Wykład 2

Twierdzenie 2.1 *Dla dowolnych liczb zespolonych z i s zachodzą wzory:*
a) $Re(z+s) = Re(z) + Re(s)$, $Im(z+s) = Im(z) + Im(s)$, $\overline{z+s} = \overline{z} + \overline{s}$.
b) $\overline{z \cdot s} = \overline{z} \cdot \overline{s}$, $|z \cdot s| = |z| \cdot |s|$, $Arg(z \cdot s) = Arg(z) + Arg(s)$.
c) $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) = rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$

Twierdzenie 2.2 *wzory de Moivre'a*
$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Definicja 2.3 *Pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1 nazywamy taką liczbę zespoloną z, że $z^n = 1$ ale dla każdego $1 \leq m < n$, $z^m \neq 1$.*

Przykład 2.4 *Pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1 jest na przykład*
$\varepsilon_n = (\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})$

Twierdzenie 2.5 *Jeżeli $a \neq 0$ to równanie $x^n = a$ ma w liczbach zespolonych dokładnie n różnych rozwiązań różniących się o potęgę pierwiastka pierwotnego z 1. Dokładniej: jeżeli $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ to rozwiązania równania $x^n = a$ są postaci $x_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n})\varepsilon_n^k$*

Twierdzenie 2.6 $|z|^2 = z\overline{z}$.

Algorytm rozwiązywania równań stopnia 2 :
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\sqrt{\Delta}$ dowolne rozwiązanie równania $x^2 = \Delta$
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Przykład 2.7 $y^3 + py + q = 0$
gdzie współczynniki p,q są liczbami zespolonymi. Określmy jego wyróżnik jako
$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.
Wówczas
$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}}$

Twierdzenie 2.8 (Zasadnicze twierdzenie Algebry) *Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych stopnia ≥ 1 ma pierwiastek.*

Bez dowodu

Twierdzenie 2.9 *Wielomiany nad ciałem można dzielić z resztą.*

Twierdzenie 2.10 (Bezoute'a.) *Liczba z jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy wielomian $(x - z)$ dzieli $w(x)$*

Twierdzenie 2.11 *Wielomiany o współczynnikach zespolonych rozkładają się na iloczyn wielomianów stopnia 1.*

Twierdzenie 2.12 *Wielomiany o współczynnikach rzeczywistych rozkładają się na iloczyn wielomianów stopnia ≤ 2.*

Przykład 2.13 $x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$

Przestrzenie liniowe.

Definicja 2.14 *Niech K będzie ciałem. Przestrzenią liniową V nad ciałem K nazywamy strukturę algebraiczną (algebrę)*
$\mathbf{V} = \{V; \theta, +, \cdot\}$*, w której: V jest zbiorem z wyróżnionym elementem θ oraz dwoma działaniami $+$ i $\cdot$ zwanymi dodawaniem i mnożeniem przez liczby. Elementy V nazywamy wektorami. Dodawanie przyporządkowuje parze wektorów wektor zaś mnożenie liczbie i wektorowi wektor.*
$+ : V \times V \to V$, $\alpha + \beta \in V$.
$\cdot : K \times V \to V$, $a \cdot \alpha \in V$.
W przestrzeni liniowej działania spełniają następujące warunki zwane aksjomatami przestrzeni: Dla każdych $\alpha, \beta, \gamma \in V$ i $a, b \in K$

1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	*łączność dodawania*
2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	*przemienność dodawania*
3) $\theta + \alpha = \alpha + \theta = \alpha$	*θ jest elementem neutralnym dodawania*
4) $\forall_{\alpha \in V}\ \exists_{\gamma \in V}\ \alpha + \gamma = \theta$	*istnienie elementu przeciwnego*
5) $a \cdot (\alpha + \beta) = (a \cdot \alpha) + (a \cdot \beta)$	*rozdzielność mnożenia względem dodawania*
6) $(a + b) \cdot \alpha = a \cdot \alpha + b \cdot \alpha$	*rozdzielność mnożenia względem dodawania*
7) $(ab) \cdot \alpha = a \cdot (b \cdot \alpha)$	*łączność mnożenia*
8) $1 \cdot \alpha = \alpha$	*1 jest elementem neutralnym mnożenia*

Twierdzenie 2.15 *Ciało ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad swoim podciałem.*

Twierdzenie 2.16 *Niech W będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś X zbiorem. Wówczas $V = W^X$ zbiór wszystkich funkcji z X do W jest przestrzenią liniową z działaniami:*
$(f + g)(x) \overset{df}{=} f(x) + g(x)$ *i*
$(rf)(x) \overset{df}{=} r(f(x))$.

Wniosek 2.17 *Ciągi K^n i macierze K_t^n z działaniami po współrzędnych są przestrzeniami liniowymi.*

Podstawowe własności przestrzeni liniowych:
1) $a \cdot \alpha = \theta \Leftrightarrow a = 0$ lub $\alpha = \theta$
2) $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot x = \beta$ ma jedno rozwiązanie.
3) $\alpha + \beta = \theta \Leftrightarrow \beta = (-1)\alpha$.

Definicja 2.18 *Niech V przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $W \subset V$ nazywamy podprzestrzenią jeżeli:*

1) $\theta \in W$.

2) Jeżeli $\alpha, \beta \in W$ *to* $\alpha + \beta \in W$.

3) Jeżeli $\alpha \in W$ *i* $r \in K$ *to* $r\alpha \in W$.

Twierdzenie 2.19 *Podprzestrzeń jest przestrzenią.*