Zadanie 3

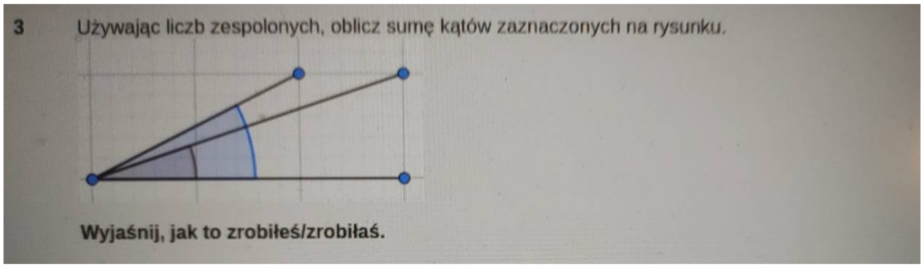


Figure 1: Zadanie 3

Oznaczmy obydwa kąty jako α oraz β. Niech α będzie mniejszym z kątów. Dodatkowo, mamy cztery punkty, O (początek układu współrzędnych), A, B oraz C. Przekształcamy rysunek na:

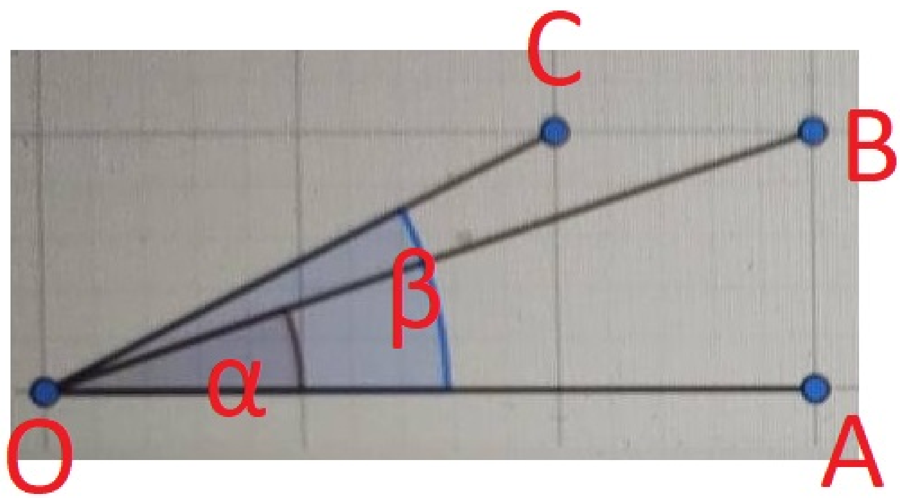


Figure 2: Zadanie 3 - przekształcenie

Zamierzamy działać w doktrynie liczb zespolonych. Zauważamy, że mamy siatkę współrzędnych na podstawie której możemy wyliczyć współrzędne punktów A, B oraz C. Nie mamy jednostek, ale ze względu na podobieństwo trójkątów nie jest to istotne - zatem możemy przypisać punktom następujące współrzędne:

$$A = (3, 0),$$
$$B = (3, 1),$$
$$C = (2, 1).$$

Ponieważ chcemy rozwiązać problem w dziedzinie liczb zespolonych, to przypiszemy punktom odpowiednie liczby zespolone:

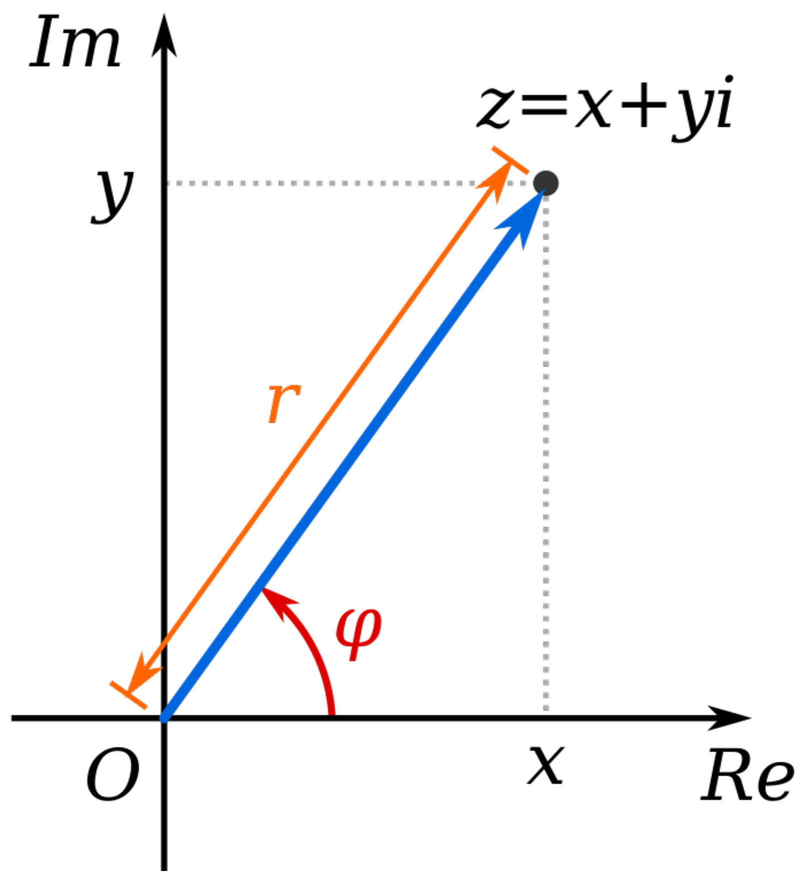
$$A = 3$$
$$B = 3 + i$$
$$C = 2 + i$$

(zgodnie z konwencją, że współrzędne (x, y) odpowiadają liczbie $z = x + iy$).

Liczby zespolone mogą być reprezentowane na dwa sposoby. Pierwszy z nich to przedstawiony wyżej $z = x + iy$, czyli współrzędne kartezjańskie. Drugi z nich to współrzędne biegunowe, gdzie liczba zespolona jest reprezentowana jako $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdzie r to odległość od początku układu współrzędnych, a θ to kąt między osią rzeczywistą a wektorem łączącym punkt z początkiem układu współrzędnych. Współrzędne biegunowe mogą być również zwinięte do wyrażenia

$$z = r\exp\phi$$

.



Jeśli szukamy kąta między dwiema liczbami zespolonymi, to możemy skorzystać z wyrażenia:

$$\cos\theta = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|},$$

gdzie operator $\Re$ oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej, a $\overline{z}$ to sprzężenie liczby zespolonej (czyli zastąpienie $x + iy$ wyrażeniem $x - iy$).

Szukamy kąta α, tj. kąta między A oraz B.

W naszym przypadku, mamy:

$$z_1 = A = 3,$$
$$z_2 = B = 3 + i.$$

Obliczamy iloczyn $z_1 \cdot \overline{z_2}$:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 \cdot (3 - i) = 9 - 3i.$$

Obliczamy wartości bezwzględne:

$$|z_1| = |3| = 3,$$
$$|z_2| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Obliczamy wartość cosinusa kąta α:

$$\cos\alpha = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Zatem:

$$\alpha = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18.43^\circ.$$

Analogicznie obliczamy kąt β:

$$z_1 = A = 3,$$
$$z_2 = C = 2 + i.$$

Obliczamy iloczyn $z_1 \cdot \overline{z_2}$:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 \cdot (2 - i) = 6 - 3i.$$

Obliczamy wartości bezwzględne:

$$|z_1| = |3| = 3,$$

$$|z_2| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Obliczamy wartość cosinusa kąta β:

$$\cos\beta = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Zatem:

$$\beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 26.57^\circ.$$

Odpowiedź:

$$\alpha = 18.43^\circ,$$
$$\beta = 26.57^\circ.$$

$$\alpha + \beta \approx 45^\circ.$$

(zadanie można wykonać jeszcze inaczej, konstruując punkt D będący zbudowany o przekręcenie punktu C względem punktu A o α, a następnie obliczając kąt dla liczby zespolonej D).