ALGEBRA
LICZBY ZESPOLONE

Zadanie 1

Dla liczb zespolonych $z_1 = (1{,}2)$, $z_2 = (-2{,}3)$ i $z_3 = (1, -1)$ oblicz:
a) $z_1 + z_2 + z_3$;
b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$;
c) $z_1 z_2 z_3$;
d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$;
e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$;
f) $\frac{z_1^2+z_2^2}{z_2^2+z_3^2}$.

Zadanie 2

Rozwiąż równania:
a) $z + (-3{,}7) = (2, -1)$;
b) $(3{,}1) + z = (4{,}2)$;
c) $z \cdot (2{,}3) = (6{,}2)$;
d) $\frac{z}{(-3{,}1)} = (2{,}4)$.

Zadanie 3

Znajdź rozwiązania w liczbach zespolonych:
a) $z^2 + z + 1 = 0$;
b) $z^3 + 1 = 0$.

Zadanie 4

Niech $z = (a{,}b) \in \mathbb{C}$, oblicz z^2, z^3 i z^4.

Postać algebraiczna

Każda liczbę zespoloną $z = (x{,}y)$ możemy przedstawić w postaci algebraicznej:

$$z = x + yi$$

gdzie $x{,}y \in \mathbb{R}$ oraz $i = (0{,}1)$. Zachodzi przy tym równość $i^2 = -1$

Możemy zatem zapisać,definicję liczby zespolonych jako;

$$\mathbb{C} = \left\{ x + yi | \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \right\}$$

Liczbę $x = \mathbf{Re}(z)$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby z, natomiast $y = \mathbf{Im}(z)$ częścią urojoną.

Zadanie 5

Znajdź liczby rzeczywiste x i y spełniające:
a) $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$;
b) $\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$;
c) $(4 - 3i)x^2 + (3 + 2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 3y^2)i$.

Zadanie 6

Oblicz:

a) $(2-i)(-3+2i)(5-4i)$;

b) $(2-4i)(5+2i)+(3+4i)(-6-i)$

c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{8}$

d) $\frac{3+7i}{2+3i}+\frac{5-8i}{2-3i}$.

Zadanie 7

Znajdź wszystkie $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spełniające zależność $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8

Udowodnij poniższe właściwości:

a) $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$;

b) $|1+z_1\overline{z}_2|+|z_1-z_2|^2=(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$;

c) $|1-z_1\overline{z}_2|-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

Zadanie 9

Pokaż, że dla naturalnych n:

- $i^{4n}=1$;
- $i^{4n+1}=i$;
- $i^{4n+2}=-1$;
- $i^{4n+3}=-i$;

oraz

$$i^n=(i^{-1})^{-n}=\left(\frac{1}{i}\right)^{-n}=(-i)^{-n}$$

Oblicz:

a) $i^{105}+i^{23}+i^{20}-i^{34}$;

b) $i^{2000}+i^{1999}+i^{201}+i^{82}+i^{47}$;

c) $i^1\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{2000}$;

d) $i^{-5}+(-i)^{-7}+(-i)^{13}+i^{-100}+(-i)^{94}$;

Liczba sprzężona

Dla każdej liczby zespolonej $z=x+yi$ liczbę $\overline{z}=x-yi$ nazywamy liczbą sprzężoną do z.
Pokaż, że:

i) $z=\overline{z}$ wtedy i tylko wtedy gdy $z\in\mathbb{R}$;
ii) dla każdej liczby zespolonej zachodzi $\overline{\overline{z}}=z$;
iii) dla każdej liczby zespolone $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}$ i jest nieujemna;
iv) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;
v) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;
vi) Dla niezerowej liczby zespolonej z zachodzi $\overline{z^{-1}}=\overline{z}^{-1}$
vii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ przy założeniu, że $z_2\neq 0$
viii) ponadto mamy następujące wzory na część rzeczywistą:

$$\mathbf{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$$

oraz urojoną

$$\mathbf{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

MODUŁ

Modułem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Oblicz moduły następujących liczb:

a) $z_1 = 4 + 3i$;

b) $z_2 = -3i$;

c) $z_3 = -7$;

ZADANIE 10

Narysuj na płaszczyźnie zespolonej obrazy następujących punktów:

a) $z_1 = 3 + i$;
b) $z_2 = -2 + 4i$;
c) $z_3 = -6 - 2i$;
d) $z_4 = 4 - 3i$;
e) $z_5 = 7$;
f) $z_6 = -2i$;
g) $z_7 = 3i$;
h) $z_8 = -1$;

ZADANIE 11

Znajdź interpretację geometryczną następujących równości:

a) $(-5 + 4i) + (2 - 3i) = (-3 + i)$;

b) $(4 - i) + (-3 + 3i) = (1 + 2i)$;

c) $2(-4 + 2i) = -8 + 4i$;

d) $-3(-1 + 2i) = 3 - 6i$

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy zapisać liczbę zespoloną $z = x + yi$ w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

gdzie $r \in [0,\infty)$ oraz $\phi \in [0,2\pi)$ (w tym wypadku argument główny). Każdy kąt postaci $\phi + 2k\pi$ daje tę samą liczbę zespoloną i jest nazywany argumentem tej liczby.
Możemy pokazać, że dla

$$z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1)$$

oraz

$$z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$$

zachodzą następujące zależności:

i) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$

Zadanie 12

Znajdź postać trygonometryczną poniższych liczb zespolonych:

a) $z_1 = -1 - i$

b) $z_2 = 2 + 2i$

c) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$

d) $z_4 = -1 - i\sqrt{3}$

Zadanie 13

Znajdź wszystkie liczby zespolone, takie że $|z| = 1$ oraz:

$$\left| \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \right| = 1$$

Zadanie 14

Niech $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, oblicz:

a) $z^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

b) $z^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

c) $z^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 15

Zaznacz w układzie współrzędnych następujące punkty:

a) $z_1 = 7 + 3i$;

b) $z_2 = 6$;

c) $z_3 = 3i$;

d) $z_4 = -5$;

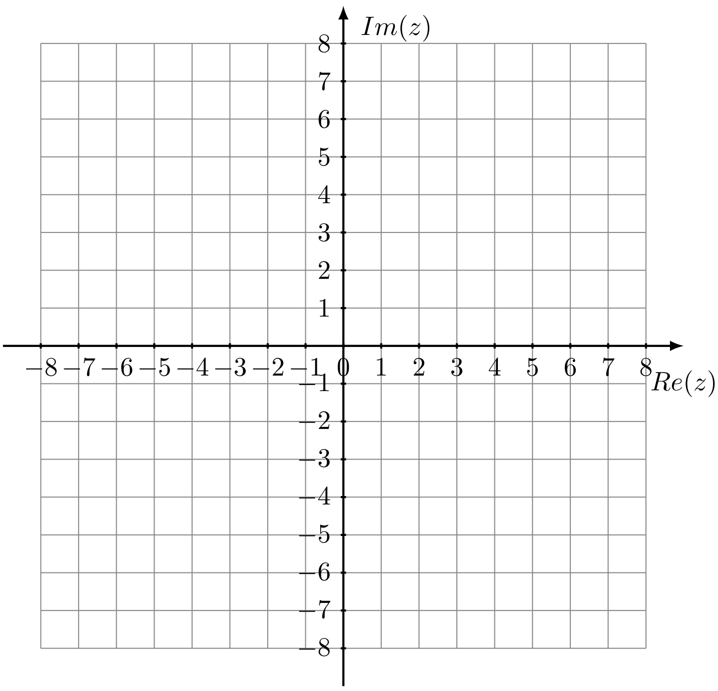
e) $z_5 = -4i$;

f) $z_6 = -3 - 4i$;

g) $z_7 = 5 + 2i$;

h) $z_8 = 4 - 3i$;

i) $z_9 = -7 + 7i$.



Zadanie 16

Dla danej liczby zespolonej podaj jej część rzeczywistą, część urojoną oraz liczbę do niej sprzężoną:

a) $z_1 = 5 + 2i$, $Re(z_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $Im(z_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\overline{z_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $z_2 = 3i$, $Re(z_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $Im(z_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\overline{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
c) $z_3 = 2 - 7i$, $Re(z_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $Im(z_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\overline{z_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
d) $z_4 = \sqrt{7}$, $Re(z_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $Im(z_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\overline{z_4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
e) $z_5 = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}i$, $Re(z_5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $Im(z_5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\overline{z_5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 17

Oblicz

a) $i^{2000} + i^{1999} + i^{201} + i^{82} + i^{47} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
b) $i^{-5} + (-i)^{-7} + (-i)^{13} + i^{-100} + (-i)^{94} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 18

Oblicz:

a) $z_1 = 1 + i$, $\sqrt{z_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
b) $z_2 = i$, $\sqrt{z_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
c) $z_3 = -2(1 + i\sqrt{3})$, $\sqrt{z_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
d) $z_4 = -27$, $\sqrt[3]{z_4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
e) $z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt[3]{z_5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
f) $z_6 = 18 + 36i$, $\sqrt[3]{z_6} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 19

Wyznacz podzbiór $\mathbb{C}$ spełniający warunek:

a) $|z| = 2$;
b) $|z + i| \leqslant 2$;
c) $\pi < \arg z < \frac{5\pi}{4}$;
d) $\arg(-z) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$;
e) $|z + 1 + i| < 3$ oraz $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6}$;
f) $\arg(z) < \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 20

Znajdź postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:

a) $z_1 = 6 + 6i\sqrt{3}$;
b) $z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$;
c) $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
d) $z_4 = 9 - 9i\sqrt{3}$;
e) $z_5 = 3 - 2i$;
f) $z_6 = -4i$.

Zadanie 21

Znajdź postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:

a) $z_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha$, $\alpha \in [0,2\pi)$;
b) $z_2 = \sin\alpha + i(1 + \cos\alpha)$, $\alpha \in [0,2\pi)$;
c) $z_3 = \cos\alpha + \sin\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha)$, $\alpha \in [0,2\pi)$;
d) $z_4 = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0,2\pi)$.

Zadanie 22

Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3+3i)\left(2\sqrt{3}+2i\right)$;

b) $(1+i)(-2-2i)i$;

c) $-2i(-4+4\sqrt{3}i)(3+3i)$;

d) $3(1-i)(-5+5i)$.

Zadanie 23

Dla liczby zespolonej:

a) $z = (1-i)(6+6i)$ znajdź $|z| = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\arg z = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\mathrm{Arg} z = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\arg\overline{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\arg(-z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

b) $z = \left(7 - 7\sqrt{3}i\right)(-1-i)$ znajdź $|z| = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\arg z = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\mathrm{Arg} z = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\arg\overline{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\arg(-z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 24

Oblicz:

a) $(1-\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ dla $\alpha \in [0{,}2\pi)$ oraz $n \in \mathbb{N}$;

b) $z^n + \frac{1}{z^n}$, jeżeli $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$.

Zadanie 25

Rozwiąż równania w liczbach zespolonych:

a) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

c) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$;

d) $|x| - x = 1 + 2i$;

e) $|x| + x = 2 + i$

Zadanie 26

Rozwiąż równania:

a) $z^2 = \overline{z}$;

b) $z^3 = \overline{z}$;

c) $z^3 = (2+2i)^6$.