

Temat: Dwuwymiarowa zmienna dyskretna. Centralne twierdzenia graniczne Moivre'a-Laplace'a i Lindeberga-Levy'ego.

1. Rozkład łączny zmiennej losowej (X, Y) jest następujący:

$P(X = x_i, Y = y_k)$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = 0$	0.5	0.2
$y_2 = 1$	0.2	0.1

- Wyznacz rozkłady brzegowe zmiennych X i Y .
- Oblicz wartości oczekiwane zmiennych X i Y .
- Oblicz wariancje i odchylenia standardowe zmiennych X i Y .
- Sprawdź, czy zmienne X i Y są niezależne.
- Sprawdź, czy zmienne X i Y są skorelowane. Jeśli tak, to w jakim stopniu?
- Wyznacz rozkład zmiennej $Z = X + Y$.
- Wyznacz wartość średnią i wariancję zmiennej $X + 2Y$.
- Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa $W = XY$.

2. Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład prawdopodobieństwa:

$P(X = x_i, Y = y_k)$	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$
$y_1 = -2$	1/8	0
$y_2 = 0$	1/4	3/8
$y_3 = 1$	0	1/4

- Wyznacz rozkłady brzegowe wektora (X, Y) i zbadaj niezależność zmiennych losowych X, Y .
 - Wyznacz kowariancję $Cov(X, Y)$ oraz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ zmiennych losowych X, Y .
 - Niech $Z = X - 2Y - 1$. Oblicz $E(Z)$ i $Var(Z)$.
3. Niech X i Y opisują liczby awarii sprzętu w dwóch pracownikach komputerowych w danym miesiącu. Łączny rozkład zmiennej (X, Y) jest następujący:

$P(X = x_i, Y = y_k)$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$y_1 = 0$	0.52	0.20	0.04
$y_2 = 1$	0.14	0.02	0.01
$y_3 = 2$	0.06	0.01	0

- Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia przynajmniej jednej awarii sprzętu w miesiącu.
 - Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.
4. Pewien student informatyki otrzymuje stypendium naukowe w wysokości 700 zł miesięcznie. Dodatkowo zarabia na zleceniach, w miesiącu wykonuje średnio 3 strony internetowe i udziela przeciętnie 10 godzin korepetycji, z odchyleniami standardowymi, odpowiednio, 1 i 4. Za stronę otrzymuje 1000 zł, a za godzinę korepetycji 40 zł. Współczynnik korelacji między liczbą wykonanych stron a liczbą godzin udzielonych korepetycji wynosi $\rho = -0,6$. Oblicz średni miesięczny dochód studenta oraz odchylenie standardowe dochodu.
5. Załóżmy, że interesująca nas cecha X ma rozkład ciągły o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1/6. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie jak X oraz niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego oszacuj prawdopodobieństwo $P(15 < S_{1350} \leq 45)$.
6. Przeciętny zeskanowany obraz zajmuje 0,6 MB pamięci z odchyleniem standardowym 0,4 MB. Planujesz opublikować 80 obrazów na swojej stronie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich łączny rozmiar wyniesie od 47 do 50 MB?

7. Dla zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ :
- oszacuj prawdopodobieństwo $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$,
 - znajdź to prawdopodobieństwo, gdy wiadomo, że zmienna pochodzi z rozkładu normalnego $N(0, 1)$.
8. Aktualizacja pewnego pakietu oprogramowania wymaga instalacji 68 nowych plików. Pliki są instalowane kolejno. Czas instalacji jest zmienną losową o średniej 15 s i wariancji 11 s².
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że cały pakiet zostanie zaktualizowany w mniej niż 12 minut?
 - Wydano nową wersję pakietu, która wymaga zainstalowania tylko N nowych plików. Ponadto podano, że z prawdopodobieństwem 95% czas aktualizacji nie zajmie więcej niż 10 minut. Oblicz N .
9. Prawdopodobieństwo znalezienia wybrakowanego towaru wynosi p . Kontrola sprawdza liczbę braków spośród n losowo wybranych sztuk towaru. Wyznacz wzór ogólny na rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej.
- Jeśli $p = 0,1$, a $n = 10$, jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola napotka co najwyżej 1 brak?
 - Jeśli $p = 0,1$, a $n = 1000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z CTG), że kontrola napotka od 50 do 100 braków.
 - Jeśli p wynosi zaledwie 0,001, a $n = 5000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z tw. Poissona), że kontrola napotka co najmniej dwa braki.
10. W hotelu jest 100 pokoi. Właściciel hotelu polecił przyjmować rezerwacje na więcej niż 100 pokoi, ponieważ z doświadczenia wie, że jedynie 90% dokonywanych wcześniej rezerwacji jest później wykorzystywanych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy przyjęciu 104 rezerwacji w hotelu zabraknie wolnych miejsc?
11. Instalacja pewnego oprogramowania wymaga pobrania 82 plików. Średnio pobieranie pliku trwa 15 sekund z wariancją 16 s². Jakie jest prawdopodobieństwo, że oprogramowanie zostanie zainstalowane w mniej niż 20 minut?
12. Określony wirus komputerowy może uszkodzić dowolny plik z prawdopodobieństwem 35%, niezależnie od innych plików. Załóżmy, że wirus ten dostaje się do folderu zawierającego 2400 plików. Oblicz prawdopodobieństwo, że uszkodzonych zostanie od 800 do 850 plików.