Spis treści

Przestrzenie liniowe

Pierwszy tydzień

Podstawowe definicje (1.1)#. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej (1.2).

Przykłady

- **Przykład 1.1**

Uzasadnić z definicji, że zbiór $R_2[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2 z dodawaniem wielomianów i mnożeniem ich przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.

Rozwiązanie

Niech wielomiany p, q należą do zbioru $R_2[x]$, przy czym $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, gdzie $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in R$ oraz niech $\alpha \in R$. Z warunków

$$(p+q)(x) \stackrel{def}{=} p(x) + q(x) = (a + a_1)\,x^2 + (b + b_1)\,x + c + c_1,$$

$$(\alpha p)(x) \stackrel{def}{=} \alpha\, p(x) = (\alpha a)\,x^2 + (\alpha b)\,x + \alpha c$$

wynika, że funkcje $p + q$ oraz αp są także wielomianami ze zbioru $R_2[x]$. Sprawdzimy teraz kolejno 6 aksjomatów, które muszą spełniać działania w przestrzeniach liniowych.

1. Dodawanie wielomianów jest przemienne, bowiem dla każdego $x \in R$ mamy

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = (q+p)(x).$$

2. Niech dodatkowo $r \in R_2[x]$. Łączność dodawania wielomianów wynika z warunku

$$\begin{aligned}[(p+q)+r](x) &= (p+q)(x) + r(x) = (p(x) + q(x)) + r(x) \\ &= p(x) + (q(x) + r(x)) = p(x) + (q+r)(x) = [p + (q+r)](x).\end{aligned}$$

3. Elementem neutralnym dodawania wielomianów jest wielomian $p_0 \equiv 0$ także należący do zbioru $R_2[x]$.

Liczby w nawiasach oznaczają numery paragrafów w skrypcie autorów pt. „*Algebra liniowa 2. Definicje, twierdzenia, wzory*".

4. Elementem przeciwnym do wielomianu p jest wielomian

$$(-p)(x) = -p(x).$$

5. Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Wtedy dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ prawdziwe są wzory

$$(1 \cdot p)(x) = 1 \cdot p(x) = p(x),$$

$$[\alpha(\beta p)](x) = \alpha(\beta p)(x) = \alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta)p(x) = [(\alpha\beta)\, p](x),$$

a więc rzeczywiście $1 \cdot p = p$ oraz $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$.

6. Ponadto prawdziwe są związki $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$ oraz $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$, bowiem dla $x \in \boldsymbol{R}$ mamy

$$[(\alpha+\beta)\, p](x) = (\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x) = (\alpha p + \beta p)(x)$$

oraz

$$[\alpha(p+q)](x) = \alpha[(p+q)(x)] = \alpha[p(x) + q(x)] = \alpha p(x) + \alpha q(x) = (\alpha p + \alpha q)(x).$$

Zauważmy, że własności **1.** – **6.** wynikały bezpośrednio z odpowiednich własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych.

- **Przykład 1.2**

Uzasadnić, że podane zbiory $\boldsymbol{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych $\boldsymbol{V}$:

a) $\boldsymbol{W} = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 2x = 3y\}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^2$;

b) $\boldsymbol{W} = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 : x + y = y + z = 0\}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^3$;

c) $\boldsymbol{W} = \{p \in \boldsymbol{R}_3[x] : p(x) = p(-x)$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}\}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}[x]$;

d) $\boldsymbol{W} = \{f \in \boldsymbol{C}([0,2]) : f'(1) = 0\}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}([0,2])$.

Rozwiązanie

Zbiór $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\boldsymbol{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \boldsymbol{W}$ oraz dla dowolnych liczb $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ wektor $\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 \in \boldsymbol{W}$.

a) Niech $\vec{w}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in \boldsymbol{W}$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$. Wówczas

$$\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (x, y).$$

Mamy

$$2x = 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 2x_1 + \alpha_2 2x_2 = \alpha_1 3y_1 + \alpha_2 3y_2 = 3(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = 3y,$$

zatem $\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 \in \boldsymbol{W}$. Zbiór $\boldsymbol{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\boldsymbol{V}$.

b) Warunek $x + y = y + z = 0$ oznacza, że $x = -y = z$, więc

$$\boldsymbol{W} = \{(x, -x, x) : x \in \boldsymbol{R}\}.$$

Niech $\vec{w}_1 = (x_1, -x_1, x_1)$, $\vec{w}_2 = (x_2, -x_2, x_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$. Wtedy wektor

$$\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1(-x_1) + \alpha_2(-x_2), \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

ma postać $(x, -x, x)$ dla $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, więc należy do zbioru $\boldsymbol{W}$. Zbiór $\boldsymbol{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\boldsymbol{V}$.

c) Niech $p, q \in \boldsymbol{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$. Funkcja $\alpha_1 p + \alpha_2 q$ jest oczywiście wielomianem stopnia mniejszego lub równego 3. Zachodzi też warunek

$$(\alpha_1 p + \alpha_2 q)(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) = \alpha_1 p(-x) + \alpha_2 q(-x) = (\alpha_1 p + \alpha_2 q)(-x),$$

więc $\alpha_1 p + \alpha_2 q \in \boldsymbol{W}$. Zbiór $\boldsymbol{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\boldsymbol{V}$.

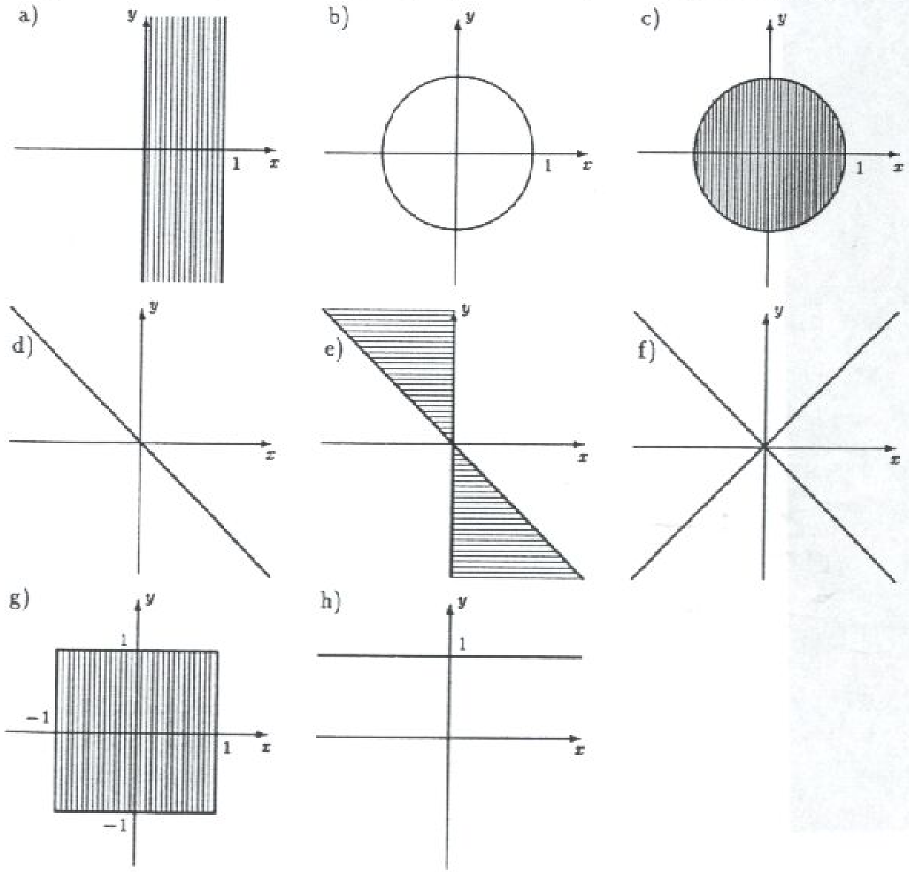
d) Niech $f, g \in \boldsymbol{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$. Funkcja $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ jest ciągła na przedziale $[0,2]$, bo obie funkcje f i g są ciągłe. Ponadto istnieje pochodna tej funkcji w punkcie 1, bo istnieją $f'(1)$ i $g'(1)$ oraz

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 g)'(1) = (\alpha_1 f' + \alpha_2 g')(1) = \alpha_1 f'(1) + \alpha_2 g'(1) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

Otrzymana równość świadczy o tym, że zbiór $\boldsymbol{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\boldsymbol{C}([0,2])$.

- **Przykład 1.3**

Który z narysowanych zbiorów jest podprzestrzenią liniową płaszczyzny ?



• dla ciągów ograniczonych (x_n), (y_n) ciąg $\alpha_1(x_n) + \alpha_2(y_n) = (\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n)$ jest też ograniczony, bowiem jeżeli $|x_n| \leqslant M_1 < \infty$ i $|y_n| \leqslant M_2 < \infty$ dla każdego $n \in N$, to

$$|\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n| \leqslant |\alpha_1||x_n| + |\alpha_2||y_n| \leqslant |\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2 = M < \infty;$$

• dla $p, q \in W_4$ mamy $(\alpha_1 p + \alpha_2 q)'(1) = \alpha_1 p'(1) + \alpha_2 q'(1) = 0$, przy czym $\alpha_1 p + \alpha_2 q$ jest też wielomianem, więc $\alpha_1 p + \alpha_2 q \in W_4$;

• dla $f, g \in U_5$ mamy

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 g)(1) = \alpha_1 f(1) + \alpha_2 g(1) = \alpha_1 f(2) + \alpha_2 g(2) = (\alpha_1 f + \alpha_2 g)(2),$$

jednocześnie z własności funkcji ciągłych wynika, że funkcja $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ jest ciągła, więc ostatecznie $\alpha_1 f + \alpha_2 g \in U_5$;

• dla $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 + y_1 & 2x_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_2 + y_2 & 2x_2 \end{bmatrix} \in U_6$ macierz

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) & 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \end{bmatrix} \in U_6.$$

• Przykład 1.6

Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $W_1 = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x = z \text{ lub } y = t\}$,
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x = z \text{ i } y = t\}$, $V = R^4$;

b) $W_1 = \{(x_n) \in R^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony i zbieżny}\}$,
$W_2 = \{(x_n) \in R^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony lub zbieżny}\}$, $V = R^\infty$?

Rozwiązanie

Wykorzystamy fakt, że część wspólna dwóch podprzestrzeni liniowych jest też podprzestrzenią liniową, zaś ich suma mnogościowa jest podprzestrzenią jedynie w przypadku, gdy jedna z nich zawiera się w drugiej.

a) Niech $U_1 = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x = z\}$ oraz $U_2 = \{(x, y, z, t) \in R^4 : y = t\}$. Zbiory U_1, U_2 są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni R^4. Ponadto $W_1 = U_1 \cup U_2$, $W_2 = U_1 \cap U_2$. Zbiór W_1 nie zawiera się w W_2 ani na odwrót, np. $\vec{w}_1 = (0, 1, 0, 2) \in W_1$, ale $\vec{w}_1 \notin W_2$ oraz $\vec{w}_2 = (1, 0, 2, 0) \in W_2$, ale $\vec{w}_2 \notin W_1$. Zatem zbiór W_1 nie jest, a zbiór W_2 jest podprzestrzenią liniową R^4.

b) Niech

$$U_1 = \{(x_n) \in R^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\} \text{ oraz}$$
$$U_2 = \{(x_n) \in R^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest zbieżny}\}.$$

Zbiory U_1, U_2 są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni R^∞. Wynika to z własności sum ciągów zbieżnych, ograniczonych i iloczynów tych ciągów przez liczby. Zauważmy, że $W_1 = U_1 \cap U_2$, $W_2 = U_1 \cup U_2$, a ponadto $U_2 \subset U_1$, bo każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Stąd wynika, że oba zbiory W_1, W_2 są podprzestrzeniami liniowymi R^∞.

Zadania

○ Zadanie 1.1

Uzasadnić z definicji, że zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy trójkątnych górnych stopnia 2 wraz z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczby rzeczywiste stanowi przestrzeń liniową.

○ Zadanie 1.2

Sprawdzić, że podane zbiory W są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych V:

a) $W = \{(2x - y, y + z) \in R^2 : x, y, z \in R\}$, $V = R^2$;

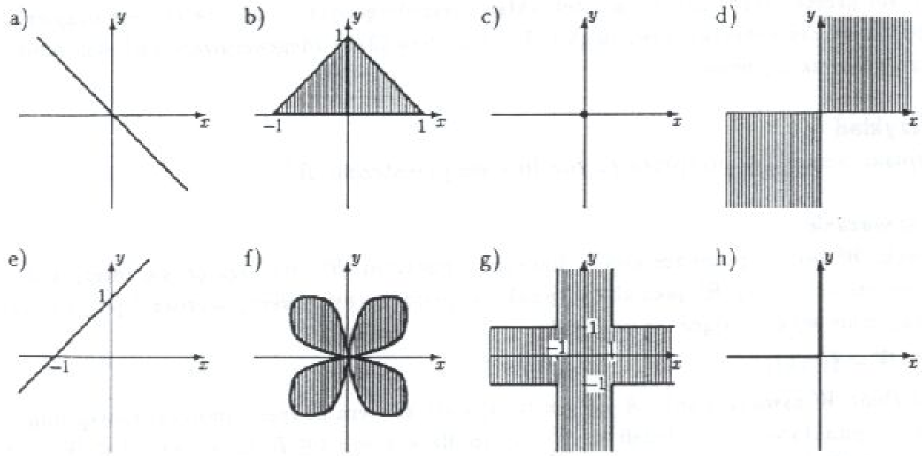
b) $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x - y = z - t\}$, $V = R^4$;

c) $W = \{p \in R_2[x] : p(1) = p'(0)\}$, $V = R[x]$;

d) $W = \{A \in M_{3\times3} : A = A^T\}$, $V = M_{3\times3}$.

○ Zadanie 1.3

Który z narysowanych niżej zbiorów jest podprzestrzenią liniową płaszczyzny ?



○ Zadanie 1.4

Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni R^3.

○ Zadanie 1.5

Określić, które z podanych zbiorów U, W, X, Y są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych V:

a) $V = R^2$, $U = \{(x, y) : |x - y| \leqslant 1\}$, $W = \{(x, y) : \ln(1 - x^2 - y^2) \geqslant 0\}$,
$X = \{(x, y) : 9x^2 + 12xy + 4y^2 = 0\}$, $Y = \{(x, y) : 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0\}$;

b) $V=R^4$, $U=\{(x,y,z,t): 3|x|=2|y|\}$, $W=\{(xy,y,x,0): x,y\in R\}$,
$X=\{(x,y,z,t): x^2+z^6=0\}$, $Y=\{(x,x+y,-x,-y): x,y\in R\}$;

c) $V=R^\infty$, $U=\left\{(x_n): \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\infty \text{ lub } \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right\}$,
$W=\{(x_n):$ istnieje $n_0\in N$ takie, że $x_n=0$ dla każdego $n\geqslant n_0\}$,
$X=\{(x_n):$ ciąg (x_n) jest zbieżny lub stały$\}$,
$Y=\{(x_n): x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$ dla każdego $n\in N\}$;

d) $V=R[x]$, $U=\{p:$ stopień wielomianu p jest równy $4\}$,
$W=\{p: 2p(x)=p(2x)$ dla każdego $x\in R\}$,
$X=\{p: p(0)=0 \text{ lub } p'(0)=0\}$,
$Y=\{p:$ wielomian p jest funkcją parzystą$\}$;

e) $V=C(R)$, $U=\{f:$ funkcja f jest niemalejąca$\}$,
$W=\{f:$ funkcja f jest różniczkowalna$\}$,
$X=\{f:$ funkcja f jest stała na zbiorze $N\}$,
$Y=\{f: f(x+y)=f(x)f(y)$ dla dowolnych $x,y\in R\}$;

f) $V=M_{2\times 2}$, $U=\left\{A: AA^T=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$, $W=\{A: \det A\geqslant 0\}$,
$X=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}: abcd=0\right\}$, $Y=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}: a+c=b\right\}$.

○ **Zadanie 1.6**

Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $W_1=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2=0 \text{ lub } x=y\}$,
$W_2=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2=0 \text{ i } x=y\}$, $V=R^2$;

b) $W_1=\{(x,y)\in R^2: xy=0 \text{ i } x=0\}$,
$W_2=\{(x,y)\in R^2: xy=0 \text{ lub } x=0\}$, $V=R^2$;

c) $W_1=\{(x,y,z)\in R^3: x+4y=0 \text{ i } 3x-z=0\}$,
$W_2=\{(x,y,z)\in R^3: x+4y=0 \text{ lub } 3x-z=0\}$, $V=R^3$;

d) $W_1=\{(x,y,z,t)\in R^4: x=2y \text{ lub } x^2=4y^2\}$,
$W_2=\{(x,y,z,t)\in R^4: x=2y \text{ i } x^2=4y^2\}$, $V=R^4$;

e) $W_1=\left\{(x_n)\in R^\infty: \lim\limits_{n\to\infty}x_n \text{ istnieje i } \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right\}$,
$W_2=\left\{(x_n)\in R^\infty: \lim\limits_{n\to\infty}x_n \text{ istnieje lub } \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right\}$, $V=R^\infty$;

f) $W_1=\{p\in R[x]: p(0)=p(1)=0$ lub
wielomian p ma co najmniej dwa miejsca zerowe$\}$,
$W_2=\{p\in R[x]: p(0)=p(1)=0$ i
wielomian p ma co najmniej dwa miejsca zerowe$\}$, $V=R[x]$;

g) $W_1=\{f\in C(R):$ istnieje f' na R i f jest funkcją stałą$\}$;
$W_2=\{f\in C(R):$ istnieje f' na R lub f jest funkcją stałą$\}$; $V=C(R)$?

○ **Zadanie* 1.7**

Uzasadnić bezpośrednio z definicji przestrzeni liniowej, że

a) istnieje tylko jeden wektor zerowy;

b) istnieje tylko jeden wektor przeciwny do każdego wektora;

c) $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$ dla każdego $\alpha\in R$.

Odpowiedzi i wskazówki

1.3 Zbiory z rysunków a), c) są podprzestrzeniami liniowymi, natomiast zbiory z rysunków b), d), e), f), g), h) nie są podprzestrzeniami liniowymi.

1.4 $\{(0,0,0)\}$, wszystkie proste i wszystkie płaszczyzny przechodzące przez punkt $(0,0,0)$ oraz R^3.

1.5 Podprzestrzeniami liniowymi są zbiory a) W, X; b) X, Y; c) W, X, Y; d) W, Y; e) W, X; f) U, Y. Pozostałe zbiory nie są podprzestrzeniami liniowymi.

1.6 Podprzestrzeniami liniowymi są jedynie zbiory a) W_1, W_2; b) W_1; c) W_1; d) W_2; e) W_1, W_2; f) W_2; g) W_1, W_2.

Drugi tydzień

Liniowa niezależność wektorów (1.3).

Przykłady

● **Przykład 2.1**

Wektory $(1,2,3)$, $(1,3,5)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:

a) $(2,0,6),(0,1,0),(1,-1,3)$; b) $(2,0,6),(0,1,0),(1,1,1)$.

Rozwiązanie

a) Z równości $(1,2,3)=a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,-1,3)$, gdzie $a,b,c\in R$, wynika układ równań $2a+c=1$, $b-c=2$, $6a+3c=3$. Rozwiązanie tego układu ma postać $a=\frac{1-c}{2}$, $b=2+c$, gdzie $c\in R$. Istnieje więc nieskończenie wiele kombinacji liniowych, mianowicie

$$(1,2,3)=\frac{1-c}{2}(2,0,6)+(2+c)(0,1,0)+c(1,-1,3),\ c\in R.$$

Niech teraz $(1,3,5)=a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,-1,3)$. Układ równań $2a+c=1$, $b-c=3$, $6a+3c=5$ jest sprzeczny, a to oznacza, że wektora $(1,3,5)$ nie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej danych wektorów.

b) Postępując podobnie mamy $(1,2,3)=a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,1,1)$, gdzie $a,b,c\in R$. Stąd wynika, że $2a+c=1$, $b+c=2$, $6a+c=3$. Otrzymany układ równań jest układem Cramera posiadającym jedyne rozwiązanie $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=0$. Wektor $(1,2,3)$ ma więc tylko jedno przedstawienie, tzn. $(1,2,3) = \frac{1}{2}(2,0,6)+2(0,1,0)$. Dla wektora $(1,3,5)$ także istnieje tylko jedna kombinacja liniowa mająca postać $(1,3,5) = (2,0,6) + 4(0,1,0) - (1,1,1)$.

- **Przykład 2.2**

Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

a) $(2,0,6), (0,1,0), (1,-1,3)$; $(2,0,6), (0,1,0), (1,1,1)$ w przestrzeni R^3;

b) $1+x^2, 1-x^2, 1+2x$; $1+x, 2-x, 3x-5$ w przestrzeni $R_2[x]$;

c) $1, \sin x, \cos x$; 1, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ w przestrzeni $C(R)$.

Rozwiązanie

Wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ są liniowo niezależne, jeżeli dla dowolnych liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ z warunku $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Gdy tak nie jest, mówimy o wektorach liniowo zależnych.

a) Warunek

$$\alpha_1(2,0,6) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,-1,3) = \vec{0} = (0,0,0)$$

prowadzi do układu równań $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, $6\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$. Rozwiązanie tego układu ma postać $\alpha_2 = \alpha_3 = -2\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 \in R$. Przyjmując np. $\alpha_1 = 1$ możemy napisać, że $(2,0,6) - 2(0,1,0) - 2(1,-1,3) = (0,0,0)$, a to oznacza liniową zależność danych wektorów. Dla wektorów $(2,0,6)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ z warunku $\alpha_1(2,0,6) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1) = (0,0,0)$, otrzymamy układ równań Cramera $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $6\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ i jego jedyne rozwiązanie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Wektory $(2,0,6)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ są więc liniowo niezależne.

b) Załóżmy, że $\alpha_1\left(1+x^2\right) + \alpha_2\left(1-x^2\right) + \alpha_3(1+2x) = \vec{0} \equiv 0$. Wielomian $(\alpha_1 - \alpha_2)x^2 + 2\alpha_3 x + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ jest więc wielomianem zerowym. Stąd wynika, że $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $2\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, a więc $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. To oznacza liniową niezależność pierwszej trójki wielomianów. Dla drugiej trójki z warunku $\alpha_1(1+x) + \alpha_2(2-x) + \alpha_3(3x-5) \equiv 0$ odczytujemy, że $\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$ i $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$. Ten jednorodny układ równań posiada niezerowe rozwiązania, bowiem $\alpha_2 = -8\alpha_1$, $\alpha_3 = -3\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 \in R$. Dla $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy równość $(1+x) - 8(2-x) - 3(3x-5) \equiv 0$ oznaczającą liniową zależność danych wielomianów.

c) Niech $\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = \vec{0} \equiv 0$. Funkcja występująca po lewej stronie równości w każdym punkcie $x \in R$ przyjmuje wartość 0. Dla $x = 0$ otrzymujemy równość $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, dla $x = \frac{\pi}{2}$ warunek $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, a dla $x = \pi$ mamy $\alpha_1 - \alpha_3 = 0$ Stąd wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, więc dane funkcje są liniowo niezależne. Zauważmy, że dobieraliśmy tu takie wartości x, aby otrzymać układ Cramera zmiennych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dla funkcji 1, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ wstawienie różnych wartości x do warunku $\alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{arctg} x + \alpha_3 \operatorname{arcctg} x = 0$ nie prowadzi niestety do układu Cramera. Należy więc podejrzewać, że funkcje te są liniowo zależne. Aby to ściśle uzasadnić, wystarczy powołać się na znaną równość dla funkcji cyklometrycznych:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

dla każdego $x \in R$. Przepisując ten warunek w postaci

$$\frac{\pi}{2} \cdot 1 - \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x \equiv 0$$

wnioskujemy, że dane funkcje są rzeczywiście liniowo zależne.

- **Przykład 2.3**

Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych przedstawiając jeden z tych wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

a) $(1,2), (2,3), (3,4)$ w przestrzeni R^2;

b) $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin^2 x$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos^2 x$ w przestrzeni $C(R)$.

Rozwiązanie

a) Nietrudno zauważyć, że $(1,2)+(3,4) = (4,6) = 2(2,3)$. Z tej równości wynika, że każdy z podanych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych, np. $(1,2) = 2(2,3) - (3,4)$. To oznacza liniową zależność tych wektorów, bowiem zgodnie z definicją

$$(1,2) - 2(2,3) + (3,4) = \vec{0}.$$

b) Tu wystarczy zastosować wzór $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ i wtedy

$$0 \cdot \sin x + 0 \cdot \sin 2x + 1 \cdot \sin^2 x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \cos 2x - 1 \cdot \cos^2 x = \vec{0},$$

co tłumaczy liniową zależność danych funkcji.

- **Przykład 2.4**

Niech V będzie przestrzenią liniową, a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ wektorami liniowo niezależnymi w tej przestrzeni. Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów:

a) $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - 3\vec{w} + \vec{x}$, $\vec{u} - \vec{x}$;

b) $\vec{u} - \vec{x}$, $\vec{v} - \vec{x}$, $\vec{w} - \vec{x}$, $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} - \vec{x}$.

Rozwiązanie

a) Niech

$$\alpha_1(\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}) + \alpha_2(\vec{v} - 3\vec{w} + \vec{x}) + \alpha_3(\vec{u} - \vec{x}) = \vec{0},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równość

$$(\alpha_1 + \alpha_3)\vec{u} + (2\alpha_1 + \alpha_2)\vec{v} + (\alpha_1 - 3\alpha_2)\vec{w} + (\alpha_2 - \alpha_3)\vec{x} = \vec{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ wynika, że

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Stąd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dane wektory są liniowo niezależne.

b) Postępując podobnie załóżmy, że

$$\alpha_1(\vec{u} - \vec{x}) + \alpha_2(\vec{v} - \vec{x}) + \alpha_3(\vec{w} - \vec{x}) + \alpha_4(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} - \vec{x}) = \vec{0}.$$

Wtedy

$$(\alpha_1 + \alpha_4)\vec{u} + (\alpha_2 - \alpha_4)\vec{v} + (\alpha_3 + \alpha_4)\vec{w} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\vec{x} = \vec{0},$$

zatem z liniowej niezależności wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ otrzymujemy układ równań

$$\alpha_1+\alpha_4=\alpha_2-\alpha_4=\alpha_3+\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0.$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_3=-\alpha_4$, gdzie $\alpha_1\in\boldsymbol{R}$. Przyjmując np. $\alpha_1=1$ możemy napisać, że

$$(\vec{u}-\vec{x})-(\vec{v}-\vec{x})+(\vec{w}-\vec{x})-(\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}-\vec{x})=\vec{0}.$$

Cztery badane wektory są więc liniowo zależne.

- **Przykład 2.5**

Niech V będzie przestrzenią liniową, a $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli:

a) wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, są liniowo niezależne, to wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ też;

b) wśród wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ jest wektor zerowy, to wektory te są liniowo zależne.

Rozwiązanie

Wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną kombinacją liniową tych wektorów będącą wektorem zerowym jest kombinacja o wszystkich współczynnikach zerowych. W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory te są liniowe zależne.

a) Niech $\alpha_1\vec{u}+\alpha_2\vec{v}+\alpha_3\vec{w}=\vec{0}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in\boldsymbol{R}$. Wówczas

$$\alpha_1\vec{u}+\alpha_2\vec{v}+\alpha_3\vec{w}+0\cdot\vec{x}=\vec{0}.$$

Otrzymaliśmy liniową kombinację wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, która jest wektorem zerowym. Z liniowej niezależności tych wektorów wynika, że $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. To oczywiście oznacza liniową niezależność wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

b) Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $\vec{x}=\vec{0}$. Możemy wówczas napisać, że

$$0\cdot\vec{u}+0\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{w}+1\cdot\vec{x}=\vec{0}.$$

To oznacza, że wektor $\vec{0}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, której nie wszystkie współczynniki są zerowe. Wektory te są więc liniowo zależne.

- **Przykład* 2.6**

Uzasadnić, że funkcje $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ... są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $C(\boldsymbol{R})$.

Rozwiązanie

Nieskończony układ wektorów jest liniowo niezależny, jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Z kolei każdy podzbiór układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny. Wykorzystując oba te stwierdzenia wystarczy uzasadnić liniową niezależność funkcji $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$ dla dowolnego $n\in\boldsymbol{N}$. Niech zatem

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\sin 2x+\ldots+\alpha_n\sin nx\equiv 0,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in\boldsymbol{R}$. Obliczając po obu stronach tej równości kolejne pochodne $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}$ otrzymamy zależności:

$$\begin{array}{rcrcccl}
\alpha_1\cos x & + & 2\alpha_2\cos 2x & + & \ldots & + & n\alpha_n\cos nx \equiv 0,\\
-\alpha_1\sin x & - & 2^2\alpha_2\sin 2x & - & \ldots & - & n^2\alpha_n\sin nx \equiv 0,\\
-\alpha_1\cos x & - & 2^3\alpha_2\cos 2x & - & \ldots & - & n^3\alpha_n\cos nx \equiv 0,\\
\alpha_1\sin x & + & 2^4\alpha_2\sin 2x & + & \ldots & + & n^4\alpha_n\sin nx \equiv 0,\\
 & & & & \vdots & & \vdots\\
\pm(\alpha_1\cos x & + & 2^{2n-1}\alpha_2\cos 2x & + & \ldots & + & n^{2n-1}\alpha_n\cos nx) \equiv 0.
\end{array}$$

Wstawiając punkt $x=0$ do wszystkich równości zawierających kosinusy (tzn. do wszystkich nieparzystych pochodnych wyjściowej równości) otrzymujemy układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ 1 & 2^3 & 3^3 & \ldots & n^3\\ 1 & 2^5 & 3^5 & \ldots & n^5\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tego układu jest równy

$$2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 4 & 9 & \ldots & n^2\\ 1 & 4^2 & 9^2 & \ldots & n^4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 4^{n-1} & 9^{n-1} & \ldots & n^{2n-2}\end{vmatrix}.$$

Ostatni wyznacznik jest niezerowym wyznacznikiem Vandermonde'a, układ równań jest więc układem Cramera. To oznacza, że jedynym jego rozwiązaniem jest $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$. Stąd wynika, że badane funkcje są liniowo niezależne.

- **Przykład 2.7**

Uzasadnić, że dwa wektory w przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są niewspółliniowe.

Rozwiązanie

Niech $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$ będą wektorami z przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$. Prawdziwa jest zależność

$$|\vec{x}|\,|\vec{y}|\sin\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & 0\\ y_1 & y_2 & 0\end{vmatrix}\right|=|x_1y_2-x_2y_1|.$$

Wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ są zatem współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1y_2=x_2y_1$. Załóżmy najpierw, że wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ są liniowo niezależne oraz załóżmy nie wprost, że $x_1y_2=x_2y_1$. Wtedy albo $x_1=x_2=y_1=y_2=0$, czyli $\vec{x}=\vec{y}=\vec{0}$, albo np. $x_1\neq 0$ i wtedy $\vec{x}=\alpha\vec{y}$ dla $\alpha=\frac{y_1}{x_1}$, a to w obu przypadkach daje sprzeczność z liniową niezależnością wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$. Uzasadniliśmy zatem, że z liniowej niezależności wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$ wynika ich niewspółliniowość. Załóżmy z drugiej strony, że wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ są niewspółliniowe, tzn. że $x_1y_2 \neq x_2y_1$. Niech $\alpha_1\vec{x} + \alpha_2\vec{y} = \vec{O}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Równość tę możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z założenia wynika, że jest to układ Cramera, więc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. To oznacza liniową niezależność wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$.

Zadania

○ **Zadanie 2.1**

Wektory $(3, -2, 5)$, $(0, 1, 1)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:

a) $(3, -2, 5)$, $(1, 1, 1)$;
b) $(3, -2, 5)$, $(1, 1, 1)$, $(0, -5, 2)$;
c) $(1, -2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, -1)$;
d) $(1, -2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(-1, -2, 1)$.

○ **Zadanie 2.2**

Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

a) $(1, 4), (2, 3), (1, 1), (5, 6)$ w przestrzeni R^2;
b) $(1, -2, 3), (1, 0, 1), (0, 2, -1)$; $(1, -2, 3), (1, 0, 1), (-1, -2, 1)$ w przestrzeni R^3;
c) $3 - x$, $4 + x$, $2x + 3$; $2 - x^3$, $3x + 2$, $x^2 + x - 1$ w przestrzeni $R[x]$;
d) $1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x$; $1, x, \cos x, e^x$ w przestrzeni $C(R)$;
e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $M_{2\times 2}$;
f) I, A, A^2 dla $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $M_{2\times 2}$.

○ **Zadanie 2.3**

Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych przedstawiając jeden z tych wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

a) $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(1, 1, 1)$ w przestrzeni R^3;
b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $x^3 + x^2 + x$, $x^3 - x^2 + x$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ w przestrzeni $R_4[x]$;
c) $\sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ w przestrzeni $C(R)$;
d) $\arcsin x, \arccos x, 1$ w przestrzeni $C([-1, 1])$.

○ **Zadanie 2.4**

Wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej V. Zbadać liniową

niezależność wektorów:

a) $\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}$;
b) $\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x}$;
c) $\vec{u} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{w}, \vec{w}$;
d) $\vec{u} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{w}, \vec{w} - \vec{x}, \vec{x} - \vec{u}$;
e) $\vec{u} - 3\vec{v} + 5\vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, 3\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}$;
f) $2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{x}, 4\vec{u} + 7\vec{v} + \vec{w} + 2\vec{x}$.

○ **Zadanie 2.5**

Niech V będzie przestrzenią liniową, a $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli wektory:

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są liniowo zależne, to wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ też są liniowo zależne;
b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ są liniowo niezależne, a wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ liniowo zależne, to wektor $\vec{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$;
c) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są liniowo niezależne i wektor $\vec{x}$ nie jest kombinacją liniową tych wektorów, to wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ są liniowo niezależne;
d) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są liniowo niezależne, a wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ są liniowo zależne, to wektor $\vec{x}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
e*) Co można powiedzieć o liniowej niezależności wektorów $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$, jeżeli wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są liniowo zależne ?

○ **Zadanie 2.6**

Uzasadnić liniową niezależność podanych nieskończonych układów wektorów z odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $\{(1, 0, 0, \ldots), (1, 1, 0, \ldots), (1, 1, 1, \ldots), \ldots\}$, R^∞;
b) $\{1, x, x^2, \ldots\}$, $R[x]$;
c) $\left\{p_n \in R[x] : p_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} \text{ dla } x \neq 1, n \in N\right\}$, $R[x]$;
d*) $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$, $C(R)$;
e*) $\{e^{tx} : t \in R\}$, $C(R)$.

○ **Zadanie 2.7**

Uzasadnić, że dowolne trzy niewspółpłaszczyznowe wektory w przestrzeni R^3 są liniowo niezależne.

Odpowiedzi i wskazówki

2.1 a) $(3, -2, 5) = 1 \cdot (3, -2, 5) + 0 \cdot (1, 1, 1)$, wektor $(0, 1, 1)$ nie jest kombinacją liniową; b) $(3, -2, 5) = a(3, -2, 5) + (3 - 3a)(1, 1, 1) + (1 - a)(0, -5, 2)$, gdzie $a \in R$, wektor $(0, 1, 1)$ nie jest kombinacją liniową; c) $(3, -2, 5) = 1 \cdot (1, -2, 3) + 2 \cdot (1, 0, 1)$, $(0, 1, 1) = \frac{3}{2}(1, -2, 3) - \frac{3}{2}(1, 0, 1) + 2(0, 2, -1)$; d) $(3, -2, 5) = a(1, -2, 3) + (4 - 2a)(1, 0, 1) + (1 - a)(-1, -2, 1)$, gdzie $a \in R$, wektor $(0, 1, 1)$ nie jest kombinacją liniową.

2.2 Wektory są liniowo **a)** zależne; **b)** niezależne, zależne; **c)** zależne, niezależne; **d)** zależne, niezależne; **e)** zależne; **f)** zależne.

2.3 a) $(1, 1, 1) = (2, 3, 4) - (1, 2, 3)$; b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x) - (x^3 - x^2 + x)$; c) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{1}{2}\sin x$; d) $1 = \frac{2}{\pi}\arcsin x + \frac{2}{\pi}\arccos x$.

2.4 Wektory są liniowo a), b), c) niezależne, d) e) f) zależne.

2.5 e*) wektory są liniowo zależne.

Trzeci tydzień

Baza i wymiar przestrzeni liniowej (1.4).

Przykłady

- **Przykład 3.1**

Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory $\text{lin}\, A$ dla

a) $A = \{(1, 3, 1), (0, 5, 2)\} \subset R^3$;

b) $A = \{x, x^3, x^5, x^7\} \subset R[x]$;

c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}$.

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\text{lin}\, A = \{s(1, 3, 1) + t(0, 5, 2) : s, t \in R\} = \{(s, 3s + 5t, s + 2t) : s, t \in R\}.$$

Ponieważ wektory $(1, 3, 1)$, $(0, 5, 2)$ są niewspółliniowe, więc zbiór $\text{lin}\, A$ jest płaszczyzną w R^3 o równaniu parametrycznym $x = s$, $y = 3s + 5t$, $z = s + 2t$ (lub ogólnym $x - 2y + 5z = 0$).

b) Tutaj

$$\text{lin}\, A = \left\{ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 : a, b, c, d \in R\right\}.$$

Niech wielomian $p \in \text{lin}\, A$. Wówczas $p(-x) = -p(x)$. Niech teraz p_1 będzie wielomianem stopnia nie większego niż 7 o własności $p_1(-x) = -p_1(x)$, czyli

$$p_1(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\quad a_i \in R,\ 0 \leqslant i \leqslant 7.$$

Z warunku $p_1(-x) + p_1(x) \equiv 0$ wynika, że $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$. Zatem $p_1 \in \text{lin}\, A$. Oznacza to, że zbiór $\text{lin}\, A$ składa się ze wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż 7 będących jednocześnie funkcjami nieparzystymi.

c) W tym przykładzie

$$\text{lin}\, A = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3c \\ 3c & 2b \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}.$$

Otrzymaliśmy zatem zbiór wszystkich macierzy symetrycznych stopnia 2.

- **Przykład 3.2**

Znaleźć generatory podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(x - 2y, x + y + 3z, y - 4z, 2x + z) : x, y, z \in R\}$;

b) $V = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}\right\}$;

c) $V = \{p \in R_4[x] : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$.

Rozwiązanie

a) Dowolny wektor $\bar{v} \in V$ można zapisać w postaci

$$\bar{v} = x(1, 1, 0, 2) + y(-2, 1, 1, 0) + z(0, 3, -4, 1),$$

gdzie $x, y, z \in R$, zatem

$$V = \text{lin}\,\{(1, 1, 0, 2), (-2, 1, 1, 0), (0, 3, -4, 1)\}.$$

b) Warunek definiujący zbiór V jest równaniem kierunkowym prostej o równaniu parametrycznym $x = 2s$, $y = 3s$, $z = -s$, a więc

$$V = \{(2s, 3s, -s) : s \in R\} = \text{lin}\,\{(2, 3, -1)\}.$$

c) Niech $p \in V$. Wówczas $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Z warunków

$$\begin{aligned} p(1) + p'(0) &= a + b + c + 2d + e = 0, \\ p'(1) + p''(0) &= 4a + 3b + 4c + d = 0 \end{aligned}$$

wynikają równości $d = -4a - 3b - 4c$, $e = 7a + 5b + 7c$, gdzie $a, b, c \in R$. Zatem

$$p(x) = a\left(x^4 - 4x + 7\right) + b\left(x^3 - 3x + 5\right) + c\left(x^2 - 4x + 7\right).$$

Oznacza to, że $V = \text{lin}\,\left\{x^4 - 4x + 7, x^3 - 3x + 5, x^2 - 4x + 7\right\}$.

- **Przykład 3.3**

Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2)\}$, R^3;

b) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1)\}$, R^3;

c) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (2, 2, 3)\}$, R^3;

d) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 4)\}$, R^3;

e) $B = \left\{x^2 + 1, x^2 + 2x + 2, x + 1\right\}$, $R_2[x]$;

f) $B = \left\{x^2 + 1, x^2 + 2x + 2, 2x^2 + 2x + 3\right\}$, $R_2[x]$.

Rozwiązanie

Zbiór $B \subset V$ jest bazą przestrzeni liniowej V, gdy jest on liniowo niezależny i generuje tę przestrzeń.

a) Zbiór B jest liniowo niezależny, ale nie generuje przestrzeni R^3, gdyż np. wektora

$(0,0,1)$ nie da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej danych wektorów. Nie jest to więc baza przestrzeni R^3.

b) Zbiór B jest liniowo niezależny. Niech $\vec{v} = (x, y, z) \in R^3$. Szukamy współczynników $a, b, c \in R$ takich, że $\vec{v} = a(1,0,1) + b(1,2,2) + c(0,1,1)$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2b + c = y \\ a + 2b + c = z \end{cases},$$

który jest układem Cramera o niewiadomych a, b, c. Stąd wynika, że zbiór B generuje przestrzeń R^3, zatem jest jej bazą.

c) Zbiór B jest liniowo zależny, bo np. $(2,2,3) = (1,0,1) + (1,2,2)$. Nie jest on więc bazą przestrzeni R^3.

d) Zbiór B generuje przestrzeń R^3, bo zawiera on wszystkie wektory z przykładu b). Jednak nie jest on bazą R^3, bo np. zachodzi związek $(2,3,4) = (1,0,1) + (1,2,2) + (0,1,1)$ przeczący liniowej niezależności tego zbioru.

e) Z równości $a\left(x^2+1\right) + b\left(x^2+2x+2\right) + c(x+1) \equiv 0$ wynika, że $a + b = 2b + c = a + 2b + c = 0$, więc $a = b = c = 0$. Oznacza to liniową niezależność zbioru B. Niech teraz $p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in R_2[x]$. Wówczas dla $a = \gamma - \beta$, $b = \alpha + \beta - \gamma$, $c = -2\alpha - \beta + 2\gamma$ zachodzi równość

$$p(x) = a\left(x^2+1\right) + b\left(x^2+2x+2\right) + c(x+1).$$

Zatem $\operatorname{lin} B = R_2[x]$ i B jest bazą.

f) Zauważmy, że $2x^2 + 2x + 3 = \left(x^2+1\right) + \left(x^2+2x+2\right)$. Zbiór B nie jest więc liniowo niezależny i nie jest bazą przestrzeni $R_2[x]$.

• Przykład 3.4

Wektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami tej przestrzeni:

a) $\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3, 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2, \vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3$;

b) $\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3, 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2, 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$.

Rozwiązanie

a) Niech $\vec{u}_1 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{u}_2 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3$ oraz niech $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_2 = \vec{0}$, przy czym $a, b, c \in R$. Wówczas

$$(a + 2b + c)\vec{b}_1 + (-2a - b + c)\vec{b}_2 + (a - c)\vec{b}_3 = \vec{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ wynika, że $a + 2b + c = -2a - b + c = a - c = 0$. Stąd $a = -b = c$. Biorąc np. $a = 1$ otrzymujemy równość $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$, z której wynika liniowa zależność wektorów $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$. Nie są więc one bazą przestrzeni V.

b) Niech $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ będą jak wyżej oraz niech $\vec{u}_3 = 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $a, b, c \in R$. Z warunku $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{0}$ wnioskujemy, że $a + 2b = -2a - b + 3c = a + c = 0$, a więc $a = b = c = 0$. Oznacza to liniową niezależność danych wektorów. Sprawdzimy teraz, czy generują one przestrzeń V, tzn., czy dla dowolnego wektora $\vec{v} \in V$ istnieją takie liczby $a, b, c \in R$, że zachodzi równość $\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$. Niech więc $\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$. Z równości

$$a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3$$

wynika, że

$$(a + 2b - \alpha_1)\vec{b}_1 + (-2a - b + 3c - \alpha_2)\vec{b}_2 + (a + c - \alpha_3)\vec{b}_3 = \vec{0}.$$

Korzystamy ponownie z liniowej niezależności wektorów bazy $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ i otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2b = \alpha_1 \\ -2a - b + 3c = \alpha_2 \\ a + c = \alpha_3 \end{cases}.$$

Jest to układ Cramera o niewiadomych a, b, c. Istnieje więc jednoznaczne rozwiązanie tego układu. Stąd wniosek, że $V = \operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, czyli wektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ tworzą bazę V.

• Przykład 3.5

Obliczając odpowiednie wyznaczniki sprawdzić, czy podane zbiory wektorów są bazami podanych przestrzeni:

a) $\vec{v}_1 = (3,2)$, $\vec{v}_2 = (-6,4)$, R^2;

b) $\vec{v}_1 = (3,2,0)$, $\vec{v}_2 = (4,2,-1)$, $\vec{v}_3 = (1,2,2)$, R^3;

c) $\vec{v}_1 = (1,0,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,2,1)$, $\vec{v}_3 = (5,4,4,5)$, $\vec{v}_4 = (0,0,1,1)$, R^4.

Rozwiązanie

Skorzystamy z faktu, że n wektorów tworzy bazę przestrzeni liniowej R^n wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy ich współrzędnych kartezjańskich jest różny od zera. Element leżący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy jest j-tą współrzędną i-tego wektora.

a) Jest to baza, bowiem $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$.

b) Z równości $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ wynika, że rozważane wektory nie tworzą bazy przestrzeni R^3.

c) Podobnie z równości $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ wynika, że dane wektory nie tworzą bazy przestrzeni R^4.

• Przykład 3.6

Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(2x, x + y, 3x - y, x - 2y) : x, y \in R\}$;

b) $V = \{(r - 2s - t, 2r + s - 3t, 3r + 4s - 5t) : r, s, t \in R\}$;

c) $V = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x + y = z - y\}$;

d) $V = \{p \in R_4[x] : p(1) + p(-1) = p'(0)\}$;

e) $V = \left\{A \in M_{3\times3} : A + A^T = O\right\}$;

f) $V = \operatorname{lin}\left\{1, \sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\right\}$, przy czym $V \subset C(R)$.

Rozwiązanie

a) Z zależności $(2x, x+y, 3x-y, x-2y) = x(2,1,3,1) + y(0,1,-1,-2)$ wynika, że wektory $\vec{v}_1 = (2,1,3,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,-2)$ generują przestrzeń V. Łatwo jest sprawdzić z definicji ich liniową niezależność. Oznacza to, że wektory te są bazą przestrzeni V, ponadto $\dim V = 2$.

b) Przestrzeń V jest generowana przez wektory $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (-2,1,4)$, $\vec{v}_3 = (-1,-3,-5)$. Wyznacznik macierzy ich współrzędnych jest równy 0, co oznacza ich liniową zależność. Rzeczywiście $\vec{v}_3 = -\frac{7}{5}\vec{v}_1 - \frac{1}{5}\vec{v}_2$. Wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ są natomiast liniowo niezależne i generują V. Jest to więc baza przestrzeni V, $\dim V = 2$.

c) Warunek $x + y = z - y$ zapiszemy w postaci $x = z - 2y$. Mamy więc

$$V = \{(z-2y, y, z, t) : y, z, t \in R\} = \text{lin}\,\{(-2,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

Liniowa niezależność otrzymanych trzech generatorów przestrzeni V wynika z tego, że $(z-2y, y, z, t) = (0,0,0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = z = t = 0$. Generatory te są zarazem bazą V i $\dim V = 3$.

d) Niech $p = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in V$. Z warunku $p(1) + p(-1) = p'(0)$ wynika równość $(a+b+c+d+e) + (a-b+c-d+e) = d$, stąd $d = 2a + 2c + 2e$. Zatem $p = a(x^4 + 2x) + bx^3 + c(x^2 + 2x) + e(2x+1)$. Generatorami przestrzeni V są więc wielomiany $p_1 = x^4 + 2x$, $p_2 = x^3$, $p_3 = x^2 + 2x$, $p_4 = 2x + 1$. Są one liniowo niezależne, bo $p \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = e = 0$. Przestrzeń V ma wymiar 4, a jedną z jej baz jest zbiór $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

e) Niech $A \in V$. Warunek $A + A^T = O$ oznacza, że A jest macierzą antysymetryczną i ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } a, b, c \in R.$$

Z tej postaci wynika, że $\dim V = 3$, gdyż bazę przestrzeni V stanowią macierze

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

f) Ponieważ $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, więc $V = \text{lin}\,\{\sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\}$. Korzystając teraz ze wzoru $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, mamy $V = \text{lin}\,\{\sin^2 x, \cos^2 x\}$. Funkcje $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ są liniowo niezależne. Niech bowiem $a\sin^2 x + b\cos^2 x = 0$ dla pewnych liczb $a, b \in R$. Wówczas przyjmując kolejno $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy $b = 0$, $a = 0$. Obie te funkcje tworzą więc bazę przestrzeni V i wymiar tej przestrzeni jest równy 2.

• Przykład 3.7

Podane zbiory wektorów uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $\{(2,1,0), (1,1,1)\}$, R^3; b) $\{(1,3,2,1), (5,-4,7,1)\}$, R^4;

c) $\{(x-1)^2, x^3 - 5x, 1 - 4x + 2x^2\}$, $R_3[x]$; d) $\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5\}$, $R_5[x]$.

Rozwiązanie

Skorzystamy tu z faktu, że dowolny układ n liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni liniowej wymiaru n stanowi bazę tej przestrzeni.

a) Wymiar przestrzeni R^3 jest równy 3. Zatem do wskazanych wektorów (liniowo niezależnych) wystarczy dobrać jeszcze jeden wektor liniowo niezależny z nimi. Z warunku

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

wynika, że może to być np. wektor $(0,0,1)$. Zauważmy jeszcze, że dowolny wektor $\vec{v} = (a, b, c)$, dla którego $a - 2b + c \neq 0$ także tworzy z danymi wektorami bazę przestrzeni R^3.

b) Przestrzeń R^4 jest czterowymiarowa. Dobierzemy więc jeszcze dwa wektory tak, aby odpowiedni wyznacznik był różny od zera. Ze względów rachunkowych najłatwiej jest je wybrać spośród wektorów bazy standardowej, np. $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ i wtedy rzeczywiście

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -19 \neq 0.$$

c) Ponieważ rozważana przestrzeń ma wymiar 4, a dane trzy wektory są liniowo niezależne, więc w bazie brakuje jednego wektora. Wektor ten wystarczy wybrać spośród wektorów innej bazy przestrzeni $R_3[x]$, najłatwiej spośród bazy standardowej. Będziemy więc próbowali dołączyć do naszego zbioru wektorów kolejne wektory bazy $\{1, x, x^2, x^3\}$ sprawdzając za każdym razem liniową niezależność całego zbioru. Oznaczmy $p_1 = (x-1)^2$, $p_2 = x^3 - 5x$, $p_3 = 1 - 4x + 2x^2$. Niech najpierw $p_4 = 1$ oraz niech $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 \equiv 0$ dla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$. Wówczas z warunku

$$\alpha_1 (x^2 - 2x + 1) + \alpha_2 (x^3 - 5x) + \alpha_3 (1 - 4x + 2x^2) + \alpha_4 \equiv 0,$$

wynika, że $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$, $-2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Stąd $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -2\alpha_3$, $\alpha_4 = \alpha_3$, $\alpha_3 \in R$. Układ funkcji p_1, p_2, p_3, p_4 jest liniowo zależny, bo np. $-2p_1 + p_3 + p_4 \equiv 0$ i nie jest bazą. Niech teraz $p_4 = x$. Z zależności

$$\alpha_1 (x^2 - 2x + 1) + \alpha_2 (x^3 - 5x) + \alpha_3 (1 - 4x + 2x^2) + \alpha_4 x \equiv 0$$

wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, bowiem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ostatecznie dany zbiór wektorów można uzupełnić do bazy przestrzeni $R_3[x]$ dodając np. wektor $p_4 = x$.

d) W tym przykładzie podobnie jak w przykładzie c) możemy brakujące trzy wektory dobrać spośród wektorów bazy standardowej $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ przestrzeni $R_5[x]$. Łatwo sprawdzić, że zbiór wektorów

$\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5, 1\}$ jest liniowo niezależny,

$\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5, 1, x\}$ jest liniowo zależny,

$\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5, 1, x^2\}$ jest liniowo niezależny,

$\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5, 1, x^2, x^3\}$ jest liniowo zależny,

$\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5, 1, x^2, x^4\}$ jest liniowo niezależny, więc ostatni z rozważanych zbiorów jest już szukaną bazą.

Uwaga. W przestrzeni $R_n[x]$ układ $n+1$ wielomianów zawierający po jednym wielomianie stopnia k dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ stanowi jej bazę. Dlatego w przykładzie d) od razu można było zauważyć, że w bazie brakuje wielomianów stopnia 0,2 oraz 4.

Zadania

o Zadanie 3.1

Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory $\operatorname{lin} A$ dla:

a) $A = \{(5,-1,4), (-10,2,-8)\} \subset \mathbf{R}^3$;

b) $A = \{x+3, x(x+3), x^2(x+3), x^3(x+3)\} \subset \mathbf{R}[x]$;

c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{3\times3}$;

d*) $A = \{(1,1,1,1,1\ldots), (0,2,2,2,2\ldots), (0,0,3,3,3,\ldots), \ldots\} \subset \mathbf{R}^\infty$.

o Zadanie 3.2

Wyznaczyć generatory podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 4x - y + 2z = 0\}$;

b) $V = \{(2r+s-t, t-u, r+3s+u, s+u, t-u) : r,s,t,u \in \mathbf{R}\}$;

c) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x - y = y - z = z - t\}$;

d) $V = \{p \in \mathbf{R}_3[x] : p(1) + p(2) = p(3) + p'(0)\}$.

o Zadanie 3.3

Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $B = \{(2,5), (3,1), (6,-7)\}$, $\mathbf{R}^2$;

b) $B = \{(2,3,-1), (1,-3,2)\}$, $\mathbf{R}^3$;

c) $B = \{(1,-1,4), (3,0,1), (2,1,-2)\}$, $\mathbf{R}^3$;

d) $B = \{2x+4, 3x-x^2, -2x^2+4x-4\}$, $\mathbf{R}_2[x]$.

o Zadanie 3.4

Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbf{V}$. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami przestrzeni $\mathbf{V}$:

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 3\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w}$; b) $\vec{u}, 2\vec{u} + \vec{v}, 3\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w}$.

o Zadanie 3.5

Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbf{R}$ podane zbiory wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni $\mathbf{R}^n$:

a) $B = \{(p-2, -p), (3, 2+p)\}$, $\mathbf{R}^2$;

b) $B = \{(1,3,p), (p,0,-p), (1,2,1)\}$, $\mathbf{R}^3$;

c) $B = \{(1,1,1,1), (1,p,2,3), (1,p^2,4,9), (1,p^3,8,27)\}$, $\mathbf{R}^4$;

d*) $B = \{(0,1,1,\ldots,1), (p,0,1,\ldots,1), (p,p,0,\ldots,1), \ldots, (p,p,p,\ldots,0)\}$, $\mathbf{R}^n$?

o Zadanie 3.6

Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(x+y+z, x-y, x-z, y-z) : x,y,z \in \mathbf{R}\}$;

b) $V = \{(a+2b+c, 3a-b+2c, 5a+3b+4c) : a,b,c \in \mathbf{R}\}$;

c) $\mathbf{V} = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : 2x - y = z - t = 0\}$;

d) $\mathbf{V} = \{p \in \mathbf{R}_4[x] : p(2x) = 4xp'(x) + p(0)\}$;

e) $\mathbf{V} = \{A = [a_{ij}] \in M_{3\times4} : a_{ij} = 0 \text{ dla } i \leqslant j\}$;

f) $\mathbf{V} = \operatorname{lin}\{1, e^x, e^{-x}, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$, przy czym $\mathbf{V} \subset C(\mathbf{R})$.

o Zadanie 3.7

Znaleźć bazy podanych przestrzeni liniowych zawierające wskazane zbiory wektorów:

a) $\{(-1,5,3)\}$, $\mathbf{R}^3$;

b) $\{(1,0,1,-1), (2,3,-1,2), (3,3,2,1)\}$, $\mathbf{R}^4$;

c) $\{2x-3, x^3+4x-1\}$, $\mathbf{R}_3[x]$;

d) $\{x^2+5, x^2-3x, x^4-2x^3\}$, $\mathbf{R}_4[x]$;

e*) $\{1, 1+x^2, 1+x^2+x^4, 1+x^2+x^4+x^6, \ldots\}$, $\mathbf{R}[x]$.

Odpowiedzi i wskazówki

3.1 a) prosta $x = 5t$, $y = -t$, $z = 4t$, gdzie $t \in R$; b) $\{p \in R_4[x] : p(-3) = 0\}$; c) zbiór macierzy antysymetrycznych stopnia 3; **d*)** zbiór wszystkich ciągów stałych od pewnego miejsca.

3.2 Przestrzenie są generowane np. przez wektory a) $(1,4,0)$, $(0,2,1)$; b) $(2,0,1,0,0)$, $(1,0,3,1,0)$, $(-1,1,0,0,1)$, $(0,-1,1,1,-1)$; c) $(1,0,-1,-2)$, $(0,1,2,3)$; d) x^3+18, x^2+4, $x+1$.

3.3 a), b), d) nie; c) tak.

3.4 a) nie; b) tak.

3.5 a) $p \in R \setminus \{-4, 1\}$; b) $p \in R \setminus \{0, 2\}$; c) $p \in R \setminus \{1,2,3\}$; d*) $p \in R \setminus \{0,-1\}$ lub $p = -1$ i n jest liczbą parzystą.

3.6 Jedną z baz jest np. a) $B = \{(1,1,1,0), (1,-1,0,1), (1,0,-1,-1)\}$; $\dim V = 3$; b) $B = \{(1,3,5), (2,-1,3)\}$; $\dim V = 2$; c) $B = \{(1,2,0,0), (0,0,1,1)\}$, $\dim V = 2$; d) $B = \{x^4, 1\}$; $\dim V = 2$; e) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim V = 3$; f) $B = \{1, e^x, e^{-x}\}$, $\dim V = 3$.

3.7 Można uzupełnić np. o wektory a) $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; b) $(1,0,0,0)$; c) $1, x^2$; d) $1, x^3$; e*) $x, x^3, x^5, x^7, \ldots$.

Czwarty tydzień

Współrzędne wektora w bazie (1.5).

Przykłady

- **Przykład 4.1**

Znaleźć z definicji współrzędne podanego wektora we wskazanej bazie odpowiedniej przestrzeni liniowej:

a) $\vec{v} = (-2,5,6) \in \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(2,1,0),(3,3,1)\}$;

b) $\vec{v} = (1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ $B = \{(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2),(0,0,0,1)\}$;

c) $p = 2x^2 + 3x \in R_2[x]$, $B = \{2+x, 3-x, x^2+4\}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Rozwiązanie

a) Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\vec{v}$ znajdziemy z warunku

$$(-2,5,6) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(2,1,0) + \alpha_3(3,3,1),$$

który prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \\ \alpha_3 = 6 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = 6$. Zatem współrzędnymi wektora $\vec{v}$ są $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [-6, -7, 6]$.

b) Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ wektora $\vec{v}$ spełniają zależność

$$(1,0,1,0) = \alpha_1(1,2,3,4) + \alpha_2(0,1,2,3) + \alpha_3(0,0,1,2) + \alpha_4(0,0,0,1).$$

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases},$$

z którego wynika, że $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = [1, -2, 2, -2]$.

c) Wektor p przedstawiamy w postaci

$$2x^2 + 3x = \alpha_1(2+x) + \alpha_2(3-x) + \alpha_3\left(x^2+4\right).$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równość

$$2x^2 + 3x = \alpha_3 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)x + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3.$$

Z równości wielomianów wynika równość współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x, co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Współrzędne wektora p w danej bazie są więc równe $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \left[\frac{1}{5}, -\frac{14}{5}, 2\right]$.

d) Podobnie jak poprzednio zachodzi równość

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

z której wynika, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = 3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

otrzymamy współrzędne rozważanego wektora $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 3\right]$.

- **Przykład 4.2**

Wyznaczyć współrzędne odpowiedniego wektora $\vec{v}$ w bazie B' pewnej przestrzeni liniowej mając podane jego współrzędne w bazie B:

a) $[0,1,-2]$, $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$, $B' = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_1 - \vec{b}_2, \vec{b}_1 - \vec{b}_3\right\}$;

b) $[2,0,1,1]$, $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$, $B' = \left\{-\vec{b}_1, \vec{b}_1 + \vec{b}_2, 3\vec{b}_3, \vec{b}_3 + \vec{b}_4\right\}$;

c) $[3,2,1]$, $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$;

d) $[1,2,\ldots,n]$, $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$, $B' = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n\right\}$.

Rozwiązanie

a) Z danych wynika, że $\vec{v} = 0 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 + (-2) \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$. Niech $\vec{b}_1' = \vec{b}_1$, $\vec{b}_2' = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{b}_3' = \vec{b}_1 - \vec{b}_3$. Wtedy $\vec{b}_1 = \vec{b}_1'$, $\vec{b}_2 = \vec{b}_1' - \vec{b}_2'$, $\vec{b}_3 = \vec{b}_1' - \vec{b}_3'$, a zatem $\vec{v} = \vec{b}_1' - \vec{b}_2' - 2\left(\vec{b}_1' - \vec{b}_3'\right) = -\vec{b}_1' - \vec{b}_2' + 2\vec{b}_3'$. Szukane współrzędne wynoszą więc $[-1,-1,2]$.

b) W tym przypadku $\vec{v} = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_3 + \vec{b}_4$. Przyjmijmy $\vec{b}_1' = -\vec{b}_1$, $\vec{b}_2' = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, $\vec{b}_3' = 3\vec{b}_3$, $\vec{b}_4' = \vec{b}_3 + \vec{b}_4$. Podobnie jak poprzednio wektory bazy B przedstawiamy jako kombinacje liniowe wektorów bazy B' otrzymując $\vec{b}_1 = -\vec{b}_1'$, $\vec{b}_2 = \vec{b}_1' + \vec{b}_2'$, $\vec{b}_3 = \frac{1}{3}\vec{b}_3'$, $\vec{b}_4 = -\frac{1}{3}\vec{b}_3' + \vec{b}_4'$. Stąd wynika, że $\vec{v} = -2\vec{b}_1' + \frac{1}{3}\vec{b}_3' - \frac{1}{3}\vec{b}_3' + \vec{b}_4' = -2\vec{b}_1' + \vec{b}_4'$. Otrzymujemy więc współrzędne $[-2,0,0,1]$.

c) Zauważmy, że $\vec{v} = 3(1,1,1) + 2(1,1,0) + (1,0,0) = (6,5,3)$. Nowe współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektor $\vec{v}$ znajdziemy więc rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 5 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases}.$$

Ostatecznie $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [4, 2, 1]$.

d) Niech $\vec{b}_1' = \vec{b}_1$, $\vec{b}_2' = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, ..., $\vec{b}_n' = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n$. Łatwo zauważyć, że $\vec{b}_1 = \vec{b}_1'$, $\vec{b}_2 = \vec{b}_2' - \vec{b}_1'$, ..., $\vec{b}_n = \vec{b}_n' - \vec{b}_{n-1}'$. Stąd wynika, że $\vec{v} = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3 + \ldots + n\vec{b}_n = \vec{b}_1' + 2\left(\vec{b}_2' - \vec{b}_1'\right) + 3\left(\vec{b}_3' - \vec{b}_2'\right) + \ldots + n\left(\vec{b}_n' - \vec{b}_{n-1}'\right) = -\vec{b}_1' - \vec{b}_2' - \ldots - \vec{b}_{n-1}' + n\vec{b}_n'$. Współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie B' mają postać $[-1, -1, \ldots, -1, n]$.

• Przykład 4.3

Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(x+y, 3x+y, x-y) : x, y \in R\}$, $\vec{v} = (2,8,4)$;

b) $V = \{(x,y,z,t) \in R^4 : 2x - y = z + 3t\}$, $\vec{v} = (1,1,-2,1)$;

c) $V = \{p \in R_2[x] : p'(3) = 0\}$, $q = 4x^2 - 24x - 3$;

d) $V = \left\{A \in M_{2\times 2} : A = A^T\right\}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że $V = \operatorname{lin}\{(1,3,1),(1,1,-1)\}$. Otrzymane generatory przestrzeni V są liniowo niezależne, stanowią zatem bazę tej przestrzeni. Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2]$ wektora $\vec{v}$ wyznaczymy z warunku

$$(2,8,4) = \alpha_1(1,3,1) + \alpha_2(1,1,-1).$$

Stąd $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, $3\alpha_1 + \alpha_2 = 8$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 4$, a więc $[\alpha_1, \alpha_2] = [3, -1]$.

b) Znajdziemy najpierw generatory przestrzeni V. Mamy

$$\begin{aligned} V &= \left\{(x,y,z,t) \in R^4 : y = 2x - z - 3t\right\} \\ &= \{(x, 2x - z - 3t, z, t) : x, z, t \in R\} \\ &= \operatorname{lin}\{(1,2,0,0),(0,-1,1,0),(0,-3,0,1)\}. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że generatory te są liniowo niezależne. Przyjmując je za bazę przestrzeni V znajdujemy współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\vec{v}$. Z definicji wynika równość

$$(1,4,-2,1) = \alpha_1(1,2,0,0) + \alpha_2(0,-1,1,0) + \alpha_3(0,-3,0,1).$$

Stąd $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [1, -2, 1]$.

c) Niech $p \in V$. Wówczas $p(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in R$, przy czym $p'(3) = 2a \cdot 3 + b = 0$. Zatem $b = -6a$, a więc

$$p(x) = ax^2 - 6ax + c = a\left(x^2 - 6x\right) + c.$$

Przestrzeń V jest zatem generowana przez wektory $p_1 = x^2 - 6x$, $p_2 = 1$, które są jej bazą. Współrzędne wektora $q = 4x^2 - 24x - 3$ w tej bazie są równe $[4, -3]$.

d) Mamy

$$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Również w tym przykładzie znalezione generatory tworzą bazę rozważanej przestrzeni. Wektor B ma w tej bazie współrzędne $[2, 3, -1]$.

• Przykład 4.4

Zbadać, obliczając odpowiednie wyznaczniki, czy podane układy wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni liniowych.

a) $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (2,1,0)$, $\vec{w} = (3,3,1)$, $V = R^3$;

b) $p = 2 + x^2$, $q = 1 - x$, $r = 1 + x + x^2$, $V = R_2[x]$;

c) $p = x^3 + 2$, $q = x + 1$, $r = 2x^2 + x + 1$, $s = x^3 + x^2 + x + 2$, $V = R_3[x]$;

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $V = M_{2\times 2}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z faktu mówiącego, że zbiór n wektorów stanowi bazę przestrzeni liniowej wymiaru $n \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy współrzędnych tych wektorów w pewnej bazie przestrzeni V jest różny od zera. We wszystkich przykładach będziemy wyznaczać współrzędne w bazach standardowych.

a) Z warunku $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ wynika, że jest to baza przestrzeni R^3.

b) W bazie $\left\{1, x, x^2\right\}$ mamy $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, więc podane wektory nie tworzą bazy.

c) W bazie $\left\{x^3, x^2, x, 1\right\}$ obliczamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{w_4 - w_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{w_3 - 2w_4}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Stąd wniosek, że rozważane wektory tworzą bazę.

d) W tym przykładzie wystarczy obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{w_4 - 3w_1}{\overset{w_3 - w_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że podane wektory nie tworzą bazy.

• Przykład 4.5

Wyznaczyć takie bazy odpowiednich przestrzeni liniowych, w których podane wektory mają wskazane współrzędne:

a) $\vec{v} = (3, -5) \in \mathbf{R}^2$, $[5, -2]$;

b) $\vec{v} = (1, 0, 1, 0) \in \mathbf{R}^4$, $[1, -2, 4, -1]$;

c) $\vec{v} = (1, 2, 3, -6) \in \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$, $[1, 0, 0]$;

d) $p = x^2 - 2x \in \mathbf{R}_2[x]$, $[-1, 3, 1]$.

Rozwiązanie

Baz takich jest na ogół nieskończenie wiele. W każdym przypadku podamy po jednym przykładzie bazy.

a) Korzystając z bazy standardowej otrzymamy

$$(3, -5) = 3 \cdot (1, 0) + (-5) \cdot (0, 1) = 5\left(\frac{3}{5}, 0\right) + (-2)\left(0, \frac{5}{2}\right).$$

Szukaną bazą jest więc np. $B = \left\{\left(\frac{3}{5}, 0\right), \left(0, \frac{5}{2}\right)\right\}$.

b) Z równości

$$\begin{aligned}(1, 0, 1, 0) &= (1, 1, 1, 1) - (0, 1, 1, 1) + (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 0, 1) \\ &= (1, 1, 1, 1) - 2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + 4\left(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

wynika, że za bazę można przyjąć np.

$$B = \left\{(1, 1, 1, 1), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), (0, 0, 0, 1)\right\}.$$

c) Zauważmy, że

$$V = \{(x, y, z, -x - y - z) : x, y, z \in \mathbf{R}\} = \text{lin}\,\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

Znalezione generatory przestrzeni $\mathbf{V}$ są jednocześnie jej bazą. Niech $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ będzie szukaną bazą. Wtedy oczywiście $\vec{b}_1 = (1, 2, 3, -6)$. Stąd wyciągamy wniosek, że wystarczy wektor $\vec{b}_1$ dowolnie uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbf{V}$. Najłatwiej jest to zrobić wybierając wektory ze znanej już bazy. I tak przyjmując $\vec{b}_2 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{b}_3 = (0, 1, 0, -1)$ otrzymamy trzy wektory liniowo niezależne $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, które będą szukaną bazą.

d) Zachodzą równości

$$p = (-1)(2x) + x^2 = (-1)(2x) + 3\left(\frac{x^2}{3} + 1\right) + 1(-3).$$

Po sprawdzeniu liniowej niezależności wektorów $2x$, $\frac{x^2}{3} + 1$, -3 można je przyjąć za szukaną bazę.

• Przykład 4.6

Napisać macierze przejścia z bazy B do bazy B' odpowiednich przestrzeni liniowych.

a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$, $B = \{(3, 1), (2, 1)\}$, $B' = \{(1, -1), (2, 3)\}$;

b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(3, 3, 4), (-1, 2, 2), (1, 1, 1)\}$;

c) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[x]$, $B = \{x + 1, x + 2, x^2 + 1\}$, $B' = \{x + 3, x + 4, x^2\}$;

d) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_3[x]$, $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, $B' = \{2x^2 - 3, x^3 + x, 4 - x, 1 + x + x^2\}$.

Rozwiązanie

We wszystkich przypadkach musimy wyznaczyć współrzędne kolejnych wektorów bazy B' w bazie B i napisać je w kolejnych kolumnach macierzy przejścia P.

a) Łatwy rachunek prowadzi do zależności $(1, -1) = 3(3, 1) - 4(2, 1)$, $(2, 3) = -4(3, 1) + 7(2, 1)$. Macierz przejścia P ma zatem postać

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

b) Bez żadnych obliczeń można napisać, że

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Niech $p = x + 1$, $q = x + 2$, $r = x^2 + 1$. Wówczas $1 = q - p$, $x = p - 1 = 2p - q$. Zatem $x + 3 = 2p - q + 3(q - p) = -p + 2q$, $x + 4 = 2p - q + 4(q - p) = -2p + 3q$. Ponadto $x^2 = r - 1 = r - (q - p) = r - q + p$. Macierz przejścia P ma więc postać

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) B jest bazą standardową, więc macierz przejścia można napisać od razu

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

• Przykład 4.7

Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w podanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych wykorzystując macierze przejścia z baz standardowych do baz danych:

a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$, $\vec{v} = (2, -1)$, $B' = \{(5, 3), (-2, 7)\}$;

b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $B' = \{(1, 1, 0), (2, 1, 3), (0, 2, 1)\}$;

c) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_2[x]$, $p = x^2 + x + 2$, $B' = \{x^2 - 1, x^2 + 1, 2 - 2x\}$;

d) $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{2\times 2}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy fakt mówiący, że współrzędne $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ wektora $\vec{v}$ w bazie B oraz współrzędne $[\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n]$ tego wektora w bazie B' związane są zależnością

$$P \cdot \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

gdzie P jest macierzą przejścia z bazy B do bazy B'. Wyznaczanie współrzędnych sprowadza się więc do rozwiązania odpowiedniego układu Cramera. W przykładach za bazę B będziemy przyjmować bazę standardową odpowiedniej przestrzeni.

a) Współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2']$ wektora $\vec{v}$ spełniają układ równań

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że $\alpha_1' = \frac{12}{41}$, $\alpha_2' = -\frac{11}{41}$.

b) Współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$ wektora $\vec{v}$ wyznaczymy z zależności

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po zastosowaniu np. metody eliminacji Gaussa otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right],$$

więc $\alpha_1' = \frac{2}{7}$, $\alpha_2' = -\frac{1}{7}$, $\alpha_3' = \frac{3}{7}$.

c) Układ równań, który spełniają współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$ wektora p rozwiążemy wykorzystując macierz P^{-1}. Mamy

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

d) Współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4']$ wektora $\boldsymbol{A}$ znajdziemy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu tego układu np. metodą eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

otrzymamy $\alpha_1' = 1$, $\alpha_2' = -2$, $\alpha_3' = 1$, $\alpha_4' = 1$.

• Przykład 4.8

Znaleźć współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie $\left\{\vec{b}_1, 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_1 + \vec{b}_3, 2\vec{b}_1 + \vec{b}_4\right\}$, jeżeli w bazie $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$ ma on współrzędne $[1, 2, 3, 4]$. Wykorzystać macierz przejścia z bazy do bazy.

Rozwiązanie

W przestrzeni $\text{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}$ przyjmujemy, że

$$B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right\}, \quad B' = \left\{\vec{b}_1, 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_1 + \vec{b}_3, 2\vec{b}_1 + \vec{b}_4\right\}.$$

Szukane współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4']$ wektora $\vec{v}$ wyznaczymy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1' = -14$, $\alpha_2' = 2$, $\alpha_3' = 3$, $\alpha_4' = 4$.

Zadania

○ Zadanie 4.1

Znaleźć z definicji współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $\vec{v} = (1,4) \in \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,5),(1,6)\}$;

b) $\vec{v} = (8,1,7,5) \in \mathbb{R}^4$, $B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;

c) $p = x^2 - 3x + 3 \in \mathbb{R}_2[x]$, $B = \left\{x^2 + 3x - 1, -x^2 + x + 3, 2x^2 - x - 2\right\}$;

d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{2\times 2}$, $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

○ Zadanie 4.2

Wyznaczyć współrzędne wektora $\vec{v}$ w podanej bazie B' pewnej przestrzeni liniowej mając dane jego współrzędne w bazie B:

a) $[4, -3]$, $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$, $B' = \left\{2\vec{b}_1 - \vec{b}_2, \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2\right\}$;

b) $[1, 1, -2]$, $B = \left\{x, x+1, x^2+1\right\}$, $B' = \left\{1, 1+x^2, x+x^2\right\}$;

c*) $[1, 2, \ldots, n]$, $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right\}$, $B' = \left\{\vec{b}_1 - \vec{b}_2, \vec{b}_2 - \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_{n-1} - \vec{b}_n, \vec{b}_n\right\}$.

○ Zadanie 4.3

Obliczyć współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(x - 5y, x + y, 2x + y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\vec{v} = (-2, 4, 7, 4)$;

b) $V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y = y - 2z = 0\right\}$, $\vec{v} = (8, 4, 2, 9)$;

c) $V = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(0)\}$, $q = 2x^3 - x^2 - x + 5$;

d) $V = \{\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \boldsymbol{M}_{2\times 2} : a_{11} + a_{22} = 0\}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 4.4

Zbadać, obliczając odpowiednie wyznaczniki, czy podane zbiory wektorów są bazami podanych przestrzeni liniowych:

a) $\vec{u} = (2,4,5)$, $\vec{v} = (1,-1,1)$, $\vec{w} = (-1,7,2)$, $V = \mathbb{R}^3$;

b) $p = x^3 + x^2 + x - 1$, $q = x^3 + x^2 - x - 1$, $r = x^3 - x^2 - x - 1$,
$s = x^3 + x^2 + x + 1$, $V = \mathbb{R}_3[x]$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $V = M_{2\times 2}$.

○ **Zadanie 4.5**

Znaleźć takie bazy odpowiednich przestrzeni liniowych, w których wskazane wektory mają podane współrzędne:

a) $\vec{v} = (2,-1,3) \in \mathbb{R}^3$, $[1,0,1]$;

b) $\vec{v} = (1,1,1,1) \in V$, $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t, x - 3y + 2z = 0\}$, $[2,2]$;

c*) $\vec{v} = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$, $[1,1,\ldots,1]$.

○ **Zadanie 4.6**

Napisać macierze przejścia z bazy B do bazy B' odpowiedniej przestrzeni liniowej:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $B' = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$;

b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $B = \{x^2, x, 1\}$, $B' = \{3x^2 - x, 2x^2 + x - 1, x^2 + 5x - 6\}$.

○ **Zadanie 4.7**

Wykorzystując macierze przejścia z baz standardowych odpowiednich przestrzeni liniowych do baz danych znaleźć współrzędne podanych wektorów w tych bazach:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (1,1)$, $B' = \{(4,1),(-2,3)\}$;

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (2,-4,7)$, $B' = \{(1,-2,3),(2,1,4),(-3,1,-6)\}$;

c) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $p = 2x^3 - x^2 + 1$,
$B' = \{2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, 2x^3 + x + 1, x^2 + 2x + 1, 2x^2 + x + 1\}$.

○ **Zadanie 4.8**

Wektor $\vec{v}$ ma w bazie $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ współrzędne $[0,1,-2]$. Stosując macierz przejścia z bazy do bazy obliczyć współrzędne tego wektora w bazie:

a) $\{\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \vec{b}_1 + \vec{b}_3\}$;

b) $\{2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3, 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 5\vec{b}_3, \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3\}$.

Odpowiedzi i wskazówki

4.1 a) $[2,-1]$; **b)** $[7,-6,2,5]$; **c)** $[-1,2,2]$; **d)** $[1,0,1,0]$.

4.2 a) $\left[\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right]$; **b)** $[3,-4,2]$; **c*)** $\left[1,3,6,\ldots,\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

4.3 Współrzędne **a)** $[3,1]$ w bazie $\{(1,1,2,1),(-5,1,1,1)\}$;
b) $[2,9]$ w bazie $\{(4,2,1,0),(0,0,0,1)\}$; **c)** $[2,-1,5]$ w bazie $\{x^3 - x, x^2 - x, 1\}$;

d) $[3,1,-2]$ w bazie $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

4.4 a) nie; **b)** tak; **c)** nie.

4.5 Jedną z baz jest np. **a)** $\{(2,-1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$; **b)** $\left\{\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},0,\frac{1}{2}\right)\right\}$;
c*) $\{(1,1,1,\ldots,1),(0,-1,0,\ldots,0),(0,0,-1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,-1)\}$.

4.6 a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

4.7 a) $\left[\frac{5}{14},\frac{3}{14}\right]$; **b)** $[3,1,1]$; **c)** $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

4.8 a) $\left[\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right]$; **b)** $[2,-1,-1]$.

Układy równań liniowych

Piąty tydzień

Rząd macierzy (2.1).

Przykłady

- **Przykład 5.1**

Znaleźć z definicji rzędy podanych macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień niezerowego minora tej macierzy, czyli wyznacznika obliczonego z wybranych wierszy i kolumn tej macierzy.

a) Dana macierz ma wymiar 3×4, a więc jej rząd może być równy $0, 1, 2$ lub 3. Wartości 0 i 1 można od razu wykluczyć, gdyż łatwo wskazać niezerowy minor stopnia 2, np. minor $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$ leżący w lewym górnym rogu macierzy. Należy teraz poszukać niezerowego minora stopnia 3. Obliczamy wszystkie możliwe minory stopnia 3. Mamy

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 9 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że nie istnieje niezerowy minor stopnia 3, więc rząd danej macierzy jest równy 2.

b) Wszystkie minory danej macierzy zawierające parzyste wiersze lub parzyste kolumny są zerami. Minorem najwyższego stopnia nie zawierającym tych wierszy ani kolumn jest

minor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że rząd danej macierzy jest mniejszy od 3. Wśród minorów stopnia 2 istnieje minor niezerowy, np. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Rząd danej macierzy jest więc równy 2.

- **Przykład 5.2**

Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy obliczyć ich rzędy:

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Wykorzystamy twierdzenie mówiące, że bez zmiany rzędu macierzy można w niej zamieniać wiersze (kolumny), mnożyć ustalony wiersz (kolumnę) przez stałą różną od zera oraz do ustalonego wiersza (kolumny) dodać inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez stałą. Ponadto rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli skreślimy w niej wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer lub też jeden z dwóch wierszy (kolumn) równych lub proporcjonalnych. Również transponowanie macierzy nie wpływa na jej rząd. Badaną macierz będziemy więc przekształcać bez zmiany jej rzędu do postaci, z której ten rząd można łatwo odczytać, np. z postaci trójkątnej lub blokowej, z dużą liczbą zer oraz jak najmniejszego wymiaru.

a) W tym przypadku zastosujemy fragment algorytmu Gaussa otrzymując:

$$\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xlongequal[w_4 - 2w_1]{\substack{w_2 - 4w_1 \\ w_3 - w_1}} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xlongequal[\cancel{w_4} = \frac{2}{7}w_2]{\cancel{w_3} = \frac{4}{7}w_2} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 7 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2.$$

Zauważmy, że wynik uzyskaliśmy szybciej doprowadzając pierwszy wiersz do postaci $[1\,0\,0]$ przez wykonanie operacji $k_2 - 3k_1$.

b) Wykorzystamy prawidłowość w ułożeniu elementów macierzy. Łatwo zauważyć, że wiersze macierzy złożone są z kolejnych liczb naturalnych, przy czym w wierszach nieparzystych tworzą one ciągi rosnące, a w parzystych malejące. Dlatego też sumy sąsiednich wierszy są ciągami stałymi. Dzięki temu można szybko obliczyć, że

$$\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \xlongequal[w_2 + w_1]{\substack{w_4 + w_3 \\ w_3 + w_2}} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\cancel{w_4} = 3w_2]{\cancel{w_3} = 2w_2} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 10 & 10 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2.$$

- **Przykład 5.3**

Sprowadzając podane macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

$$
\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}.
$$

Rozwiązanie

Macierz nazywamy schodkową, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków. Dokonując podanych niżej operacji elementarnych na wierszach macierzy otrzymamy:

a)

$$
\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xlongequal[w_5 + w_1]{w_3 - w_1} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xlongequal[w_4 - w_2]{w_3 - w_2} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}
$$

$$
\xlongequal{w_5 - w_4} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} \end{bmatrix} = 4.
$$

b)

$$
\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xlongequal[\substack{w_4 - 2w_1 \\ w_6 + w_1}]{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 + w_1}} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xlongequal[\substack{w_5 - w_2 \\ w_6 + w_2}]{\substack{w_3 - 2w_2 \\ w_4 + w_2}} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}
$$

$$
\xlongequal{w_6 - 3w_5} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.
$$

• Przykład 5.4

Stosując algorytm Chió obliczyć rzędy podanych macierzy:

$$
\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}.
$$

Rozwiązanie

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \geqslant 2$ oraz niech $a_{11} \neq 0$. Postępując zgodnie z algorytmem Chió obliczania rzędu macierzy

$$
\operatorname{rz} \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] = 1 + \operatorname{rz} \begin{bmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix},
$$

gdzie $a'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ dla $2 \leqslant i \leqslant m$, $2 \leqslant j \leqslant n$, otrzymamy

a)

$$
\operatorname{rz} \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] = 1 + \operatorname{rz} \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ -3 & 0 \end{array} \right] = 2 + \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.
$$

b)

$$
\operatorname{rz} \left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 7 & 13 \end{array} \right] = 1 + \operatorname{rz} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & -9 & 1 & 13 \\ \hline -4 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & -9 & -3 & 15 \end{array} \right] = 2 + \operatorname{rz} \left[\begin{array}{c|cc} -36 & 0 & 54 \\ \hline -36 & 0 & 54 \end{array} \right]
$$

$$
= 3 + \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.
$$

• Przykład 5.5

Wyznaczyć rzędy podanych macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$
\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}.
$$

Rozwiązanie

a) Minorem najwyższego stopnia dla danej macierzy jest jej wyznacznik równy

$$
\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{vmatrix} = 2p(p-2).
$$

Rząd tej macierzy jest więc równy 3 wtedy, gdy $2p(p-2) \neq 0$, tzn. dla $p \neq 0$ i $p \neq 2$. Dla $p = 0$ mamy

$$
\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal{k_2 \equiv 0} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2.
$$

Podobnie dla $p = 2$ mamy

$$
\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1}
$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \overset{w_3 = w_2}{=\!=\!=} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2.$$

b) Łatwo sprawdzić, że wyznacznik danej macierzy jest równy 0 dla każdego p. To oznacza, że rząd tej macierzy nie jest nigdy równy 3. Zbadajmy teraz jeden z minorów stopnia 2, np. minor

$$\begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(p-1).$$

Z postaci tego wyznacznika wynika, że dla $p \neq 1$ rząd danej macierzy jest równy 2. Dla $p = 1$ znajdujemy w macierzy inny niezerowy minor stopnia 2, np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ostatecznie dla każdej wartości $p \in \boldsymbol{R}$ rząd danej macierzy jest równy 2.

c) Obliczmy jeden z minorów najwyższego stopnia np. minor

$$\begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ 1 & 2-p & 1 \\ 1 & 2 & 1-p \end{vmatrix} = p^2(4-p).$$

Jeżeli ten minor jest niezerowy, tzn. jeżeli $p \neq 0$ i $p \neq 4$, to dana macierz ma rząd 3. Przypadki $p = 0$ i $p = 4$ zbadamy osobno. Dla $p = 0$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{k_4 = 0}{\overset{\substack{k_2 = 2k_1 \\ k_3 = k_1}}{=\!=\!=\!=}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Natomiast dla $p = 4$ otrzymamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \overset{w_3 - w_1}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \overset{w_3 + 4w_2}{=\!=\!=\!=} 3.$$

- **Przykład 5.6**

Zbadać liniową niezależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych analizując rzędy macierzy ich współrzędnych w odpowiednich bazach:

a) $(2,1,3,5), (1,4,-1,2), (3,3,1,1)$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}^4$;

b) $(1,-1,2,1,1,1), (2,2,1,1,-1,,3), (5,-1,7,4,2,6)$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}^6$;

c) $x^3+2x-1, 3x^2+x+1, 2x^3+3x^2+5x-1, x^3+3x^2+3x$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}_3[x]$;

d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\boldsymbol{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że układ $k \geqslant 1$ wektorów należących do pewnej przestrzeni liniowej jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz współrzędnych tych wektorów w ustalonej bazie tej przestrzeni ma rząd równy k.

a) W bazie standardowej przestrzeni $\boldsymbol{R}^4$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{w_3 - 3w_2}{\overset{w_1 - 2w_2}{=\!=\!=\!=}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -7 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -9 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{matrix} \end{bmatrix} = 3,$$

więc rozważane wektory są liniowo niezależne.

b) W bazie standardowej przestrzeni $\boldsymbol{R}^6$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 7 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{w_3 - 5w_1}{\overset{w_2 - 2w_1}{=\!=\!=\!=}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 & -1 & -3 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2,$$

co oznacza liniową zależność danych wektorów.

c) W bazie $\{x^3, x^2, x, 1\}$ przestrzeni $\boldsymbol{R}_3[x]$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{w_4 - w_1}{\overset{w_3 - 2w_1}{=\!=\!=\!=}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2,$$

więc rozważane wektory są liniowo zależne.

d) W bazie $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ przestrzeni $\boldsymbol{M}_{2\times 2}$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{w_2 + w_1}{=\!=\!=\!=} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} = 3,$$

co świadczy o liniowej niezależności badanych wektorów.

- **Przykład 5.7**

Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ z przestrzeni liniowej $\boldsymbol{V}$ są liniowo niezależne. Zbadać przy pomocy rzędów odpowiednich macierzy liniową niezależność podanych wektorów:

a) $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} - \vec{x}$, $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} + 3\vec{x}$, $4\vec{u} + \vec{v} + 5\vec{w} + \vec{x}$;

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{v} - 3\vec{w}$, $\vec{w} + 6\vec{x}$, $\vec{u} - 4\vec{x}$.

Rozwiązanie

Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\operatorname{lin}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\} \subset \boldsymbol{V}$. Aby stwierdzić liniową niezależność badanych wektorów wystarczy przekonać się, czy rząd macierzy ich współrzędnych w bazie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ jest równy ich ilości.

a) Mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3-4w_1]{w_2-2w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 2,$$

więc wektory są liniowo zależne.

b) Dla drugiego układu wektorów mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xlongequal{w_4-w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xlongequal{w_4+2w_2} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} = 4.$$

Rozważane wektory są więc liniowo niezależne.

• Przykład 5.8

Określić wymiary i wyznaczyć bazy podprzestrzeni liniowych generowanych przez podane zbiory wektorów ze wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $(3,2,0), (4,2,-1), (1,0,-1), (1,2,2) (2,2,1)$, $\boldsymbol{R}^3$;

b) wektory kolumnowe macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{R}^4$;

c) $x^2+2x+1,\ 2x^2+x-3,\ 4x^2-3x-1,\ x^2-7x-6$, $\boldsymbol{R}_2[x]$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{2\times 2}$.

Rozwiązanie

Zastosujemy twierdzenie mówiące, że wymiar podprzestrzeni liniowej generowanej przez zbiór wektorów należących do pewnej przestrzeni liniowej wymiaru skończonego jest równy rzędowi macierzy współrzędnych tych wektorów w dowolnej bazie tej przestrzeni. Znając już wymiar podprzestrzeni łatwo jest wskazać jej bazę wybierając spośród generatorów te wektory, z których powstał niezerowy minor określający rząd.

a) W bazie standardowej przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3+w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3=\frac{3}{2}w_2} 2,$$

więc wymiar podprzestrzeni jest równy 2, a jej bazą są wektory $(3,2,0), (4,2,-1)$. Warto tu zauważyć, że dowolne dwa generatory z podanego zbioru można tu przyjąć za bazę.

b) W bazie standardowej przestrzeni $\boldsymbol{R}^4$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3+w_1]{w_2-3w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal{w_2+2w_3}$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal[w_4-2w_2]{\substack{w_1+w_2 \\ w_3+w_2}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Rozważana przestrzeń ma zatem wymiar 4. Niezerowy minor stopnia 4 wskazujący rząd został znaleziony jedynie przez operacje elementarne na wierszach macierzy, bez ruszania jej kolumn. To pozwala nam wysunąć wniosek, że np. cztery ostatnie wektory kolumnowe są liniowo niezależne i tworzą bazę badanej podprzestrzeni.

c) W bazie $\{x^2, x, 1\}$ przestrzeni $R_2[x]$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -9 \\ 0 & -5 & -5 & -7 \end{bmatrix} = 3.$$

Rozważana podprzestrzeń jest wymiaru 3, jej bazę tworzą np. trzy pierwsze wektory.

d) W bazie $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ przestrzeni $M_{2\times 2}$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal[w_4-w_1]{\substack{w_2+w_1 \\ w_3-2w_1}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xlongequal{k_3-k_2} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xlongequal{k_3=2k_1} 3.$$

Niezerowy minor stopnia 3 został utworzony z pierwszego, drugiego i czwartego wektora, zatem odpowiadające im macierze stanowią bazę badanej podprzestrzeni. Ma ona wymiar 3.

• Przykład 5.9

Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ z przestrzeni liniowej V są liniowo niezależne. Określić wymiary podprzestrzeni liniowych generowanych przez podane zbiory wektorów w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $2p\vec{u}+3p\vec{v}+5p\vec{w},\ \vec{u}+p\vec{v}+(1+p)\vec{w},\ p\vec{u}+\vec{v}+(1+p)\vec{w}$;

b) $3\vec{u}-p\vec{v}+3\vec{w}-p\vec{x},\ \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x},\ 4\vec{u}+4\vec{v}+p\vec{w}+p\vec{x}$.

Rozwiązanie

a) Przeprowadzimy analizę rzędu macierzy współrzędnych danych wektorów w bazie $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ podprzestrzeni $\operatorname{lin}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \subset V$ w zależności od parametru p. Macierz ta ma postać

$$\begin{bmatrix} 2p & 1 & p \\ 3p & p & 1 \\ 5p & 1+p & 1+p \end{bmatrix}.$$

Jej wyznacznik jest równy 0 dla każdego p. Dla $p \neq -1$ i $p \neq 1$ wyróżniony wyżej minor stopnia 2 jest niezerowy i rząd macierzy jest równy 2. Dla $p=-1$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2p & 1 & p \\ 3p & p & 1 \\ 5p & 1+p & 1+p \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

dla $p = 1$ podobnie

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2p & 1 & p \\ 3p & p & 1 \\ 5p & 1+p & 1+p \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & 2 \end{matrix} & 2 \end{bmatrix} = 2.$$

Stąd wniosek, że podane wektory generują podprzestrzeń wymiaru 2 dla każdej wartości parametru p.

b) Tym razem przeanalizujemy macierz współrzędnych danych wektorów w bazie $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ podprzestrzeni lin $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\} \subset V$, tzn. macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -p & 1 & 4 \\ 3 & 1 & p \\ -p & 1 & p \end{bmatrix}.$$

Bez obliczeń łatwo zauważyć, że dla $p = -3$ pierwsze dwie kolumny są proporcjonalne i rząd macierzy jest równy 2. Podobnie dla $p = 4$ dwie ostatnie kolumny są proporcjonalne i rząd całej macierzy też jest równy 2. Dla $p \neq -3$ i $p \neq 4$ wyznacznik stopnia 3 obliczony z pierwszych trzech wierszy jest jest różny od zera, więc rząd macierzy jest równy 3. To oznacza, że dane wektory generują podprzestrzeń wymiaru 3 dla $p \neq -3$ i $p \neq 4$. Dla $p = -3$ lub $p = 4$ podprzestrzeń ta ma wymiar 2.

Zadania

○ Zadanie 5.1

Znaleźć z definicji rzędy podanych macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 5.2

Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy obliczyć ich rzędy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 45 & 15 & 30 & -60 & 75 \\ 5 & 3 & 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; f*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 5.3

Sprowadzając podane macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 13 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 14 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru 5×7, gdzie $a_{ij} = i + j$ dla $1 \leqslant i \leqslant 5$, $1 \leqslant j \leqslant 7$;

d) $B = [b_{ij}]$ jest macierzą wymiaru 6×6, gdzie $b_{ij} = i^2 j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant 6$.

○ Zadanie 5.4

Stosując algorytm Chió obliczyć rzędy podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 8 & -1 & 8 & 7 & 17 & 4 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 13 & 5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 5.5

Znaleźć rzędy podanych macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 3 & p & 3 \\ 2p & 2 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & p & 2 \\ 1 & -2 & 7+p \\ 1 & 2+2p & -3-p \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & p & p & p \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} p & -p & 1 & -p \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & p & 3 & p \\ p & 1 & p & 1 \end{bmatrix}$; f*) $\begin{bmatrix} p^2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2|p| & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2|p| & 2^p & 4 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 5.6

Zbadać liniową niezależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych analizując rzędy macierzy ich współrzędnych w odpowiednich bazach:

a) $(56,94,16), (48,67,81), (29,82,53), (74,15,38)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$;

b) $(1,0,1,1,1), (0,1,0,1,1), (0,0,1,0,1), (1,1,1,0,0)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^5$;

c) $x^4 - x^2 + x, x^4 + 2x^3 + x^2 + 1, x^3 + x + 1$ w przestrzeni $\mathbb{R}_4[x]$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $M_{2\times 2}$.

○ **Zadanie 5.7**

Wektory $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ z przestrzeni liniowej V są liniowo niezależne. Zbadać, przy pomocy rzędów odpowiednich macierzy, liniową niezależność podanych wektorów:

a) $\vec{w} - \vec{x} + \vec{z},\ \vec{w} + 2\vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z},\ 4\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z}$;

b) $7\vec{w} + 9\vec{x} + 12\vec{y} + 8\vec{z},\ 21\vec{w} - 9\vec{x} + 24\vec{y} + 24\vec{z},\ -7\vec{w} + 27\vec{x} - 8\vec{z}$.

○ **Zadanie 5.8**

Określić wymiary i wyznaczyć bazy podprzestrzeni liniowych generowanych przez podane zbiory wektorów ze wskazanych przestrzeni liniowych:

a) $(2,1,1), (-1,1,2), (3,3,4), (5,-2,-5), (0,1,-1)$, $\mathbb{R}^3$;

b) wektory wierszowe macierzy $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^4$;

c) $x^3 + 2x^2 + x,\ x^2 - x + 1,\ x^3 + x^2,\ x^3 - x,\ 2x^2 - 1$, $\mathbb{R}_3[x]$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $M_{3\times 2}$.

○ **Zadanie 5.9**

Wektory $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ z przestrzeni liniowej V są liniowo niezależne. Określić wymiary podprzestrzeni liniowych generowanych przez podane zbiory wektorów w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $2p\vec{w} - 2\vec{x} + p\vec{y} + 3\vec{z}, 4\vec{w} - p\vec{x} + 2\vec{y} + (p+1)\vec{z}, 2\vec{w} - \vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z}$;

b) $\vec{x} - \vec{y} + p\vec{z}, p\vec{x} - p^2\vec{y} + \vec{z}, p^2\vec{x} - p\vec{y} + p\vec{z}$.

Odpowiedzi i wskazówki

5.1 a) 1; **b)** 3; **c)** 2; **d)** 3; **e)** 4; **f)** 4.

5.2 a) 3; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 2; **e)** 4; **f*)** 6.

5.3 a) 3; **b)** 2; **c)** 2; **d)** 1.

5.4 a) 4; **b)** 2; **c)** 3.

5.5 a) dla $p = -3$ lub $p = 1$ lub $p = 2$ rząd jest równy 2, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 3; **b)** rząd jest równy 2 dla każdego $p \in \mathbb{R}$; **c)** dla $p = 2$ rząd jest równy 2, dla $p \neq 2$ rząd jest równy 3; **d)** dla $p = 1$ rząd jest równy 1, dla $p \neq 1$ rząd jest równy 3; **e)** dla $p = 1$ rząd jest równy 2, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 3; **f*)** dla $p = 2$ rząd jest równy 1, dla $p = -2$ rząd jest równy 3, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 4.

5.6 a), d) liniowo zależne; **b), c)** liniowo niezależne.

5.7 a) liniowo niezależne; **b)** liniowo zależne.

5.8 a) wymiar 3, baza $\{(2,1,1), (-1,1,2), (0,1,-1)\}$;
b) wymiar 2, baza $\{(1,-1,1,-1), (1,2,0,1)\}$;
c) wymiar 4, baza $\{x^3 + 2x^2 + x, x^2 - x + 1, x^3 + x^2, 2x^2 - 1\}$; **d)** wymiar 4, bazę stanowią wszystkie podane generatory.

5.9 a) dla $p = -1$ i $p = 2$ wymiar jest równy 2, w pozostałych przypadkach wymiar jest równy 3; **b)** dla $p = 1$ wymiar jest równy 1, dla $p = 0$ lub $p = -1$ wymiar jest równy 2, w pozostałych przypadkach wymiar jest równy 3.

Szósty tydzień

Twierdzenie Kroneckera–Capellego (2.2).

Przykłady

• **Przykład 6.1**

W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 1 \\ x - y - z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - 4z - t = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5x - y - z = 2 \\ x - 10y + 4z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$

Rozwiązanie

Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capellego układ równań liniowych z n niewiadomymi postaci $AX = B$ może nie posiadać rozwiązań albo mieć dokładnie jedno rozwiązanie albo też mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Decydują o tym rzędy macierzy A układu oraz jego macierzy rozszerzonej $[A|B]$ i wtedy odpowiednio mamy $\operatorname{rz} A \neq \operatorname{rz} [A|B]$ albo $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} [A|B] = n$ albo też $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} [A|B] = r < n$. W ostatnim przypadku zbiór rozwiązań zależy od $n - r$ parametrów.

a) Rozważmy następujące przekształcenie macierzy rozszerzonej układu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right].$$

Z otrzymanej postaci wynika, że $\operatorname{rz} A = 2 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 4$. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależących od $n - r = 2$ parametrów.

b) Zamieniamy dla wygody kolejność równań układu i przekształcamy jego macierz rozszerzoną do postaci

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & -1 & -10 & -6 \end{array}\right].$$

Stąd otrzymujemy, że $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r$. Jednocześnie $n = 4$, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, a liczba parametrów jest równa $n - r = 1$.

c) W tym przykładzie mamy $n = 3$. Stosując wskazane operacje elementarne kolejno otrzymamy

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 - w_1 \\ w_5 - w_1}]{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 5w_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 14 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 = -w_2]{w_3 = 2w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zatem $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = n$. Układ ma więc dokładnie jedno rozwiązanie.

d) Równanie ze współczynnikiem 1 przy zmiennej x znów dla wygody dajemy na początek i przekształcamy macierz rozszerzoną układu

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 2w_1]{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_4 - 7w_2]{w_3 - 5w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd $\operatorname{rz} A = 3 < 4 = \operatorname{rz}[A|B]$. Więc rozważany układ równań nie ma rozwiązań.

• Przykład 6.2

Wskazać wszystkie możliwe zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami określającymi rozwiązania układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 7s + 2t = 6 \\ -x + 4y + 2z + 7s + 3t = 1 \\ 2x + y + 5z + 4s + t = 3 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Skorzystamy z faktu mówiącego, że jeżeli układ równań liniowych z n niewiadomymi ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jego macierz A ma rząd równy r, to dowolny niezerowy minor macierzy A stopnia r wskazuje nam r zmiennych, które można wyrazić za pomocą $n - r$ pozostałych zmiennych, czyli parametrów. Przeprowadzimy najpierw wstępną analizę macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu pozwalającą na ustalenie rzędów oraz wyszukanie

odpowiednich minorów. Mamy

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3 + 5w_2]{w_2 : 7} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{5}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & -4 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 5$. Wyznaczymy teraz wszystkie niezerowe minory stopnia 3 z przekształconej macierzy A. Spośród wszystkich $\binom{5}{3} = 10$ minorów stopnia 3 niezerowe są tylko minory zawierające piątą kolumnę. Jest ich 6, mianowicie

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}.$$

Przyjmując kolejno każdy z tych minorów jako podstawę rozwiązania całego układu równań (tj. układu Cramera z trzema niewiadomymi i dwoma parametrami) widzimy, że parametrami mogą być tylko zmienne pozostające poza minorem, a więc z, s lub y, s lub y, z lub x, s lub x, z lub też x, y.

• Przykład 6.3

Określić liczby rozwiązań podanych układów równań liniowych w zależności od parametru p:

a) $\begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + y - z = p \\ x - y + pz = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} px + py + pz + pt = p \\ x + py + pz + pt = p \\ x + y + pz + pt = p \\ x + y + z + pt = p \end{cases}$.

Rozwiązanie

Układ, w którym liczba niewiadomych jest równa liczbie równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy A tego układu jest różny od zera. Każdy przypadek wartości parametru p, dla którego $\det A = 0$ wymaga osobnej analizy zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capellego.

a) Rozważany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det A = \begin{vmatrix} 2p+1 & p-3 \\ p+2 & -2 \end{vmatrix} = -p^2 - 3p + 4 = (1-p)(p+4) \neq 0,$$

tzn., gdy $p \neq -4$ i $p \neq 1$. Macierz rozszerzona układu dla $p = -4$ ma postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} -7 & -7 & -3 \\ -2 & -2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 + 2w_1]{w_1 : (-7)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że układ jest sprzeczny, gdyż $\operatorname{rz} A = 1 < 2 = \operatorname{rz}[A|B]$. Dla $p = 1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

więc $\operatorname{rz} A = 1 = \operatorname{rz} B$. Układ równań ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

b) Dla układu rozważanego w tym przykładzie mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = 2p(1-p),$$

więc ma on dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \neq 0$ i $p \neq 1$. Przeprowadzimy teraz analizę układu dla $p = 0$ oraz $p = 1$ stosując twierdzenie Kroneckera-Capellego. Dla $p = 0$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Oznacza to, że rząd macierzy A układu jest równy 2 podczas, gdy rząd macierzy rozszerzonej $[A|B]$ jest równy 3. Układ równań jest w tym przypadku sprzeczny. Dla parametru $p = 1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

W rozważanym przypadku rzędy macierzy głównej oraz macierzy rozszerzonej układu są równe 2. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

c) W kolejnym układzie równań mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p+1)(p-3),$$

więc dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 3$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla $p = -1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - w_3]{w_1 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Układ równań jest w tym przypadku sprzeczny. Podobnie jest dla $p = 3$, gdyż

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - w_3]{w_1 - 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

a więc $\operatorname{rz} A = 2 < 3 = \operatorname{rz}[A|B]$.

d) W ostatnim układzie równań mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} p & p & p & p \\ 1 & p & p & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 & p \end{vmatrix} \overset{\substack{w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3 \\ w_3 - w_4}}{=\!=} \begin{vmatrix} p-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p-1)^3.$$

Dla $p = 0$ oraz $p = 1$ macierze rozszerzone przyjmują odpowiednio postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{oraz} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zatem dla $p = 0$ otrzymamy, że $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 4$, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 1$ parametru. Natomiast dla $p = 1$ mamy $\operatorname{rz} A = 1 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 4$ i układ równań ma także nieskończenie wiele rozwiązań, ale zależnych od $n - r = 3$ parametrów.

• Przykład* 6.4

Rozwiązać podane układy równań liniowych w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 3x + 6y + 7z = p \\ 2x + 4y + 5z = 2 \\ x + 2y + 4z = -p \end{cases}; \qquad \text{b)} \begin{cases} px + y - 2z + t = p \\ x + py + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z + pt = 2 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

a) Wykonamy najpierw kilka przekształceń macierzy rozszerzonej układu równań. Mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & p \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -p \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_1]{\substack{w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & p+3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1-p \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + w_4]{w_2 + 2w_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-p \\ 0 & 0 & 0 & 5-p \\ 0 & 0 & 1 & 1-p \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \longleftrightarrow w_2]{\cancel{w_3} = w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 5-p \end{array}\right].$$

Dla $p \neq 5$ układ jest sprzeczny, gdyż wtedy $\operatorname{rz} A = 2 < 3 = \operatorname{rz}[A|B]$. Dla $p = 5$ przekształcając dalej macierz rozszerzoną otrzymamy

$$\xrightarrow{\cancel{w_3} = 0} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right],$$

co oznacza, że układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań z jednym parametrem: $x = 11 - 2y$, $z = -4$, gdzie $y \in R$.

b) Macierz rozszerzona układu ma postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} p & 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & p & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & p & 2 \end{array}\right].$$

Jeżeli jeden z minorów stopnia 3 macierzy A jest niezerowy, to $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r < 4 = n$ i układ ma nieskończenie wiele rozwiązań z jednym parametrem. Wybierzmy do obliczeń minor, w którym parametr p występuje w możliwie najniższej potędze, np.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 2 & 2 & p \end{vmatrix} = 2p^2 + 3p - 2 = 2(p+2)\left(p - \frac{1}{2}\right).$$

Zapisując teraz układ równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 2 & 2 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - px \\ 3 - x \\ 2 - 2x \end{bmatrix}$$

można, dla $p \neq -2$ i $p \neq \frac{1}{2}$, zapisać jego rozwiązanie wzorem

$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 2 & 2 & p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p - px \\ 3 - x \\ 2 - 2x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(p+2)(2p-1)} \begin{bmatrix} p & 2p+2 & -1 \\ -p^2 & p-2 & p \\ 2p - p & -6 & 1 + 2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - px \\ 3 - x \\ 2 - 2x \end{bmatrix},$$

gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Dla $p = -2$ rozwiązując układ równań bezpośrednio otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 + 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 + 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Układ jest w tym przypadku sprzeczny, bo $\operatorname{rz} A = 2 < 3 = \operatorname{rz}[A|B]$. Dla $p = \frac{1}{2}$ mamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - \frac{1}{2}w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 \\ \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & 3 & 0 & \frac{7}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_2]{w_1 + 2w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \frac{5}{2} & 2 & 0 & 1 & \frac{13}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[w_1 - \frac{5}{2}w_3]{w_3 : \left(-\frac{5}{4}\right),\ w_2 - w_3} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right].$$

Tutaj $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 4$, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań z jednym parametrem: $x = 1$, $z = 2 - \frac{1}{2}y$, $t = 4 - 2y$, $y \in \boldsymbol{R}$.

- **Przykład* 6.5**

Rozwiązać podany układ równań liniowych dla $n \geqslant 2$ w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + px_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + px_n = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przekształcamy macierz rozszerzoną $[A|B]$ układu nie zmieniając jej rzędu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} p & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & p & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 + (w_2 + \ldots + w_n)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} p+n-1 & p+n-1 & p+n-1 & \ldots & p+n-1 & n \\ 1 & p & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & p & 1 \end{array}\right].$$

Załóżmy najpierw, że $p + n - 1 = 0$. Wtedy $\operatorname{rz} A < \operatorname{rz}[A|B]$, więc układ jest sprzeczny. Przyjmijmy teraz, że $p + n - 1 \neq 0$. Kontynuując przekształcenia otrzymamy

$$\xrightarrow{w_1 : (p+n-1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{n}{p+n-1} \\ 1 & p & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & p & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_n - w_1]{w_2 - w_1,\ w_3 - w_1,\ \ldots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{n}{p+n-1} \\ 0 & p-1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{p-1}{p+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p-1 & \frac{p-1}{p+n-1} \end{array}\right].$$

Znowu, jeżeli $p - 1 = 0$, to $\operatorname{rz} A = 1 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n$. Układ równań ma w tym przypadku nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - 1$ parametrów. Rozwiązania te określone są wzorem

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1.$$

Pozostał jeszcze przypadek $p - 1 \neq 0$. Przekształcamy macierz dalej aż do końcowego rezultatu

$$\xrightarrow[w_n : (p-1)]{w_2 : (p-1),\ w_3 : (p-1),\ \ldots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{n}{p+n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{p+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{1}{p+n-1} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - (w_2 + \ldots + w_n)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{p+n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{p+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{1}{p+n-1} \end{array}\right]$$

Stąd wnioskujemy, że dla $p \neq 1 - n$ oraz $p \neq 1$ układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{p+n-1}.$$

- **Przykład 6.6**

Klienci sklepu spożywczego stojący przed nami w kolejce płacili kolejno: za 2 kostki masła, 2 bochenki chleba, 10 jaj, 3 litry mleka – 9,50 zł; za 1 masło, 2 chleby, 20 jaj, 1 mleko – 8,20 zł; za 3 masła, 1 chleb, 5 jaj, 2 mleka – 8,90 zł.

a) Chcemy kupić 2 masła, 5 chlebów, 35 jaj i 5 litrów mleka. Ile zapłacimy ?

b) Czy po zapłaceniu za zakupione produkty poznamy ich ceny jednostkowe ?
c) Jakiego zakupu powinniśmy dokonać, aby uzyskać każdy z tych produktów i jednocześnie poznać jego cenę jednostkową ?
d) Wyznaczyć ceny jednostkowe, jeżeli kupując po jednej sztuce każdego z tych produktów zapłaciliśmy 3,60 zł.

Rozwiązanie

Niech x, y, z, t oznaczają odpowiednio ceny jednostkowe kostki masła, bochenka chleba, jajka, litra mleka. Z danych zadania wynika następujący układ równań

$$\begin{cases} 2x + 2y + 10z + 3t = 9,5 \\ x + 2y + 20z + t = 8,2 \\ 3x + y + 5z + 2t = 8,9 \end{cases}.$$

a) Należy wyznaczyć wartość c taką, że $c = 2x + 5y + 35z + 5t$. Wystarczy, aby równanie definiujące liczbę c było kombinacją liniową wcześniejszych trzech równań. Mówiąc ściśle, aby istniały stałe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ takie, że

$$(2, 5, 35, 5) = \alpha_1(2, 2, 10, 3) + \alpha_2(1, 2, 20, 1) + \alpha_3(3, 1, 5, 2).$$

Stałe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 10 & 20 & 5 & 35 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_1]{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 20w_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -5 & 1 \\ -30 & 0 & -55 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 30w_4]{\substack{w_1 - 2w_4 \\ w_2 + 2w_4}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -85 & 85 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2 : (-7)]{w_3 - \frac{7}{85}w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + w_2]{w_1 - 5w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \longleftrightarrow w_3]{w_3 \longleftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, więc

$$c = \alpha_1 \cdot 9,5 + \alpha_2 \cdot 8,2 + \alpha_3 \cdot 8,9 = 18,3.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że zapłacimy 18,30 zł.

b) Niemożliwe jest wyznaczenie cen jednostkowych poszczególnych produktów na podstawie podanych informacji. Układ równań opisujący te cztery niewiadome nie ma jednoznacznego rozwiązania. Rząd macierzy układu pierwszych trzech równań jest oczywiście mniejszy od 4, zaś dodanie czwartego liniowo zależnego równania nie podwyższa tego rzędu do 4.

c) Ceny jednostkowe poszczególnych produktów moglibyśmy wyznaczyć z układu równań o macierzy rzędu 4, np. z układu Cramera. Rząd macierzy układu trzech równań napisanych na początku jest równy

$$\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 - 3w_2]{w_1 - 2w_2} \operatorname{rz} \left[\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{rrr} 0 & -2 & -30 \\ 1 & 2 & 20 \\ 0 & -5 & -55 \end{array}} & \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \end{array}\right] = 3,$$

co zresztą można już było wcześniej wywnioskować na podstawie rachunku przeprowadzonego w punkcie a). Zakup, jakiego powinniśmy dokonać, musiałby się więc składać

z k_1 kostek masła, k_2 bochenków chleba, k_3 jaj i k_4 litrów mleka, gdzie $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 1$, $k_3 \geqslant 1$, $k_4 \geqslant 1$, przy czym musi być spełniony warunek

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Warunek ten spełniony jest np. dla $k_1 = 6$, $k_2 = 5$, $k_3 = 35$, $k_4 = 1$.

d) Do początkowego układu trzech równań dołączamy czwarte równanie

$$x + y + z + t = 3,6.$$

Rozwiązujemy otrzymany układ czterech równań (metodą „kolumn jednostkowych")

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 10 & 3 & 9,5 \\ 1 & 2 & 20 & 1 & 8,2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 8,9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3,6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_2]{\substack{w_1 - 2w_2 \\ w_3 - 3w_2}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & -2 & -30 & 1 & -6,9 \\ 1 & 2 & 20 & 1 & 8,2 \\ 0 & -5 & -55 & -1 & -15,7 \\ 0 & -1 & -19 & 0 & -4,6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + w_1]{w_2 - w_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & -2 & -30 & 1 & -6,9 \\ 1 & 4 & 50 & 0 & 15,1 \\ 0 & -7 & -85 & 0 & -22,6 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4,6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 7w_4]{\substack{w_1 + 2w_4 \\ w_2 - 4w_4}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 8 & 1 & 2,3 \\ 1 & 0 & -26 & 0 & -3,3 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & 9,6 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4,6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 : 48}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 8 & 1 & 2,3 \\ 1 & 0 & -26 & 0 & -3,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4,6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 19w_3]{\substack{w_1 - 8w_3 \\ w_2 + 26w_3}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1,9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,8 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że czwarty zakup $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ czyni zadość warunkowi z punktu c) i pozwala na wyznaczenie cen jednostkowych (w złotych), które są równe $x = 1,9$, $y = 0,8$, $z = 0,2$ i $t = 0,7$.

Zadania

○ **Zadanie 6.1**

W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 4 \\ 4x + 8y = 11 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5x - 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x - 3y - z + t = -1 \\ x + 7y - t = 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 7 \\ x - t = 2 \\ -x - 3y + 2z + 2t = 3 \end{cases}$.

○ **Zadanie 6.2**

Wskazać wszystkie możliwe zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami określającymi rozwiązania podanych układów równań liniowych:

a) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -1 \\ -x + 8y + 11z + 12t = 5 \\ 2x - y - z = -4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$.

○ **Zadanie 6.3**

Określić liczby rozwiązań podanych układów równań liniowych w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $\begin{cases} (p+1)x + (2-p)y = p \\ (1-3p)x + (p-1)y = -6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (p+1)x - y + pz = 1 \\ (3-p)x + 4y - pz = -4 \\ px + 3y = -3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} px + y + 2z = 1 \\ x + py + 2z = 1 \\ x + y + 2pz = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x + py + pz + pt = 1 \\ 2x + 2y + pz + pt = 2 \\ 2x + 2y + 2z + pt = 3 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 4 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} x + (p-2)y - 2pz = 4 \\ px + (3-p)y + 4z = 1 \\ (1+p)x + y + 2(2-p)z = 7 \end{cases}$.

○ **Zadanie* 6.4**

Rozwiązać podane układy równań liniowych w zależności od wartości rzeczywistego parametru p:

a) $\begin{cases} px + 3y + z + t = 1 \\ 2x - pz + t = -2 \\ 7x + py - 5z + pt = -p \end{cases}$; b) $\begin{cases} px + y + pz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ (2-p)x + (2-p)y + z = 1 \\ px + y + pz = p^2 \end{cases}$.

○ **Zadanie* 6.5**

Rozwiązać podane układy równań liniowych dla $n \geqslant 2$ w zależności od parametru rzeczywistego p:

a) $\begin{cases} x_1 + px_2 + \ldots + px_n = 1 \\ px_1 + x_2 + \ldots + px_n = 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ px_1 + px_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} px_1 + px_2 + \ldots + px_n = p \\ x_1 + px_2 + \ldots + px_n = p \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + px_n = p \end{cases}$.

○ **Zadanie 6.6**

W wytwórni montuje się wyroby A, B, C, D, E z czterech typów detali a, b, c, d.

Liczby detali wchodzących w skład poszczególnych wyrobów podane są w tabeli

	A	B	C	D	E
a	1	2	0	4	1
b	2	1	4	5	1
c	1	3	3	5	4
d	1	1	2	3	1

a) Czy można obliczyć, ile ważą wyroby D i E, jeżeli wyroby A, B, C ważą odpowiednio 12, 20 i 19 dag. Podać znalezione wagi.

b) Ile ważą detale a, b, c, jeżeli detal d waży 1 dag?

Odpowiedzi i wskazówki

6.1 a), d) nieskończenie wiele rozwiązań, 1 parametr; **b), c)** brak rozwiązań; **e)** nieskończenie wiele rozwiązań, 2 parametry.

6.2 a) $\{y\}$, $\{z\}$; **b)** wszystkie możliwe pary niewiadomych, tzn. $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{x,t\}$, $\{y,z\}$, $\{y,t\}$, $\{z,t\}$; **c)** $\{x,y,z\}$, $\{x,y,s\}$, $\{x,y,t\}$, $\{x,z,s\}$, $\{x,s,t\}$, $\{y,z,s\}$, $\{y,s,t\}$.

6.3 Układ nie ma rozwiązań, ma dokładnie jedno rozwiązanie, ma nieskończenie wiele rozwiązań odpowiednio **a)** dla $p = \frac{1}{2}$, dla $p \neq \frac{1}{2}$ i $p \neq 3$, dla $p = 3$; **b)** nigdy, dla $p \neq 4$ i $p \neq 0$, dla $p = 4$ lub $p = 0$; **c)** dla $p = -2$, dla $p \neq -2$ i $p \neq 1$, dla $p = 1$; **d)** dla $p = 2$, dla $p \neq 2$, nigdy; **e)** dla $p \in R$, nigdy, nigdy.

6.4 a) dla każdego $p \in R$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań: dla $p = 3$ rozwiązanie ma postać $x = 3 - 3y - 4z$, $t = -8 + 6y + 11z$, gdzie $y, z \in R$, dla $p = -\frac{5}{2}$ rozwiązanie ma postać $x = 0$, $z = -2 + 2y$, $t = 3 - 5y$, gdzie $y \in R$, a dla $p \neq 3$ i $p \neq -\frac{5}{2}$ rozwiązanie ma postać

$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -p & 1 \\ p & -5 & p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - px \\ -2 - 2x \\ -p - 7x \end{bmatrix} = \frac{1}{-2p^2 + p + 15} \begin{bmatrix} 5 - p^2 & -p - 5 & 1 + p \\ p & 2p & -3 \\ p^2 & 15 + p & -3p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - px \\ -2 - 2x \\ -p - 7x \end{bmatrix},$$

b) dla $p \neq -1$ i $p \neq 1$ układ jest sprzeczny, dla $p = -1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$, dla $p = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $x = 1 - y - z$, gdzie $y, z \in R$.

6.5 a) dla $p = \frac{1}{1-n}$ układ jest sprzeczny, dla $p \neq 1$ i $p \neq \frac{1}{1-n}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{1 + np - p}$, dla $p = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$; **b)** dla $p \neq 0$ i $p \neq 1$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$, dla $p = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n \in R$, dla $p = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

6.6 a) wyrób D waży 44 dag, zaś wagi wyrobu E na podstawie tych danych nie można uzyskać; **b)** detale a, b, c ważą odpowiednio 4, 2 i 3 dag.

Siódmy tydzień

Układy jednorodne i niejednorodne (2.3).

Przykłady

- **Przykład 7.1**

Znaleźć wymiary i wyznaczyć bazy przestrzeni rozwiązań podanych układów równań liniowych:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x - y + z + 3t = 0 \end{cases}; \quad \text{b)}\ \begin{cases} x + 2y + z - s + 6t = 0 \\ 3x + 8y + 5z + 3s + 10t = 0 \\ 5x + 12y + 7z + s + 22t = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Niech W_0 będzie przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych z n niewiadomymi. Wówczas $\dim W_0 = n - \operatorname{rz} A$, gdzie A jest macierzą układu. Bazę przestrzeni W_0 wyznaczamy po rozwiązaniu układu.

a) Zastosujemy kilka przekształceń macierzy rozszerzonej układu równań prowadzących do określenia jej rzędu oraz rozwiązania układu:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 + w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Stąd $\dim W_0 = n - \operatorname{rz} A = 4 - 2 = 2$. Rozwiązanie układu ma postać $x = z - 4t$, $y = 3z - 5t$, gdzie $z, t \in R$, zatem

$$W_0 = \{(z - 4t, 3z - 5t, z, t) : z, t \in R\} = \operatorname{lin}\{(1,3,1,0), (-4,-5,0,1)\}.$$

b) Rozwiązujemy rozważany układ równań

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 3 & 10 & 0 \\ 5 & 12 & 7 & 1 & 22 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cancel{w_3} = w_2]{w_2 : 2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Mamy $\dim W_0 = n - \operatorname{rz} A = 5 - 2 = 3$. Rozwiązanie układu ma postać $x = z + 7s - 14t$, $y = -z - 3s + 4t$, gdzie $z, s, t \in R$. Zatem

$$\begin{aligned} W_0 &= \{(z + 7s - 14t, -z - 3s + 4t, z, s, t) : z, s, t \in R\} \\ &= \operatorname{lin}\{(1,-1,1,0,0), (7,-3,0,1,0), (-14,4,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Uwaga. Chcąc znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych należy go rozwiązać, tzn. część niewiadomych zapisać w postaci kombinacji liniowych pozostałych niewiadomych, czyli parametrów. Następnie w przestrzeni parametrów

$$\{(t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}) : t_i \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant n - r\} = R^{n-r},$$

gdzie $r = \operatorname{rz} A$, wystarczy wziąć dowolną bazę a wtedy, dopisując brakujące współrzędne, otrzymamy bazę przestrzeni W_0. W obu przykładach wykorzystaliśmy bazy standardowe przestrzeni parametrów.

- **Przykład 7.2**

Czy podane wektory generują przestrzenie rozwiązań danych układów równań liniowych, odpowiedź uzasadnić:

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} \vec{u} = (1,7,-5,0) \\ \vec{v} = (2,-6,10,-5) \end{array}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ -x + 8y + 11z + 12t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases};$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{l} \vec{u} = (3,1,2,0,-9) \\ \vec{v} = (0,-1,0,1,3) \\ \vec{w} = (3,-2,2,3,0) \end{array}, \quad \begin{cases} x - y + 2z - s + t = 0 \\ 3x + y + z + s + 2t = 0 \\ 5x - y + 5z - s + 4t = 0 \end{cases}?$$

Rozwiązanie

Należy sprawdzić, czy każde rozwiązanie układu równań jest kombinacją liniową danych wektorów. Wystarczy więc stwierdzić, czy spośród danych wektorów można wybrać bazę przestrzeni rozwiązań odpowiedniego układu, tzn. $r = n - \operatorname{rz} A$ liniowo niezależnych wektorów, gdzie n jest liczbą niewiadomych, a A macierzą układu równań.

a) W pierwszym układzie równań mamy

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 8 & 11 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3 - 2w_1]{w_2 + w_1} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 14 & 16 \\ 0 & -5 & -7 & -8 \end{bmatrix} \xlongequal{\cancel{w_3} = -\frac{1}{2} w_3} 2,$$

zatem wymiar przestrzeni rozwiązań układu jest równy $r = 4 - 2 = 2$. Zauważmy, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ są liniowo niezależne, a ich współrzędne spełniają układ równań. To oznacza, że są one bazą przestrzeni rozwiązań, a więc ją generują.

b) Zauważmy najpierw, że współrzędne wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ spełniają dany układ równań. Wymiar przestrzeni rozwiązań tego układu jest równy 3, gdyż

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3 - 5w_1]{w_2 - 3w_1} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xlongequal{\cancel{w_3} = w_2} 2,$$

więc wymiar przestrzeni rozwiązań jest równy $r = 5 - 2 = 3$. Sprawdzimy teraz liniową niezależność wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ analizując rząd macierzy ich współrzędnych. Mamy

$$\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3 - w_1} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xlongequal{\cancel{w_3} = 3w_2} 2.$$

Z równości tej wynika, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są liniowo zależne, a zatem nie generują one trójwymiarowej przestrzeni rozwiązań.

- **Przykład 7.3**

Wyznaczyć zbiory rozwiązań podanych niejednorodnych układów równań liniowych zgadując jedno z tych rozwiązań oraz znajdując przestrzenie rozwiązań odpowiadających im układów jednorodnych:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + y + z - 2t = 1 \\ 2x + y - z + t = 3 \end{cases}; \quad \text{b)}\ \begin{cases} x + 2y - z + s - 2t = 1 \\ 4x + y + z + t = 4 \\ 6x + 5y - z + 2s - 3t = 6 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Niech $AY = B$ będzie niejednorodnym układem równań liniowych, $AX = 0$ odpowiadającym mu układem jednorodnym, $\boldsymbol{W} = \{Y : AY = B\}$ zbiorem rozwiązań układu niejednorodnego, zaś $\boldsymbol{W}_0 = \{X : AX = 0\}$ przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego.

a) Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że zbiór rozwiązań układu niejednorodnego ma postać

$$W = \{X + Y_0 : X \in W_0\},$$

gdzie Y_0 jest dowolnym rozwiązaniem układu niejednorodnego. Układ jednorodny odpowiadający danemu układowi ma postać

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy, że $x = 2z - 3t$, $y = -3z + 5t$, gdzie $z, t \in \boldsymbol{R}$. Dowolne rozwiązanie X układu jednorodnego ma więc postać

$$X = (2z - 3t, -3z + 5t, z, t),$$

gdzie $z, t \in \boldsymbol{R}$. Zauważmy teraz, że liczby $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$ spełniają układ niejednorodny, zatem jednym z rozwiązań tego układu jest wektor $Y_0 = (1, 1, 1, 1)$. Dowolne rozwiązanie układu niejednorodnego wyraża się więc wzorem

$$Y = X + Y_0 = (2z - 3t + 1, -3z + 5t + 1, z + 1, t + 1),$$

gdzie $z, t \in \boldsymbol{R}$. Zbiór rozwiązań układu niejednorodnego ma zatem postać

$$W = \{(2z - 3t + 1, -3z + 5t + 1, z + 1, t + 1) : z, t \in \boldsymbol{R}\}.$$

Zauważmy jeszcze, że rozwiązując układ niejednorodny bezpośrednio otrzymamy oczywiście ten sam wynik, bowiem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \cdot (-1)]{w_1 + w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd $x = 2z - 3t + 2$, $y = -3z + 5t - 1$, gdzie $z, t \in \boldsymbol{R}$, więc

$$\boldsymbol{W} = \{(2z - 3t + 2, -3z + 5t - 1, z, t) : z, t \in \boldsymbol{R}\}.$$

Podstawiając w powyższym zapisie $u + 1$ zamiast z oraz $v + 1$ zamiast t otrzymamy zbiór $\boldsymbol{W}$ w pierwotnej postaci

$$\boldsymbol{W} = \{(2u - 3v + 1, -3u + 5v + 1, u + 1, v + 1) : u, v \in \boldsymbol{R}\}.$$

b) Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że zbiór rozwiązań niejednorodnego układu równań wyraża się wzorem

$$W = \{t_1X_1 + t_2X_2 + \ldots + t_{n-r}X_{n-r} + Y_0 : t_1, t_2, \ldots, t_{n-r} \in \boldsymbol{R}\},$$

gdzie Y_0 jest dowolnym rozwiązaniem układu niejednorodnego, a wektory X_1, X_2, ..., X_{n-r} tworzą bazę przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego $\boldsymbol{W}_0$. Najpierw rozwiążemy układ jednorodny odpowiadający danemu układowi, tzn.

$$\begin{cases} x + 2y - z + s - 2t = 0 \\ 4x + y + z + t = 0 \\ 6x + 5y - z + 2s - 3t = 0 \end{cases}.$$

Mamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 6w_1]{w_2 - 4w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 : (-7)]{\cancel{w_3} = w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{9}{7} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{9}{7} & 0 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że $x = -\frac{3}{7}z + \frac{1}{7}s - \frac{4}{7}t$, $y = \frac{5}{7}z - \frac{4}{7}s + \frac{9}{7}t$, a więc zbiór rozwiązań układu jednorodnego ma postać

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_0 &= \left\{\left(-\frac{3}{7}z + \frac{1}{7}s - \frac{4}{7}t, \frac{5}{7}z - \frac{4}{7}s + \frac{9}{7}t, z, s, t\right) : z, s, t \in \boldsymbol{R}\right\} \\ &= \text{lin}\,\{(-3, 5, 7, 0, 0), (1, -4, 0, 7, 0), (-4, 9, 0, 0, 7)\}. \end{aligned}$$

Trzy znalezione generatory są zarazem bazą przestrzeni $\boldsymbol{W}_0$. Oznaczamy je kolejno przez X_1, X_2, X_3. Ponadto, porównując pierwszą kolumnę macierzy układu niejednorodnego z kolumną wyrazów wolnych łatwo zauważyć, że jest on spełniony przez liczby $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $s = 0$, $t = 0$. Niech zatem wektor $Y_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ będzie wybranym rozwiązaniem układu niejednorodnego. Dowolne rozwiązanie tego układu jest kombinacją liniową bazy X_1, X_2, X_3 przestrzeni $\boldsymbol{W}_0$ oraz Y_0, tzn.

$$\begin{aligned} Y &= t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 + Y_0 \\ &= t_1(-3, 5, 7, 0, 0) + t_2(1, -4, 0, 7, 0) + t_3(-4, 9, 0, 0, 7) + (1, 0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

gdzie t_1, t_2, $t_3 \in \boldsymbol{R}$. Zatem

$$W = \{(-3t_1 + t_2 - 4t_3 + 1, 5t_1 - 4t_2 + 9t_3, 7t_1, 7t_2, 7t_3) : t_1, t_2, t_3 \in \boldsymbol{R}\}.$$

• Przykład 7.4

Podać interpretację geometryczną zbiorów rozwiązań podanych układów równań liniowych:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 4x - y + 2z = -2 \\ x + 11y - 7z = 7 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} -9x + 3y - 6z = -12 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ -6x + 2y - 4z = -8 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Zbiory rozwiązań niesprzecznych układów równań liniowych z trzema niewiadomymi mogą być tylko punktami, prostymi, płaszczyznami w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ lub całą przestrzenią $\boldsymbol{R}^3$. Decyduje o tym liczba parametrów zbioru rozwiązań układu równań, która może być równa odpowiednio $0, 1, 2$ lub 3.

a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań. Mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 11 & -7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\cancel{w_3} = -w_2]{w_2 : (-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Z otrzymanej postaci macierzy wynika, że układ jest niesprzeczny, a rząd jego macierzy jest równy 2. Rozwiązania tego układu tworzą zatem zbiór jednoparametrowy, a więc prostą. Chcąc poznać równanie tej prostej, należy rozwiązać układ do końca, tzn. dokonać następujących przekształceń

$$\xrightarrow{w_2:3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right].$$

Zatem $x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z$, $y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}z$, gdzie $z \in \mathbb{R}$.

b) Na macierzy rozszerzonej wykonujemy kolejno następujące przekształcenia

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 3 & -6 & -12 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -6 & 2 & -4 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+2w_2]{w_1+3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3=0]{w_1=0} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Z otrzymanej postaci macierzy wynika, że układ jest niesprzeczny oraz ma rząd 1 i dwa parametry. Jego rozwiązania tworzą zatem płaszczyznę, której równanie $3x-y+2z-4=0$ łatwo odczytujemy z ostatniej postaci macierzy rozszerzonej.

• Przykład* 7.5

Dla jakich wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$, zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych przedstawiają geometryczne podane zbiory:

a) $\begin{cases} ax + by = 2ab \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$, punkt, prosta, płaszczyzna;

b) $\begin{cases} ax + by + cz = 3abc \\ ax - by + cz = abc \\ ax + by - cz = abc \end{cases}$, punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń ?

Rozwiązanie

a) Macierz A danego układu równań jest kwadratowa, więc zbiór rozwiązań tego układu jest jednopunktowy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0.$$

Ostatni warunek można zapisać w postaci $|a| \neq |b|$. Równość $|a| = |b|$ zachodzi wtedy, gdy $a = b$ lub $a = -b$. Dla $a = b$ układ można sprowadzić do jednego równania postaci $ax + ay = 2a^2$. Jeżeli $a = 0$, to powyższe równanie przedstawia całą płaszczyznę. Natomiast dla $a \neq 0$ jest to prosta o równaniu $x + y = 2a$. W przypadku $a = -b$ układ równań staje się jednym równaniem postaci $ax - ay = 2a^2$. I tu dla $a = 0$ jest to cała płaszczyzna, a dla $a \neq 0$ prosta o równaniu $x - y = 2a$. Z rozważań tych wynika, że rozwiązania układu równań tworzą punkt, prostą lub płaszczyznę odpowiednio, gdy $|a| \neq |b|$, $|a| = |b| \neq 0$ lub $a = b = 0$.

b) Liczba równań rozważanego układu równań jest równa liczbie niewiadomych, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy,

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = 4abc \neq 0,$$

gdzie A jest macierzą tego układu. Przypadek $abc = 0$ przeanalizujemy zakładając najpierw, że $a = 0$ i $bc \neq 0$. Macierz rozszerzona $[A|B]$ układu ma wtedy rząd 2, bowiem

$$\text{rz}\,[A|B] = \text{rz}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & b & c & 0 \\ 0 & -b & c & 0 \\ 0 & b & -c & 0 \end{array}\right] = 2.$$

Identyczny wynik otrzymamy w przypadku $b = 0$ i $ac \neq 0$ oraz w przypadku $c = 0$ i $ab \neq 0$. Natomiast dla $a = b = 0$ i $c \neq 0$ mamy

$$\text{rz}\,[A|B] = \text{rz}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{c} & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{array}\right] = 1.$$

Podobny wynik otrzymamy, gdy $a = c = 0$ i $b \neq 0$ oraz gdy $b = c = 0$ i $a \neq 0$. W ostatnim przypadku $a = b = c = 0$ macierz $[A|B]$ jest macierzą zerową rzędu 0. Reasumując, zbiór rozwiązań badanego układu równań jest punktem, prostą, płaszczyzną lub przestrzenią $\mathbb{R}^3$ odpowiednio wtedy, gdy żadna z liczb a, b, c nie jest zerem, gdy dokładnie jedna spośród tych liczb jest zerem, gdy dokładnie dwie liczby są zerami lub gdy wszystkie są zerami.

• Przykład 7.6

Ułożyć układy równań liniowych o podanych zbiorach rozwiązań:

a) prosta w $\mathbb{R}^3$ o równaniu kierunkowym $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$;

b) płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ o równaniu parametrycznym $\begin{cases} x = 2 - 2s + t \\ y = 1 + s - t \\ z = 3 - s + 2t \end{cases}$, $s, t \in \mathbb{R}$;

c) $V = \{(1 + s + t + 3u, s - t - u, 2 + t + 2u, 3 - s - u) : s, t, u \in \mathbb{R}\}$.

Rozwiązanie

a) Podane równanie kierunkowe prostej wystarczy rozbić na dwa równania $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+2}{-1}$ oraz $\dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$. Po przekształceniu $(-1)(x-5) = 4(y+2)$, $3(y+2) = -z$ możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} -x - 4y = 3 \\ 3y + z = -6 \end{cases},$$

który jest jednocześnie jednym z równań krawędziowych tej prostej.

b) Z podanego układu równań należy wyrugować parametry s i t, a więc rozwiązać go przyjmując z kolei s i t jako niewiadome. Zapisując ten układ w postaci

$$\begin{cases} -2s + t = x - 2 \\ s - t = y - 1 \\ -s + 2t = z - 3 \end{cases}$$

już z pierwszych dwóch równań można obliczyć, że $s = 3-x-y$, $t = 4-x-2y$. Wstawiając ten wynik do trzeciego równania otrzymujemy wzór $(3 - x - y) - 2(4 - x - 2y) = 3 - z$.

Stąd $x + 3y + z = 8$. Szukany układ równań można więc zapisać tym jednym równaniem. Jest to oczywiście równanie ogólne danej płaszczyzny. Można je było otrzymać też metodą geometryczną biorąc punkt płaszczyzny $P_0 = (2,1,3)$ oraz jej wektor normalny $\vec{n} = (-2,1,-1) \times (1,-1,2) = (1,3,1)$.

c) Podany zbiór rozwiązań jest podzbiorem przestrzeni R^4, należy więc ułożyć układ równań z czterema niewiadomymi. Oznaczmy te niewiadome przez x, y, z, v. Mamy zatem $x = 1 + s + t + 3u$, $y = s - t - u$, $z = 2 + t + 2u$, $v = 3 - s - u$, gdzie $s, t, u \in R$. Parametry s, t, u należy wyrugować wyrażając je najpierw w zależności od zmiennych x, y, z, v, a następnie pozostawiając w układzie równań tylko te zmienne. Mamy więc

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 3 & x-1 \\ 1 & -1 & -1 & y \\ 0 & 1 & 2 & z-2 \\ -1 & 0 & -1 & v-3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 + w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 3 & x-1 \\ 0 & -2 & -4 & -x+y+1 \\ 0 & 1 & 2 & z-2 \\ 0 & 1 & 2 & x+v-4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 : (-2)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 3 & x-1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(x-y-1) \\ 0 & 1 & 2 & z-2 \\ 0 & 1 & 2 & x+v-4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_1 - w_2]{\substack{w_4 - w_3 \\ w_3 - w_2}} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x+y-1) \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(x-y-1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-x+y-3)+z \\ 0 & 0 & 0 & x-z+v-2 \end{array}\right].$$

Pierwsze dwa równania rozwiązanego wyżej układu równań można opuścić, gdyż występują w nich jeszcze s, t, u. Z dwu pozostałych równań wynika, że $\frac{1}{2}(-x+y-3)+z=0$ oraz $x - z + v - 2 = 0$. Zapisując te równania w postaci

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3 \\ x - z + v = 2 \end{cases}$$

otrzymujemy szukany układ równań. W tym przykładzie warto też dodatkowo zauważyć, że zbiór rozwiązań W znalezionego układu jest dwuparametrowy podczas, gdy na początku wystąpiły aż trzy parametry. Nie ma tu sprzeczności, gdyż podany na początku zbiór w rzeczywistości można zdefiniować dwuparametrowo. Mianowicie

$$\begin{aligned} V &= \{(1+s+t+3u, s-t-u, 2+t+2u, 3-s-u) : s,t,u \in R\} = \\ &= (1,0,2,3) + \text{lin}\,\{(1,1,0,-1),(1,-1,1,0),(3,-1,2,-1)\} \\ &= (1,0,2,3) + \text{lin}\,\{(1,1,0,-1),(1,-1,1,0)\}\,. \end{aligned}$$

Z równości

$(0,3,0,2) = (1,0,2,3)+(1,1,0,-1)-2(1,-1,1,0)$ oraz $(0,-2,1,1) = (1,-1,1,0)-(1,1,0,-1)$

wynika, że

$$\begin{aligned} V &= (0,3,0,2) + \text{lin}\,\{(1,1,0,-1),(0,-2,1,1)\} \\ &= \{(x, 3+x-2z, z, 2-x+z) : x,z \in R\} = W. \end{aligned}$$

Zadania

○ Zadanie 7.1

Znaleźć wymiary i wyznaczyć bazy przestrzeni rozwiązań podanych układów równań liniowych:

a) $2x - y + 5z + 3t = 0$; b) $x + 2y = 2x - y = x + z + t = 0$;

c) $x + y = y + z = z + t = t + x$; d) $x + y = y + z = z + s = s + t = t + y = 0$;

e) $\begin{cases} x - 3y - z - t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 6x + 2y - z = 0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + t = 0 \\ 4x + y + z + t = 0 \\ 5x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$.

○ Zadanie 7.2

Czy przestrzenie rozwiązań podanych układów równań liniowych są generowane przez wskazane wektory, odpowiedź uzasadnić:

a) $\begin{cases} 4x + y - z + s - 2t = 0 \\ x - y + z - s - 3t = 0 \\ 3x - y + z - s - 5t = 0 \end{cases}$, $\vec{u} = (2,-4,1,1,2)$, $\vec{v} = (1,1,5,2,1)$;

b) $\begin{cases} x - 3y + z + t = 0 \\ 2x + y + z - 7t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$, $\vec{u} = (4,1,-2,1)$;

c) $\begin{cases} 2x + 2y - z + s = 0 \\ 5x + 6y + z + 2s + t = 0 \\ 9x + 10y - z + 4s + t = 0 \end{cases}$, $\vec{u} = (-3,1,0,4,1)$, $\vec{v} = (-1,-1,1,5,0)$, $\vec{w} = (2,-2,1,1,-1)$?

○ Zadanie 7.3

Wyznaczyć zbiory rozwiązań podanych niejednorodnych układów równań liniowych zgadując jedno z tych rozwiązań oraz znajdując przestrzenie rozwiązań odpowiadających im układów jednorodnych:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 7z = 0 \\ x - 7y + 11z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 2y - z + 3t = 2 \\ 10x + 4y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z + t + u = 5 \\ 3x + 2y + z + t - 3u = 4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 6x - 7y + z = 3 \\ -12x + 14y - 2z = -6 \end{cases}$.

○ Zadanie 7.4

Zinterpretować geometrycznie zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych:

a) $\begin{cases} 4x - 2y + 8z = -6 \\ 2x - y + 4z = -3 \\ -6x + 3y - 12z = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 7y - z = 4 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 7z = 6 \\ 3x - 6y + 9z = -3 \end{cases}$.

○ Zadanie* 7.5

Dla jakich wartości parametrów $a, b, c \in R$ zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych przedstawiają geometrycznie podane zbiory:

a) $\begin{cases} ax + by = a^2 - b + ab \\ ax - by = -a^2 + b - ab \end{cases}$, punkt, prosta, płaszczyzna;

b) $\begin{cases} (a+b)x + (a+b+1)y = 2a+1 \\ (a-b+1)x + (a-b)y = 4a^2-1 \end{cases}$, punkt, prosta, płaszczyzna;

c) $\begin{cases} x - ay - bz = ab \\ x - ay + bz = 2ab \\ x - ay + bz = 3ab \end{cases}$, punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń;

d) $\begin{cases} ax + by + cz = ab \\ -ax + by + cz = ab \\ -ax + by - cz = bc \end{cases}$, punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń ?

○ **Zadanie 7.6**

Ułożyć układy równań liniowych o podanych zbiorach rozwiązań:

a) prosta w $\boldsymbol{R}^3$ o równaniu parametrycznym $x = 4+t$, $y = 3-2t$, $z = 5$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$;

b) płaszczyzna w $\boldsymbol{R}^3$ o równaniu $\begin{cases} x = 1 - s + t + u \\ y = 2 - s + 2t + 3u \\ z = 3 + s + 3t + 7u \end{cases}$, gdzie $s, t, u \in \boldsymbol{R}$;

c) $\{(1+2t, 3-4t, 5+6t, 7-8t) : t \in \boldsymbol{R}\}$;

d) $\{(1+s-t, 2+s+t, 3-s+2t, s+2t, 2s-t) : s, t \in \boldsymbol{R}\}$;

e) $\{(4+2s-t, s+3t, 2+s-u, 4-s+2u) : s, t, u \in \boldsymbol{R}\}$;

f) $\{(s+2t-u+v, 1+s+u-3v) : s, t, u, v \in \boldsymbol{R}\}$.

Odpowiedzi i wskazówki

7.1 a) wymiar 3, baza $\{(1,2,0,0), (0,5,1,0), (0,3,0,1)\}$; **b)** wymiar 1, baza $\{(0,0,1,-1)\}$; **c)** wymiar 2, baza $\{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$; **d)** wymiar 1, baza $\{(1,-1,1,-1,1)\}$; **e)** wymiar 0; **f)** wymiar 2, baza $\{(-2,1,0,7), (-1,0,1,3)\}$.

7.2 a), c) nie; **b)** tak.

7.3 a) $\{(a+1, 8a+1, 5a+1) : a \in \boldsymbol{R}\}$; **b)** $\{(-4a+3b, 9a-9b+1, 2a, 2b) : a, b \in \boldsymbol{R}\}$; **c)** $\{(a+b+5c+1, -2a-2b-6c+1, a+1, b+1, c+1) : a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$; **d)** $\left\{\left(a+\frac{1}{2}, b, 7b-6a\right) : a, b \in \boldsymbol{R}\right\}$.

7.4 a) płaszczyzna w $\boldsymbol{R}^3$ o równaniu $2x - y + 4z + 3 = 0$; **b)** prosta w $\boldsymbol{R}^3$ o równaniu $\frac{x+15}{-23} = \frac{y+7}{-10} = z$.

7.5* a) prosta dla $a = 0$ i $b \neq 0$, płaszczyzna dla $a = b = 0$;

b) punkt dla $a \neq -\frac{1}{2}$, prosta dla $a = \frac{1}{2}$, rozwiązania nigdy nie tworzą płaszczyzny;

c) zbiór rozwiązań nie może być punktem ani całą przestrzenią, prosta dla $a = 0$ i $b \neq 0$, płaszczyzna dla $b = 0$, dla $ab \neq 0$ układ nie ma rozwiązań; **d)** punkt dla $abc \neq 0$, prosta dla $ac \neq 0$ i $b = 0$ oraz $bc \neq 0$ i $a = 0$, płaszczyzna dla dokładnie dwóch spośród liczb a, b, c równych 0, cała przestrzeń dla $a = b = c = 0$, dla $ab \neq 0$ i $c = 0$ układ nie ma rozwiązań.

7.6 a) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ z = 5 \end{cases}$; **b)** $5x - 4y + z = 0$; **c)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - z = -2 \\ 4x + u = 11 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 4x + 3z - u = 13 \\ 3x + z - v = 6 \end{cases}$; **e)** $3x + y - 14z - 7v = -44$;

f) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$.

Przekształcenia liniowe

Ósmy tydzień

Podstawowe określenia (3.1). **Jądro i obraz przekształcenia liniowego** (3.2).

Przykłady

- **Przykład 8.1**

Uzasadnić liniowość podanych przekształceń przestrzeni liniowych:

a) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y) = (x + 2y, x - y, x)$;

b) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, L jest symetrią względem osi Oy;

c) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę xOz;

d) $L : \mathbf{R}[x] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$, $(Lp)(x) = xp'(x) + p(1)$ dla $p \in \mathbf{R}[x]$ oraz $x \in \mathbf{R}$;

e) $L : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$, $(Lf)(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ dla $f \in C([0,1])$ oraz $x \in [0,1]$.

Rozwiązanie

Niech U, V będą rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi. Zgodnie z definicją, przekształcenie $L : U \longrightarrow V$ jest liniowe, jeżeli dla dowolnych wektorów $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ oraz dla dowolnych liczb $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ zachodzi zależność

$$L(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) = \alpha_1 L(\vec{u}_1) + \alpha_2 L(\vec{u}_2).$$

a) Niech $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Wówczas

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) &= L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 (x_1 + 2y_1, x_1 - y_1, x_1) + \alpha_2 (x_2 + 2y_2, x_2 - y_2, x_2) \\ &= \alpha_1 L(\vec{u}_1) + \alpha_2 L(\vec{u}_2), \end{aligned}$$

więc przekształcenie L jest liniowe.

b) Przekształcenie L można zapisać wzorem $L(x, y) = (-x, y)$. Podobnie jak poprzednio

możemy napisać, że

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) &= L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= (-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1 (-x_1, y_1) + \alpha_2 (-x_2, y_2) = \alpha_1 L(\vec{u}_1) + \alpha_2 L(\vec{u}_2). \end{aligned}$$

Przekształcenie L jest zatem liniowe.

c) W tym przykładzie $L(x, y, z) = (x, 0, z)$. Niech $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) &= L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, 0, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 (x_1, 0, z_1) + \alpha_2 (x_2, 0, z_2) \\ &= \alpha_1 L(\vec{u}_1) + \alpha_2 L(\vec{u}_2). \end{aligned}$$

Także to przekształcenie jest liniowe.

d) Przekształcenie L jest liniowe, bowiem dla $p_1, p_2 \in \mathbf{R}[x]$ i dla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ oraz dla dowolnego argumentu $x \in \mathbf{R}$ prawdziwe są równości

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)(x) &= x(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)'(x) + (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)(1) \\ &= x\alpha_1 p_1'(x) + x\alpha_2 p_2'(x) + \alpha_1 p_1(1) + \alpha_2 p_2(1) \\ &= \alpha_1 (xp_1'(x) + p_1(1)) + \alpha_2 (xp_2'(x) + p_2(1)) \\ &= \alpha_1 L(p_1)(x) + \alpha_2 L(p_2)(x) = (\alpha_1 L(p_1) + \alpha_2 L(p_2))(x). \end{aligned}$$

e) Liniowość podanego przekształcenia wynika z podanych niżej równości.

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) &= 2(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\alpha_1 f_1\left(\frac{x}{2}\right) + 2\alpha_2 f_2\left(\frac{x}{2}\right) = \alpha_1 L(f_1)(x) + \alpha_2 L(f_2)(x) \\ &= (\alpha_1 L(f_1) + \alpha_2 L(f_2))(x). \end{aligned}$$

Równości te są prawdziwe dla dowolnych funkcji $f_1, f_2 \in C([0,1])$, dla dowolnych liczb $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ i dla dowolnego argumentu $x \in [0,1]$.

- **Przykład 8.2**

Uzasadnić, że podane przekształcenia przestrzeni liniowych nie są liniowe:

a) $L : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $L(x) = |x|$;

b) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y, z) = (xy, x, z)$;

c) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y) = (2x - y, x + 1, y - 1)$;

d) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół punktu $(1, 2)$;

e) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na prostą $x = 1$, $z = 0$;

f) $L : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$, $(Lp)(x) = \int\limits_0^x p(t)p'(t)\,dt$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x]$ oraz $x \in \mathbf{R}$;

g) $L : C(\mathbf{R}) \longrightarrow C(\mathbf{R})$, $(Lf)(x) = f^2(x)$ dla $f \in C(\mathbf{R})$ oraz $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie
Niech U, V będą rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi. Wiadomo, że przekształcenie $L : U \longrightarrow V$ jest liniowe, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:
1) $L(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = L(\vec{u}_1) + L(\vec{u}_2)$ dla $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$;
2) $L(\alpha \vec{u}) = \alpha L(\vec{u})$ dla $\vec{u} \in U$ oraz $\alpha \in \mathbf{R}$.

Wystarczy więc, że któryś z tych warunków nie jest spełniony, a przekształcenie nie jest liniowe. Czasem wygodnie jest posłużyć się warunkiem koniecznym liniowości przekształcenia L, tj. równością $L(\vec{0}) = \vec{0}$.

a) Przyjmijmy $\vec{u}_1 = x$, $\vec{u}_2 = -x$. Wówczas
$$L(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = L(0) = 0 \neq L(\vec{u}_1) + L(\vec{u}_2) = 2|x| \text{ dla } x \neq 0.$$
Przekształcenie L nie jest liniowe.

b) Niech $\vec{u} = (1,1,0)$ oraz $\alpha = 2$. Wtedy
$$L(2\vec{u}) = L(2,2,0) = (4,2,0) \neq 2L(\vec{u}) = 2(1,1,0) = (2,2,0),$$
więc przekształcenie L nie jest liniowe.

c) W tym przykładzie nie jest spełniony warunek konieczny liniowości przekształcenia, mamy bowiem
$$L(0,0) = (0,1,-1) \neq (0,0,0).$$

d) Podobnie jak powyżej
$$L(0,0) = (3,1) \neq (0,0),$$
więc przekształcenie L nie jest liniowe.

e) Również w tym przykładzie mamy
$$L(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0),$$
co przeczy liniowości.

f) Po obliczeniu całki otrzymamy $L(p)(x) = \dfrac{p^2(x) - p^2(0)}{2}$. Przyjmując teraz $p(x) = x$, oraz $\alpha = 2$ otrzymujemy
$$L(2p)(x) = \frac{1}{2}(2p)^2(x) = 2x^2 \neq 2L(p)(x) = x^2 \text{ dla } x \neq 0,$$
więc przekształcenie L nie jest liniowe.

g) Możemy tu zastosować takie samo uzasadnienie, jak w przykładzie **f)**.

• Przykład 8.3
Napisać wzory określające wszystkie przekształcenia liniowe $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ i opisać ich wykresy.

Rozwiązanie
Przyjmijmy, że $L(1,0) = s$, $L(0,1) = t$, przy czym wartości $s, t \in R$ wybieramy dowolnie. Wówczas dla dowolnych $x, y \in R$ mamy
$$z = L(x,y) = L(x(1,0) + y(0,1)) = xL(1,0) + yL(0,1) = sx + ty.$$
Z otrzymanej równości wynika, że wykresem tego przekształcenia jest płaszczyzna o równaniu $sx + yt - z = 0$ przechodząca przez początek układu współrzędnych, której wektorem normalnym jest $\vec{n} = (s,t,-1)$. Otrzymany wzór $L(x,y) = sx + ty$ obejmuje już

wszystkie liniowe przekształcenia płaszczyzny w prostą. Wykresami tych przekształceń są wszystkie płaszczyzny w R^3 przechodzące przez punkt $(0,0,0)$, które nie są prostopadłe do płaszczyzny xOy.

• Przykład 8.4
Przekształcenie liniowe $L : \mathbf{R}_1[x] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$ przeprowadza wektor $p_1 = 2x + 3$ na wektor $q_1 = 4x^2 - x - 2$, a wektor $p_2 = 4x - 5$ na wektor $q_2 = 2x^7 + x$. Znaleźć obraz wektora $p = x + 7$ w tym przekształceniu.

Rozwiązanie
Wystarczy wektor p przedstawić jako kombinację liniową wektorów p_1 i p_2. Jest to możliwe, gdyż wektory p_1, p_2 tworzą bazę przestrzeni $R_1[x]$. Niech $p = ap_1 + bp_2$. Z układu równań $1 = 2a + 4b$, $7 = 3a - 5b$ wyznaczamy współczynniki $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Mamy zatem
$$\begin{aligned} L(p) &= L\left(\frac{3}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2\right) = \frac{3}{2}L(p_1) - \frac{1}{2}L(p_2) \\ &= \frac{3}{2}\left(4x^2 - x - 2\right) - \frac{1}{2}\left(2x^7 + x\right) = -x^7 + 6x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$

• Przykład 8.5
Wyznaczyć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych posługując się ich interpretacją geometryczną. Porównać uzyskane odpowiedzi z wynikami obliczeń algebraicznych:
a) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, L jest rzutem prostokątnym na oś Ox;
b) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, L jest obrotem wokół początku układu o kąt $\frac{\pi}{4}$;
c) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, L jest symetrią względem osi Oy;
d) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę yOz.

Rozwiązanie
a) Na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$, przy rzutowaniu prostokątnym na oś Ox wszystkie punkty osi Oy zostają przekształcone w punkt $(0,0)$ i tylko one, zatem $\operatorname{Ker} L =$ oś Oy. Jednocześnie wszystkie punkty osi Ox nie zmieniają położenia, natomiast obrazy pozostałych znajdują się także na tej osi. Oznacza to, że $\operatorname{Im} L =$ oś Ox. Licząc formalnie mamy
$$\begin{aligned} &L(x,y) = (x,0), \\ &\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x,0) = (0,0)\right\} = \{(0,y) : y \in \mathbf{R}\} = \text{oś } Oy, \\ &\operatorname{Im} L = \{(x,0) : x \in \mathbf{R}\} = \text{oś } Ox. \end{aligned}$$

b) Przy obrocie o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół początku układu współrzędnych jedynie punkt $(0,0)$ nie zmienia swojego położenia, a wszystkie pozostałe punkty płaszczyzny zachowują swą dodatnią odległość od środka obrotu, zatem $\operatorname{Ker} L = \{(0,0)\}$. Oczywiście $\operatorname{Im} L = \mathbf{R}^2$, bo dowolny punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ jest obrazem punktu $\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$ w tym przekształceniu.

Z rozważań geometrycznych wynika, że $L(x,y) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$, więc

$$\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y) \in R^2 : \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = (0,0)\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in R^2 : x - y = x + y = 0\right\} = \{(0,0)\},$$

$$\operatorname{Im} L = \left\{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) : x, y \in R\right\} = \operatorname{lin}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = R^2.$$

c) Symetria osiowa w przestrzeni R^3 przekształca przestrzeń na całą przestrzeń, co oznacza, że $\operatorname{Im} L = R^3$. Punkt $(0,0,0)$ jest obrazem jedynie samego siebie, gdyż wszystkie punkty osi Oy nie zmieniają swego położenia, a wszystkie inne punkty przestrzeni zachowują swą dodatnią odległość od osi symetrii. Stąd $\operatorname{Ker} L = \{(0,0,0)\}$. Zapisując to ściśle mamy

$$L(x,y,z) = (-x, y, -z),$$

$$\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y,z) \in R^3 : -x = y = -z = 0\right\} = \{(0,0,0)\},$$

$$\operatorname{Im} L = \{(-x, y, -z) : x, y, z \in R\} = R^3.$$

d) Rzutując prostopadle punkty przestrzeni R^3 na płaszczyznę yOz otrzymamy całą płaszczyznę yOz, zatem $\operatorname{Im} L =$ płaszczyzna yOz. Punkt $(0,0,0)$ jest obrazem wszystkich punktów osi Ox. Zatem oś Ox jest jądrem tego przekształcenia. Formalny rachunek prowadzi do tych samych wniosków, mamy bowiem

$$L(x,y,z) = (0,y,z).$$

$$\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y,z) \in R^3 : (0,y,z) = (0,0,0)\right\} = \{(x,0,0) : x \in R\} = \text{oś } Ox,$$

$$\operatorname{Im} L = \{(0,y,z) : y, z \in R\} = \text{płaszczyzna } yOz.$$

• Przykład 8.6

Wyznaczyć jądra, obrazy oraz ich bazy podanych przekształceń liniowych:

a) $L : R^2 \longrightarrow R^2$, $L(x,y) = (2x - y, 3y - 6x)$;

b) $L : R^3 \longrightarrow R^4$, $L(x,y,z) = (2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z)$;

c) $L : R^4 \longrightarrow R^3$, $L(x,y,z,t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$;

d) $L : R_2[x] \longrightarrow R_3[x]$, $(Lp)(x) = (x^2 + 2x)\, p'(-x)$ dla $x \in R$.

Rozwiązanie

Wyznaczenie jąder przekształceń liniowych sprowadza się najczęściej do znajdowania przestrzeni rozwiązań jednorodnych układów równań liniowych, zaś wyznaczenie obrazów tych przekształceń polega na opisie przestrzeni liniowych danych przez generatory. Podobnie jest w naszych przykładach.

a) Mamy

$$\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y) \in R^2 : 2x - y = 3y - 6x = 0\right\} = \{(x, 2x) : x \in R\} = \operatorname{lin}\{(1,2)\},$$

zatem jądrem przekształcenia L jest prosta $y = 2x$ na płaszczyźnie. Dalej

$$\operatorname{Im} L = \{(2x - y, 3y - 6x) : x, y \in R\} = \operatorname{lin}\{(2,-6), (-1,3)\} = \operatorname{lin}\{(-1,3)\}.$$

Podobnie, obraz tego przekształcenia można zinterpretować geometrycznie jako prostą o równaniu $y = -3x$ na płaszczyźnie.

b) Zauważmy, że dowolny element obrazu przekształcenia L można zapisać w postaci

$$L(x,y,z) = x(2,1,2,-1) + y(-1,1,1,0) + z(-1,4,5,-1).$$

Stąd wynika, że

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{(2,1,2,-1), (-1,1,1,0), (-1,4,5,-1)\}.$$

Wymiar obrazu wyznaczymy z zależności

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{w_3 - w_1}{=\!=\!=} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Bazę obrazu stanowią więc dwa liniowo niezależne wektory wybrane spośród jego generatorów, np. $(2,1,2-1)$, $(-1,1,1,0)$. Jądro przekształcenia L jest określone wzorem

$$\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y,z) \in R^3 : 2x - y - z = 0, x + y + 4z = 0, 2x + y + 5z = 0, -x - z = 0\right\}.$$

Po rozwiązaniu jednorodnego układu równań określającego ten zbiór mamy: $x = -z$, $y = -3z$, gdzie $z \in R$. Zatem

$$\operatorname{Ker} L = \{(-z, -3z, z) : z \in R\} = \operatorname{lin}\{(1,3,-1)\}.$$

Wymiar jądra jest równy 1, a jego bazą jest wektor $(1,3,-1)$. Zbiór $\operatorname{Ker} L$ jest prostą o równaniu kierunkowym $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$. w przestrzeni R^3.

c) W tym przykładzie mamy

$$\operatorname{Ker} L = \left\{(x,y,z,t) \in R^4 : x + 2z + t = 0, -2x + y - 3z - 5t = 0, x - y + z + 4t = 0\right\},$$

$$\operatorname{Im} L = \{(x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t) : x, y, z, t \in R\}.$$

Rozwiazanie jednorodnego układu równań określającego jądro przekształcenia L znajdziemy stosując metodą eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 = w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right],$$

zatem $x = -2z - t$, $y = -z + 3t$, gdzie $z, t \in R$ oraz

$$\operatorname{Ker} L = \{(-2z - t, -z + 3t, z, t) : z, t \in R\} = \operatorname{lin}\{(-2,-1,1,0), (-1,3,0,1)\}.$$

Stąd $\dim(\operatorname{Ker} L) = 2$, a znalezione generatory jądra są też jego bazą. Natomiast

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{(1,-2,1), (0,1,-1), (2,-3,1), (1,-5,4)\}$$

oraz

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{w_3 - w_1}{\overset{w_2 + 2w_1}{=\!=\!=}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \overset{w_3 = -w_2}{=\!=\!=} 2.$$

Bazę obrazu stanowią dwa liniowo niezależne generatory obrazu, np. wektory $(1,-2,1)$, $(0,1,-1)$. Obraz przekształcenia L ma swoją interpretację geometryczną. Jest to płaszczyzna o równaniu $x+y+z=0$ w przestrzeni R^3.

d) Niech $p = ax^2+bx+c$, gdzie $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ będzie dowolnym wektorem z przestrzeni $R_2[x]$. Wówczas

$$(Lp)(x) = \left(x^2+2x\right)(-2ax+b) = -2ax^3+(b-4a)x^2+2bx.$$

Dalej $(Lp)(x)\equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-2a=0, b-4a=0, 2b=0$, czyli $a=b=0$ i $p(x)\equiv c$. Stąd wynika, że

$$\operatorname{Ker} L = \{p \in \boldsymbol{R}_2[x] : p(x)\equiv c, c\in R\}.$$

Jądrem przekształcenia L są zatem wszystkie wielomiany stałe, wymiar jądra jest równy 1, a bazą jest np. wielomian $q(x)\equiv 1$. Zauważmy dalej, że $(Lp)(x) = a\left(-2x^3-4x^2\right) + b\left(x^2+2x\right)$. Stąd wynika, że

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\left\{-2x^3-4x^2, x^2+2x\right\}.$$

Wymiar obrazu jest równy 2, a dwa znalezione generatory tworzą zarazem jego bazę.

- **Przykład 8.7**

Podać wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:

a) $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $L(x,y,z) = (x-3y+2z, -2x+6y-4z)$;

b) $L : \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $L(x,y,z,t) = (x+2y+z-t, x+2z+t, 2x+y+3t)$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia, które mówi, że suma wymiarów jądra i obrazu przekształcenia liniowego $L : U \longrightarrow V$ przestrzeni skończenie wymiarowych jest równa wymiarowi przestrzeni U.

a) W tym przykładzie $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{(1,-2),(-3,6),(2,-4)\}$, zatem

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1.$$

Z tego wynika, że $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \boldsymbol{R}^3 - 1 = 3-1 = 2$.

b) Rozumując podobnie mamy $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{(1,1,2),(2,0,1),(1,2,0),(-1,1,3)\}$, a więc

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = 3.$$

Ponadto $\dim(\operatorname{Ker} L) = \dim \boldsymbol{R}^4 - 3 = 4-3 = 1$.

- **Przykład* 8.8**

Podać przykłady przekształceń liniowych takich, że:

a) $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $\operatorname{Ker} L = \{(x,0) : x\in \boldsymbol{R}\}$, $\operatorname{Im} L = \{(r,s,t) : 2r = 3s = 6t\}$;

b) $L : \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\operatorname{Ker} L = \{(x,-x,z,-z) : x,z \in \boldsymbol{R}\}$,
$\operatorname{Im} L = \{(s+t, s-t) : s,t\in \boldsymbol{R}\}$;

c) $L : \boldsymbol{R}_2[x] \longrightarrow \boldsymbol{R}_2[x]$, $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\left\{x-1, x^2-1\right\}$, $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\left\{x^2\right\}$.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że $L(x,0) = (0,0,0)$ dla $x\in R$ oraz $\operatorname{Im} L = \{(3t,2t,t) : t\in R\}$. Ponadto

$$L(x,y) = L((x,0)+(0,y)) = L(x,0)+L(0,y) = yL(0,1).$$

Przyjmując teraz, że $L(0,1) = (3c,2c,c)$ oraz pewnego $c\neq 0$ otrzymamy

$$L(x,y) = (3cy, 2cy, cy).$$

b) Generatorami jądra przekształcenia L są wektory $\vec{u}_1 = (1,-1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1,-1)$. Uzupełniamy je do bazy przestrzeni R^4 dodając na przykład wektory $\vec{u}_3 = (1,0,0,0)$, $\vec{u}_4 = (0,0,0,1)$. Wówczas dowolny wektor $\vec{u} = (x,y,z,t)\in R^4$ można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\vec{u} &= x\vec{u}_3 + y(\vec{u}_3-\vec{u}_1) + z(\vec{u}_2+\vec{u}_4) + t\vec{u}_4 \\ &= -y\vec{u}_1 + z\vec{u}_2 + (x+y)\vec{u}_3 + (z+t)\vec{u}_4.\end{aligned}$$

Dalej mamy

$$L(\vec{u}) = -yL(\vec{u}_1) + zL(\vec{u}_2) + (x+y)L(\vec{u}_3) + (z+t)L(\vec{u}_4).$$

Wektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ należą do jądra, więc $L(\vec{u}_1) = L(\vec{u}_2) = \vec{0}$. Generatorami obrazu przekształcenia L są wektory $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,-1)$. Przyjmijmy więc przykładowo, że $L(\vec{u}_3) = \vec{v}_1$, $L(\vec{u}_4) = \vec{v}_2$. Ostatecznie otrzymujemy

$$L(\vec{u}) = (x+y)\vec{v}_1 + (z+t)\vec{v}_2,$$

czyli

$$L(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y-z-t).$$

c) Niech $p_1 = x-1$, $p_2 = x^2-1$. Oczywiście $Lp_1 = Lp_2 \equiv 0$. Wektory p_1, p_2 uzupełnimy do bazy przestrzeni liniowej $\boldsymbol{R}_2[x]$ dodając na przykład wektor $p_3\equiv 1$. Niech teraz $p = ax^2+bx+c$ będzie dowolnym wektorem z przestrzeni $R_2[x]$. Zauważmy, że

$$p = a(p_2+p_3) + b(p_1+p_3) + cp_3 = bp_1 + ap_2 + (a+b+c)p_3,$$

zatem

$$L(p) = bL(p_1) + aL(p_2) + (a+b+c)L(p_3) = (a+b+c)L(p_3).$$

Wektor $L(p_3)$ należy do przestrzeni $\operatorname{lin}\left\{x^2\right\}$. Przyjmijmy więc, że $L(p_3) = x^2$. Szukane przekształcenie L może mieć zatem postać $L(p) = (a+b+c)x^2$ lub zapisując inaczej $L(p) = x^2p(1)$.

Zadania

- **Zadanie 8.1**

Uzasadnić liniowość wskazanych przekształceń przestrzeni liniowych:

a) $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow R^2$, $L(x,y,z) = (x+y, 2x-y+3z)$;

b) $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow R^2$, L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu $(0,0)$;

c) $L : R^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, L jest symetrią względem płaszczyzny yOz;

d) $L : \boldsymbol{R}[x] \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $(Lp)(x) = \left(\int_0^1 p(t)\,dt,\ p'(2),\ p''(3)\right)$ dla $p\in \boldsymbol{R}[x]$;

e) $L : C(R) \longrightarrow \boldsymbol{R}_2[x]$, $(Lf)(x) = x^2f(2) + xf(1) + f(0)$ dla $f\in C(R)$.

○ **Zadanie 8.2**

Uzasadnić, że podane przekształcenia przestrzeni liniowych nie są liniowe:

a) $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(x) = (x+1)(x-1)$;

b) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (3x+2y-1, 2x-3y)$;

c) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, L jest symetrią względem prostej $x+y+2=0$;

d) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $x-y+z=1$;

e) $L : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $(Lp)(x) = p(x)p'(x)$;

f) $L : C(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$, $(Lf)(x) = \sin f(x)$.

○ **Zadanie 8.3**

Napisać wzory wszystkich przekształceń liniowych $L : M_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$.

○ **Zadanie 8.4**

Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ przeprowadza wektor $\vec{x} = (2,1,1)$ na wektor $\vec{u} = (4,5)$ oraz wektor $\vec{y} = (1,-3,2)$ na wektor $\vec{v} = (-6,1)$. Znaleźć obraz wektora $\vec{z} = (5,6,1)$ w tym przekształceniu. Czy przy tych danych można znaleźć wektor $L(4,1,5)$?

○ **Zadanie 8.5**

Znaleźć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych posługując się ich interpretacją geometryczną. Porównać uzyskane odpowiedzi z wynikami obliczeń algebraicznych:

a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest rzutem prostokątnym na prostą $l : y = x$;

b) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest jednokładnością względem punktu $(0,0)$ w skali $k=2$;

c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest symetrią względem płaszczyzny xOy;

d) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na prostą $l : x=y,\ z=0$;

e) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{6}$ wokół osi Oy.

○ **Zadanie 8.6**

Wyznaczyć jądra, obrazy oraz ich bazy podanych przekształceń liniowych:

a) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y,z) = (x+y, y+z)$;

b) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L(x,y,z) = (2x-y+z, x+2y-z, -x+3y-2z, 8x+y+z)$;

c) $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = (x^2+x)\,p(2) + (3x^2-x)\,p(1)$.

○ **Zadanie 8.7**

Podać wymiary jąder i obrazów następujących przekształceń liniowych:

a) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z,t) = (x+y+z-t, 2x+y-z+t, y+3z-3t)$;

b) $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z,s,t) = (x+y+z, y+z+s, z+s+t)$;

c) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$L(x,y,z,t) = (x-2y+3z-4t, 3x+5z+2t, x+y+z+3t, 5x-y+9z+t)$.

○ **Zadanie* 8.8**

Skonstruować przykłady przekształceń liniowych mających podane jądra i obrazy:

a) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} L = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} L = \{(x,y) : x+y=0\}$;

b) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} L = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}$, $\operatorname{Im} L = \{(x,y) : x+3y=0\}$;

c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\{(1,1,2),(1,-1,0)\}$, $\operatorname{Im} L = \{(x,y) : 2x=3y\}$;

d) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x-z=3y-t=0\}$;

e) $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\{1-x\}$, $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{1+x, 1+x^2\}$.

○ **Zadanie* 8.9**

Niech $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ będą przestrzeniami liniowymi. Uzasadnić, że dla dowolnych podprzestrzeni $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ odpowiednio przestrzeni $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ spełniających zależność

$$\dim \boldsymbol{U} + \dim \boldsymbol{V} = \dim \boldsymbol{X} < \infty,$$

istnieje przekształcenie liniowe $L : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$ takie, że

$$\operatorname{Ker} L = \boldsymbol{U} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Im} L = \boldsymbol{V}.$$

Odpowiedzi i wskazówki

8.3 $L\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = px + qy + rz + st$, gdzie $p,q,r,s \in \mathbb{R}$.

8.4 $L(\vec{z}) = (18,14)$; wektora $L(4,1,5)$ nie można wyznaczyć.

8.5 a) $\operatorname{Ker} L =$ prosta $l : y=-x$, $\operatorname{Im} L =$ prosta $k : y = x$; b) $\operatorname{Ker} L = \{(0,0)\}$, $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2$; c) $\operatorname{Ker} L = \{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^3$; d) $\operatorname{Ker} L =$ płaszczyzna $\pi : x+y=0$, $\operatorname{Im} L =$ prosta $l : x=y, z=0$; e) $\operatorname{Ker} L = \{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^3$.

8.6 a) $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\{(1,-1,1)\}$, $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2$; b) $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\{(1,-3,-5)\}$, $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{(-1,2,3,1),(1,-1,-2,1)\}$; c) $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\{x^2-3x+2\}$, $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\{x,x^2\}$.

8.7 a) $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Im} L = 2$; b) $\dim \operatorname{Ker} L = 2$, $\dim \operatorname{Im} L = 3$; c) $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Im} L = 2$.

8.8* a) $L(x,y,z) = (z,-z)$; b) $L(x,y,z) = (-3x-3y-3z, x+y+z)$; c) $L(x,y,z) = (3z-3x-3y, 2z-2x-2y)$; d) $L(x,y,z,t) = (z-2x, t-3y, 2z-4x, 3t-9y)$; e) $(Lp)(x) = p(x) + (x-1)p(0) + p(1)$.

Dziewiąty tydzień

Macierz przekształcenia liniowego (3.3).

Przykłady

● **Przykład 9.1**

Napisać macierze podanych przekształceń liniowych w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych:

a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x,y) = (x+y, 3x-6y, 4x-y)$;

b) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y,z,t) = (x-y+2z, 4x-y+3z-t)$;

c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na prostą $l : x = 2y = 4z$;

d) $L : R_2[x] \longrightarrow R_1[x]$, $(Lp)(x) = (3-x)p''(x) + 4p'(x)$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją kolumny macierzy A_L przekształcenia liniowego $L : U \longrightarrow V$ w ustalonych bazach przestrzeni liniowych U, V tworzą współrzędne w bazie przestrzeni V obrazów kolejnych wektorów bazy przestrzeni U.

a) Z tego, że $L(1,0) = (1,3,4)$, $L(0,1) = (1,-6,-1)$ wynika, że macierz przekształcenia L ma postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Obrazy kolejnych wektorów bazy standardowej $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są następujące

$$L(\vec{e}_1) = (1,4),\ L(\vec{e}_2) = (-1,-1),\ L(\vec{e}_3) = (2,3),\ L(\vec{e}_4) = (0,-1).$$

Wynika stąd, że

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Niech $P = (a,b,c)$ będzie dowolnym punktem przestrzeni $\mathbb{R}^3$, $P' = L(P)$ rzutem prostokątnym punktu P na prostą l. Punkt P' jest punktem wspólnym prostej l i płaszczyzny π prostopadłej do tej prostej i przechodzącej przez punkt P. Wektor $\vec{k} = (4,2,1)$ jest wektorem kierunkowym prostej l i zarazem wektorem normalnym płaszczyzny π. Wstawiając równanie parametryczne prostej $l : x = 4t,\ y = 2t,\ z = t$ do równania płaszczyzny $\pi : 4(x-a) + 2(y-b) + z - c = 0$, otrzymujemy zależność $4(4t-a) + 2(2t-b) + t - c = 0$. Obliczając stąd wartość parametru $t = \frac{1}{21}(4a+2b+c)$ znajdujemy punkt P' i jednocześnie wzór określający przekształcenie L:

$$L(a,b,c) = P' = \left(\frac{16a+8b+4c}{21}, \frac{8a+4b+2c}{21}, \frac{4a+2b+c}{21}\right).$$

Mając ten wzór możemy napisać macierz przekształcenia L

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{16}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

d) Przyjmujemy wektory $1, x, x^2$ jako bazę przestrzeni $R_2[x]$ oraz wektory $1, x$ jako bazę przestrzeni $R_1[x]$. Mamy $L(1) = 0$, $L(x) = 4$, $L(x^2) = 6 + 6x$, zatem

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- **Przykład 9.2**

Znaleźć z definicji macierze podanych przekształceń liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x,y) = (x+y, 2x+y, x-3y)$,
$\vec{u}_1 = (1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,-1)$, $\vec{v}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$;

b) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y,z) = (x-y, y-z)$,
$\vec{u}_1 = (1,2,2)$, $\vec{u}_2 = (1,1,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,2)$, $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0)$;

c) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, L jest symetrią względem osi Oy,
$\vec{u}_1 = (-3,5)$, $\vec{u}_2 = (2,1)$, $\vec{v}_1 = (2,4)$, $\vec{v}_2 = (3,1)$;

d) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę yOz,
$\vec{u}_1 = (4,1,2)$, $\vec{u}_2 = (6,-1,2)$, $\vec{u}_3 = (5,3,2)$ $\vec{v}_1 = (1,0,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,1,0)$;

e) $L : R_2[x] \longrightarrow R_3[x]$, $(Lp)(x) = 3xp(-x)$,
$p_1 = x^2 + 2x$, $p_2 = 3x - 1$, $p_3 = x - 5$, $q_1 = x^3 + x$, $q_2 = x^3 - x$, $q_3 = x^2 + 1$, $q_4 = x^2 - 1$.

Rozwiązanie

We wszystkich przykładach przekształceń $L : U \longrightarrow V$ wygodnie jest wektory baz standardowych przestrzeni V przedstawić jako kombinacje liniowe wektorów danych baz tych przestrzeni.

a) Dla bazy standardowej $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zachodzą wzory:

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3,\ \vec{e}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3,\ \vec{e}_3 = \vec{v}_3.$$

Ponadto

$$L(\vec{u}_1) = (2,3,-2) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = 2\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3,$$
$$L(\vec{u}_2) = (0,1,4) = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = \vec{v}_2 + 5\vec{v}_3.$$

Macierz przekształcenia L ma więc postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) Dla przekształcenia L rozważanego w tym przykładzie mamy $L(1,2,2) = (-1,0) = -\vec{v}_2$, $L(1,1,1) = (0,0)$, $L(1,1,2) = (0,-1) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Macierz przekształcenia L ma więc postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Przekształcenie L wyraża się wzorem $L(x,y) = (-x,y)$, więc $L(-3,5) = (3,5)$, $L(2,1) = (-2,1)$. Niech P będzie macierzą przejścia z bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$ do bazy $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Wówczas

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix},\ P^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},\ P^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że $L(\vec{u}_1) = \frac{6}{5}\vec{v}_1 + \frac{1}{5}\vec{v}_2$, $L(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ i macierz przekształcenia L ma postać

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}.$$

d) W tym przykładzie $L(x,y,z) = (0,y,z)$, $\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$, $\vec{e}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $\vec{e}_3 = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{2}$. Ponadto $L(\vec{u}_1) = (0,1,2) = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_3$, $L(\vec{u}_2) = (0,-1,2) = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$, $L(\vec{u}_3) = (0,3,2) = -4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$. Macierz przekształcenia L ma więc postać

$$A_L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

e) Dla przekształcenia rozważanego w tym przykładzie mamy

$$L(p_1) = 3x^3 - 6x^2 = 3\frac{q_1 + q_2}{2} - 6\frac{q_3 + q_4}{2} = \frac{3}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2 - 3q_3 - 3q_4,$$
$$L(p_2) = -9x^2 - 3x = -9\frac{q_3 + q_4}{2} - 3\frac{q_1 - q_2}{2} = -\frac{3}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2 - \frac{9}{2}q_3 - \frac{9}{2}q_4,$$
$$L(p_3) = -3x^2 - 15x = -3\frac{q_3 + q_4}{2} - 15\frac{q_1 - q_2}{2} = -\frac{15}{2}q_1 + \frac{15}{2}q_2 - \frac{3}{2}q_3 - \frac{3}{2}q_4.$$

Możemy teraz napisać macierz przekształcenia L:

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

- **Przykład 9.3**

Macierz przekształcenia liniowego $L : \boldsymbol{U} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ ma w bazie $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ przestrzeni liniowej $\boldsymbol{U}$ i w bazie $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ przestrzeni $\boldsymbol{V}$ postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć obrazy podanych wektorów w tym przekształceniu:

a) $\vec{u} = 6\vec{u}_2 - \vec{u}_3$; b) $\vec{u} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 4\vec{u}_3$.

Rozwiązanie

a) Obraz wektora $\boldsymbol{u}$ wyznaczymy z definicji przekształcenia L i jego macierzy. Z macierzy A odczytujemy, że

$$L(\boldsymbol{u}_1) = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2, \quad L(\boldsymbol{u}_2) = -2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2, \quad L(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2.$$

Stąd wynika, że

$$L(\boldsymbol{u}) = 6L(\boldsymbol{u}_2) - L(\boldsymbol{u}_3) = 6(-2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{v}_1 - 5\boldsymbol{v}_2 = -13\boldsymbol{v}_1 + 19\boldsymbol{v}_2.$$

b) Zastosujemy zależność między wektorami $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2$

$$L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \Longleftrightarrow A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

W naszym przykładzie

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix},$$

a więc $L(\boldsymbol{u}) = -5\boldsymbol{v}_1 - 10\boldsymbol{v}_2$.

- **Przykład 9.4**

Dla podanych przekształceń liniowych przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{R}^3)$ naszkicować zbiory D oraz $L(D)$ i porównać ich pola (objętości), jeżeli

a) $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $L(x,y) = (3x, x + 2y)$, $D = [0,1] \times [0,2]$;

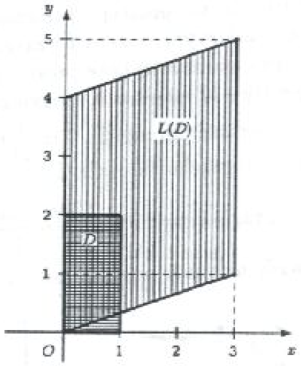
b) $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę xOz, $D = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z\}$.

Rozwiązanie

Przykłady będą ilustracją wzoru

$$|L(D)| = |D| \cdot |\det A|,$$

w którym A jest macierzą przekształcenia L, a symbol $|\cdot|$ oznacza odpowiednio pole lub objętość zbioru.

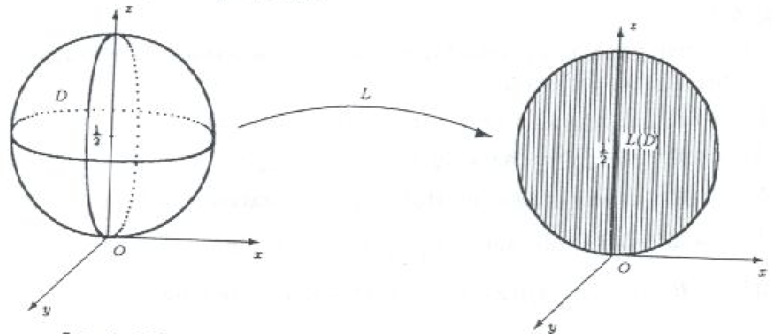


a) Zauważmy najpierw, że jeżeli punkt Q jest obrazem punktu P przy przekształceniu liniowym L, to obrazem odcinka $\overrightarrow{OP}$ w tym przekształceniu będzie odcinek $\overrightarrow{OQ}$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych. W naszym przykładzie zbiór D jest równoległobokiem (prostokątem) rozpiętym na wektorach $\vec{u}_1 = (1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,2)$. Zbiór $L(D)$ jest zatem równoległobokiem rozpiętym na wektorach $L(\vec{u}_1) = (3,1)$, $L(\vec{u}_2) = (0,4)$. Przedstawmy to na rysunku. Macierz przekształcenia L ma postać $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, a pola obszarów D i $L(D)$ związane są zależnością $|L(D)| = 12 = 2 \cdot 6 = |D| \cdot |\det A|$.

b) W tym przykładzie $L(x,y,z) = (x,0,z)$, D jest kulą o środku w punkcie $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$, objętość zbioru D jest równa $\frac{\pi}{6}$. Dalej

$$L(D) = \{(x,0,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z\} = \{(x,0,z) : x^2 + z^2 \leqslant z\}.$$

Zbiór $L(D)$ jest zatem kołem o środku $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$ leżącym na płaszczyźnie xOz. Przedstawia to poniższy rysunek:



Ponadto $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, więc rzeczywiście zachodzi wzór

$$|L(D)| = 0 = \frac{\pi}{6} \cdot 0 = |D| \cdot |\det A|.$$

• **Przykład 9.5**

Rozwiązać ponownie **Przykład 9.2** stosując tym razem wzór na zmianę macierzy przekształcenia liniowego przy zmianie baz wychodząc od baz standardowych rozważanych przestrzeni liniowych.

Rozwiązanie

Macierze A i A' przekształcenia liniowego $L : U \longrightarrow V$ w bazach „starych" obu przestrzeni liniowych i w „nowych" bazach tych przestrzeni związane są zależnością

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P,$$

gdzie P oznacza macierz przejścia z bazy „starej" do „nowej" przestrzeni U, zaś Q jest macierzą przejścia z bazy „starej" do „nowej" przestrzeni $\boldsymbol{V}$. We wszystkich przykładach bazami „starymi" będą bazy standardowe odpowiednich przestrzeni. Mamy zatem:

a)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

b)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c)

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}.$$

d)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

e) Z tego, że $L(1) = 3x$, $L(x) = -3x^2$, $L\left(x^2\right) = 3x^3$ wynika, że

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -15 \\ -6 & -9 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

• **Przykład 9.6**

Napisać macierze podanych przekształceń liniowych $L : \boldsymbol{U} \longrightarrow \boldsymbol{U}$ w podanych bazach przestrzeni $\boldsymbol{U}$. Zastosować wzór na zmianę macierzy przekształcenia przy zmianie bazy:

a) $L(x,y) = (3x-4y, 2x+y)$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}^2$, $\vec{u}_1 = (1,-1)$, $\vec{u}_2 = (3,2)$;

b) L jest symetrią względem płaszczyzny yOz, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}^3$, $\vec{u}_1 = (1,2,0)$, $\vec{u}_2 = (0,-1,1)$, $\vec{u}_3 = (0,2,-1)$;

c) $(Lp)(x) = (x+1)p(3)$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_1[x]$, $p_1 = x+4$, $p_2 = 2x-3$.

Rozwiązanie

Niech P będzie macierzą przejścia z bazy „starej" przestrzeni $\boldsymbol{U}$ do bazy „nowej". Wzór na macierz A' przekształcenia L w „nowej" bazie przyjmuje w tym przypadku postać $A' = P^{-1}AP$, gdzie A jest macierzą przekształcenia L w „starej" bazie. Przyjmujemy bazy standardowe przestrzeni $\boldsymbol{U}$ jako bazy „stare" i otrzymujemy wzory: a)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -\frac{22}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

b) Ponieważ $L(x,y,z) = (-x,y,z)$, zatem

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Mamy $L(1) = x + 1$, $L(x) = 3x + 3$, zatem

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{11} & \frac{15}{11} \\ \frac{21}{11} & \frac{9}{11} \end{bmatrix}.$$

- **Przykład 9.7**

Przekształcenie liniowe $L : U \longrightarrow V$ ma w bazie $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ przestrzeni liniowej U i w bazie $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ przestrzeni V macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz A' tego przekształcenia w bazach $\{2\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ i $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2\}$.

Rozwiązanie

Niech P, Q oznaczają odpowiednio macierze przejścia z bazy $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ do bazy $\{2\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ i z bazy $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ do bazy $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2\}$. Szukaną macierz A' wyznaczamy z zależności $A' = Q^{-1}AP$. Zatem

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & -3 & -\frac{17}{3} \\ \frac{10}{3} & 3 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}.$$

- **Przykład* 9.8**

Podać przykład baz przestrzeni R^2 i R^3, w których przekształcenie liniowe $L : R^3 \longrightarrow R^2$ określone wzorem $L(x, y, z) = (x + y, z - y)$ ma macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ szukaną bazę przestrzeni R^3, a przez $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bazę przestrzeni R^2. Z podanej macierzy przekształcenia L odczytujemy związki $L(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$, $L(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_2$, $L(\vec{u}_3) = \vec{0}$. Wektor $\vec{u}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ wyznaczymy z warunków $x_3 + y_3 = 0$, $z_3 - y_3 = 0$, czyli $y_3 = z_3 = -x_3$. Możemy więc przyjąć $\vec{u}_3 = (1, -1, -1)$. Wektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ musimy dobrać teraz tak, aby stanowiły one uzupełnienie wektora $\vec{u}_3$ do bazy przestrzeni R^3 i jednocześnie, aby ich obrazy były liniowo niezależne. Ze względu na to, że $L(1, 0, 0) = (1, 0)$, $L(0, 1, 0) = (1, -1)$ możemy przyjąć $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$. W tym momencie wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ już znamy, bowiem $\vec{v}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Zadania

○ **Zadanie 9.1**

Napisać macierze podanych przekształceń liniowych w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych:

a) $L : R^3 \longrightarrow R^4$, $L(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z, y + 2z)$;

b) $L : R^2 \longrightarrow R^3$, $L(x, y) = (4x + 3y, x - 2y, 3x + 5y)$;

c) $L : R^3 \longrightarrow R^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\pi : x + 2y + 4z = 0$;

d) $L : R^3 \longrightarrow R^3$, L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół osi Ox;

e) $L : R^2 \longrightarrow R_2[x]$, $(L(a, b))(x) = (a + b)x^2 + (3a - b)x + 6a$.

○ **Zadanie 9.2**

Znaleźć z definicji macierze podanych przekształceń liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $L : R^3 \longrightarrow R^3$, $L(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$,
$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{u}_2 = \vec{v}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$;

b) $L : R^4 \longrightarrow R^2$, $L(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$,
$\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{u}_2 = (1, 2, 0, 0), \vec{u}_3 = (1, 2, 3, 0), \vec{u}_4 = (1, 2, 3, 4)$,
$\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (1, 2)$;

c) $L : R^4 \longrightarrow R^3$, $L(x, y, z, t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$,
$\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{u}_2 = (1, 1, 0, 0), \vec{u}_3 = (1, 1, 1, 0), \vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$,
$\vec{v}_1 = (0, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$;

d) $L : R^2 \longrightarrow R^2$, L jest rzutem prostokątnym na oś Ox,
$\vec{u}_1 = (1, 2), \vec{u}_2 = (2, 3), \vec{v}_1 = (2, 1), \vec{v}_2 = (3, 2)$;

e) $L : R^3 \longrightarrow R^3$, L jest przekształceniem identycznościowym,
tj. $L(x, y, z) = (x, y, z)$, $\vec{u}_1 = (0, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, 0, 1), \vec{u}_3 = (1, 1, 0)$,
$\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 0), \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$;

f) $L : R_1[x] \longrightarrow R_2[x]$, $(Lp)(x) = x^2 p'(x)$,
$p_1 = 2x + 3, p_2 = 3x - 4, \; q_1 = x^2 + x, q_2 = x + 1, q_3 \equiv 1$;

g*) $L : R_n[x] \longrightarrow R_{n-1}[x]$, $(Lp)(x) = p'(x + 1)$,
$p_0 \equiv q_0 \equiv 1, \; p_k = q_k = \frac{x^k}{k!}$ dla $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, $p_n = \frac{x^n}{n!}$.

○ **Zadanie 9.3**

Macierz przekształcenia liniowego $L : U \longrightarrow V$ ma w bazach $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ przestrzeni liniowych U, V postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć obrazy podanych wektorów w tym przekształceniu:
a) $\vec{u} = -2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$; b) $\vec{u} = 6\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

○ **Zadanie 9.4**
Dla podanych przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$) naszkicować zbiory D oraz $L(D)$ i porównać ich pola (objętości), jeżeli:
a) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L(x, y) = (-2x, 3y)$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$;
b) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$, $D = [-2, 1] \times [0, 1]$;
c) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y, z) = (3x, 3y, -z)$,
$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}.$$

○ **Zadanie 9.5**
Rozwiązać ponownie **Zadanie 9.2** stosując tym razem wzór na zmianę macierzy przekształcenia liniowego przy zmianie baz wychodząc od baz standardowych rozważanych przestrzeni liniowych.

○ **Zadanie 9.6**
Napisać macierze podanych przekształceń liniowych $L : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ w podanych bazach przestrzeni $\mathbf{U}$. Wykorzystać wzór na zmianę macierzy przekształcenia przy zmianie bazy:
a) $L(x, y) = (x + 3y, y - 3x)$, $\mathbf{U} = \mathbf{R}^2$, $\vec{u}_1 = (2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 3)$;
b) L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę xOz,
$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^3,\ \vec{u}_1 = (1, 1, 0),\ \vec{u}_2 = (2, 3, 2),\ \vec{u}_3 = (0, 1, 3);$$
c) $(Lp)(x) = x^2 p(0) + xp'(1)$, $\mathbf{U} = \mathbf{R}_2[x]$, $p_1 = x^2 + x + 1$, $p_2 \equiv 1$, $p_3 = x + 1$.

○ **Zadanie 9.7**
Przekształcenie liniowe $L : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$ ma w bazie $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, przestrzeni liniowej $\mathbf{U}$ i w bazie $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ przestrzeni liniowej $\mathbf{V}$ macierz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
Napisać macierz A' przekształcenia L w bazach $\{3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2, -\vec{u}_1 + \vec{u}_2\}$ i $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_3, 3\vec{v}_2, 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3\}$ odpowiednio przestrzeni $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$.

○ **Zadanie* 9.8**
Skonstruować (o ile to możliwe) takie bazy odpowiednich przestrzeni liniowych, w których podane przekształcenia liniowe mają wskazane macierze:
a) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L(x, y) = (x, y)$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;
b) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y) = (x + y, 2x - y, x - 3y)$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y, z) = (x, y, z)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;
d) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x, y, z) = (x, y, z)$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;
e) Czy w przykładach a) i c) bazy dziedziny i obrazu przekształcenia L mogą być te same?

○ **Zadanie* 9.9**
Napisać wzór jednego z przekształceń liniowych będących obrotem w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ o kąt α wokół prostej
$$x = at,\ y = bt,\ z = ct,\ t \in \mathbf{R},\ a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Odpowiedzi i wskazówki

9.1 a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} \frac{20}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{17}{21} & -\frac{8}{21} \\ -\frac{4}{21} & -\frac{8}{21} & \frac{5}{21} \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$;
e) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.2 a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ -3 & -2 & -7 & -13 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;
d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; **g*)** $A = [a_{ij}]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n + 1$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $j \leqslant i$ oraz $a_{ij} = \dfrac{1}{(j - i - 1)!}$ dla $j > i$.

9.3 a) $5\vec{v}_2 - 16\vec{v}_3$; **b)** $16\vec{v}_1 - 7\vec{v}_2 + 16\vec{v}_3$.

9.4 a) zbiór D jest kwadratem o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $|D| = 2$, zbiór $L(D)$ jest rombem o wierzchołkach $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$, $(0, -3)$, $|L(D)| = 12$;
b) zbiór D jest prostokątem o wierzchołkach $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, 0)$, $|D| = 3$; zbiór $L(D)$ jest równoległobokiem o wierzchołkach $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(0, -3)$, $(-2, -4)$, $|L(D)| = 9$;
c) zbiór D jest stożkiem o podstawie leżącej w płaszczyźnie $z = 2$, podstawa jest kołem o środku w punkcie $(0, 0, 2)$ i promieniu 2, wierzchołek stożka jest w punkcie $(0, 0, 0)$, $|D| = \frac{8}{3}\pi$, zbiór $L(D)$ jest stożkiem o wierzchołku $(0, 0, 0)$ i o podstawie kołowej o środku w punkcie $(0, 0, -2)$ i promieniu 6 leżącej w płaszczyźnie $z = -2$, $|L(D)| = 24\pi$.

9.5 Patrz odpowiedzi do **Zadania 9.2**.

9.6 a) $\begin{bmatrix} \frac{10}{7} & \frac{30}{7} \\ -\frac{15}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 7 & 18 & 6 \\ -3 & -8 & -3 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.7 $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$.

9.8* a) $\vec{u}_1 = (1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; b) $\vec{u}_1 = (1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$, $\vec{v}_2 = \left(0, \frac{8}{3}, 3\right)$; $\vec{v}_2 = \left(0, -\frac{1}{3}, -1\right)$; c) $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$, $\vec{u}_3 = (0,0,1)$, $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (-3,2,-1)$, $\vec{v}_3 = (1,-1,1)$; d) jest to niemożliwe; e) bazy nie mogą być te same.

9.9* $L(x,y,z) =$

$$\Big(\left[a^2(1-\cos\alpha)+\cos\alpha\right]x + \left[ab(1-\cos\alpha) - c\sin\alpha\right]y + \left[ac(1-\cos\alpha)+b\sin\alpha\right]z\,,$$
$$\left[ab(1-\cos\alpha)+b\sin\alpha\right]x + \left[b^2(1-\cos\alpha)+\cos\alpha\right]y + \left[bc(1-\cos\alpha)-a\sin\alpha\right]z,$$
$$\left[ac(1-\cos\alpha)-b\sin\alpha\right]x + \left[bc(1-\cos\alpha)+a\sin\alpha\right]y + \left[c^2(1-\cos\alpha)+\cos\alpha\right]z\Big).$$

Dziesiąty tydzień

Działania na przekształceniach liniowych (3.4). Wartości i wektory własne przekształceń liniowych (3.5)

Przykłady

- **Przykład 10.1**

Przekształcenia liniowe $L_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $L_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ określone są wzorami:

$L_1(x,y,z) = (x+2y, x-z, 2x+y+z, y+2z)$,

$L_2(x,y,z,t) = (x+y+z+t, -2t)$,

$L_3(x,y) = (x+y, x-y, 3x-y, x-4y)$.

Napisać macierze w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni oraz podać wzory przekształceń liniowych:

a) $L_2 \circ L_1$; b) $L_3 \circ L_2$; c) $L_3 \circ L_2 \circ L_1$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z tego, że macierz złożenia przekształceń liniowych jest równa iloczynowi macierzy tych przekształceń. Oznaczając symbolem A_i macierz przekształcenia L_i dla $1 \leqslant i \leqslant 3$ mamy:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Macierz przekształcenia liniowego $L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest równa

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

i stąd wynika wzór tego przekształcenia

$$(L_2 \circ L_1)(x,y,z) = (4x+4y+2z, -2y-4z).$$

b) Przekształcenie liniowe $L_3 \circ L_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ma macierz postaci

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix},$$

stąd odczytujemy wzór

$$(L_3 \circ L_2)(x,y,z,t) = (x+y+z-t, x+y+z+3t, 3x+3y+3z+5t, x+y+z+9t).$$

c) Macierz przekształcenia $L_3 \circ L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ jest równa

$$A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 = A_3 \cdot (A_2 \cdot A_1) = (A_3 \cdot A_2) \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 12 & 14 & 10 \\ 4 & 12 & 18 \end{bmatrix},$$

a więc

$$(L_3 \circ L_2 \circ L_1)(x,y,z) = (4x+2y-2z, 4x+6y+6z, 12x+14y+10z, 4x+12y+18z).$$

- **Przykład 10.2**

Niech K, L będą przekształceniami płaszczyzny, przy czym K jest rzutem prostokątnym na prostą $k : x+y=0$, a L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{6}$ wokół punktu $(0,0)$. Napisać macierze w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$ przekształceń:

a) $K^2 \circ L^4$; b) $K \circ L \circ K \circ L$.

Rozwiązanie

Macierze A, B odpowiednio przekształceń K, L w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$ mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Macierz przekształcenia $K^2 \circ L^4$ jest równa

$$A^2 \cdot B^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{4} & \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}.$$

b) Podobnie macierz złożenia $K \circ L \circ K \circ L$ ma postać

$$A \cdot B \cdot A \cdot B = (A \cdot B)^2 = \left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3-\sqrt{3} & -3-\sqrt{3} \\ -3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

- **Przykład 10.3**

Spośród podanych przekształceń liniowych wybrać przekształcenia odwracalne i napisać macierze przekształceń odwrotnych do nich w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych. Ponadto podać wzory przekształceń odwrotnych, jeżeli:

a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x,y) = (x+3y, 2x-y)$;

b) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y+2z, 2x+z, 4x-2y+5z)$;

c) $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = 3(x+1)p'(x) + p(0)$ dla $p \in \mathbb{R}_2[x]$;

d) $L : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $(Lp)(x) = x\,p'(x+1) - p(x+1)$ dla $p \in \mathbb{R}_3[x]$.

Rozwiązanie

Jak wiadomo przekształcenie liniowe $L : U \longrightarrow V$, gdzie U i V są przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi, jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz A jest nieosobliwa. Macierz przekształcenia odwrotnego L^{-1} jest zaś równa macierzy A^{-1}.

a) Przekształcenie rozważane w tym przykładzie jest odwracalne, bowiem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \det A = -7 \neq 0, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że

$$L^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+3y}{7}, \frac{2x-y}{7}\right).$$

b) Przekształcenie z tego przykładu nie jest odwracalne, gdyż

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

c) Obrazy wektorów z bazy przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ są następujące:

$$L(1) = 1, \ L(x) = 3x+3, \ L\left(x^2\right) = 6x^2 + 6x,$$

co daje

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \ \det A = 18 \neq 0, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Istnieje więc przekształcenie odwrotne L^{-1}, które można zapisać wzorem

$$L^{-1}\left(ax^2+bx+c\right) = \frac{a}{6}x^2 + \frac{b-a}{3}x + a - b + c \ \text{dla} \ a,b,c \in \mathbb{R}$$

lub inaczej

$$\left(L^{-1}p\right)(x) = \frac{1}{6}p(x) + \frac{1}{6}x\,p'(-1) - \frac{1}{6}p(0) + p(-1) \ \text{dla} \ p \in \mathbb{R}_2[x].$$

d) Tutaj $L(1) = -1$, $L(x) = -1$, $L\left(x^2\right) = x^2 - 1$, $L\left(x^3\right) = 2x^3 + 3x^2 - 1$, więc

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przekształcenie L nie jest odwracalne, gdyż $\det A = 0$.

- **Przykład 10.4**

Przekształcenie liniowe $L : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ ma w bazie $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ przestrzeni liniowej $\mathbf{V}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć

a) $L^4(\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2)$; b) $L^{-1}(3\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2)$.

Rozwiązanie

a) Macierz przekształcenia L^4 jest równa A^4. Zachodzą równości

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 47 & -9 \\ 18 & 2 \end{bmatrix}, \ A^4\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że $L^4(\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2) = 2\vec{v}_1 + 28\vec{v}_2$.

b) Przekształcenie L jest odwracalne, bowiem $\det A = -4 \neq 0$. Przekształcenie L^{-1} ma macierz A^{-1}. Z warunków

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \ A^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

wynika, że $L^{-1}(3\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2) = \frac{5}{2}\vec{v}_1 + \frac{9}{2}\vec{v}_2$.

- **Przykład 10.5**

Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych dla podanych przekształceń liniowych płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i przestrzeni $\mathbb{R}^3$, przy czym odczytać je najpierw z interpretacji geometrycznej tych przekształceń, a później przeprowadzić obliczenia algebraiczne:

a) rzut prostokątny na płaszczyźnie na oś Ox;

b) obrót na płaszczyźnie o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół punktu $(0,0)$;

c) symetria w przestrzeni względem osi Oz.

Rozwiązanie

Z warunku $L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ wynika, że wektor własny $\vec{v}$ przekształcenia liniowego L może w tym przekształceniu zmienić swój zwrot, być wydłużony lub skrócony (nawet do zera), lecz nie zmienia swego kierunku.

a) Spośród wszystkich wektorów płaszczyzny jedynie wektory osi Ox i osi Oy nie zmieniają swego kierunku, przy czym wektory leżące na osi Ox nie ulegają zmianie, a te z osi Oy przechodzą na wektor zerowy. Przekształcenie ma zatem dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ oraz przestrzenie wektorów własnych $W_1 = \text{oś}\, Ox$, $W_0 = \text{oś}\, Oy$. Licząc formalnie mamy $L(x,y) = (x,0)$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda.$$

Dla $\lambda_1 = 1$ wektor własny ma postać $\vec{v}_1 = (x,0)$, gdzie $x \neq 0$, zatem $W_1 = \{(x,0) : x \in R\} = \text{oś}\, Ox$, dla $\lambda_2 = 0$ wektor własny jest równy $\vec{v}_2 = (0,y)$, gdzie $y \neq 0$, więc $W_0 = \{(0,y) : y \in R\} = \text{oś}\, Oy$.

b) Przekształcenie to nie ma rzeczywistych wartości własnych, gdyż żaden niezerowy wektor przy obrocie o kąt $\frac{\pi}{4}$ nie zachowuje swojego kierunku. Potwierdza to bezpośredni rachunek, bowiem mamy

$$L(x,y) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right),$$

więc

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1.$$

Otrzymany wielomian charakterystyczny nie ma pierwiastków rzeczywistych.

c) W tym przekształceniu wektory osi Oz nie ulegają zmianie, wektory płaszczyzny xOy zmieniają zwrot, a pozostałe wektory przestrzeni zmieniają swój kierunek. Łatwo stąd wywnioskować, że liczba $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia L z przestrzenią wektorów własnych $W_1 = \text{oś}\, Oz$. Drugą wartością własną jest liczba $\lambda_2 = -1$, a $W_{-1} =$ płaszczyzna xOy. Z drugiej strony $L(x,y,z) = (-x,-y,z)$, więc

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda).$$

Dla $\lambda_1 = 1$ wektor własny $\vec{v}_1 = (0,0,z)$, gdzie $z \neq 0$ oraz $W_1 = \{(0,0,z) : z \in R\} = \text{oś}\, Oz$, dla $\lambda_2 = -1$ mamy $\vec{v}_2 = (x,y,0)$, gdzie $x \neq 0$ lub $y \neq 0$ oraz $W_{-1} = \{(x,y,0) : x,y \in R\} =$ płaszczyzna xOy.

• Przykład 10.6

Znaleźć wartości własne podanych liniowych przekształceń rzeczywistych przestrzeni liniowych:

a) $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $L(x,y) = (x, x+y)$;

b) $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $L(x,y) = (-y,x)$;

c) $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y+2z, 3y-z, 4z)$;

d) $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-z, 2y, x+z)$;

e) $L : \boldsymbol{R}_2[x] \longrightarrow \boldsymbol{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = xp'(x)$;

f) $L : \boldsymbol{R}_2[x] \longrightarrow \boldsymbol{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = p''(x)$.

Rozwiązanie

Wystarczy wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy badanych przekształceń liniowych w wybranych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych. We wszystkich przykładach posłużymy się bazami standardowymi.

a) Rozwiązujemy równanie charakterystyczne przekształcenia L, tzn. równanie

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0.$$

Równanie to ma jedyną wartość własną $\lambda = 1$. Odpowiadający jej wektor własny $\vec{v} = (x,y)$ znajdujemy z układu równań

$$(A-\lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\vec{v} = (0,y)$, gdzie $y \neq 0$. Ponadto przestrzeń wektorów własnych równa się w tym przypadku $W_1 = \{(0,y) : y \in R\} = \text{lin}\,\{(0,1)\}$.

b) W tym przykładzie mamy

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Wielomian charakterystyczny przekształcenia L nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc przekształcenie L nie ma wartości własnych ani wektorów własnych w przestrzeni R^2. Dalsze obliczenia można byłoby prowadzić, gdyby rozszerzyć dziedzinę przekształcenia traktując go jako $L : \boldsymbol{C}^2 \longrightarrow \boldsymbol{C}^2$. Omówimy to dokładniej w **Przykładzie 10.7**.

c) Dla przekształcenia rozważanego w tym przykładzie mamy

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Przekształcenie L ma trzy wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$. Wektor własny $\vec{v}_1 = (x,y,z)$ odpowiadający wartości własnej λ_1 znajdujemy z układu równań

$$(A-I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy rozwiązanie $y = z = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, zatem $\vec{v}_1 = (x,0,0)$, gdzie $x \neq 0$ i $W_1 = \{(x,0,0) : x \in R\} = \text{lin}\,\{(1,0,0)\}$. Dalej

$$(A-I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

co daje rozwiązanie $y = -2x$, $z = 0$. Wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_2 ma więc postać $\vec{v}_2 = (x, -2x, 0)$, gdzie $x \neq 0$. Przestrzeń wektorów własnych $W_3 = \operatorname{lin}\{(1,-2,0)\}$. Dla $\lambda_3 = 4$ i $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ mamy

$$(A - I\lambda_3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $x = z = -y$, więc $\vec{v} = (x, -x, x)$, gdzie $x \neq 0$ oraz $W_4 = \operatorname{lin}\{(1,-1,1)\}$.

d) Tutaj

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right).$$

Liczba $\lambda = 2$ jest jedyną rzeczywistą wartością własną przekształcenia L. Odpowiadający jej wektor własny $\vec{v} = (x, y, z)$ wyznaczamy z układu równań

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

co daje wynik $x = z = 0$, $y \in R$ i ostatecznie $\vec{v} = (0, y, 0)$, gdzie $y \neq 0$ oraz $W_2 = \operatorname{lin}\{(0,1,0)\}$.

e) W bazie $B = \{1, x, x^2\}$ przestrzeni $R_2[x]$ mamy $L(1) \equiv 0$, $L(x) = x$, $L\left(x^2\right) = 2x^2$, więc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda).$$

Otrzymaliśmy trzy wartości własne $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ Wektory własne p_1, p_2, p_3 postaci $a + bx + cx^2$ wyznaczymy z układów równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow b = c = 0,$$

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow a = c = 0,$$

$$(A - I\lambda_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow a = b = 0.$$

Otrzymujemy $p_1 \equiv a$, gdzie $a \neq 0$, $p_2 = bx$, gdzie $b \neq 0$, $p_3 = cx^2$, gdzie $c \neq 0$ oraz $W_0 = \operatorname{lin}\{1\}$, $W_1 = \operatorname{lin}\{x\}$, $W_2 = \operatorname{lin}\{x^2\}$.

f) Skorzystamy bezpośrednio z definicji wartości własnej przekształcenia liniowego. Dla wektora $p = ax^2 + bx + c$ mamy

$$Lp = 2a = \lambda p = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c.$$

Gdy $\lambda \neq 0$, to z równości $\lambda a = \lambda b = 0$ oraz $2a = \lambda c$ wynika, że $a = b = c = 0$ i $p \equiv 0$. Ale wektor $p \equiv 0$ nie jest wektorem własnym, więc jedyną wartością własną jest $\lambda = 0$,

a odpowiadające jej wektory własne mają postać $p = bx + c$, przy czym $b \neq 0$ lub $c \neq 0$. Ogólnie $W_0 = \operatorname{lin}\{1, x\}$.

• Przykład 10.7

Znaleźć wartości i wektory własne podanych przekształceń liniowych wskazanych zespolonych przestrzeni liniowych:

a) $L : C^2 \longrightarrow C^2$, $L(x, y) = (-y, x)$;

b) $L : C^2 \longrightarrow C^2$, $L(x, y) = ((1+3i)x - 4y, (1-3i)y - 2x)$;

c) $L : C^3 \longrightarrow C^3$, $L(x, y, z) = (x - z, 2y, x + z)$;

d) $L : C^3 \longrightarrow C^3$, $L(x, y, z) = (2ix, x + (1+i)y, 3x + iy - iz)$, gdzie $x, y, z \in C$.

Rozwiązanie

a) Wielomian charakterystyczny przekształcenia L jest równy $w(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Otrzymujemy zatem dwie wartości własne $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Rozwiązując układy równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = iy,$$

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = -iy,$$

wyznaczamy wektory własne $\vec{v}_1 = (iy, y)$, $\vec{v}_2 = (-iy, y)$, gdzie $y \in C \setminus \{0\}$, oraz przestrzenie wektorów własnych $W_i = \operatorname{lin}_C\{(i,1)\}$, $W_{-i} = \operatorname{lin}_C\{(-i,1)\}$, przy czym symbol lin_C oznacza tu zespoloną operację generowania.

b) Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1+3i-\lambda & -4 \\ -2 & 1-3i-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i).$$

Uzyskaliśmy dwie wartości własne $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$. Odpowiadające im wektory własne $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ wyznaczymy po rozwiązaniu układów równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & -4 \\ -2 & -2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = ix,$$

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ -2 & -4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = 2iy.$$

Mamy więc $\vec{v}_1 = (x, ix)$, $\vec{v}_2 = (2iy, y)$, gdzie $x, y \in C \setminus \{0\}$ oraz $W_{1-i} = \operatorname{lin}_C\{(1,i)\}$, $W_{1+i} = \operatorname{lin}_C\{(2i,1)\}$.

c) W Przykładzie 10.6 d) obliczyliśmy, że $w(\lambda) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right)$. Dla wartości własnej $\lambda_1 = 2$ wyznaczyliśmy także zbiór wektorów własnych $W_2 = \operatorname{lin}\{(0,1,0)\}$. W przypadku zespolonym odpowiedź jest identyczna z tym, że operację generowania należy wykorzystać używając współczynników zespolonych, zatem $W_2 = \operatorname{lin}_C\{(0,1,0)\}$. Pojawiają się jeszcze dwie dodatkowe wartości własne $\lambda_1 = 1-i$, $\lambda_2 = 1+i$. Rozwiązujemy układy równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = 0,\ z = ix,$$

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = 0,\ x = iz,$$

i otrzymujemy wektory własne $\vec{v}_2 = (x, 0, ix)$, $\vec{v}_3 = (iz, 0, z)$, gdzie $x, z \in C \setminus \{0\}$ oraz $W_{1-i} = \text{lin}_C\{(1,0,i)\}$, $W_{1+i} = \text{lin}_C\{(i,0,1)\}$.

d) Dla przekształcenia rozważanego w tym przykładzie mamy

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 3 & i & -i \end{bmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = (2i - \lambda)(1 + i - \lambda)(-i - \lambda).$$

Wartościami własnymi przekształcenia L są liczby $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = -i$. Dalej licząc mamy

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 \\ 3 & i & -3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = (i-1)y,\ z = \left(\frac{4}{3} + i\right)y,$$

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & i & -1-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = 0,\ y = (2-i)z,$$

$$(A - I\lambda_3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 1 & 1+2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = y = 0.$$

Ostatecznie więc $\vec{v}_1 = \left((i-1)y, y, \left(\frac{4}{3} + i\right)y\right)$, $\vec{v}_2 = (0, (2-i)z, z)$, $\vec{v}_3 = (0,0,z)$, gdzie $y, z \in C\setminus\{0\}$. Stąd wynika, że $W_{2i} = \text{lin}_C\left\{\left(i-1, 1, \frac{4}{3} + i\right)\right\}$, $W_{1+i} = \text{lin}_C\{(0, 2-i, 1)\}$, $W_{-i} = \text{lin}_C\{(0,0,1)\}$.

Zadania

○ Zadanie 10.1

Napisać macierze w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni liniowych przekształceń $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ oraz $(L_2)^2 \circ L_1$, jeżeli:

a) $L_1 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L_1(x,y,z) = (x - y + z, 2y + z)$,
$L_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L_2(x,y) = (2x + y, x - y)$,
$L_3 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$, $L_3(x,y) = (x - y, y - x, 2x, 2y)$;

b) $L_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$, $L_1(a,b) = ax^2 + bx + a - b$ dla $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,
$L_2 : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$, $(L_2p)(x) = xp'(-x)$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x]$,
$L_3 : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $(L_3p)(x) = (p(1), p'(2))$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x]$.

○ Zadanie 10.2

Niech J, K, L będą przekształceniami przestrzeni $\mathbf{R}^3$ w siebie, przy czym J jest symetrią względem osi Oz, K jest symetrią względem płaszczyzny xOz, L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oy. Napisać macierze w bazie standardowej przestrzeni $\mathbf{R}^3$ przekształceń liniowych będących złożeniami J, K i L we wszystkich sześciu możliwych kolejnościach.

○ Zadanie 10.3

Dla tych spośród podanych przekształceń liniowych, które są odwracalne napisać

macierze i wzory przekształceń odwrotnych:

a) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L(x,y) = (3x - 2y, 4x - 3y)$;

b) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x,y,z) = (y + 2z, x + y + z, 2x + 3y + 2z)$;

c) $L : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = p(2x) - 4p(x)$ dla $p \in \mathbf{R}_2[x]$;

d) $L : \mathbf{R}_3[x] \longrightarrow \mathbf{R}_3[x]$, $(Lp)(x) = x^3p'(0) + p(2x)$ dla $p \in \mathbf{R}_3[x]$.

○ Zadanie 10.4

Macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ ma w bazie $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ przestrzeni liniowej $\mathbf{U}$ postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć:

a) $L^3(\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$; b) $L^{-1}(3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3)$.

○ Zadanie 10.5

Dla podanych liniowych przekształceń płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ i przestrzeni $\mathbf{R}^3$ znaleźć wartości własne i wektory własne wykorzystując interpretację geometryczną tych przekształceń:

a) symetria na płaszczyźnie względem punktu $(0,0)$;

b) rzut prostokątny w przestrzeni na oś Oz;

c) rzut prostokątny w przestrzeni na prostą $l : x = y = z$;

d) rzut prostokątny w przestrzeni na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$;

e) symetria w przestrzeni względem płaszczyzny xOy;

f) symetria w przestrzeni względem prostej $l : x + y = 0$, $z = 0$.

Sprawdzić otrzymane wyniki algebraicznie.

○ Zadanie 10.6

Znaleźć wartości i wektory własne podanych liniowych przekształceń rzeczywistych przestrzeni liniowych:

a) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L(x,y) = (4x + 2y, y - x)$;

b) $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $L(x,y) = (2x + y, 4y - x)$;

c) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x,y,z) = (x, 2x + 2y, -x - y - z)$;

d) $L : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $L(x,y,z) = (3x - y, 6x - 2y, 2x - y + z)$;

e) $L : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = p''(x)$;

f) $L : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$, $(Lp)(x) = 2xp'(x) + x^2p(0) + p(2)$.

○ Zadanie 10.7

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne podanych przekształceń liniowych wskazanych zespolonych przestrzeni liniowych:

a) $L : C^2 \longrightarrow C^2$, $L(x,y) = (3x - y, 10x - 3y)$;
b) $L : C^2 \longrightarrow C^2$, $L(x,y) = ((1-2i)x + 5y, (1+i)x - (1-3i)y)$;
c) $L : C^3 \longrightarrow C^3$, $L(x,y,z) = (z, 3y, -x)$;
d) $L : C^3 \longrightarrow C^3$, $L(x,y,z) = (-ix - 2z, y, 2x - iz)$.

Odpowiedzi i wskazówki

10.1 a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

10.2 $A_{J\circ K\circ L} = A_{K\circ J\circ L} = A_{J\circ L\circ K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$A_{L\circ J\circ K} = A_{L\circ K\circ J} = A_{K\circ L\circ J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10.3 a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $L^{-1} = L$; b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $L^{-1}(x,y,z) = \left(2y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, z - 2y, \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z\right)$; **c)** przekształcenie nie jest odwracalne;
d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$, $L^{-1}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \frac{2a - c}{16}x^3 + \frac{b}{4}x^2 + \frac{c}{2}x + d$.

10.4 a) $28\vec{u}_1 - 16\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$; **b)** $\frac{1}{2}\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

10.5 a) $W_{-1} = R^2$; **b)** $W_0 =$ płaszczyzna xOy, $W_1 =$ oś Oz; **c)** $W_0 =$ płaszczyzna $\pi : x + y + z = 0$, $W_1 =$ prosta l; **d)** $W_0 =$ prosta $l : x = y = z$, $W_1 =$ płaszczyzna π; **e)** $W_{-1} =$ oś Oz, $W_1 =$ płaszczyzna xOy; **f)** $W_{-1} =$ płaszczyzna $\pi : x = y$, $W_1 =$ prosta l.

10.6 a) $W_2 = \text{lin}\,\{(1,-1)\}$, $W_3 = \text{lin}\,\{(-2,1)\}$; **b)** $W_3 = \text{lin}\,\{(1,1)\}$; **c)** $W_1 = \text{lin}\,\{(2,-4,1)\}$, $W_2 = \text{lin}\,\{(0,-3,1)\}$, $W_{-1} = \text{lin}\,\{(0,0,1)\}$; **d)** $W_0 = \text{lin}\,\{(1,3,1)\}$, $W_1 = \text{lin}\,\{(1,2,0),(0,0,1)\}$; **e)** $W_0 = \text{lin}\,\{1, x\}$; **f)** $W_0 = \text{lin}\,\{x^2 - 4\}$, $W_2 = \text{lin}\,\{x^2 - 3x - 2\}$, $W_5 = \text{lin}\,\{x^2 + 1\}$.

10.7 a) $W_i = \text{lin}_C\,\{(1, 3 - i)\}$, $W_{-i} = \text{lin}_C\,\{(1, 3 + i)\}$; **b)** $W_0 = \text{lin}_C\,\{(5, 2i - 1)\}$, $W_i = \text{lin}_C\,\{(5, 3i - 1)\}$; **c)** $W_3 = \text{lin}_C\,\{(0,1,0)\}$, $W_i = \text{lin}_C\,\{(1,0,i)\}$, $W_{-i} = \text{lin}_C\,\{(i,0,1)\}$; **d)** $W_1 = \text{lin}_C\,\{(0,1,0)\}$, $W_i = \text{lin}_C\,\{(i,0,1)\}$, $W_{-3i} = \text{lin}_C\,\{(1,0,i)\}$.

Jedenasty tydzień

Wartości i wektory własne przekształceń liniowych (3.5). Wartości i wektory własne macierzy (3.6).

Przykłady

- **Przykład 11.1**

Jakie są możliwe wartości własne przekształceń liniowych spełniających podane warunki:

a) $L^2 = L$; b) $L^2 = 0$?

Rozwiązanie

Niech V będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową, $L : V \longrightarrow V$ przekształceniem liniowym oraz niech $L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ dla pewnej liczby $\lambda \in R(C)$ i niezerowego wektora $\vec{v} \in V$.

a) Z warunku $L^2 = L$ wynika, że $L^2(\vec{v}) = L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Z drugiej strony $L^2(\vec{v}) = L(L(\vec{v})) = L(\lambda\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$. Zachodzi więc równość $\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$, którą można zapisać w postaci $\left(\lambda^2 - \lambda\right)\vec{v} = \vec{0}$. Ale $\vec{v} \neq \vec{0}$, zatem $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$. Możliwe są tylko dwie wartości własne przekształcenia L, mianowicie $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Przekształceniem mającym obie te wartości własne i czyniącym zadość warunkowi zadania jest np. przekształcenie $L : R^2 \longrightarrow R^2$ określone wzorem $L(x,y) = (x, 0)$.

b) Podobnie jak w poprzednim przykładzie spełniona jest równość $L^2(\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$. Ale $L^2 = 0$, zatem $\lambda^2\vec{v} = 0$. Oznacza to, że $\lambda = 0$ jest jedyną możliwą wartością własną przekształcenia L. Przykładem takiego przekształcenia działającego w przestrzeni R^2 jest $L(x,y) = (y, 0)$.

- **Przykład 11.2**

Sprawdzić, czy wektory własne podanych przekształceń liniowych tworzą bazy przestrzeni R^2 lub R^3. Jeżeli tak, napisać macierze rozważanych przekształceń w tych bazach:

a) $L(x,y) = (4x + 2y, y - x)$; b) $L(x,y,z) = (2x, -5y - 8z, 2y + 5z)$;
c) $L(x,y) = (3x - y, 3x)$; d) $L(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$.

Rozwiązanie

Jak wiadomo, macierz przekształcenia liniowego w bazie jego wektorów własnych (o ile taka baza istnieje) jest macierzą diagonalną, w której na głównej przekątnej znajdują się wartości własne odpowiadające kolejnym wektorom własnym bazy. Ponadto, jeżeli ilość różnych wartości własnych przekształcenia liniowego jest równa wymiarowi przestrzeni liniowej, to wektory własne odpowiadające tym wartościom tworzą bazę tej przestrzeni.

a) Wartości własne przekształcenia L są pierwiastkami równania

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Otrzymaliśmy dwie różne wartości własne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, a $\dim \boldsymbol{R}^2 = 2$, więc odpowiadające im wektory własne $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ tworzą bazę przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$. Macierz D przekształcenia L w tej bazie ma postać

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Możemy to jeszcze poprzeć bezpośrednim rachunkiem, biorąc bowiem $\vec{v}_1 = (1,-1)$, $\vec{v}_2 = (2,-1)$ oraz macierz P przejścia z bazy standardowej do bazy wektorów własnych otrzymujemy związek

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D.$$

b) Piszemy równanie charakterystyczne macierzy A przekształcenia L. Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -5-\lambda & -8 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 9\right) = 0.$$

Z postaci tego równania wynika, że przekształcenie L ma trzy różne wartości własne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$, a ponieważ $\dim \boldsymbol{R}^3 = 3$, więc istnieje baza przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ złożona z wektorów własnych przekształcenia L i w tej bazie macierz D ma postać

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) W tym przykładzie mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy tylko jedną wartość własną $\lambda = 3$. Musimy więc określić wymiar przestrzeni W_3 wektorów własnych odpowiadających tej wartości. Niech $\vec{v} = (x,y) \neq \vec{0}$ oraz

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy wektor własny tego przekształcenia ma postać $\vec{v} = (x,0)$, gdzie $x \neq 0$, zatem $W_3 = \operatorname{lin}\{(1,0)\}$. Przestrzeń W_3 jest jednowymiarowa, więc spośród wektorów własnych przekształcenia L nie można wybrać bazy przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$.

d) Wartości własne przekształcenia L są określone równaniem

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy tylko dwie różne wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, przy czym λ_2 ma krotność 2. Wyznaczymy przestrzenie W_1, W_2 odpowiadających im wektorów własnych. Dla $\lambda_1 = 1$ wektor własny $\vec{v}_1 = (x,y,z) \neq \vec{0}$ wyznaczamy z układu równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $x = y = -2z$ i $\vec{v}_1 = (-2z,-2z,z)$, gdzie $z \neq 0$. Zatem $W_1 = \operatorname{lin}\{(-2,-2,1)\}$. Wektor własny $\vec{v}_2 = (x,y,z) \neq 0$ odpowiadający $\lambda_2 = 2$ znajdujemy z warunku

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie układu równań ma postać $z = y - x$, zatem $\vec{v}_2 = (x,y,y-x)$, przy czym $x \neq 0$ lub $y \neq 0$. Stąd $W_2 = \operatorname{lin}\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$. Przyjmujemy teraz $\vec{v}_1 = (-2,-2,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,1,1)$. Wektory te są liniowo niezależnymi wektorami własnymi przekształcenia L. Tworzą one bazę przestrzeni R^3 i w tej bazie macierz przekształcenia L ma postać

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- **Przykład 11.3**

Przekształcenie liniowe $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ spełnia warunki $L(1,2) = (2,4)$, $L(-2,1) = (-2,1)$. Obliczyć $L^{150}(1,0)$.

Rozwiązanie

Z podanych warunków wynika, że liczby $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ są wartościami własnymi przekształcenia L, zaś wektory $\vec{v}_1 = (1,2)$, $\vec{v}_2 = (-2,1)$ są odpowiadającymi im wektorami własnymi. Wektory te tworzą bazę przestrzeni R^2. Macierz D przekształcenia L w tej bazie jest diagonalna i spełnia równość $D = P^{-1}AP$, gdzie A jest macierzą tego przekształcenia w bazie standardowej przestrzeni R^2, a P jest macierzą przejścia z bazy standardowej do bazy wektorów własnych. Stąd wynika, że $A = PDP^{-1}$, więc macierz przekształcenia L^{150} jest równa $A^{150} = \left(PDP^{-1}\right)^{150} = PD^{150}P^{-1}$. Mamy

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D^{150} = \begin{bmatrix} 2^{150} & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

zatem

$$A^{150} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2^{150}+4 & 2^{151}-2 \\ 2^{151}-2 & 2^{152}+1 \end{bmatrix},\ A^{150}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2^{150}+4 \\ 2^{151}-2 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że $L^{150}(1,0) = \left(\dfrac{2^{150}+4}{5}, \dfrac{2^{151}-2}{5}\right)$.

- **Przykład 11.4**

Przekształcenie liniowe $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ przeprowadza wektory $(0,1,2)$, $(1,1,3)$, $(2,1,2)$ odpowiednio na wektory $(0,-1,-2)$, $(0,0,0)$, $(2,1,2)$. Obliczyć:

a) $L(x,y,z)$, gdzie $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$; b) $L^{100}(1,2,3)$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy fakt, że wektory $\vec{v}_1 = (0,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,1,3)$, $\vec{v}_3 = (2,1,2)$ są wektorami własnymi przekształcenia L odpowiadającymi odpowiednio wartościom własnym $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ i że tworzą one bazę przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$. Podobnie jak w **Przykładzie 11.3** zachodzi związek $A = PDP^{-1}$, gdzie A i D są macierzami przekształcenia L w bazie standardowej i w bazie wektorów własnych, zaś P jest macierzą przejścia z bazy pierwszej do drugiej. Tutaj

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z postaci macierzy A przekształcenia L łatwo wynika wzór tego przekształcenia, mianowicie $L(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y, 2x - 2y)$.

b) Macierz 100-krotnego złożenia przekształcenia L wyraża się wzorem

$$A^{100} = \left(PDP^{-1}\right)^{100} = PD^{100}P^{-1},$$

a więc

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Z zależności

$$A^{100}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

wynika, że $L^{100}(1, 2, 3) = (2, 3, 6)$.

• Przykład 11.5

Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Wartość własna $\lambda \in \boldsymbol{R}$ rzeczywistej macierzy A stopnia n jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tej macierzy i wyznaczamy ją z warunku $\det(A - \lambda I) = 0$. Wektor własny $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ odpowiadający wartości własnej λ jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Obliczmy najpierw wielomian charakterystyczny macierzy A. Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Wielomian ten ma dwa rzeczywiste pierwiastki $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, które są wartościami własnymi macierzy A. Wektor własny $\vec{v}_1 = (x, y)$ odpowiadający wartości własnej λ_1 wyznaczamy z układu równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -2x,\ x \in R.$$

Stąd $\vec{v}_1 = (x, -2x)$, gdzie $x \in R \setminus \{0\}$. Podobnie znajdujemy wektor własny $\vec{v}_2 = (x, y)$ odpowiadający wartości λ_2:

$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -x,\ x \in R.$$

Zatem $\vec{v}_2 = (x, -x)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Przestrzenie wektorów własnych są więc następujące:

$$\boldsymbol{W}_2 = \operatorname{lin}\{(1, -2)\} \text{ dla } \lambda_1 = 2 \text{ oraz}$$
$$\boldsymbol{W}_3 = \operatorname{lin}\{(1, -1)\} \text{ dla } \lambda_2 = 3.$$

b) Tutaj

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Liczba $\lambda = 2$ jest jedyną wartością własną (o krotności 2) macierzy A. Rozwiązujemy układ równań

$$(A - I\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = x, \text{ gdzie } x \in R.$$

i otrzymujemy wektor własny $\vec{v} = (x, x)$, $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ oraz przestrzeń wektorów własnych $\boldsymbol{W}_2 = \operatorname{lin}\{(1, 1)\}$.

c) W tym przykładzie

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Wielomian charakterystyczny nie ma pierwiastków rzeczywistych co oznacza, że macierz A nie ma rzeczywistych wartości własnych.

d) Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(2 - \lambda)(\lambda + 4).$$

Liczby $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ są trzema wartościami własnymi macierzy A. Odpowiadające im wektory własne $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ postaci (x, y, z) znajdziemy rozwiązując poniższe układy równań:

$$(A-I\lambda_1)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3&0\\0&6&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x=-\frac{3}{5}y\\z=6y\\y\in R\end{cases},$$

$$(A-I\lambda_2)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&1&-1\\0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}y=z=0\\x\in R\end{cases},$$

$$(A-I\lambda_3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&0\\0&0&-1\\0&0&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x=3y\\y\in R\\z=0\end{cases}.$$

Stąd $\vec{v}_1=\left(-\frac{3}{5}y,y,6y\right)$, $\vec{v}_2=(x,0,0)$, $\vec{v}_3=(3y,y,0)$, gdzie $x,y\in R\setminus\{0\}$. Zapisując inaczej mamy $W_{-4}=\text{lin}\left\{\left(-\frac{3}{5},1,6\right)\right\}$, $W_1=\text{lin}\,\{(1,0,0)\}$, $W_2=\text{lin}\,\{(3,1,0)\}$.

e) Dla podanej macierzy mamy

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\0&4-\lambda&0\\-5&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda^2+1\right)(4-\lambda).$$

Jedynym rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu chakterystycznego, a więc i jedyną rzeczywistą wartością macierzy A jest liczba $\lambda=4$. Licząc

$$(A-I\lambda)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&0\\-5&0&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x=z=0,\\y\in R.\end{cases}$$

znajdujemy wektor własny $\vec{v}=(0,y,0)$, gdzie $y\in R\setminus\{0\}$ oraz przestrzeń wektorów własnych $W_4=\text{lin}\,\{(0,1,0)\}$.

f) Wielomian charakterystyczny w_A danej macierzy A ma postać

$$w_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3&4\\1&2-\lambda&3&4\\1&2&3-\lambda&4\\1&2&3&4-\lambda\end{vmatrix}.$$

Chcąc ułatwić sobie obliczenie powyższego wyznacznika od każdego wiersza odejmujemy wiersz ostatni, następnie do ostatniej kolumny dodamy sumę pozostałych otrzymując:

$$w_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&\lambda\\0&-\lambda&0&\lambda\\0&0&-\lambda&\lambda\\1&2&3&4-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&0\\1&2&3&10-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3(10-\lambda).$$

Macierz A ma więc dwie różne wartości własne $\lambda_1=0$, $\lambda_2=10$, przy czym pierwsza z nich ma krotność 3. Wektory własne $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ postaci (x,y,z,t) im odpowiadające znajdziemy

z układów równań

$$(A-I\lambda_1)\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x=-2y-3z-4t\\y,z,t\in R,\end{cases},$$

$$(A-I\lambda_2)\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x=y=z=t\\t\in R\end{cases}.$$

Stąd $\vec{v}_1=(-2y-3z-4t,y,z,t)$, przy czym $y\neq 0$ lub $z\neq 0$ lub $t\neq 0$ oraz $\vec{v}_2=(x,x,x,x)$ dla $x\neq 0$. Przestrzeń W_0 odpowiadająca wartości własnej $\lambda_1=0$ jest trójwymiarowa postaci $W_0=\text{lin}\,\{(-2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-4,0,0,1)\}$, zaś $W_{10}=\text{lin}\,\{(1,1,1,1)\}$.

- **Przykład 11.6**

Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy zespolonych:

a) $\begin{bmatrix}1&-1\\9&1\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}2+i&1\\2&2-i\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}i-1&2&1\\0&2i&3\\0&0&i-1\end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Wartość własną $\lambda\in C$ zespolonej macierzy A stopnia n wyznaczamy z warunku

$$\det(A-\lambda I)=0,$$

zaś odpowiadający jej wektor własny będący niezerowym rozwiązaniem odpowiedniego układu jednorodnego jest tu elementem przestrzeni C^n, tzn $\vec{v}=(x_1,\ldots,x_n)\in C^n$.

a) Mamy

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\9&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+10.$$

Wielomian charakterystyczny ma dwie wartości własne $\lambda_1=1-3i$, $\lambda_2=1+3i$. Znajdziemy teraz wektory własne odpowiadające wartościom własnym λ_1, λ_2. Mamy

$$(A-I\lambda_1)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3i&-1\\9&3i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\iff y=3ix,\ x\in C,$$

$$(A-I\lambda_2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3i&-1\\9&-3i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\iff y=-3ix,\ x\in C.$$

Wektory własne $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, odpowiadające kolejnym wartościom własnym mają postać $\vec{v}_1=(x,3ix)$, $\vec{v}_2=(x,-3ix)$, gdzie $x\in C\setminus\{0\}$. Przestrzenie wektorów własnych są tu więc równe $W_{1-3i}=\text{lin}_C\,\{(1,3i)\}$, $W_{1+3i}=\text{lin}_C\,\{(1,-3i)\}$, przy czym są to zespolone przestrzenie liniowe i przy generowaniu bierzemy zespolone kombinacje liniowe generatorów.

b) W tym przykładzie

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2+i-\lambda&1\\2&2-i-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ macierzy A są tu liczbami rzeczywistymi. Rozwiązujemy teraz układ równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -(1+i)x,\ x \in C,$$
$$(A - I\lambda_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & -1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = (1-i)x,\ x \in C.$$

Stąd wynika, że $\vec{v}_1 = (x, -(1+i)x)$, $\vec{v}_2 = (x, (1-i)x)$, gdzie $x \in C \setminus \{0\}$ oraz $\boldsymbol{W}_1 = \mathrm{lin}_C\,\{(1, -1-i)\}$, $\boldsymbol{W}_3 = \mathrm{lin}_C\,\{(1, 1-i)\}$.

c) Łatwo się przekonać, że $\det(A - \lambda I) = 1 - \lambda^3$. Wartościami własnymi macierzy A są zatem zespolone pierwiastki stopnia 3 z jedności, tzn. liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Z odpowiednich układów równań znajdujemy odpowiadające im wektory własne $\vec{v}_1 = (x, x, x)$, $\vec{v}_2 = (\lambda_2 z, -\lambda_3 z, z)$, $\vec{v}_3 = (\lambda_3 z, -\lambda_2 z, z)$, gdzie $x, z \in C \setminus \{0\}$. To oznacza, że

$$\boldsymbol{W}_1 = \mathrm{lin}_C\,\{(1,1,1)\},$$
$$\boldsymbol{W}_{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = \mathrm{lin}_C\,\left\{\left(i\sqrt{3}-1, i\sqrt{3}+1, 2\right)\right\},$$
$$\boldsymbol{W}_{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} = \mathrm{lin}_C\,\left\{\left(-1-i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, 2\right)\right\}.$$

d) Podana macierz jest trójkątna i jej dwie wartości własne $\lambda_1 = i - 1$, $\lambda_1 = 2i$ znajdują się na głównej przekątnej, przy czym λ_1 występuje dwukrotnie. Analiza układu równań

$$(A - I\lambda_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1+i & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x \in C \\ y = z = 0 \end{cases}$$

prowadzi do wniosku, że $\vec{v}_1 = (x, 0, 0)$, gdzie $x \in C \setminus \{0\}$. Zauważmy przy tym, że wymiar przestrzeni wektorów własnych $W_{i-1} = \mathrm{lin}_C\,\{(1,0,0)\}$ jest równy 1 mimo, że λ_1 ma krotność 2. Podobnie znajdujemy wektor własny $\vec{v}_2$ dla wartości własnej λ_2 otrzymując $\vec{v}_2 = \left(x, \dfrac{1+i}{2}x, 0\right)$, gdzie $x \in C \setminus \{0\}$ oraz $\boldsymbol{W}_{2i} = \mathrm{lin}_C\,\{(2, 1+i, 0)\}$.

Zadania

○ **Zadanie 11.1**
Podać wszystkie możliwe wartości własne przekształceń liniowych spełniających podane warunki:

a) $L^2 = -L$; b) $L^3 = I$.

○ **Zadanie 11.2**
Napisać macierze podanych przekształceń liniowych przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$ lub $\boldsymbol{R}^3$ w bazach ich wektorów własnych (o ile takie bazy istnieją):

a) $L(x,y) = (x + 4y, 2x + 3y)$; b) $L(x,y) = (5x - 3y, 3x - y)$;

c) $L(x,y,z) = (x - z, x + 2y + z, z - x)$;

d) $L(x,y,z) = (-x - 3y - 2z, -x + y + 2z, x + 3y + 2z)$.

○ **Zadanie 11.3**
Przekształcenie liniowe $L : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ przeprowadza wektory $(1,1)$, $(1,-1)$ odpowiednio na wektory $(1,1)$, $(3,-3)$. Obliczyć $L^{50}(5,1)$.

○ **Zadanie 11.4**
Przekształcenie liniowe $L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ spełnia warunki

$$L(0,1,1) = (0,1,1),\ L(2,2,0) = (0,0,0),\ L(1,0,0) = (-1,0,0).$$

Obliczyć:

a) $L(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$; b) $L^{105}(2,3,6)$.

○ **Zadanie 11.5**
Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

○ **Zadanie 11.6**
Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy zespolonych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 6i & 0 & 0 \\ 4 & 4+2i & 0 \\ i & 1 & 5i \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} i & i & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi i wskazówki

11.1 Możliwe są wartości własne a) 0 lub -1, np. $L(x,y) = (y - x, 0)$; b) 1 lub $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ lub $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, np. $L(x,y,z) = (y,z,x)$.

11.2 a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** nie istnieje baza wektorów własnych; **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

11.3 $\left(3 + 2 \cdot 3^{50}, 3 - 2 \cdot 3^{50}\right)$.

11.4 a) $(y - x - z, z, z)$; b) $(-5, 6, 6)$.

11.5 a) $\boldsymbol{W}_3 = \mathrm{lin}\,\{(1,-1)\}$; **b)** $\boldsymbol{W}_{-1} = \mathrm{lin}\,\{(1,-3)\}$, $\boldsymbol{W}_1 = \mathrm{lin}\,\{(1,-1)\}$; c) brak rzeczywistych wartości własnych; d) $\boldsymbol{W}_{-3} = \mathrm{lin}\,\{(1,-7,0)\}$, $\boldsymbol{W}_2 = \mathrm{lin}\,\{(2,1,1)\}$, $\boldsymbol{W}_4 = \mathrm{lin}\,\{(1,0,0)\}$; e) $\boldsymbol{W}_{-1} = \mathrm{lin}\,\{(1,0,-2)\}$, $\boldsymbol{W}_1 = \mathrm{lin}\,\{(1,0,-4)\}$, $\boldsymbol{W}_3 = \mathrm{lin}\,\{(0,1,0)\}$;

f) $W_2 = \text{lin}\,\{(1,2,0),(0,0,1)\}$; g) $W_0 = \text{lin}\,\{(1,1,-1)\}$, $W_2 = \text{lin}\,\{(-1,1,1)\}$, $W_4 = \text{lin}\,\{(1,-1,1)\}$; h) $W_0 = \text{lin}\,\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$, $W_7 = \text{lin}\,\{(2,0,3,2)\}$.

11.6 a) $W_{1-2i} = \text{lin}_C\,\{(2i,1)\}$, $W_{1+2i} = \text{lin}_C\,\{(-2i,1)\}$; b) $W_0 = \text{lin}_C\,\{(1,i)\}$, $W_2 = \text{lin}_C\,\{(1,-i)\}$; c) $W_1 = \text{lin}_C\,\{(0,1,0)\}$, $W_i = \text{lin}_C\,\{(3-i,0,1)\}$, $W_{-i} = \text{lin}_C\,\{(3+i,0,1)\}$; d) $W_{5i} = \text{lin}_C\,\{(0,0,1)\}$, $W_{6i} = \text{lin}_C\,\{(i-1,1,-1)\}$, $W_{4+2i} = \text{lin}_C\,\{(0,4-3i,1)\}$;
e) $W_0 = \text{lin}_C\,\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, $W_{3+i} = \text{lin}_C\,\{(i,1,2)\}$; f) $W_4 = \text{lin}_C\,\{(0,1,0)\}$, $W_{-3i} = \text{lin}_C\,\{(1,0,i)\}$, $W_i = \text{lin}_C\,\{(i,0,1)\}$.

Przestrzenie euklidesowe

Dwunasty tydzień

Iloczyn skalarny (4.1). Norma wektora (4.2). Ortogonalność wektorów (4.3).

Przykłady

- **Przykład 12.1**

Sprawdzić, że podane funkcje $(\cdot,\cdot)$ są iloczynami skalarnymi w rozważanych przestrzeniach liniowych:

a) $(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$ dla $\vec{x} = (x_1,x_2)$, $\vec{y} = (y_1,y_2) \in R^2$;

b) $(p,q) = p(1)q(1) + 2p(2)q(2)$ dla $p, q \in R_1[x]$.

Rozwiązanie

Funkcja $(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow R$ jest iloczynem skalarnym w rzeczywistej przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ oraz dowolnej liczby $\alpha \in R$ spełnione są warunki:

1. $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})$,
2. $(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) + (\vec{v},\vec{w})$,
3. $(\alpha\vec{u},\vec{v}) = \alpha(\vec{u},\vec{v})$,
4. $(\vec{u},\vec{u}) \geqslant 0$,
5. $(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

a) Niech $\vec{x} = (x_1,x_2)$, $\vec{y} = (y_1,y_2)$, $\vec{z} = (z_1,z_2) \in R^2$ oraz niech $\alpha \in R$. Warunki **1.–3.** definicji są spełnione, bowiem

1. $$\begin{aligned}(\vec{x},\vec{y}) &= 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2\\ &= 3y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 4x_2y_2\\ &= (\vec{y},\vec{x}),\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) &= 3(x_1+y_1)z_1 - 2(x_1+y_1)z_2 - 2(x_2+y_2)z_1 + 4(x_2+y_2)z_2\\ &= (3x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 4x_2z_2) + (3y_1z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 4y_2z_2)\\ &= (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3.\ (\alpha\vec{x},\vec{y}) &= 3(\alpha x_1)y_1 - 2(\alpha x_1)y_2 - 2(\alpha x_2)y_1 + 4(\alpha x_2)y_2\\ &= \alpha(3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2)\\ &= \alpha(\vec{x},\vec{y}).\end{aligned}$$

Sprawdzamy warunek **4.** Mamy $(\vec{x},\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$. Jest to trójmian kwadratowy zmiennej x_1, dla którego $\Delta = -32(x_2)^2 \leqslant 0$. Stąd wynika, że $(\vec{x},\vec{x}) \geqslant 0$. Warunek **5.** jest także spełniony, bowiem oczywiście $(\vec{0},\vec{0}) = 0$. Jeżeli natomiast $(\vec{x},\vec{x}) = 0$, to rozważany poprzednio trójmian kwadratowy ma pierwiastek i $\Delta = 0$. Stąd $x_2 = 0$ oraz $x_1 = 0$, zatem $\vec{x} = \vec{0}$.

b) Niech $p, q, r \in R_1[x]$ oraz $\alpha \in R$. Podobnie jak poprzednio mamy

$$\begin{aligned}
1.\ (p,q) &= p(1)q(1) + 2p(2)q(2) = q(1)p(1) + 2q(2)p(2) = (q,p)\\
2.\ (p+q,r) &= (p(1)+q(1))\,r(1) + 2\,(p(2)+q(2))\,r(2)\\
&= (p(1)r(1) + 2p(2)r(2)) + (q(1)r(1) + 2q(2)r(2))\\
&= (p,r) + (q,r),\\
3.\ (\alpha p,q) &= (\alpha p(1))\,q(1) + 2\,(\alpha p(2))\,q(2) = \alpha\,(p(1)q(1) + 2p(2)q(2))\\
&= \alpha(p,q),\\
4.\ (p,p) &= p^2(1) + 2p^2(2) \geqslant 0,\\
5.\ (\vec{0},\vec{0}) &= 0,\ \text{a z warunku } (p,p)=0 \text{ wynika, że } p(1) = p(2) = 0.
\end{aligned}$$

Funkcja p jest wielomianem stopnia 1 lub funkcją stałą. Zerowanie się tej funkcji w punktach $x = 1$ i $x = 2$ oznacza, że $p(x) \equiv 0$.

• Przykład 12.2

Uzasadnić, że podane funkcje $(\cdot,\cdot)$ nie są iloczynami skalarnymi we wskazanych przestrzeniach liniowych:

a) $(\vec{x},\vec{y}) = 5x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + y_1y_2$ dla $\vec{x} = (x_1,x_2)$, $\vec{y} = (y_1,y_2) \in R^2$;

b) $(\vec{x},\vec{y}) = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$ dla $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3) \in R^3$;

c) $(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ dla $p, q \in R_2[x]$.

Rozwiązanie

a) Funkcja $(\cdot,\cdot)$ nie spełnia warunku **4.** (patrz rozwiązanie **Przykładu 12.1**) definicji iloczynu skalarnego. Traktując bowiem wyrażenie $(\vec{x},\vec{x}) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ jako trójmian kwadratowy zmiennej x_1 otrzymujemy związek $\Delta = 16x_2^2 \geqslant 0$. Możliwa jest więc sytuacja, że $(\vec{x},\vec{x}) < 0$, np. dla $\vec{x} = \left(\frac{2}{5},1\right)$. Dodatkowo można jeszcze zauważyć, że istnieje niezerowy wektor, np. $\vec{x} = (1,1)$, dla którego $(\vec{x},\vec{x}) = 0$. To oznacza, że również warunek **5.** definicji iloczynu skalarnego nie jest spełniony.

b) W tym przykładzie warunek **1.** definicji iloczynu skalarnego nie jest spełniony. Macierz definiująca funkcję $(\cdot,\cdot)$ nie jest symetryczna i łatwo wskazać dwa wektory, np. $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (0,1,0)$, dla których $(\vec{x},\vec{y}) = 1 \neq -1 = (\vec{y},\vec{x})$.

c) Załóżmy, że dla pewnego wielomianu $p \in R_2[x]$ zachodzi związek $(p,p) = 0$. To oznacza, że $p^2(0) + p^2(1) = 0$, a zatem $p(0) = p(1) = 0$. Łatwo wskazać niezerowy wielomian p stopnia $\leqslant 2$ spełniający otrzymaną zależność, np. $p(x) = x(x-1)$. Warunek **5.** definicji iloczynu skalarnego nie jest więc spełniony.

• Przykład 12.3

W przestrzeni euklidesowej E^4:

a) obliczyć normę wektora $(1,-2,3,-4)$;

b) zbadać ortogonalność wektorów $(2,-3,1,-1)$, $(6,1,-2,7)$;

c) obliczyć kąt między wektorami $(1,2,1,-2)$, $(-2,1,0,1)$;

d) znaleźć wszystkie wektory ortogonalne do wektora $(1,0,1,0)$ i wskazać jeden taki wektor o normie równej 3;

e) podać przykład wektora unormowanego tworzącego z wektorem $(1,1,-1,0)$ kąt $\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie

a) Niech $\vec{x} = (1,-2,3,-4)$. Wówczas

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30}.$$

b) Oznaczmy podane wektory odpowiednio przez $\vec{x}$, $\vec{y}$. Mamy $(\vec{x},\vec{y}) = 0$, zatem wektory te są ortogonalne.

c) Dla podanych wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$ mamy

$$\cos\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{-2}{\sqrt{10}\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{15}}{15},$$

czyli $\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right)$.

d) Dowolny wektor $\vec{x} = (a,b,c,d) \in E^4$ ortogonalny do danego wektora $\vec{y}$ spełnia związek $(\vec{x},\vec{y}) = a + c = 0$. Stąd wynika, że $\vec{x} = (a,b,-a,d)$, gdzie $a,b,d \in R$. Wszystkie wektory o tej własności tworzą więc przestrzeń liniową lin $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$. Wektor o normie równej 3 należący do tej przestrzeni spełnia dodatkowo warunek $2a^2 + b^2 + d^2 = 9$. Przykładem takiego wektora jest $\vec{x}_0 = (2,1,-2,0)$.

e) Niech $\vec{x} = (a,b,c,d)$ będzie szukanym wektorem, $\vec{y} = (1,1,-1,0)$. Wówczas mamy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ oraz

$$\cos\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{a+b-c}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd wynika, że $a + b - c = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Przykładowo można przyjąć, że $a = b = \frac{1}{8}\sqrt{6}$, $c = -\frac{1}{4}\sqrt{6}$, zaś $d = \sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$. Ostatecznie $\vec{x} = \left(\frac{1}{8}\sqrt{6}, \frac{1}{8}\sqrt{6}, -\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{7}\right)$.

• Przykład 12.4

Obliczyć kąty między wektorami $p_0 = 2 - 4x$, $q_0 = x - 2$ w przestrzeni euklidesowej $R_1[x]$ z podanymi iloczynami skalarnymi:

a) $(p, q) = p(-1)q(-1) + p(2)q(2)$;

b) $(p, q) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0)$;

c) $(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$, przy czym $p, q \in R_1[x]$.

d*) Wskazać taki iloczyn skalarny w przestrzeni $R_1[x]$, dla którego podane dwa wektory będą unormowane i ortogonalne.

Rozwiązanie

a) Mamy $\|p_0\|^2 = 6^2 + (-6)^2 = 72$, $\|q_0\|^2 = (-3)^2 + 0^2 = 9$, zatem

$$\cos \sphericalangle (p_0, q_0) = \frac{(p_0, q_0)}{\|p_0\|\,\|q_0\|} = \frac{6(-3) + (-6)\cdot 0}{\sqrt{72}\sqrt{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Podane wektory tworzą więc kąt $\frac{3}{4}\pi$.

b) Tutaj $\|p_0\|^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20$, $\|q_0\|^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$, zatem

$$\cos \sphericalangle (p_0, q_0) = \frac{2(-2) + (-4)\cdot 1}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}.$$

W tym przypadku $\sphericalangle (p_0, q_0) = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

c) Analogicznie

$$\|p_0\|^2 = \int_0^1 (2-4x)^2\,dx = \frac{4}{3}, \quad \|q_0\|^2 = \int_0^1 (x-2)^2\,dx = \frac{7}{3},$$

$$(p_0, q_0) = \int_0^1 (2-4x)(x-2)\,dx = -\frac{1}{3}.$$

Otrzymujemy więc zależność

$$\cos \sphericalangle (p_0, q_0) = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{7}{3}}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

I ostatecznie $\sphericalangle (p_0, q_0) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)$.

d*) Zauważmy, że wektory p_0, q_0 tworzą bazę przestrzeni liniowej $R_1[x]$. Niech p, q będą dowolnymi wektorami z przestrzeni $R_1[x]$ o współrzędnych w bazie p_0, q_0 równych odpowiednio $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$. Iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)$, który chcemy określić ma spełniać warunki $(p_0, p_0) = 1$, $(q_0, q_0) = 1$ oraz $(p_0, q_0) = 0$. Dla wektorów p, q oznacza to, że

$$\begin{aligned}(p, q) &= (\alpha_1 p_0 + \alpha_2 q_0, \beta_1 p_0 + \beta_2 q_0)\\ &= \alpha_1\beta_1 (p_0, p_0) + \alpha_1\beta_2 (p_0, q_0) + \alpha_2\beta_1 (q_0, p_0) + \alpha_2\beta_2 (q_0, q_0) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2.\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest tylko jeden iloczyn skalarny o podanej własności. Konkretnie dla wielomianów $p = ax + b$, $q = a_1x + b_1$, gdzie $a, b, a_1, b_1 \in R$, zachodzą związki

$$p = -\frac{1}{6}(2a+b)p_0 - \frac{1}{3}(a+2b)q_0, \quad q = -\frac{1}{6}(2a_1+b_1)p_0 - \frac{1}{3}(a_1+2b_1)q_0,$$

zatem

$$(p, q) = \frac{1}{36}(2a+b)(2a_1+b_1) + \frac{1}{9}(a+2b)(a_1+2b_1).$$

- **Przykład 12.5**

W przestrzeni liniowej $C([0, 2\pi])$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx:$$

a) obliczyć normy funkcji 1, x, $2\sin x - 3\cos x$;

b) podać przykład wielomianu możliwie najniższego stopnia tworzącego z funkcją $\sin x$ kąt $\arccos \frac{\sqrt{6}}{2\pi}$.

Rozwiązanie

a) Zgodnie z definicją normy mamy $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ dla $f \in C([0, 2\pi])$. Tutaj

$$\|1\|^2 = \int_0^{2\pi} 1^2\,dx = 2\pi, \quad \|x\|^2 = \int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8}{3}\pi^3,$$

$$\|2\sin x - 3\cos x\|^2 = \int_0^{2\pi} \left(4\sin^2 x - 12\sin x\cos x + 9\cos^2 x\right)dx = 13\pi,$$

zatem normy kolejnych funkcji są równe $\sqrt{2\pi}$, $2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$, $\sqrt{13\pi}$.

b) Wszystkie wielomiany stałe są ortogonalne do funkcji $\sin x$, bowiem

$$(c, \sin x) = \int_0^{2\pi} (c\cdot\sin x)\,dx = 0 \ \text{dla}\ c \in R.$$

Poszukajmy naszej funkcji wśród wielomianów stopnia 1 postaci $ax + b$, gdzie $a, b \in R$, $a \neq 0$. Mamy

$$(ax+b, \sin x) = \int_0^{2\pi} (ax+b)\sin x\,dx = a\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -2\pi a,$$

$$\|\sin x\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi,$$

$$\|ax+b\|^2 = \int_0^{2\pi} \left(a^2x^2 + 2abx + b^2\right)dx = \frac{8}{3}a^2\pi^3 + 4ab\pi^2 + 2b^2\pi.$$

Zatem

$$\cos \sphericalangle (ax+b, \sin x) = \frac{-2\pi a}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{8}{3}a^2\pi^3 + 4ab\pi^2 + 2b^2\pi}} = \frac{-2a}{\sqrt{\frac{8}{3}a^2\pi^2 + 4ab\pi + 2b^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}.$$

Zauważmy, że $a < 0$. Po prostych przekształceniach otrzymamy $a\pi + b = 0$. Przyjmując teraz np. $b = 1$, otrzymamy $a = -\frac{1}{\pi}$. Szukanym wielomianem jest zatem $p(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$.

• **Przykład* 12.6**

Stosując nierówność Schwarza w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych uzasadnić nierówności:

a) $\left(a^2 + b^4 + c^6\right)^2 \leqslant \left(1 + b^2 + c^4\right)\left(a^4 + b^6 + c^8\right)$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbf{R}$;

b) $\left(\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^1 f^2(x)g^2(x)\,dx$ dla dowolnych $f, g \in C(\mathbf{R})$.

Rozwiązanie

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ w przestrzeni euklidesowej E zachodzi nierówność Schwarza postaci $|(\vec{u}, \vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. Po podniesieniu obu stron tej nierówności do kwadratu otrzymujemy zależność $(\vec{u}, \vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$.

a) Niech $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ będą wektorami przestrzeni euklidesowej E^3. Nierówność Schwarza w tej przestrzeni ma postać

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right).$$

Żądaną postać wzoru otrzymujemy przyjmując $\vec{x} = \left(1, b, c^2\right)$, $\vec{y} = \left(a^2, b^3, c^4\right)$.

b) W przestrzeni euklidesowej wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$, z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f_1, f_2) = \int\limits_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx,$$

zachodzi związek

$$\left(\int\limits_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx\right)^2 = (f_1, f_2)^2 \leqslant \|f_1\|^2\,\|f_2\|^2 = \left(\int\limits_0^1 f_1^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_0^1 f_2^2(x)\,dx\right).$$

Wystarczy teraz zastosować tę nierówność do funkcji $f_1(x) = f(x)g(x)$, $f_2(x) \equiv 1$.

Zadania

○ **Zadanie 12.1**

Sprawdzić, że podane funkcje $(\cdot,\cdot)$ są iloczynami skalarnymi w rozważanych przestrzeniach liniowych:

a) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$;

b) $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$;

c) $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ dla $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$;

d) $(p, q) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} p(x_i)\,q(x_i)$ dla $p, q \in \mathbf{R}_n[x]$, gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$;

e) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} (x+1)f(2x)g(2x)\,dx$ dla $f, g \in C([-2, 2])$.

○ **Zadanie 12.2**

Uzasadnić dlaczego podane funkcje $(\cdot,\cdot)$ nie są iloczynami skalarnymi w rozważanych przestrzeniach liniowych:

a) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2$ dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$;

b) $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ dla $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$;

c) $(p, q) = p(1)q(1) - p(2)q(2)$ dla $p, q \in \mathbf{R}_1[x]$;

d) $(p, q) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i)\,q(x_i)$ dla $p, q \in \mathbf{R}_n[x]$, gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$;

e) $(f, g) = \int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx$ dla $f, g \in C([a, b])$;

f) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g\left(\frac{1}{2}x\right)dx$ dla $f, g \in C([-1, 1])$.

○ **Zadanie 12.3**

W przestrzeni euklidesowej E^4:

a) obliczyć normę wektora $(-1, 1, 2, -3)$;

b) zbadać ortogonalność wektorów $(1, 4, -1, 2)$, $(3, -1, 2, -1)$;

c) obliczyć kąt między wektorami $(1, 3, 0, -1)$, $(3, 1, 1, 0)$;

d) opisać zbiór wszystkich wektorów ortogonalnych do każdego z wektorów $(2, 1, 0, 1)$, $(0, -2, 1, 1)$ i wskazać jeden wektor z tego zbioru o normie równej 2;

e) podać przykład wektora unormowanego tworzącego z wektorem $(1, 2, 0, -2)$ kąt $\frac{2\pi}{3}$.

○ **Zadanie 12.4**

Obliczyć kąt, jaki tworzą wektory $p_0 = x + 1$, $q_0 = x - 2$ w przestrzeni euklide-

Rozwiązanie

Skorzystamy z tego, że zbiór $W \subset V$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ oraz dla dowolnej liczby $\alpha \in R$ wektory $\alpha\vec{w}_1$ i $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ należą do zbioru W. Dla przestrzeni liniowej R^2 interpretowanej jako zbiór punktów płaszczyzny oznacza to, że jeżeli:

(1) punkt $A \neq O$, gdzie O oznacza początek układu współrzędnych, należy do zbioru W, to również cała prosta przechodząca przez ten punkt oraz przez początek układu zawarta jest w zbiorze W. Tego warunku nie spełniają zbiory W z przykładów a), b), c), g), h). W przypadku a), b), c), g) np. punkt $A = (1, 0)$ należy do zbioru W, ale prosta $l: y = 0$ nie jest zawarta w tym zbiorze. Podobna sytuacja jest w przykładzie h) dla punktu $A = (0, 1)$ i prostej $k: x = 0$.

(2) zbiór W zawiera dwa punkty A, B, to zawiera również punkt C będący czwartym wierzchołkiem równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, gdzie $O = (0, 0)$. Tego z kolei warunku nie spełniają zbiory z rysunków a), b), c), e), f), g), h). Wystarczy bowiem przyjąć a), g) $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 1)$; b), c) $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$; e) $A = (1, -1)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$; f) $A = (1, -1)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$; h) $A = (1, 1)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 2)$.

Ostatecznie jedynie zbiór z rysunku d) jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^2. Jest to prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych. Warunek (1) jest oczywiście spełniony, zaś wszystkie równoległoboki z warunku (2) są zdegenerowane i ich wierzchołki leżą tylko na tej prostej.

- **Przykład 1.4**

Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni R^2.

Rozwiązanie

Niech W będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni R^2. Posługując się interpretacją przestrzeni liniowej R^2 jako zbioru punktów płaszczyzny możemy wyróżnić jedynie trzy wzajemnie wykluczające się przypadki:

(1) $W = \{(0, 0)\}$;

(2) zbiór W zawiera punkt $A \neq O = (0, 0)$ i nie zawiera żadnego punktu niewspółliniowego z punktami O i A. Jeżeli $A = (a, b)$, to dla każdego $t \in R$ punkt $(at, bt) \in W$, czyli cała prosta $l: x = at, y = bt$ zawiera się w zbiorze W. Jednocześnie z założenia żaden punkt spoza prostej l nie należy do zbioru W, a więc zbiór W jest prostą l. Ze względu na dowolność wyboru punktu A możemy stwierdzić, że wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni R^2;

(3) zbiór W zawiera dwa punkty $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ niewspółliniowe z punktem O. Wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nie są więc równoległe, czyli $ad - bc \neq 0$. W tym przypadku $W = R^2$. Niech bowiem $C = (x, y)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Istnieją wtedy stałe α_1, α_2 takie, że $C = \alpha_1 A + \alpha_2 B$. Wynika to z faktu, że układ równań $a\alpha_1 + c\alpha_2 = x$, $b\alpha_1 + d\alpha_2 = y$ jest układem Cramera o niewiadomych α_1, α_2. Ostatecznie jedynymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni R^2 są: $\{(0, 0)\}$, wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych oraz R^2.

- **Przykład 1.5**

Określić, które z podanych zbiorów U_i, W_i są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowych V_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 6$:

a) $V_1 = R^3$, $U_1 = \{(x, y, z) : yz \leqslant 0\}$, $W_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = x - y = 0\}$;

b) $V_2 = R^4$, $U_2 = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in R\}$, $W_2 = \{(x, x-y, z, y) : x, y, z \in R\}$;

c) $V_3 = R^\infty$, $U_3 = \left\{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0\right\}$, $W_3 = \{(x_n) : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$;

d) $V_4 = R[x]$, $U_4 = \{p : \text{stopień wielomianu } p \text{ jest parzysty}\}$,
$W_4 = \{p : p'(1) = 0\}$;

e) $V_5 = C(R)$, $U_5 = \{f : f(1) = f(2)\}$, $W_5 = \{f : \text{funkcja } f \text{ jest monotoniczna}\}$;

f) $V_6 = M_{2\times 2}$, $U_6 = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{bmatrix} : x, y \in R\right\}$, $W_6 = \{A \in M_{2\times 2} : \det A = 0\}$.

Rozwiązanie

Aby uzasadnić, że zbiór nie jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej wystarczy wskazać dwa wektory należące do danego zbioru, których suma nie należy do tego zbioru lub też jeden wektor, który po pomnożeniu przez pewną liczbę już nie należy do tego zbioru. Można też np. zauważyć, że wektor zerowy leży poza zbiorem, a to jest warunek konieczny dla podprzestrzeni liniowej. I tak w naszym przykładzie zbiory U_1, U_2, U_3, U_4, W_5, W_6 nie są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych, bowiem

- $(0, 3, -1), (0, -2, 2) \in U_1$, ale $(0, 3, -1) + (0, -2, 2) = (0, 1, 1) \notin U_1$;
- $(0, 0, 0, 0) \notin U_2$;
- dla $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ciąg $(x_n) \in U_3$, ale ciąg $(-x_n) = -(x_n) \notin U_3$;
- $x^4 + x^3, x^4 \in U_4$, ale $\left(x^4 + x^3\right) - x^4 = x^3 \notin U_4$;
- $f(x) = \max(x, 0)$, $g(x) = \min(x, 0) \in W_5$, ale $f(x) - g(x) = |x| \notin W_5$;
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W_6$, ale $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin W_6$.

Pozostałe zbiory są podprzestrzeniami liniowymi, co uzasadnimy niżej. Niech zatem $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Wówczas

- dla $\vec{w}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{w}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W_1$ wektor

$$\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_2\vec{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \in W_1,$$

bo

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

oraz

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2) = 0.$$

Inaczej można było napisać, że $W_1 = \{(x, x, -2x) : x \in R\}$ i z tej postaci zbioru uzasadnić powyższe warunki;

- dla $\vec{w}_1 = (x_1, x_1 - y_1, z_1, y_1)$, $\vec{w}_2 = (x_2, x_2 - y_2, z_2, y_2) \in W_2$ wektor

$$\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_2\vec{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

należy do W_2;

sowej $R_2[x]$ z podanymi iloczynami skalarnymi:

a) $(p,q) = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$;

b) $(p,q) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$;

c) $(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ dla $p, q \in R_2[x]$.

d*) Wskazać taki iloczyn skalarny w przestrzeni $R_2[x]$, dla którego wektory p_0, q_0 będą ortogonalne i unormowane.

○ Zadanie 12.5

W przestrzeni liniowej $R[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx :$$

a) obliczyć $(x^2, -1)$, $\|x+1\|$ oraz cosinus kąta między wektorami $x+1$, $x-1$;

b) podać przykład wielomianu możliwie najniższego stopnia ortogonalnego do każdego z wielomianów $x-1$, x^2;

c) dobrać stałą a tak, aby wielomiany $3x^2+ax-1$ oraz $2x^2+6x-1$ były ortogonalne.

○ Zadanie* 12.6

Stosując nierówność Schwarza w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych uzasadnić, że zachodzą nierówności:

a) $(ab+bc+ac)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)^2$ dla dowolnych $a,b,c \in R$;

b) $\left(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\right)^2 \leqslant \left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4\right)$ dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$;

c) $\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 f^4(x)\,dx\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \ldots$ dla dowolnej funkcji ciągłej $f: R \longrightarrow R$.

Odpowiedzi i wskazówki

12.2 **a)** $(\vec{x},\vec{y}) \neq (\vec{y},\vec{x})$ np. dla $\vec{x}=(1,2)$, $\vec{y}=(1,0)$; **b)** $(\vec{x},\vec{y}) \neq (\vec{y},\vec{x})$ np. dla $\vec{x}=(1,2,0)$, $\vec{y}=(1,0,0)$, $(\vec{z},\vec{z})<0$ np. dla $\vec{z}=(0,1,-2)$, $(\vec{u},\vec{u})=0$ np. dla $\vec{u}=(1,0,-1)\neq\vec{O}$; **c)** $(p,p)<0$ np. dla $p=x$, $(q,q)=0$ np. dla $q=1$; **d)** $(p,p)=0$ np. dla $p=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$; **e)** $(f_1+f_2,g)\neq(f_1,g)+(f_2,g)$ np. dla $f_1=g=-f_2=1$, $(\alpha f,h)\neq\alpha(f,h)$ np. dla $f=h=1$, $\alpha=-1$; **f)** $(f,g)\neq(g,f)$ np. dla $f=x^2$, $g=1$, $(h,h)<0$ np. dla $h=2x^2-1$.

12.3 **a)** $\sqrt{15}$; **b)** brak ortogonalności; **c)** $\arccos\frac{6}{11}$; **d)** $\operatorname{lin}\{(1,0,2,-2),(0,1,3,-1)\}$,

$\vec{x}_0 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$; **e)** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{5}{8}}, \frac{1}{4}\right)$.

12.4 **a)** $\arccos\sqrt{\frac{2}{29}}$; **b)** $\arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$; **c)** $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$; **d*)** iloczyn skalarny o żądanej własności może mieć postać $(p,q) = aa_1 + \frac{1}{9}(b-c)(b_1-c_1) + \frac{1}{9}(2b+c)(2b_1+c_1)$ dla $p = ax^2+bx+c$, $q = a_1x^2+b_1x+c_1$.

12.5 **a)** $-\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\frac{-2\sqrt{7}}{7}$; **b)** $50x^2-52x+9$; **c)** $-\frac{61}{60}$.

Trzynasty tydzień

Ortogonalność wektorów (4.3). Bazy ortogonalne (4.4). Inne metody ortogonalizacji* (4.5).

Przykłady

• Przykład 13.1

Sprawdzić, że podane układy wektorów są bazami ortogonalnymi lub ortonormalnymi odpowiednich przestrzeni liniowych i znaleźć współrzędne wskazanych wektorów w tych bazach:

a) $\vec{v}_1 = (2,-4)$, $\vec{v}_2 = (6,3)$, $\vec{u} = (1,2) \in E^2$;

b) $\vec{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\vec{v}_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\vec{v}_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, -2\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right)$, $\vec{u} = (0,1,0) \in E^3$;

c) $p_1 \equiv 2$, $p_2 = x + x^2$, $p_3 = x + 2x^2$, $p_4 = 3x^3$, $q = x^2 - x + 1$ w przestrzeni $R_3[x]$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem

$$\left(ax^3+bx^2+cx+d, a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1\right) = aa_1 + (b-c)(b_1-c_1) + (2c-b)(2c_1-b_1) + dd_1.$$

Rozwiązanie

Wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ są bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej E wymiaru n, jeżeli $(\vec{v}_i,\vec{v}_i) \neq 0$ oraz $(\vec{v}_i,\vec{v}_j) = 0$ dla $i,j = 1,2,\ldots,n$, $i \neq j$. Jeżeli dodatkowo $\|\vec{v}_i\| = 1$ dla $i = 1,2,\ldots,n$, to jest to baza ortonormalna. Dowolny wektor $\vec{u} \in E$ ma w bazie ortogonalnej przedstawienie

$$\vec{u} = \frac{(\vec{u},\vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \ldots + \frac{(\vec{u},\vec{v}_n)}{\|\vec{v}_n\|^2}\vec{v}_n,$$

zaś w bazie ortonormalnej

$$\vec{u} = (\vec{u},\vec{v}_1)\,\vec{v}_1 + \ldots + (\vec{u},\vec{v}_n)\,\vec{v}_n.$$

a) Mamy $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$, $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{20}$, $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{45}$. Jest to więc baza ortogonalna przestrzeni E^2, a współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2]$ wektora $\vec{u}$ w tej bazie wyrażają się wzorami

$$\alpha_1 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}, \quad \alpha_2 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}.$$

b) Zachodzą związki $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_3) = (\vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$. Ponadto $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_3\| = 1$. Rozważana baza jest zatem ortonormalna. Współrzędne $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ wektora $\vec{u}$ w tej bazie są równe

$$\beta_1 = (\vec{u}, \vec{v}_1) = 0, \quad \beta_2 = (\vec{u}, \vec{v}_2) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \beta_3 = (\vec{u}, \vec{v}_3) = -2\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

c) Łatwo się przekonać, że

$$(p_1, p_2) = (p_1, p_3) = (p_1, p_4) = (p_2, p_3) = (p_2, p_4) = (p_3, p_4) = 0.$$

Dalej

$$\|p_1\| = 2, \ \|p_2\| = \|p_3\| = 1, \ \|p_4\| = 3.$$

Stąd wynika, że podana baza jest ortogonalna, a współrzędne $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ wektora q w tej bazie są równe

$$\gamma_1 = \frac{(q, p_1)}{\|p_1\|^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{(q, p_2)}{\|p_2\|^2} = \frac{-3}{1} = -3,$$
$$\gamma_3 = \frac{(q, p_3)}{\|p_3\|^2} = \frac{2}{1} = 2, \quad \gamma_4 = \frac{(q, p_4)}{\|p_4\|^2} = \frac{0}{9} = 0.$$

Sprawdzimy jeszcze, że rzeczywiście $x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 - 3\left(x + x^2\right) + 2\left(x + 2x^2\right)$.

• Przykład 13.2

Sprawdzić, że funkcje $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 4x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 6x$, ... tworzą nieskończony układ ortonormalny w przestrzeni euklidesowej wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f, g) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\,dx.$$

Rozwiązanie

Obliczmy najpierw normy wszystkich podanych funkcji. Dla $n \in N$ mamy

$$\left\|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2nx\right\| = \left(\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2nx\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Ortogonalność wszystkich par funkcji z podanego zbioru wynika z tego, że dla dowolnych $m, n \in N$ takich, że $n \neq m$ zachodzi zależność

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2mx, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2nx\right) &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2mx \sin 2nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{\cos[2(m-n)x] - \cos[2(m+n)x]\}\,dx \\ &= \left[\frac{\sin[2(m-n)x]}{2\pi(m-n)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin[2(m+n)x]}{2\pi(m+n)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (0-0) - (0-0) = 0.\end{aligned}$$

Uzyskane wyniki potwierdzają więc ortonormalność danego zbioru funkcji.

• Przykład 13.3

Stosując metodę Grama–Schmidta zortogonalizować podane wektory ze wskazanych przestrzeni euklidesowych:

a) $\vec{u}_1 = (1, -2, 0)$, $\vec{u}_2 = (5, 5, 1)$, $\vec{u}_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni E^3;

b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, 2, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 0, 1)$ w przestrzeni E^4;

c) $p_1 \equiv 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$ w przestrzeni $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(p, q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Rozwiązanie

Ortogonalizacja Grama–Schmidta liniowo niezależnych wektorów $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ w przestrzeni euklidesowej E polega na wyznaczeniu takich wektorów ortogonalnych $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, aby układy wektorów $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ oraz $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ generowały te same przestrzenie dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

a) Dokonamy bezpośredniej konstrukcji wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ metodą Grama–Schmidta. Przyjmijmy na początku, że $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1, -2, 0)$. Warunek generowania identycznych przestrzeni przez wektory $\vec{u}_1$ i $\vec{v}_1$ jest oczywiście spełniony. Równość

$$\text{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

będzie zagwarantowana, gdy wektor $\vec{v}_2$ będzie postaci

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + a\vec{v}_1 = (5 + a, 5 - 2a, 1), \text{ gdzie } a \in R.$$

Współczynnik a obliczamy z warunku ortogonalności $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$. Mamy

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (5 + a)\cdot 1 + (5 - 2a)\cdot(-2) + 1\cdot 0 = -5 + 5a = 0.$$

Stąd $a = 1$ i $\vec{v}_2 = (6, 3, 1)$. Wektor $\vec{v}_3$ wyznaczamy z warunku

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 = (5 + b + 6c, 4 - 2b + 3c, 4 + c), \text{ gdzie } b, c \in R,$$

gwarantującego równość przestrzeni

$$\operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\},$$

oraz z warunków ortogonalności $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$, $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$. Otrzymamy wtedy układ równań

$$\begin{cases} (\vec{v}_3, \vec{v}_1) &= 5 + b + 6c - 8 + 4b - 6c = 5b - 3 = 0 \\ (\vec{v}_3, \vec{v}_2) &= 30 + 6b + 36c + 12 - 6b + 9c + 4 + c = 46c + 46 = 0 \end{cases}$$

Skąd mamy $b = \frac{3}{5}$, $c = -1$, zatem $\vec{v}_3 = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3\right)$.

b) Stosując ogólne wzory na ortogonalizację Grama-Schmidta otrzymujemy kolejno

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{(\vec{u}_2, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 = (-1, 2, 1, 0),$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{(\vec{u}_3, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{u}_3, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Znalezione wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ stanowią już bazę ortogonalną przestrzeni $\operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Zauważmy, że rachunki w tym przykładzie można było jeszcze skrócić wykorzystując ortogonalność wektorów $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$. Po przyjęciu dogodniejszej kolejności wektorów i zastosowaniu metody Grama-Schmidta otrzymalibyśmy $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, 1, -1)$.

c) Stosując ortogonalizację Grama-Schmidta do wektorów p_1, p_2, p_3 otrzymujemy wektory

$$q_1 \equiv 1,$$

$$q_2 = x - \frac{(x, 1)}{\|1\|^2} \cdot 1 = x - \frac{0}{3} \cdot 1 = x,$$

$$q_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)}{\|x\|^2} \cdot x = x^2 - \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{0}{2} \cdot x = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Wielomiany $1, x, x^2 - \frac{2}{3}$ tworzą zatem bazę ortogonalną przestrzeni $\operatorname{lin}\{1, x, x^2\}$ z podanym iloczynem skalarnym.

• Przykład 13.4

Podane wektory uzupełnić do baz ortogonalnych odpowiednich przestrzeni euklidesowych:

a) $(1, 4, -2)$, $(2, -1, -1)$ w przestrzeni E^3;

b) $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, -1, 1)$ w przestrzeni E^4;

c) $2x+1$ w przestrzeni $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym wielomianów $p = ax^2+bx+c$, $q = a_1x^2 + b_1x + c_1$, określonym wzorem $(p, q) = aa_1 + bb_1 + cc_1$.

Rozwiązanie

Oczywiście dane wektory muszą być ortogonalne. Najpierw uzupełnimy je do zwykłej bazy rozważanej przestrzeni liniowej, a następnie bazę ortogonalizujemy zostawiając dane na początku wektory bez zmian.

a) Wektory $\vec{v}_1 = (1, 4, -2)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, -1)$ uzupełniamy do bazy przestrzeni E^3 np. o wektor $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$. Stosując metodę Grama-Schmidta znajdujemy brakujący wektor

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{(\vec{u}_3, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{u}_3, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{14}, \frac{9}{14}\right).$$

Zauważmy, że w tym przykładzie wektor $\vec{v}_3$ można wyznaczyć także ze wzoru $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-6, -3, -9)$ lub też przyjąć $\vec{v}_3 = (a, b, c)$ i rozwiązać układ równań $a + 4b - 2c = 0$, $2a - b - c = 0$.

b) Spośród wektorów bazy standardowej przestrzeni E^4 dobieramy dwa wektory stanowiące wraz z danymi $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$ bazę tej przestrzeni. Wektory $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ są tu dobre, bowiem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Dalsze wektory $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ bazy ortogonalnej obliczamy ze wzoru

$$\vec{v}_3 = \vec{e}_3 - \frac{(\vec{e}_3, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{e}_3, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2$$

$$= (0, 0, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, -1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\vec{v}_4 = \vec{e}_4 - \frac{(\vec{e}_4, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{e}_4, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 - \frac{(\vec{e}_4, \vec{v}_3)}{\|\vec{v}_3\|^2}\vec{v}_3$$

$$= (0, 0, 0, 1) - 0 - \frac{1}{3}(0, 1, -1, 1) - 1\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right).$$

c) Wektor $q_1 = 2x+1$ uzupełniamy do bazy przestrzeni $R_2[x]$ o wektory $p_2 = 1$, $p_3 = x^2$. Stosując wzory Grama-Schmidta obliczamy brakujące wektory q_2, q_3 bazy ortogonalnej:

$$q_2 = 1 - \frac{(1, 2x+1)}{\|2x+1\|^2}(2x+1) = 1 - \frac{1}{5}(2x+1) = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5},$$

$$q_3 = x^2,$$

bowiem $(p_3, q_1) = (p_3, q_2) = 0$.

• Przykład 13.5

Znaleźć bazy ortonormalne podanych przestrzeni euklidesowych i podać współrzędne wskazanych wektorów w tych bazach:

a) $E = \{(x, y, z, t) \in E^4 : 4x - z = 2y - 3z + 2t = 0\}$, $\vec{v} = (1, -3, 4, 9)$;

b) $E = R_2[x]$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx, \quad p_0 = x.$$

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczymy zwykłe bazy rozważanych przestrzeni liniowych, a następnie zortogonalizujemy je i unormujemy. Współrzędne wektorów będziemy obliczać jak w **Przykładzie 13.1**.

a) Zauważmy, że

$$E = \{(x, y, 4x, 6x - y) : x, y \in R\} = \operatorname{lin}\{(1, 0, 4, 6), (0, 1, 0, -1)\}.$$

Bazę przestrzeni E stanowią więc wektory $\vec{u}_1 = (0,1,0,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,4,6)$. Po ich zortogonalizowaniu otrzymujemy bazę ortogonalną $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{v}_2 = (1,3,4,3)$, a po unormowaniu szukaną bazę ortonormalną

$$\vec{e}_1 = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{35}}, 3\sqrt{\frac{1}{35}}, 4\sqrt{\frac{1}{35}}, \sqrt{\frac{1}{35}}\right).$$

Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2]$ danego wektora $\vec{v}$ w tej bazie wynoszą $\alpha_1 = (\vec{v}, \vec{e}_1) = -6\sqrt{2}$, $\alpha_2 = (\vec{v}, \vec{e}_2) = \sqrt{35}$.

b) Będziemy ortogonalizować bazę standardową $\{1, x, x^2\}$ przestrzeni $R_2[x]$. Wektory bazy ortogonalnej obliczamy ze wzorów:

$$q_1 \equiv 1,$$

$$q_2 = x - \frac{(x,1)}{\|1\|^2}\cdot 1 = x - \frac{1}{2},$$

$$q_3 = x^2 - \frac{(x^2,1)}{\|1\|^2}\cdot 1 - \frac{\left(x^2, x-\frac{1}{2}\right)}{\left\|x-\frac{1}{2}\right\|^2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Dalej mamy $\|q_1\|^2 = 1$, $\|q_2\|^2 = \frac{1}{12}$, $\|q_3\|^2 = \frac{7}{60}$, więc baza ortonormalna rozważanej przestrzeni składa się z wielomianów $r_1 \equiv 1$, $r_2 = \sqrt{3}(2x-1)$, $r_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$.

Wielomian p_0 ma w tej bazie współrzędne $\alpha_1 = (p_0, r_1) = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = (p_0, r_2) = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\alpha_3 = (p_0, r_3) = 0$. Zauważmy jeszcze, że gdyby dany wektor p_0 przyjąć jako pierwszy w ortogonalizowanej bazie, to te współrzędne byłyby równe $[1,0,0]$.

- **Przykład* 13.6**

Zortogonalizować metodą macierzową podane wektory w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych:

a) $\vec{u}_1 = (1,4,2)$, $\vec{u}_2 = (1,5,1)$, w przestrzeni E^3;

b) $\vec{u}_1 = (0,1,0,1)$, $\vec{u}_2 = (-2,3,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,1,5)$ w przestrzeni E^4.

Rozwiązanie

a) Niech A oznacza macierz, której wierszami są dane, liniowo niezależne wektory. Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy blokowej $[AA^T|A]$, bez zmiany ich kolejności, doprowadzimy ją do postaci $[G|A']$, gdzie G jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe macierzy A' będą wtedy poszukiwanymi wektorami ortogonalnymi. Mamy zatem

$$[AA^T|A] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 21 & 23 & 1 & 4 & 2 \\ 23 & 27 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - \frac{23}{21}w_1} \left[\begin{array}{cc|ccc} 21 & 23 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{38}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{33}{21} & -\frac{25}{21} \end{array}\right] = [G|A'].$$

Po ortogonalizacji uzyskaliśmy wektory $(1,4,2)$, $\left(\frac{-2}{21}, \frac{33}{21}, \frac{-25}{21}\right)$. Ortogonalizacja Grama-Schmidta doprowadziłaby w tym przykładzie do identycznego wyniku.

b) Tutaj otrzymujemy

$$[AA^T|A] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 14 & 6 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 28 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 10 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 + w_2} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [G|A'].$$

Po ortogonalizacji uzyskaliśmy więc wektory $(0,1,0,1)$, $(-2,1,0,-1)$, $(-1,-1,1,1)$. Zauważmy dodatkowo, że kwadraty norm tych wektorów są równe kolejnym elementom głównej przekątnej macierzy G. Jest to w tej metodzie ogólna prawidłowość, o ile w trakcie postępowania nie jest wykonywana operacja dzielenia wiersza przez ustaloną liczbę. Warto też wspomnieć, że ogólne wzory na ortogonalizację Grama-Schmidta doprowadziłyby tu do wektorów $(0,1,0,1)$, $(-2,1,0,-1)$, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$.

- **Przykład* 13.7**

Stosując wyznacznikową metodę skonstruować bazy ortogonalne podanych przestrzeni euklidesowych zawierające dane wektory ortogonalne:

a) $\vec{v}_1 = (2,3,4)$ w przestrzeni E^3;

b) $\vec{v}_1 = (1,1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (2,1,-1,-1)$ w przestrzeni E^4;

c) $q_1 = x^2 - x$ w przestrzeni $R_3[x]$ z bazą ortonormalną $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy wyznacznikowy wzór na wektor ortogonalny do danych $n-1$ wektorów w przestrzeni euklidesowej E wymiaru n. Wektor $\vec{w}$ ortogonalny do wektorów $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n-1} \in E$ ma postać

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \alpha_{n-1\,2} & \ldots & \alpha_{n-1\,n} \end{bmatrix},$$

gdzie $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ oznaczają współrzędne wektora $\vec{u}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, w bazie ortonormalnej $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ przestrzeni E. Obliczając kolejne wyznaczniki znajdziemy kolejne brakujące wektory baz ortogonalnych. Początkowe liczbowe wiersze pierwszego wyznacznika będą zawierały współrzędne danych wektorów bazy ortogonalnej w pewnej bazie ortonormalnej. Pozostałe wiersze dopisujemy tak, aby wszystkie liczbowe wiersze były liniowo niezależne. Dla wygody obliczeń będą to wiersze jednostkowe (jedynka i reszta zer). Kolejne obliczane wyznaczniki będą się różnić jednym wierszem - w miejsce pierwszego wiersza dopisanego wstawimy współrzędne nowo znalezionego wektora bazy.

a) Wektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ przyjmujemy jako bazę ortonormalną przestrzeni E^3. Wektor $\vec{v}_1 = (2,3,4)$ uzupełnimy o niezależny z nim wektor jednostkowy $(0,0,1)$ otrzymując

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,-2,0), \qquad \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (8,12,-13).$$

b) Niech $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ będzie bazą standardową przestrzeni $\boldsymbol{E}^4$. Wiersze współrzędnych wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ uzupełniamy o wiersz jednostkowy $(0,0,0,1)$. Mamy

$$\vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,3,-1,0), \quad \vec{v}_4 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,7,21,-14).$$

c) Współrzędne $[0,-1,1,0]$ wektora $x^2 - x$ w bazie $\{1, x, x^2, x^3\}$ uzupełnimy do układu liniowo niezależnego o dwa wiersze $[0,0,1,0]$, $[0,0,0,1]$. Kolejne trzy wektory bazy ortogonalnej wyznaczamy z zależności:

$$q_2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 = -1,$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 + (-1)\cdot x + (-1)\cdot x^2 + 0\cdot x^3 = -x - x^2,$$

$$q_4 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + (-2)\cdot x^3 = -2x^3.$$

Zadania

○ Zadanie 13.1

Sprawdzić, że podane zbiory wektorów są bazami ortogonalnymi lub ortonormalnymi w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych i wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w tych bazach:

a) $\vec{v}_1 = \left(3\sqrt{\frac{1}{10}}, -\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$, $\vec{v}_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{10}}, 3\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$, $\vec{u} = (5,6) \in \boldsymbol{E}^2$;

b) $\vec{v}_1 = (1,3,-2)$, $\vec{v}_2 = (-1,1,1)$, $\vec{v}_3 = (5,1,4)$, $\vec{u} = (1,0,1) \in \boldsymbol{E}^3$;

c) $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (3,-1,-1,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,2,-1,-1)$, $\vec{v}_4 = (0,0,1,-1)$, $\vec{u} = (1,2,-3,2) \in \boldsymbol{E}^4$;

d) $\vec{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$, $\vec{v}_2 = \left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$,
$\vec{v}_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\vec{v}_4 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\vec{u} = (1,2,3,4) \in \boldsymbol{E}^4$;

e) $p_1 \equiv 1$, $p_2 = 2 - x$, $p_3 = 6 - 3x - x^2$, $q = x^2 + x + 3$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym wielomianów $q_1 = ax^2 + bx + c$, $q_2 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ określonym wzorem

$$(q_1, q_2) = aa_1 + (3a - b)(3a_1 - b_1) + (2b + c)(2b_1 + c_1).$$

○ Zadanie 13.2

Uzasadnić ortonormalność podanych zbiorów funkcji w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych:

a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ w przestrzeni $C([0, 2\pi])$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx;$$

b*) $p_0 \equiv 1$, $p_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$, w przestrzeni $\boldsymbol{R}[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

○ Zadanie 13.3

Zortogonalizować metodą Grama–Schmidta podane wektory w odpowiednch przestrzeniach euklidesowych:

a) $(2,1,3), (1,6,2)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^3$;

b) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ z iloczynem skalarnym wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ zdefiniowanym wzorem

$$(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1 \; x_2 \; x_3]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix};$$

c) $(4,3,2,1), (4,3,2,0), (4,3,0,0)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^4$;

d) $(0,1,1,0), (-2,0,2,0), (3,1,1,1)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^4$;

e) $1, x+1, |x|, \sin x$ w przestrzeni $C([-1,1])$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

○ Zadanie 13.4

Znaleźć bazy ortogonalne danych przestrzeni euklidesowych zawierające wskazane wektory:

a) $(1,-1,2)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^3$;

b) $(1,1,1,1)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^4$;

c) $(1,0,1,1), (0,1,1,-1)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^4$;

d) $(1,0,3,-2), (-1,0,1,1), (5,0,1,4)$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^4$;

e) $(3,2,3,5)$ w przestrzeni $E = \{(x,y,z,t) \in \boldsymbol{E}^4 : x + y = y + z = t\}$;

f) $f_1 \equiv 1$ w przestrzeni lin $\{1, \sin x, \sin^2 x\}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \pi$, z iloczynem skalarnym określonym wzorem
$$(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx.$$

Zadanie 13.5

Wyznaczyć bazy ortonormalne wskazanych przestrzeni euklidesowych i znaleźć współrzędne podanych wektorów w tych bazach:

a) $E = \text{lin}\,\{(1,0,-1,0),(0,1,1,-1)\}$, $\vec{u} = (3,1,2,1) \in E^4$;

b) $E = \text{lin}\,\{(1,1,1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,-1)\}$, $\vec{u} = (-1,0,10,-1) \in E^4$;

c) $E = \{(x,y,z,t) \in E^4 : x+y+z=0, y=t\}$, $\vec{u} = (-1,3,-2,3) \in E^4$;

d) $E = \{(2x+y+5z, y+z, 2y-x, x+2z) : x,y,z \in R\}$, $\vec{u} = (6,4,7,1) \in E^4$;

e) $E = R_2[x]$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem
$$(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$
$p_0 = x^2 + x + 1$;

f) $E = R^2$ z iloczynem skalarnym wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ określonym wzorem
$$(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$
$\vec{u} = (3,2)$;

g*) $E = M_{2\times 2}$ z iloczynem skalarnym macierzy A, B zdefiniowanym wzorem $(A, B) = \text{Tr}\left(AB^T\right)$, gdzie symbol Tr oznacza sumę wszystkich elementów z głównej przekątnej macierzy, $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Zadanie* 13.6

Zortogonalizować metodą macierzową podane wektory w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych:

a) $(1,1,3), (1,1,4), (1,2,0)$ w przestrzeni E^3;

b) $(1,2,0,1), (4,1,1,2)$ w przestrzeni E^4;

c) $(-1,1,0,0), (0,2,1,1), (1,-3,1,-1)$ w przestrzeni E^4.

Zadanie* 13.7

Stosując wyznacznikową metodę ortogonalizacji uzupełnić wskazane wektory do baz ortogonalnych odpowiednich przestrzeni euklidesowych:

a) $(1,1,4)$ w przestrzeni E^3;

b) $(1,0,0), (0,0,1)$ w przestrzeni R^3 z bazą ortonormalną $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;

c) $(1,1,3,1)$ w przestrzeni E^4;

d) $1 - x + x^2 + 2x^3$ w przestrzeni $R_3[x]$ z bazą ortonormalną $\{1, x, x^2, x^3\}$;

e) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ w przestrzeni euklidesowej E z bazą ortonormalną $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}\}$.

Zadanie* 13.8

Uzasadnić, że wektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni E^n wtedy i tylko wtedy, gdy macierz przejścia P z bazy standardowej do bazy tych wektorów spełnia warunek $P^T P = I$. Sprawdzić tę zależność dla baz ortonormalnych z **Przykładu 13.1** oraz z **Zadania 13.1**.

Zadanie* 13.9

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową z bazą $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Zdefiniować w tej przestrzeni iloczyn skalarny tak, aby była to baza ortonormalna.

Zadanie* 13.10

W podzbiorze $l_2 = \left\{\vec{x} = (x_n) \in R^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}$ przestrzeni liniowej R^∞ określamy funkcję $(\cdot,\cdot) : l_2 \times l_2 \longrightarrow R$ następującym wzorem
$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

a) uzasadnić, że l_2 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^∞;

b) wykazać, że funkcja $(\cdot,\cdot)$ jest iloczynem skalarnym w l_2;

c) wykazać, że wektory $\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots)$, ... tworzą układ ortonormalny w l_2;

d) czy wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$ tworzą bazę przestrzeni liniowej l_2?

e) wykazać nierówność
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right),$$
o ile dwa ostatnie szeregi są zbieżne;

f) podać przykłady wektorów z przestrzeni l_2 mających wszystkie składowe niezerowe i tworzących z wektorem
$$\vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$
kąty $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \pi$.

Odpowiedzi i wskazówki

13.1 a) $\left[9\sqrt{\frac{1}{10}}, 23\sqrt{\frac{1}{10}}\right]$; b) $\left[-\frac{1}{14}, 0, \frac{3}{14}\right]$; c) $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{2}\right]$;
d) $\left[2\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 7\sqrt{\frac{1}{3}}, 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$; e) $[5, 2, -1]$.

13.3 a) $(2,1,3)$, $(-1,5,-1)$; b) $(1,0,0)$, $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $(0,0,1)$;
c) $(4,3,0,0)$, $(0,0,2,0)$, $(0,0,0,1)$; d) $(0,1,1,0)$, $(-2,-1,1,0)$, $(1,-1,1,1)$; e) 1, x, $|x| - \frac{1}{2}$, $\sin x + 3(\cos 1 - \sin 1)x$.

13.4 a) $(1,-1,2)$, $(1,1,0)$, $(-1,1,1)$;
b) $(1,1,1,1)$, $(3,-1,-1,-1)$, $(0,2,-1,-1)$, $(0,0,1,-1)$;
c) $(1,0,1,1)$, $(0,1,1,-1)$, $(-1,-1,1,0)$, $(-1,1,0,1)$;
d) $(1,0,3,-2)$, $(-1,0,1,1)$, $(5,0,1,4)$, $(0,1,0,0)$; e) $(3,2,3,5)$, $(7,-11,7,-4)$;
f) 1, $\sin x - \frac{2}{\pi}$, $\sin^2 x - \frac{2\pi}{3(\pi^2-8)}\sin x + \frac{4}{3(\pi^2-8)} - \frac{1}{2}$.

13.5 a) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{10}}, 2\sqrt{\frac{1}{10}}, \sqrt{\frac{1}{10}}, -2\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$, $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 5\sqrt{\frac{1}{10}}\right]$;
b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$, $[4, 6, 5\sqrt{2}]$;
c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{10}}, 2\sqrt{\frac{1}{10}}, -\sqrt{\frac{1}{10}}, 2\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$, $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 15\sqrt{\frac{1}{10}}\right]$;
d) $\left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, 2\sqrt{\frac{1}{6}}, 0\right)$, $\left(2\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right)$, $[4\sqrt{6}, \sqrt{6}]$;
e) $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}(x-1)$, $\sqrt{\frac{1}{6}}(3x^2 - 6x + 1)$, $\left[11\sqrt{\frac{1}{3}}, 6\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\sqrt{\frac{1}{6}}\right]$;
f) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $[4\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;
g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[1, 5, 2, -3]$.

13.6* a) $(1,1,3)$, $\left(\frac{-3}{11}, \frac{-3}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; b) $(1,2,0,1)$, $\left(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$; c) $(-1,1,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

13.7* Uzupełnieniem do bazy są wektory a) $(1,-1,0)$, $(4,4,-2)$; b) $(2,2,1)$;
c) $(1,-1,0,0)$, $(3,3,-2,0)$, $(2,2,6,-22)$; d) $-1-x$, $1-x-2x^2$, $4-4x+4x^2-6x^3$;
e) $-3\vec{u} - 2\vec{v}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} - 13\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$.

13.9* Dla $\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$, $\vec{v} = \beta_1\vec{v}_1 + \ldots + \beta_n\vec{v}_n$, iloczyn skalarny ma postać $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$.

13.10* d) nie; f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2^2}, \frac{-3}{2^3}, \ldots\right)$ dla kąta $\frac{\pi}{2}$, $(a, a^2, a^3, \ldots)$, gdzie $a = \frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{3}$ dla kąta $\frac{\pi}{3}$, $(a, a^2, a^3, \ldots)$, gdzie $a = \frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{7}$ dla kąta $\frac{\pi}{4}$, $-\vec{x}$ dla kąta π.

Czternasty tydzień

Rzut ortogonalny (4.6).

Przykłady

- **Przykład 14.1**

Sprawdzić, że podane wektory są ortogonalne do wskazanych podprzestrzeni przestrzeni euklidesowych:

a) $E_0 = \{(3x-y, x+2y+z, 2x-z, x+4z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $\vec{v} = (2, 1, -3, -1) \in E^4$;

b) $E_0 = \operatorname{lin}\{1, x^2, \operatorname{ch} x, \sin^2 x\}$, $f = \sin x$ w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f, g) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\,dx.$$

Rozwiązanie

a) Wektor $\vec{v} \in E$ jest ortogonalny do podprzestrzeni E_0 przestrzeni euklidesowej E wtedy i tylko wtedy, gdy jest on ortogonalny do dowolnego wektora $\vec{u} \in E_0$. Niech $\vec{u} = (3x - y, x + 2y + z, 2x - z, x + 4z) \in E_0$. Wówczas mamy

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 2(3x - y) + x + 2y + z - 3(2x - z) - (x + 4z) = 0,$$

zatem $\vec{v} \perp \vec{u}$, czyli $\vec{v} \perp E_0$.

b) Ortogonalność wektora do podprzestrzeni wynika z ortogonalności tego wektora do wektorów generujących tę podprzestrzeń, w szczególności do jej bazy. W naszym przykładzie wystarczy więc stwierdzić, że

$$(\sin x, 1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0, \qquad (\sin x, x^2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx = 0,$$

$$(\sin x, \operatorname{ch} x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \operatorname{ch} x\,dx = 0, \quad (\sin x, \sin^2 x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = 0.$$

Zerowanie się wszystkich całek wynika tu z nieparzystości funkcji podcałkowych.

- **Przykład 14.2**

Znaleźć rzuty ortogonalne podanych wektorów na wskazane podprzestrzenie przestrzeni euklidesowych:

a) $\vec{u} = (3, -2, 1) \in \boldsymbol{E}^3$, E_0 jest prostą $l: x = 2y = 4z$ w przestrzeni $\boldsymbol{E}^3$;

b) $\vec{u} = (1, 0, 1, 1) \in \boldsymbol{E}^4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1, 0, 2, 0), (1, 1, 0, 1)\}$;

c) $\vec{u} = (3, 1, 0, -1) \in \boldsymbol{E}^4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1, 1, -1, 0), (0, 2, -1, 1), (3, 5, -4, 1)\}$;

d) $\vec{u} = (1, 1, 1, 1) \in \boldsymbol{E}^4$, $E_0 = \{(x, y, z, t) : x + y + z = 0, y = t\}$;

e) $f = x^2$, $E_0 = \operatorname{lin}\{x + 1, x - 1\}$ w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \text{ dla } f, g \in C([0, 1]).$$

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją rzutem ortogonalnym wektora $\vec{u}$ należącego do przestrzeni euklidesowej E na jej podprzestrzeń E_0 jest taki element $\vec{u}_0$ tej podprzestrzeni, który spełnia warunek $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp E_0$.

a) Przestrzeń E_0 jest generowana przez wektor $\vec{v} = (4, 2, 1)$, zatem $\vec{u}_0 = (4t, 2t, t)$ dla pewnego $t \in R$. Z warunku $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp E_0$ wynika, że $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}) = (3 - 4t)4 + (-2 - 2t)2 + (1 - t) = 0$, a więc $t = \frac{3}{7}$ i ostatecznie $\vec{u}_0 = \left(\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Warto tu zauważyć, że ten sam wynik otrzymamy używając metod geometrii przestrzeni R^3 przy rzutowaniu prostopadłym punktu na prostą.

b) Wektory $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$ tworzą bazę przestrzeni E_0, zatem $\vec{u}_0 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ dla pewnych $a, b \in R$. Wektor $\vec{u} - \vec{u}_0$ jest ortogonalny do każdego z wektorów $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, więc $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}_1) = 0$ oraz $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}_2) = 0$. Stąd $5a + b = 3$ oraz $a + 3b = 2$, czyli $a = b = \frac{1}{2}$ i $\vec{u}_0 = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

c) Zauważmy najpierw, że

$$\dim E_0 = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3 - 3w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Spośród generatorów przestrzeni E_0 wybieramy więc dwa wektory bazowe, np. $\vec{v}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, -1, 1)$. Szukany rzut ma zatem postać $\vec{u}_0 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$, gdzie $a, b \in R$. To oznacza, że $\vec{u} - \vec{u}_0 = (3 - a, 1 - a - 2b, a + b, -1 - b)$. Z warunków ortogonalności $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp \vec{v}_1$, $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp \vec{v}_2$ wynika, że $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}_1) = 4 - 3a - 3b = 0$ oraz $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}_2) = 1 - 3a - 6b = 0$. Stąd $a = \frac{7}{3}$, $b = -1$, czyli $\vec{u}_0 = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -1\right)$.

d) Mamy

$$E_0 = \{(x, y, -x - y, y) : x, y \in R\} = \operatorname{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 1)\}.$$

Wektory $\vec{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$ przyjmujemy za bazę przestrzeni E_0. Podobnie jak poprzednio $\vec{u}_0 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = (a, b, -a - b, b)$. Dalej $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}_1) = -2a - b = 0$, $(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{v}_2) = -a - 3b + 1 = 0$. Stąd otrzymujemy, że $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, więc $\vec{u}_0 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

e) Niech f_0 oznacza szukany rzut. Mamy $f_0 = a(x + 1) + b(x - 1)$ dla pewnych liczb $a, b \in \boldsymbol{R}$ oraz $f - f_0 = x^2 - (a + b)x + b - a$. Dla $g_1 = x + 1$, $g_2 = x - 1$ otrzymujemy

$$(f - f_0, g_1) = \int_0^1 \left(x^3 + (1 - a - b)x^2 - 2ax + b - a\right) dx = \frac{7 - 28a + 8b}{12} = 0,$$

$$(f - f_0, g_2) = \int_0^1 \left(x^3 - (1 + a + b)x^2 + 2ax + a - b\right) dx = \frac{-1 + 8a - 4b}{12} = 0.$$

Stąd wynika, że $a = \frac{5}{12}$, $b = \frac{7}{12}$ i ostatecznie $f_0 = x - \frac{1}{6}$.

- **Przykład 14.3**

Wyznaczyć rzuty ortogonalne podanych wektorów na podprzestrzenie o wskazanych bazach ortogonalnych:

a) $\vec{u} = (1, 1, 1) \in \boldsymbol{E}^3$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(5, -1, 3), (1, 2, -1)\}$;

b) $\vec{u} = (1, 1, 3, 1) \in \boldsymbol{E}^4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 2, -2), (2, -2, 1, 1)\}$;

c) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4, 5) \in \boldsymbol{E}^5$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$;

d) $f = x + \sin x$, $E_0 = \operatorname{lin}\{1, \sin 2x\}$ w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx;$$

e) $p \equiv 1$, $E_0 = \operatorname{lin}\{x - 1, 3x^2 - 6x + 1\}$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Rozwiązanie

Rzut ortogonalny $\vec{u}_0$ wektora $\vec{u}$ na podprzestrzeń E_0 z bazą ortonormalną $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\}$ ma postać

$$\vec{u}_0 = (\vec{u}, \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + \ldots + (\vec{u}, \vec{e}_k)\,\vec{e}_k,$$

co dla bazy ortogonalnej $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ przestrzeni E_0 można zapisać następująco:

$$\vec{u}_0 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{||\vec{v}_1||^2}\vec{v}_1 + \ldots + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_k)}{||\vec{v}_k||^2}\vec{v}_k.$$

a) Przyjmujemy $\vec{v}_1 = (5, -1, 3)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, -1)$. Oczywiście $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Zatem

$$\vec{u}_0 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{||\vec{v}_1||^2}\vec{v}_1 + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{||\vec{v}_2||^2}\vec{v}_2 = \frac{7}{35}(5, -1, 3) + \frac{2}{6}(1, 2, -1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{15}, -3\right).$$

b) Oznaczmy symbolami $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ kolejno generatory przestrzeni E_0. Jest to baza ortogonalna tej przestrzeni, gdyż $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_3) = (\vec{v}_2, \vec{v}_3)$. To oznacza, że

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_3)}{\|\vec{v}_3\|^2}\vec{v}_3 \\ &= \frac{2}{2}(1,1,0,0) + \frac{4}{10}(1,-1,2,-2) + \frac{4}{10}(2,-2,1,1) = \left(\frac{11}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right).\end{aligned}$$

c) Bazę ortonormalną przestrzeni E_0 stanowią tu wektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_5$ należące do bazy standardowej przestrzeni E^5. Szukamy rzut ma zatem postać

$$\vec{u}_0 = (\vec{u}, \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{u}, \vec{e}_3)\,\vec{e}_3 + (\vec{u}, \vec{e}_5)\,\vec{e}_5 = (1,0,3,0,5).$$

d) Oznaczmy $g_1 \equiv 1$, $g_2 = \sin 2x$. Oczywiście $g_1 \perp g_2$, więc szukany rzut f_0 funkcji f obliczamy ze wzoru

$$f_0 = \frac{(f, g_1)}{\|g_1\|^2}g_1 + \frac{(f, g_2)}{\|g_2\|^2}g_2 = \frac{2\pi^2}{2\pi}\cdot 1 + \frac{-\pi}{\pi}\sin 2x = \pi - \sin 2x.$$

e) Niech $q_1 = x - 1$, $q_2 = 3x^2 - 6x + 1$. Łatwo się przekonać, że $(q_1, q_2) = 0$. Rzut ortogonalny p_0 wielomianu p ma więc postać

$$p_0 = \frac{(p, q_1)}{\|q_1\|^2}q_1 + \frac{(p, q_2)}{\|q_2\|^2}q_2 = \frac{0}{2}(x-1) + \frac{0}{6}\left(3x^2 - 6x + 1\right) \equiv 0.$$

• Przykład 14.4

Stosując macierzowy wzór na rzut ortogonalny znaleźć rzuty ortogonalne w odpowiednich przestrzeniach E^n podanych wektorów $\vec{u}$ na podprzestrzeń

$$\operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}:$$

a) $\vec{u} = (10,2,1)$, $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,1,-2)$;

b) $\vec{u} = (1,4,0,-2)$, $\vec{v}_1 = (1,1,0,2)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\vec{v}_3 = (0,1,2,1)$.

Rozwiązanie

Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$ o liniowo niezależnych wektorach kolumnowych. Wówczas rzut ortogonalny w przestrzeni E^m wektora kolumnowego B na podprzestrzeń rozpiętą na kolumnach macierzy A ma postać $B_0 = AX_0$, gdzie $X_0 = \left(A^TA\right)^{-1}A^TB$ jest wektorem współrzędnych tego rzutu w bazie wektorów kolumnowych macierzy A. Wykorzystując powyższy fakt mamy

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, zatem

$$\begin{aligned}X_0 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

więc

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rzutem ortogonalnym jest więc wektor $\vec{u}_0 = (6,6,1)$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, zatem

$$\begin{aligned}X_0 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 27 & -9 \\ -4 & -9 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

więc

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rzutem ortogonalnym jest więc wektor $\vec{u}_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

• Przykład* 14.5

Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć przybliżone rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Niech $AX = B$ będzie sprzecznym układem m równań liniowych z n niewiadomymi, przy czym $\operatorname{rz} A = n$. Przybliżone rozwiązanie X_0 tego układu równań wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów w taki sposób, aby wektor $AX_0 \in E^m$ znajdował się najbliżej wektora $B \in E^m$. Będzie tak, gdy wektor AX_0 będzie rzutem ortogonalnym wektora B na podprzestrzeń generowaną przez wektory kolumnowe macierzy A. Metoda ta ma praktyczne zastosowanie wtedy, gdy z przesłanek fizycznych wynika, że jedyne rozwiązanie układu równań istnieje, zaś przybliżone dane doświadczalne obciążone błędami pomiarów prowadzą do sprzecznych układów równań.

a) Rozważany układ równań jest sprzeczny, zaś rząd macierzy tego układu jest równy liczbie niewiadomych. Przybliżone rozwiązanie (x_0, y_0) tego układu wyznaczamy jako współrzędne rzutu ortogonalnego $\vec{u}_0$ wektora $\vec{u} = (5,4,1)$ na podprzestrzeń V generowaną przez wektory $\vec{k}_1 = (2,1,3)$, $\vec{k}_2 = (-1,3,2)$. Mamy

$$\vec{u}_0 = (2x_0 - y_0, x_0 + 3y_0, 3x_0 + 2y_0)$$
$$\vec{u} - \vec{u}_0 = (5 - 2x_0 + y_0, 4 - x_0 - 3y_0, 1 - 3x_0 - 2y_0)$$

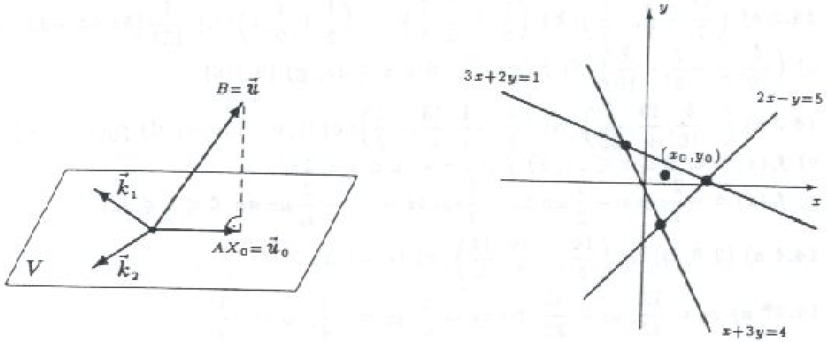
Warunki ortogonalności wektora $\vec{u} - \vec{u}_0$ do generatorów przestrzeni V prowadzą do układu równań

$$\begin{cases} \vec{u} - \vec{u}_0 \circ (2,1,3) = -14x_0 - 7y_0 + 17 = 0 \\ \vec{u} - \vec{u}_0 \circ (-1,3,2) = -7x_0 - 14y_0 + 9 = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{25}{21} \\ y_0 = \dfrac{1}{21} \end{cases}$$

Na rysunkach poniżej przedstawiono dwie różne interpretacje otrzymanego wyniku:



b) Przybliżone rozwiązanie (x_0, y_0, z_0) znajdziemy jako współrzędne rzutu ortogonalnego $\vec{u}_0$ wektora $\vec{u} = (1,-1,0,1)$ na podprzestrzeń generowaną przez wektory $\vec{k}_1 = (1,0,1,0)$, $\vec{k}_2 = (0,1,-1,0)$, $\vec{k}_3 = (1,1,1,1)$. Mamy

$$\vec{u}_0 = (x_0 + z_0, y_0 + z_0, x_0 - y_0 + z_0, z_0)$$
$$\vec{u} - \vec{u}_0 = (1 - x_0 - z_0, 1 - y_0 - z_0, 1 - x_0 - y_0 - z_0, 1 - z_0)$$

Warunki $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp (1,0,1,0)$, $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp (0,1,-1,0)$, $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp (1,1,1,1)$ prowadzą do układu równań

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 - 2z_0 = -1 \\ x_0 - 2y_0 = 1 \\ -2x_0 - 4z_0 = -1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $x_0 = 0$, $y_0 = -\dfrac{1}{2}$, $z_0 = \dfrac{1}{4}$. Zauważmy, że otrzymana wartość z_0 różni się znacznie od wartości $z = 1$ podanej w czwartym równaniu wyjściowego układu równań.

c) Wykorzystując wzór $X_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B$ mamy

$$X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 21 \\ 13 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 13 \end{bmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{bmatrix} 126 - 91 \\ -147 + 182 \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadania

○ Zadanie 14.1

Sprawdzić, że podane wektory są ortogonalne do wskazanych podprzestrzeni przestrzeni euklidesowych:

a) $E_0 = \operatorname{lin}\{(2,0,3,1), (-1,1,2,0), (1,1,0,1)\}$, $\vec{v} = (1,1,0,-2) \in E^4$;

b) $E_0 = R_1[x]$, $p_0 = 6x^2 - 6x + 1$ w przestrzeni $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

○ Zadanie 14.2

Znaleźć rzuty ortogonalne podanych wektorów na wskazane podprzestrzenie przestrzeni euklidesowych:

a) $\vec{u} = (3,-1,1) \in E^3$, E_0 jest płaszczyzną $\pi : 2x - y + 3z = 0$ w E^3;

b) $\vec{u} = (3,1,2,0) \in E^4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,2,1,2), (0,1,1,1)\}$;

c) $\vec{u} = (0,1,1,1) \in E^4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,1,1,0), (0,1,0,2)\}$;

d) $\vec{u} = (1,0,0,0) \in E^4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,1,0,0), (0,1,2,0), (0,0,3,4)\}$;

e) $\vec{u} = (0,2,-1,3) \in E^4$,
$$E_0 = \left\{(x,y,z,t) \in E^4 : x + y + 3t = y + z = x - y + z - 3t = 0\right\};$$

f) $f = x$, $E_0 = \operatorname{lin}\{1, \cos x\}$ w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx;$$

g) $\vec{u} = (1,1,1)$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(0,1,1), (0,0,1)\}$ w przestrzeni R^3 z iloczynem skalarnym wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ określonym wzorem

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1.$$

○ Zadanie 14.3

Wyznaczyć rzuty ortogonalne podanych wektorów na podprzestrzenie o wskazanych bazach ortogonalnych:

a) $\vec{u} = (2,1,3) \in \boldsymbol{E}^3$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\{(-1,4,1)\}$;

b) $\vec{u} = (1,-1,2,0) \in \boldsymbol{E}^4$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\{(2,0,1,-1),(1,1,-2,0),(1,1,1,3)\}$;

c) $\vec{u} = (1,2,\ldots,n) \in \boldsymbol{E}^n$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\{(1,0,\ldots,0),(0,\ldots,0,1)\}$;

d) $p = x^2 - x$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\{1, 2x-1\}$ w przestrzeni $\boldsymbol{R}[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx;$$

e) $f = 1 - \cos 2x$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\left\{\sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right\}$ w przestrzeni $C([0,2\pi])$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx;$$

f) $f = x$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$, w przestrzeni $C([0,2\pi])$ z iloczynem skalarnym jak wyżej;

g) $f = x$, $\boldsymbol{E}_0 = \operatorname{lin}\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$, w przestrzeni $C([0,2\pi])$ z iloczynem skalarnym jak wyżej.

○ **Zadanie* 14.4**

Stosując macierzowy wzór na rzut ortogonalny znaleźć rzuty ortogonalne w odpowiednich przestrzeniach $\boldsymbol{E}^n$ podanych wektorów $\vec{u}$ na wskazane podprzestrzenie $\operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$:

a) $\vec{u} = (13,-1,-5)$, $\vec{v}_1 = (1,3,2)$, $\vec{v}_2 = (1,-2,3)$;

b) $\vec{u} = (2,2,6,6)$, $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,-1,1,1)$;

c) $\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{v}_1 = (2,1,0)$, $\vec{v}_2 = (1,0,2)$, $\vec{v}_3 = (0,2,1)$.

○ **Zadanie* 14.5**

Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć przybliżone rozwiązania podanych układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}.$$

○ **Zadanie 14.6**

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ będą ustalonymi wektorami przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}$, przy czym $\vec{v} \neq \vec{0}$. Znaleźć wzór na rzut ortogonalny wektora $\vec{u}$ na podprzestrzeń $\operatorname{lin}\{\vec{v}\}$.

○ **Zadanie 14.7**

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ będą niezerowymi wektorami z przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}$. Znaleźć najkrótszy wektor postaci $\vec{u} + t\vec{v}$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, i wykazać, że jest on ortogonalny do wektora $\vec{v}$. Zilustrować otrzymany wynik na płaszczyźnie.

○ **Zadanie* 14.8**

Niech $\boldsymbol{E}$ będzie przestrzenią euklidesową, a $\boldsymbol{E}_0$ jej podprzestrzenią wymiaru: a) $n = 1$; b) $n = 2$. Uzasadnić, że wektorem z przestrzeni $\boldsymbol{E}_0$, leżącym najbliżej ustalonego wektora $\vec{u} \in \boldsymbol{E}$, jest rzut ortogonalny wektora $\vec{u}$ na podprzestrzeń $\boldsymbol{E}_0$.

○ **Zadanie* 14.9**

Wykazać, że kąt φ nachylenia prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych na płaszczyźnie $\boldsymbol{R}^2$ i mającej najmniejsze średniokwadratowe odchylenie od n zadanych punktów (a_i, b_i), gdzie $i = 1, \ldots, n$, jest dany wzorem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Odpowiedzi i wskazówki

14.2 a) $\left(\frac{11}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right)$; **b)** $\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$; **c)** $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right)$; **d)** $\frac{1}{153}(89, 64, -32, 24)$; **e)** $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{10}\right)$; **f)** $f_0(x) \equiv \pi$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; **g)** $(0,1,0)$.

14.3 a) $\left(-\frac{5}{18}, \frac{10}{9}, \frac{5}{18}\right)$; **b)** $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{13}{6}, -\frac{1}{6}\right)$; **c)** $(1,0,\ldots,0,n)$; **d)** $p_0(x) = -\frac{1}{6}$, $x \in \boldsymbol{R}$; **e)** $f_0(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; **f)** $f_0(x) = \pi$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; **g)** $f_0(x) = -\frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \ldots - \frac{2}{n}\sin nx$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

14.4 a) $(0,0,0)$; **b)** $\left(\frac{14}{3}, 2, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$; **c)** $(1,-1,3)$.

14.5* a) $x_0 = \frac{13}{33}$, $y_0 = \frac{35}{33}$; **b)** $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = -\frac{1}{4}$, $z_0 = -\frac{1}{4}$.

14.6 $\dfrac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.