Lista 1

czwartek, 1 października 2020 17:16

1seriaRPS

RPiS (studia zaoczne)

Zadania - seria pierwsza (ćwiczenia 1-3)

1. Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami. Za pomocą A, B, A', B' i odpowiednich działań na zbiorach zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B **a)** zaszło co najmniej jedno, **b)** zaszły oba, **c)** zaszło tylko zdarzenie A, **d)** zaszło dokładnie jedno, ale nie wiadomo które, **e)** nie zaszło żadne ze zdarzeń.

2. Dane są $\mathbb{P}(A') = 1/3$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ oraz $\mathbb{P}(A \cup B) = 2/3$. Wyznaczyć: $\mathbb{P}(B')$, $\mathbb{P}(A \cap B')$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

3. Wykazać, że jeśli $C \supset A \cap B$, to $\mathbb{P}(C) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.

4. Niech $\Omega = \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Czy jest prawdopodobieństwem funkcja $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ określona wzorem

   a) $\mathbb{P}(\{n\}) = 1/\sqrt{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$,

   b) $\mathbb{P}(\{n\}) = c \cdot (-1)^{n+5}/\sqrt{n}$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$,

   c) $\mathbb{P}(\{n\}) = c/n^2$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$,

   d) $\mathbb{P}(\{n\}) = 3^n/4^n$?

5. Jakie są szanse trafienia "szóstki" w Lotto (losujemy 6 liczb z 49) ?

6. W pudełku jest 6 kul białych i 2 czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 4 kul wyjętych losowo z pudełka będą 3 białe i 1 czarna?

7. Załóżmy, że na wykład ze statystyki uczęszcza m osób ($m \leq 365$) urodzonych w tym samym roku (nie był to rok przestępny). Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej dwie spośród nich urodziły się tego samego dnia? Jak zmienia się to prawdopodobieństwo wraz ze wzrostem liczby m?

8. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ani razu nie otrzymamy orła?

9. Rzucamy trzy razy symetryczną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

   a) za każdym razem otrzymamy inną liczbę oczek,

   b) za każdym razem wypadnie ta sama liczba oczek?

10. Rzucamy symetryczną kostką do gry. Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie co najmniej jednej "szóstki" w 6-ciu rzutach, co najmniej dwóch "szóstek" w 12-stu rzutach czy co najmniej trzech "szóstek" w 18-stu rzutach?

11. Windą jedzie 6 osób, a pięter w budynku jest 10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy wysiądą na na 10-tym pietrze? Jak zmieni się sytuacja, gdy windą jadą sześcioraczki?

12. Wycieczka złożona z pięciu osób chce zwiedzić meczet. Przed wejściem trzeba zdjąć buty i wrzucić je do skrzyni. Po zwiedzeniu meczetu każdy otrzymuje dwa buty, wybierane ze skrzyni na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy otrzyma:

    a) but lewy i but prawy,

    b) parę butów,

    c) swoją parę butów.

13. Cyfry 0,1,2,...,9 ustawiono losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że między 2 a 3 znajdą się dokładnie cztery cyfry, a jakie, że cyfry 0, 1 i 2 stoją obok siebie?

14. Porządkujemy losowo zbiór $\{1,...,19\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczby parzyste stoją na miejs-

cach o numerach parzystych.

15. Małpka układa wyraz z liter $I, I, I, I, M, P, P, S, S, S, S$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ułoży $MISSISSIPPI$?

16. **a)** Cztery dziewczynki i czterech chłopców ustawiło się, w sposób losowy, w szeregu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie dziewczynki nie stoją obok siebie?

    b) Cztery dziewczynki i czterech chłopców usiadło, w sposób losowy, przy okrągłym stole. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie dziewczynki nie siedzą obok siebie?

17. Ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 99\}$ losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona podzielna przez 2 lub 3?

18. Roztargniona sekretarka wkłada losowo cztery listy do czterech zaadresowanych kopert. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć jeden list trafi do adresata? Ile wynosi to prawdopodobienstwo, jeśli listów i kopert jest n oraz $n \to \infty$?

19. Roztargniona sekretarka wkłada losowo 10 różnych teczek do trzech różnych szuflad. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna szuflada będzie pusta?

20. Rzucamy symetryczną monetą do momentu otrzymania pierwszego orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

    a) wykonamy dokładnie 3 rzuty,

    b) wykonamy więcej niż 3 rzuty,

    c) wykonamy parzystą liczbę rzutów?

21. Rzucamy symetryczną kostką do gry do momentu otrzymania "jedynki". Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonamy nieparzystą liczbę rzutów?

22. Wybieramy losowo punkt z odcinka $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość tego punktu od środka odcinka jest mniejsza niż $1/4$?

23. Rzucamy strzałką do tarczy, będącej kołem o jednostkowym promieniu. Wynik rzutu to punkt trafienia strzałki w tarczę. Przyjmijmy, że trafienie w każdy punkt tarczy jest jednakowo prawdopodobne i zawsze trafiamy w tarczę. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia w "dziesiątkę" jeśli jest ona kołem o promieniu r $(r < 1)$?

24. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczamy losowo punkty L i M. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

    a) środek odcinka LM należy do $[0, 1/3]$,

    b) odległość między L i M jest mniejsza niż odległość między L i 0 ?

25. Wybieramy losowo punkt z kwadratu $\{(x, y) : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że leży on wewnątrz koła $\left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$?

26. Dwie osoby umówiły się na spotkanie. Każda z nich przychodzi w chwili losowo wybranej między godz. 0:00 a 1:00, niezależnie od drugiej osoby. Ta, która przyjdzie pierwsza, czeka na drugą 20 minut a potem odchodzi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania?

27. Rzucamy raz kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadła liczba oczek mniejsza od 5, jeśli wiadomo, że wyrzucono nieparzystą liczbę oczek?

28. Prawdopodobieństwo, że lekarz postawi właściwą diagnozę dotyczącą pewnej choroby wynosi $0,7$. W przypadku błędnej diagnozy, prawdopodobieństwo wniesienia przez pacjenta sprawy do sądu wynosi $0,9$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że lekarz postawi błędną diagnozę i zostanie pozwany do sądu przez pacjenta?

29. Prawdopodobieństwo, że Kazio pojedzie w tym roku do Australii wynosi $0,5$. Prawdopodobieństwo, że przebywającego w Australii Kazia zaatakuje rekin wynosi $0,001$. Jeśli Kazio będzie w Australii i zostanie zaatakowany przez rekina, to zostanie przez niego zjedzony z prawdopodobieństwem $0,8$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Kazio pojedzie do Australii oraz zostanie zaatakowany i zjedzony przez rekina?

30. Zarząd banku "Pewność", dążący do przejęcia kontroli nad bankiem "Fortuna", ocenia prawdopodobieństwo przejęcia na $0,65$, jeżeli obecny zarząd banku "Fortuna" ustąpi, oraz na $0,30$, jeżeli zarząd nie ustąpi. Szanse ustąpienia zarządu oceniane są na $0,7$. Jakie jest prawdopodobieństwo przejęcia kontroli nad "Fortuną" przez "Pewność"?

31. Z przeprowadzonych badań wynika, że 80% kobiet i 45% mężczyzn ogląda w telewizji seriale. Z grupy złożonej z 1500 kobiet i 2000 mężczyzn wybrano losowo jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba ogląda telewizyjne seriale?

32. W worku jest $(1 - p)m$ rzetelnych, symetrycznych monet i pm monet, które mają po obu stronach orła. Wyciągamy z worka jedną monetę na "chybił trafił", po czym wykonujemy nią n rzutów. We

wszystkich rzutach wypada orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że była to moneta nierzetelna? Zastanowić się do czego dąży to prawdopodobieństwo, gdy $n \to \infty$.

33. Na rynku telekomunikacyjnym w pewnym kraju działają trzy sieci komórkowe. Do sieci A należy 25% klientów, do sieci B 35% a do sieci C pozostałe 40% klientów. Wśród klientów sieci A 60% ma telefony bezabonamentowe (na kartę), w sieci B i C, odpowiednio, 50% i 45% klientów. Wiadomo, że wybrany losowo użytkownik telefonu komórkowego ma telefon na kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on klientem sieci A?

34. Na 100 mężczyzn 5 nie rozróżnia kolorów a na 1000 kobiet 2 nie rozróżniają kolorów. Z grupy o jednakowej liczbie kobiet i mężczyzn wylosowano daltonistę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?

35. Firma ochrony mienia ”Spokój” zainstalowała w domu pana Zenka instalację alarmową połączoną z siedzibą firmy. Przy próbie włamania alarm ten zadziała w 95% przypadków Może się jednak zdarzyć i tak, że alarm włączy się wtedy, gdy nie ma żadnego zagrożenia. Prawdopodobieństwo takiego fałszywego alarmu jest małe i wynosi $0,01$. Biorąc pod uwagę poziom zamożności pana Zenka oraz lokalizację jego domu, prawdopodobieństwo włamania oszacowano na $0,005$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gdy włączy się alarm, naprawdę istnieje zagrożenie?

36. W pewnym mieście działają dwie firmy taksówkowe: "Zielone Taxi" (85% samochodów) i "Niebieskie Taxi" (15% samochodów). Pewnej nocy w tym mieście dochodzi do wypadku, zakończonego ucieczką kierowcy. Świadek wypadku twierdzi, że uczestniczący w nim samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku rzeczywiście uczestniczyła niebieska taksówka?

37. (dylemat więźnia) Trzej spiskowcy: A, B i C zostali skazani na śmierć i oczekują w więzieniu na wykonanie wyroku. Król postanowił ułaskawić jednego z nich, a ponieważ winy spiskowców były porównywalne - król wybrał szcz¸eśliwca w sposób losowy. Następnego dnia wieść o ułaskawieniu dotarła do skazańców lecz nie było jasne, ktory z nich uniknie śmierci. Skazaniec A usiłuje dowiedzieć się, czy został ułaskawiony od więziennego strażnika, lecz ten odmawia odpowiedzi. Gdy A nalega - strażnik zgadza się powiedzieć, który ze spiskowców B lub C zostanie ścięty, ale o losie A nie powie nic. I tak, zdaniem strażnika, ścięty zostanie więzień B.

3

Strażnik rozumuje tak: Każdy z więźniów ma szansę ułaskawienia równą $1/3$. Oczywiście jeden z więźniów B lub C musi być stracony. Zatem mówiąc, że będzie starcony B, nie podałem więźniowi A żadnej informacji na temat jego własnych szans na ułaskawienie.

Spiskowiec A rozumuje tak: Przed zadaniem pytania stażnikowi szanse ułaskawienia oceniałem na $1/3$. Ale skoro strażnik twierdzi, że B będzie starcony, to albo ja albo C zostanie ułaskawiony, więc szansa na to, że to właśnie ja zostałem ułaskawiony wzrosła z $1/3$ do $1/2$.

Kto ma rację: strażnik, który uważa, że nie podał więźniowi A żadnej istotnej informacji czy więzień A, który uważa, że taką informację uzyskał? (Zakładamy, że strażnik wie, który z więźniów został ułaskawiony i że nie kłamie).

38. Zenek uwielbia konkursy organizowane przez stacje radiowe. Prawdopodobieństwo wygrania koszulki w konkursie radia A wynosi $0,1$, natomiast prawdopodobieństwo wygrania koszulki w konkursie B wynosi $0.,2$. Zakładając, że oba konkursy są niezależne, obliczyć prawdopodobieństwo wygrania przez Zenka co najmniej jednej koszulki.

39. Aby przejść do drugiego etapu w pewnym konkursie trzeba odpowiedzieć poprawnie na przynajmniej jedno z trzech zadanych pytań . Z dotychczasowych obserwacji wynika, że prawdopodobieństwa udzielenia poprawnej odpowiedzi na każde z pytań są jednakowe i wynoszą $1/3$. Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia do drugiego etapu jeśli zakładamy, że zdarzenia polegające na udzieleniu poprawnej odpowiedzi na każde z pytań są niezależne?

40. Pewien student mieszka pod Warszawą i na zajęcia dojeżdża najpierw kolejką WKD, a potem tramwajem. Jeśli pociąg lub trawmwaj spóźni się, student nie zdąży na zajęcia. Oszacowano, że prawdopodobieństwa opóźnienia się pociągu i tramwaju wynoszą odpowiednio: $0,3$ i $0,2$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że student przyjedzie o czasie na zajęcia?

41. Każdy z dwóch niezależnych systemów alarmowych działa z prawdopodobieństwem $0,9$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oba zawiodą jednocześnie?

42. Rzucamy trzy razy monetą. Niech A_i oznacza zdarzenie:" w i-tym rzucie wypadł orzeł", $i = 1, 2, 3$. Zbadać niezależność zdarzeń A_1, A_2, A_3.

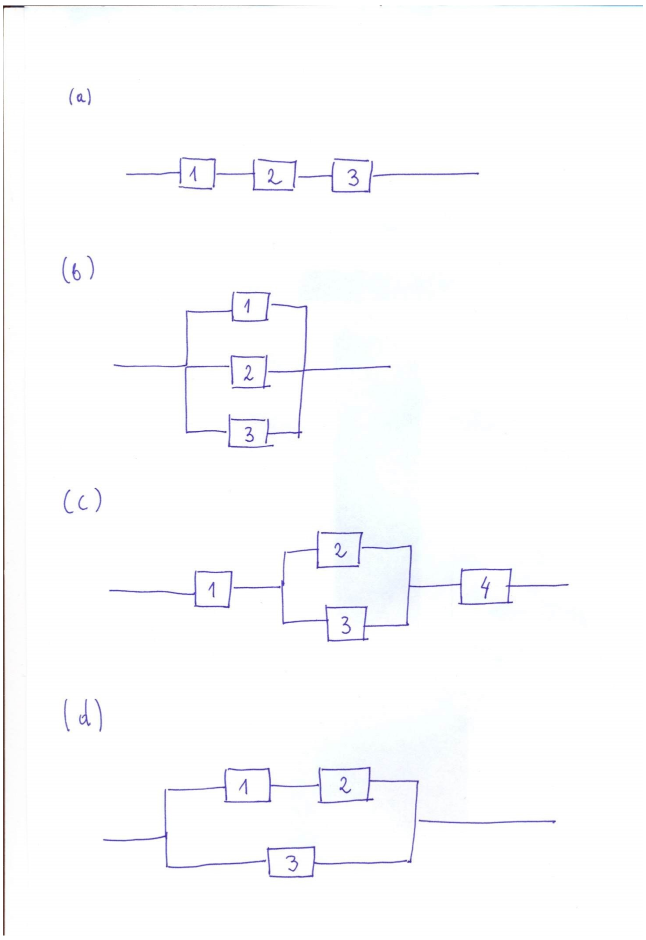
43. Rzucamy czworościanem foremnym, którego trzy ścianki pomalowane są jednolicie: jedna na czerwono, jedna na biało i jedna na zielono, natomiast czwarta ścianka pomalowana jest w czerwono-biało-zielone pasy. Niech C, B, Z oznaczają, odpowiednio, zdarzenia: C - "czworościan upadł na ściankę, na której jest kolor czerwony", B - "czworościan upadł na ściankę, na której jest kolor biały", Z- "czworościan upadł na ściankę, na której jest kolor zielony". Sprawdzić, czy zdarzenia C, B, Z są niezależne.

44. Rozważmy dwa rzuty symetryczną monetą. Zbadać niezależność następujących zdarzeń: $A = \{OR, OO\}$, $B = \{OO, RO\}$, $C = \{OR, RO\}$.

45. Oblicz prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez układy pokazane na rysunku (*plik : przełączniki*)

45. Oblicz prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez układy pokazane na rysunku (*plik : przekaźniki*), składające się przekaźników działających niezależnie od siebie, jeśli prawdopodobieństwo działania każdego z przekaźników wynosi $p = 0,9$.

4



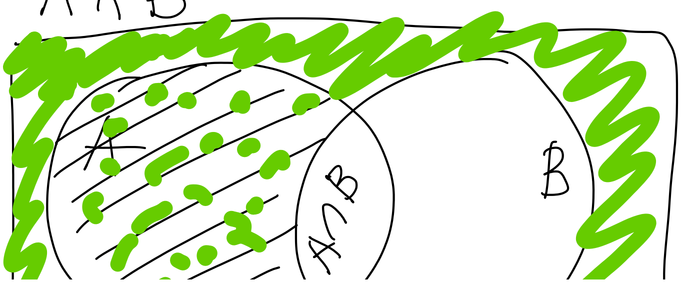
Ćwiczenia 1   3/10/2020

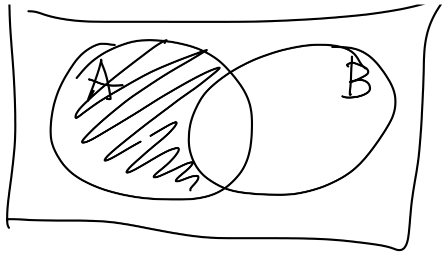
(1) A, B

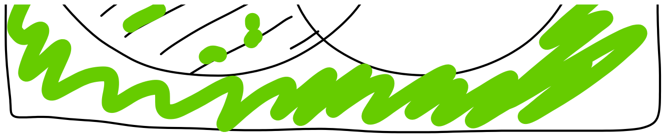
(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$

(c) $A \cap B'$

$A \setminus B$







(d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(e) $A' \cap B' = (A \cup B)'$

---

4. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$\mathbb{P}$ – funkcja $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

(A1) $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A3) $A_1, A_2, \dots$ – ciąg zdarzeń z $\mathcal{F}$ parami rozłącznych: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$$\Omega = \mathbb{N} = \{\underset{\omega_1}{\overset{\parallel}{1}}, \underset{\omega_2}{\overset{\parallel}{2}}, 3, \dots\}$$

(a) $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

$\{n\} = \omega_n$

A1 o.k.

$\mathbb{P}(\{1\}) = 1$

$\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$

A2 ! Czyli $\mathbb{P}$ nie jest p-stwem.

(b) $\mathbb{P}(\{n\}) = c \cdot (-1)^{n+5} / \sqrt{n}$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$

- $c = 0$: $\forall n \quad \mathbb{P}(\{n\}) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 0$
  sprzeczność z A2
- $c \neq 0$

$c > 0$:

$\mathbb{P}(\{1\}) = c \cdot > 0$

$\mathbb{P}(\{2\}) = -c/\sqrt{2} < 0$ sprzeczność z A1

$c < 0$:

$\mathbb{P}(\{1\}) = c < 0$ — " —

$\mathbb{P}$ nie jest p-stwem

(c) $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{c}{n^2}$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$

$c > 0$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$1 = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

[FAKT: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$]

$\alpha = 2 \Rightarrow$ istnieje skończona suma

$\sum^{\infty} 1$

$$S = \sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$$

i w takim razie wystarczy wziąć

$$\boxed{c = \frac{1}{S}}$$

i wtedy $\mathbb{P}$ jest p-stwem

(d) $\mathbb{P}(\{n\}) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}(\{2\}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\vdots$

$$1 \overset{?}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

$a_1 = 3/4$

$q = 3/4$

$|q| < 1 : \quad S = \frac{a_1}{1-q}$

zatem $\mathbb{P}$ nie jest p-stwem.

---

(5) Lotto: losujemy bez zwracania 6 liczb z 49

A – "trafienie szóstki"

$\Omega = \{ \{x_1, x_2, \ldots, x_6\} : \ x_i \in \{1, 2, \ldots, 49\},$
$x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$,
$i, j = 1, 2, \ldots, 6 \}$

x_i – wynik i-tego losowania

! kolejność losowania nie ma znaczenia

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{49}{6}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \\ 0! = 1 \end{array}}$$

$\leftarrow$ liczba podzbiorów k-elementowych zbioru o n elementach (liczba kombinacji)

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\;43!} = \frac{\cancel{43!}\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{\cancel{43!}\;2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} =$$

$$= 13\,983\,816$$

$$\overline{\overline{A}} = 1$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7\cdot 10^{-8}$$

---

(6) 6 kul białych, 2 kule czarne $\Big\}$ 8 kul

Losujemy 4 (kolejność nie ma znaczenia)

A – "wylosowanie 3 kul białych i 1 kuli czarnej"

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{\cancel{4!}\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot \cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4!}\;\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}_{\,1}} = 70$$

6 białych kul $\longrightarrow$ losujemy 3

2 czarne kule $\longrightarrow$ losujemy 1

2 czarnych

$$\bar{\bar{A}} = \binom{6}{3}\cdot\binom{2}{1} = \frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{2!}{1!\,1!} =$$

$$= \frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}\,\cancel{2}\cdot\cancel{3}_{1}}\cdot 2 = 40$$

$$P(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$$

---

(8) Rzucamy 10 razy monetę.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : x_i \in \{O, R\},\ i=1,\ldots,10\}$$

↑ ciągi

x_i – wynik i-tego rzutu monetą

$$\bar{\bar{\Omega}} = 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

$$\boxed{n^k}$$ ← liczba k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego (liczba k-el-owych ciągów)

$$A = \{(R, R, \ldots, R)\}$$

$$\bar{\bar{A}} = 1$$

$$P(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}} = \frac{1}{1024}$$

---

(9) Rzucamy 3 razy kostką do gry

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, 2, \ldots, 6\},\ i=1,2,3\}$$

↑ ciągi

x_i – wynik i-tego rzutu

$\Omega = 6\cdot 6\cdot 6 = 6^3$

A – "za każdym razem inna liczba oczek"

$A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, 2, \dots, 6\} : x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j\}$

$\overline{\overline{A}} = 6\cdot 5\cdot 4$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

B – "za każdym razem ta sama liczba oczek"

$\overline{\overline{B}} = 6\cdot 1\cdot 1 = 6$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

---

n różnych el-tów

$n!$ liczba permutacji

n el-tów : n_i – i-tego rodzaju takich samych

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

$A, A, B, C, C, C \longrightarrow \frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 3!}$

$A_1, A_2, B, C_1, C_2, C_3$ $\quad 6!$

permutacje z powtórzeniami:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

(15) T, T, T, T, M, P, P, S, S, S, S

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{4} \quad \underbrace{\quad}_{2} \quad \underbrace{\quad\quad}_{4}$$

$4+1+2+4 = 11$ liter

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{11!}{4!\cdot 2!\cdot 4!}$$

A — "MISSISSIPPI"

$\overline{\overline{A}} = 1 \qquad P(A) = \frac{1}{\frac{11!}{4!\,2!\,4!}} = \frac{1}{34650}$

(17) $\{1, 2, \ldots, 99\}$

losujemy 1 liczbę

A — "wylosowana liczba dzieli się przez 2 lub 3"

$\overline{\overline{\Omega}} = 99$

B_2 — "liczba dzieli się przez 2"

B_3 — " —— " —— 3"

$A = B_2 \cup B_3$

$\overline{\overline{B_2}} = 49 \qquad \overline{\overline{B_2 \cap B_3}} = 16$

$\overline{\overline{B_3}} = 33$

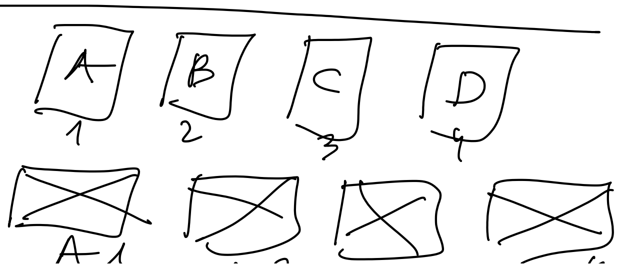
$$P(A) = P(B_2 \cup B_3) = P(B_2) + P(B_3) - P(B_2 \cap B_3)$$

$$= \frac{49}{99} + \frac{33}{99} - \frac{16}{99} = \frac{2}{3}$$

---

(18) 4 różne listy

4 różne koperty



B 2 C 3 D 4

A — "co najmniej 1 list trafi do adresata"

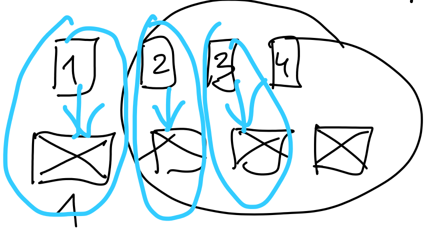
B_i — "list o nr. i trafi do adresata i" , $i = 1, 2, 3, 4$

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{1 \le i \le 4} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} \mathbb{P}(B_i \cap B_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} \mathbb{P}(B_i \cap B_j \cap B_k) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 4!$$

$$\mathbb{P}(B_i) = \frac{3!}{4!}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$



$$\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = \frac{2!}{4!}, \quad i \ne j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbb{P}(\underset{1}{B_i} \cap \underset{2}{B_j} \cap \underset{3}{B_k}) = \frac{1}{4!}, \quad i \ne j \ne k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = \frac{1}{4!}$$

$$\mathbb{P}(A) = 4 \cdot \frac{3!}{4!} - \boxed{\binom{4}{2}} \frac{\cancel{2!}}{\cancel{4!}} + \boxed{\binom{4}{3}} \frac{1}{\cancel{4!}} - \frac{1}{4!}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{2!}\, 2!} \qquad \binom{4}{3} = \frac{\cancel{4!}}{3! \cdot 1!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

Dla n listów i n kopert:

$$P(A) = P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-2)!} \cdot 2!}} \frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{n!}} + \underbrace{\binom{n}{3}}_{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-3)!} \cdot 3!}} \frac{\cancel{(n-3)!}}{\cancel{n!}} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

Dla $n \to \infty$:

$$P(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - e^{-1} \approx 0.63$$

$$\left[\begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \end{array} \right.$$

---

20 $\Omega = \{ \underset{\omega_1}{O}, \underset{\omega_2}{RO}, \underset{\omega_3}{RRO}, \ldots \}$

$\omega_i = \underbrace{R \ldots R}_{i-1} O$ – orzeł po raz pierwszy w i-tym rzucie

$i = 1, 2, \ldots$

Ω – zb. nieskończony, przeliczalny

$$\boxed{P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} P(\{\omega_i\})}$$

$A = \{ \underset{\omega_3}{RRO} \}$ ← "dokładnie trzy rzuty"

$$P(A) = P(\{\omega_3\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$B = \{ \underset{\omega_4}{RRRO}, \underset{\omega_5}{RRRRO}, \ldots \}$ ← "więcej niż trzy rzuty"

rzuty

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) + \mathbb{P}(\{\omega_5\}) + \dots$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = ? \qquad i = 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{O\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{RO\}) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{RRO\}) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) + \mathbb{P}(\{\omega_5\}) + \dots$$
$$= 1 - \mathbb{P}(B')$$

$$B' = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

$$\mathbb{P}(B') = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \mathbb{P}(\{\omega_3\}) =$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0.125$$

C – "wykonano parzystą liczbę rzutów"

$$C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots, \omega_{2n}, \dots\}$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \mathbb{P}(\{\omega_4\}) + \dots + \mathbb{P}(\{\omega_{2n}\}) + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega_{2n}\}) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$a_1 = 1/4$$

$= \frac{1}{3}.$

$q = 1/4$

$S = \frac{a_1}{1-q}$

(26) x – czas przyjścia osoby A na spotkanie (liczba godzin od 0:00)

$x \in [0, 1]$

$x = 0 \rightarrow$ 0:00

$x = 1 \rightarrow$ 1:00

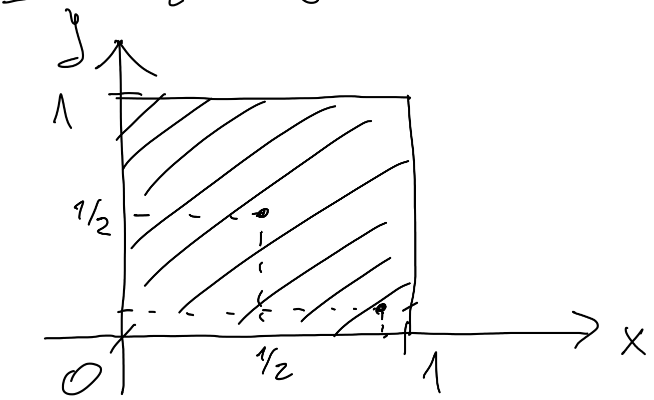
$x = \frac{1}{4} \rightarrow$ 0:15

$x = \frac{1}{2} \rightarrow$ 0:30

y – czas przyjścia osoby B (liczba godzin od 0:00)

$y \in [0, 1]$

$\Omega = \{ (x, y) : x \in [0,1], y \in [0,1] \}$



Pierwsza osoba czeka na drugą

20 min $= \frac{1}{3}$ godziny

S – " spotkanie A i B " $P(S) = ?$

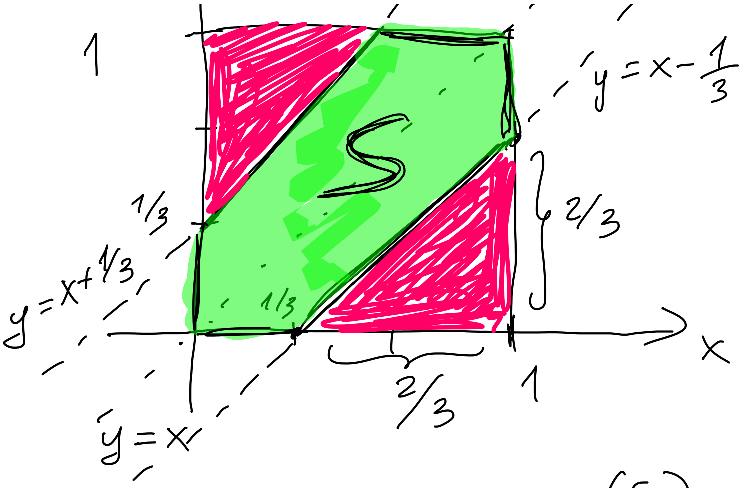
$\text{miara}(\Omega) = \text{pole}(\Omega) = 1$

$S = \{ (x,y) \in \Omega : |x - y| \leq \frac{1}{3} \}$

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq x - y \leq \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y \leq x + \frac{1}{3} \\ y \geq x - \frac{1}{3} \end{cases}$$



$\text{miara}(S) = \text{pole}(S)$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$$P(S) = \frac{\text{miara}(S)}{\text{miara}(\Omega)} = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9}$$

(28) W – " właściwa diagnoza "

$P(W) = 0,7$

S – " sprawa w sądzie "

$P(S \mid W') = 0,9$

$P(W' \cap S) = P(S \mid W') \underbrace{P(W')}_{1-P(W)}$

$= 0,9 \cdot (1 - 0,7) = 0,9 \cdot 0,3 = 0,27$

$P(S \mid W') =$

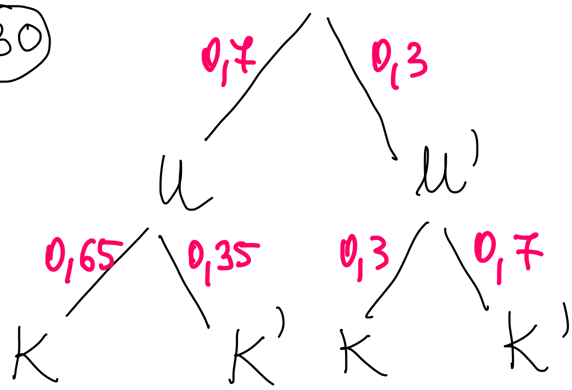
$= \frac{P(S \cap W')}{P(W')}$

$\Downarrow$

$P(S \cap W') =$

$= P(S \mid W') P(W')$

(30)



U – " ustrzepienie zangobe bouleu F "

$P(U) = 0,7$

K – " miejsce kontroli nad boulem F przed boule F "

$P(K \mid U) = 0,65$

$P(K \mid U') = 0,3$

$P(K) = ?$

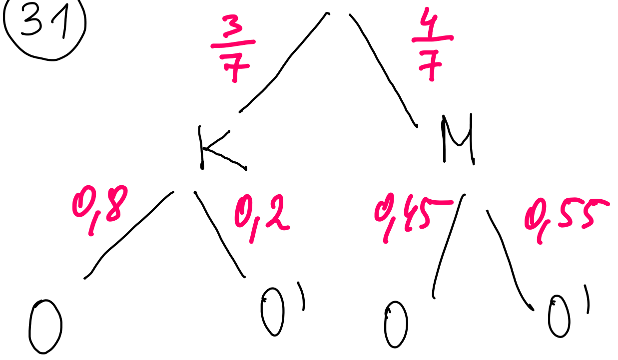
$P(K) = P(K \mid U) P(U) +$

$+ P(K \mid U') P(U') =$

$= 0,65 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3$

$= 0{,}545$)

31



K – "wylosowana osoba jest kobietą"

M – " . . . . mężczyzną"

$K' = M \quad \left(\begin{matrix} \Omega = K \cup M \\ K \cap M = \emptyset \end{matrix} \right)$

O – "wylosowana osoba ogląda seriale"

$P(O|K) = 0{,}8$

$P(O|M) = 0{,}45$

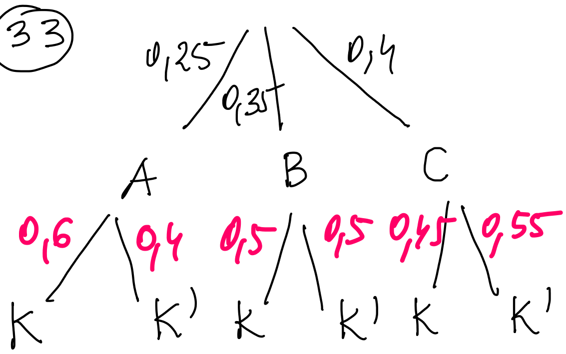
1500 kobiet, 2000 mężczyzn } 3500 osób

$P(K) = \frac{1500}{3500} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

$P(M) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}$

$P(O) = P(O|K)P(K) +$
$+ P(O|M)P(M) =$
$= 0{,}8 \frac{3}{7} + 0{,}45 \cdot \frac{4}{7} = 0{,}6$

33



A – "wybrana losowo osoba jest klientem sieci A"

B – " " ——— B"

C – " " ——— C"

K – " ——— " — ma telefon na kartę"

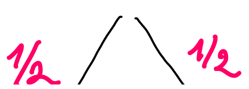
$P(A) = 0{,}25$	$P(K\|A) = 0{,}6$
$P(B) = 0{,}35$	$P(K\|B) = 0{,}5$
$P(C) = 0{,}4$	$P(K\|C) = 0{,}45$

$P(K) = P(K|A)P(A) +$
$+ P(K|B)P(B) +$
$+ P(K|C)P(C) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}35 + 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}505$

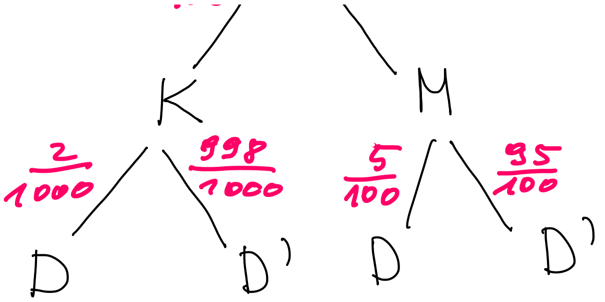
$P(A|K) = ?$

$P(A|K) = \frac{P(K|A)P(A)}{P(K)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}25}{0{,}505} \approx 0{,}295$

34



K – "wylosowana osoba jest kobietą"



M – " wylosowana osoba jest mężczyzną "

$K \cup M = \Omega$

$K \cap M = \emptyset$

$P(K) = P(M) = \frac{1}{2} > 0$

D – " wylosowano daltonistę "

$P(D|M) = \frac{5}{100}$

$P(D|K) = \frac{2}{1000}$

$$P(D) = P(D|K)P(K) + $$
$$+ P(D|M)P(M) = $$
$$= \frac{2}{1000} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}026$$

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = $$
$$= \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2}}{0{,}025} \approx 0{,}96 = \frac{50}{52}$$

---

(41) A_i – " działa i-ty system alarmowy "

$i = 1, 2$

A_1 i A_2 są niezależne

$P(A_1) = P(A_2) = 0{,}9$

$$\boxed{\text{tzn. } P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)}$$

$$P(A_1' \cap A_2') = ?$$

$$P(A_1' \cap A_2') \underset{\uparrow}{=} P(A_1')P(A_2') = $$
$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = $$
$$= (1-0{,}9)(1-0{,}9) = 0{,}1^2 = 0{,}01$$

(42) $\Omega = \{ OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR \}$

A_i – " w i-tym rzucie wypadł orzeł "

$i = 1, 2, 3$

$A_1 = \{ OOO, OOR, ORO, ORR \}$

$A_2 = \{ OOO, OOR, ROO, ROR \}$

$A_3 = \{ OOO, ORO, ROO, RRO \}$

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=P(A_1\cap A_2)\overset{\cancel{?}}{=}P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=P(A_1\cap A_3)\overset{\cancel{?}}{=}P(A_1)P(A_3)=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=P(A_2\cap A_3)\overset{\cancel{?}}{=}P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{8}=P(A_1\cap A_2\cap A_3)\overset{\cancel{?}}{=}P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}$$

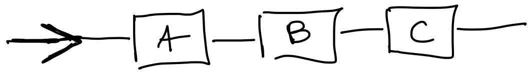
$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Zatem A_1, A_2 i A_3 są niezależne

---

(45)

(a)



A – "działa przekaźnik A"
B – '' B
C – '' C

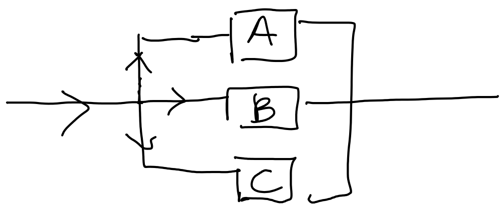
$P(A)=P(B)=P(C)=p=0{,}9$

A, B, C – niezależne

S – "przepływa sygnał przez układ przekaźników"

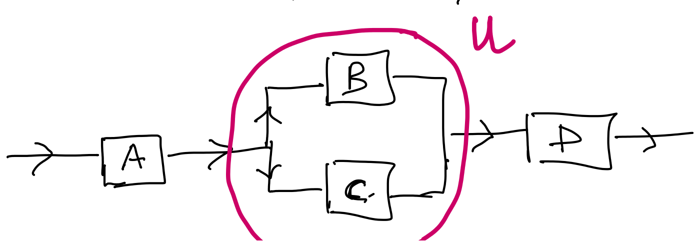
$$S=A\cap B\cap C$$
$$P(S)=P(A\cap B\cap C)=$$
$$=P(A)P(B)P(C)$$
$$=p^3=0{,}9^3=0{,}729$$

(b)



$$S=A\cup B\cup C$$
$$P(S)=\boxed{P(A\cup B\cup C)=1-P(A'\cap B'\cap C')}=$$
$$=1-\underbrace{P(A')}_{1-P(A)}\underbrace{P(B')}_{1-P(B)}\underbrace{P(C')}_{1-P(C)}$$
$$=1-(1-p)(1-p)(1-p)=1-(1-p)^3$$
$$=1-0{,}1^3=0{,}999$$

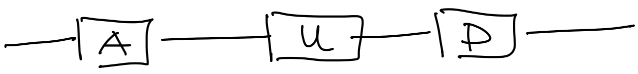
(c)



A, B, C, D – niezależne

$P(A)=P(B)=$
$=P(C)=P(D)=$
$=p=0{,}8$

$p = 0{,}9$

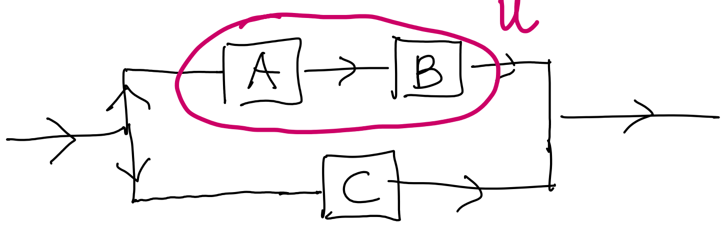


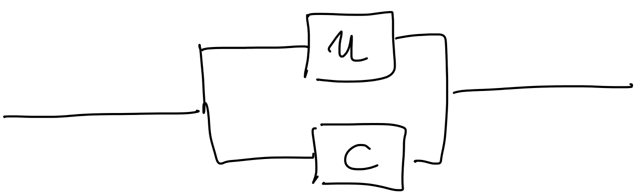
$$P(S) = P(A \cap U \cap D) =$$
$$= \underbrace{P(A)}_{p}\, P(U)\, \underbrace{P(D)}_{p}$$

$$P(U) = P(B \cup C) = 1 - P(B' \cap C') =$$
$$= 1 - \underbrace{P(B')}_{1-p}\, \underbrace{P(C')}_{1-p}$$
$$= 1 - (1-p)^2$$

$$P(S) = p^2\left[1-(1-p)^2\right] = 0{,}9^2\left[1-0{,}1^2\right] =$$
$$= 0{,}81 \cdot 0{,}99 = 0{,}8019$$

(d)





$$P(S) = P(U \cup C) = 1 - P(U' \cap C') =$$
$$= 1 - P(U')\, P(C') =$$
$$= 1 - \left[1 - P(U)\right](1-p)$$

$$P(U) = P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = p^2$$
$$P(S) = 1 - (1-p^2)(1-p) =$$

$$= 1 - 0{,}19 \cdot 0{,}1 = 0{,}981$$

Kolokwium 1 → 7/11/2020

45 min → 2 potowa zajęć

Inspera ⟺ $14^{15} - 15$

3 krótkie zadania ~ 30 min

+ 15 min

(1) - - - - →