Zdzisław Opial

zbiory, formy zdaniowe, relacje

WYDAWNICTWA SZKOLNE I PEDAGOGICZNE

12

Okładkę projektował
JAROSŁAW JASIŃSKI

Redaktor
URSZULA DRABAREK

Redaktor techniczny
STEFANIA RZĘCKA

Rozdział I

ZBIORY

§ 1. Zbiory i elementy zbiorów

Pojęcie zbioru jest dziś jednym z pojęć najczęściej używanych w życiu codziennym. W języku potocznym bardzo często występuje pod postacią rozmaitych słów, takich jak kolekcja, grupa, zespół itp.

Mówimy na przykład o zbiorach książek (księgozbiorach), zbiorach gwiazd (gwiazdozbiorach), zespołach i grupach ludzi lub przedmiotów, kolekcjach znaczków albo monet, stadach zwierząt itp. Na co dzień posługujemy się terminami: seria znaczków, zespół muzyczny, koło PCK, kółko matematyczne, klasa Ib, pęczek marchwi, garść informacji itd.

Każda z tych nazw odzwierciedla zdolność (i skłonność) umysłu ludzkiego do tworzenia z pojedynczych przedmiotów albo osób określonych całości; zdolność (i skłonność) do widzenia podobieństw i związków między przedmiotami lub osobami skłaniających do łączenia ich w naturalny sposób w grupy, zespoły, zbiory itp.

I w matematyce pojęcie zbioru odgrywa ważną rolę. W arytmetyce i algebrze często posługujemy się zbiorem liczb naturalnych, zbiorem liczb całkowitych oraz zbiorem liczb wymiernych. W ostatniej klasie szkoły podstawowej, wprowadzając liczby niewymierne, poznaliśmy zbiór liczb rzeczywistych. Jakże często w geometrii nasze rozważania dotyczą punktów i jakże często patrzymy na proste, trójkąty, koła, okręgi i inne figury geometryczne jako na zbiory punktów. Całą płaszczyznę traktujemy też jako zbiór punktów. Rozpatrujemy poza tym zbiory prostych (na przykład zbiór prostych równoległych do danej prostej), zbiory kół (na przykład zbiór wszystkich kół o wspólnym środku), rozmaite zbiory trójkątów, kwadratów, prostokątów itp.

W odróżnieniu od języka potocznego, w którym samo pojęcie zbioru i związane z nim nazwy i zwroty używane bywają z typową dla żywego języka swobodą, w matematyce umiejętne posługiwanie się pojęciem zbioru wymaga wprowadzenia ścisłych definicji, jednoznacznych nazw i odpowiednich symboli.

Zbiory najczęściej oznaczamy dużymi literami alfabetu łacińskiego: A, B, C, D, X, Y itp. Niektóre zbiory, przede wszystkim te, które w rozważaniach matematycznych występują szczególnie często, mają ustalone (międzynarodowe) oznaczenia. Na przykład literą N zwykło się oznaczać zbiór liczb naturalnych, literą Z — zbiór liczb całkowitych, literą Q — zbiór liczb wymiernych, a literą R — zbiór liczb rzeczywistych. Pewien wyjątek w tej regule stanowią pewne oznaczenia stosowane w geometrii: płaszczyznę oznacza się tu najczęściej grecką literą π, a na oznaczenie prostych używa się zazwyczaj małych liter ze środka alfabetu łacińskiego: k, l, m, ...

Dla zaznaczenia, że przedmiot a jest elementem zbioru A, piszemy symbolicznie

$$a \in A$$

i czytamy: a należy do zbioru A. Gdy przedmiot a nie jest elementem zbioru A, piszemy symbolicznie

$$a \notin A$$

i czytamy: a nie należy do zbioru A.
Na podstawie tej umowy możemy na przykład napisać:

$$1 \in N, \quad -5 \in Z, \quad \frac{1}{3} \in Q, \quad \sqrt{2} \in R,$$

oraz

$$-2 \notin N, \quad \frac{3}{4} \notin Z, \quad \sqrt{2} \notin Q.$$

Mamy dwa rodzaje zbiorów: zbiory skończone i zbiory nieskończone.

Zbiór, który ma skończoną ilość elementów, nazywamy **skończonym.**

Zbiór o nieograniczonej ilości elementów nazywamy **nieskończonym.**

Na przykład zbiór wszystkich państw azjatyckich jest zbiorem skończonym, podobnie jak i zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich nie większych od liczby 20 (wymień wszystkie jego elementy). Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest natomiast zbiorem nieskończonym. Nieskończony jest również zbiór wszystkich kół o wspólnym środku.

Zbiory skończone często określamy wprost przez wyliczenie po kolei wszystkich ich elementów. Na przykład zbiór wszystkich państw europejskich określić możemy przez wyliczenie tych państw, powiedzmy, w porządku alfabetycznym: Albania, Andorra, Anglia, Austria, Belgia, Bułgaria, ...

Zbiór mający tylko jeden element nazywamy zbiorem **jednoelementowym.** Zbiór mający dwa elementy nazywamy **dwuelementowym.** Ogólnie, zbiór mający n elementów nazywamy zbiorem **n-elementowym.** Na przykład zbiór miast polskich liczących ponad milion mieszkańców jest zbiorem jednoelementowym, a zbiór liczb wypisanych na tarczy telefonu — zbiorem dziesięcioelementowym (wymień jego elementy!).

Wygodne okazuje się wprowadzenie zbioru nie mającego żadnego elementu. Nazywamy go **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$. Na przykład zbiorem pustym jest zbiór państw europejskich, których nazwy zaczynają się na literę k. Czy zbiór uczniów Twojej klasy urodzonych w niedzielę jest pusty?

Zbiór, do którego należą elementy a, b, ..., m, n, i tylko te elementy, oznaczamy symbolem

$$\{a, b, \ldots, m, n\}.$$

W szczególności, zbiór jednoelementowy, którego jedynym elementem jest a, oznaczamy symbolem $\{a\}$, zbiór dwuelementowy, którego elementami są a i b, oznaczamy symbolem $\{a, b\}$, itd.

Zgodnie z tą umową symbol

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich mniejszych od liczby 10. Podobnie, zbiór wszystkich członków rodziny Kaczmarków złożonej z państwa Kaczmarków i ich czworga dzieci — Marka, Rozalki, Anielki i Honorki — zapisać możemy symbolicznie w następujący sposób:

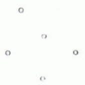
{pan Kaczmarek, pani Kaczmarkowa, Marek, Rozalka, Anielka, Honorka}.
Z rodziną Kaczmarków będziemy się jeszcze wielokrotnie w tej książce spotykać.

Analogicznych oznaczeń używamy czasem do określenia zbiorów nieskończonych. Na przykład symbolami

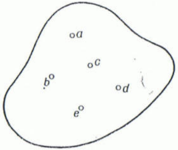
$$\{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \{0, 5, -5, 10, -10, \ldots\}, \quad \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

oznaczamy odpowiednio: zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich, zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez 5 oraz zbiór wszystkich potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich. Takie oznaczenia nie są całkiem precyzyjne, pozostawiają bowiem domyślności czytelnika dokładniejsze ich określenie; mimo to są wielokrotnie stosowane ze względu na ich wygodę.

Uwaga! Symbole $\{1, 2\}$ i $\{2, 1\}$ oznaczają jedno i to samo — zbiór, którego elementami są liczby 1 i 2. Podobnie, symbole $\{0\}$ i $\{0, 0\}$ oznaczają zbiór jednoelementowy, którego jedynym elementem jest liczba 0. W pierwszym przypadku nie gra żadnej roli porządek wypisywania elementów rozpatrywanego zbioru, w drugim — wypisanie elementu dwukrotnie. Obserwacja ta obowiązuje, oczywiście, także i przy symbolicznym określaniu dowolnych innych zbiorów.



Rys. 1a

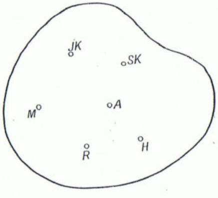


Rys. 1b

Na rysunku 1a mamy pięć dowolnych punktów płaszczyzny. Obwodząc je wszystkie krzywą i umieszczając przy każdym z nich jedną z liter a, b, c, d, e (różne litery przy różnych punktach!) otrzymujemy rysunek 1b — graficzne przedstawienie zbioru $\{a, b, c, d, e\}$.

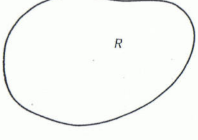
Każdy z pięciu punktów przedstawia schematycznie jeden element tego zbioru, a obwodząca je krzywa wskazuje wyraźnie, że myślimy o zbiorze tych elementów, a nie o każdym z nich z osobna.

Dorysowując na rysunku 1a jeszcze jeden punkt, obwodząc znowu wszystkie sześć punktów krzywą i oznaczając poszczególne punkty przez JK, SK, M, R, A, H otrzymujemy rysunek 1c, który uważać możemy za schematyczną reprezentację graficzną rodziny Kaczmarków. Punkt JK reprezentuje tu pana Kaczmarka (J — od jego imienia, Józef), punkt SK — panią Kaczmarkową (S — od Stefania), a pozostałe cztery punkty przedstawiają ich dzieci — zgodnie z pierwszymi literami ich imion.

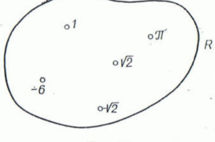


Rys. 1c

Podobnego przedstawienia graficznego zbiorów używamy często także i w przypadku, gdy zbiory są dowolne lub zbyt wielkie (na przykład nieskończone) na to, byśmy mogli zaznaczyć każdy ich



Rys. 2a



Rys. 2b

element jako punkt na płaszczyźnie. Wtedy najczęściej rysujemy tylko krzywą, wyróżniając w jej wnętrzu w razie potrzeby punktami takie czy inne elementy zbioru. Umieszczając na przykład wewnątrz krzywej na rysunku 2a (względnie zewnątrz krzywej, w jej pobliżu, jeżeli to jest z jakichś względów wygodniejsze) literę $\boldsymbol{R}$, zaznaczamy, że rysunek ten przedstawiać ma schematycznie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Uzupełnieniem rysunku 2a jest rysunek 2b, na którym zaznaczyliśmy już punktami kilka wybranych elementów zbioru $\boldsymbol{R}$.

Ćwiczenia

1. Podaj pięć elementów zbioru wszystkich państw azjatyckich.

2. Wymień sześć elementów zbioru wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez 11.

3. Zapisz, używając symbolu $\{\ldots\}$, zbiór wszystkich imion uczniów Twojej klasy.

4. Wyjaśnij znaczenie symbolu $\{\emptyset\}$.

5. Zapisz, używając symbolu $\{\ldots\}$, zbiór wszystkich członków Twojej rodziny. Narysuj ilustrację graficzną tego zbioru.

6. Spróbuj wyjaśnić znaczenie symbolu $\{-1, -2, -3, \ldots\}$.

7. Na rysunku 2b dorysuj jeszcze 5 elementów zbioru $\boldsymbol{R}$.

8. Sporządź analogiczny rysunek do rysunku 2b dla zbioru liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$ i zaznacz na nim sześć wybranych przez Ciebie elementów tego zbioru.

9. Ilu elementowym zbiorem jest: drużyna piłki nożnej (bez graczy rezerwowych), drużyna siatkówki, drużyna koszykówki, drużyna piłki ręcznej, reprezentacja Polski na Wyścig Pokoju?

10. Podaj cztery przykłady zbiorów nieskończonych.

11. Podaj cztery przykłady liczb nie należących do zbioru $\boldsymbol{Q}$.

12. Podaj trzy przykłady liczb nie należących do zbioru $\boldsymbol{N}$.

13. Wypisz wszystkie elementy zbioru liczb postaci 2^n (n — liczba naturalna) mniejszych od 1000.

14. Wyjaśnij, dlaczego zbiór liczb rzeczywistych spełniających równanie $x^2+1=0$ jest pusty.

15. Narysuj cztery skończone zbiory punktów płaszczyzny. Narysuj cztery nieskończone zbiory punktów płaszczyzny.

16. Narysuj graficzne przedstawienie zbiorów $\{a\}$ i $\{a, b\}$.

§ 2. Podzbiory

Porównując ze sobą dwa zbiory często zauważamy, że jeden z nich jest, mówiąc potocznie, częścią drugiego. Na przykład zbiór dzieci państwa Kaczmarków, to znaczy zbiór

{Marek, Rozalka, Anielka, Honorka},

jest częścią całej rodziny Kaczmarków (rys. 3).

Podobnie, zbiór $\boldsymbol{N}$ liczb naturalnych jest częścią zbioru $\boldsymbol{Q}$ liczb wymiernych, bo każda liczba naturalna jest liczbą wymierną. Przykładów tego rodzaju moglibyśmy przytaczać znacznie więcej.

W matematyce podobne sytuacje opisujemy w sposób następujący:

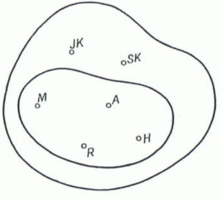
Mówimy, że zbiór $\boldsymbol{B}$ jest **podzbiorem** zbioru $\boldsymbol{A}$, jeżeli każdy element zbioru $\boldsymbol{B}$ jest elementem zbioru $\boldsymbol{A}$. Symbolicznie piszemy w takim przypadku

$$\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A},$$

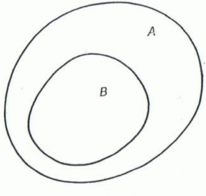
względnie

$$\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B},$$

co czytamy: **$\boldsymbol{B}$ zawiera się w $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ zawiera $\boldsymbol{B}$.**



Rys. 3



Rys. 4

Zawieranie się zbioru $\boldsymbol{B}$ w zbiorze $\boldsymbol{A}$ przedstawia graficznie rysunek 4, przypominający wprawdzie rysunek 3, ale ilustrujący sytuację znacznie ogólniejszą.

Oczywiste jest, że **każdy zbiór zawiera sam siebie.** Symbolicznie, dla każdego zbioru A mamy: $A \subset A$. Podobnie łatwo wnioskujemy, że **zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru.** Symbolicznie, dla dowolnego zbioru A, $\emptyset \subset A$.

Zbiór liczb naturalnych N jest podzbiorem zbioru Z liczb całkowitych. Zbiór Q liczb wymiernych jest podzbiorem zbioru R liczb rzeczywistych, zbiór liczb całkowitych parzystych jest podzbiorem zbioru Z, itp. Przykładów tego rodzaju moglibyśmy cytować bardzo wiele. Wszystkie wskazują, jak łatwo w matematyce o sytuacje, w których jeden zbiór jest podzbiorem drugiego.

Łatwo znaleźć wszystkie podzbiory dwuelementowego zbioru $\{a, b\}$. Są to zbiory: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ i sam zbiór $\{a, b\}$.

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A oznaczamy symbolem $P(A)$. W ostatnim przykładzie moglibyśmy zatem napisać symbolicznie:

$$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Podobnie, zamiast pisać $N \subset Z$ czy $Q \subset R$, możemy pisać $N \in P(Z)$ i $Q \in P(R)$.

O zbiorach A i B, dla których zachodzą związki

$$A \subset B \quad \text{i} \quad B \subset A,$$

mówimy, że są **równe,** co symbolicznie zapisujemy następująco: $A = B$ (czytamy: A równa się B).

Na przykład zbiór miast Polski liczących ponad pół miliona mieszkańców jest równy zbiorowi

$$\{\text{Warszawa, Łódź, Kraków}\},$$

a zbiór liczb rzeczywistych, których kwadrat jest równy liczbie 2, jest równy zbiorowi $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Jeżeli zbiory A i B nie są równe, to piszemy symbolicznie: $A \neq B$.

Ćwiczenia

1. Znajdź wszystkie podzbiory zbioru $\{a\}$.

2. Znajdź wszystkie podzbiory zbioru trzyelementowego. Znajdź wszystkie podzbiory zbioru czteroelementowego. Spróbuj odpowiedzieć na pytanie, ile jest podzbiorów zbioru n-elementowego.

3. Wyjaśnij znaczenie nierówności: $A \neq \emptyset$.

4. Wyjaśnij, dlaczego zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 4 jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych parzystych.

5. Wyjaśnij, dlaczego zbiór $\{1, 2, 3\}$ nie jest podzbiorem zbioru $\{1, 3, 5, 6\}$.

6. Ile jest jednoelementowych podzbiorów w zbiorze n-elementowym?

7. Ile dwuelementowych podzbiorów ma zbiór czteroelementowy, a ile pięcioelementowy?

8. Jakie nierówności spełniają liczby a, b, c i d, jeżeli przedział $(a; b\rangle$ zawiera się w przedziale $(c; d)$?

9. Koło o środku w punkcie P i promieniu r zawiera się w kole o środku Q i promieniu s (sporządź rysunek). Jaką nierówność spełniają liczby r i s? Gdzie leży punkt P?

10. Podaj trzy przykłady podzbiorów zbioru liczb całkowitych parzystych.

11. Podaj trzy przykłady nieskończonych podzbiorów zbioru R liczb rzeczywistych.

12. Podaj trzy przykłady (najlepiej na rysunku) podzbiorów koła o danym środku i danym promieniu.

13. Wykaż, że jeżeli $A \subset B$ i $B \subset C$, to także i $A \subset C$. Sporządź odpowiedni rysunek.

14. Uzasadnij, że jeżeli $A = B$ i $B = C$, to także $A = C$.

15. Wykaż, że $\{a\} \subset A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$.

16. Uzasadnij, że jeżeli $A \subset B$, to także $P(A) \subset P(B)$.

17. Czy prawdą jest, że $A \in P(A)$? Jeżeli tak, to dlaczego?

18. Spróbuj wyjaśnić znaczenie związku $B \in P(P(A))$. Podaj przykład zbiorów A i B spełniających ten związek.

19. Czy podzbiór zbioru może być elementem tego zbioru?

20. Znajdź wszystkie elementy zbioru $P(P(P(\{a\})))$.

§ 3. Zdania, zdania logiczne, formy zdaniowe

W matematyce i logice używa się pojęcia zdania w nieco węższym znaczeniu niż w nauce o języku. Ważne i interesujące w matematyce okazują się bowiem tylko te zdania, które są prawdziwe lub fałszywe. Zdania takie nazywamy **zdaniami logicznymi.**

Zdania:

»Pięć jest większe od trzech«,
»Każda liczba całkowita podzielna przez sześć jest parzysta«,
»Dwa razy dwa jest pięć«,
»Suma kątów w dowolnym czworokącie wynosi 360 stopni«

są zdaniami logicznymi. Pierwsze dwa i czwarte są zdaniami prawdziwymi, trzecie natomiast jest przykładem zdania fałszywego.

Natomiast żadne ze zdań:

»Co ma piernik do wiatraka?«,
»Byle do wiosny!«,
»Pleć pleciugo, byle niedługo!«

nie jest zdaniem logicznym. Żadne z nich nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Ogólniej — zdaniami logicznymi nie są ani zdania pytające, ani rozkazujące.

Podobnie, zdanie orzekające

»Teresa Sukniewicz była najlepszym sportowcem polskim w roku 1970« nie jest zdaniem logicznym, wyraża bowiem opinię zbyt zależną od osobistych upodobań osób oceniających, tak że trudno uznać je za prawdziwe lub fałszywe. Natomiast podobne zdanie:

»Teresa Sukniewicz zwyciężyła w plebiscycie „Przeglądu Sportowego" na najlepszego sportowca polskiego w roku 1970«

jest już zdaniem logicznym i to — jak wiadomo — prawdziwym.

Rozstrzygnięcie, czy zdania typu:

»Jutro będzie deszcz«,
»Prawdopodobnie jutro będzie deszcz«

są zdaniami logicznymi, jest nieco trudniejsze. W pierwszym przypadku należałoby przede wszystkim ustalić, czy dopuszczamy, by o prawdziwości lub fałszywości zdania decydowało coś, co dopiero

nastąpi. W drugim przypadku należałoby natomiast sprecyzować znaczenie słowa „prawdopodobnie", co wcale nie jest łatwe.

Nie są to jednak problemy istotne dla matematyki, nie będziemy się więc nimi tutaj zajmować.

Zdania logiczne, chociaż bardzo ważne i pożyteczne, same nie wystarczają do sprawnego i poprawnego formułowania problemów matematycznych, uzasadniania wniosków, dowodzenia twierdzeń itp. Potrzebne do tych celów okazuje się pojęcie znacznie szersze — pojęcie formy zdaniowej.

Na przykład nie jest zdaniem logicznym żadne ze zdań:

»Liczba całkowita n jest podzielna przez 3«,
»Kwadrat liczby rzeczywistej x jest równy 1«,
»Prosta l jest równoległa do danej prostej«,
»Pan X ma metr osiemdziesiąt wzrostu«.

W każdym z nich występuje element nieoznaczony, zmienny, i jego obecność przeszkadza nam w dokonaniu oceny, czy rozpatrywane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Samo już jednak sformułowanie pierwszego zdania sugeruje, że za zmienną n możemy w nim podstawiać dowolną liczbę całkowitą. Jeżeli tego dokonamy, to otrzymamy — jak od razu widać — zdanie prawdziwe lub fałszywe. Na przykład jeżeli za n podstawimy 0, 3, 18 lub 261, to otrzymamy zdanie prawdziwe. Jeżeli natomiast za n podstawimy 2, 7 lub 106, to otrzymamy zdanie fałszywe. Zatem rozpatrywane zdanie, po podstawieniu w nim za zmienną n jakiejkolwiek liczby całkowitej, staje się zdaniem logicznym.

Podobnie — jeżeli w drugim zdaniu podstawimy za x dowolną liczbę rzeczywistą, to otrzymamy zdanie logiczne: prawdziwe — jeżeli podstawimy liczbę 1 lub -1, fałszywe — jeżeli podstawimy jakąkolwiek inną liczbę rzeczywistą.

Analogicznie — gdy w trzecim zdaniu podstawimy za l jakąkolwiek prostą, to otrzymamy zdanie logiczne: prawdziwe — gdy prosta ta jest równoległa do danej prostej, fałszywe — gdy warunek ten nie jest spełniony.

We wszystkich trzech przypadkach istotnie ważne było ustalenie z góry — przez samo sformułowanie rozpatrywanych zdań — co możemy podstawiać w miejsce występujących w tych zdaniach zmiennych. Pamiętając o tym łatwiej zrozumieć nam będzie następującą definicję:

Formą zdaniową (określoną) **w zbiorze** $\boldsymbol{A}$ nazywamy każde zdanie zawierające zmienną, które po podstawieniu w miejsce zmiennej dowolnego elementu zbioru A staje się zdaniem logicznym.

Zgodnie z tą definicją, pierwsze z rozważanych zdań jest formą zdaniową w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych. Drugie zdanie jest formą zdaniową w zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych. Trzecie — formą zdaniową w zbiorze wszystkich prostych płaszczyzny; czwarte — formą zdaniową w zbiorze wszystkich ludzi (lepiej — w zbiorze wszystkich mężczyzn).

Najczęściej formy zdaniowe w zbiorze A oznaczać będziemy symbolami $p(x)$, $q(x)$, itp. W tym zapisie x oznaczać ma dowolny element zbioru A.

Niech $p(x)$ będzie dowolną formą zdaniową w zbiorze A. Po podstawieniu za x dowolnego elementu zbioru A otrzymujemy zdanie logiczne prawdziwe lub fałszywe. Ma zatem sens następująca umowa: zbiór wszystkich elementów zbioru A, dla których forma zdaniowa $p(x)$ staje się zdaniem prawdziwym, oznaczamy symbolem

(1) $$\{x \in A : p(x)\}.$$

Jest to oczywiście podzbiór zbioru A.

Na przykład, pamiętając o tym, że zbiór liczb całkowitych umówiliśmy się oznaczać literą $\boldsymbol{Z}$, zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich i zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez 5 możemy określić odpowiednio symbolami:

$$\{n \in \boldsymbol{Z} : n \geqslant 1\}, \quad \{n \in \boldsymbol{Z} : n \text{ jest podzielne przez } 5\}.$$

Analogicznie — symbol

$$\{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$$

oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od liczby a i mniejszych od liczby b, to znaczy przedział $(a; b)$.

Zupełnie podobnie dochodzimy do wniosku, że zbiór

$\{X \in$ rodzina Kaczmarków: X jest córką państwa Kaczmarków$\}$

jest równy zbiorowi

$$\{\text{Rozalka, Anielka, Honorka}\}.$$

Symbol (1) oznacza zbiór, o którym najczęściej mówimy po prostu: „zbiór wszystkich elementów zbioru A, takich że...". W każdym konkretnym przypadku miejsce wielokropka zajmuje słowne lub symboliczne sformułowanie zdania $p(x)$.

Na przykład o zbiorze

$$\{x \in \boldsymbol{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

mówimy: zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, takich że $a \leqslant x \leqslant b$.

Bardzo często też zamiast o formie zdaniowej mówimy o **warunku** lub **własności.** Wtedy — konsekwentnie — zbiór (1) nazywamy zbiorem elementów zbioru A spełniających warunek $p(x)$ lub mających własność $p(x)$.

Zdarza się, że dla wygody nie podajemy z góry, w jakim zbiorze określona jest forma zdaniowa $p(x)$, ale za to (jak w rozpatrywanych wyżej przykładach) w samym sformułowaniu zdania $p(x)$ jednoznacznie to sugerujemy. Wtedy i symbolika ulega naturalnej modyfikacji, którą najlepiej wyjaśniają proste przykłady. Od razu na przykład domyślamy się, że symbol

$$\{2^n : n \in \boldsymbol{Z},\ n \geqslant 1\}$$

oznacza zbiór wszystkich potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich. Analogicznie, ze wzorów

$$\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} : a, b \in \boldsymbol{Q}\}, \qquad \boldsymbol{Z}(\sqrt{2}) = \{m+n\sqrt{2} : m, n \in \boldsymbol{Z}\}$$

wnioskujemy natychmiast, że $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami wymiernymi, a $\boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$ jest zbiorem wszystkich liczb postaci $m+$ $+n\sqrt{2}$, gdzie m i n są dowolnymi liczbami całkowitymi.

W podobnie prosty sposób jak w formach zdaniowych jednej zmiennej możemy mówić o formach zdaniowych dwu, trzech i większej ilości zmiennych. Tak na przykład zdanie

»n dzieli m«

staje się zdaniem logicznym po podstawieniu w nim za n i m dowolnych liczb całkowitych. Zdanie

»prosta l jest równoległa do prostej k«

3*

staje się zdaniem logicznym po podstawieniu w nim za l i k dowolnych prostych. Zdanie

»n jest największą liczbą całkowitą mniejszą od x«

staje się zdaniem logicznym po podstawieniu w nim za n dowolnej liczby całkowitej, a za x — dowolnej liczby rzeczywistej. Jest to zdanie prawdziwe na przykład dla $n = 1$ i $x = \sqrt{2}$, a fałszywe dla $n = 2$ i $x = \sqrt{3}$.

Zupełnie analogicznie, zdanie

$$x < y < z$$

staje się zdaniem logicznym po podstawieniu w nim za x, y, z dowolnych liczb rzeczywistych.

Ćwiczenia

1. Wyjaśnij, które z następujących zdań są zdaniami logicznymi:
»Góralu, czy ci nie żal?«,
»Kakao zatkało?«,
»Kakao nie zatkało, bo kakao nie zatyka, tylko papryka zatyka, albo kawał patyka«.

2. Wyjaśnij, dlaczego następujące zdania są zdaniami logicznymi:
»W rodzinie Kaczmarków Rozalka jest starsza od Anielki«,
»Honorka już skończyła szkołę podstawową«,
»Rozalka jest najstarszą córką państwa Kaczmarków«,
»Pani Kaczmarkowa pracuje w WSiP«.

3. Wyjaśnij, które z następujących zdań logicznych są zdaniami prawdziwymi:
»Jeżeli na świętego Prota (11 września) jest pogoda albo słota, to na świętego Hieronima (30 września) jest deszcz, albo go nie ma«,
»Każda liczba całkowita podzielna przez 5 jest liczbą parzystą«,
»Istnieje liczba całkowita większa od miliarda«,
»Ranny pociąg ekspresowy z Krakowa do Warszawy odchodzi z Krakowa, według rozkładu jazdy PKP, o godzinie 5^{22}«.

4. Spróbuj wyjaśnić, co oznacza każdy z trzech następujących warunków:
$\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} = \boldsymbol{A}$, $\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} \neq \emptyset$, $\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} = \emptyset$.

5. W rodzinie Kaczmarków rozpatrujemy formę zdaniową dwu zmiennych:
»X jest córką Y«.
Wskaż wszystkie podstawienia za zmienne X i Y, dla których forma ta staje się zdaniem prawdziwym.

6. Na osi liczbowej zaznacz zbiory:
$\{x \in \boldsymbol{R}: x < 2\}$, $\{x \in \boldsymbol{R}: x \leqslant 2\}$, $\{x \in \boldsymbol{R}: -1 \leqslant x < 3\}$.

7. W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie narysuj zbiór $\{(x, y): x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R},\ x \leqslant y\}$.

8. W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznacz kilkanaście elementów zbioru $\{(m, n): m, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

9. Wyjaśnij dlaczego $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$ i $Z(\sqrt{2}) \subset \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$.

10. Spróbuj wykazać, że $\sqrt{3} \notin \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$.

11. Jakie nierówności spełniają liczby a, b, jeżeli zbiór $\{x \in \boldsymbol{R}: a \leqslant x < b\}$ zawiera się w zbiorze $\{x \in \boldsymbol{R}: -1 \leqslant x \leqslant 1\}$?

12. Wykaż, że liczby $-3\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(1+\sqrt{2})^3$ są elementami zbioru $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$.

13. Policz, ile elementów ma zbiór $\{n \in \boldsymbol{N}: 2n < 1000\}$.

14. Wykaż, że zbiory $\{n \in \boldsymbol{Z}: 2\sqrt{2} < n\}$ i $\{n \in \boldsymbol{Z}: 3 \leqslant n\}$ są równe.

§ 4. Równoważność form zdaniowych

Gdy $p(x)$ i $q(x)$ są formami zdaniowymi określonymi w zbiorze $\boldsymbol{A}$, to może się zdarzyć, że

$$\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} \subset \{x \in \boldsymbol{A}: q(x)\},$$

co oznacza po prostu, że każdy element zbioru $\boldsymbol{A}$ mający własność p ma także własność q. Mówimy wówczas, że forma $q(x)$ wynika z formy $p(x)$ i piszemy symbolicznie

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

Zależnie od potrzeby zapis ten odczytujemy na wiele innych sposobów. Mówimy na przykład, że

$$\begin{gathered}\text{z } p(x) \text{ wynika } q(x),\\ p(x) \text{ pociąga za sobą } q(x),\\ \text{jeżeli } p(x), \text{ to } q(x), \text{ itp.}\end{gathered}$$

Na przykład w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych mamy wynikanie (implikację):

$$n \text{ jest podzielne przez } 6 \Rightarrow n \text{ jest podzielne przez } 3,$$

bo każda liczba całkowita podzielna przez 6 jest także podzielna przez 3. Podobnie, w zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych mamy implikację:

$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0,$$

bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej dodatniej jest liczbą dodatnią.

Formy zdaniowe $p(x)$ i $q(x)$, takie że

$$p(x) \Rightarrow q(x) \quad \text{i} \quad q(x) \Rightarrow p(x),$$

nazywamy **równoważnymi.** W miejsce obu implikacji piszemy wówczas krócej

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

i czytamy: $p(x)$ jest równoważne $q(x)$ ($p(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q(x)$).

Od razu widać, że równoważność form zdaniowych $p(x)$ i $q(x)$ oznacza po prostu równość

$$\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} = \{x \in \boldsymbol{A}: q(x)\}. \tag{1}$$

Na przykład w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych mamy równoważność

$$n \text{ jest podzielne przez } 6 \Leftrightarrow n \text{ jest podzielne przez } 2 \text{ i } 3.$$

bo liczba całkowita podzielna przez 6 jest podzielna przez 2 i 3, i na odwrót, liczba całkowita podzielna przez 2 i 3 jest podzielna przez 6.

Podobnie, w zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych mamy równoważność

$$x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0. \tag{2}$$

Symboli wynikania $\Rightarrow$ i równoważności $\Leftrightarrow$ będziemy często używać nie tylko na oznaczenie związków między formami zdaniowymi, ale także po prostu jako stenograficznych skrótów zwrotów „wynika" i „jest równoważne". Na przykład używając w tym znaczeniu symbolu równoważności możemy definicję wynikania jednej formy zdaniowej z drugiej zapisać symbolicznie w postaci:

$$[p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} \subset \{x \in \boldsymbol{A}: q(x)\}]. \tag{3}$$

Ćwiczenia

1. Uzasadnij szczegółowo, dlaczego formy $p(x)$ i $q(x)$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość (1). Zapisz symbolicznie ten związek w postaci podobnej do (3).

2. Uzasadnij szczegółowo równoważność (2).

3. Wykaż, że w zbiorze liczb rzeczywistych formy: $x < 1$, $x \leqslant -1$ nie są równoważne. Czy któraś z nich wynika z drugiej?

4. Uzasadnij, dlaczego w zbiorze wszystkich trójkątów mamy implikację:

trójkąt ABC jest równoboczny $\Rightarrow$ trójkąt ABC jest równoramienny.

5. Zapisz w formie implikacji twierdzenie głoszące, że każdy romb jest równoległobokiem.

6. Wiemy, że forma zdaniowa $p(x)$ określona w zbiorze $\boldsymbol{A}$ jest równoważna formie: $x \in \boldsymbol{A}$. Wyjaśnij, co to znaczy.

7. Wykaż, że w zbiorze liczb całkowitych formy: $n^2 = 2$, $n^2 = 3$, są równoważne. Czy w zbiorze liczb rzeczywistych formy te też są równoważne?

§ 5. Koniunkcja, alternatywa i negacja zdań i form zdaniowych

W języku potocznym znane są wielorakie sposoby tworzenia ze zdań prostych zdań złożonych, rozwiniętych, bardziej skomplikowanych. Na przykład dwa zdania rozkazujące:

»Przyjdź do mnie jutro!«,
»Przynieś książkę!«,

w naturalny sposób łączymy w jedno zdanie:

»Przyjdź do mnie jutro i przynieś książkę!«.

Podobnie, ze zdań prostych:

»Przyjdę jutro«,
»Przyjdę pojutrze«

w naturalny sposób powstaje jedno zdanie:

»Przyjdę jutro lub pojutrze«,

którego sens jest całkiem jasny.

Analogicznych przykładów tworzenia w języku potocznym zdań złożonych, bardziej skomplikowanych, ze zdań prostych moglibyśmy przytoczyć znacznie więcej (podaj sam kilka przykładów).

Także i w matematyce wielokrotnie zdania logiczne skomplikowane, złożone, tworzymy ze zdań logicznych prostszych. W odróżnieniu jednak od języka potocznego, w matematyce wyraźnie formułujemy prawa rządzące tworzeniem takich zdań i ściśle ustalamy ich znaczenie.

Jeżeli p i q są zdaniami logicznymi, to zdania

$$p \text{ i } q,$$
$$p \text{ lub } q$$

uznajemy też za zdania logiczne. Pierwsze z nich uznajemy za prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p, q są prawdziwe. Drugie natomiast uznajemy za prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe.

Zdanie „p i q" nazywamy **koniunkcją zdań** p, q i oznaczamy symbolem

$$p \wedge q.$$

Zdanie „p lub q" nazywamy **alternatywą zdań** p, q i oznaczamy symbolem

$$p \vee q.$$

Zupełnie tak samo, gdy p jest zdaniem logicznym, to także i zdanie

nieprawdą jest, że p

uznajemy za zdanie logiczne. Jest to zdanie prawdziwe, gdy p jest zdaniem fałszywym, a fałszywe, gdy p jest zdaniem prawdziwym. Nazywamy je negacją lub zaprzeczeniem zdania p i oznaczamy symbolem

$$\sim p.$$

Dla przykładu rozważmy trzy zdania logiczne:

»6 jest podzielne przez 3«, »16 jest kwadratem liczby całkowitej«,
»6 jest kwadratem liczby całkowitej«,

z których pierwsze dwa są prawdziwe, a trzecie jest fałszywe. Od razu widzimy, że koniunkcja zdania pierwszego i drugiego (napisz to nowe zdanie!) jest zdaniem prawdziwym, a koniunkcja zdania pierwszego i trzeciego (napisz ją!) jest zdaniem fałszywym. Zdaniem

prawdziwym jest alternatywa zdania pierwszego i trzeciego (napisz to nowe zdanie!). Negacja zdania pierwszego, to znaczy zdanie

»6 nie jest podzielne przez 3«,

jest zdaniem fałszywym, a negacja zdania trzeciego, to znaczy zdanie

»6 nie jest kwadratem liczby całkowitej«,

jest zdaniem prawdziwym.

Koniunkcje, alternatywy i negacje zdań logicznych formułujemy zgodnie z ogólnymi zasadami tworzenia zdań rozwiniętych w języku polskim. To, co ma odróżniać język matematyki od języka potocznego, to nie sztuczność języka matematyki, ale jego precyzja. Dlatego też i w matematyce, tak jak w języku potocznym, negacją zdania »6 jest podzielne przez 3« nie jest niezgrabne zdanie »nieprawdą jest, że 6 jest podzielne przez 3«, ale naturalne zdanie »6 nie jest podzielne przez 3«. Zupełnie tak samo jak w języku potocznym koniunkcją zdań »Dziś na obiad będzie zupa pomidorowa« i »Dziś na obiad będzie kaczka z jabłkami« — nie jest niezgrabne zdanie: »Dziś na obiad będzie zupa pomidorowa i dziś na obiad będzie kaczka z jabłkami«, ale naturalne zdanie: »Dziś na obiad będzie zupa pomidorowa i kaczka z jabłkami«

Pojęcie koniunkcji, alternatywy i negacji rozciągamy w prosty sposób na formy zdaniowe.

Jeżeli $p(x)$ i $q(x)$ są formami zdaniowymi w zbiorze $\boldsymbol{A}$, to zdania

$$p(x) \wedge q(x),$$
$$p(x) \vee q(x)$$

również są formami zdaniowymi w tym zbiorze, ponieważ po podstawieniu w nich za x dowolnego elementu zbioru $\boldsymbol{A}$ otrzymujemy zdania logiczne. Pierwszą z tych form nazywamy **koniunkcją form** $p(x)$ i $q(x)$, drugą — **alternatywą tych form**.

Podobnie, dla dowolnej formy zdaniowej $p(x)$ w zbiorze $\boldsymbol{A}$, zdanie

$$\sim p(x)$$

jest również formą zdaniową w tym zbiorze. Nazywamy ją **negacją** lub **zaprzeczeniem formy** $p(x)$.

Na przykład koniunkcją form zdaniowych (w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych):

»n jest podzielne przez 3«, »n jest podzielne przez 7«

jest forma zdaniowa

»n jest podzielne przez 3 i n jest podzielne przez 7«.

Alternatywą tych form jest natomiast forma

»n jest podzielne przez 3 lub n jest podzielne przez 7«.

Najczęściej, dla uproszczenia, obie te formy zapisujemy od razu w postaci skróconej, bardziej naturalnej.

(1) »n jest podzielne przez 3 i 7«,

(2) »n jest podzielne przez 3 lub 7«.

Podobnie, negację formy zdaniowej (w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych)

»n jest podzielne przez 5«

od razu piszemy w postaci uproszczonej

»n nie jest podzielne przez 5«,

względnie

»n jest niepodzielne przez 5«.

Ćwiczenia

1. p i q są dowolnymi zdaniami logicznymi. Wyjaśnij, kiedy zdania $p \wedge q$ i $p \vee q$ są fałszywe.

2. Zapisz (od razu w postaci uproszczonej) koniunkcję zdań: »Rozalka jest siostrą Marka«, »Rozalka jest siostrą Anielki«.

3. Zdanie »$-1 < 0 \leqslant 3$« przedstaw jako koniunkcję dwóch zdań prostszych.

4. Podaj przykład dwóch zdań logicznych p i q, takich że zdanie $p \wedge q$ jest fałszywe.

5. Podaj przykład dwóch zdań logicznych p i q takich, że zdania $p \wedge q$ i $p \vee q$ są oba prawdziwe.

6. Wykaż, że jeżeli alternatywa dwóch zdań jest fałszywa, to także koniunkcja tych zdań jest fałszywa.

7. p i q są dowolnymi zdaniami logicznymi. Wykaż, że zdanie $\sim(p \wedge q)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie $(\sim p) \vee (\sim q)$. Wykaż, że zdanie $\sim(p \vee q)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie $(\sim p) \wedge (\sim q)$.

8. Wykaż, że dla dowolnego zdania logicznego p, zdanie $\sim(\sim p)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie p.

9. W zamieszczonej niżej tabelce, w drugim jej wierszu, zaznaczono, że jeżeli oba zdania p i q są prawdziwe, to prawdziwa jest ich koniunkcja i ich alternatywa, a fałszywa jest negacja zdania p. A więc — jak widać z tabelki — jedynka oznacza, że odpowiednie zdanie jest prawdziwe, a zero — że jest fałszywe. Posługując się tą zasadą uzupełnij tabelkę wpisując zera i jedynki w odpowiednie rubryki.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$
1	1	1	1	0
1	0			
0	1			
0	0			

10. Nierówność $1 < x \leqslant 2$ napisz w postaci koniunkcji dwóch form zdaniowych (w zbiorze liczb rzeczywistych).

11. Równanie x^2-1 przedstaw jako alternatywę dwóch form zdaniowych (w zbiorze liczb rzeczywistych).

12. Podaj trzy wartości n, dla których prawdziwa jest forma zdaniowa (1). Podaj dwie wartości n, dla których fałszywa jest forma zdaniowa (2). Podaj dwie wartości n, dla których prawdziwa jest forma zdaniowa (2), ale fałszywa jest forma zdaniowa (1).

13. Spróbuj wykazać, że forma zdaniowa (1) jest równoważna formie: n jest podzielne przez 21.

14. Zapisz (od razu w uproszczonej formie) negację formy zdaniowej (w zbiorze Z liczb całkowitych): n jest liczbą parzystą.

15. Na płaszczyźnie dane są punkty P i Q. Napisz alternatywę następujących form zdaniowych (w zbiorze wszystkich prostych płaszczyzny):

»Prosta l przechodzi przez punkt P«,

»Prosta l przechodzi przez punkt Q«.

Narysuj kilka prostych, dla których alternatywa ta jest zdaniem prawdziwym (fałszywym).

16. Dana jest prosta l i koło K. Zapisz koniunkcję i alternatywę form zdaniowych: »Punkt P należy do prostej l«, »Punkt P należy do koła K«. Rozpatrz możliwe przypadki (rysunek!). Podaj przykłady, w których koniunkcja tych form jest fałszywa dla dowolnego punktu płaszczyzny.

17. Zapisz negację form zdaniowych: »Prosta l przechodzi przez dane punkty P i Q«, »Prosta l przechodzi przez punkt P lub Q«. Sporządź rysunki. Wskaż przykłady prostych, dla których negacje te są zdaniami prawdziwymi (fałszywymi).

18. Spróbuj opisać sposób tworzenia koniunkcji i alternatywy trzech zdań (form zdaniowych). Zaproponuj odpowiednie oznaczenia i podaj przykłady.

19. Uzasadnij, dlaczego dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$ i $q(x)$ w dowolnym zbiorze $\boldsymbol{A}$ mamy implikacje: $p(x) \Rightarrow p(x) \vee q(x)$, $p(x) \wedge q(x) \Rightarrow p(x)$.

20. Spróbuj wykazać, że jeżeli dla form zdaniowych $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$ i $q_2(x)$ prawdziwe są implikacje: $p_1(x) \Rightarrow q_1(x)$, $p_2(x) \Rightarrow q_2(x)$, to $p_1(x) \wedge p_2(x) \Rightarrow q_1(x) \wedge q_2(x)$. Sformułuj i uzasadnij analogiczne twierdzenie dla alternatywy.

§ 6. Działania na zbiorach

W naszej szkole są trzy klasy pierwsze: ***Ia***, ***Ib*** i ***Ic***. Mamy zatem trzy zbiory uczniów. Utworzyć z nich możemy zbiór wszystkich pierwszoklasistów (rys. 5).

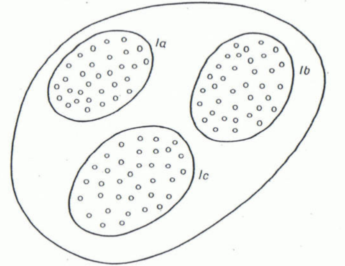
Oznaczmy przez ***Na*** zbiór wszystkich profesorów uczących w klasie ***Ia***, przez ***Nb*** — zbiór wszystkich profesorów uczących w klasie ***Ib***, a przez ***Nc*** — zbiór wszystkich profesorów uczących w klasie ***Ic*** Znowu mówić możemy o zbiorze wszystkich profesorów uczących w klasach pierwszych (rys. 6).

W matematyce temu naturalnemu postępowaniu nadajemy następującą precyzyjną formę:

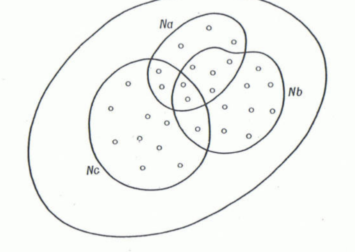
Sumą zbiorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru $\boldsymbol{A}$, wszystkie elementy zbioru $\boldsymbol{B}$, i tylko te elementy. Na jej oznaczenie używamy symbolu $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ (czytamy: $\boldsymbol{A}$ plus $\boldsymbol{B}$). Zgodnie z tą definicją możemy napisać, że

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{a : a \in \boldsymbol{A} \vee a \in \boldsymbol{B}\}.$$

Rys. 5



Rys. 6



Ogólniej — sumę dowolnej skończonej ilości zbiorów $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ określamy wzorem:

$$\boldsymbol{A}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_k = \{a : a \in \boldsymbol{A}_1 \vee \ldots \vee a \in \boldsymbol{A}_k\};$$

jest to więc zbiór tych wszystkich elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów $A_1, \ldots, A_k$ (tak rozumiemy występujące w tej definicji zdanie: a należy do A_1 lub a należy do A_2, lub... itd.).

Zgodnie z tymi określeniami, zbiór wszystkich pierwszoklasistów naszej szkoły jest sumą $\boldsymbol{Ia} \cup \boldsymbol{Ib} \cup \boldsymbol{Ic}$, a zbiór wszystkich profesorów uczących w klasach pierwszych — sumą $\boldsymbol{Na} \cup \boldsymbol{Nb} \cup \boldsymbol{Nc}$.

Podobnie, z prostego rysunku (sporządź go!) na osi liczbowej od razu wnioskujemy, że sumą zbiorów (przedziałów)

$$\langle 0; 2\rangle = \{x \in \boldsymbol{R}: 0 \leqslant x \leqslant 2\}, \quad \langle 1; 3\rangle = \{x \in \boldsymbol{R}: 1 \leqslant x \leqslant 3\}$$

jest zbiór (przedział $\langle 0; 3\rangle$. Symbolicznie,

$$\langle 0; 2\rangle \cup \langle 1; 3\rangle = \langle 0; 3\rangle.$$

Spójrzmy jeszcze raz na rysunek 6. Wśród nauczycieli uczących w klasach pierwszych są tacy, którzy uczą w każdej z tych klas. Na naszym symbolicznym rysunku jest dwóch takich nauczycieli; powiedzmy, nauczyciel gimnastyki, pan P, i nasza kochana pani K od matematyki. Utworzony z tych dwu osób zbiór jest wspólną częścią zbiorów $\boldsymbol{Na}$, $\boldsymbol{Nb}$ i $\boldsymbol{Nc}$.

Wspólna część zbiorów $\boldsymbol{Ia}$, $\boldsymbol{Ib}$ i $\boldsymbol{Ic}$ nie ma żadnego elementu — nie ma ucznia, który należałby do wszystkich trzech klas. Zatem wspólna część tych zbiorów jest zbiorem pustym. Więcej nawet nie ma ucznia, który należałby i do klasy $\boldsymbol{Ia}$, i do klasy $\boldsymbol{Ib}$. Część wspólna tych zbiorów jest więc również zbiorem pustym. Podobnie, ze zrozumiałych powodów jest zbiorem pustym także i część wspólna zbiorów $\boldsymbol{Ia}$, $\boldsymbol{Ic}$ oraz część wspólna zbiorów $\boldsymbol{Ib}$, $\boldsymbol{Ic}$.

W matematyce temu naturalnemu pojęciu wspólnej części zbiorów nadaje się następującą precyzyjną formę:

Zbiór wszystkich wspólnych elementów zbiorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ nazywamy **iloczynem** (**częścią wspólną**) tych zbiorów i oznaczamy symbolem $A \cap B$ (czytamy: A razy B). Mamy więc, zgodnie z tą definicją

$$A \cap B = \{a: a \in A \wedge a \in B\}.$$

Jak widzieliśmy, może się zdarzyć, że zbiory $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ nie mają elementów wspólnych. Wówczas ich iloczyn jest zbiorem pustym:

$$A \cap B = \emptyset.$$

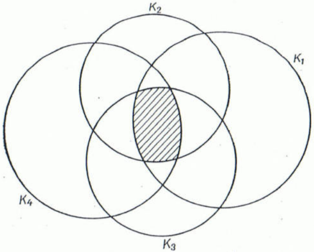
O takich zbiorach mówimy, że są **rozłączne**.

Ogólnie — iloczyn (część wspólną) dowolnej skończonej ilości zbiorów $A_1, \ldots, A_k$ określamy wzorem

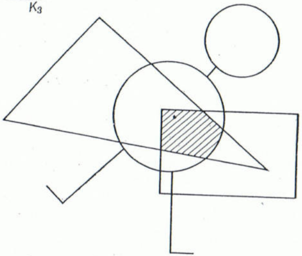
$$A_1 \cap \ldots \cap A_k = \{a: a \in A_1 \wedge \ldots \wedge a \in A_k\};$$

jest to więc zbiór wszystkich elementów, które należą do każdego ze zbiorów $A_1, \ldots, A_k$.

Tę ogólną definicję ilustruje rysunek 7, na którym z łatwością odnajdujemy iloczyn (część wspólną) czterech kół $\boldsymbol{K}_1, \ldots, \boldsymbol{K}_4$ (obszar zakreskowany).



Rys. 7



Rys. 8

Podobnie łatwo znajdujemy na rysunku 8 część wspólną trójkąta, kwadratu i figury w kształcie pana Kaczmarka (obszar zakreskowany).

Ze znanego nam już rysunku na osi liczbowej od razu wnosimy, że iloczynem przedziałów $\langle 0; 2\rangle$ i $\langle 1; 3\rangle$ jest przedział $\langle 1; 2\rangle$. Symbolicznie

$$\langle 0; 2\rangle \cap \langle 1; 3\rangle = \langle 1; 2\rangle.$$

Nieco mozolniej dochodzimy do wniosku (ważnego!), że iloczynem zbiorów:

$\{n \in \boldsymbol{Z}: n$ jest podzielne przez $2\}$, $\{n \in \boldsymbol{Z}: n$ jest podzielne przez $3\}$

jest zbiór:

$$\{n \in \boldsymbol{Z}: n \text{ jest podzielne przez } 6\}.$$

Często pożyteczne okazuje się pojęcie różnicy zbiorów.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów zbioru A, które nie należą do zbioru B. Oznaczamy ją symbolem $A\setminus B$ (czytamy: A minus B). Z definicji mamy więc

$$A\setminus B = \{a \in A: a \notin B\}.$$

Różnica $A\setminus B$ jest podzbiorem zbioru A (sporządź odpowiedni schematyczny rysunek!)

Gdy zbiór B zawiera się w zbiorze A, różnicę $A\setminus B$ nazywamy niekiedy **uzupełnieniem zbioru B do zbioru A.**

Proste rozumowanie (uzasadnij je rysunkiem na osi liczbowej) prowadzi do wniosku, że

$$\langle 0; 2\rangle \setminus \langle 1; 3\rangle = \langle 0; 1).$$

Analogicznie, na podstawie definicji liczb niewymiernych natychmiast dochodzimy do wniosku, że różnica $\boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{Q}$ jest zbiorem wszystkich liczb niewymiernych.

Od razu też widać, że symbol $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera.

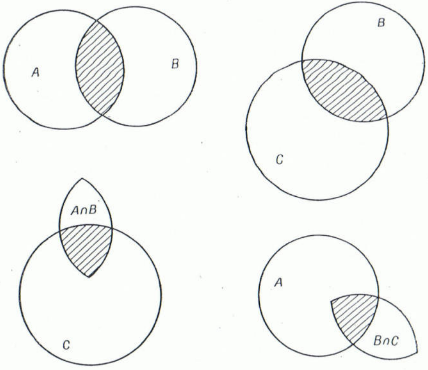
Wprost z definicji sumy i iloczynu zbiorów, dla dowolnych zbiorów A i B, wynikają proste związki:

(1) $$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Podobnie, dla dowolnych trzech zbiorów A, B i C, mamy wzory:

(2) $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Spróbujmy, dla nabrania wprawy, uzasadnić drugi z nich (por. rys. 9, opowiadający historię powstawania iloczynów występujących w tej równości).



Rys. 9

Otóż zgodnie z definicją równości zbiorów (patrz § 2) powinniśmy wykazać, że

$$A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C \quad \text{i} \quad A \cap (B \cap C) \supset (A \cap B) \cap C.$$

Ograniczymy się do wykazania pierwszego z tych związków; dowód drugiego jest najzupełniej podobny.

Mamy udowodnić, że każdy element zbioru $A \cap (B \cap C)$ jest elementem zbioru $(A \cap B) \cap C$. Wynika to z prostego rozumowania, które dla uproszczenia zapiszemy symbolicznie:

$$a \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow (a \in A) \wedge (a \in B \cap C) \Rightarrow (a \in A) \wedge (a \in B) \wedge$$
$$\wedge (a \in C) \Rightarrow (a \in A \cap B) \wedge (a \in C) \Rightarrow a \in (A \cap B) \cap C.$$

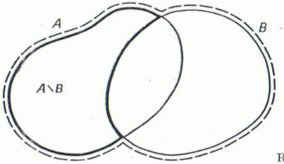
Jak widać z tego zapisu, z założenia, że a jest elementem zbioru $A \cap (B \cap C)$, wyciągamy kolejno cztery wnioski. Pierwszy z nich otrzymujemy odwołując się do definicji iloczynu zbiorów A i $B \cap C$.

drugi — korzystając z określenia iloczynu zbiorów B i C, trzeci — wykorzystując definicję zbioru $A \cap B$, wreszcie ostatni — odwołując się do określenia iloczynu zbiorów $A \cap B$ i C.

Zauważmy, że związki (1) i (2) przypominają swoją formą podobne zależności dla sum i iloczynów liczb:

$$a+b = b+a,\ ab = ba,\ a+(b+c) = (a+b)+c,\ a(bc) = (ab)c.$$

Mogłoby to sugerować, że dodawaniem i mnożeniem zbiorów rządzą te same prawa, które rządzą dodawaniem i mnożeniem liczb, co automatycznie pozwalałoby na stosowanie do sum, iloczynów i różnic zbiorów wszystkich tych przekształceń, równości, związków itp., jakie stosujemy w rachunkach na liczbach. Wniosek taki jest jednak zbyt pochopny! Wystarczy zauważyć, na przykład, że dla dowolnego zbioru A mamy równość:



Rys. 10

$(A\setminus B) \cup B = A \cup B \neq A$

$$A \cup A = A,$$

gdy tymczasem liczba zero jest jedyną liczbą, dla której $a+a = a$. Podobnie, dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość:

$$(a-b)+b = a,$$

gdy tymczasem istnieją zbiory A i B (rys. 10), dla których

$$(A \setminus B) \cup B \neq A.$$

Zatem, pomimo pewnych podobieństw, „rachunek na zbiorach" nie jest prostym powtórzeniem „rachunku na liczbach" i rządzi się własnymi prawami. Postaramy się o tym pamiętać!

Na zakończenie naszych rozważań dotyczących działań na zbiorach odnotujmy jeszcze dwa szczególnie interesujące i ważne związki:

$$A \setminus (P \cap Q) = (A \setminus P) \cup (A \setminus Q),$$
$$A \setminus (P \cup Q) = (A \setminus P) \cap (A \setminus Q)$$

prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, P i Q i noszące nazwę **praw de Morgana.**

Ćwiczenia

1. Narysuj na płaszczyźnie dwa koła tak, aby: 1) ich różnica była zbiorem pustym; 2) ich różnica była jednym z nich; 3) ich suma była jednym z nich.

2. Uzasadnij szczegółowo związki (1) i pierwszy ze wzorów (2).

3. Uzasadnij prawa de Morgana. Zilustruj je schematycznym rysunkiem.

4. Spróbuj uzasadnić, dlaczego dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwa jest nierówność: $P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$.

5. Uzasadnij związki (dla dowolnych zbiorów A i B):

$$A \subset A \cup B,\quad B \subset A \cup B,\quad A \cap B \subset A,\quad A \cap B \subset B.$$

6. Przy jakich założeniach o zbiorach A i B spełnione są równości: $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \setminus B = A$?

7. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwy jest wzór: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Zilustruj go schematycznym rysunkiem.

8. Zbiór A na prostej, na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy *wypukłym*, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty zbioru A zawiera się w zbiorze A. Podaj kilka przykładów zbiorów wypukłych na prostej i na płaszczyźnie. Wykaż, że iloczyn dwóch zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym. Spróbuj uogólnić to twierdzenie na większą ilość zbiorów.

9. Analogicznie jak zbiór $Q(\sqrt{2})$ określamy zbiór $Q(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} : a, b \in Q\}$. Spróbuj wykazać, że $Q(\sqrt{2}) \cap Q(\sqrt{3}) = Q$.

10. Używając symboli sumy i iloczynu zbiorów zapisz krótko zbiory:

$$\{a : (a \in A \vee a \in B) \wedge a \in C\},\ \{a : (a \in A \wedge a \in B) \vee a \in C\}.$$

11. Spróbuj wykazać, że dla dowolnych trzech zbiorów A, B i C zachodzą równości $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. Sformułuj i uzasadnij analogiczne związki dla sum zbiorów.

12. Na płaszczyźnie dane są trzy punkty. Spróbuj znaleźć część wspólną wszystkich półpłaszczyzn, do których punkty te należą. Rozważ analogiczne zadanie dla większej ilości danych punktów.

13. Na płaszczyźnie dane są dwa punkty. Spróbuj znaleźć część wspólną wszystkich kół, do których punkty te należą. Rozważ podobne zadanie dla większej ilości danych punktów.

14. Iloczyn czterech kół jest zbiorem pustym. Spróbuj wykazać, że iloczyn pewnych trzech spośród tych kół też jest zbiorem pustym.

15. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt. Spróbuj znaleźć zbiór wszystkich punktów należących do co najmniej jednego koła o promieniu r (r — ustalona liczba dodatnia) i środku położonym wewnątrz lub na brzegu tego trójkąta. Rozważ analogiczne zadanie dla kwadratu.

16. Spróbuj, dla dowolnych zbiorów A i B, uzasadnić równość: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. Czy prawdziwy jest także wzór

$$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)?$$

17. Dla dowolnych zbiorów A i B, zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ nazywamy ich **różnicą symetryczną** i oznaczamy symbolem $A \triangle B$. Zilustruj tę definicję schematycznym rysunkiem. Wykaż, że

$$A \triangle A = \emptyset, \quad A \triangle \emptyset = A, \quad A \triangle B = B \triangle A.$$

Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwy jest wzór

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

i zilustruj go schematycznym rysunkiem.

18. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A i B istnieje jeden i tylko jeden zbiór X, taki że $A \triangle X = B$.

19. Wykaż, że do zbioru $A \triangle (B \triangle C)$ należą wszystkie elementy należące do tylko jednego spośród zbiorów A, B, C oraz wszystkie elementy należące do wszystkich trzech zbiorów. Spróbuj na tej podstawie uzupełnić wzór

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup \ldots$$

§ 7. Działania na zbiorach i formy zdaniowe

W naszej szkole są dwie klasy pierwsze: ***Ia*** i ***Ib***. Symbolicznie możemy zapisać definicje tych klas w formie wzorów

$$\mathbf{Ia} = \{x\colon x \text{ jest uczniem pierwszej } a\},$$
$$\mathbf{Ib} = \{x\colon x \text{ jest uczniem pierwszej } b\}.$$

Zbiór I wszystkich pierwszoklasistów naszej szkoły jest zbiorem wszystkich x, dla których prawdziwa jest co najmniej jedna z form zdaniowych:

(1) »x jest uczniem pierwszej a«, »x jest uczniem pierwszej b«.

Innymi słowy, I jest zbiorem tych x, dla których prawdziwa jest forma zdaniowa

»x jest uczniem pierwszej a lub pierwszej b«,

to znaczy alternatywa form (1).

Z drugiej strony, zbiór I jest sumą zbiorów ***Ia*** i ***Ib***. Możemy zatem napisać, że

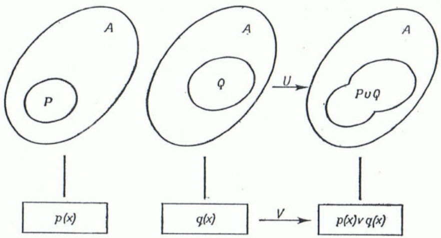
$$\{x\colon x \text{ jest uczniem pierwszej } a\} \cup \{x\colon x \text{ jest uczniem pierwszej } b\} = \{x\colon x \text{ jest uczniem pierwszej } a \text{ lub pierwszej } b\}.$$

Ogólniej — dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$ i $q(x)$ w dowolnym zbiorze A prawdziwa jest równość:

(2) $$\{x \in A\colon p(x)\} \cup \{x \in A\colon q(x)\} = \{x \in A\colon p(x) \vee q(x)\}.$$

Oznacza to, że zbiorem elementów (ze zbioru A) mających co najmniej jedną z dwóch danych własności jest suma zbioru tych elementów, które mają pierwszą z tych własności, i zbioru elementów mających drugą z nich. Oznacza to, że tworzeniu alternatywy dwóch form zdaniowych odpowiada, w „rachunku na zbiorach", tworzenie sumy zbiorów; dokładniej, sumy zbiorów tych elementów, dla których prawdziwa jest pierwsza forma, i zbioru tych elementów, dla których prawdziwa jest druga forma.

Ten ważny związek pomiędzy dodawaniem zbiorów i tworzeniem alternatywy form zdaniowych ilustruje rysunek 11, na którym przez P i Q oznaczyliśmy odpowiednio zbiory $\{x \in A\colon p(x)\}$ i $\{x \in A\colon q(x)\}$. Użyliśmy tu świadomie litery Q na oznaczenie drugiego z tych zbiorów kierując się analogią z oznaczeniem pierwszego zbioru (jeżeli P odpowiada formie $p(x)$, to dobrze będzie, jeżeli Q odpowiadać będzie formie $q(x)$). Nie ma obaw, by w tym miejscu umowa taka mogła



Rys. 11

prowadzić do kolizji z ustalonym już przez nas znaczeniem litery $\boldsymbol{Q}$ (zbiór liczb wymiernych).

Oznaczając przez $\boldsymbol{Na}$ i $\boldsymbol{Nb}$ zbiory wszystkich nauczycieli naszej szkoły uczących odpowiednio w klasie $\boldsymbol{Ia}$ i $\boldsymbol{Ib}$, możemy napisać wzory:

$$\boldsymbol{Na} = \{n\colon n \text{ uczy w } \boldsymbol{Ia}\}, \quad \boldsymbol{Nb} = \{n\colon n \text{ uczy w } \boldsymbol{Ib}\}.$$

Zbiór nauczycieli uczących w obu klasach jest zbiorem nauczycieli, dla których prawdziwe są obie formy zdaniowe:

(3) »n uczy w $\boldsymbol{Ia}$«, »n uczy w $\boldsymbol{Ib}$«,

to znaczy zbiorem nauczycieli, dla których prawdziwa jest forma zdaniowa

»n uczy w $\boldsymbol{Ia}$ i $\boldsymbol{Ib}$«

będąca koniunkcją form (3). Z drugiej strony zbiór ten jest iloczynem zbiorów $\boldsymbol{Na}$ i $\boldsymbol{Nb}$, tak że możemy napisać równość:

$$\{n\colon n \text{ uczy w } \boldsymbol{Ia}\} \cap \{n\colon n \text{ uczy w } \boldsymbol{Ib}\} = \{n\colon n \text{ uczy w } \boldsymbol{Ia} \text{ i } \boldsymbol{Ib}\}.$$

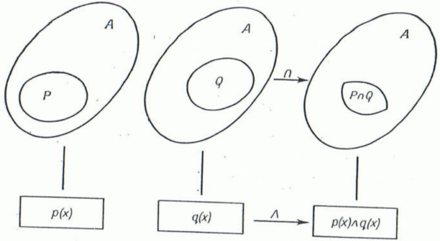
Ogólnie — dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$ i $q(x)$ w dowolnym zbiorze $\boldsymbol{A}$ prawdziwa jest równość

(4) $\{x \in \boldsymbol{A}\colon p(x)\} \cap \{x \in \boldsymbol{A}\colon q(x)\} = \{x \in \boldsymbol{A}\colon p(x) \wedge q(x)\}.$

Innymi słowy, zbiór elementów zbioru $\boldsymbol{A}$ mających dwie dane własności

jest iloczynem zbioru elementów mających własność pierwszą i zbioru elementów mających własność drugą. Tworzeniu zatem koniunkcji dwóch form zdaniowych odpowiada w ,,rachunku na zbiorach'' mnożenie zbiorów.

Ten ważny związek pomiędzy tworzeniem koniunkcji form zdaniowych i mnożeniem zbiorów ilustruje rysunek 12, na którym zachowaliśmy oznaczenia z rysunku 11.



Rys. 12

Zbiór $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych jest zbiorem tych liczb rzeczywistych, dla których prawdziwa jest forma zdaniowa:

(5) »x jest liczbą całkowitą«,

tak że możemy napisać

$$\boldsymbol{Z} = \{x \in \boldsymbol{R}\colon x \text{ jest liczbą całkowitą}\}.$$

Negacją formy zdaniowej (5) jest forma

»x nie jest liczbą całkowitą«.

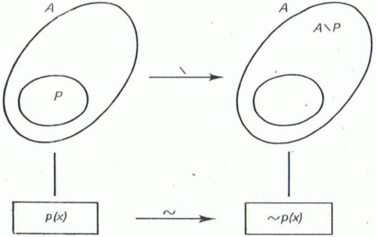
Jest ona prawdziwa tylko dla takich liczb rzeczywistych, które należą do zbioru $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$, to znaczy do uzupełnienia zbioru $\boldsymbol{Z}$ do zbioru $\boldsymbol{R}$. Symbolicznie własność tę możemy zapisać w postaci równości:

$$\boldsymbol{R} \setminus \{x \in \boldsymbol{R}\colon x \text{ jest liczbą całkowitą}\} =$$
$$= \{x \in \boldsymbol{R}\colon x \text{ nie jest liczbą całkowitą}\}.$$

Ogólnie — dla dowolnej formy zdaniowej $p(x)$ w dowolnym zbiorze A mamy związek

$$A \setminus \{x \in A: p(x)\} = \{x \in A: \sim p(x)\}. \tag{6}$$

Innymi słowy, zbiorem elementów, dla których prawdziwa jest negacja danej formy zdaniowej (w zbiorze A), jest uzupełnienie do zbioru A zbioru tych elementów, dla których prawdziwa jest forma zdaniowa.



Rys. 13

Ten ważny związek między tworzeniem negacji form zdaniowych i odejmowaniem zbiorów ilustruje rysunek 13.

Ćwiczenia

1. Uzasadnij szczegółowo wzór (2).

2. Uzasadnij szczegółowo wzór (4).

3. Uzasadnij szczegółowo wzór (6).

4. Spróbuj uogólnić związki (2) i (4) w przypadku trzech form zdaniowych.

5. Zapisz związki (2) i (4) dla form zdaniowych (w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych): »m jest podzielne przez 3«, »m jest podzielne przez 7«.

6. Zapisz związek (6) dla formy zdaniowej (w zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych): »x jest kwadratem liczby całkowitej«.

7. Dla formy zdaniowej $p(x)$ w zbiorze A mamy: $\{x \in A: p(x)\} = \emptyset$. Czemu równy jest zbiór $\{x \in A: \sim p(x)\}$? Wymyśl przykład ilustrujący to zadanie.

8. W zbiorze n-elementowym określona jest forma zdaniowa, prawdziwa dla k elementów tego zbioru. Dla ilu elementów jest prawdziwa negacja tej formy?

9. W zbiorze $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ rozpatrujemy podzbiory $\{x \in A: (x = a_1) \vee (x = a_5)\}$, $\{x \in A: (x = a_1) \vee (x = a_3)\}$. Zapisz, posługując się wzorami (2) i (4), ich sumę i iloczyn. Sporządź odpowiedni rysunek.

10. W zbiorze A, którego a jest jednym z elementów, rozpatrujemy podzbiór $\{x \in A: x = a\}$. Zapisz, posługując się wzorem (6), uzupełnienie tego zbioru do całego A.

11. B i C są podzbiorami zbioru A. Wykaż, że

iloczynem zbiorów $\{X \in P(A): B \subset X\}$ i $\{X \in P(A): C \subset X\}$ jest zbiór $\{X \in P(A): B \cup C \subset X\}$,

a iloczynem zbiorów $\{X \in P(A): X \subset B\}$ i $\{X \subset P(A): X \subset C\}$ jest zbiór $\{X \in P(A): X \subset B \cap C\}$.

12. B jest podzbiorem zbioru A. Wykaż, że uzupełnieniem (do zbioru $P(A)$) zbioru $\{X \in P(A): X \subset B\}$ jest zbiór

$$\{X \in P(A): X \cap (A \setminus B) \neq \emptyset\}.$$

Zapisz w podobny sposób uzupełnienie zbioru $\{X \in P(A): B \subset X\}$.

§ 8. Rachunek form zdaniowych

W paragrafie poprzednim widzieliśmy jak tworzeniu alternatyw, koniunkcji i negacji form zdaniowych odpowiada dodawanie, mnożenie i odejmowanie zbiorów. Ale na tym związek między formami zdaniowymi i zbiorami się nie kończy.

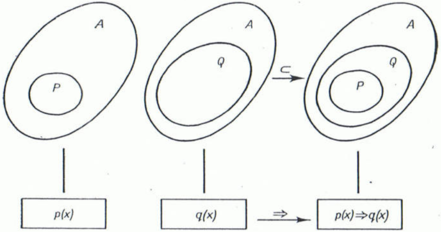
Istotnie, dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$, $q(x)$ w zbiorze A z samej definicji wynikania jednej formy zdaniowej z drugiej (patrz

§ 4) mamy związek

$$[p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} \subset \{x \in \boldsymbol{A}: q(x)\}].$$

Widać z niego od razu, że relacji wynikania między formami zdaniowymi w naturalny sposób odpowiada relacja zawierania między zbiorami.

Zachowując oznaczenia paragrafu poprzedniego, ten ważny związek między relacjami wynikania i zawierania możemy zilustrować rysunkiem podobnym do rysunków 11 i 12 (rys. 14).



Rys. 14

Zupełnie podobny rysunek (sporządź go!) mógłby poglądowo nam przypomnieć, że dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$, $q(x)$ w zbiorze $\boldsymbol{A}$ prawdziwy jest związek

$$[p(x) \Leftrightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} = \{x \in \boldsymbol{A}: q(x)\}],$$

oznaczający, że relacji równoważności form zdaniowych odpowiada relacja równości zbiorów.

Związek między formami zdaniowymi i zbiorami jest więc bardzo wielostronny — z jednej strony wchodzi tu w grę wynikanie i równoważność form zdaniowych oraz tworzenie ich alternatyw, koniunkcji i negacji, z drugiej — zawieranie i równość zbiorów oraz tworzenie ich sum, iloczynów i różnic.

Związek ten najlepiej ilustruje następująca tabelka, z której bardzo łatwo odczytać, co czemu odpowiada:

(1)

formy zdaniowe	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\wedge$	$\sim$
zbiory	$\subset$	$=$	$\cup$	$\cap$	$-$

A więc relacji wynikania odpowiada relacja zawierania, relacji równoważności — relacja równości, alternatywie — suma, koniunkcji — iloczyn i negacji — różnica. Należy tylko pamiętać, że w tabelce (1) chodzi o formy zdaniowe określone w ustalonym zbiorze $\boldsymbol{A}$ i o podzbiory tego zbioru; ma to szczególne znaczenie dla ostatniej kolumny tabelki, ponieważ symbol różnicy rozumieć tu wypada jako symbol uzupełnienia do całego zbioru $\boldsymbol{A}$.

Posługując się umiejętnie tabelką (1) możemy w prosty sposób najrozmaitsze własności form zdaniowych wyprowadzać z odpowiednich własności zbiorów, i na odwrót.

Oto kilka przykładów, w których będziemy używać znanych już nam oznaczeń:

$$\boldsymbol{P} = \{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\}, \quad \boldsymbol{Q} = \{x \in \boldsymbol{A}: q(x)\}.$$

Następujący diagram ma za zadanie uprzytomnić nam, jak z równości $\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{P}$, prawdziwej dla dowolnych zbiorów, wynika równoważność $p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow q(x) \vee p(x)$ dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$ i $q(x)$.

$$\boxed{\{x \in \boldsymbol{A}: p(x) \vee q(x)\} = \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}} \qquad \boxed{\{x \in \boldsymbol{A}: q(x) \vee p(x)\} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{P}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{P}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\{x \in \boldsymbol{A}: p(x) \vee q(x)\} = \{x \in \boldsymbol{A}: q(x) \vee p(x)\}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow q(x) \vee p(x)}$$

W pierwszym wierszu diagramu zaznaczyliśmy związki dobrze nam już znane: alternatywom form zdaniowych odpowiadają sumy odpowiednich zbiorów. W drugim wierszu zapisaliśmy proste twierdzenie, którego uzasadnienie wynika wprost z definicji sumy dwóch zbiorów. W trzecim wierszu natomiast zapisaliśmy wniosek bezpośrednio wynikający z tego, co ustaliliśmy w poprzednich dwu wierszach. Wreszcie w ostatnim wierszu diagramu wypisaliśmy wniosek wynikający, na podstawie tabelki (1), z odpowiedniości między równością zbiorów, a równoważnością form zdaniowych.

Zupełnie podobnie, wykorzystując prawdziwy dla dowolnych zbiorów $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ związek $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}$ i rysując diagram,

$$\boxed{\{x \in \boldsymbol{A}:\ p(x)\} = \boldsymbol{P}} \quad \boxed{\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}} \quad \boxed{\{x \in \boldsymbol{A}:\ p(x) \vee q(x)\} = \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\{x \in \boldsymbol{A}:\ p(x)\} \subset \{x \in \boldsymbol{A}:\ p(x) \vee q(x)\}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p(x) \Rightarrow p(x) \vee q(x)}$$

z łatwością dochodzimy do wniosku, że dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$, $q(x)$ w zbiorze $\boldsymbol{A}$ prawdziwa jest implikacja: $p(x) \Rightarrow p(x) \vee q(x)$.

W obu rozpatrzonych przykładach diagramy służyły nam do szczegółowego uzasadnienia wyprowadzanych własności form. Takie drobiazgowe uzasadnienie nie jest jednak niezbędne; naszemu postępowaniu możemy nadać, na podstawie tabelki (1), bardziej automatyczny charakter. Na przykład rzut oka na tabelkę (1) pozwala nam od razu na podstawie związku

$$\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}$$

automatycznie napisać związek

$$p(x) \wedge q(x) \Rightarrow p(x). \tag{2}$$

Tak też, dla uproszczenia, będziemy najczęściej postępować w dalszym ciągu naszego wykładu.

W szczególności, w ten właśnie sposób ze znanych nam już praw de Morgana dla zbiorów (patrz § 6):

$$\boldsymbol{A} \setminus (\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{P}) \cap (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{Q}),$$
$$\boldsymbol{A} \setminus (\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{P}) \cup (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{Q})$$

otrzymujemy automatycznie dla dowolnych form zdaniowych $p(x)$, $q(x)$ związki:

$$\sim (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\sim p(x)) \wedge (\sim q(x)),$$
$$\sim (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\sim p(x)) \vee (\sim q(x)),$$

które również noszą nazwę praw de Morgana (dla form zdaniowych). Pierwszy z nich uczy, jak tworzyć należy negację alternatywy dwóch form zdaniowych, drugi — jak tworzyć negację ich koniunkcji. W formie słownej wypowiedzieć je możemy jak następuje: **negacja alternatywy dwóch form zdaniowych jest równoważna koniunkcji negacji tych form, a negacja koniunkcji dwóch form zdaniowych jest równoważna alternatywie negacji tych form.** Krótko: negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji negacji, a negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie negacji.

Ćwiczenia

1. Uzasadnij szczegółowo związek (2) sporządzając odpowiedni diagram.

2. Spróbuj uzasadnić szczegółowo prawa de Morgana.

3. Zastosuj prawa de Morgana do negacji form zdaniowych: $0 < x \leqslant 1$, n jest podzielne przez 3 i 7, n dzieli 20 lub 75, n nosi nazwisko Kowalski lub Kaczmarek.

4. Firma zdaniowa $(x+1)(x-1) = 0$ jest równoważna formie: $x = 1$ lub $x = -1$. Zastosuj prawo de Morgana do negacji tej formy.

5. Wykaż, że jeżeli formy zdaniowe $p(x)$ i $q(x)$ są równoważne, to także ich zaprzeczenia są równoważne.

6. Jaki związek zachodzi między negacjami form $p(x)$ i $q(x)$, jeżeli z formy $p(x)$ wynika forma $q(x)$?

7. Uzasadnij równoważność form $\sim(\sim p(x))$ i $p(x)$. Jakiej równości w rachunku na zbiorach odpowiada ta równoważność?

8. Jakim związkom dla zbiorów odpowiadają równoważności form zdaniowych: $p(x) \wedge p(x) \Leftrightarrow p(x) \vee p(x) \Leftrightarrow p(x)$?

9. Jaka równoważność dla form zdaniowych wynika z równości $P \cap Q = Q \cap P$. Uzasadnij tę równoważność szczegółowo sporządzając odpowiedni diagram.

10. Jakie równoważności dla (trzech) form zdaniowych wynikają, z równości: $(P \cup Q) \cup S = P \cup (Q \cup S)$, $(P \cap Q) \cap S = P \cap (Q \cap S)$ $P \cap (Q \cup S) = (P \cap Q) \cup (P \cap S)$?

11. Wykaż, że każda z form zdaniowych $p(x) \wedge (\sim p(x))$, $p(x) \vee (\sim p(x))$ jest równoważna negacji drugiej.

12. Spróbuj sformułować prawa de Morgana dla trzech form zdaniowych.

§ 9. Ciągi

Doskonale wiemy, co znaczy wymieniać, wypisywać czy wskazywać w ustalonej kolejności jakieś przedmioty, osoby, nazwy itp. Mówimy na przykład

»Sodoma i Gomora«,
»Państwo Stefania i Józef Kaczmarkowie«,
»Szwarc, mydło i powidło«

przypisując z takich czy innych powodów wagę do właściwej kolejności wymienianych nazw, nazwisk, imion itp.

Tak samo, pisząc słowo

MATEMATYKA

w ustalonej kolejności wypisujemy kilka liter alfabetu: na pierwszym miejscu piszemy literę M, na drugim — literę A, na trzecim — literę T, na czwartym — literę E, na piątym — ponownie literę M, na szóstym — ponownie literę A, itd.

W ujęciu matematycznym takiemu postępowaniu odpowiada pojęcie ciągu definiowane w następujący sposób:

Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą większą od jedynki, a A dowolnym zbiorem niepustym. Mówimy, że tworzymy (określamy) **k-wyrazowy ciąg elementów zbioru A**, jeżeli przyporządkowujemy każdej z liczb $1, 2, \ldots, k$ po jednym elemencie zbioru A.

Element przyporządkowany liczbie 1 nazywamy **pierwszym wyrazem ciągu**, element przyporządkowany liczbie 2 nazywamy **drugim wyrazem ciągu**, ..., element przyporządkowany liczbie k nazywamy **k-tym wyrazem ciągu.**

Słowo MATEMATYKA jest więc dziesięciowyrazowym ciągiem liter alfabetu łacińskiego. Pierwszym jego wyrazem jest litera M, drugim — litera A, trzecim — litera T, czwartym — litera E, piątym — ponownie litera M, szóstym — ponownie litera A, itd.

Zwróćmy uwagę na to, że słowa

arka, kara, arak, Akra

są różnymi czterowyrazowymi ciągami liter alfabetu łacińskiego, chociaż w każdym z nich występują te same litery (abstrahujemy od tego, że ostatnie z tych słów piszemy dużą literą): k i r — jednokrotnie, a — dwukrotnie. Każde z tych słów ma inne znaczenie w języku polskim (Akra jest stolicą Ghany; wskaż to państwo na mapie Afryki!). Krótko: słowa języka polskiego są ciągami liter, a nie zbiorami liter!

I liga piłkarska liczy czternaście drużyn. W dniu 1 czerwca 1970 roku drużyny pierwszoligowe zajmowały następujące miejsca:

1. Legia Warszawa	8. Gwardia Warszawa
2. Ruch Chorzów	9. Stal Rzeszów
3. Górnik Zabrze	10. Zagłębie Wałbrzych
4. Polonia Bytom	11. Szombierki Bytom
5. Zagłębie Sosnowiec	12. Pogoń Szczecin
6. Wisła Kraków	13. Odra Opole
7. GKS Katowice	14. Cracovia Kraków

Tabela ta podaje aktualny w tym dniu ciąg drużyn pierwszoligowych. Na ogół, po każdej rundzie rozgrywek ligowych mamy do czynienia z innym ciągiem — zmienia się kolejność drużyn. Właśnie te *zmieniające się od czasu do czasu tabele ligowe — ciągi drużyn ligowych* — są przedmiotem zainteresowań kibiców piłkarskich. Przez cały sezon rozgrywek nie interesuje kibiców, które drużyny są w I lidze, bo to się nie zmienia, szukają natomiast co tydzień odpowiedzi na pytania: „Która drużyna jest pierwsza?”, „Która druga?”, „Na którym miejscu są Szombierki?”, „Czy Ruch jest wyżej od Polonii?”, „Czy Cracovia jest rzeczywiście taka słaba, jak to głoszą napisy na niektórych płotach w Krakowie?”

Słowo SKRZYŻOWANIE jest dwunastowyrazowym ciągiem liter, w którym żadna litera nie powtarza się. Jest to więc dwunastowyrazowy ciąg różnych liter. Nie wiem, czy istnieje w języku polskim rzeczownik lub przymiotnik, który w pierwszym przypadku (liczby pojedynczej lub mnogiej) miałby tę samą własność, ale większą ilość liter. Może Tobie uda się znaleźć taki przykład?

Ciąg k-wyrazowy, którego pierwszym wyrazem jest element a_1, drugim — element a_2, ..., k-tym — element a_k, oznaczamy symbolem

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Ciągi dwuwyrazowe nazywamy najczęściej **parami uporządkowanymi** lub krócej — **parami.** Parę, w której pierwszym wyrazem jest a, a drugim b oznaczamy, zgodnie z ogólną umową, symbolem (a, b).

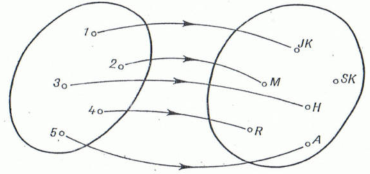
Na przykład symbol

(1) (Pan Kaczmarek, Marek, Honorka, Rozalka, Anielka)

oznacza ciąg pięciu osób z rodziny Kaczmarków, a symbole

(2) (Wisła, Ruch), (Ruch, Wisła), (Legia, Legia)

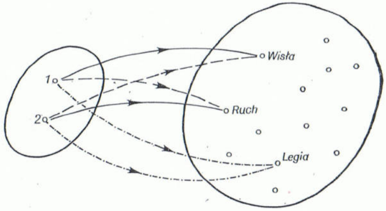
oznaczają trzy (różne!) pary pierwszoligowych drużyn piłkarskich.



Rys. 15

Tworzenie tych i podobnych ciągów łatwo zilustrować schematycznymi rysunkami. Na przykład na rysunku 15 strzałki wyraźnie wskazują, że tworząc ciąg (1) liczbie 1 przyporządkowujemy pana Kaczmarka, liczbie 2 przyporządkowujemy Marka Kaczmarka, itd. Tak samo, na rysunku 16 w podobny sposób strzałkami „ciągłymi"

zaznaczyliśmy, jak tworzymy pierwszą z par (2), strzałkami „przerywanymi" — jak tworzymy drugą z tych par, a strzałkami trzeciego rodzaju — jak tworzymy ostatnią z nich.



Rys. 16

W niektórych działach matematyki (spotkasz się z nimi już w następnej klasie) bardzo często rozpatruje się ciągi nieskończone. Tworzymy je przyporządkowując po jednym elemencie z ustalonego zbioru każdej z liczb 1, 2, 3, ... Ciąg nieskończony, którego pierwszym wyrazem jest a_1, drugim — a_2, itd, oznaczamy symbolem $(a_1, a_2, \ldots)$. Na przykład nieskończonym ciągiem liczb wymiernych jest ciąg $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, w którym każdej liczbie całkowitej dodatniej przyporządkowujemy jej odwrotność. Podobnie, ciąg $(K_1, K_2, \ldots)$, w którym K_n (dla dowolnego n całkowitego dodatniego) oznacza koło o środku w ustalonym punkcie (niezależnym od n) i promieniu $\frac{1}{n}$, jest nieskończonym ciągiem podzbiorów płaszczyzny π (narysuj kilka wyrazów tego ciągu!).

Zauważmy na koniec, że pojęcie ciągu bardzo przypomina znane nam ze szkoły podstawowej pojęcie funkcji. Tworząc mianowicie ciąg k-wyrazowy $(a_1, \ldots, a_k)$ z elementów jakiegoś zbioru A, przyporządkowujemy każdej liczbie ze zbioru $\{1, \ldots, k\}$ po jednym elemencie zbioru A: liczbie 1 przyporządkowujemy a_1, liczbie 2 przyporządkowujemy a_2, itd. Tym samym możemy mówić, że określamy w ten sposób w zbiorze $\{1, \ldots, k\}$ funkcję (przyjmującą wartości w zbiorze A). Zupełnie tak samo, tworząc z elementów zbioru A nieskończony ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$, przyporządkowujemy każdej z liczb $1, 2, \ldots$ po jednym elemencie zbioru A: liczbie 1 przyporządkowujemy element a_1, liczbie 2 — element a_2, itd. Możemy więc mówić, że określamy tym samym w zbiorze $\{1, 2, \ldots\}$ funkcję (przyjmującą wartości w zbiorze A).

Ćwiczenia

1. Podaj trzy różne pięciowyrazowe ciągi utworzone z elementów zbioru $\{a, b, c\}$.

2. Wypisz wszystkie trzywyrazowe ciągi utworzone z elementów zbioru $\{a, b, c\}$.

3. Ustal, ile jest czterowyrazowych ciągów w zbiorze trzyelementowym.

4. Podaj trzy różne dziesięciowyrazowe ciągi liczb wymiernych i dwa podobne ciągi liczb niewymiernych.

5. Przypomnij, w jakiej kolejności jadąc pociągiem z Krakowa do Warszawy przejeżdża się miasta: Sędziszów, Radom, Warka, Miechów i Kielce (jeżeli nie wiesz, weź mapę). Uzupełnij otrzymany ciąg nazwami dwóch dalszych miast na tej linii kolejowej, zachowując zasadę uporządkowania. Utwórz ciąg nazw tychże miast przyjmując, że chodzi tu o podróż z Warszawy do Krakowa.

6. Porównaj aktualną tabelę I ligi piłkarskiej z tabelą sprzed ostatniej rundy rozgrywek. Czy przedstawiają one te same ciągi drużyn?

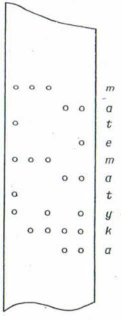
7. Sprawdź, że zdanie »kobyła ma mały bok« przeczytane wspak przedstawia ten sam ciąg liter. Przypomnij kilka znanych Ci słów lub zdań mających tę samą własność. Znajdź przy okazji w słowniku wyrazów obcych lub encyklopedii znaczenie słowa „palindrom".

8. Ile różnych par można utworzyć z elementów zbioru k-elementowego? Ile wśród nich jest par o jednakowych wyrazach? Ile o wyrazach różnych? Ile spotkań rozgrywają w sezonie jesiennym drużyny I ligi piłkarskiej?

9. Utwórz dwa różne pięciowyrazowe ciągi z elementów zbioru $P(\{a, b, c\})$. Utwórz dwa takie ciągi z elementów zbioru $P(\boldsymbol{Z})$.

10. W alfabecie Morse'a każda litera i każda cyfra od 0 do 9 zapisywana jest w postaci jedno-, dwu-, trzy-, cztero- lub pięciowyrazowego ciągu kropek i kresek. Spróbuj wyjaśnić, dlaczego nie wystarczyłoby do utworzenia podobnego alfabetu tylko ciągów jedno-, dwu-, trzy- i czterowyrazowych.

11. Na taśmie dalekopisowej na wypisanie każdej litery zarezerwowanych jest pięć miejsc, w których maszyna wybija dziurkę lub nie, w zależności od tego, o jaką literę chodzi (rys. 17). Wyjaśnij, dlaczego ten sposób zapisywania liter nie wystarcza już do zapisywania także i 10 cyfr. Może wiesz, jak pomimo to na takiej taśmie perforowanej wypisuje się i litery, i cyfry?



Rys. 17

12. W mieście, w którym mieszkają państwo Kaczmarkowie, numery telefonów są pięciocyfrowe. Oblicz, ile telefonów o różnych numerach można w tym mieście zainstalować? O ile zmniejszyłaby się ta liczba, gdyby numery były czterocyfrowe?

13. Spróbuj wykazać (bez rachunku!), że k-wyrazowych ciągów utworzonych z elementów zbioru dwuelementowego jest tyle samo co podzbiorów zbioru k-elementowego.

14. Wykaż, że krawędzi czworościanu nie da się ustawić w ciąg, w którym: 1) każda krawędź występowałaby dokładnie raz, 2) każde dwie kolejne krawędzie miałyby wspólny wierzchołek.

15. Podaj nieskończony ciąg kół o tej własności, że każdy punkt płaszczyzny należy do co najmniej jednego z tych kół. Podaj nieskończony ciąg kwadratów o boku 1 mający tę samą własność.

16. Podaj nieskończony ciąg przedziałów zawartych w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ o tej własności, że każde dwa występujące w tym ciągu przedziały mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

17. Podaj nieskończony ciąg różnych liczb niewymiernych.

18. Z kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\pi = 3{,}14159\ldots$ tworzymy nieskończony ciąg $(3, 1, 4, 1, 5, 9, \ldots)$. Wykaż, że w ciągu tym przynajmniej jedna cyfra występuje nieskończenie wiele razy. Spróbuj sformułować analogiczną własność ciągów nieskończonych w ogólniejszym przypadku.

19. Ciąg $(a_1, \ldots, a_k)$ liczb rzeczywistych nazywamy **rosnącym**, jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Wypisz wszystkie trzywyrazowe ciągi rosnące, jakie utworzyć można z elementów zbioru $\{0, -2, 6, 4, 25\}$. Ile ich jest? Czy dla dowolnego innego pięcioelementowego zbioru liczb rzeczywistych ilość takich ciągów jest ta sama?

20. Ciąg zbiorów $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ nazywamy **wstępującym**, jeżeli $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k$. Ile co najwyżej trzywyrazowych ciągów wstępujących można utworzyć z elementów zbioru $\{A, B, C, D, E\}$? (Pamiętaj, że każdy zbiór zawiera się sam w sobie!) Podaj przykłady, gdy ciągów takich jest tylko pięć.

§ 10. Iloczyn kartezjański

W międzyszkolnych rozgrywkach siatkówki w naszym mieście bierze udział pięć szkół średnich: trzy licea ogólnokształcące — ,,Jagiełło'', ,,Kochanowski'' i ,,Sobieski'' oraz Technikum Mechaniczne i Liceum Ekonomiczne. Rozgrywki toczą się systemem ligowym: każda drużyna gra z każdą inną mecz u siebie i rewanż na boisku przeciwnika. Ustalając terminarz rozgrywek musimy uwzględnić pary drużyn:

Jagiełło — Sobieski,
Sobieski — Mechaniczne,
Ekonomiczne — Kochanowski,
Sobieski — Jagiełło

i wiele jeszcze innych. Zadanie ułożenia terminarza spotkań naszej szkolnej ligi siatkówki możemy więc uważać za zagadnienie dotyczące określonego zbioru par.

W obszerniejszych kalendarzach, informatorach, w ,,Atlasie samochodowym Polski'' itd. podawane są tabele odległości (drogowych) najważniejszych miast naszego kraju. Dowiadujemy się z nich na przykład, że odległość z Katowic do Gliwic wynosi 29 km, a odległość z Przemyśla do Świnoujścia (znajdź te miejscowości na mapie) — 920 km. Dla pary (Mława, Piła) odczytujemy z takiej tabeli liczbę

280, a dla pary (Wałcz, Terespol) — liczbę 575. Tabele takie zawierają więc informacje dotyczące par ustalonej grupy miast Polski.

Znana nam dobrze tabliczka mnożenia również podaje informacje dotyczące par, mianowicie par liczb całkowitych dodatnich nie większych od 10. Pozwala nam w prosty sposób odczytać, dla każdej pary takich liczb, iloczyn obu tych liczb.

Przykłady te wskazują, jak często w rozmaitych sytuacjach rozpatrujemy nie pojedyncze pary, ale zbiory par. Bardzo też często są to zbiory wszystkich par utworzonych z elementów jakiegoś zbioru. Skłania nas to do podjęcia w matematyce próby jednolitego opisu takiego postępowania.

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Zbiór wszystkich par (a, b), których pierwszy wyraz należy do zbioru A, a drugi wyraz należy do zbioru B, nazywamy **iloczynem kartezjańskim zbiorów** A, B i oznaczamy symbolem $A \times B$. Zgodnie z tą definicją:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ogólniej, **iloczynem kartezjańskim zbiorów** $A_1, \ldots, A_k$ **nazywamy zbiór wszystkich** k**-elementowych ciągów** $(a_1, \ldots, a_k)$**, w których pierwszy wyraz należy do** A_1**, drugi — do** $A_2, \ldots, k$**-ty — do** A_k. Oznaczamy go symbolem $A_1 \times \ldots \times A_k$, tak że zgodnie z tą definicją

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_k \in A_k\}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $A_1 = \ldots = A_k = A$, zbiór $A_1 \times \ldots \times A_k$ nazywamy **k-tą potęgą kartezjańską zbioru** A i oznaczamy symbolem A^k. W szczególności, drugą potęgę kartezjańską zbioru A nazywamy **kwadratem kartezjańskim zbioru** A.

Zgodnie z tymi umowami, możemy krótko zapisać:

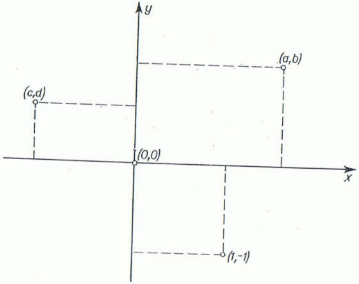
$$A^k = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_1, \ldots, a_k \in A\}$$

i w szczególności

$$A^2 = \{(a, b) : a, b \in A\}.$$

Nietrudno o przykłady ważnych w matematyce iloczynów, kwadratów i potęg kartezjańskich. Jednym z najważniejszych jest przykład następujący:

Wprowadźmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych (rys. 18) z ustaloną jednostką. W układzie tym każdemu punktowi odpowiada para liczb rzeczywistych (mówimy: para jego współrzędnych). I na odwrót, każdej parze liczb rzeczywistych odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny. Możemy więc utożsamiać punkty płaszczyzny z parami liczb rzeczywistych, mówiąc wprost na przykład o punkcie (0, 0), punkcie (1, -1), punktach (a, b), (c, d) itd. Postępując tak utożsamiamy płaszczyznę z kwadratem kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych.



Rys. 18

Podobnie, rozpatrując w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych (rys. 19) otrzymujemy kwadrat kartezjański zbioru liczb całkowitych.

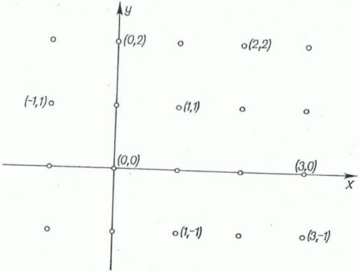
Zupełnie analogicznie, w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie iloczyn kartezjański przedziałów

$$\{x \in \mathbf{R}: a \leqslant x \leqslant b\}, \quad \{y \leqslant \mathbf{R}: c \leqslant y \leqslant d\}$$

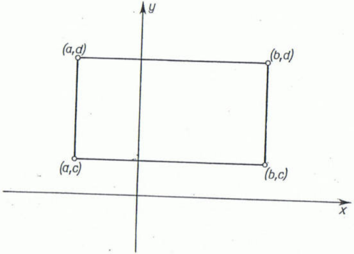
jest zbiorem (rys. 20)

$$\{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

to znaczy prostokątem o wierzchołkach w punktach (a, c), (b, c), (b, d) i (a, d).

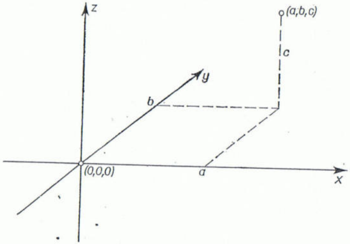


Rys. 19



Rys. 20

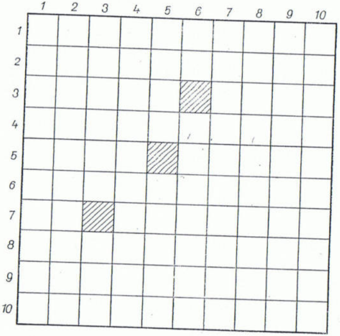
Wprowadzając w przestrzeni prostokątny układ współrzędnych (rys. 21) możemy każdy punkt przestrzeni utożsamiać z ciągiem trzech jego współrzędnych i mówić wprost o punkcie (0, 0, 0), punkcie (a, b, c) itd. Możemy zatem uważać przestrzeń za trzecią potęgę kartezjańską zbioru liczb rzeczywistych.



Rys. 21

Dla poglądowego przedstawiania iloczynów i kwadratów kartezjańskich zbiorów skończonych najczęściej posługujemy się prostokątnymi lub kwadratowymi tabelkami. Na przykład po to, by utworzyć znaną nam doskonale tabliczkę mnożenia dla liczb całkowitych od 1 do 10, rysujemy wpierw kwadrat, taki jak na rysunku 22. Każda kratka w tym kwadracie odpowiada parze liczb. Zbiór kratek reprezentuje kwadrat kartezjański zbioru $\{1, \ldots, 10\}$. Na rysunku 22 zakreskowaliśmy kratki odpowiadające parom (3, 6), (5, 5) i (7, 3). Tworząc tabliczkę mnożenia w każdą z kratek narysowanego kwadratu wpisujemy wartość odpowiedniego iloczynu.

W „Roczniku statystycznym 1970” na stronicy 583 znajdujemy tabelkę, której część, po pewnych uproszczeniach, przedstawiona jest na stronicy 53. Od razu widzimy, że zbiór kratek tej tabelki przedstawia iloczyn kartezjański zbioru państw Albania, Argentyna, Australia, Austria, Belgia, ..., Polska, ... i zbioru 1938, 1950, 1955, 1960,



Rys. 22

Ludność niektórych krajów

	1938	1950	1955	1960	1965
Albania	1 040	1 215	1 379	1 607	1 865
Argentyna	13 725	17 119	18 893	20 850	22 545
Australia	6 899	8 179	9 200	10 275	11 388
Austria	6 753	6 935	6 974	7 048	7 255
Belgia	8 374	8 639	8 869	9 153	9 464
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Polska	34 682	24 824	27 281	29 561	31 496
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1965. W każdą z tych kratek wpisano (w tysiącach) ilość mieszkańców poszczególnych państw w poszczególnych latach.

Pojęcie iloczynu kartezjańskiego pozwala nam lepiej zrozumieć pojęcie formy zdaniowej wielu zmiennych. Możemy mianowicie, teraz już precyzyjniej niż to robiliśmy dotychczas, powiedzieć, że formę zdaniową określoną w iloczynie kartezjańskim $A_1 \times \ldots \times A_k$ k zbiorów $A_1, \ldots, A_k$ nazywamy formą zdaniową k zmiennych i oznaczamy najczęściej symbolami $p(x_1, \ldots, x_k)$, $q(x_1, \ldots, x_k)$ itp. Za zmienną x_1 możemy tu przyjmować dowolny element zbioru A_1, za zmienną x_2 — dowolny element zbioru A_2, itd.

Na przykład, zdanie

$$x < y$$

jest formą zdaniową w zbiorze R^2. Jest to tym samym forma zdaniowa dwóch zmiennych. Podobnie, przyjmując, że w zdaniu

(1) $$n \leqslant x < n+1$$

x oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, a n dowolną liczbę całkowitą otrzymujemy przykład formy zdaniowej dwóch zmiennych określone w iloczynie kartezjańskim $R \times Z$.

Ćwiczenia

1. Ile elementów ma iloczyn kartezjański zbioru n-elementowego i zbioru m-elementowego? Spróbuj odpowiedzieć na podobne pytanie dla iloczynu kartezjańskiego większej ilości zbiorów.

2. Uzupełnij wzory: $\{a\} \times \{a\} = \ldots$, $\{a\} \times \{b\} = \ldots$

3. Uzasadnij, dlaczego dla dowolnego zbioru A iloczyn kartezjański $A \times \emptyset$ jest zbiorem pustym.

4. Narysuj na płaszczyźnie iloczyn kartezjański zbiorów:

$$\{n \in Z: -1 \leqslant n < 5\} \text{ i } \{n \in Z: 0 < n \leqslant 4\}.$$

5. Dla dowolnych zbiorów A i B, uzasadnij związek:

$$A \times B \subset \{(a, b): a, b \in A \cup B\}.$$

Kiedy we wzorze tym zachodzi równość?

6. Dla dowolnych zbiorów A i B, uzasadnij związek: $A \times B \supset \{(a, b): a, b \in A \cap B\}$. Kiedy we wzorze tym zachodzi równość?

7. Wykaż, że równość $A \times B = B \times A$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków: $A = B$, $A = \emptyset$, $B = \emptyset$.

8. Uzasadnij, dlaczego jeżeli $A \subset C$ i $B \subset D$, to także i $A \times B \subset C \times D$.

9. Sporządź tabelkę ilustrującą iloczyn kartezjański zbiorów $\{a, b, c\}$ i $P(\{a, b, c\})$. Zakreskuj te kratki tabelki, które odpowiadają parom (x, X), takim że $x \in X$.

10. Sporządź tabelkę ilustrującą iloczyn kartezjański zbiorów {Czechosłowacja, Polska, Rumunia, Węgry, ZSRR} i {Dunaj, Dunajec, Bug, Narew, Odra, Wisła}. Zakreskuj kratki tabelki tak, aby można było stąd odczytać, która z wymienionych rzek przepływa przez terytorium którego z wymienionych państw.

11. Podaj kilka par (x, n), dla których forma zdaniowa (1) (str. 54) jest prawdziwa.

12. x, y i z są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wyjaśnij, w jakim zbiorze określona jest forma zdaniowa: $x < y < z$.

13. W jakim zbiorze określona jest forma zdaniowa: n dzieli m (n i m są tu dowolnymi liczbami całkowitymi)?

14. W jakim zbiorze określona jest forma zdaniowa dwóch zmiennych: prosta l jest równoległa do prostej k?

15. Sformułuj własności rozdzielności iloczynu kartezjańskiego względem dodawania, mnożenia i odejmowania zbiorów:

$$(A \cup B) \times C = \ldots, \quad (A \cap B) \times C = \ldots, \quad (A \setminus B) \times C = \ldots.$$

Uzasadnij je.

§ 11. Kwantyfikatory

Zdanie

$$x^2+1 > 0$$

jest formą zdaniową w zbiorze R liczb rzeczywistych. Staje się ono zdaniem logicznym prawdziwym po podstawieniu za x dowolnej liczby rzeczywistej. Własność tę formułujemy często krócej za pomocą zdania (logicznego):

(1) $$\text{dla każdego } x \in R: x^2+1 > 0.$$

Podobnie, forma zdaniowa (w zbiorze Z liczb całkowitych) „n jest podzielne przez -1" staje się zdaniem logicznym prawdziwym po podstawieniu za n dowolnej liczby całkowitej. Możemy więc napisać, że

(2) $$\text{dla każdego } n \in Z: n \text{ jest podzielne przez } -1.$$

W rozważaniach matematycznych zdania takie pojawiają się tak często, że celowe okazuje się wprowadzenie specjalnego symbolu służącego do krótszego ich zapisywania.

Jeżeli dla formy zdaniowej $p(x)$ (w dowolnym zbiorze $\boldsymbol{A}$) wszystkie elementy zbioru $\boldsymbol{A}$ mają własność wyrażoną przez tę formę, to piszemy symbolicznie

$$\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x).$$

Czytamy: dla każdego x należącego do $\boldsymbol{A}$, ... Oczywiście miejsce wielokropka w tej wypowiedzi zajmuje zawsze, jak widzieliśmy w rozważanych przykładach, precyzyjne sformułowanie rozpatrywanej własności.

Zgodnie z tą umową, zdania (1) i (2) możemy zapisać symbolicznie pisząc odpowiednio:

$$\bigwedge x \in \boldsymbol{R}: x^2+1 > 0,$$
$$\bigwedge n \in \boldsymbol{Z}: n \text{ jest podzielne przez } -1.$$

Obierzmy na płaszczyźnie dwa dowolne punkty P i Q. Nie każda prosta przechodzi przez te punkty. Możemy jedynie twierdzić, że istnieje prosta przechodząca przez te punkty.

Nie każda prosta przechodzi przez punkt P. Możemy tylko twierdzić, że istnieją proste przechodzące przez ten punkt.

Równość $(x+1)(x-1) = 0$ nie jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste, ale istnieją liczby rzeczywiste (mianowicie 1 i -1), dla których jest ona spełniona.

Takie i podobne sformułowania pojawiają się w rozważaniach matematycznych tak często, że warto wprowadzić specjalny symbol skracający wypowiedzi tego typu.

Umawiamy się mianowicie, że w przypadku gdy co najmniej jeden element zbioru $\boldsymbol{A}$ spełnia warunek $p(x)$, będziemy pisać symbolicznie

$$\bigvee x \in \boldsymbol{A}: p(x).$$

Czytamy: istnieje element x zbioru $\boldsymbol{A}$, taki że ... . I tu miejsce wielokropka w każdym konkretnym przypadku zajmuje dokładne sformułowanie, słowne lub symboliczne, rozpatrywanej własności.

Na przykład dla zbioru $\boldsymbol{Z}_2$ wszystkich liczb całkowitych parzystych prawdziwe są następujące twierdzenia:

$$\bigvee n \in \boldsymbol{Z}_2: n \text{ jest podzielne przez } 10,$$
$$\bigvee n \in \boldsymbol{Z}_2: n \text{ jest większe od } 101,$$
$$\bigvee n \in \boldsymbol{Z}_2: n < -1036.$$

Symbole $\bigwedge$ i $\bigvee$ noszą wspólną nazwę kwantyfikatorów. Pierwszy z nich nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym** lub **uniwersalnym**, drugi — **kwantyfikatorem egzystencjalnym.**

Zauważmy, że definicję kwantyfikatora ogólnego możemy symbolicznie zapisać za pomocą równoważności

$$[\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \Leftrightarrow [\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} = \boldsymbol{A}]. \tag{3}$$

Znaczenie natomiast kwantyfikatora egzystencjalnego natychmiast wyjaśnia równoważność

$$[\bigvee x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \Leftrightarrow [\{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\} \neq \emptyset)]. \tag{4}$$

W symbolicznych zapisach definicji, twierdzeń, rozumowań matematycznych itp. często oba kwantyfikatory występują równocześnie w rozmaitych kombinacjach. Na przykład w zdaniu

$$\bigwedge x \in \boldsymbol{R}: \bigvee n \in \boldsymbol{Z}: n \leqslant x < n+1,$$

odczytanym zgodnie z przyjętymi umowami, odnajdujemy znane nam twierdzenie: dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje liczba całkowita n, taka że $n \leqslant x < n+1$. Podobnie, zdanie

$$\bigwedge a, b \in \boldsymbol{R}: [(a < b) \Rightarrow \bigvee c \in \boldsymbol{R}: a < c < b],$$

jest symbolicznym zapisem twierdzenia głoszącego, że dla dowolnych dwóch różnych liczb rzeczywistych istnieje liczba rzeczywista między nimi zawarta.

Umiejętność szybkiego zapisywania symbolicznego, całych zdań, nieraz nawet bardzo długich i skomplikowanych, bardzo nam się w przyszłości przyda. Równie pożyteczna będzie wprawa we właściwym odczytywaniu zdań zapisanych w całości lub w części tym swoistym symbolicznym „pismem" matematyki.

Bardzo potrzebna też będzie nam wprawa w tworzeniu negacji zdań, w których występują kwantyfikatory.

Nietrudno na przykład znaleźć zaprzeczenie zdania:

$$\bigwedge n \in \boldsymbol{Z}: n \text{ jest podzielne przez } 3.$$

Jest nim zdanie:

$$\bigvee n \in \boldsymbol{Z}: n \text{ nie jest podzielne przez } 3.$$

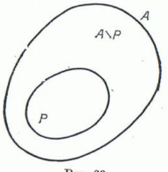
Zaprzeczeniem zdania (zapisz je słowami):

$$\bigvee n \in \boldsymbol{Z}: \bigwedge x \in \boldsymbol{R}: x \leqslant n$$

jest naturalnie zdanie (zapisz je słowami):

$$\bigwedge n \in \boldsymbol{Z}: \bigvee x \in \boldsymbol{R}: x > n.$$

Łatwo o proste uzasadnienie takiego sposobu postępowania przy tworzeniu negacji zdań z kwantyfikatorami w ogólnych przypadkach. Rzućmy okiem na rysunek 23, na którym $\boldsymbol{P} = \{x \in \boldsymbol{A}: p(x)\}$ i $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{P} = \{x \in \boldsymbol{A}: \sim p(x)\}$. Od razu widać, że $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{P} \neq \emptyset$. Stąd natychmiast, na podstawie wzorów (3) i (4), otrzymujemy równoważność



Rys. 23

$$\sim [\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \Leftrightarrow \bigvee x \in \boldsymbol{A}: \sim p(x).$$

Całkiem podobnie, stąd że $\boldsymbol{P} = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \setminus \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$, otrzymujemy równoważność

$$\sim [\bigvee x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \Leftrightarrow \bigwedge x \in \boldsymbol{A}: \sim p(x).$$

Wzory te uczą, w jaki sposób tworzymy negacje zdań z kwantyfikatorami. Zastępujemy mianowicie kwantyfikator ogólny kwantyfikatorem egzystencjalnym, i na odwrót kwantyfikator egzystencjalny zastępujemy kwantyfikatorem ogólnym. I co najważniejsze, formę zdaniową, do której kwantyfikatory te się odnoszą, zastępujemy jej negacją. To postępowanie, niemalże zupełnie mechaniczne, schematycznie ilustrują dwa następujące diagramy:

$$\begin{array}{c} \sim [\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \\ \downarrow \\ \bigvee x \in \boldsymbol{A}: \sim p(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \sim [\bigvee x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \\ \downarrow \\ \bigwedge x \in \boldsymbol{A}: \sim p(x) \end{array}$$

Pierwszy z nich pokazuje poglądowo, jak należy tworzyć negację zdania z kwantyfikatorem ogólnym, drugi — jak tworzyć należy negację zdania z kwantyfikatorem egzystencjalnym.

Ćwiczenia

1. Zapisz symbolicznie twierdzenie: dla dowolnych dwóch różnych liczb rzeczywistych istnieje liczba wymierna między nimi zawarta.

2. Wyjaśnij, dlaczego zdanie

$$\bigvee x \in \boldsymbol{R}: \bigwedge n \in \boldsymbol{Z}: x \leqslant n$$

jest fałszywe. Zapisz je słowami. Sformułuj jego zaprzeczenie i zapisz je symbolicznie.

3. Podaj słowne sformułowanie twierdzenia:

$$\bigwedge n \in \boldsymbol{Z}: \bigvee m \in \boldsymbol{Z}: n \leqslant m.$$

4. Zapisz symbolicznie negację zdania: $\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: x \neq x$.

5. Uzasadnij twierdzenie : $\bigvee n, m, p \in \boldsymbol{N}: n^2 + m^2 = p^2$.

6. Zapisz symbolicznie negację zdania: $\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: \bigvee y \in \boldsymbol{B}: p(x, y)$.

7. Uzasadnij prawdziwość równoważności:

$$\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x) \Leftrightarrow \sim [\bigvee x \in \boldsymbol{A}: \sim p(x)].$$

Napisz i uzasadnij podobną równoważność dla kwantyfikatora egzystencjalnego.

8. Uzasadnij równoważność:

$$[\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: p(x)] \wedge [\bigwedge x \in \boldsymbol{A}: q(x)].$$

Czy zastępując w tym wzorze $\wedge$ przez $\vee$ otrzymujemy również twierdzenie prawdziwe?

9. Uzasadnij równoważności: $(\bigwedge x \in \{a, b\}: p(x)) \Leftrightarrow (p(a) \wedge p(b))$, $(\bigvee x \in \{a, b\}: p(x)) \Leftrightarrow (p(a) \vee p(b))$. Spróbuj sformułować analogiczne równoważności dla zbiorów o większej liczbie elementów.

10. Wykaż prawdziwość twierdzenia: $\bigwedge p \in \boldsymbol{Z}: \bigwedge n \in \boldsymbol{Z}: (p \leqslant n) \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{1}{2n+30} < \dfrac{1}{100}$.

Rozdział II

RELACJE

§ 1. Pojęcie relacji

W języku potocznym często stykamy się ze słowem „relacja" rozumiejąc zwykle pod tym terminem jakiś ściśle określony związek kogoś z kimś, czegoś z czymś, itp. Mówimy na przykład o relacji pokrewieństwa między dwiema osobami, o relacjach handlowych między krajami, o pociągach relacji Warszawa—Wrocław, itp. Wyczuwamy intuicyjnie, że prawidłowe użycie słowa „relacja" wymaga występowania dwóch partnerów. W pierwszym przykładzie są nimi dwie spokrewnione osoby, w drugim — dwa utrzymujące ze sobą stosunki handlowe kraje, w trzecim — dwa miasta.

Także i w matematyce podobne sytuacje spotykamy bardzo często. Mówimy na przykład, że pewna prosta jest równoległa do drugiej, że pewna liczba jest mniejsza od innej, że jeden zbiór zawiera się w drugim, że dwie formy zdaniowe są równoważne, itp. I tu za każdym razem mamy do czynienia z określonymi związkami dwóch elementów. W pierwszym przykładzie są to dwie proste, w drugim — dwie liczby, w trzecim — dwa zbiory, a w czwartym — dwie formy zdaniowe. Nic więc dziwnego, że i tu niekiedy używamy słowa „relacja" mówiąc, odpowiednio, o relacji równoległości prostych, relacji mniejszości liczb, relacji zawierania się zbiorów, relacji równoważności form zdaniowych.

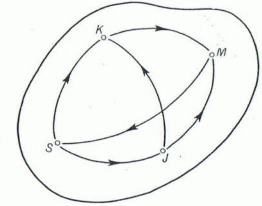
Czujemy, że zarówno w języku potocznym, jak i w matematyce słowo „relacja" oznacza określoną własność nie pojedynczych osób, przedmiotów, czy ogólniej — elementów jakiegoś zbioru, ale własność par osób, przedmiotów czy elementów.

O guziku znalezionym pod stołem w czasie ostatniej naszej wizyty

u państwa Kaczmarków możemy powiedzieć, że jest okrągły. Wyrazimy w ten sposób pewną jego własność. Mówiąc natomiast, że jest on mniejszy od guzika, który znaleźliśmy w tym samym miejscu podczas naszej przedostatniej wizyty, wyrażamy własność pary tych guzików.

Pani Kaczmarkowa jest świetną gospodynią. Pani Kowalska (z drugiego piętra) też jest doskonałą gospodynią. Mówiąc to wyrażamy naszą opinię o umiejętnościach gospodarskich każdej z tych pań. Każdej z osobna! Mówiąc o jednej możemy przecież ani słowem nie wspomnieć o drugiej. Zupełnie co innego, gdy mówimy, że pani Kaczmarkowa jest lepszą gospodynią od pani Kowalskiej, wyrażając bowiem tę opinię wymienić musimy obie te panie.

W tym roku szkolnym w rozgrywkach siatkówki szkół średnich naszego miasta biorą udział trzy licea ogólnokształcące — „Jagiełło", „Kochanowski" i „Sobieski" oraz Technikum Mechaniczne. Przed feriami zimowymi odbędzie się tylko pierwsza runda rozgrywek:



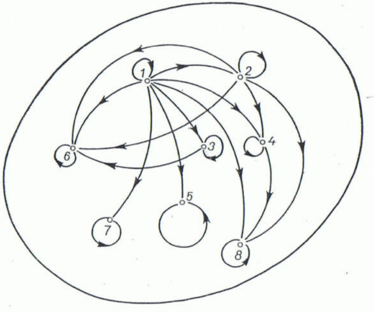
Rys. 24

grać będzie każdy z każdym, ale tylko jeden raz. Trzeba ustalić, w drodze losowania, kto w poszczególnych spotkaniach będzie gospodarzem. Wynik losowania ilustruje rysunek 24, na którym strzałkami zaznaczyliśmy, że „Kochanowski" rozgrywa spotkanie z „Mechanicznym" na jego boisku, że drużyna „Sobieskiego" udaje się na spotkanie do „Jagiełły", itd. Odczuwamy, że w naszym losowaniu szło o ustalenie określonej własności par rozpatrywanych szkół, i że mamy tu sytuację podobną do sytuacji, w których zwykliśmy używać słowa „relacja". Moglibyśmy więc powiedzieć, że losowanie nasze wprowadziło pewną relację w zbiorze czterech rozpatrywanych szkół.

	J	K	S	M
J		×		×
K				×
S	×	×		
M			×	

Wyniki naszego losowania można też przedstawić za pomocą zamieszczonej obok tabelki, w której krzyżyk narysowany w miejscu przecięcia wiersza oznaczonego literą K (od „Kochanowski") z kolumną odpowiadającą literze M (od „Mechaniczne") wskazuje, że drużyna z Liceum im. Kochanowskiego udaje się na spotkanie z drużyną Technikum Mechanicznego do tego Technikum, itd.

W podobny sposób związki podzielności w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ilustruje rysunek 25, na którym strzałka łącząca liczbę 2 z liczbą



Rys. 25

6 wskazuje, że 6 jest podzielne przez 2, strzałki biegnące od liczby 1 do każdej z pozostałych liczb informują, że każda z tych liczb jest podzielna przez 1, a strzałka wychodząca z 5 i kończąca się również w 5 przypomina, że liczba 5 jest podzielna przez samą siebie, itd.

Związki podzielności w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ zilustrować

możemy również zamieszczoną obok tabelką. Krzyżyk narysowany w niej w miejscu przecięcia trzeciego wiersza z szóstą kolumną informuje, że 6 jest podzielne przez 3, krzyżyk w miejscu przecięcia siódmego wiersza z siódmą kolumną przypomina, że 7 jest podzielne przez 7, itd. Brak natomiast krzyżyka na przecięciu czwartego wiersza i piątej kolumny oznacza, że 5 nie jest podzielne przez 4, itp.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	×	×	×	×	×	×	×
2		×		×		×		×
3			×			×		
4				×				×
5					×			
6						×		
7							×	
8								×

Zauważmy, że każda kratka tabeli w sposób jednoznaczny odpowiada jakiejś parze liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Na przykład kratce na przecięciu trzeciego wiersza z siódmą kolumną odpowiada para $(3, 7)$, kratce na przecięciu piątego wiersza z piątą kolumną — para $(5, 5)$, itp. Wiemy już, że na tej podstawie zbiór kratek tabelki możemy utożsamiać ze zbiorem wszystkich par elementów rozpatrywanego zbioru, to znaczy z kwadratem kartezjańskim zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. I tym samym możemy zbiór wszystkich kratek zaznaczonych krzyżykami uważać za podzbiór kwadratu kartezjańskiego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Podobnie byłoby, gdybyśmy rozpatrywali związki podzielności w zbiorze Z_+ wszystkich liczb całkowitych dodatnich. Wystarczyłoby przedłużyć naszą tabelkę w prawo i w dół do nieskończoności i wpisać w odpowiednich miejscach krzyżyki. Znowu otrzymalibyśmy podzbiór zbioru Z_+^2, tj. kwadratu kartezjańskiego zbioru Z_+.

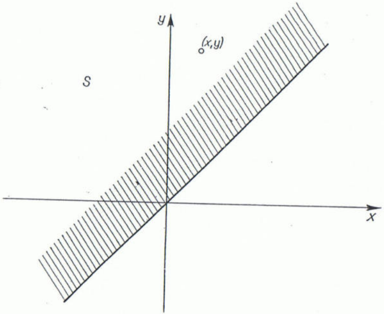
Podobnie interpretować możemy tabelkę otrzymaną przez nas w przykładzie międzyszkolnych rozgrywek w siatkówkę. W tabelce tej zbiór krzyżyków (dokładniej: zbiór kratek zaznaczonych krzyżykami) jest podzbiorem kwadratu kartezjańskiego zbioru $\{J, K, S, M\}$.

Rozważmy jeszcze relację mniejszości w zbiorze R liczb rzeczywistych. Wprowadźmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych (rys. 26). Utożsamiając punkt o współrzędnych x i y z parą liczb (x, y) możemy, jak już wiemy, uważać płaszczyznę za kwadrat kartezjański zbioru R. Narysujmy prostą o równaniu $y = x$ i oznaczmy przez S wyznaczoną przez nią półpłaszczyznę (bez samej prostej, na rys. 26 obszar zakreskowany). Nietrudno zauważyć, że para liczb

x i y spełnia nierówność $x < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt (x, y) leży w półpłaszczyźnie S. Innymi słowy, dla dowolnych liczb x i y mamy równoważność

$$x < y \Leftrightarrow (x, y) \in S.$$

Tak więc relacja mniejszości w zbiorze $\boldsymbol{R}$ związana jest ściśle z pewnym podzbiorem kwadratu kartezjańskiego zbioru $\boldsymbol{R}$, mianowicie z półpłaszczyzną S.



Rys. 26

Powyższe przykłady uprzytomniają nam, jak w naturalny sposób własnościom par elementów jakiegoś zbioru odpowiadają podzbiory kwadratu kartezjańskiego tego zbioru. Nie powinno więc nas dziwić, że w matematyce pojęcie relacji wprowadza się w następujący sposób:

Relacją w zbiorze A nazywamy dowolny podzbiór kwadratu kartezjańskiego zbioru A.

W rozważaniach teoretycznych relacje zwykło oznaczać się dużymi literami alfabetu łacińskiego następującymi po literze Q: R, S, T, ... W naszych rozważaniach będziemy starali się unikać oznaczania relacji

literą R, ponieważ ma ona dla nas już inne stałe znaczenie (symbol zbioru liczb rzeczywistych).

Zgodnie z definicją pojęcia relacji, fakt, że S jest relacją w zbiorze A, można zapisać symbolicznie w postaci związku:

$$S \subset A^2.$$

Gdy dla jakiejś pary (a, b) elementów zbioru A spełniony jest warunek: $(a, b) \in S$, to mówimy, że element a spełnia relację S z elementem b i piszemy symbolicznie:

$$aSb.$$

Ten sposób zapisu nie jest dla nas całkiem nowy. Przyzwyczailiśmy się już bowiem do krótkiego zapisywania zdań w rodzaju: prosta k jest równoległa do prostej l, liczba x jest mniejsza od liczby y, zbiór A zawiera się w zbiorze B, itp. w stenograficznej postaci:

$$k \| l,\ x < y,\ A \subset B, \text{ itp.}$$

Symbol aSb powstaje więc w naturalny sposób z takich i podobnych zapisów przez zastąpienie w nich symboli konkretnych relacji, takich jak $\|$, $<$, $\subset$, literą mającą oznaczać dowolną relację.

Rysunki, takie jak 24 i 25, bardzo często używane do zilustrowania relacji w zbiorach skończonych (o stosunkowo niewielkiej liczbie elementów), nazywamy **grafami** rozpatrywanych relacji.

Ćwiczenia

1. Rozgrywki w rundzie pierwszej ustalono tak, jak pokazano to na rysunku 24. Narysuj graf spotkań w drugiej rundzie rozgrywek. Sporządź odpowiednią tabelkę i porównaj ją z tabelką pierwszej rundy.

2. Wymyśl graf i tabelkę spotkań w pierwszej rundzie rozgrywek „ligi" siatkówki szkół średnich naszego miasta przy założeniu, że Liceum Ekonomiczne też bierze w niej udział. Na tej podstawie narysuj graf i sporządź tabelkę spotkań w drugiej rundzie rozgrywek.

3. Odnajdź na mapie Polski osiem następujących rzek: Wisła, Odra, Bug, Warta, San, Wisłok, Narew i Noteć. Narysuj graf wskazujący, która z wymienionych rzek jest dopływem jakiejś innej. Sporządź odpowiednią tabelkę.

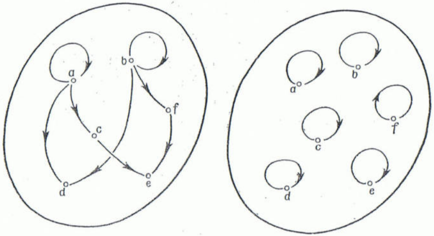
4. Sporządź grafy relacji określonych w zbiorze $\{a, b, c, d, e\}$ następującymi tabelkami:

	a	b	c	d	e
a		×	×		×
b	×	×		×	
c	×		×		×
d		×			
e			×	×	

	a	b	c	d	e
a	×				
b		×			
c			×		
d				×	
e					×

	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×	×	×	×	×
c		×	×	×	×
d		×	×	×	
e	×	×	×	×	

5. Sporządź tabelki relacji określonych w zbiorze $\{a, b, c, d, e, f\}$ grafami z rysunku 27.



Rys. 27

6. Sporządź grafy i tabelki relacji podzielności w zbiorach $\{1, 2, \ldots, 11, 12\}$ i $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

7. Sporządź graf relacji starszeństwa w Twojej rodzinie (w schematycznym jej przedstawieniu zaznacz kto od kogo jest starszy).

8. Znajdź na płaszczyźnie zbiór określający relację $x \leqslant y$.

9. Wskaż w kwadracie kartezjańskim zbioru $\boldsymbol{Z}$ podzbiór określający relację: $n < m$.

10. Znajdź na płaszczyźnie zbiór wszystkich punktów (x, y), takich że $x \leqslant 2y$.

11. Sporządź w zbiorze $\{a, b, c, d, e\}$ grafy i tabelki relacji: $x = y$, $x \neq y$.

12. Ile różnych relacji można określić w zbiorze jednoelementowym, dwuelementowym, trzyelementowym? Spróbuj odpowiedzieć na to pytanie dla zbioru n-elementowego.

13. Jaką relację spełniają współrzędne punktów koła o środku w początku układu i promieniu 1?

14. $\boldsymbol{A}$ jest zbiorem trzyelementowym: $\boldsymbol{A} = \{a, b, c\}$. Wypisz wszystkie jego podzbiory. Sporządź graf i tabelkę relacji zawierania w zbiorze $P(\boldsymbol{A})$.

15. W zbiorze $\boldsymbol{A}$ relacja $\boldsymbol{S}$ dana jest wzorem: $\boldsymbol{S} = \{(a, a) : a \in \boldsymbol{A}\}$. Jaka to relacja?

§ 2. Relacje i formy zdaniowe dwóch zmiennych

Za zmienne k i l w formie zdaniowej dwóch zmiennych

»prosta k jest równoległa do prostej l«

możemy podstawiać dowolne proste. Od razu orientujemy się, że forma ta wyraża pewną własność p a r prostych, a nie pojedynczych prostych.

Podobnie, forma zdaniowa

»m jest podzielne przez n«,

w której za m i n podstawiać możemy dowolne liczby całkowite, wyraża własność p a r liczb całkowitych, a nie pojedynczych liczb całkowitych.

Analogicznie, forma zdaniowa

»X jest bratem Y«,

w której za zmienne X i Y możemy podstawiać na przykład wszystkich mieszkańców Polski, wyraża określoną własność par osób, a nie własność pojedynczych osób.

Mamy tu więc sytuacje podobne do tych, które w paragrafie poprzednim służyły nam za punkt wyjścia do matematycznej definicji pojęcia relacji. Czyżby więc istniał jakiś związek pomiędzy relacjami i formami zdaniowymi dwóch zmiennych? Ależ oczywiście, związek taki istnieje! Nietrudno też opisać go w terminach matematycznych.

W pierwszym z naszych przykładów zbiór

$$\{(k, l): \text{prosta } k \text{ jest równoległa do prostej } l\}$$

jest relacją w zbiorze wszystkich prostych płaszczyzny, jest to bowiem podzbiór kwadratu kartezjańskiego zbioru wszystkich prostych płaszczyzny. Podobnie w drugim przykładzie, zbiór

$$\{(m, n): m \text{ jest podzielne przez } n\}$$

jest relacją w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych, jest to bowiem podzbiór zbioru $\boldsymbol{Z}^2$. Wreszcie w przykładzie trzecim, zbiór

$$\{(X, Y): X \text{ jest bratem } Y\}$$

jest relacją w zbiorze wszystkich mieszkańców Polski — jako podzbiór zbioru par dowolnych mieszkańców naszego kraju.

Od tych przykładów wiedzie prosta droga do następującego ogólnego wniosku: Gdy $p(x, y)$ jest formą zdaniową dwóch zmiennych, za które możemy podstawiać dowolne elementy zbioru $\boldsymbol{A}$, to zbiór

$$\boldsymbol{S} = \{(x, y) \in \boldsymbol{A}^2 : p(x, y)\},$$

jako podzbiór kwadratu kartezjańskiego zbioru $\boldsymbol{A}$, jest relacją w zbiorze $\boldsymbol{A}$.

Na przykład nierówność $x < y$ jest formą zdaniową dwóch zmiennych, w której za x i y możemy podstawiać dowolne liczby rzeczywiste. Zbiór

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x < y\},$$

to znaczy półpłaszczyzna z rysunku 26, jest podzbiorem zbioru $\boldsymbol{R}^2$, a więc relacją w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Zupełnie tak samo, nierówność

$$x^2+y^2 < 1$$

jest formą zdaniową dwóch zmiennych, w której za x i y podstawiać możemy dowolne liczby rzeczywiste, tak że zbiór

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$$

jest relacją w zbiorze liczb rzeczywistych.

Okazuje się więc, że każda forma zdaniowa dwóch zmiennych, w której za zmienne możemy podstawiać dowolne elementy jakiegoś zbioru, w sposób najzupełniej naturalny określa pewną relację w tym zbiorze. Stąd też bardzo często formy zdaniowe dwóch zmiennych nazywamy wprost relacjami. Postępowanie bardzo wygodne, ale nie pozbawione pewnych (formalnych tylko, na szczęście) niebezpieczeństw. Tak na przykład dwie różne formy zdaniowe

$$x \leqslant y \quad \text{i} \quad 2x \leqslant 2y$$

określają tę samą relację (nierówności) w zbiorze liczb rzeczywistych, bowiem zbiory

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x \leqslant y\} \quad \text{i} \quad \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 2x \leqslant 2y\}$$

są równe.

Aby tę niejednoznaczność usunąć, możemy umówić się (podobnie jak to już robiliśmy dla form zdaniowych jednej zmiennej) formy zdaniowe $p(x, y)$ i $q(x, y)$ określone w zbiorze $\boldsymbol{A}^2$ nazywać **równoważnymi,** jeżeli

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{A}^2 : p(x, y)\} = \{(x, y) \in \boldsymbol{A}^2 : q(x, y)\}.$$

W wyniku tej umowy formy równoważne określają jedną i tę samą relację. I na odwrót, dwie formy zdaniowe są równoważne tylko wtedy, gdy określają tę samą relację.

Pod warunkiem zatem, że formy zdaniowe równoważne będziemy uważać za identyczne, możemy utożsamiać relacje z formami zdaniowymi dwóch zmiennych. I tak często w przyszłości będziemy postępować. Mówić będziemy więc na przykład o relacji „$x \leqslant y$", relacji „prosta k jest równoległa do prostej l", relacji „m jest podzielne przez n" itp.

Ale uwaga! Z tym postępowaniem wiąże się następująca ogólna obserwacja: w matematyce, podobnie jak i w życiu codziennym, ważne jest przede wszystkim to, kto z kim, co z czym daną relację spełnia, a nie to, jak to wyrazimy słownie czy symbolicznie. Słowem, ważna jest treść, a nie forma!

Ćwiczenia

1. W jakim zbiorze określa relację forma zdaniowa: prosta k jest prostopadła do prostej l?

2. W jakim zbiorze określa relację forma zdaniowa: płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2?

3. W jakim zbiorze określa relację forma zdaniowa: figura A jest przystająca (podobna) do figury B?

4. Podaj formę zdaniową określającą w zbiorze wszystkich płaszczyzn relację równoległości.

5. Podaj przykład formy zdaniowej dwóch zmiennych (w zbiorze liczb rzeczywistych) równoważnej formie: $(x-y)^2 < 2$.

6. Spróbuj wykazać, że w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych forma: »$3m$ jest podzielne przez $2n$« określa relację różną od relacji podzielności.

7. Wykaż, że w zbiorze liczb całkowitych forma zdaniowa: »$3m$ jest podzielne przez $3n$« określa relację podzielności.

8. Podaj przykład formy zdaniowej dwóch zmiennych (w zbiorze wszystkich mieszkańców Polski) równoważnej formie: X jest bratem Y.

§ 3. Relacje zwrotne, symetryczne i przechodnie

Podobnie jak nie wszystkie zbiory, jakie możemy rozpatrywać, są interesujące i ważne dla matematyki i jej zastosowań (przykład: nie ma niczego bardziej jałowego, niż rozpatrywanie zbioru wszystkich gruszek na wierzbie!), tak i nie wszystkie relacje, jakie możemy określić w tym czy innym zbiorze, są naprawdę interesujące. Wprost przeciwnie, rzeczywiście ważnymi okazują się tylko nieliczne relacje w stosunkowo niewielkiej liczbie zbiorów.

Na przykład w zbiorze wszystkich prostych zawartych w ustalonej płaszczyźnie relacja równoległości i prostopadłości są jedynymi relacjami odgrywającymi istotną rolę w geometrii. Podobnie, w zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych warto rozpatrywać na serio zaledwie kilka relacji, z których najważniejszymi są relacje nierówności (słabej i silnej). Zupełnie analogicznie, w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych trudno o przykłady naprawdę ważnych relacji poza trzema: relacją nierówności, relacją podzielności i relacją modulo m, o której będzie mowa na stronicy 82.

Tak samo zresztą jest i w bardziej prozaicznych zbiorach, takich jak zbiór uczniów naszej klasy, zbiór uczniów naszej szkoły, kolekcja znaczków Marka Kaczmarka czy kolekcja krawatów pana Kaczmarka. Niełatwo na przykład wskazać w zbiorze uczniów naszej klasy jakieś inne interesujące relacje poza relacją pokrewieństwa, porównywania postępów w nauce, porównywania sprawności fizycznej, wagi czy wzrostu.

Przyglądając się bliżej relacjom, które w matematyce odgrywają szczególnie ważną rolę, moglibyśmy się przekonać, że pomimo wielu zasadniczych różnic pomiędzy nimi, wiele z tych relacji wykazuje szereg wspólnych cech. To właśnie jest powodem wyodrębnienia kilku specjalnych typów relacji, z których najważniejszymi są relacje równoważnościowe i porządkujące. Relacjom tego typu poświęcimy kilka następnych paragrafów. W tym paragrafie wprowadzimy trzy pomocnicze rodzaje relacji.

Relację $\boldsymbol{S}$ w zbiorze $\boldsymbol{A}$ nazywamy **zwrotną**, jeżeli

$$\bigwedge a \in \boldsymbol{A}: aSa.$$

Oznacza to, że relacja $S \subset A^2$ jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru $\boldsymbol{A}$ spełnia ją sam ze sobą.

Nietrudno o przykłady relacji zwrotnych. Każdy trójkąt przystaje sam do siebie, a to oznacza, że relacja przystawania trójkątów jest relacją zwrotną. Z analogicznego powodu zwrotna jest też relacja podobieństwa trójkątów. Relacją zwrotną jest również relacja niewiększości (słabej nierówności) w zbiorze liczb rzeczywistych, dla każdej bowiem liczby rzeczywistej a mamy nierówność $a \leqslant a$. Zwrotna jest także relacja podzielności w zbiorze liczb całkowitych różnych od zera, bo każda liczba całkowita różna od zera jest podzielna przez samą siebie.

Relację $\boldsymbol{S}$ w zbiorze $\boldsymbol{A}$ nazywamy **symetryczną**, jeżeli

$$\bigwedge a, b \in \boldsymbol{A}: aSb \Rightarrow bSa.$$

Innymi słowy, relacja $S \subset A^2$ jest symetryczna, jeżeli dla dowolnych elementów a, b zbioru $\boldsymbol{A}$ stąd, że a spełnia relację $\boldsymbol{S}$ z b, wynika, że i b spełnia tę relację z a.

Relacją symetryczną jest na przykład relacja równoległości prostych; jeżeli prosta k jest równoległa do prostej l, to i prosta l jest równoległa do prostej k. Symetryczną relacją jest również, z analogicznego powodu, relacja prostopadłości prostych. Dalszymi przykładami relacji symetrycznych są relacje przystawania i podobieństwa trójkątów (ogólniej: relacje przystawania i podobieństwa figur geometrycznych).

Gdy o relacji S wiemy, że jest symetryczna, to często zamiast zwrotu: „element a spełnia relację S z elementem b" używamy prostszego zwrotu: „a i b spełniają relację S", nie ma bowiem w tym przypadku potrzeby odróżniania elementu pierwszego od drugiego. Tak więc, korzystając z tego, że relacja równoległości prostych jest symetryczna, mówimy po prostu: proste k i l są równoległe. Z tego samego powodu mówimy wprost, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, podobne itd.

Relację S w zbiorze A nazywamy **przechodnią**, jeżeli

$$\bigwedge a, b, c \in A : aSb \wedge bSc \Rightarrow aSc.$$

Inaczej mówiąc, relacja $S \subset A^2$ jest przechodnia, jeżeli dla dowolnych trzech elementów a, b, c zbioru A stąd, że a spełnia relację S z b i b spełnia relację S z c, wynika, że i a spełnia relację S z c.

Dobrze znanym przykładem relacji przechodniej jest relacja niewiększości w zbiorze liczb rzeczywistych: dla dowolnych liczb a, b, c stąd, że $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, wynika, że $a \leqslant c$. Z analogicznego powodu relacją przechodnią jest również relacja podzielności w zbiorze liczb całkowitych. Przechodnimi są również relacje przystawania i podobieństwa trójkątów (figur geometrycznych).

Nietrudno też o przykłady relacji, które nie są ani zwrotne, ani symetryczne, ani przechodnie. Na przykład w zbiorze liczb rzeczywistych relacją taką jest relacja: $x-y = 1$ (wyjaśnij dlaczego!).

Ćwiczenia

1. Czy relacja prostopadłości prostych jest zwrotna, przechodnia?

2. Narysuj graf dowolnej relacji zwrotnej w zbiorze pięcioelementowym. Spróbuj sformułować ogólnie charakterystyczną własność grafów relacji zwrotnych.

3. Spróbuj sformułować charakterystyczną własność tabelki dowolnej relacji zwrotnej w dowolnym zbiorze skończonym.

4. Narysuj graf dowolnej relacji symetrycznej w zbiorze siedmioelementowym. Sporządź odpowiadającą mu tabelkę. Spróbuj sformułować ogólnie charakterystyczne własności grafów i tabelek relacji symetrycznych.

5. Ile różnych relacji zwrotnych można określić w zbiorze dwuelementowym, trzyelementowym, czteroelementowym?

6. Ile różnych relacji symetrycznych można określić w zbiorze dwuelementowym, trzyelementowym, czteroelementowym?

7. Wiedząc, że zbiór k-elementowy ma 2^k różnych podzbiorów, spróbuj odpowiedzieć na pytanie: Ile w zbiorze n-elementowym można określić różnych relacji zwrotnych, a ile symetrycznych?

8. Narysuj graf dowolnej relacji zwrotnej i symetrycznej w zbiorze sześcioelementowym. Sporządź odpowiadającą mu tabelkę. Spróbuj sformułować ogólnie własności charakterystyczne grafów i tabelek relacji równocześnie zwrotnych i symetrycznych.

9. Ile relacji równocześnie zwrotnych i symetrycznych można określić w zbiorze dwuelementowym, trzyelementowym, czteroelementowym, n-elementowym (por. zad. 7)?

10. Narysuj graf dowolnej relacji przechodniej w zbiorze dziesięcioelementowym. Spróbuj sformułować ogólnie charakterystyczną własność grafów relacji przechodnich.

11. W zbiorze trzyelementowym podaj przykład relacji:

(a) zwrotnej, symetrycznej, lecz nieprzechodniej,

(b) zwrotnej i przechodniej, lecz niesymetrycznej,

(c) symetrycznej i przechodniej, lecz niezwrotnej.

12. Spróbuj wykazać, że relacja równoległości prostych jest przechodnia jedynie pod warunkiem, że umówimy się każdą prostą uważać za równoległą do siebie.

13. Czy relacja podzielności w zbiorze liczb całkowitych jest relacją zwrotną?

14. Dany jest zbiór A. Na jakiej podstawie wiemy, że w zbiorze $P(A)$ relacja zawierania jest zwrotna i przechodnia? Pod jakim warunkiem relacja ta jest także symetryczna?

15. Rozpatrujemy zbiór wszystkich form zdaniowych określonych w danym zbiorze. Czy relacja równoważności form zdaniowych jest w tym zbiorze zwrotna, symetryczna, przechodnia? Jakie spośród tych własności ma relacja wynikania?

16. Oznaczmy przez Δ prostą o równaniu $y = x$. Wykaż, że relacja S w zbiorze liczb rzeczywistych jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \subset S$, a symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy S jest zbiorem symetrycznym względem prostej Δ. Podaj na tej podstawie po dwa przykłady relacji zwrotnych i symetrycznych w zbiorze liczb rzeczywistych.

17. Narysuj na płaszczyźnie zbiory określające następujące relacje w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$|x|+|y| \leqslant 1, \quad |x|+|y| = 2, \quad 1 < x^2+y^2 < 4, \quad xy < -1.$$

Która z tych relacji jest zwrotna, symetryczna, przechodnia?

18. Relacją odwrotną do relacji S w zbiorze A nazywamy relację S^{-1} określoną związkiem: $\bigwedge a, b \in A : aS^{-1}b \Leftrightarrow bSa$. Uzasadnij wzór: $(S^{-1})^{-1} = S$. Wykaż że relacja S jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $S = S^{-1}$.

19. Dla dowolnych relacji S i T w zbiorze A relacje $S \cup T$ i $S \cap T$ nazywamy, odpowiednio, sumą i iloczynem relacji S i T. Spróbuj wykazać, że:

(a) suma i iloczyn relacji symetrycznych są relacjami symetrycznymi,

(b) iloczyn relacji zwrotnych jest relacją zwrotną,

(c) suma relacji, z których co najmniej jedna jest zwrotna, jest relacją zwrotną,

(d) iloczyn relacji przechodnich jest relacją przechodnią,

(e) suma relacji przechodnich może nie być relacją przechodnią.

20. Wykaż, że dla dowolnych relacji S i T w zbiorze A prawdziwe są wzory: $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$, $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$.

§ 4. Relacje równoważnościowe

Niewielką rolę odgrywają w matematyce relacje, które są tylko zwrotne, tylko symetryczne względnie tylko przechodnie. Jeszcze mniej interesujące okazują się relacje, które nie mają żadnej z tych własności. Natomiast relacje mające wszystkie te trzy własności są

tak ważne i tak często pojawiają się w rozważaniach matematycznych, że stwarza to potrzebę nadania im specjalnej nazwy. Stąd następująca definicja:

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy **relacją równoważnościową** lub po prostu **równoważnością.**

Nietrudno o bardzo proste przykłady relacji równoważnościowych.

W zbiorze wszystkich monet polskich znajdujących się aktualnie w obiegu relacja:

»moneta a ma tę samą wartość co moneta b«

jest relacją równoważnościową.

W kolekcji znaczków Marka Kaczmarka relacja:

»znaczek a należy do tej samej serii co znaczek b«

również jest relacją równoważnościową.

W zbiorze wszystkich samochodów znajdujących się jeszcze „na chodzie" relacją równoważnościową jest relacja:

»samochód A jest tej samej marki co samochód B«

(dla uproszczenia pomijamy tu samochody poskładane sposobem domowym z części samochodów wielu marek).

Relacja równoważności form zdaniowych jest przykładem relacji równoważnościowej w zbiorze wszystkich form zdaniowych określonych w ustalonym zbiorze (por. ćw. 15 z § 3).

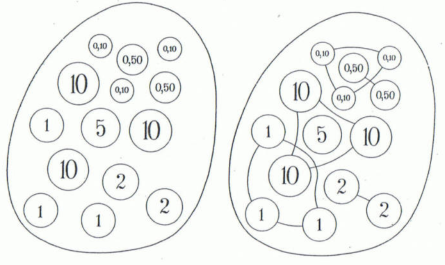
Równanie $n^2 = m^2$ jest relacją równoważnościową w zbiorze liczb całkowitych (spróbuj to uzasadnić).

Relacja równoległości prostych (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) jest relacją równoważnościową, ale dopiero pod warunkiem, że umówimy się uważać każdą prostą za równoległą do siebie samej, bo tylko pod tym warunkiem relacja ta jest zwrotna i przechodnia (por. ćw. 12 z § 3).

Przytoczone przykłady pomogą nam zrozumieć, skąd biorą się nazwy rozważanego tu typu relacji — relacje równoważnościowe, równoważności.

W pierwszym przykładzie, dwie monety spełniające rozpatrywaną relację, na przykład dwie dziesięciogroszówki nie muszą być dosłownie równe, identyczne; wystarczy, że są równe, gdy porównujemy je pod względem ich wartości. Słowem, nie muszą być „te same", wystarczy, że z punktu widzenia ich wartości są „takie same". Jeszcze lepiej widać to na przykładzie dziesięciozłotówek. Są przecież monety dziesięciozłotowe „z Kościuszką", „z Kopernikiem", „z generałem Świerczewskim", „z Marią Skłodowską-Curie" i wiele innych; wszystkie są jednak równoważne, bo przedstawiają tę samą wartość.

Tę zasadniczą różnicę między równością w znaczeniu identyczności a równoważnością ilustrują rysunki 28a i 28b. Na pierwszym z nich przedstawiony został schematycznie stan „kasy" pana Kaczmarka w dniu 8 marca 1971 roku (Dzień Kobiet!). Poszczególne krążki reprezentują (w skali 1:3) poszczególne monety, z których każda spełnia relację równości tylko sama z sobą. Nie ma więc potrzeby,



Rys. 28a Rys. 28b

tak długo jak długo o relację równości chodzi, zaznaczania jakichkolwiek związków między monetami. Inaczej na rysunku drugim. Mamy tu wprawdzie ten sam zbiór monet, tę samą „kasę", ale teraz interesują nas nie same monety a ich wartość. Dlatego też połączyliśmy liniami monety o tych samych wartościach. Nie jest to pełny graf relacji równości co do wartości, ale świadomie zrezygnowaliśmy ze strzałek, podwójnych linii łączących te same monety, linii prowadzących do każdej monety z powrotem do niej samej, ponieważ i tak z góry wiemy, że rozpatrywana przez nas relacja jest zwrotna i syme-

tryczna. Także i w przyszłości takimi właśnie schematycznymi przedstawieniami posługiwać się będziemy w przypadku dowolnych relacji równoważnościowych w zbiorach skończonych.

Podobnie w drugim przykładzie. I tu dwa znaczki spełniające rozpatrywaną relację, na przykład znaczki za 20 gr i 40 gr z serii „Zamki polskie", puszczonej w obieg w marcu 1971 roku, nie są identyczne. (Może masz te znaczki w swojej kolekcji? Pokaż je całej klasie!) Na pierwszym z nich mamy sylwetkę zamku w Chęcinach, na drugim — rysunek zamku w Wiśniczu. (Może wiesz, gdzie te zamki się znajdują? Może miałeś okazję je zwiedzać?) W sensie rozpatrywanej przez nas relacji są to jednak znaczki równoważne. Należą do tej samej serii.

Jeszcze wyraźniej możemy to samo zaobserwować w przykładzie trzecim. Dwa samochody tej samej marki mogą być nawet do siebie zupełnie niepodobne. Mogą przecież różnić się nie tylko kolorem, pojemnością silnika, rokiem produkcji itd., ale na przykład jeden z nich może być już wysłużonym weteranem szos, niemal muzealnym zabytkiem, a drugi ostatnim krzykiem mody samochodowej. Niemniej jednak, tak długo jak długo interesują nas tylko marki samochodów, są to samochody równoważne.

Do podobnych obserwacji prowadzą także i pozostałe przykłady.

Wnioskujemy stąd, że relacje równoważnościowe odgrywać będą w naszych rozważaniach rolę równości, ale nie równości dosłownej, równości w znaczeniu całkowitej identyczności, tylko równości z jakiegoś ściśle określonego punktu widzenia, równości pod jakimś wybranym względem.

Wniosek ten pozwala także inaczej patrzeć na własności zwrotności, symetryczności i przechodniości, jakie według definicji powinna mieć każda relacja równoważnościowa. Są one po prostu uogólnieniami trzech następujących własności równości w sensie identyczności:

(a) każdy przedmiot jest identyczny sam ze sobą,

(b) jeżeli przedmiot A jest identyczny z przedmiotem B, to i przedmiot B jest identyczny z przedmiotem A,

(c) jeżeli przedmiot A jest identyczny z przedmiotem B i przedmiot B jest identyczny z przedmiotem C, to i przedmiot A jest identyczny z przedmiotem C.

Ćwiczenia

1. Narysuj graf dowolnej relacji równoważnościowej w zbiorze sześcioelementowym. Spróbuj ogólnie scharakteryzować własności grafów relacji równoważnościowych. Uprość otrzymany graf sposobem zastosowanym na rysunku 28b.

2. Wykaż, że w zbiorze liczb rzeczywistych relacja S określona związkiem: $\bigwedge a, b \in \boldsymbol{R}: aSb \Leftrightarrow |a| = |b|$, jest relacją równoważnościową.

3. Wykaż, że w zbiorze liczb rzeczywistych relacja S określona związkiem: $\bigwedge a, b \in \boldsymbol{R}: aSb \Leftrightarrow a-b \in \boldsymbol{Z}$, jest relacją równoważnościową. Podaj kilka liczb spełniających tę relację z liczbą $\sqrt{2}$.

4. Wykaż, że w zbiorze liczb rzeczywistych relacja S określona związkiem: $\bigwedge a, b \in \boldsymbol{R}: aSb \Leftrightarrow a-b \in \boldsymbol{Q}$, jest relacją równoważnościową. Podaj kilka liczb spełniających tę relację z liczbą $-\sqrt{2}$.

5. Uzasadnij, dlaczego relacje przystawania i podobieństwa trójkątów są relacjami równowartościowymi w zbiorze wszystkich trójkątów.

6. Rozstrzygnij, które z następujących relacji w zbiorze uczniów Twojej klasy są relacjami równoważnościowymi:

(a) X nosi to samo imię co Y,

(b) X jest wyższy (wyższa) od Y,

(c) X jest uczniem tej samej klasy co Y.

7. Rozstrzygnij, które z następujących relacji w rodzinie Kaczmarków są relacjami równoważnościowymi:

(a) X ma to samo imię co Y,

(b) X czyta te same czasopisma co Y,

(c) X jest młodszy (młodsza) od Y,

(d) X interesuje się czym innym niż Y.

8. Czy w zbiorze wszystkich prostych na płaszczyźnie relacje »prosta l przecina się z prostą k« i »prosta l nie jest równoległa do prostej k« są relacjami równoważnościowymi?

9. Na płaszczyźnie dana jest prosta m. Czy relacja »proste l i k przecinają się w punkcie leżącym na prostej m« jest relacją równoważnościową?

10. Wykaż, że w zbiorze $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ relacja S określona związkiem:

$$\bigwedge m, n, p, q \in \boldsymbol{N}: (m, n)S(p, q) \Leftrightarrow m+q = n+p$$

jest relacją równoważnościową.

11. Wykaż, że w zbiorze $\boldsymbol{Z}\times\{\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}\} = \{(m, n): m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\}$ relacja S określona związkiem

$$\{m, n, p, q \in \boldsymbol{Z}, n, q \neq 0: (m, n)S(p, q) \Leftrightarrow mq = np\}$$

jest relacją równoważnościową.

12. Wykaż, że relacja zwrotna $S \subset A^2$ jest relacją równoważnościową wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge a, b, c \in \boldsymbol{A}: aSb \wedge cSb \Rightarrow aSc.$$

§ 5. Klasyfikacje

By lepiej poznać rolę, jaką w matematyce i jej zastosowaniach odgrywają relacje równoważnościowe, wróćmy jeszcze do przykładów z poprzedniego paragrafu.

Przyjmijmy, dla uproszczenia, że w pierwszym z tych przykładów zamiast zbioru wszystkich monet znajdujących się w tej chwili w obiegu rozpatrujemy zbiór monet znajdujących się w kasie pewnego sklepu w momencie jego zamknięcia. Pani Kaczmarkowa, kasjerka tego sklepu, ustala aktualny stan kasy. Ze zrozumiałych powodów, przed przystąpieniem do liczenia wyodrębnia w osobne zbiory wszystkie dziesięciozłotówki, wszystkie pięciozłotówki itd. Dokonuje w ten sposób podziału zbioru wszystkich znajdujących się w kasie monet na kilka podzbiorów.

Ze sposobu dokonywania tego podziału wynika natychmiast, że:

1) podzbiory te są rozłączne,

2) każda moneta należy do jednego z nich.

Możemy powiedzieć, że pani Kaczmarkowa przeprowadziła klasyfikację monet. Według jakiej zasady? Odpowiedź jest bardzo prosta: według wartości monet. Łatwo przedstawić ten fakt w formie trzeciego warunku, jaki spełnia przeprowadzony przez panią Kaczmarkową podział monet:

3) dwie monety należą do tego samego podzbioru wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą wartość.

Innymi słowy, pani Kaczmarkowa przeprowadziła klasyfikację monet według ich wartości, to znaczy posługując się tą relacją równoważnościową, którą wprowadziliśmy w zbiorze monet w paragrafie poprzednim.

Rzućmy jeszcze raz okiem na rysunek 28b. Ilustruje on podobną operację przeprowadzoną przez pana Kaczmarka, tyle że nie w kasie sklepowej, a w jego kasie prywatnej. Dziesięciozłotówki trzymają się razem — tworzą podzbiór „kasy" pana Kaczmarka. Pięciozłotówka, jedna jedyna — jest elementem zbioru jednoelementowego, itd. W całości „kasa" pana Kaczmarka rozpada się na sześć zbiorów rozłącznych, ale tak, że suma tych podzbiorów jest całą „kasą" pana Kaczmarka. Wiemy też, jaką zasadą posługiwał się pan Kaczmarek przy tej klasyfikacji monet swojej „kasy". Do jednego i tego samego podzbioru zaliczał monety tylko wtedy, gdy miały tę samą wartość.

Od razu widać, że do analogicznej klasyfikacji samochodów prowadzi, w przykładzie trzecim, podział zbioru wszystkich samochodów na podzbiory samochodów jednakowych marek. Zupełnie jak w pierwszym przykładzie, dokonujemy w ten sposób podziału rozpatrywanego zbioru na podzbiory spełniające warunki 1) i 2), z tym że w sformułowaniu tych warunków należy monety zastąpić samochodami. Słowem, dokonujemy w ten sposób klasyfikacji samochodów. I tak jak w pierwszym przykładzie, związek tej klasyfikacji z rozpatrywaną w zbiorze wszystkich samochodów relacją równoważnościową oddaje wprost warunek: dwa samochody należą do tego samego podzbioru wtedy, i tylko wtedy, gdy są tej samej marki, to znaczy wtedy i tylko wtedy gdy spełniają rozpatrywaną relację.

W rozpatrzonych przykładach spełnienie warunków 1) i 2) oznaczało zadośćuczynienie ogólnym zasadom wszelkiej racjonalnej klasyfikacji, a spełnienie warunku 3) — zadośćuczynienie konkretnej zasadzie klasyfikacji jaką w każdym z tych przykładów ustalała konkretna relacja równoważnościowa.

Naturalne jest więc pytanie: czy dla każdej relacji równoważnościowej określonej w jakimś zbiorze możliwe jest dokonanie klasyfikacji elementów tego zbioru podporządkowanej tej relacji?

Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje następująca ogólna konstrukcja wzorowana na postępowaniu, jakie już stosowaliśmy w rozważanych wyżej przykładach.

Niech dana będzie relacja równoważnościowa S w zbiorze A. Dla dowolnego elementu a zbioru A, zbiór

$$\{b \in A: aSb\}$$

nazywamy **klasą równoważności elementu** a i oznaczamy symbolem $[a]$. Innymi słowy, klasą równoważności elementu a nazywamy zbiór wszystkich elementów zbioru A spełniających z a relację S.

Każda klasa równoważności jest podzbiorem zbioru A. Niepustym, bo przecież ze zwrotności relacji S wynika natychmiast, że $a \in [a]$.

Twierdzimy, że dwie różne klasy równoważności są rozłączne. Innymi słowy, twierdzimy, że jeżeli dla dowolnych elementów a, b zbioru A prawdziwa jest nierówność

(1) $$[a] \neq [b],$$

to także prawdziwy jest związek

(2) $$[a] \cap [b] = \emptyset.$$

Istotnie, jeżeli równość (2) nie jest prawdziwa, to istnieje $c \in A$, takie że $c \in [a]$ i $c \in [b]$. Oznacza to, że aSc i cSb. Z przechodniości relacji S wnosimy na tej podstawie, że aSb. Z drugiej strony związek aSb jest równoważny temu, że $[a] = [b]$ (spróbuj to uzasadnić). W ten sposób dochodzimy do sprzeczności z założeniem (1), co oznacza, że z nierówności (1) wynika równość (2).

Wykazaliśmy tym samym następujące

Twierdzenie. *Relacja równoważnościowa* S *w zbiorze* A *dzieli ten zbiór na rozłączne klasy równoważności; każdy element należy do jednej klasy równoważności, a dwa elementy zbioru* A *należą do tej samej klasy równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają relację* S.

Zbiór klas równoważności oznaczamy symbolem A/S i nazywamy **ilorazem zbioru** A **przez relację** S. Symbolicznie

$$A/S = \{[a]: a \in A\}.$$

Udowodnione wyżej twierdzenie można w prosty sposób zilustrować elementarnymi przykładami.

Na przykład rysunek 28b przedstawia graf znanej nam już relacji równoważnościowej w „kasie" pana Kaczmarka. Wyraźnie widać z rysunku jak „kasa" ta rozpada się na sześć rozłącznych podzbiorów, z których jeden (zbiór dziesięciozłotówek) jest zbiorem trzyelementowym, drugi (zbiór pięciozłotówek) — zbiorem jednoelementowym, trzeci (zbiór dwuzłotówek) — zbiorem dwuelementowym, itd. W tym konkretnym przypadku mamy sześć różnych klas równoważności — iloraz „kasy" pana Kaczmarka przez rozpatrywaną relację ma sześć elementów.

Wiemy, już że relacja równoległości prostych jest relacją równoważnościową. Klasa równoważności $[l]$ prostej l jest zbiorem wszystkich prostych równoległych do l. Nazywamy ją kierunkiem prostej l.

Niech m będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Mówimy, że **liczby całkowite k i n są równe modulo m**, jeżeli ich różnica jest podzielna przez m. Piszemy wówczas

$$k = n \ (\mathrm{mod}\ m).$$

Nietrudno sprawdzić, że relacja równości modulo m jest relacją równoważnościową. Dzieli ona zbiór $\boldsymbol{Z}$ liczb całkowitych na m zbiorów rozłącznych:

$$\{\ldots, -m, 0, m, \ldots\}, \quad \{\ldots, -m+1, 1, m+1, \ldots\}, \ldots, \\ \{\ldots, -m-1, -1, m-1, \ldots\}.$$

Pierwszy z nich jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez m, drugi — zbiorem wszystkich liczb całkowitych, dla których reszta z dzielenia przez m jest równa 1, trzeci — zbiorem wszystkich liczb całkowitych, dla których reszta z dzielenia przez m wynosi 2, itd.

Ćwiczenia

1. Uzasadnij szczegółowo, dlaczego relacja równości modulo m jest w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ relacją równoważnościową.

2. Uzasadnij, dlaczego relacja S określona w zbiorze $A = \{a, \ldots, g\}$ zamieszczoną obok tabelką jest relacją równoważnościową. Odczytaj z tabelki klasy równoważności — elementy zbioru A/S.

	a	b	c	d	e	f	g
a	×	×	×				
b	×	×	×				
c	×	×	×				
d				×	×		
e				×	×		
f						×	×
g						×	×

3. Zbiór A jest sumą rozłącznych zbiorów $A_1, \ldots, A_k$. Wykaż, że istnieje relacja równoważnościowa S określona w zbiorze A, taka że $A/S = \{A_1, \ldots, A_k\}$. Ile jest takich relacji?

4. Oblicz, ile relacji równoważnościowych można określić w zbiorze czteroelementowym.

5. Wypisz klasy równoważności relacji równoważnościowej określonej w zbiorze $\{1, \ldots, 13\}$ grafem (rys. 27).

6. Dla relacji równości modulo m w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ wykaż twierdzenie: $\bigwedge p, q, r, s \in \boldsymbol{Z}: p = q \ (\mathrm{mod}\ m),\ r = s \ (\mathrm{mod}\ m) \Rightarrow p+r = q+s \ (\mathrm{mod}\ m),\ pr = qs \ (\mathrm{mod}\ m)$.

7. Relacja S określona w zbiorze liczb rzeczywistych umową: $aSb \Leftrightarrow a-b \in \boldsymbol{Z}$ jest relacją równoważnościową. Znajdź klasy równoważności liczb 1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\sqrt{2}-3$.

8. Spróbuj w zbiorze $\boldsymbol{Z}$ rozwiązać równania:

$$3n = 4 \ (\mathrm{mod}\ 7), \quad n^2 = 1 \ (\mathrm{mod}\ 5), \quad n^2 = 3 \ (\mathrm{mod}\ 5).$$

9. A jest dowolnym zbiorem skończonym. W zbiorze $P(A)$ wprowadzamy relację S umawiając się, że spełniają ją te i tylko te podzbiory zbioru A, które mają tę samą ilość elementów. Jest to relacja równoważnościowa (podaj uzasadnienie!). Czym są klasy równoważności? Ile ich jest?

10. W zbiorze sześcioelementowym określamy relację równoważnościową w ten sposób, że otrzymujemy trzy klasy równoważności. Na ile sposobów możemy to zrobić?

§ 6. Relacje częściowo porządkujące i porządkujące

Układając z początkiem roku szkolnego katalog uczniów naszej klasy wprowadzamy w spisie nazwisk naszych koleżanek i kolegów pewien porządek. Według dobrze znanej nam reguły decydujemy, że w katalogu Kaczmarek winien być zapisany wcześniej niż Kowalski, Kowalski wcześniej niż Matusiak, Matusiak wcześniej niż Wołkowska itd. Innymi słowy, dla dowolnych dwóch nazwisk ustalamy, które z nich ma wcześniej znaleźć się w katalogu. Uporządkowanie, jakie w ten sposób wprowadzamy w zbiorze nazwisk uczniów naszej klasy (prościej choć mniej ściśle: w zbiorze uczniów naszej klasy), wiąże się w naturalny sposób z relacją „poprzedzania". Słowem, wprowadzenie porządku w zbiorze nazwisk uczniów naszej klasy odpowiada wprowadzeniu w tym zbiorze odpowiedniej relacji.

Na lekcji gimnastyki klasa nasza ustawia się w szereg, według wzrostu. Kowalski stoi przed Kaczmarkiem, Kaczmarek przed Matusiakiem, itd. W zbiorze uczniów naszej klasy wprowadzamy w ten sposób inne niż poprzednio uporządkowanie. I tu kryje się za tym postępowaniem określona relacja: Kowalski jest wyższy od Kaczmarka, Kaczmarek jest wyższy od Matusiaka, itd. Słowem, relacją tą jest relacja: X jest wyższy od Y.

To naturalne powiązanie uporządkowań zbiorów z relacjami znajduje w matematyce ścisłe ujęcie w postaci pojęcia relacji częściowo porządkujących i porządkujących.

Przy wprowadzaniu tych pojęć przyda nam się następująca prosta definicja:

Relację S w zbiorze A nazywamy **antysymetryczną**, jeżeli

$$\bigwedge a, b \in A: aSb \wedge bSa \Rightarrow a = b.$$

Innymi słowy, umawiamy się relację $S \subset A^2$ nazywać antysymetryczną, jeżeli jedynymi elementami zbioru A spełniającymi tę relację w obu możliwych wariantach, to znaczy tak, że aSb i bSa, są elementy jednakowe, identyczne.

Klasycznym przykładem relacji antysymetrycznej jest relacja zawierania; dla dowolnych zbiorów A i B, stąd, że $A \subset B$ i $B \subset A$ wynika przecież, na podstawie samej definicji równości zbiorów, że $A = B$.

Relację S w zbiorze A, która jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna nazywamy **relacją częściowego porządku** w zbiorze A względnie **relacją częściowo porządkującą** zbiór A.

O przykłady relacji częściowo porządkujących nietrudno. Dla dowolnego zbioru A, taką właśnie relacją w zbiorze $P(A)$ jest relacja zawierania.

Podobnie, relacją częściowo porządkującą w zbiorze liczb całkowitych dodatnich jest relacja podzielności.

Na przykładzie relacji zawierania łatwo wyjaśnić pochodzenie nazwy „relacja częściowo porządkująca". Jeżeli bowiem zbiór A ma co najmniej dwa elementy, to łatwo wskazać dwa jego podzbiory

które w tej relacji są „nieporównywalne". Wystarczy w tym celu wybrać dwa różne elementy a, b zbioru A i wziąć jednoelementowe zbiory $\{a\}$ i $\{b\}$.

Bardzo ważną rolę w matematyce i jej zastosowaniach odgrywają zbiory częściowo uporządkowane, w których dowolne dwa elementy są „porównywalne". Relacje częściowo porządkujące tego typu nazywamy relacjami porządkującymi. Oto ścisła ich definicja:

Relację S częściowo porządkującą zbiór A nazywamy **relacją porządkującą (relacją porządku),** jeżeli

$$\bigwedge a, b \in A: aSb \vee bSa,$$

to znaczy jeżeli dla dowolnych dwóch elementów a, b zbioru A albo a spełnia relację S z b, albo b spełnia tę relację z a.

W zbiorze liczb rzeczywistych relacją porządkującą jest na przykład relacja niewiększości, jest to bowiem relacja zwrotna, przechodnia, antysymetryczna a ponadto dwie dowolne liczby rzeczywiste są w tej relacji porównywalne: bądź pierwsza z nich jest nie większa od drugiej, bądź druga nie większa od pierwszej.

Prasa sportowa donosiła kiedyś, że w XIII Zimowej Spartakiadzie Armii Zaprzyjaźnionych rozegranej w Zakopanem w początku roku 1971 punktacja medalowa przedstawiała się następująco:

	złote	srebrne	brązowe
1. Polska	13	9	5
2. ZSRR	7	7	2
3. NRD	2	1	3
4. CSRS	—	3	8
5. Rumunia	—	2	4

Spróbuj wyjaśnić, dlaczego w tej klasyfikacji reprezentacja CSRS znalazła się, pomimo zdobycia jedenastu medali, za reprezentacją NRD. Spróbuj sformułować ogólne zasady takiej klasyfikacji. Porównaj tę zasadę z zasadą porządkowania nazwisk uczniów Twojej klasy (Kowal przed Kowalskim, Kowalski przed Matusiakiem, Kaczmarek przed Kowalskim i Matusiakiem, itp.).

Ćwiczenia

1. Uzasadnij, dlaczego w zbiorze liczb całkowitych relacja podzielności nie jest relacją częściowego porządku.

2. Na płaszczyźnie wprowadzamy ustalony układ współrzędnych. Wprowadzamy relację nierówności $\leqslant$ w następujący sposób: piszemy $(a, b) \leqslant (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leqslant c$ i $b \leqslant d$. Wykaż, że jest to relacja częściowego porządku. Wskaż dwa punkty płaszczyzny, które są w tej relacji nieporównywalne.

3. Na płaszczyźnie wprowadzamy relację niewiększości według następującego wzoru: piszemy $(a, b) \leqslant (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g < c$ lub $a = c$ i $b \leqslant d$. Wykaż, że jest to relacja porządkująca. Wskaż na rysunku zbiór wszystkich punktów spełniających tę relację z punktem $(1, 2)$.

4. Według jakiej zasady uporządkowane są hasła w słownikach, encyklopediach?

5. W zbiorze ośmioelementowym narysuj graf dowolnej relacji porządkującej. Spróbuj sformułować charakterystyczną własność grafów relacji porządkujących w dowolnym zbiorze skończonym.

6. Na ile sposobów można uporządkować zbiór trzyelementowy? Innymi słowy, ile można w zbiorze trzyelementowym wprowadzić relacji porządkujących?

SPIS TREŚCI