

Algebra, WIT 2022/2023

Egzamin A, 9:00-11:15, 12 lutego 2023 r.

.....
Imię	Nazwisko	Indeks	Grupa

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ spełniające równania

i) $z^2 = -24 - 10i$,

ii) $w + 2i \operatorname{Re} w + 3 \operatorname{Im} w = 5i$.

Wskazówka: $26^2 = 676$

Zadanie 2. Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej

$$\left(\cos \frac{5\pi}{21} + i \sin \frac{5\pi}{21} \right)^{49}.$$

Zadanie 3. Podaj rozwiązanie ogólne układu równań liniowych, sprowadzając jego macierz do postaci schodkowej zredukowanej i wyrażając zmienne związane przez parametry.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 5 \end{cases}$$

Zadanie 4. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli to możliwe, oblicz AA , AB , BA , A^{-1} , B^{-1} .

Zadanie 5. Stosując metodę Cramera oblicz zmienną x_1 .

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 6. Odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest zadane wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 4x_3, x_1 + 2x_2 - 7x_3, -x_2 + 3x_3).$$

i) znajdź bazy i wymiary przestrzeni $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$,

ii) znajdź macierz $M(f)_{st}^{st}$.

Zadanie 7. Odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest zadane macierzą

$$M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) znajdź bazę \mathcal{A} przestrzeni \mathbb{R}^3 złożoną z wektorów własnych endomorfizmu f ,

ii) znajdź macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie \mathcal{A} jest bazą z punktu i).

Zadanie 8. Oblicz pole trójkąta ABC o wierzchołkach w $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (1, 1, 1)$.