

Liczby zespolone

Zadania przygotowawcze

1. Przedstawić w postaci $a + bi$ następujące liczby zespolone:

(a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$ odp. $1 + 18i$

(b) $\frac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i}$ odp. $10 - 11i$

(c) $(2 + i)^3 + (2 - i)^3$ odp. 4.

(d) $\frac{1 + i^5}{1 - i^3}$ odp. 2.

2. Obliczyć i^{77} , i^{98} , i^{-57} . Odp. i , -1 , $-i$.

3. Dowieść równości:

(a) $(1 + i)^{8n} = 2^{4n}$, $n \in \mathbf{Z}$; (b) $(1 + i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$, $n \in \mathbf{Z}$

4. Rozwiązać układy równań:

(a) $(1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i$ (b) $iz_1 + (1 + i)z_2 = 2 + 2i$

$(1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i$ $2iz_1 + (3 + 2i)z_2 = 5 + 3i$

Odp. (a) $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$, (b) $z_1 = 2$, $z_2 = 1 - i$

5. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie

$$(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$$

Odp. $x = 2$, $y = -3$

6. Rozwiązać równania

(a) $z^2 = 5 - 12i$

(b) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$

(c) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$

Odp. (a) $= \pm(3 - 2i)$, (b) $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 2i$, (c) $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 2 + i$

7. Udowodnić, że :

- (a) liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{z} = z$
- (b) liczba zespolona z jest liczbą czysto urojoną (tzn. taką, że jej część rzeczywista jest równa 0) wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{z} = -z$

8. Wyznaczyć wszystkie liczby :

- (a) sprzężone do swojego sześciannu
- (b) które są sprzężone do minus swojego kwadratu

9 Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby :

- (a) 5; (b) i ; (c) -2; (d) $-3i$; (e) $1-i$; (f) $1 - i\sqrt{3}$; (g) $-\sqrt{3} - i$; (h) $\cos \alpha - i \sin \alpha$
- Odp. (a) $5(\cos 0 + i \sin 0)$; (b) $\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi$; (c) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$;
- (d) $3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$; (e) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$; (f) $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$
- (g) $2(\cos(-\frac{5}{6}\pi) + i \sin(-\frac{5}{6}\pi))$ (h) $\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$

10. Obliczyć:

- (a) $(1 + i)^{1000}$; (b) $(1 + i\sqrt{3})^{150}$; (c) $(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i})^{30}$

Odp. (a) 2^{50} ; (b) 2^{150} ; (c) $2^{15}i$

11. Wyrazić w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje : (a) $\sin 4x$; (b) $\cos 4x$; (c) $\sin 5x$; (d) $\cos 5x$

Odp. (a) $4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$; obliczyć $(\cos x + i \sin x)^4$ stosując wzór de Moivre'a i wzór Newtona. (b) $\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin x + \sin 4x$; (c) $5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$; (d) $\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$.

12. Obliczyć:

- (a) $\sqrt[6]{1}$; (b) $\sqrt[4]{-4}$; (c) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$; (d) $\sqrt[3]{\frac{8 + 24i}{3 - i}}$

Odp. (a) $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \pm \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\}$, (b) $\{1 \pm i, -1 \pm i\}$,
(c) $\{\sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i\}$, (d) $\{\pm\sqrt{3} + i, -2i\}$

13. Zobrazować na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadającym liczbom zespolonym z spełniającym warunki:

(a) $|z| = 1$, (b) $\arg z = \frac{\pi}{3}$, (c) $|z| \leq 3$, (d) $|z + 3 + 4i| \leq 5$, (e) $1 \leq |z - 2i| < 2$, (f) $|\operatorname{Re} z| \leq 1$, (g) $\operatorname{Im} z = 1$, (h) $-1 < \operatorname{Re} iz < 0$ (i) $|z - 2| = \operatorname{Re} z + 2$

Odp.(a) Okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$, (b) półprosta wychodząca z początku układu współrzędnych i tworząca kąt $\frac{\pi}{3}$ z dodatnią półosią rzeczywistą, (c) koło o promieniu 3 i środku w punkcie $(0, 0)$ włącznie z brzegiem, (d) koło o środku w punkcie $(-3, -4)$ i promieniu 5 razem z brzegiem (e) pierścień zawarty między dwoma okręgami o środku w punkcie $(0, 2)$ i promieniach 1 oraz 2 z włączeniem okręgu o promieniu 1 i wyłączeniem okręgu o promieniu 2, (f) pas zawarty między prostymi pionowymi $x = -1$ oraz $x = 1$, (g) prosta pozioma $y = 1$, (h) pas między prostymi poziomymi $y = 0$ oraz $y = 1$, (i) parabola $y^2 = 8x$