Zadanie 1. Udowodnij tożsamości zbiorów

i) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

ii) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$,

iii) $A \dot{-} \emptyset = A$,

iv) $A \dot{-} A = \emptyset$,

v) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$,

vi) $(A \dot{-} B) \cap C = (A \cap C) \dot{-} (B \cap C)$,

vii) $A' \dot{-} B' = A \dot{-} B$,

viii) $(A \dot{-} B) \dot{-} B = A$.

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$

$$A \dot{-} B = \emptyset \Leftrightarrow A = B.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że zbiory A i B sa zapisane (w nieuporządkowany sposób) w listach tak, że elementy się nie powtarzają. Znajdź algorytmy zwracające sumę, przecięcie i różnice zbiorów A i B, w listach tak, że elementy się nie powtarzają.
Odp. (Python 3.7)

```python
def suma(A,B):
    C=A.copy()
    for x in B:
        if (x not in A):
        C.append(x)
    return C


def przeciecie(A,B):
    C=[]
    for x in A:
        if x in B:
            C.append(x)
    return C

def roznica(A,B):
    C=[]
```

```
    for x in A:
        if x not in B:
            C.append(x)
    return C
```

Zadanie 4. Niech $X_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} m = kn\}$. Oblicz

i) $(X_2' \setminus X_6)' \cap X_3$,

ii) $(X_6 \setminus X_3) \setminus X_2$,

iii) $(X_2 \cap X_3) \setminus X_6$.

Odp. $X_6, \emptyset, \emptyset$

Zadanie 5. Niech

$$P(x) = „(2|x) \vee (3|x)"$$

$$Q(x) = „x \text{ jest liczbą pierwszą}"$$

Dla $A = \{1, \ldots, 10\}$ oblicz zbiory

i) $\{x \in A \mid \neg P(x)\}, \{x \in A \mid \neg Q(x)\}$,

ii) $\{x \in A \mid P(x) \wedge Q(x)\}$,

iii) $\{x \in A \mid P(x) \vee Q(x)\}$,

iv) $\{x \in A \mid P(x) \rightarrow Q(x)\}$,

v) $\{x \in A \mid P(x) \leftrightarrow Q(x)\}$.

Odp.

i) $\{1, 5, 7\}, \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$,

ii) $\{2, 3\}$,

iii) $A \setminus \{1\}$,

iv) $\{1, 2, 3, 5, 7\}$,

v) $\{1, 2, 3\}$.

Zadanie 6. Wykaż, że zachodzą równoważności i wynikania

i) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subset B$,

ii) $A \cup B = B \leftrightarrow A \subset B$.

iii) $A \subset B, C \subset D \rightarrow A \cap C \subset B \cap D$,

iv) $A \subset B, C \subset D \rightarrow A \cup C \subset B \cup D$.

Zadanie 7. Podaj przykład zbiorów, dla których nie zachodzi równość

$$(A \setminus B) \cup C = A \cup (B \cap C).$$

Odp. $A = B = \emptyset, C = \{1\}$

Zadanie 8. Uporządkuj zbiory A, B, C według inkluzji:

i) $A =$ czworokąty, $B =$ kwadraty, $C =$ prostokąty,

ii) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2|x\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12|x\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4|x\}$,

iii) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x-3| < 2\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 6x + 5 < 0\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 9\}$.

Odp.

i) $B \subset C \subset A$,

ii) $B \subset C \subset A$,

iii) $C \subset A = B$.

Zadanie 9. Znajdź zdanie w języku logiki pierwszego rzędu spełnione dokładnie w strukturach z

i) jednym elementem,

ii) co najmniej dwoma różnymi elementami,

iii) dokładnie dwoma elementami,

iv) co najmniej trzema parami różnymi elementami,

v) co najmniej n parami różnymi elementami,

vi) dokładnie n parami różnymi elementami.

Odp.

i) $\exists x \forall y \; x = y$,

ii) $\exists x \exists y\ x \neq y$,

iii) $\exists x \exists y\ (x \neq y) \wedge (\forall z\ (x = z) \vee (y = z))$,

iv) $\exists x \exists y \exists z\ (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)$,

v) $\lambda_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n\ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$,

vi) $\lambda_n \wedge \neg \lambda_{n+1}$.

Zadanie 10. Wykaż, że następujące formuły są tautologiami

i) $(\exists y\ p(y) \to \forall z\ q(z)) \to \forall y \forall z\ (p(y) \to q(z))$,

ii) $(\forall x \exists y\ r(x,y) \to \exists x \forall y\ r(y,x)) \to \exists x \forall y\ (r(x,y) \to r(y,x))$,

iii) $\forall x \exists y\ ((p(x) \to q(y)) \to r(y)) \to ((\forall x\ p(x) \to \forall y\ q(y)) \to \exists y\ r(y))$,

iv) $\forall x\ (p(x) \to \exists y\ q(y)) \to \exists y (\exists x\ p(x) \to q(y))$.

Odp.

i) Niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolną strukturą. Formuła jest zdaniem, więc nie zależy od wartościowania ρ. Jeśli $\mathfrak{A} \not\models (\exists y\ p(y) \to \forall z\ q(z))$, to

$$\mathfrak{A} \models (\exists y\ p(y) \to \forall z\ q(z)) \to \forall y \forall z\ (p(y) \to q(z)).$$

Przypuśćmy, że $\mathfrak{A} \models (\exists y\ p(y) \to \forall z\ q(z))$. Oznacza, to że $\mathfrak{A} \not\models (\exists y\ p(y))$ lub $\mathfrak{A} \models (\forall z\ q(z))$. Pierwszy warunek jest równoważny $\mathfrak{A} \models (\forall y\ \neg p(y))$. W obu przypadkach $\mathfrak{A} \models \forall y \forall z\ (p(y) \to q(z))$, skąd

$$\mathfrak{A} \models (\exists y\ p(y) \to \forall z\ q(z)) \to \forall y \forall z\ (p(y) \to q(z)).$$

Formuła jest spełniona w dowolnej strukturze $\mathfrak{A}$, zatem jest tautologią.

Zadanie 11. Sprowadź formuły do postaci preneksowej normalnej.

i) $\exists x\ (\neg((\exists y\ p(x,y)) \to (\exists z\ q(z) \to r(x))))$,

ii) $\forall x \forall y\ (\exists z\ p(x,y,z) \wedge (\exists u\ q(x,u) \to \exists v\ q(y,v)))$.

Odp.

i) $\exists x\ (\neg((\exists y\ p(x,y)) \to (\exists z\ q(z) \to r(x)))) \equiv \exists x\ \ ((\exists y p(x,y)) \wedge (\forall z\ q(z) \wedge \neg r(x))) \equiv$
$\equiv \exists x \forall z\ \ ((\exists y p(x,y)) \wedge q(z) \wedge \neg r(x)) \equiv \exists x \forall z \exists y\ \ (p(x,y) \wedge q(z) \wedge \neg r(x))$,

ii) $\forall x \forall y\ (\exists z\ p(x,y,z) \wedge (\exists u\ q(x,u) \rightarrow \exists v\ q(y,v))) \equiv \forall x \forall y \exists z\ (p(x,y,z) \wedge ((\forall u\ \neg q(x,u)) \vee (\exists v\ q(y,v)))) \equiv \forall x \forall y \exists z \forall u \exists v\ (p(x,y,z) \wedge (\neg q(x,u) \vee q(y,v)))$.

Zadanie 12. Niech sygnatura Σ składa się z symboli zmiennych x, y, z symboli funkcyjnych f, g jednoragumetowych, symbolu relacyjnego r dwuargumentowego i symbolu s trzyargumentowego. Która z formuł

i) $r(x,y) \vee r(y,x)$,

ii) $r(x,y) \wedge r(y,x)$,

iii) $s(x,y,z) \vee s(y,z,x) \vee s(z,x,y)$,

iv) $\forall x\ (r(x,x) \rightarrow r(g(x), g(x))$,

v) $\forall x \exists y\ r(x,y)$,

vi) $\exists y \forall x\ r(x,y)$,

vii) $\exists x \forall y\ r(x,y)$,

viii) $\forall x \forall y\ (y = f(x) \rightarrow s(y,y,x))$,

ix) $\forall x \forall y\ (y = f(x) \leftrightarrow s(y,y,x))$,

x) $\forall y \exists x\ (y = f(x))$,

xi) $\forall y \exists x\ (y = g(x))$,

xii) $\forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$,

xiii) $\forall x \forall y\ (g(x) = g(y) \rightarrow x = y)$,

xiv) $\exists x\ r(x, f(f(x)))$,

xv) $\forall x\ r(x, f(f(x)))$,

xvi) $\forall x\ r(x, f(f(f(x))))$,

xvii) $(\forall x \forall y\ (r(x,y) \rightarrow r(y,x))) \rightarrow \exists x\ s(x,x,x)$,

xviii) $\forall x \forall y\ \left((\exists z\ (r(x,z) \wedge r(z,y))) \rightarrow r(x,y)\right)$,

xix) $[\forall x \forall y\ \left((\exists z\ (r(x,z) \wedge r(z,y))) \rightarrow r(x,y)\right)] \rightarrow \forall x \exists y\ s(x,x,y)$.

jest spełniona w strukturze $\mathfrak{A}$, gdzie $A = \{1, 2, 3\}$ przy wartościowaniu

$$\rho(x) = 3, \quad \rho(y) = \rho(z) = 2,$$

jeśli

$$f^{\mathfrak{A}}(1) = 3, \quad f^{\mathfrak{A}}(2) = 1, \quad f^{\mathfrak{A}}(3) = 2$$
$$g^{\mathfrak{A}}(1) = 3, \quad g^{\mathfrak{A}}(2) = 1, \quad g^{\mathfrak{A}}(3) = 1$$
$$r^{\mathfrak{A}} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3)\}.$$
$$s^{\mathfrak{A}} = \{(3,3,1), (1,1,2), (2,2,3), (1,1,1)\}.$$

Odp. i) tak ii) nie iii) tak iv) tak v) tak vi) tak vii) nie viii) tak ix) nie x) tak xi) nie xii) tak xiii) nie xiv) tak xv) nie xvi) tak xvii) tak xviii) tak xix) tak