Temat: Zmienne dyskretne

1. Prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych ocen z egzaminu z RPS są następujące

x_i	2	3	4	5
p_i	0.15	0.55	a	b

Wiadomo, że prawdopodobieństwo uzyskania piątki jest dwa razy większe niż uzyskania czwórki.

   (a) Wyznacz wartości stałych a i b tak, aby powyższa tabelka określała rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej możliwą do uzyskania ocenę z egzaminu.

   (b) Sporządź wykres funkcji prawdopodobieństwa.

   (c) Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej i sporządź jej wykres.

   (d) Wyznacz i zinterpretuj prawdopodobieństwa: $P(X > 3), P(X \geq 3), P(3 < X \leq 4)$.

   (e) Wyznacz wartość oczekiwaną, wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej.

2. Dystrybuanta pewnej dyskretnej zmiennej losowej dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ 0.4 & \text{dla } x \in [-2, 3) \\ 0.5 & \text{dla } x \in [3, 5) \\ 1 & \text{dla } x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej. Oblicz $P(X \leq -2)$,$P(X < 3)$, $P(X \geq 3)$, $P(-2 \leq X \leq 5)$, $P(-2 \leq X < 5)$.

3. Wirus komputerowy próbuje uszkodzić dwa pliki. Pierwszy z nich zostanie uszkodzony z prawdopodobieństwem 0,4. Niezależnie od tego, drugi zostanie uszkodzony z prawdopodobieństwem 0,3. Wyznacz rozkład oraz dystrybuantę zmiennej losowej X opisującej możliwą liczbę uszkodzonych plików.

4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucając pięć razy kostką wyrzucimy trzy razy *szóstkę*.

5. Szacuje się, że aż 10% studentów nie lubi zajęć z RPS. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 6 przypadkowo napotkanych studentów co najmniej dwóch nie będzie lubiło tego przedmiotu?

6. Janek spóźnia się do pracy z prawdopodobieństwem 0,15 każdego dnia. Interesuje nas możliwa liczba dni w tygodniu (5 dni roboczych), w których Janek spóźnia się do pracy.

   (a) Wyznacz funkcję rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuantę liczby spóźnień w ciągu 5 dni.

   (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 dni Janek spóźni się co najwyżej raz?

7. W statystycznej kontroli jakości partia wyrobów zostaje zaakceptowana jako dobra tylko wtedy, gdy liczba sztuk wadliwych w stosunku do liczebności całej partii nie przekracza pewnej z góry określonej wartości. Przypuśćmy, że w dużej partii wyrobów jest 20% sztuk wadliwych. Pobrano próbę liczącą 20 sztuk. Procedura kontrolna przewiduje zaakceptowanie partii wyrobów tylko wtedy, gdy nie więcej niż 2 sztuki wśród 20 okażą się wadliwe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że partia wyrobów nie zostanie zaakceptowana?

8. Prawdopodobieństwo trafienia przez strzelca w *dziesiątkę* jest równe 0,7, a w *dziewiątkę* – 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelec zdobędzie przy trzech strzałach co najmniej 29 punktów.

9. Została wydana ekscytująca gra komputerowa. Sześćdziesiąt procent graczy ukończyło wszystkie poziomy. Trzydzieści procent z nich kupi zaawansowaną wersję gry. Spośród 15 użytkowników jaka jest oczekiwana liczba osób, które kupią wersję zaawansowaną? Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupią ją co najmniej dwie osoby?

10. W skład złożonej aparatury wchodzi 1000 elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku każdego z tych elementów wynosi 0,001 i nie zależy od stanu pozostałych elementów. Korzystając z przybliżenia Poissona oszacuj prawdopodobieństwa uszkodzenia w ciągu roku: (a) dokładnie dwóch elementów, (b) nie mniej niż 2 elementów.

11. Liczba cząstek emitowanych przez substancję promieniotwórczą w ciągu 10 sekund jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 3. Oblicz prawdopodobieństwo wyemitowania w tym czasie więcej niż jednej cząstki.

12. Klienci dostawcy usług internetowych tworzą dziennie średnio 10 nowych kont.

    (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dzisiaj zostanie utworzonych ponad 8 nowych kont?

    (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że więcej niż 16 kont zostanie utworzonych w ciągu 2 dni?

13. Rzucamy symetryczną kostką, dopóki nie wypadnie *jedynka*. Jaka jest wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe liczby potrzebnych do wykonania rzutów? Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda nam się to dopiero za piątym razem?

14. Prawdopodobieństwo, że student zda egzamin z matematyki wynosi 0,6. Student może podchodzić do egzaminu, dopóki dopóty nie zaliczy przedmiotu. Oblicz prawdopodobieństwo, że student zaliczy egzamin za 2 podejściem oraz prawdopodobieństwo, że będzie podchodził do egzaminu nie więcej niż 3 razy.

15. Przypuśćmy, że samochody nadchodzą do salonu samochodowego w partiach po 10 sztuk i że ze względów oszczędnościowych tylko 5 sztuk z każdej partii bada się z punktu widzenia wymagań bezpieczeństwa. Te 5 samochodów wybiera się losowo. Jeżeli w partii 10 samochodów 2 nie spełniają wymagań bezpieczeństwa, to jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 1 spośród poddawanych badaniom 5 samochodów okaże się nie spełniającym tych wymagań?

16. Z partii składającej się ze 100 wyprodukowanych przedmiotów, wśród których jest 10 wykonanych wadliwie, wybrano w sposób losowy pięć sztuk. Oblicz prawdopodobieństwo, że w wylosowanej próbie znalazły się dwie sztuki wadliwe.

17. Prawdopodobieństwo znalezienia wybrakowanego towaru wynosi 5%. Kontrola sprawdza liczbę braków spośród 12 losowo wybranych sztuk towaru z partii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola napotka w tej próbie nie więcej niż 1 wadliwą sztukę produktu? Rozwiąż to zadanie zakładając, że:

    (a) liczność produktów w rozpatrywanej partii jest bardzo duża,

    (b) liczba wyprodukowanych towarów wynosi 100.

Odpowiedzi:
4. 0.032,
5. 0.114,
7. $X \sim Bin(20, 0.20), P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 0.79$,
9. $p = 0.18, P(X \geq 2) = 0,78, EX = 2.7$,
13. $X\ G(1/6), EX = 6, VarX = 30, P(X = 5) = 0,08$,
14. $P(X = 2) = 0,24, P(X <= 3) = 0,936$,
15. $X\ HG(10, 2, 5), P(X = 0) = 2/9, P(X >= 1) = 1 - 2/9 = 7/9$,
17 a. X – liczba wadliwych sztuk wśród 12 sztuk, $X\ \sim Bin(12, 0.05)$,
17 b. X – liczba wadliwych w 12-elementowej próbie pobranej ze 100 elementów, w której 5 było wadliwych, $X \sim HG(100, 5, 12)$