Zadanie Programowania Liniowego
(postać standardowa)

Polega na znalezieniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n)^T$ maksymalizujących funkcję celu

$$\max_{\mathbf{x}} x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

gdzie c_j, a_{ij}, b_i znane współczynniki oraz $m < n$

Zapis wektorowy

$$\max_{\mathbf{x}} x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

gdzie

- $\mathbf{c} = (c_1, c_2,..., c_n)^T$
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2,..., b_m)^T$
- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ – macierz ograniczeń m x n

Inne równoważne postaci zadania PL

- "min" zamiast "max" w funkcji celu
- znaki "≥'' lub "≤'' zamiast "='' w ograniczeniach
- zmienne decyzyjne x_j nieograniczone lub ograniczone dowolnymi wartościami od dołu i/lub od góry

Reguły równoważnych przekształceń

- zamiana rodzaju ekstremów

$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} = -(\max -\mathbf{c}^T\mathbf{x})$$

- zamiana ograniczeń nierównościowych na równościowe

wprowadzenie zmiennej dopełniającej x_d

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} \le b \;\Rightarrow\; \mathbf{a}^T\mathbf{x} + x_d = b, \quad x_d \ge 0$$

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} \ge b \;\Rightarrow\; \mathbf{a}^T\mathbf{x} - x_d = b, \quad x_d \ge 0$$

- zamiana ograniczeń równościowych na nierównościowe

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \;\Rightarrow\; \mathbf{a}^T\mathbf{x} \le b \text{ i } \mathbf{a}^T\mathbf{x} \ge b$$

- zamiana zmiennych nieograniczonych na zmienne nieujemne

wprowadzenie par zmiennych x_j^+, x_j^- i podstawienie

$$x_j := x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+ \ge 0 \text{ i } x_j^- \ge 0$$

Przykład

Firma wytwarza dwa rodzaje farb – do malowania wnętrz (W) i na zewnątrz (Z). Do produkcji tych farb niezbędne są dwa podstawowe składniki A i B. Maksymalne dzienne zapasy tych składników wynoszą odpowiednio 6 i 8 kg, natomiast ich zużycie na 1 tonę farby jest następujące:

Składniki	Zużycie składników (w kg)	
	farba *W*	farba *Z*
A	2	1
B	1	2

Badania rynkowe pokazały, że dzienny zbyt na farbę W nigdy nie przekracza 2 ton i nie jest wyższy od zbytu na farbę Z o więcej niż 1 tonę. Zysk ze sprzedaży 1 tony farby W wynosi 20 tys. zł, a farby Z 30 tys. zł.

Należy określić dzienne wielkości produkcji farb W i Z przynoszące największy łączny zysk.

Model Programowania Liniowego

- zmienne decyzyjne

  x_W – dzienna wielkość produkcji farby *W* (w tonach)
  x_Z – dzienna wielkość produkcji farby *Z* (w tonach)

- funkcja celu

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z$$

- ograniczenia

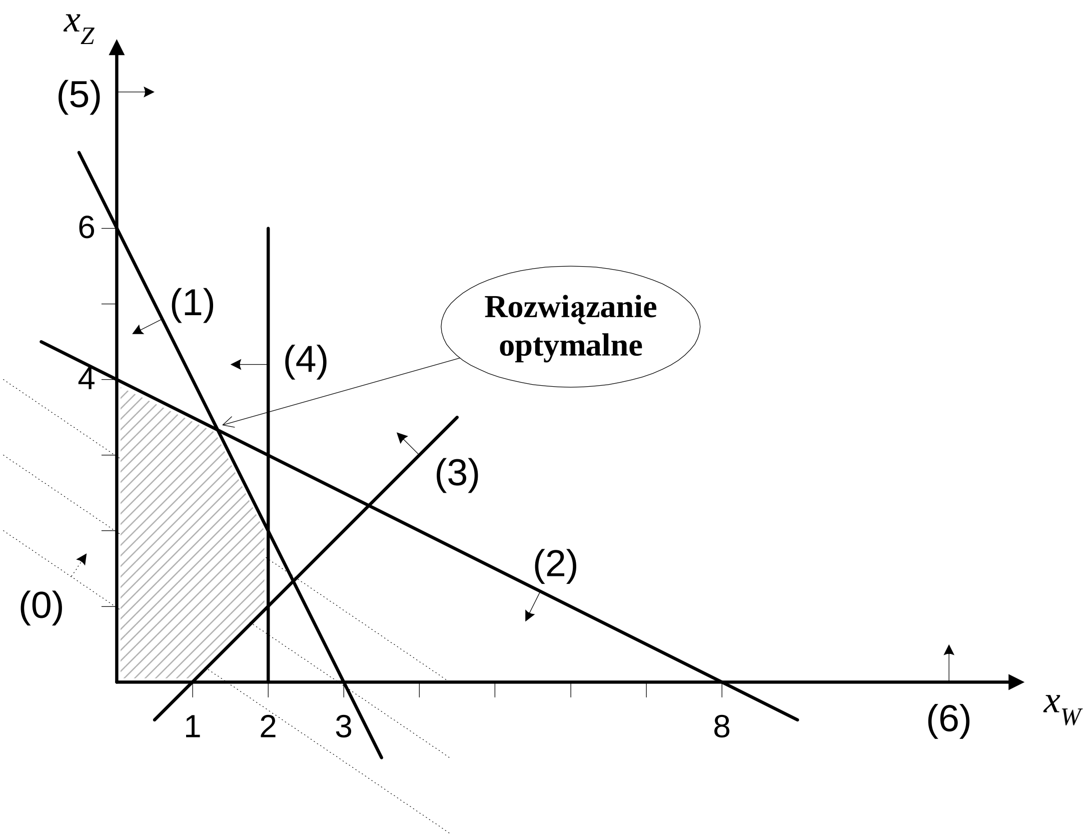
$$\begin{aligned} 2x_W + x_Z &\le 6 \\ x_W + 2x_Z &\le 8 \\ x_W - x_Z &\le 1 \\ x_W &\le 2 \\ x_W \ge 0,\ x_Z &\ge 0 \end{aligned}$$

Interpretacja graficzna zadania PL

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z \qquad (0)$$

przy ograniczeniach

$$2x_W + x_Z \le 6 \qquad (1)$$
$$x_W + 2x_Z \le 8 \qquad (2)$$
$$x_W - x_Z \le 1 \qquad (3)$$
$$x_W \le 2 \qquad (4)$$
$$x_W \ge 0 \qquad (5)$$
$$x_Z \ge 0 \qquad (6)$$



Rozwiązanie optymalne:

$x_W^* = 1\,^1/_3$, $x_Z^* = 3\,^1/_3$, $x_0^* = 126\,^2/_3$

Analiza parametryczna

$\max x_0 = cx_W + 30x_Z$ c – parametr

przy ograniczeniach

$$
\begin{aligned}
2x_W + x_Z &\le 6 \\
x_W + 2x_Z &\le 8 \\
x_W - x_Z &\le 1 \\
x_W &\le 2 \\
x_W \ge 0,\ x_Z &\ge 0
\end{aligned}
$$

wartość *c*	**rozwiązanie optymalne**	**optymalna wartość f. celu**
(-∞, 15]	x_W=0, x_Z=4	120
[15, 60]	$x_W=1^1/_3$, $x_Z=3^1/_3$	$1^1/_3\, c + 100$
[60, ∞)	x_W=2, x_Z=2	$2c + 60$

Analiza parametryczna

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z$$

przy ograniczeniach

$$2x_W + x_Z \le b \qquad\qquad b \text{ – parametr}$$
$$x_W + 2x_Z \le 8$$
$$x_W - x_Z \le 1$$
$$x_W \le 2$$
$$x_W \ge 0,\ x_Z \ge 0$$

wartość *b*	**rozwiązanie optymalne**	**wartość f. celu**
(-∞, 0]	–	–
[0, 4]	x_W=0, x_Z=b	30b
[4, 7]	x_W=(2b-8)/3, x_Z=(-b+16)/3	(10b + 320)/3
[7, ∞)	x_W=2, x_Z=3	130

Przypadki w Programowaniu Liniowym

- zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty (ograniczenia są sprzeczne) – *brak rozwiązań*
- zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niepusty oraz funkcja celu jest ograniczona od góry (dla problemu maksymalizacji) – *istnieje co najmniej jedno rozwiązanie optymalne w punkcie wierzchołkowym*
- funkcja celu jest nieograniczona z góry na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych – *zadanie jest nieograniczone, brak skończonego rozwiązania optymalnego*

Wniosek

Rozwiązań optymalnych zadania PL można szukać wśród punktów wierzchołkowych (dopuszczalnych rozwiązań bazowych)

Ogólna idea algorytmu sympleks

1. Wyznacz początkowy punkt wierzchołkowy (początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe)
2. Test optymalności – czy rozwiązanie gorsze od sąsiednich ? Jeżeli nie, to STOP – znaleziono rozwiązanie optymalne, jeżeli tak idź do 3.
3. Przejdź do sąsiedniego punktu wierzchołkowego, dającego lepszą wartość funkcji celu. Idź do 2.

Szczegółowe elementy algorytmu sympleks

- wyznaczanie początkowego rozwiązania bazowego
- warunki optymalności rozwiązania bazowego
- wykrywanie niedopuszczalności i nieograniczoności
- sposób przechodzenia z bazy do bazy
- postępowanie w przypadku degeneracji

Początkowe rozwiązanie bazowe

ZPL

$$\max_{\mathbf{x}} x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

• Metoda kar

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{x}_S} x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - M\mathbf{1}^T\mathbf{x}_S$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ix}_S = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_S \geq \mathbf{0}$$

• Metoda dwufazowa

1. faza - wyznaczenie dopuszczalnego rozwiązania bazowego

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{x}_S} z_0 = -\mathbf{1}^T\mathbf{x}_S$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ix}_S = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_S \geq \mathbf{0}$$

2. faza - algorytm sympleks

Dualność

Zadanie pierwotne	Zadanie dualne

Zadanie pierwotne		Zadanie dualne
$\max\limits_{\mathbf{x}} x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\Rightarrow$	$\min\limits_{\mathbf{v}} v_0 = \mathbf{b}^T \mathbf{v}$ $\mathbf{A}^T \mathbf{v} \geq \mathbf{c}$ $\mathbf{v} - \textit{nieograniczone}$
$\min\limits_{\mathbf{x}} x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\Rightarrow$	$\max\limits_{\mathbf{v}} v_0 = \mathbf{b}^T \mathbf{v}$ $\mathbf{A}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{c}$ $\mathbf{v} - \textit{nieograniczone}$

$$\begin{array}{lcl} \max\limits_{\mathbf{x}} x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} & & \min\limits_{\mathbf{v}} v_0 = \mathbf{b}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{A}\ \mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \Leftrightarrow & \mathbf{A}^T \mathbf{v} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & & \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Przykład – zadanie dualne do modelu PL problemu produkcji farb

$$\min v_0 = 6v_1 + 8v_2 + v_3 + 2v_4$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} 2v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &\geq 20 \\ v_1 + 2v_2 - v_3 &\geq 30 \\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0,\ v_3 &\geq 0,\ v_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie optymalne:

$v_1^* = 3^1/_3$, $v_2^* = 13^1/_3$, $v_3^* = 0$, $v_4^* = 0$

$v_0^* = 126^2/_3$

Właściwości zadań dualnych

Między zadaniem pierwotnym a zadaniem dualnym zachodzi dokładnie jeden z następujących związków:

- oba zadania mają skończone rozwiązania optymalne. Wtedy $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \min \mathbf{b}^T\mathbf{v}$,
- jedno z zadań jest niedopuszczalne, a drugie nieograniczone,
- oba zadania są niedopuszczalne.

Jeżeli

x - dowolne rozwiązanie dopuszczalne problemu pierwotnego

v - dowolne rozwiązanie dopuszczalne problemu dualnego

to

$$\boxed{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{v}}$$

Zadaniem dualnym do dualnego jest zadanie pierwotne

Związki między optymalnymi rozwiązaniami zadania pierwotnego i dualnego

Niech
$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ – optymalne rozw. zadania pierwotnego
$\mathbf{v}^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*)^T$ – optymalne rozw. zadania dualnego
$\mathbf{B}^*$ – baza dla optymalnego rozwiązania zadania pierwotnego

- $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{v}^*$
- $\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{*\,-1}\mathbf{b}$, $\quad \mathbf{v}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{*\,-1}$
- **Warunek komplementarności**

$$v_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0 \qquad i = 1,\dots,m$$

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i^* - c_j\right) = 0 \qquad j = 1,\dots,n$$