyć ze wzoru Picka:

$$P = W + \frac{1}{2}B - 1,$$

gdzie P oznacza pole wielokąta, W – liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, a B – liczbę punktów kratowych leżących na brzegu tego wielokąta.



W wielokącie przedstawionym na rysunku $W = 3$ oraz $B = 5$, zatem $P = 4,5$.

Zadanie 8. (0–1)

Wewnątrz pewnego wielokąta znajduje się 5 punktów kratowych, a na jego brzegu jest 6 punktów kratowych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego wielokąta jest równe

- A. 6 B. 6,5 C. 7 D. 7,5

Zadanie 9. (0–1)

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wielokąt, którego pole jest równe 15, może mieć A / B punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta.

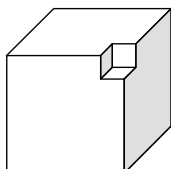
- A. 7 B. 8

Pole wielokąta, który ma dwukrotnie więcej punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta niż punktów leżących wewnątrz, wyraża się liczbą C / D.

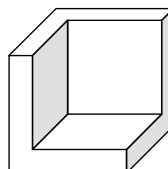
- C. parzystą D. nieparzystą

Zadanie 10. (0–1)

Z każdej z dwóch jednakowych kostek sześciennych wycięto sześcián i otrzymano bryły przedstawione na rysunku.



Bryła I



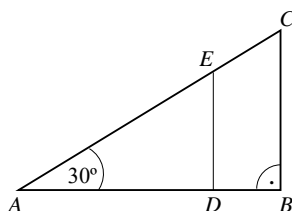
Bryła II

Czy całkowite pole powierzchni bryły I jest większe od całkowitego pola powierzchni bryły II? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	Tak,	ponieważ	A.	z pierwszej kostki usunięto mniejszy sześcián niż z drugiej kostki.
			B.	całkowite pole powierzchni każdej z otrzymanych brył jest równe całkowitemu polu powierzchni początkowej kostki.
N	Nie,		C.	pole powierzchni „wnęki” w II bryle jest większe niż pole powierzchni „wnęki” w I bryle.

Zadanie 11. (0–1)

Na bokach trójkąta prostokątnego ABC zaznaczono punkty D i E . Odcinek DE podzielił trójkąt ABC na dwa wielokąty: trójkąt prostokątny ADE i czworokąt $DBCE$, jak na rysunku. Odcinek AB ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a odcinek DE ma długość 3 cm.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka EC jest równa

- A. 1 cm B. $\sqrt{3}$ cm C. 2 cm D. 4 cm E. $3\sqrt{3}$ cm

Zadanie 12. (0–1)

Maja grała z przyjaciółmi w ekonomiczną grę strategiczną. W trakcie tej gry zainwestowała w zakup nieruchomości 56 tys. gambitów – wirtualnych monet. Po upływie 30 minut odsprzedała tę nieruchomość za 280 tys. gambitów.

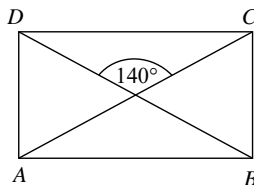
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość nieruchomości od momentu jej zakupienia do momentu sprzedaży

A. wzrosła o 500%. B. wzrosła o 400%. C. wzrosła o 80%. D. wzrosła o 20%.

Zadanie 13. (0–1)

Przekątne prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku przecinają się pod kątem 140° .



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt DCA ma miarę 40° .	P	F
Kąt DAC ma miarę 70° .	P	F

Zadanie 14. (0–1)

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $a = \sqrt{125} - 1$ jest A / B.

A. mniejsza od 10 B. większa od 10

Liczba $b = 4\sqrt{6} - 10$ jest C / D.

C. ujemna D. dodatnia

Zadanie 15. (0–1)

Punkt $S = (3, 2)$ jest środkiem odcinka AB , w którym $A = (5, 5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt B ma współrzędne

A. $(8, 7)$

B. $(7, 8)$

C. $(-1, 1)$

D. $(1, -1)$

Zadanie 16. (0–1)

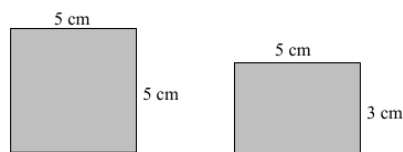
Jedną ścianę drewnianego sześcianu pomalowano na czerwono, a pozostałe – na białą. Ten sześcián rozcięto na 27 jednakowych sześciánów.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Tylko cztery małe sześciány mają dokładnie jedną ścianę pomalowaną na białą.	P	F
Tylko cztery małe sześciány mają trzy ściany pomalowane na białą.	P	F

Zadanie 17. (0–2)

Na rysunku przedstawiono dwie różne ściany prostopadłościanu. Jedna jest kwadratem o boku 5 cm, a druga – prostokątem o bokach 3 cm i 5 cm.



Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o takich wymiarach. Zapisz obliczenia.

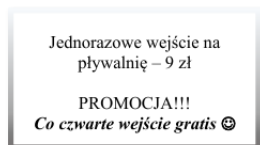
Zadanie 18. (0–2)

Ania i Jarek grali w kamienie. Na początku gry kamienie układa się w dwóch stosach. Następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch w grze polega na wzięciu dowolnej liczby kamieni tylko z jednego ze stosów. Przegrywa ten, kto nie może już wykonać ruchu.

Na pewnym etapie gry pierwszy stos zmalał do jednego kamienia, a na drugim znajdowały się trzy kamienie. Ruch miała wykonać Ania. Uzasadnij, że aby zagwarantować sobie wygraną, Ania musiała wziąć dwa kamienie z drugiego stosu.

Zadanie 19. (0–2)

Na pływalni w marcu obowiązywała promocja.



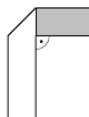
Wojtek był w marcu codziennie jeden raz na pływalni i wykorzystał wszystkie ulgi promocyjne. Ile kosztowało go korzystanie z pływalni w marcu? Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0–3)

Trener chce zamówić 25 nowych piłek do tenisa. Piłki wybranej firmy sprzedawane są w opakowaniach po 3 sztuki albo po 4 sztuki. Ile opakowań każdego rodzaju powinien zamówić trener, aby mieć dokładnie 25 nowych piłek? Podaj wszystkie możliwości. Zapisz rozwiązanie.

Zadanie 21. (0–3)

Prostokątny pasek papieru o wymiarach 12 cm na 2 cm jest z jednej strony biały, a z drugiej – szary. Ten pasek złożono w sposób pokazany na rysunku.



Pole widocznej szarej części paska jest równe 8 cm^2 . Jakie pole ma widoczna biała część paska? Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0–4)

W wypożyczalni *Gierka* za wypożyczenie gry planszowej trzeba zapłacić 8 zł za 3 dni i dodatkowo po 2,50 zł za każdy kolejny dzień wypożyczenia. Natomiast w wypożyczalni *Planszówka* płaci się 12 zł za 3 dni i po 2 zł za każdy kolejny dzień. Przy jakiej liczbie dni koszty wypożyczenia tej gry w jednej i drugiej wypożyczalni są jednakowe? Zapisz obliczenia.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $5^3 \cdot 16^{-2}$ jest równa

- A. $\left(\frac{5}{2}\right)^8$ B. $\frac{5}{2}$ C. 10^8 D. 10

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ jest równa

- A. $\sqrt[3]{52}$ B. 3 C. $2\sqrt[3]{2}$ D. 2

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $2 \log_2 3 - 2 \log_2 5$ jest równa

- A. $\log_2 \frac{9}{25}$ B. $\log_2 \frac{3}{5}$ C. $\log_2 \frac{9}{5}$ D. $\log_2 \frac{6}{25}$

Zadanie 4. (0–1)

Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt z 31 grudnia 2011 r. o 120% i obecnie jest równa 8910. Ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku?

- A. 4050 B. 1782 C. 7425 D. 7128

Zadanie 5. (0–1)

Równość $(x\sqrt{2} - 2)^2 = (2 + \sqrt{2})^2$ jest

- A. prawdziwa dla $x = -\sqrt{2}$.
 B. prawdziwa dla $x = \sqrt{2}$.
 C. prawdziwa dla $x = -1$.
 D. fałszywa dla każdej liczby x .

8 Geometria

Zadanie 8.1. Długość najkrótszego boku trójkąta jest o $19\frac{5}{8}$ cm mniejsza od obwodu tego trójkąta, a bok najdłuższy jest dłuższy o $3\frac{3}{8}$ cm od boku średniego oraz o $5\frac{1}{4}$ cm od boku najkrótszego. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zadanie 8.2. Długości boków trójkąta różnobocznego wyrażone w centymetrach są liczbami naturalnymi, a jego obwód jest o 18 cm dłuższy od najkrótszego boku. Średni

bok jest o 4 cm krótszy od najdłuższego. Ile takich trójkątów można zbudować. Podaj długości ich boków.

Zadanie 8.3. Na linii prostej zaznaczono kolejno punkty ABCD. Razem z niewspółliniowym punktem E tworzą one trójkąty ABE, BCE oraz CDE. Trójkąt ABE jest trójkątem równoramiennym, CDE - równoramiennym prostokątnym. Kąt EBC jest o 18° większy od kąta BEC. Oblicz miary kątów trójkąta ADE.

Zadanie 8.4. Prostokątną kartkę o obwodzie 46 cm podzielono na prostokąt i kwadrat. Obwód otrzymanego prostokąta jest o 14 cm mniejszy od obwodu kwadratu. Jakie wymiary miała ta kartka?

Zadanie 8.5. Obwód prostokąta wynosi 42 cm. Przekątna dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty, każdy o obwodzie 36 cm. Oblicz długość tej przekątnej.

Zadanie 8.6. Jedna z przekątnych równoległoboku ma długość 7 cm i rozcina go na dwa trójkąty - każdy o obwodzie 22 cm. Ile wynosi obwód tego równoległoboku?

Zadanie 8.7. Z dwóch jednakowych trójkątów o kątach $45^\circ, 55^\circ, 80^\circ$ zbudowano równoległobok. Jakie są miary kątów tego równoległoboku? Rozważ wszystkie przypadki.

Zadanie 8.8. Dany jest trapez równoramienny ABCD o podstawach AB oraz CD. Kąt przy dłuższej podstawie ma miarę 60° . Czy prawdziwe jest poniższe zdanie? Jeśli przekątna BD ziele ten kąt na połowy, to odcinki AD, DC i BC są jednakowej długości. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8.9. Podstawy trapezu mają długości 8 cm i 11 cm, a ramiona - 5 cm i 7 cm. Z pewnej liczby takich trapezów zbudowano nowy trapez który nie jest równoległobokiem. Jego obwód wynosi 221 cm. Ilu trapezów użyto o zbudowania nowego trapezu?

Zadanie 8.10. Kąt rozwarty trapezu równoramiennego ABCD jest trzykrotnie większy od kąta ostrego. Odcinek EC tworzy wysokość z podstawą AB. Oblicz długość odcinka EC, wiedząc że podstawa AB jest o 7 cm dłuższa od podstawy CD.

9 Algebra

Oblicz

$$\begin{array}{lll}
 \gg (\sqrt{2}+1)^2 & \gg (\sqrt{3}-2)^2 & \gg (\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+5) \\
 (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 & (\sqrt{11}-\sqrt{6})^2 & (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\
 (2\sqrt{7}+4)^2 & (\frac{1}{2}\sqrt{3}-4\sqrt{5})^2 & (3\sqrt{5}+4)(3\sqrt{5}-4)
 \end{array}$$

Uprość:

$$\begin{array}{lll}
 \gg (x+4)^2 & \gg (x-3)^2 & \gg (x-2)(x+2) \\
 (2x+5)^2 & (3x-4)^2 & (5x+7)(5x-7) \\
 (3x+2y)^2 & (2y-5x)^2 & (x-3y)(x+3y)
 \end{array}$$

$$\gg \text{Oblicz: } (2+3)^2, (5-7)^2, (3x+x)^2, (5-4)(5+4).$$

Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia:

$$\begin{array}{l}
 \gg (x+2)^2 - 3x(4-x) \quad \text{dla } x = 5, \\
 \gg (x-3)(x+3) - 2(x-1)^2 \quad \text{dla } x = -1, \\
 \gg (2x-y)^2 + 5xy - x(x+3) \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}, y = -2\frac{1}{2}, \\
 \gg 4(3x-4)(2x+5) - (x-y)^2 + 3y(2-5x) \quad \text{dla } x = 2, y = 3.
 \end{array}$$

Uprość:

$$\begin{array}{ll}
 \gg (x+5)^3 & \gg (x-2)^3 \\
 (2x+1)^3 & (3x-4)^3 \\
 (x+3y)^3 & (2x-y)^3
 \end{array}$$

Uprość pierwiastki

$$\begin{array}{lll}
 \gg \text{a) } \sqrt{3+2\sqrt{2}} & \gg \text{b) } \sqrt{3-2\sqrt{2}} & \gg \text{c) } \sqrt{20-6\sqrt{11}} \\
 \gg \text{d) } \sqrt{8+2\sqrt{15}} & \gg \text{e) } \sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} & \gg \text{f) } \sqrt[3]{23\sqrt{5}-21\sqrt{6}}
 \end{array}$$

$$\gg \text{Oblicz } \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2.$$

$$\gg \text{Stosując wzory skróconego mnożenia rozłóż na czynniki wyrażenie } 1 - a^2 + 2ab - b^2.$$

$$\gg \text{Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że } \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Zadanie 9.1. Uprość:

$$1. (2-3\sqrt{2})^2$$

2. $(3 - \sqrt{5})^2$

3. $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2})$

4. $(\sqrt{3} - 1)^2 + 5(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$

5. $4 - x^2 + 2xy - y^2$

Zadanie 9.2. Oblicz wartość wyrażenia $a - b$, jeśli $a^2 - b^2 = 200$ oraz $a + b = 8$.

Zadanie 9.3. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{2a^2 + 4ab + 2b^2}{(a + b)^3},$$

jeśli $a + b = 10$.