01.10.2012
AS1

LITERATURA:

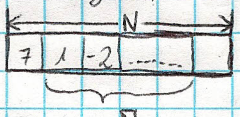
- Cormen, Leiserson, Rivest – „Wprowadzenie do algorytmów" 1/2 MIT-wykłady
- Drozdek, Simon – „Algorytmy i struktury danych w języku C++"
- Aho, Hopcroft, Ullman – „Projektowanie i analiza algorytmów" Stanford
- ... Vazirani – „Algorytmy." Berkeley
- I. Parberry
- Wilf
- Wikipedia
- algorytm.org
- Woźniak mimuw algorytmy i struktury danych

ZALICZENIE:

1. Praca na zajęciach
2. Klasówki – niezapowiedziane
3. Egzamin ustny
4. Referaty na ćwiczeniach

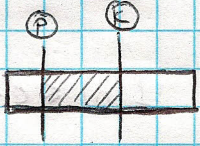
Przykład: Bentey – „Perełki oprogramowania"

Dane



→ max Σ

W1.



trzy pętle – sumowanie wszystkich odcinków

$T(N) = N^3$

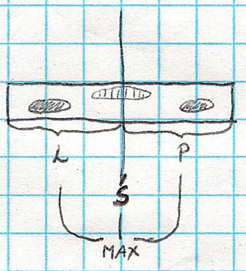
W2 Tablice:

Dane:	O	×	Δ	Π	--
P:	O	O+×	O+×+Δ	O+×+Δ+Π	--

obliczenie sum prefiksowych, utworzenie tablicy pom.

$T(N) = N^2$

W3



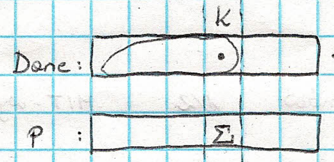
$S(N) = S\left(\frac{N}{2}\right) + 1 \simeq \lg N$

$T(N) = 2 \cdot T\left(\frac{N}{2}\right) + N \quad / N$

$\frac{T(N)}{N} = \frac{T\left(\frac{N}{2}\right)}{N/2} + 1$

$T(N) \cong N \cdot \lg N$

H4.



zapisanie maksymalnej wartości dla sum odcinków o końcu zaczepionym w K.

ZADANIE:

D	-1	3	2	1	-2	3	2	-20	3	1
P	0	3	5	6	4	7	9	0	3	4

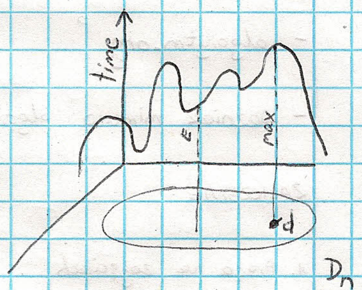
N

$T(N) = N$

Nie można osiągnąć nic lepszego od złożoności N, bo trzeba przynajmniej raz przejść tablicę, co daje złożoność N.

Najgorszy przypadek → Pesymistyczna złożoność czasowa działania algorytmu A:

$$W(n) = \sup\{time_A(d) : d \in D_n\}$$



Średnia wartość → Oczekiwana złożoność czasowa:

$$A(n) = \sum_{k \geq 0} k \cdot Pr(\{d \in D_n : time_A(d) = k\})$$

Przykład: InsertionSort - sortowanie przez wstawienie

5, 3, 4, 1, 2

3, 5, 4, 1, 2

3, 4, 5, 1, 2

1, 3, 4, 5, 2

1, 2, 3, 4, 5

najgorszy przypadek: 5, 4, 3, 2, 1

$1+2+3+4+\ldots+n \simeq n^2$

$W(N) \simeq N^2 \simeq A(N)$

(od dołu) O-duże O $\quad f(n) = O(g(n))\ \exists c, n_0 \in R^+\ \forall n > n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$

Omega Ω $\quad c \cdot g(n) \leq f(n)$

(od góry) Theta Θ

Przykład: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

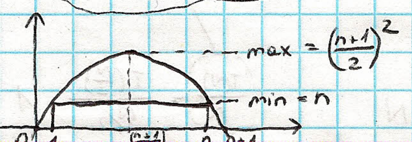
$$\frac{1}{14}n^2 \leq f(n) \leq \frac{1}{2}n^2 \quad (n \geq 7)$$

08.10.2012
AS1

1) $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$

$$(n!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^2 = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1) = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$

$f(x) = x(n+1-x)$



$$n^n \leq (n!)^2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

$$\boxed{\log(n!) = O(n \log n)}$$

2

2.) $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \Theta(\lg n)$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \dots$

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$

SORTOWANIE:

in: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$

out: $\pi \in Perm[n]$

$x_{\pi(1)} \leq \dots \leq x_{\pi(n)}$

* Insertion Sort: $W(n) = A(n) = O(n^2)$

* Merge Sort: (scalenie)

1, 1, 2, 3, 5 $\quad x$

2, 2, 3, 5, 6 $\quad y$

$x + y$ przesunięć

⇓

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6

Przykład: 5, 8, 3, 1, 4, 6, 2, 2

5 8 3 1 4 6 2 7

5,8 1,3 4,6 2,7

1,3,5,8 2,4,6,7

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

$\lg n$; n

$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + n$

$\boxed{\frac{T(n)}{n} = \frac{T(\frac{n}{2})}{\frac{n}{2}} + 1} = O(\lg n)$ $\qquad W(n) = O(n \lg n) = A(n)$

* Quick Sort:

0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0

Dijkstra .... zadanie o fladze
Hoare QuickSort 1962

$T = N$

Przykład:

0 0 1 0 1 1 1 0 0 1

0 0 0 0 1 1 1 0 1 1

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1

P L

Partitioning:

$W(n) = n^2$

S

4 8, 3, 2, 5, 1, 7, 6

4, 3, 7, 2, 5, 1, 8, 6

zamiana 4, 3, 1, 2, 5, 7, 8, 6

2, 3, 1 | 4 | 5, 7, 8, 6

$\Omega = Perm[n]$

$(s-1 \; (s) \; n-s)$

$$A(n) = (n+1) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=1}^{n} \left(A(s-1) + A(n-s)\right) \quad / \cdot n$$

$$n A(n) = n(n+1) + \sum_{s=1}^{n} \left(A(s-1) + A(n-s)\right)$$

bo $A(0) — A(n-1)$, $A(n-1) — A(0)$ a to jest to samo tylko odwrotnie

$$n A(n) = n(n+1) + 2 \cdot \sum_{s=1}^{n} A(s-1)$$

$$- \quad (n-1) \cdot (A(n-1)) = (n-1) \cdot n + 2 \sum_{s=1}^{n-1} A(s-1) \quad / \; n = n-1 \text{ podstawienie}$$

$$n \cdot A(n-1) - A(n-1)(n-1) = 2n + 2 \cdot A(n-1)$$

$$n \cdot A(n) = (n+1) \cdot A(n-1) + 2n \quad / : (n+1)n$$

$$\frac{A(n)}{n+1} = \frac{A(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} = O(\lg n)$$

$$A(n) = O(n \lg n)$$

ZADANIE: Tablica zawiera długości patyków. Jak znaleźć, czy z każdej trójki da się zbudować trójkąt?

Znaleźć max, min (min_1) i min+1 (min_2). Wiedząc, że $min_1 + min_2 > max$

niespełnione = nie da się
spełnione = da się

$A + B \geq min_1 + min_2$

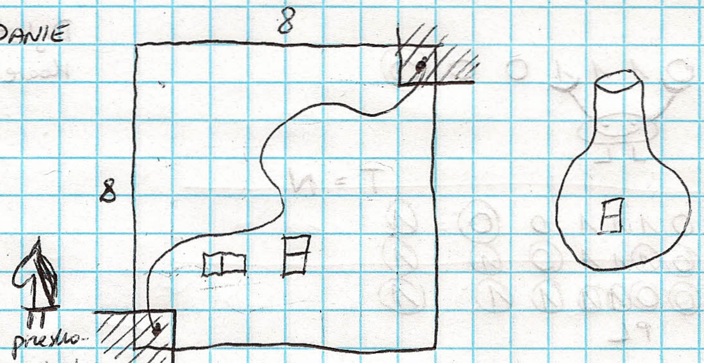
$C \leq max$

z czego wynika, że $A+B > C$ dla dowolnej trójki

ZADANIE: Tablica zawiera długości patyków. Jak znaleźć, czy z dowolnie wybranej trójki da się zbudować trójkąt? (czy istnieje taka trójka?)

Posortować tablicę.

ZADANIE



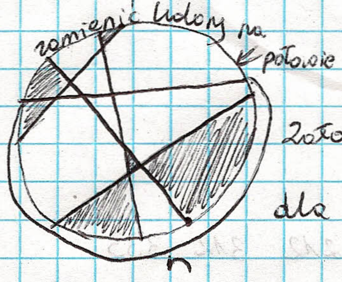
musi być parzysta ilość pól, aby przejść wszystkie pola dokładnie raz i wrócić do punktu startowego.

czy można przeskoczyć, by odwiedzić każde pole dokładnie raz? Nie, bo trzeba wykonać 63 skoki, co spowoduje, że wylądujemy na innym polu niż zaczęliśmy, a nie na tym samym.

$\boxed{\text{Szachownica ma 32 białe i 32 czarne pola.}}$

Po wycięciu zostaje 32 białe i 30 czarnych pól, więc nie da się tego rozwiązać. Bo każde przykrycie zawsze jedno pole białe i jedno czarne, więc 2 białe zawsze zostaną!

ZADANIE

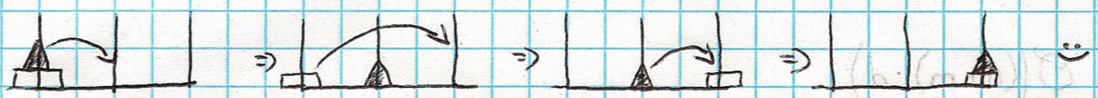


dla $n=1$ można pokolorować dwiema barwami

Założenie, dla $n=k$ można pokolorować dwiema barwami

dla $n=k+1$

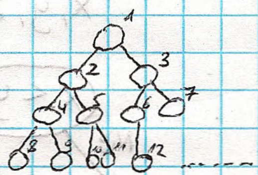
Wieże Hanoi:

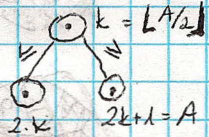


---

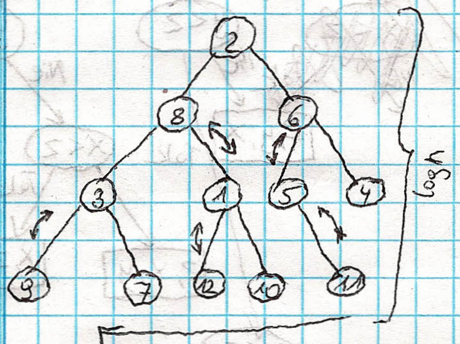
*Heap Sort: Floyd, Williams 1964

15.10.2012
AS1

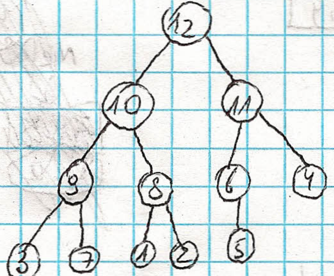




PRZYKŁAD:



$\Rightarrow$

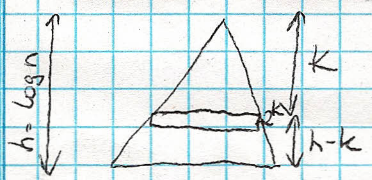


, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

n-elementów

$O(n \log n)$

$W(n) = O(n \log n)$



$$\sum_{k=1}^{h}(h-k)2^k = h\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{h}2^k} - \sum_{k=1}^{h}k\cdot 2^k = h\cdot(2^{h+1}-1) + (2^{h+1}-1) - h\cdot 2^{h+1}$$

$\Theta(n)$

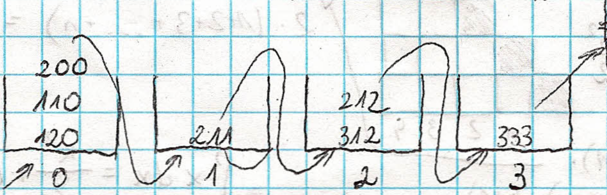
$$S = 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + h\cdot 2^{h}$$

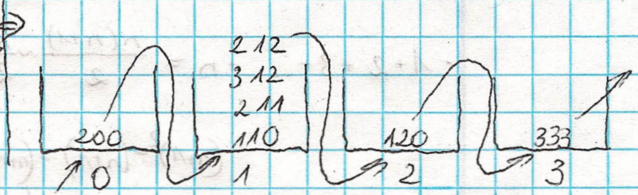
$$-\quad 2S = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \ldots + h\cdot 2^{h+1}$$

$$-S = \underbrace{2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h}_{(2^{h+1}-1)} - h\cdot 2^{h+1}$$

*Sortowanie kubełkowe:

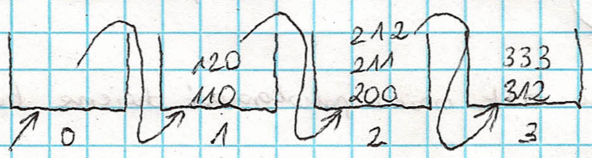
PRZYKŁAD: 120 312 110 211 200 333 212 | 120 110 200 211 312 212 333





na następnej stronie

200 110 211 312 212 120 333

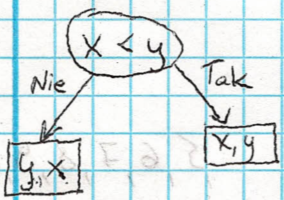


WYNIK SORTOWANIA: 110 120 200 211 212 312 333

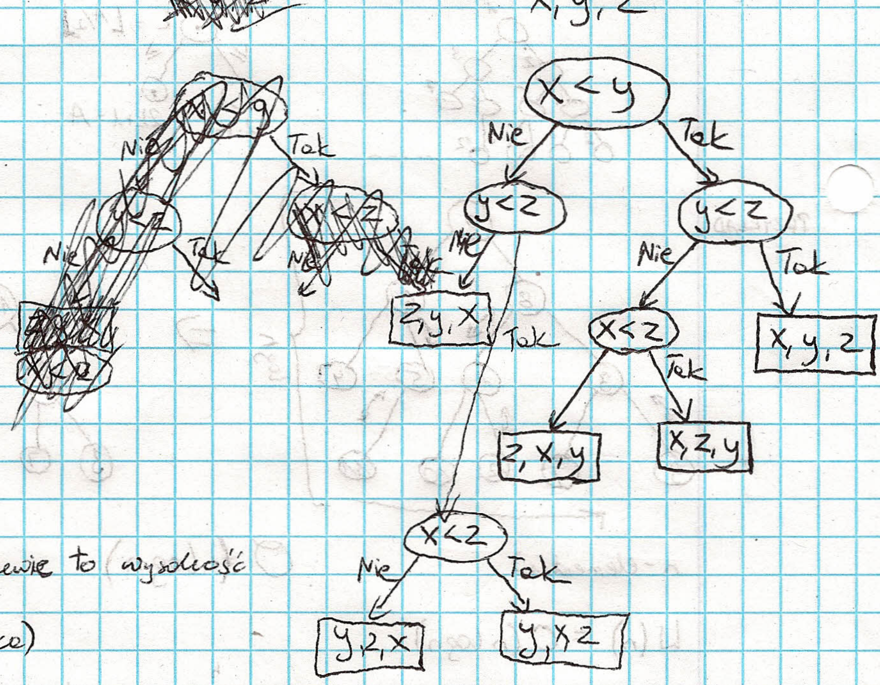
$n = 7$ $m = 4$ $d = 3$

$O((n+m)\cdot d)$

x, y



x, y, z



- liści będzie $n!$
- złożoność pesymistyczna w drzewie to wysokość tego drzewa (najdłuższa ścieżka)

$2^h \geq n!$

$h \geq \lg(n!)$

$\Omega(n \lg n)$

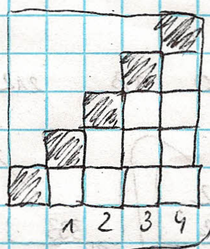
WNIOSEK: W każdym algorytmie sortującym przez porównanie w przypadku pesymistycznym jest wykonywane co najmniej $n \lg n$ porównań.

UWAGA: Algorytm sortowania kubełkowego może mieć $O(n)$, ale nie jest on algorytmem sortującym przez porównanie, więc nie dotyczy go dolne ograniczenie $n \lg n$.

$2\cdot(1+2+3+\ldots+n)+(n+1)=(n+1)^2$

$2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=(n+1)n$

$\cdot\ 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$

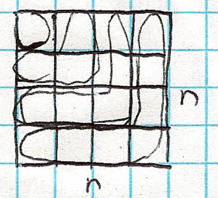


$(n+1)^2-(n+1)=(n+1)\cdot(n+1-1)=(n+1)\cdot n$

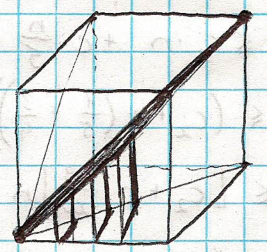
$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$

15.10.2012
AS1

• $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$



• $1^2+2^2+\ldots+n^2 = S_2 \cong \frac{n^3}{3}$ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$



$(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$

$k=1$ $2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$

$k=2$ $3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$

$\vdots$

$k=n$ $(n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3n + 1$

$+$

$(n+1)^3 - 1 = 3\cdot S_2 + 3S_1 + n$

$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2 \cong \frac{n^4}{4}$

$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

	1	2	3	4	... n
1	1	2	3	4	
2	2	4	6	8	
3	3	6	9	12	
4	4	8	12	16	
⋮					
n					

22.10.2012
AS1

- Mediany i Statystyki Pozycyjne

Przykład: 2, 7, 8, 1, 4, 6, 5, 3

k-ty element $\Theta(n)$

$k \sim \frac{n}{2}$ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ posortować tablicę i znaleźć element środkowy $\Theta(n \log n)$

* Hoare

≤	x	≤

wybranie elementu pierwszego i podzielenie względem niego tablicy

select(..., k)

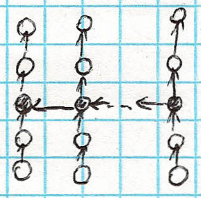
Najgorszy przypadek: 1, 2, ..., n $k=1$

$n + (n-1) + \ldots + 1 \cong n^2$ $W(N) = \Theta(n^2)$

1973 - Blumma, Floyda, Pratta, Rivesta ... $A(N) = \Theta(n)$

podział tablicy na piątki, wyznaczyć medianę dla każdej piątki i wśród tych median wyznaczyć medianę - wybrany element względem którego podzielona będzie tablica

$W(n) \le c_1 \cdot n$ $n \le 50$ wpp. $W(n) \le c_2 \cdot n + W(\frac{n}{5}) + W(\frac{3}{4}n)$



Fakt: $W(n) \le \underbrace{20 \cdot \max\{c_1, c_2\}}_{c} \cdot n$

1.) $n \le 50$ $\quad W(n) \le c_1 \cdot n$ $\quad$ OK

2) $W(n) \le c_2 \cdot n + c \cdot \frac{n}{5} + c \cdot \frac{3}{4} n$

$W(n) \le \left(c_2 + c\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right)\right) n$

$W(n) \le \left[c_2 + c \cdot \frac{19}{20}\right] n$

$W(n) \le (c_2 + 19 \max\{c_1, c_2\}) n \le c \cdot n$

* $\Omega(n)$ mediany

* Dominanta element, który występuje w tablicy więcej niż $\frac{n}{2}$ razy

```
x := a[1] ; l := 0 ;
for i := 2 to n do
   if (a[i] = x)
      then l := l+1 ;
      else if (l <> 0) then l := l-1 ;
                      else x := a[i] ;
```

23.10.2012
AS1

B B ... n

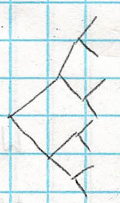
na ile sposobów można przejść do n-tej kombrki?

| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | ... | k_{n-2} | k_{n-1} | k_n |

$k_n = k_{n-2} + k_{n-1}$

Ilość słów zero-jedynkowych długości n: 2^n

000
001
010
011
100
101
110
111

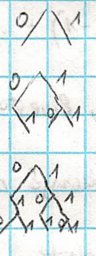


Ile jest ciągów zero-jedynkowych, w których nie ma ciągu 00?

Dla $n=1$ $\quad$ 2 $\quad$ 0, 1

Dla $n=2$ $\quad$ 3 $\quad$ 01, 10, 11

Dla $n=3$ $\quad$ 5 $\quad$ 010, 011, 101, 110, 111

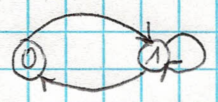


Ciąg Fibonacciego

rekurencyjny $\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\alpha}\right)^n - \left(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\beta}\right)^n\right)$ wzór Bineta

1, 1, 2, 3, 5 f_n $O(n)$



$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

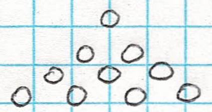
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+3} \end{bmatrix}$$

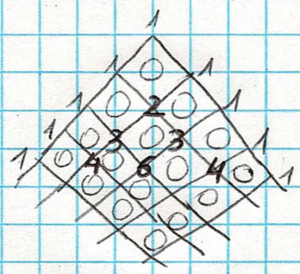
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}$$

$a^{13} = a \cdot \ldots \cdot a$ $O(n)$

potęgi dwójki w wykładniku $a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^4 \cdot a^8 \ldots$ $O(\lg n)$

Symbole Pascala





$$\begin{cases} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{cases}$$

– trójkąt Pascala modulo 2 to trójkąt Sierpińskiego.

programowanie dynamiczne

$\binom{n}{k} \bmod m$

$\vec{X} = A, B, C, A, B$ $NWP(\vec{X}, \vec{Y}) \to BCB$
$= 3$

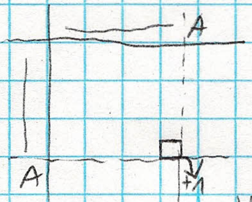
$\vec{Y} = B, A, C, B$

muszą wystąpić w tej samej kolejności, ale niekoniecznie obok siebie

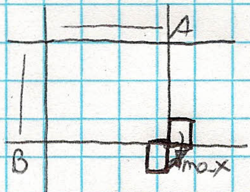
1) $NWP(\vec{X}A, \vec{Y}A) = NWP(\vec{X}, \vec{Y}) + 1$

2) $NWP(\vec{X}A, \vec{Y}B) = \max\{NWP(\vec{X}A, \vec{Y}), NWP(\vec{X}, \vec{Y}B)\}$

Ad. 1)



Ad. 2)



Przykład:

Y

X		A	B	C	A	B
	B	0	1	1	1	1
	A	1	1	1	2	2
	C	1	1	2	2	2
	B	1	2	2	2	3

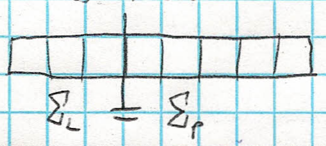
tworzenie macierzy $O(X \cdot Y)$

NWP = ACB

05.11.2012
AS1

P1

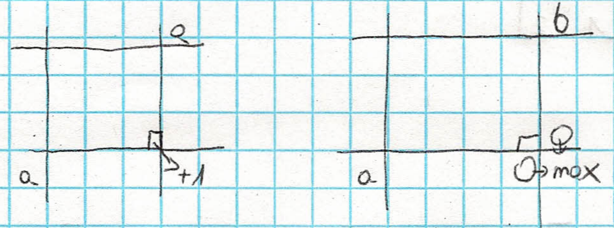
Tablica intów:



12.11.2012
AS1

NWP:

1



Odległość edycyjna i NWP

3, 2, 4, 5, 6, 7, 1, 8 - wyszukanie najdłuższego podciągu rosnącego

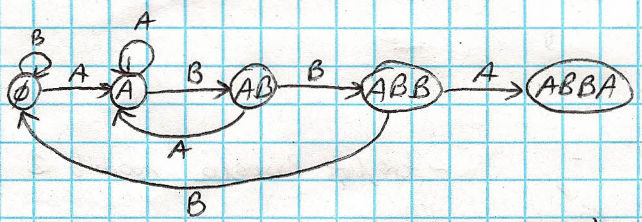
ROZWIĄZANIE: Wyszukanie NWP w ciągu wejściowym i ciągu posortowanego niemalejąco.

⇑ Algorytm $\Theta(n \lg n)$ dla tego problemu

in: text: ABC<u>ABB</u>ABC

pattern: ABB

ABBA

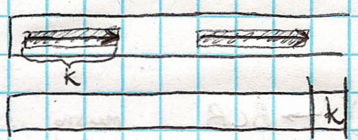


automat.

Algorytm KMP (Knuth Morris Pratt):

text:

p:



Przykład:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	A	B	B	A	B	B	C	A	B	B	A
p	0	0	0	1	2	3	0	1	2	3	4

pattern: $\underbrace{\text{ABBA}}$

$\# = 4$

$O(p+t)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T		A	B	C	A	B	C	C	A	B	C	A	B	C	B
p	0	0	0	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	0

w pozycji 14:

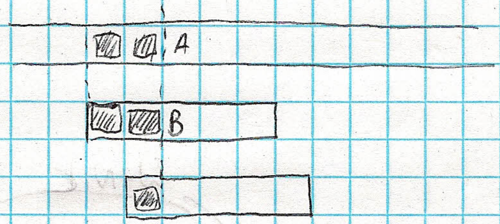
dla C $P[14] = P[13] + 1 = 7$

dla A $P[14] = P[P[13]] + 1 = 4$

dla B $P[14] = P[P[P[13]]] + 1 = 0$

KMP:

12.11.2012
AS1



Klasówka - przykład:

1) Napisać   BST rozwiązko

2) Sortowanie : mergesort, quicksort, heapsort, radixsort

3) NWP

4) Tablica p   5) Huffman   6) selekcja k-tego elementu

Zadanie:

13.11.2012
ASA

Dane słowo: $\overbrace{10110\,1}^{x}$ $\overbrace{1101\,10}^{sh_2(x)}$

in: $\bar{x}, \bar{y}$

out: Czy istnieje k takie że $\bar{y} = sh_k(\bar{x})$?

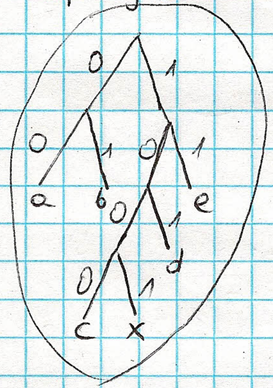
1101 | 10 1101 | 10

Przesunięcie

$\underset{a}{0}\,\overbrace{11}^{x}\,\underset{b}{0}$ (y)

$$y = 2\cdot(x - a\cdot 2^2) + b$$

Kompresja:



$\underset{a}{00} \mid \underset{b}{01} \mid \underset{d}{101}$

*Huffman:

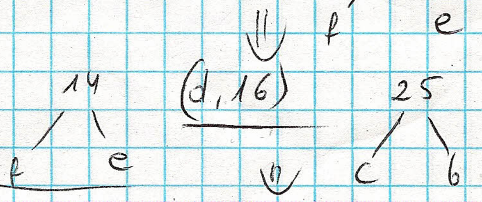
litera, częstość

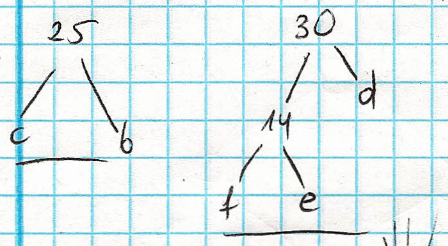
ZAWSZE WYBRAĆ DWIE LITERY O NAJMNIEJSZYCH CZĘSTOŚCIACH WYSTĘPOWANIA I JE POŁĄCZYĆ!

(f, 5), (e, 9), (c, 12), (b, 13), (d, 16), (a, 45)

(c, 12), (b, 13), 14 (f, e), (d, 16), (a, 45)

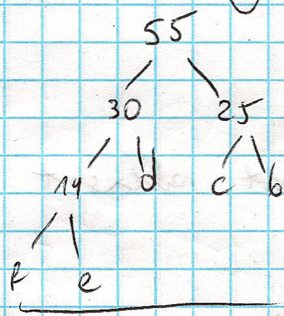
14 (f, e), (d, 16), 25 (c, b), (a, 45)





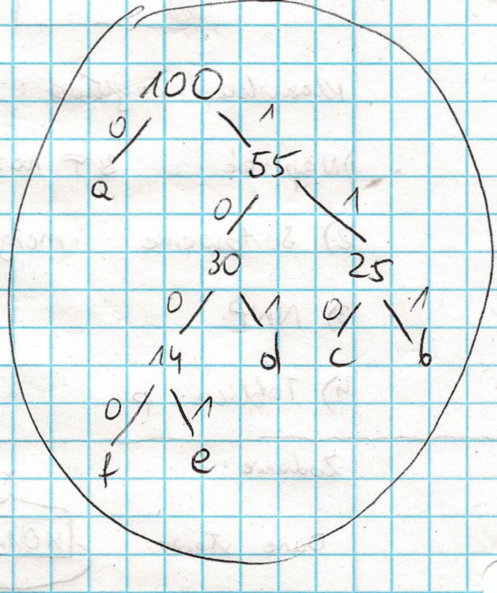
(a, 45)

(a, 45)



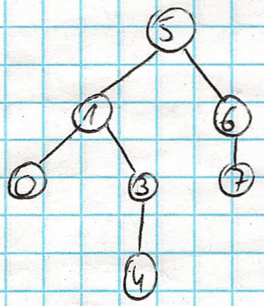
$\Rightarrow$

WYNIK



- BST

5, 6, 1, 3, 7, 4, 0



pre: VLP : 5, 1, 0, 3, 4, 6, 7

in: LVP : 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7

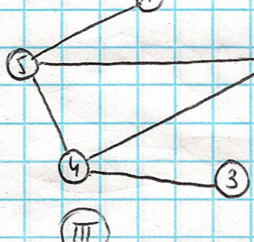
post: LPV : 0, 4, 3, 1, 7, 6, 5

03.12.2012
AS1

* Algorytmy grafowe

Graf $G = (V, E)$ $\quad E \leq V^2$

przykład:



I

macierz sąsiedztwa

	1	2	3	4	5
1				0	1
2					
3					
4					
5					

n^2

$\# V = n$

$\# E = m$

II

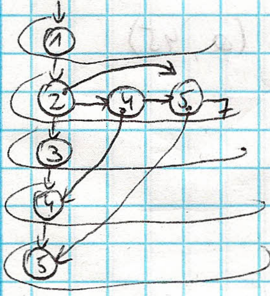
macierz incydencji

	15			
1	1			
2	0			
3	0			
4	0			
5	1			

$n \cdot m$

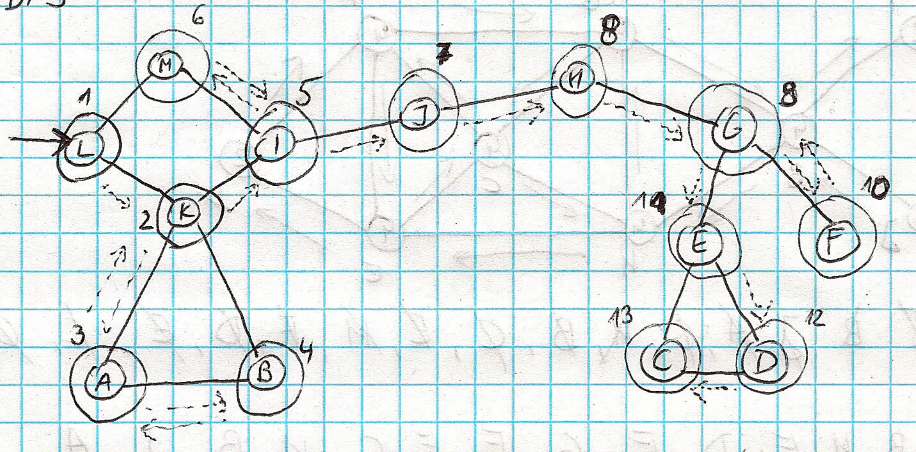
III

lista incydencji:



$n + \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{2m}$

* DFS

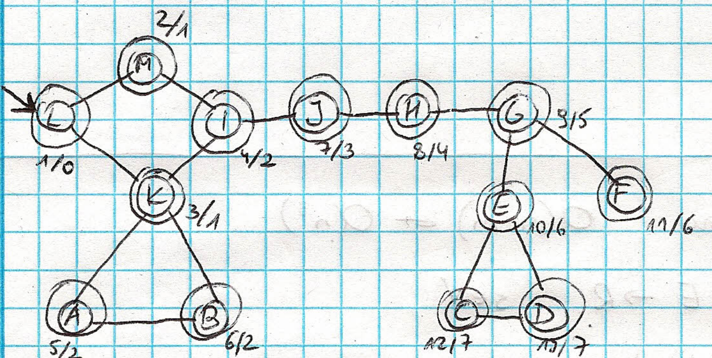


STOS: L, K, ~~A~~, ~~B~~, I, ~~M~~, J, H, G, ~~F~~, E, D, C

przy cofaniu zdejmujemy ze stosu!

$O(n+m)$

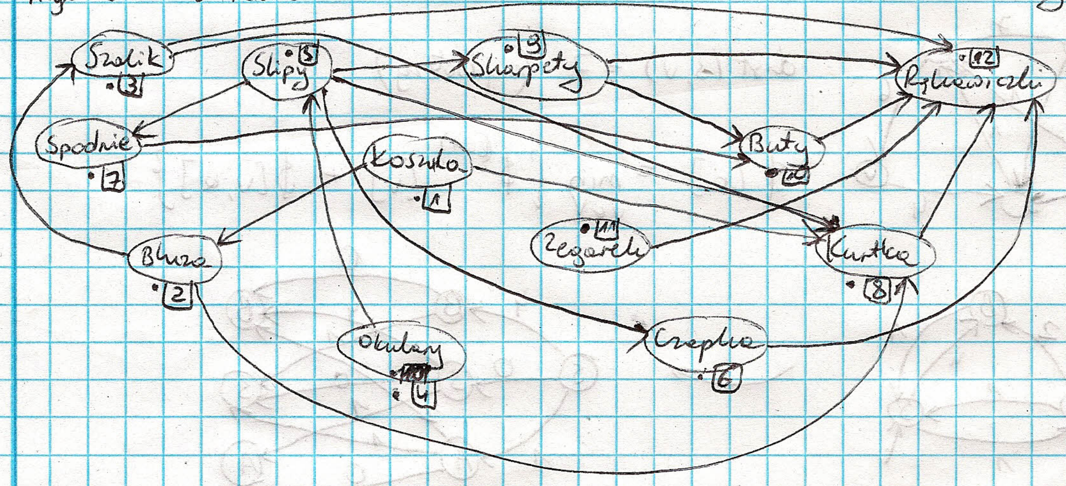
* BFS



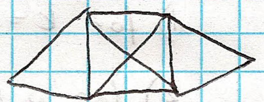
KOLEJKA: ~~L~~, ~~M~~, ~~K~~, ~~I~~, ~~A~~, ~~B~~, ~~J~~, ~~H~~, ~~G~~, ~~E~~, ~~F~~, ~~C~~, ~~D~~

$x \leq y$

Przykład: Ubrania - DFS (sortowanie topologiczne)

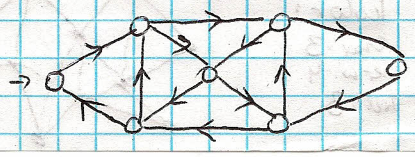


Cykle Eulera:

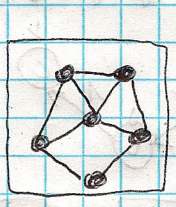


ploter (krawędzie/łuki)

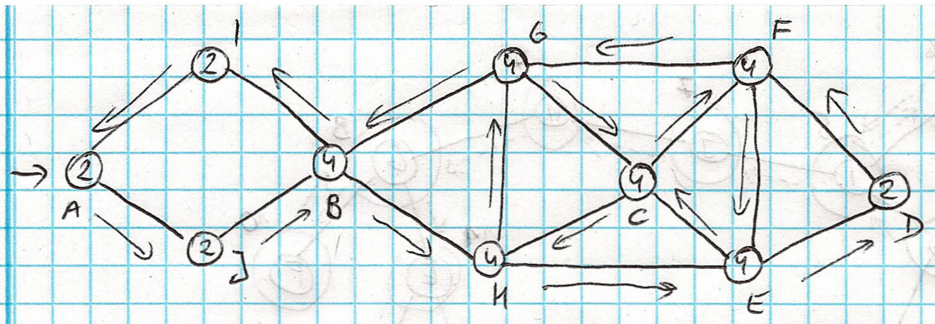
$2 \mid d(v) \quad \forall v \in V$



Cykle Hamiltona:



laser (wierzchołki)

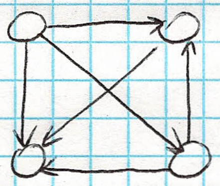


DFS: A ~~1~~ ~~B~~ ~~J~~ ~~A~~, ~~G~~, ~~H~~, ~~B~~, ~~C~~, ~~E~~, ~~H~~, ~~F~~, ~~D~~, ~~E~~, ~~C~~, ~~G~~, ~~F~~

B: A, J, B, H, E, D, F, G, F, E, C, H, B, 1, A

$O(m)$

Turniej:



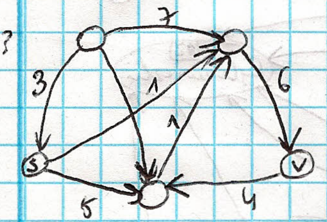
10.12.2012
ASI

Algorytm Forda-Bellmana $O(n \cdot m) \leftarrow O(n^3)$

in: $G = (V, E)$ $\$: E \to R$ $s \in V$

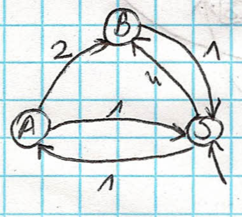
out: $\forall v \in V$ $dist(s, v)$

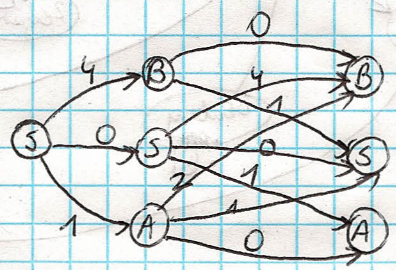
Przykład:



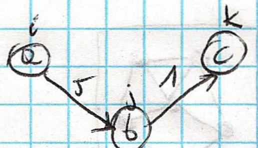
$dist(s, v) = 7$ (najkrótszy)

$$\$^k[a] := \min_{v \in V} \{ \$^{(k-1)}[v] + \$[v, a] \}$$





out: $\forall$ $v, u \in V$ $dist(v, u)$



$$c_{ik} = \overbrace{\sum_j}^{\min} a_{ij} \overset{+}{\cdot} b_{jk}$$

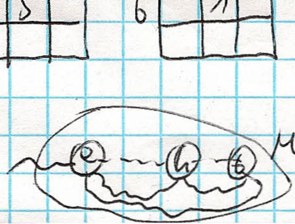
1) for $k = 1 \dots n$

2) for $a, b \in V$

		b	
a		5	

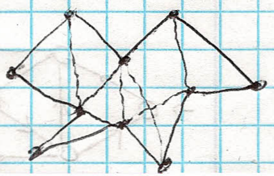
		c	
b		1	

$$dist^k(a, b) = \min\{ dist^{k-1}(a, b) \}, dist^{k-1}(a, h) + dist^{k-1}(h, b) \}$$



Mapa Polski

Kolor:
czar.: 3
czerw.: 4
ziel: 3



Algorytmy zachłanne / grafowe:

Algorytm Dijkstry: (A)

in: $G = (V, E)$, $\$ \; E \to R^+$, $s \in V$

for $v \in V$ do $D[v] := A[s, v]$;

$D[s] := 0$; $T := V \setminus \{s\}$;

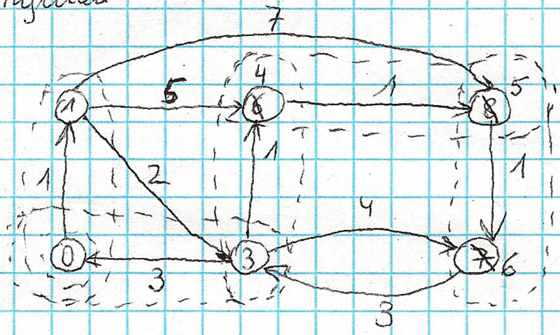
while $(T \neq 0)$ do

  $u :=$ wierzchołek ze zbioru T $\min\{D[p], p \in T\}$;

  $T := T \setminus \{u\}$;

  for $(v \in T)$ do $D[v] := \min\{D[v]; D[u] + A[u, v]\}$;

Przykład:



$0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$

$O(m \cdot \lg n)$

$n^2 \lg n$

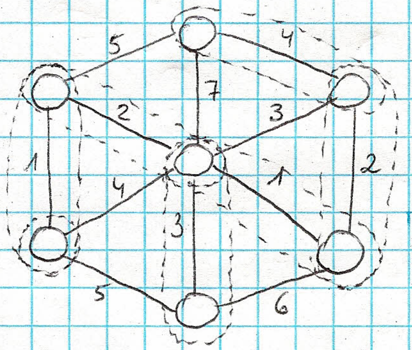
* Minimalne drzewo rozpinające:

in: $G = (V, E)$, $\$: E \to R$,

out: $\mathrm{span}(G) = T$, $\min \sum_{e \in T} \$(e)$

- Algorytm Prima-Dijkstry:

Przykład:

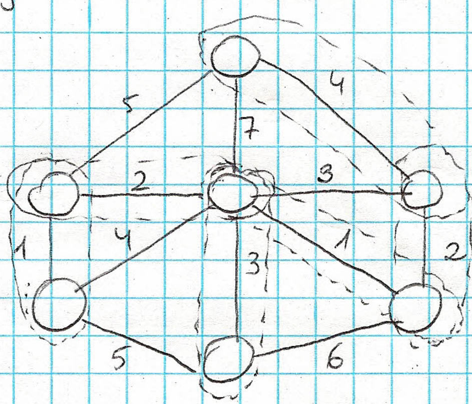


$\$(T) = 13$

Dokładamy zawsze najmniejszą krawędź z sąsiadów dodanych wierzchołków. (nie tworząc cyklu)

- Algorytm Kruskala:

Przykład:



$\$(T) = 13$

Dokładamy zawsze najmniejszą krawędź rozpatrując wszystkie krawędzie grafu (nie tworząc cyklu)

14.01.2013
AS1

Przepływy w sieciach (The Network Flow Problem)

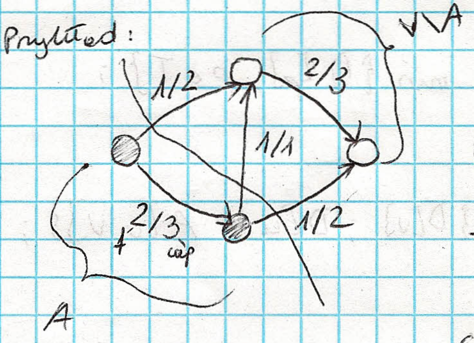
min/max

źródło s, wyjście t

(1) $0 \leq f(e) \leq cap(e)$

(2) $\sum_{In(e)=v} f(e) = \sum_{Term(e)=v} f(e) \qquad v \neq s,t$

Przykład:



$A \subseteq V$

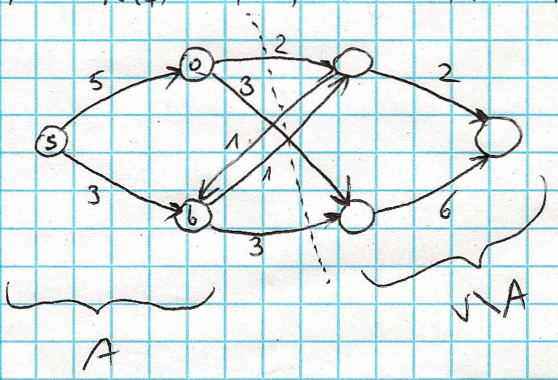
$P(A) = E \cap (A \times (V \setminus A))$

$f(A, V\setminus A) = \sum_{e \in P(A)} f(e)$

$c(A, V\setminus A) = \sum_{e \in P(A)} c(e)$

$W(f) = \sum_{In(e) \in s} f(e) - \sum_{Term(e) \in s} f(e)$

F1: $W(f) = f(A, V\setminus A) - f(V\setminus A, A)$



$W(f) = W(A)$

s : 5+3

a : 5 = 2+3

b : 3 = (3+1) − 1

$W(f) = \underbrace{5+3}_{5:8} = \underbrace{(\underbrace{(2+3)+(3+1)}_{f_P \to}) - \underbrace{(1)}_{f_P \leftarrow}}_{8}$

F2: (tw. Forda-Fulkersona) $\max_f W(f) = \min_P c(A, V\setminus A)$

F3: (char. max f) : a ⟺ b ⟺ c

a) Przepływ f jest max w G

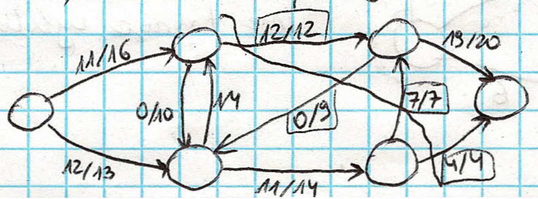
b) Nie istnieje p rozsz. w G_f

c) $W(f) = c(A, V\setminus A)$ dla pewnego A w G

a → b

b → c

c → a



Schemat AFF

14.01.2013
AS1

$f := 0$; //init

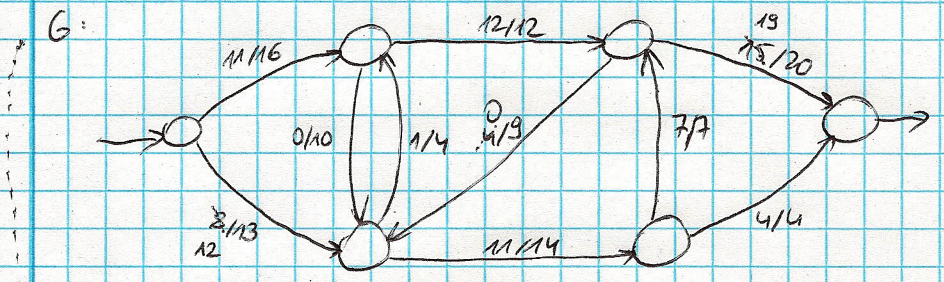
Złożoność: $O(\max f \cdot m)$

while (istnieje ścieżka powiększająca p) do

powiększ przepływ f wzdłuż p;

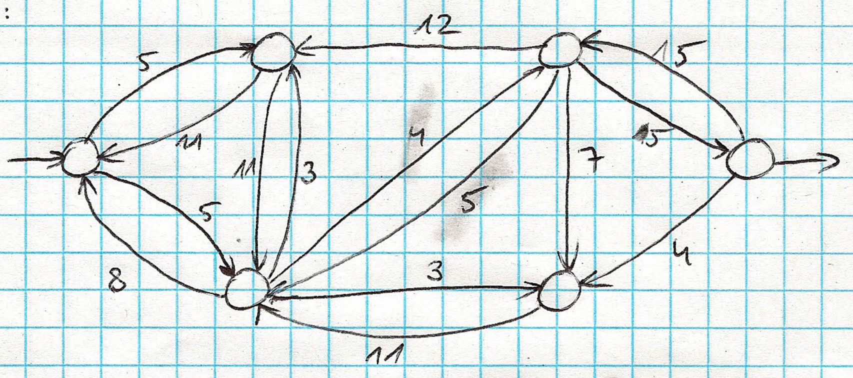
return f;

G:

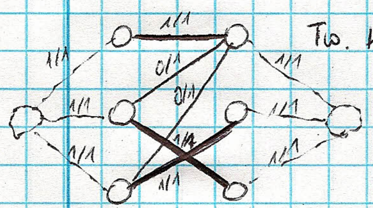


G_R:

graf pomocniczy (rezidualny)

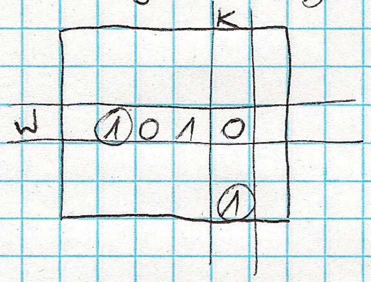


Zastosowanie:



Tw. Halla

Tw. König - Egerváry 1931 (min/max) ≡ Tw. Halla



max 1 - min L