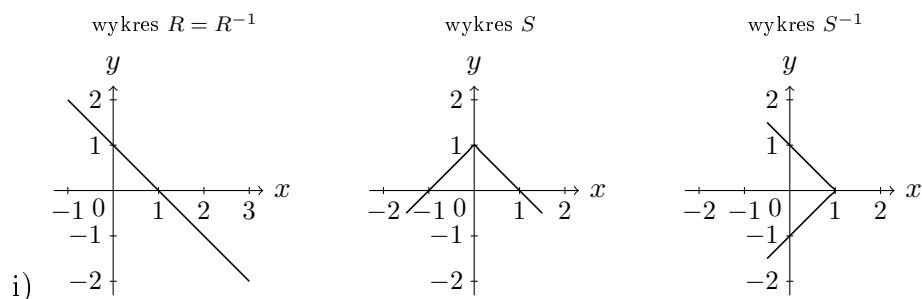


**Zadanie 1.** Dla relacji

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 1\},$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + y = 1\},$$

- i) narysuj wykresy  $R$  oraz  $R^{-1}$  (odp.  $S$  oraz  $S^{-1}$ ),
- ii) sprawdź czy  $R$  (odp.  $S$ ) jest relacją symetryczną,
- iii) sprawdź czy  $R$  oraz  $R^{-1}$  (odp.  $S$  oraz  $S^{-1}$ ) są funkcjami.



- ii)  $R$  symetryczna,  $S$  nie,
- iii)  $R = R^{-1}$  funkcja,  $S$  funkcja,  $S^{-1}$  nie.

**Zadanie 2.** Dla  $X = \{2, 3, 6, 11, 12, 18, 24, 30\}$  oraz relacji  $R \subset X \times X$  danej warunkiem

$$mRn \leftrightarrow m|n$$

znajdź elementy minimalne i maksymalne.

**Odp.** minimalne =  $\{2, 3, 11\}$ , maksymalne =  $\{11, 18, 24, 30\}$

**Zadanie 3.** Stosując indukcję matematyczną udowodnij, że

i)

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ii)

$$0^3 + 1^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2,$$

iii)

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

iv)

$$3|2^{2n} - 1,$$

**Zadanie 4.** Dla funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

znajdź

i)  $f(\{-1, 3\})$ ,

ii)  $f([1, +\infty))$ ,

iii)  $f((2, +\infty))$ ,

iv)  $f((0, +\infty))$ ,

v)  $f(\mathbb{R})$ ,

vi)  $f^{-1}(-4)$ ,

vii)  $f^{-1}(-3)$ ,

viii)  $f^{-1}((-3, +\infty))$ ,

ix)  $f^{-1}((-\infty, -3])$ ,

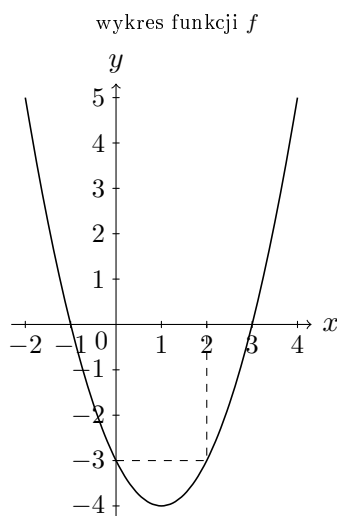
x)  $f^{-1}((-4, +\infty))$ ,

xi)  $f^{-1}([-5, +\infty))$ ,

xii)  $f^{-1}(\mathbb{R})$ .

Czy funkcja  $f$  jest różnowartościowa? Czy jest „na”? Zmodyfikuj dziedzinę i przeciwdziedzinę tak, aby stała się bijekcją oraz znajdź funkcję odwrotną.

**Odp.**



- i)  $f(\{-1, 3\}) = \{0\}$ ,
- ii)  $f([1, +\infty)) = [-4, +\infty)$ ,
- iii)  $f((2, +\infty)) = (-3, +\infty)$ ,
- iv)  $f((0, +\infty)) = [-4, +\infty)$ ,
- v)  $f(\mathbb{R}) = [-4, +\infty)$ ,
- vi)  $f^{-1}(-4) = \{1\}$ ,
- vii)  $f^{-1}(-3) = \{0, 2\}$ ,
- viii)  $f^{-1}((-3, +\infty)) = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ,
- ix)  $f^{-1}((-\infty, -3]) = [0, 2]$ ,
- x)  $f^{-1}((-4, +\infty)) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,
- xi)  $f^{-1}([-5, +\infty)) = \mathbb{R}$ ,
- xii)  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Funkcja  $f$  nie jest różnowartościowa ani „na”. Funkcja  $g$  o dziedzinie  $[1, +\infty)$  oraz przeciwdziedzinie  $[-4, +\infty)$  zadana takim samym wzorem jest bijekcją. Funkcja odwrotna to  $g^{-1}(x) = \frac{2+\sqrt{16+4y}}{2}$ .

**Zadanie 5.** Funkcję  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dane są wzorami

$$f(x) = 3^{x-1}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = \max(x, 3).$$

Wyznacz  $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ h, (f \circ g) \circ h, f \circ (g \circ h)$ .

**Odp.**  $(f \circ f)(x) = 3^{(3^{x-1})-1}, (f \circ g)(x) = 3^{x^3-1}, (g \circ f)(x) = 3^{3(x-1)}, (g \circ h)(x) = \max(x, 3)^3, ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x) = 3^{\max(x, 3)^3-1}.$

**Zadanie 6.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem

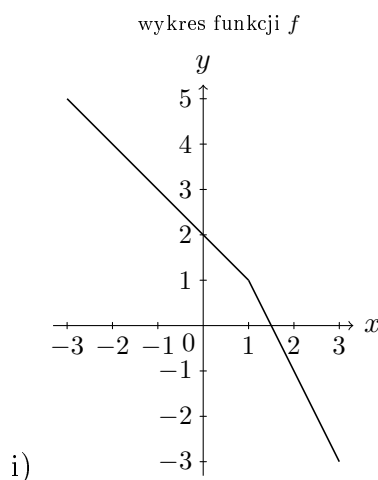
$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x < 1 \\ 4-3x & x \geq 1 \end{cases}$$

i) narysuj wykres funkcji,

ii) podaj wzór  $f^{-1}$ .

iii) podaj wzór  $f \circ f$ .

**Odp.**



ii)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{3} & x < 1 \\ 2-x & x \geq 1 \end{cases}$$

iii)

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 4-3(2-x) & x < 1 \\ 2-(4-3x) & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2+3x & x < 1 \\ -2+3x & x \geq 1 \end{cases} = -2+3x$$

**Zadanie 7.** Dla zbioru  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  podaj przykład funkcji  $f: X \rightarrow X$ , lub uzasadnij, dlaczego taka funkcja nie istnieje

- i) nie jest bijekcją,
- ii) jest różnowartościowa ale nie jest „na”,
- iii) jest „na” ale nie jest różnowartościowa,
- iv)  $f \neq \text{id}_X$ ,
- v)  $f \circ f = \text{id}_X$  ale  $f \neq \text{id}_X$ ,
- vi)  $f \circ f \circ f = \text{id}_X$  ale  $f \neq \text{id}_X$ ,
- vii)  $f \circ f \circ f \circ f = \text{id}_X$  ale  $f \neq \text{id}_X$  oraz  $f \circ f \neq \text{id}_X$ .

**Zadanie 8.** Znajdź wzór funkcji odwrotnej, określ dziedzinę i przeciwdziedzinę

- i)  $f(x) = \frac{1}{2x-4}$ ,
- ii)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ,
- iii)  $f(x) = 2^{x-1} + 1$ .

**Odp.**

- i)  $f(x) = \frac{1}{2x} + 2$ , dziedzina  $f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , przeciwdziedzina  $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,
- ii)  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ , dziedzina  $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , przeciwdziedzina  $f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,
- iii)  $f(x) = \log_2(x-1) + 1$ , dziedzina  $f = \mathbb{R}$ , przeciwdziedzina  $f = (1, +\infty)$ .

**Zadanie 9.** Wykaż, że dla  $a, b, c \in \mathbb{N}_{>0}$

- i)  $\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$ ,
- ii)  $\text{NWW}(a, \text{NWD}(b, c)) = \text{NWD}(\text{NWW}(a, b), \text{NWW}(a, c))$ .