Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Igor Nowicki

31 stycznia 2021

Spis treści

1 Trzecie kolokwium

1.1 Ściąga

1.2 Dwuwymiarowa zmienna dyskretna

Zadanie 1. 1. Rozkład łączny zmiennej losowej (X; Y) jest następujący:

$P(X = x_i; Y = y_k)$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = 0$	0.5	0.2
$y_2 = 1$	0.2	0.1

Rozwiązanie. a) Wyznacz rozkłady brzegowe zmiennych X i Y.

Definicja rozkładu brzegowego:

$$P(X_i) = p_{x,i} = \sum_j Y_j P(X_i, Y_j)$$

$$P(Y_j) = p_{y,j} = \sum_i X_i P(X_i, Y_j)$$

b) Oblicz wartości oczekiwane zmiennych X i Y.

$$EX = \sum_i X_i p_{x,i}$$

$$EY = \sum_j X_j p_{y,j}$$

c) Oblicz wariancje i odchylenia standardowe zmiennych X i Y.

Wariancja X:

$$\mathrm{Var}X = \sigma_X^2 = EX^2 - (EX)^2$$
$$EX^2 = \sum_i X_i^2 p_{x_i}$$

Odchylenie standardowe X:

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}X}$$

Wariancja Y:

$$\mathrm{Var}Y = \sigma_Y^2 = EY^2 - (EY)^2$$
$$EY^2 = \sum_i Y_i^2 p_{y_i}$$

Odchylenie standardowe Y:

$$\sigma_y = \sqrt{\mathrm{Var}Y}$$

d) Sprawdź, czy zmienne X i Y są niezależne.

Test na niezależność zmiennych - powinno być spełnione równanie:

$$P(X_i) \cdot P(Y_j) = P(X_i, Y_j),$$

dla wszystkich X_i oraz Y_j.

e) Sprawdź, czy zmienne X i Y są skorelowane. Jeśli tak, to w jakim stopniu?

Kowariancja $\mathrm{Cov}(X, Y)$ jest wyznaczana według wzoru:

$$EXY = \sum_{i,j} X_i Y_j P(X_i, Y_j),$$
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY.$$

Korelacja następuje wtedy, gdy $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$.

Współczynnik korelacji:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

f) Wyznacz rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

Sprawdzamy wszystkie możliwe wyniki sumowania wartości X oraz Y. Jeśli jakiś wynik powtarza się dla kilku kombinacji, dodajemy do siebie prawdopodobieństwa $P(X, Y)$. W przeciwnym wypadku wartością $P(Z_k)$ jest odpowiadająca wartość $P(X_i, Y_j)$, dla $Z_k = X_i + Y_j$.

g) Wyznacz wartość średnią i wariancję zmiennej $X + 2Y$.

Wartość średnia zmiennej wyliczana jest poprzez wzór:

$$E(X + 2Y) = E(X) + 2E(Y)$$

Wariancja:

$$\mathrm{Var}(X + 2Y) = E(X + 2Y)^2 - (E(X + 2Y))^2 = \mathrm{Var}(X) + 2^2\mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

h) Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa $W = XY$.

Należy znaleźć wszystkie możliwe wartości $W_k = X_i \cdot Y_j$ oraz wyliczyć:

$$P(W_k) = \sum_{i,j:W_k=X_i+Y_k} P(X_i, Y_j).$$

□

Zadanie 2. 2. Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład prawdopodobieństwa:

$P(X = x_i; Y = y_k)$	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$
$y_1 = -2$	1/8	0
$y_2 = 0$	1/4	3/8
$y_3 = 1$	0	1/4

a) Wyznacz rozkłady brzegowe wektora (X, Y) i zbadaj niezależność zmiennych losowych X, Y.

b) Wyznacz kowariancję $Cov(X, Y)$ oraz współczynnik korelacji $\rho(X; Y)$ zmiennych losowych X, Y .

c) Niech $Z = X - 2Y - 1$. Oblicz $E(Z)$ i $Var(Z)$.

Rozwiązanie. a) Wyznacz rozkłady brzegowe wektora (X, Y) i zbadaj niezależność zmiennych losowych X, Y.

Rozkładem brzegowym będzie zobaczenie jak zachowuje się X niezależnie od Y i na odwrót - jak zachowuje się Y niezależnie od X.

Wiemy, że X przyjmuje wartości -1 oraz 0. Prawdopodobieństwem dla każdej ze zmiennych losowych będzie (w przypadku dyskretnym) suma prawdopodobieństw dla danego x_i po wszystkich wartościach pozostałych zmiennych. W przypadku ciągłym sumę zastąpilibyśmy całką po gęstości prawdopodobieństwa.

Rozkład brzegowy X:

X_i	-1	0
$P(X = X_i) = p_i$	3/8	5/8

Rozkład brzegowy Y:

y_i	-2	0	1
$P(Y = y_i) = p_i$	1/8	5/8	1/4

Badanie niezależności zdarzeń polega na sprawdzeniu, czy dla każdej pary (x_i, y_j) spełnione jest równanie:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Jeśli równość jest spełniona dla wszystkich par, oznacza to że zmienne są niezależne.

Dla pary $x_1 = -1, y_1 = -2$ mamy iloczyn prawdopodobieństw $3/8 \cdot 1/8 = 3/64$, natomiast wspólne prawdopodobieństwo było równe $1/8$. Oznacza to, że zmienne nie są niezależne (są zależne).

b) Wyznacz kowariancję $Cov(X, Y)$ oraz współczynnik korelacji $\rho(X; Y)$ zmiennych losowych X, Y.

Potrzeba nam wyliczyć wartości średnie (EX, EY) i wariancje $VarX, VarY$ dla obydwu zmiennych.

$$EX = \sum_i x_i p_i = (-1) \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{5}{8} = -\frac{3}{8},$$
$$EX^2 = \sum_i x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot \frac{3}{8} + 0^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8},$$
$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \frac{15}{64}.$$

$$EY = \sum_i y_i p_i = (-2) \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{5}{8} + (1) \cdot \frac{1}{4} = 0,$$
$$EY^2 = \sum_i y_i^2 p_i = (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} + 0^2 \cdot \frac{5}{8} + (1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$$

c) Niech $Z = X - 2Y - 1$. Oblicz $E(Z)$ i $Var(Z)$.

$$E(Z) = E(X - 2Y - 1) = E(X) - 2E(Y) - E(1),$$
$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X - 2Y - 1) = \text{Var}(X) + 2^2\text{Var}(Y) - 2 \cdot 2\text{Cov}(X, Y).$$

□

Zadanie 3. Niech X i Y opisują liczby awarii sprzętu w dwóch pracowanich komputerowych w danym miesiącu. Łączny rozkład zmiennej (X; Y) jest następujący:

a) Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia przynajmniej jednej awarii sprzętu w miesiącu.

b) Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

$P(X = x_i, Y = y_k)$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$y_1 = 0$	0.52	0.20	0.04
$y_2 = 1$	0.14	0.02	0.01
$y_3 = 2$	0.06	0.01	0

Rozwiązanie. □

Zadanie 4. Pewien student informatyki otrzymuje stypendium naukowe w wysokości 700 zł miesięcznie. Dodatkowo zarabia na zleceniach, w miesiącu wykonuje średnio 3 strony internetowe i udziela przeciętnie 10 godzin korepetycji, z odchyleniami standardowymi, odpowiednio, 1 i 4. Za stronę otrzymuje 1000 zł, a za godzinę korepetycji 40 zł. Współczynnik korelacji między liczbą wykonanych stron a liczbą godzin udzielonych korepetycji wynosi $\rho = -0.6$. Oblicz średni miesięczny dochód studenta oraz odchylenie standardowe dochodu.

Rozwiązanie. Dane są dwie zmienne losowe - niech X będzie liczbą zrobionych stron internetowych, a Y - liczbą godzin korepetycji. Współczynnik korelacji $\rho(X, Y) = -0.6$. Zmienne losowe $P(X) = N(3, 1)$ oraz $P(Y) = N(10, 4)$. Poszukujemy wartości dochodu:

$$D = 700 + 1000 \cdot X + 40 \cdot Y.$$

Wiemy, że wartość średnia ma własność liniowości:

$$E(D) = 700 + 1000 \cdot E(X) + 40 \cdot E(Y).$$

Zatem $E(D) = 4100$. W przypadku odchylenia standardowego $\sigma_D = \sqrt{\mathrm{Var}(D)}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}(700 + 1000X + 40Y), \\
&= 1000^2 \mathrm{Var}X + 40^2 \mathrm{Var}Y + 2 \cdot 1000 \cdot 40 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y), \\
&= 1000^2 \cdot 1^2 + 40^2 4^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 40 \cdot \rho(X, Y) \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y, \\
&= 1000^2 + 40^2 \cdot 16 + 2 \cdot 1000 \cdot 40 \cdot (-0.6) \cdot 1 \cdot 4, \\
&= 1025595.2.
\end{aligned}$$

Zatem odchylenie standardowe wartości dochodu, $\sigma_D = \sqrt{\mathrm{Var}(D)} = \sqrt{1025595.2} = 1013$.

□

1.3 Centralne twierdzenia graniczne Moivre'a-Laplace'a i Lindeberga-Levy'ego

Zadanie 5. Załóżmy, że interesująca nas cecha X ma rozkład ciągły o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1/6. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie jak X oraz niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego oszacuj prawdopodobieństwo $P(15 < S_{1350} \leqslant 45)$.

Rozwiązanie. Ponieważ zmienne X_i mają ten sam rozkład co cecha X, to:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{E}(X) = 0$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X) = 1/6$$

Poszukujemy wartości $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dla $n = 1350$. Na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego wiemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = N(0,1),$$

czyli, że S_n zbiega do rozkładu normalnego o wartości średniej $n\mu$ oraz odchyleniu standardowym $\sqrt{n}\sigma$, gdzie μ, σ są parametrami rozkładu cechy X.
Zatem prawdopodobieństwo że suma S_{1350} wypadnie pomiędzy 15 a 45, tj:

$$P(15 < S_{1350} \leqslant 45),$$

można obliczyć z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego. Wpierw należy zestandaryzować wielkości w nierówności:

$$\begin{aligned}
P\Big(15 < S_{1350} \leqslant 45\Big) &= P\Big(15 < N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \leqslant 45\Big),\\
&= P\left(\frac{15 - 1350\cdot 0}{\sqrt{1/6}\cdot\sqrt{1350}} < \mathcal{Z} \leqslant \frac{45 - 1350\cdot 0}{\sqrt{1/6}\cdot\sqrt{1350}}\right),\\
&= P\left(\frac{15 - 1350\cdot 0}{15} < \mathcal{Z} \leqslant \frac{45 - 1350\cdot 0}{15}\right),\\
&= P\Big(1 < \mathcal{Z} \leqslant 3\Big),\\
&= \Phi(3) - \Phi(1).
\end{aligned}$$

Doprowadzamy S_{1350} do standardowej formy, aby móc użyć jej z tablic.

$$S_n \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

Wartości $\Phi(3), \Phi(1)$ wynoszą, odpowiednio, 0.9987 oraz 0.8413, co oznacza, że szukane prawdopodobieństwo wynosi 0.16.

□

Zadanie 6. Przeciętny zeskanowany obraz zajmuje 0.6 MB pamięci z odchyleniem standardowym 0.4 MB. Planujesz opublikować 80 obrazów na swojej stronie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich łączny rozmiar wyniesie od 47 do 50 MB?

Rozwiązanie. Wartości $EX = \mu = 0.6$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0.4$ MB. Wartość $n = 80$, dla sumy $S_{80} = \sigma_{i=1}^{80} X_i$ poszukujemy prawdopodobieństwa:

$$
\begin{aligned}
P\left(47 < S_{80} \leqslant 50\right) &= P\left(47 < N(80 \cdot \mu, \sqrt{80} \cdot \sigma) \leqslant 50\right),\\
&= P\left(\frac{47 - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \leqslant \frac{50 - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right),\\
&= P\left(\frac{47 - 80 \cdot 0.6}{\sqrt{80} \cdot 0.4} < N(0,1) \leqslant \frac{50 - 80 \cdot 0.6}{\sqrt{80} \cdot 0.4}\right),\\
&= P\left(-0.28 < N(0,1) \leqslant 0.56\right),\\
&= \Phi(0.56) - \Phi(-0.28),\\
&= 0.712 - (1 - \Phi(0.28)),\\
&= 0.712 - (1 - 0.61),\\
&= 0.712 - (1 - 0.61),\\
&= 0.322.
\end{aligned}
$$

□

Zadanie 7. Dla zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ:

a) oszacuj prawdopodobieństwo $P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma)$,

b) znajdź to prawdopodobieństwo, gdy wiadomo, że zmienna pochodzi z rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Rozwiązanie. a) oszacuj prawdopodobieństwo $P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma)$,

Skorzystamy z nierówności Czebyszewa:

$$
P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) < \frac{\sigma}{k^2},
$$

co w tym wypadku pozwala nam oszacować, że szansa na wystąpienie zdarzenia będzie mniejsza niż $\frac{\sigma}{9}$.

b) znajdź to prawdopodobieństwo, gdy wiadomo, że zmienna pochodzi z rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geqslant 3\sigma) &= 1 - P(|X-\mu| < 3\sigma),\\
&= 1 - P(-3\sigma < X-\mu < 3\sigma),\\
&= 1 - P(-3\sigma < N(0,\sigma) < 3\sigma),\\
&= 1 - P(-3 < N(0,1) < 3),\\
&= 1 - \bigg(\Phi(3) - \Phi(-3)\bigg),\\
&= 1 - \bigg(\Phi(3) - (1-\Phi(3))\bigg),\\
&= 2 - 2\Phi(3),\\
&= 2 - 2\cdot 0.9987,\\
&= 0.0026.
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadanie 8. Aktualizacja pewnego pakietu oprogramowania wymaga instalacji 68 nowych plików. Pliki są instalowane kolejno. Czas instalacji jest zmienną losową o średniej $15s$ i wariancji $11s^2$.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że cały pakiet zostanie zaktualizowany w mniej niż 12 minut?

b) Wydano nową wersję pakietu, która wymaga zainstalowania tylko N nowych plików. Ponadto podano, że z prawdopodobieństwem 95% czas aktualizacji nie zajmie więcej niż 10 minut. Oblicz N.

Rozwiązanie. a) $n = 68$. Wiemy, że $EX = \mu = 15s$ oraz $\mathrm{Var}X = \sigma^2 = 11\ \mathrm{s}^2$. Poszukujemy wartości S_{68} i prawdopodobieństwa:

$$
\begin{aligned}
P(S_{68} < 12 \cdot 60) &= P(\frac{S_{68} - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{12 \cdot 60 - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\sigma}), \\
&= P(Z < \frac{12 \cdot 60 - 68 \cdot 15}{\sqrt{68 \cdot 11}}),
\end{aligned}
$$

b) $n = ?$,

$$
\begin{aligned}
P\left(S_n < 10 \cdot 60\right) &= 0.95, \\
P\left(\frac{S_n - n \cdot 15}{\sqrt{11 \cdot n}} < \frac{10 \cdot 60 - n \cdot 15}{\sqrt{11 \cdot n}}\right) &= \Phi(1.64), \\
P\left(\mathcal{Z} < \frac{10 \cdot 60 - n \cdot 15}{\sqrt{11 \cdot n}}\right) &= \Phi(1.64), \\
\frac{10 \cdot 60 - n \cdot 15}{\sqrt{11 \cdot n}} &= 1.64
\end{aligned}
$$

Prowadzi nas to do równania kwadratowego:

$$10 \cdot 60 - n \cdot 15 = 1.64 \cdot \sqrt{11n},$$

które możemy rozwiązać poprzez podstawienie $t = \sqrt{n}$.

$$
\begin{aligned}
10 \cdot 60 - t^2 \cdot 15 &= 1.64 \cdot \sqrt{11}t, \\
t^2 \cdot 15 + 1.64 \cdot \sqrt{11}t - 10 \cdot 60 &= 0,
\end{aligned}
$$

Co ma dwa rozwiązania: $t = -6.5$ lub $t = 6.14582$. Bierzemy tylko dodatnie rozwiązanie, ponieważ $t = \sqrt{n}$. Zatem $n = t^2 = 37.78 \approx 38$.

□

Zadanie 9. Prawdopodobieństwo znalezienia wybrakowanego towaru wynosi ρ. Kontrola sprawdza liczbę braków spośród n losowo wybranych sztuk towaru. Wyznacz wzór ogólny na rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej.

a) Jeśli $p = 0.1$, a $n = 10$, jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola napotka co najwyżej 1 brak?

b) Jeśli $p = 0.1$, a $n = 1000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z CTG), że kontrola napotka od 50 do 100 braków.

c) Jeśli p wynosi zaledwie 0.001, a $n = 5000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z tw. Poissona), że kontrola napotka co najmniej dwa braki.

Rozwiązanie. Rozkład prawdopodobieństwa będzie opisywany funkcją $Bin(n, \rho)$. Dla dużych n można przybliżać funkcję rozkładem normalnym $N(np, \sqrt{npq})$.

a) Jeśli $p = 0.1$, a $n = 10$, jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola napotka co najwyżej 1 brak?

Szansa na napotkanie co najwyżej jednego braku wynosi:

$$P(S_{10} \leqslant 1) = P(S_{10} = 0) + P(S_{10} = 1) = \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9.$$

b) Jeśli $p = 0.1$, a $n = 1000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z CTG), że kontrola napotka od 50 do 100 braków.

Tutaj musimy już przyjąć przybliżenie z CTG. Poszukujemy:

$$P(50 \leqslant S_{1000} \leqslant 100)$$

c) Jeśli p wynosi zaledwie 0.001, a $n = 5000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z tw. Poissona), że kontrola napotka co najmniej dwa braki.

Rozkład Poissona:

$$p(k, \lambda = np) = \frac{\lambda^k e^- \lambda}{k!}.$$

Szukane prawdopodobieństwo to:

$$P(S \geqslant 2) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) = 1 - (Pois(k = 0, \lambda) + Pois(k = 1, \lambda))$$

□

Zadanie 10. W hotelu jest 100 pokoi. Właściciel hotelu polecił przyjmować rezerwacje na więcej niż 100 pokoi, ponieważ z doświadczenia wie, że jedynie 90% dokonywanych wcześniej rezerwacji jest później wykorzystywanych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy przyjęciu 104 rezerwacji w hotelu zabraknie wolnych miejsc?

Rozwiązanie. $n = 104, p = 90\%, \sigma = \sqrt{pq} = 0.3, \mu = 0.9$. Poszukujemy prawdopodobieństwa:

$$
\begin{aligned}
P(S_{104} > 100) &= P\left(\frac{S_{104} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{100 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right),\\
&= P\left(\mathcal{Z} > \frac{100 - 104 \cdot 0.9}{0.3 \cdot \sqrt{104}}\right),\\
&= P\left(\mathcal{Z} > 2.09\right),\\
&= 1 - \Phi(2.09),\\
&= 1 - 0.981691,\\
&= 0.0183.
\end{aligned}
$$

□

Zadanie 11. Instalacja pewnego oprogramowania wymaga pobrania 82 plików. Średnio pobieranie pliku trwa 15 sekund z wariancją $16s^2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oprogramowanie zostanie zainstalowane w mniej niż 20 minut?

Rozwiązanie. $n = 82$, $\mu = 15$ s, $\sigma^2 = 16$ s^2. Poszukujemy:

$$
\begin{aligned}
P(S_{82} < 20 \cdot 60) &= P(Z < \frac{1200 - 82 \cdot 15}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{16}}),\\
&= PZ < \frac{1200 - 82 \cdot 15}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{16}}),\\
&= \Phi(-0.83),\\
&= 1 - 0.796,\\
&= 0.204.
\end{aligned}
$$

□

Zadanie 12. Określony wirus komputerowy może uszkodzić dowolny plik z prawdopodobieństwem 35%, niezależnie od innych plików. Załóżmy, że wirus ten dostaje się do folderu zawierającego 2400 plików. Oblicz prawdopodobieństwo, że uszkodzonych zostanie od 800 do 850 plików.

Rozwiązanie. Rozkład $S_{2400} \approx Bin(n, p)$, gdzie $n = 2400$, natomiast $p = 35\%$. Dopełnienie p, $q = 65\%$. Moglibyśmy zostać przy rozkładzie dwumianowym Bin, jednak obliczenia tutaj są skomplikowane. Znacznie lepiej będzie skorzystać z przybliżenia rozkładu normalnego dla $\mu = p = 0.35$ oraz $\sigma = \sqrt{pq} = 0.477$.

$$
\begin{aligned}
P(800 < S_{2400} < 850) &= P(800 < N(n\mu, n\sigma) < 850),\\
&= P(\frac{800 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{S_{2400} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{850 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}),\\
&= P(-1.71 < N(0, 1) < 0.428),\\
&= \Phi(0.43) - \Phi(-1.71),\\
&= 0.664 - (1 - 0.956),\\
&= 0.622.
\end{aligned}
$$

□