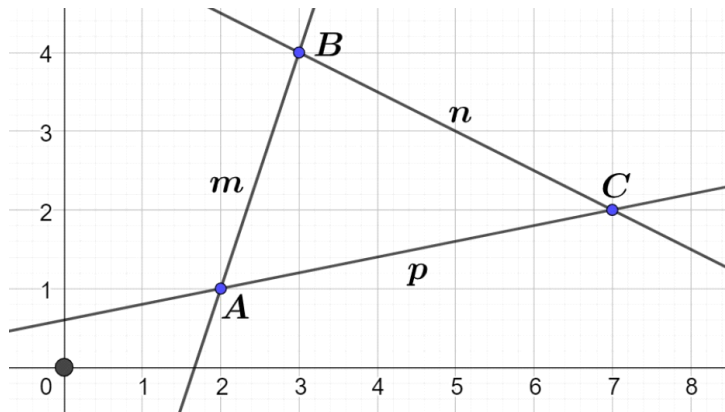


Wybrane zadania z egzaminów z algebry z poprzednich dwóch lat

Zadanie 1.



- ☐ Równanie prostej m to $3x - y - 5 = 0$
- ☐ Kąt BAC ma 60 stopni
- ☐ $[1,2]$ jest wektorem normalnym prostej n
- ☐ $[1,5]$ jest wektorem kierunkowym prostej p
- ☐ $[-2,-4]$ jest wektorem normalnym prostej n
- ☐ Jeden z boków trójkąta ABC ma długość 5 .
- ☐ Trójkąt ABC ma pole 8
- ☐ Wektory \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CA} są liniowo niezależne.

Komentarz. Pamiętajmy, że wektor normalny linii prostej to wektor do niej prostopadły. Jeżeli linia prosta ma równanie $Ax + By + C = 0$, to $[A, B]$ jest wektorem normalnym. Linia prosta ma nieskończenie wiele wektorów normalnych. Równanie prostej można wyznaczyć na kilka sposobów, na przykład z pomocą wyznacznika. Na przykład prosta m przechodzi przez $(2,1)$ i $(3,4)$, ma zatem równanie , a więc (Wolfram):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ y & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Result $-3x + y + 5 = 0$

Geometric figure line

Oczywiście na pierwsze pytanie tego zadania można odpowiedzieć po prostu sprawdzając, czy punkty A i B spełniają podane równanie.

Podobny wyznacznik może służyć też do obliczenia pola trójkąta. Pole trójkąta jest połową jego wartości bezwzględnej:

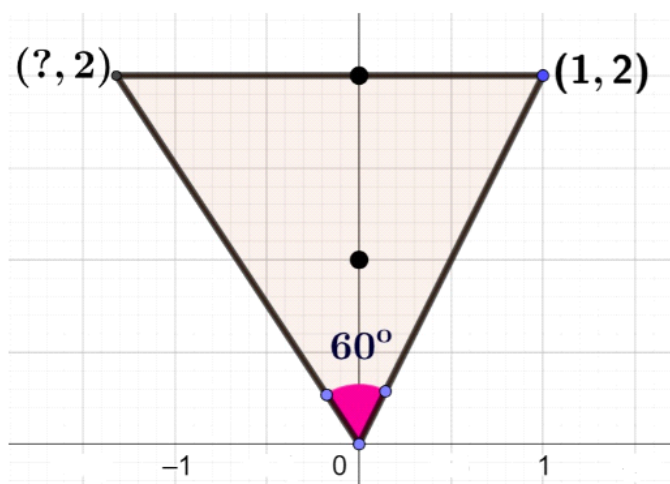
Input interpretation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Result -14

To samo daje wyznacznik złożony ze współrzędnych wektorów rozpinających dany trójkąt.

Zadanie 2. Wyznacz współrzędne zaznaczonego punktu



Rozwiązanie. Wektory zaczepione w $(0,0)$ to $[x, 2]$ i $[1,2]$. Kosinus kąta między nimi to $\frac{x+4}{\sqrt{5(x^2+4)}}$. Ma to być równe $\frac{1}{2}$. Można to równanie przekształcić do równania kwadratowego i rozwiązać. Wynik: $x = 16 - 10\sqrt{3}$. Sprawdźmy „na oko”, czy się zgadza. $\sqrt{3}$ to trochę więcej niż 1,7, zatem $10\sqrt{3}$ to trochę więcej niż 17, współrzędną naszego punktu jest zatem „minus jeden z hakiem”. Na oko się zgadza. Gdyby się nie zgadzało, znaczyłoby, że rozwiązanie jest złe.

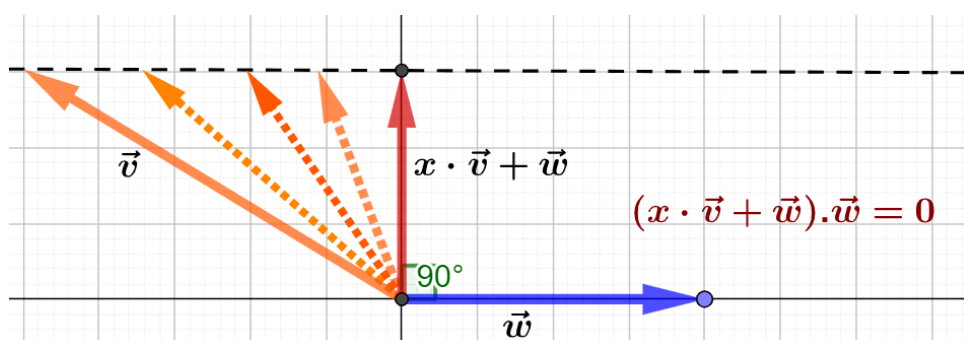
Zadanie 3. Dana jest macierz

- Podaj bazę prostopadłą przestrzeni wierszowej macierzy.
- Podaj bazę prostopadłą przestrzeni kolumnowej macierzy.

- Podaj bazę prostopadłą przestrzeni zerowej tej macierzy.
- Podaj bazę prostopadłą przestrzeni zerowej macierzy A^T .
- Podaj bazę prostopadłą przestrzeni rozwiązań układu równań

$$x+y+z+2t = x+y-2z+3t = 0$$

Szkic rozwiązania. Obliczamy najpierw rząd tej macierzy. Jest równy 2, zatem są dwa wiersze i dwie kolumny są liniowo niezależne. Weźmy na przykład pierwszy i trzeci wiersz (mają najmniejsze współrzędne, w tym jedną zerową). Nie są one prostopadłe (ich iloczyn skalarny nie jest 0, lecz 9). Stosujemy tak zwaną ortogonalizację. Pozostając w tej samej płaszczyźnie, zmieniamy jeden z wektorów, aż osiągniemy prostopadłość. Symbolicznie:



Odpowiedź do c). Taką bazą może być na przykład $[1, -1, 0, 0]$ i $[7, 7, -2, -6]$.

Zadanie 4 a.

Dla jakich liczb x cztery macierze:

jednostkowa I , macierz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, macierz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ oraz iloczyn AB są liniowo zależne?

Rozwiązanie. Mamy $AB = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Traktujemy macierz jako wektory (wpisywane wierszowo). Są one zatem liniowo niezależne, gdy odpowiedni wyznacznik jest równy zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Result } x^2 - 2x$$

Zatem są one liniowo zależne dla $x = 0$, $x = 2$.

Zadanie 4b. Dla jakich x cztery macierze A , B , AB i BA (te z zadania 4a) są liniowo zależne

są liniowo zależne?

Zadanie 4c. Dla jakich x macierze I, A, B, AB, BA (z poprzedniego zadania) są liniowo zależne?

Odpowiedź do 4c. Wymiar przestrzeni macierzy kwadratowych 2×2 jest równy 4. Pięć wektorów w takiej przestrzeni zawsze jest liniowo zależnych.

Zadanie 5.

Przekształcenie liniowe f ma w bazie e_1, e_2, e_3 macierz A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Czy jest baza, w której ma ono macierz $B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

? Jeśli nie, to uzasadnij. Jeżeli tak, to opisz, jak ją wyznaczyłeś/łaś.

Komentarz. Zadanie może być „trudne” ze względu na swoją prostotę – są tu same zera i jedynki i może się wszystko nam „pomieszać”. Najprościej jest skorzystać ze wzoru na zmianę macierzy przekształcenia przy zmianie bazy: . Inaczej mówiąc, jeżeli A, B są macierzami tego samego przekształcenia w dwóch różnych bazach, to są związane zależnością $B = M^{-1}AM$, a więc także $AM = MB$. Poszukajmy zatem macierzy M .

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

$$b = 0, \quad d = c - a, \quad e = a, \quad g = 0, \quad h = 0, \quad i = a$$

Wybiorę na przykład tak $a = 1, c = 1$. Muszę tylko pamiętać, żeby dostać macierz o niezerowym wyznaczniku. Wtedy mam macierz przejścia (macierz zmiany bazy):

Daje to bazę $w_1 = [1,0,0], w_2 = [0,1,0], w_3 = [1,0,1]$. Sprawdzę, że „się zgadza”.

Z określenia f wynika, że jest ono dane wzorem $(x, y, z) \rightarrow (x+z, x+y, z)$. . Zatem

$$w_1 = [1,0,0] \rightarrow [1, 1, 0] = w_1 + w_2 = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$$

$$w_2 = [0,1,0] \rightarrow [0, 1, 0] = w_2 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$$

$$w_3 = [1, 0, 1] \rightarrow [2, 1, 1] = w_1 + w_2 + w_3 = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3$$

Zgadza się.

Zadanie 6a

Wyznacz bazę i przedstawienie parametryczne układu równań:

$$x + 2y + 3z + t + u = 0.$$

$$3x + 3y + 3z + 2t + 5u = 0$$

$$x + y + z + 2t + 3u = 0$$

$$2x + 3y + 4z + 3t + 4u = 0$$

Odpytajmy najpierw chatgpt

Przedstawienie parametryczne przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + t + u &= 0 \\3x + 3y + 3z + 2t + 5u &= 0 \\x + y + z + 2t + 3u &= 0 \\2x + 3y + 4z + 3t + 4u &= 0\end{aligned}$$

to:

$$\begin{aligned}x &= -2t - u \\y &= t \\z &= u \\t &= t \\u &= u\end{aligned}$$

Mogę również przedstawić to jako wektor parametryczny:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - u \\ t \\ u \\ t \\ u \end{bmatrix}$$

To przedstawienie parametryczne opisuje wszystkie możliwe rozwiązania układu równań w zależności od parametrów t i u . Wektory $[-2, 1, 0, 1, 0]$ i $[-1, 0, 1, 0, 1]$ są wektorami kierunkowymi przestrzeni rozwiązań.

Sprawdzamy, że się nie zgadza. Wektor $[-1, 0, 1, 0, 1]$ nie spełnia np. równania $x + y + z + 2t + 3u = 0$:

$$-1 + 0 + 1 + 0 + 3 = 3 \neq 0$$

Dziękuję, zadanie niezaliczone

Poprawne rozwiązanie (Wolfram)

$$(x+2y+3z+t+u=0, 3x+3y+3z+2t+5u=0, x+y+z+2t+3u=0, 2x+3y+4z+3t+4u=0)$$

Solution $u = -t, \quad y = 3t - 2x, \quad z = x - 2t$

Co to znaczy? To znaczy, że biorąc za t i x dowolne wartości, otrzymamy wszystkie rozwiązania. Na ogół najprościej jest przyjąć $x = 0, t = 1$ a potem na odwrót, $x = 1, t = 0$, żeby otrzymać bazę. Prowadzi to do wektorów $[0, 3, -2, 1, -1], [1, -2, 1, 0, 0]$.

Wezmę inaczej, najpierw $x = 7, t = 9$, a potem $x = 4, t = 5$. Wybory te są niezależne, bo $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Otrzymam takie wektory $[x, y, z, t, u] : [7, 13, -11, 9, -9], [4, 7, -2, 5, -5]$.

Wyznaczę jeszcze macierz przejścia od jednej bazy do drugiej:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Istotnie: } [7, 13, -11, 9, -9] = 9 [0, 3, -2, 1, -1] + 7 [1, -2, 1, 0, 0]$$

Zadanie 6b. Wpisz równanie do GPT. Sprawdź, czy poda prawidłową odpowiedź. Uzasadnij, dlaczego jest dobrze (albo dlaczego jest źle).



You

Podaj bazę przestrzeni rozwiązań układu równań $x + 2y + 3z + t + u = 0$.

$$3x + 3y + 3z + 2t + 5u = 0$$

$$x + y + z + 2t + 3u = 0$$

$$2x + 3y + 4z + 3t + 4u = 0$$



ChatGPT

Aby znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań, musimy znaleźć wszystkie linie proste w tej przestrzeni. W tym przypadku, ze względu na to, że t i u są zmiennymi swobodnymi, możemy przedstawić rozwiązania jako kombinację liniową wektorów.

Zatem baza przestrzeni rozwiązań będzie zawierała te wektory.

Rozwiązanie poprawne (Wolfram):

Input

$$\{3x + 3y + 3z + 2t + 5u = 0, \\ x + y + z + 2t + 3u = 0, 2x + 3y + 4z + 3t + 4u = 0\}$$

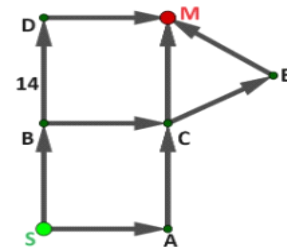
Solution $u = -t, \quad y = 3t - 2x, \quad z = x - 2t$

$$\text{Czyli } (x, y, z, t, u) = (x, 3t - 2x, x - 2t, t, -t) = x[1, -2, 1, 0, 0] + t[0, 3, -2, 1, -1]$$

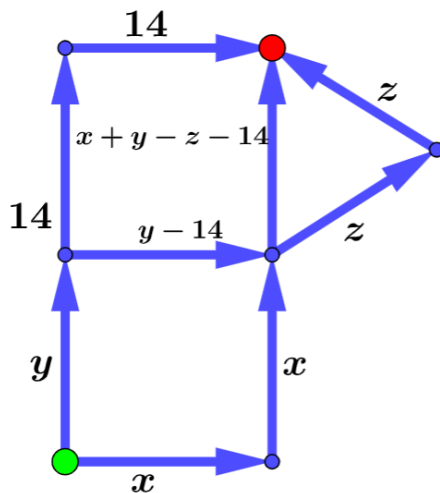
Zadanie 7a.

Wyznacz przepływy w tej sieci. S = start (początek, витік, input), M = meta (koniec, гирло, output).

Przyjmij, że na odcinku BD przepływ wynosi 14.



Wprowadź odpowiedź. Podaj przepływy na pozostałych odcinkach. Wyjaśnij krótko, jak doszedłeś do tego rozwiązania.



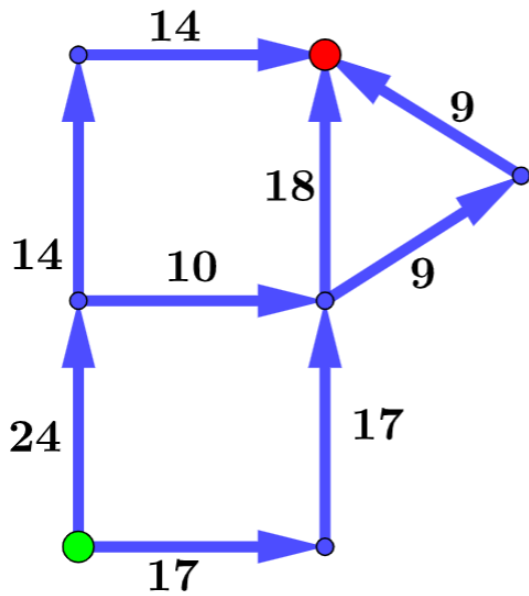
Dolna pętla $2x = 2y - 14$, Górna pętla $28 = (y-14) + (x+y-z-14)$

Prawa pętla: $2z = x+y-z-14$. Rozwiązujemy

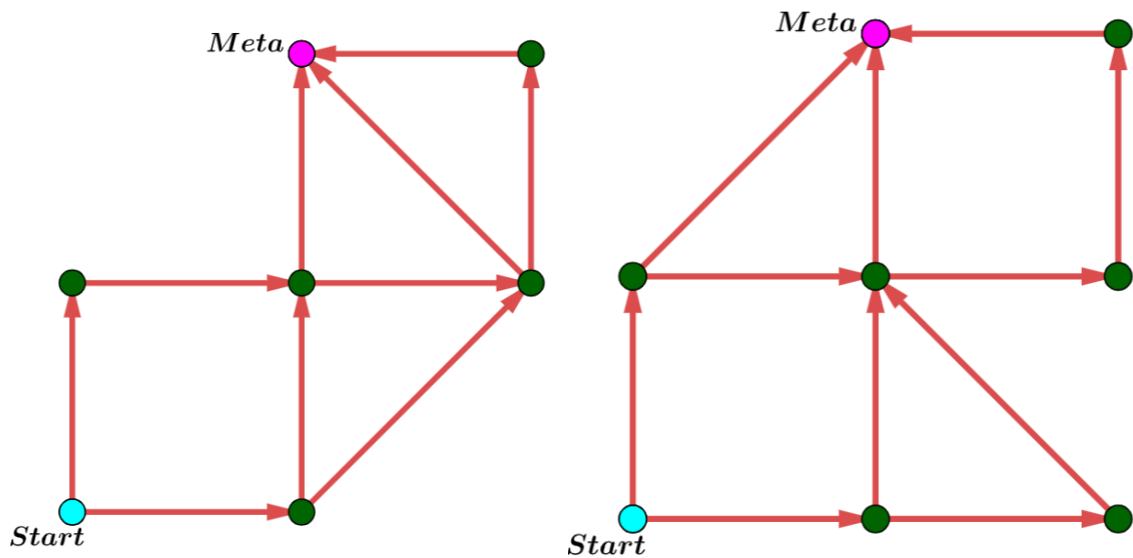
Input

$$\{2x = 2y - 14, (y - 14) + (x + y - z) - 14 = 28, 2z = x + y - z - 14\}$$

Solution $x = 17, y = 24, z = 9$



Zadanie 7b. Wyznacz przepływy. Dobierz tak, by otrzymać tylko liczby całkowite (nie ułamkowe).



Zadanie 8

Macierz symetryczna to taka, która jest równa swojej macierzy transponowanej. Podaj bazę i wymiar przestrzeni macierzy symetrycznych o 3 wierszach i trzech kolumnach. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Macierz symetryczna 3x3 ma ogólną postać $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ i może być przedstawiona jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej macierzy

$$a \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Te macierze tworzą zatem bazę.

Zadanie 8a. Macierz antysymetryczna to taka macierz A , że $A^T = -A$. Wykaż, że

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

nie są bazą przestrzeni macierzy antysymetrycznych rozmiaru 3×3 , ale da się z nich wybrać jakąś bazę. Wybierz ją i oblicz współrzędne macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{pmatrix}$ w wybranej bazie.

Zadanie 9.

Macierz A to $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podaj bazę i wymiar przestrzeni złożonej z tych macierzy X , dla których $AX = XA$, albo uzasadnij, że takich macierzy nie ma

Rozwiązanie. Takie macierze zawsze są, choćby jednostkowa i zerowa. Szukamy:

Input

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Result

$$b = 0, \quad e = a + 3c - 2d, \quad f = d - c, \quad g = 3c, \quad h = 0, \quad i = a$$

Widzimy, że rozwiązanie zależy od trzech stałych dowolnych a, c, d . Wymiar jest zatem równy 3. Bazę mogą tworzyć trzy macierze, na przykład odpowiadające układom (a, c, d) równym kolejno $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Są to macierze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Każda macierz przemienna z A da się wyrazić jako kombinacja liniowa tych trzech podanych wyżej.

Zadanie 9a.

Podaj bazę i wymiar wszystkich macierzy przemiennej z $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 10. Opisz zbiór rozwiązań układu równań o podanej macierzy. Podaj przykład dwóch prostopadłych rozwiązań.

Rozwiązanie. „Opisz” znaczy tutaj: podaj wymiar i bazę przestrzeni wszystkich rozwiązań. Najtrudniejsza część zadania to chyba poprawne wpisanie macierzy i rozgarnięcie się w tym, co otrzymamy na ekranie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \{x, y, z, t, u, v\} = \{0, 0, 0, 0\}$$

Solution $y = -t - v, \quad z = -u - v - x$

Macierz układu ma rząd 2, a zatem dwa równania są zbędne. Przestrzeń rozwiązań jest wymiaru $6 - 2 = 4$ (sześć zmiennych, rząd = 2). Widzimy zresztą, że rozwiązania zależą od aż czterech parametrów: x, t, u, v . Rozwiązanie ogólne to

$$(x, y, z, t, u, v) = (x, -t-v, -u-v-x, t, u, v) = \\ = \mathbf{x}(1, 0, -1, 0, 0, 0) + \mathbf{t}(0, -1, 0, 1, 0, 0) + \mathbf{u}(0, 0, -1, 0, 1, 0) + \mathbf{v}(0, -1, -1, 0, 0, 1) .$$

Wyróżnione **na czerwono** wektory dają przykład bazy. Dwa pierwsze są prostopadłe.

Zadanie 11a. Masz 16 wektorów $[\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4]$. Dlaczego jest ich szesnaście? Wybierz nich bazę przestrzeni czterowymiarowej. Uzasadnij, że wybrałeś właśnie bazę.

Zadanie 11b. Masz układ aż szesnastu równań: $\pm x \pm y \pm z \pm t = 0$. Dlaczego jest ich szesnaście? Jakie jest rozwiązanie tego układu? Nie wpisuj wszystkich szesnastu równań do Wolframa, bo się zmęczysz.

Zadanie 11c. Z równań z zadania 8b wybierz takie cztery, żeby przestrzeń rozwiązań otrzymanego układu miała wymiar 2.

Zadanie 12

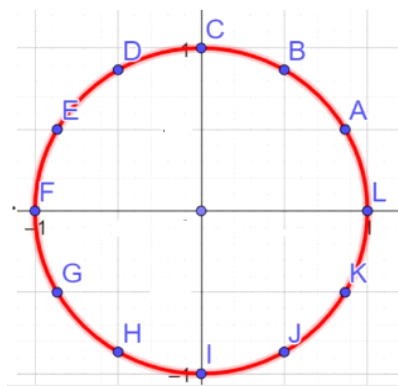
Masz macierz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & x & 8 & 1 \\ 1 & 1 & x & 5 & 0 \\ x & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & x & 11 & x \end{pmatrix}$, zależną od parametru x .

1. Wyznacz jej rząd w zależności od parametru x .
2. Dla $x=2$, wyznacz taką bazę przestrzeni wierszowej, która zawiera wektor postaci $[a-1, a, -a, -a]$ lub wykaż, że takiej bazy nie ma. Uzasadnij swoją odpowiedź.
4. Podaj przykład bazy złożonej z wektorów prostopadłych. Opisz, jak do tego doszedłeś.
5. Czy istnieje taka baza przestrzeni zerowej macierzy A^T , która składa się z wektorów, mających pierwszą współrzędną równą zero? Uzasadnij swoją odpowiedź.
6. Wyznacz macierz przejścia od bazy $[3, 4, 2, 8, 1]$, $[1, 1, 2, 5, 0]$ do bazy $[2, 3, 0, 3, 1]$, $[5, 7, 2, 11, 2]$.

Zadanie 13.

Na rysunku widzisz okrąg złożony z liczb zespolonych o module 1.

- 1) Podaj rozwiązanie równania $z^4 \cdot \bar{z} + 1 = 0$.
- 2) Oblicz iloczyn wszystkich liczb, to znaczy ABCDEFGHIJKL.



Odpowiedź. Podane równanie spełniają B, F, J . Iloczyn wszystkich tych liczb jest równy -1 . Wszystko wynika ze wzoru de Moivre'a. Nieco prościej jest skorzystać z tego, że iloczyn liczby zespolonej i sprzężonej do niej to kwadrat modułu. Obliczmy najpierw moduł. Równanie przepisuję w postaci $z^4 \cdot \bar{z} = -1$, dopisuję moduł po obu stronach i mam od razu, że $|z| = 1$. Niech więc $z = a \cos \alpha + b \sin \alpha$.

Mnożę podane równanie przez z i dostaję $z^4 = -z$, czyli $z^3 = -1$. Zatem rozwiązania to B, F, J .

Wszystkie liczby mają moduł 1, a zatem ich iloczyn też. Iloczyn wszystkich liczb ma moduł 1. Argument liczę w częściach kąta pełnego: $1/12, 2/12, 3/12, 4/12$, itd. Łącznie $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)/12 = 11 \cdot 12 / (2 \cdot 12) = 11/2$ kąta pełnego = 5 i pół kąta pełnego. Iloczyn jest równy -1 .

Zadanie 14a

Dana jest macierz $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Dla jakiego x wektor $[x, 1, -1, x]$ jest jej wektorem własnym?

Rozwiązanie. Mnożę:

Input

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot [x, 1, -1, x]$$

Result

$$(-2x, -4 + 2x, 4 - 2x, -2x)$$

Zatem $x = 1$.

Zadanie 14b. To samo dla macierzy $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

Input

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot [x, 1, -1, x]$$

Result

$$(4x, 2 + 2x, -2 + 2x, 4x)$$

Patrzymy na pierwszą współrzędną. Wartością własną musi zatem być 4. Wtedy (patrzymy na drugą współrzędną): $2+2x = 4$, tzn. $x=1$. Ale to nie zgadza się z trzecią współrzędną. Nie ma takiego wektora własnego.

Zadanie 15.

Masz takie wektory: pierwszy = $[1,2,3,4]$, drugi = $[4,3,2,1]$, trzeci = $[7,4,1,-2]$, czwarty = $[1,0,0,0]$. Które odpowiedzi są poprawne?

- ☐ Pierwszy i drugi są liniowo niezależne.
- ☐ Pierwszy, drugi i trzeci są liniowo niezależne.
- ☐ Drugi, trzeci i czwarty są liniowo niezależne.
- ☐ Wszystkie cztery są liniowo niezależne.

☐ Przestrzeń rozwiązań układu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma wymiar 2.

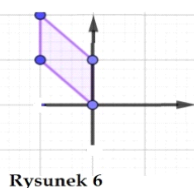
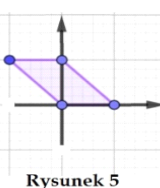
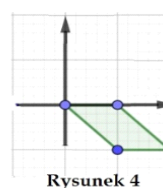
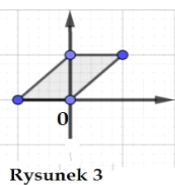
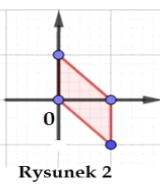
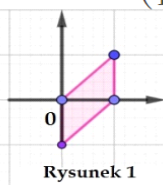
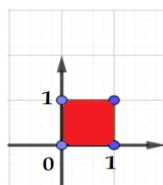
☐ Przestrzeń wierszowa macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ma wymiar 2.

Zadanie 16.

Wyznacz wszystkie wartości x , dla której rząd macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ jest równy 2

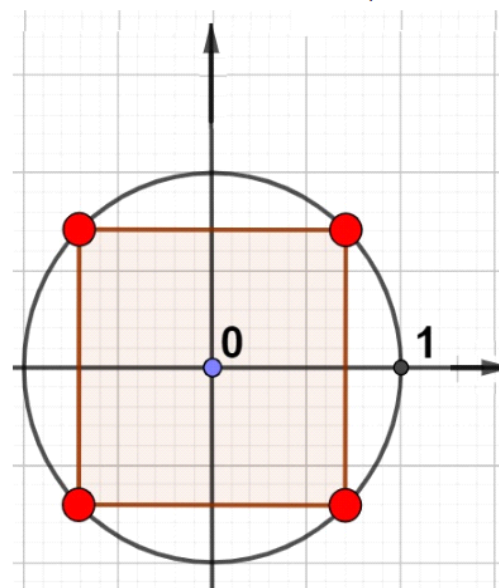
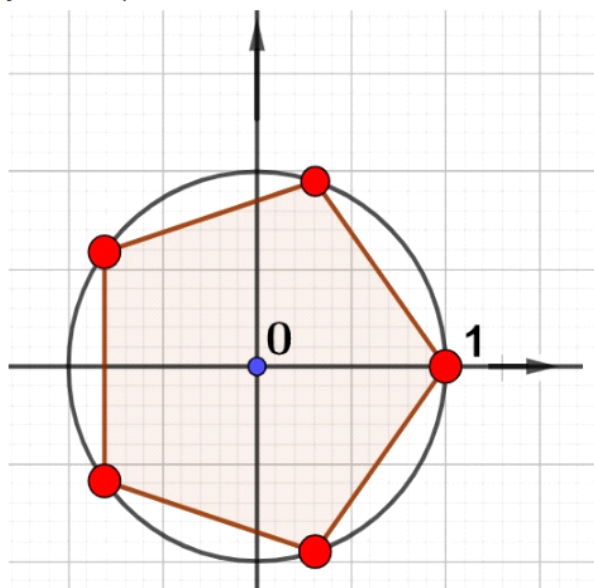
Zadanie 17.

Na którym z rysunków jest obraz kwadratu o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ przy przekształceniu o macierzy $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?



Zadanie 18

Dane są dwa rysunki, Lewy i Prawy i sześć równań. Czerwone kropki na rysunkach to liczby zespolone. Dopasuj, które równania pasują do tych liczb. Dla każdego rysunku jest tylko jedna odpowiedź.



Pierwsze $z^4 - \bar{z} = 0$, Drugie $z^4 + \bar{z} = 0$, Trzecie $z^5 + 1 = 0$

Czwarte $z^4 - \bar{z} = 1$, Piąte $z^4 + 1 = 0$, Szóste $z^4 - 1 = 0$

Zadanie 19a.

Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- 1) Wyznacz taki wektor przestrzeni zerowej tej macierzy, który ma długość 1.
- 2) Czy jest taki wektor własny macierzy A , którego suma współrzędnych jest równa 1 ? **(uzasadnij odpowiedź)**
- 3) Z trzech wektorów $[0, 1, -1]$, $[-1, 1, 0]$, $[1, 1, 1]$ wybierz dwa, które tworzą bazę pewnej przestrzeni własnej macierzy A . Uzasadnij swój wybór.
- 4) Wyznacz taką macierz M , że $B = M^{-1}AM$ ma postać diagonalną. Wyznacz tę macierz B .

Zadanie 19b

Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 10 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- 1) Czy jej kolumny są liniowo zależne, czy liniowo niezależne? **(uzasadnij odpowiedź!)**
- 2) Czy jest taki wektor własny macierzy A , którego suma współrzędnych jest równa 0 ? **(uzasadnij odpowiedź)**
- 3) Czy wektory $[-1, 2, -3]$, $[2, -5, 0]$ tworzą bazę pewnej podprzestrzeni własnej macierzy A ? Jeżeli uważasz, że nie tworzą, to **uzasadnij**. Jeżeli uważasz, że tworzą, to też **uzasadnij** i podaj równanie tej podprzestrzeni.
- 4) Czy jest taka macierz M , że $B = M^{-1}AM$ ma postać diagonalną? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 20a

Wykonujemy najpierw obrót płaszczyzny o kąt 90 stopni, a następnie symetrię środkową względem punktu (0,0). Podaj wektory własne tego przekształcenia lub wykaż, że ich nie ma.

Wskazówka. Sposób 1. Wyznacz geometrycznie, co dzieje się z wektorami bazowymi i stwórz macierz tego przekształcenia. Sposób 2. Przypomnij sobie macierze obrotu i symetrii i pomnóż.

Zadanie 20b. To samo, z zamianą symetrii środkowej na którąś z osiowych.

Zadanie 20c. To samo, z zamianą kąta 90 stopni na kąt 45 stopni.

Zadanie 21a.

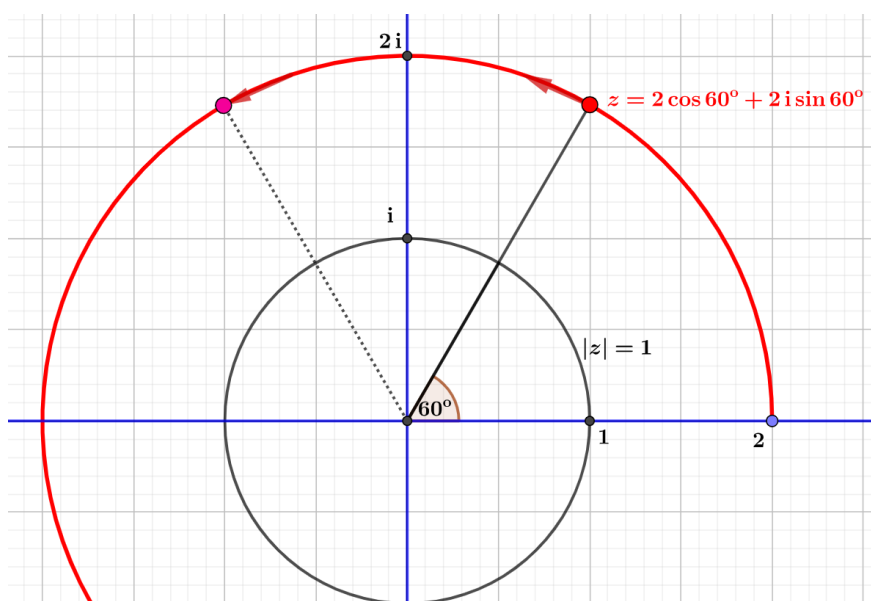
Przekształcenie liniowe płaszczyzny polega na mnożeniu przez liczbę zespoloną $1 + i\sqrt{3}$. Inaczej mówiąc, $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z$.

Zadanie 1. Wyznacz macierz tego przekształcenia w bazie rzeczywistej $[1, -1]$, $[0, 1]$.

Zadanie 2. Wyznacz jego wektory własne, jeżeli są. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 3. Opisz obraz zbioru o równaniu $|z| = 1$. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Rozwiązanie. Ta liczba ma moduł 2 i argument 60° . Przekształcenie jest zatem obrotem o ten kąt z powiększeniem dwukrotnym.



Macierzą takiego przekształcenia jest $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Wartości własnych nie ma. Obraz okręgu $|z| = 1$ jest okręgiem $|z| = 2$.

Zadanie 21b

Przekształcenie liniowe płaszczyzny polega na dzieleniu przez liczbę zespoloną i . Inaczej mówiąc, $f(z) = \frac{z}{i}$.

Zadanie 1. Wyznacz macierz tego przekształcenia w bazie rzeczywistej $[1,1], [1,-1]$.

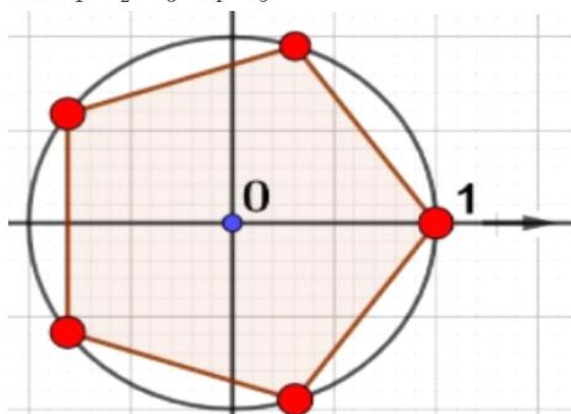
Zadanie 2. Wyznacz jego wektory własne, jeżeli są. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 3. Opisz obraz zbioru o równaniu $|z| = 2$. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 22.

Oblicz iloczyn kwadratów wszystkich liczb zespolonych zaznaczonych czerwonymi punktami,

tzn. $z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2 \cdot z_4^2 \cdot z_5^2$



Odpowiedź. Ze wzoru de Moivre'a od razu wynika, że 1.

Zadanie 23.

Między trzema krajami Archipelagu Szczęśliwości: Arbuzją, Bananą i Cynamonem jest dość duża migracja. Rocznie układa się to w tabelę częstości:

	Mieszkaniec Arbuzji	Mieszkaniec Banany	Mieszkaniec Cynamonu
Po roku mieszka w A	0.70	0.15	0.05
Po roku mieszka w B	0.25	0.75	0.30
Po roku mieszka w C	0.05	0.10	0.65

W roku zerowym w każdym z tych państw było po 6 milionów mieszkańców, czyli w każdym państwie po 33,3 % ogółu ludności Archipelagu. Jaki będzie (procentowo) rozkład po dwóch latach? Jaki będzie stan stabilny (to znaczy taki, że mimo migracji liczba ludności w każdym z tych krajów będzie stale taka sama)?

Zadanie 24a.

Wytlumacz, o co chodzi z zagadnieniem Leontiewa. Rozwiąż zagadnienie Leontiewa z

danymi: macierz input-output $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, wektor zapotrzebowania zewnętrznego extra demand : $d = [30, 20, 10]$.

Odpowiedź: Jest to równe $(I-A)^{-1} \cdot d$. Obliczenie daje (90, 60, 70).

Zadanie 24 b.

Ułóż stosowne równanie i rozwiąż problem Leontiewa w następującej sytuacji. P_1 to usługi, P_2 to przemysł samochodowy, P_3 to rolnictwo.

P_1 przeznacza na własne potrzeby 10 procent produkcji P_1 , potrzebuje 30% od P_2 i 30% od P_3 .

P_2 potrzebuje 30% od P_1 , potrzebuje 50% sam od siebie i 10 procent od P_3 .

P_3 potrzebuje 30 % P_1 , potrzebuje 10% od P_2 i 20% od P_3 .

Wektor zewnętrznego zapotrzebowania to $d = [90, 90, 60]$.

Odpowiedź: 325, 425, 250. Sprawdźmy. Na przepływy międzygałęziowe) idzie wtedy $A \cdot (325, 425, 250)$, a to jest równe $(235, 335, 190)$. Na zewnątrz można przeznaczyć właśnie (90, 90, 60).

Zadanie 25a. Ułóż i rozwiąż zadanie z treścią, które dotyczy wypożyczania rowerów z zasadą, że rower wypożyczony w jednym miejscu można zwrócić w każdym z pozostałych. Podana jest macierz A „przepływów”, to znaczy prawdopodobieństw, że pojazd wypożyczony w danym punkcie jest zwracany w tym samym punkcie lub gdzie indziej. Przyjmij, że rowerów do wypożyczania jest ogółem 190.

$$\left(\left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{2}{10} \right), \left(\frac{5}{10}, \frac{1}{10}, \frac{6}{10} \right), \left(\frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10} \right) \right)$$

Odpowiedź: 60, 64, 46.

Zadanie 25b. Dlaczego zadanie 22 (z tą samą macierzą, co w zad. 22) nie ma sensu dla zagadnienia Leontiewa dla trzech gałęzi gospodarki (jak w zadaniu 21 a) ?