Zadania przygotowawcze 1 z rozwiązaniami

Zadanie 1 *Stosując operacje elementarne na wierszach sprowadź do postaci schodkowej zredukowanej następujące macierze:*

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 13 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -8I \\ -3I \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} -3III \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \textit{zamiana} \\ \textit{wierszy} \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -III \\ -III \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Zadanie 2 *Sprowadź macierz następującego układu równań do postaci schodkowej zredukowanej i napisz rozwiązanie ogólne tego układu stosując w opisie parametry i zmienne związane.*

a) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 - 4x_6 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 - x_6 = 9 \\ -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 - 2x_5 + 11x_6 = 9 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 23 \\ x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 28 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 2 \\ -5x_1 - 10x_2 - 14x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

a) $$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & -2 & -1 & 9 \\ -3 & 5 & -6 & 11 & -2 & 11 & 9 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2I \\ +3I \end{matrix} \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -4 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} -2III \\ +5III \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} +II \\ \\ -II \end{matrix} \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$ Parametrami są x_3, x_4, x_6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 + 3x_6 = 5 \\ x_5 + 2x_6 = 2 \end{cases}$$

Odp. $\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 5 - x_4 - 3x_6 \\ x_5 = 2 - 2x_6 \end{cases}$. Parametrami są x_3, x_4, x_6.

b) $\{x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1\}$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 2 \\ -5 & -10 & -14 & 0 \\ 4 & 8 & 11 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \begin{cases} x_1 = 14 - 2x_2 \\ x_2 \; parametr \\ x_3 = -5 \end{cases}$

□

Zadanie 3 *Znajdź wielomian $W(x)$ stopnia 3 spełniający warunki:*
$W(-1) = 0$, $W(1) = -4$, $W(2) = -3$, $W(0) = 1$.

Rozwiązanie:
Niech $W(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} a = W(0) = 1 \\ a - b + c - d = W(-1) = 0 \\ a + b + c + d = W(1) = -4 \\ a + 2b + 4c + 8d = W(2) = -3 \end{cases}$$

o macierzy uzupełnionej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -3 \end{array}\right],$$

która to po doprowadzeniu do postaci schodkowej zredukowanej daje

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Stąd $a = 1, b = -4, c = -3, d = 2$. Odp. $W(x) = 1 - 4x - 3x^2 + 2x^3$.

□

Zadanie 4 *Znajdź wszystkie liczby zespolone z, które są rozwiązaniami równania:*
a) $z^2 = 15 + 8i$
b) $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$
c) $2z + 3\overline{z} - Rez = 8 - 3i$
d) $|z| + 3\overline{z} = 2 + 6i$

Rozwiązanie:
a)Przyjmijmy $z = p + qi$. Teraz $z^2 = p^2 - q^2 + 2pqi = 15 + 8i$
I rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2pq = 8 \\ p^2 - q^2 = 15 \\ p^2 + q^2 = |z|^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \end{cases}.$$

Dodając drugie i trzecie dostajemy: $2p^2 = 32$
$p^2 = 16$ stąd $p_1 = 4$, $p_2 = -4$
Z pierwszego $q = \frac{4}{p}$ stąd $q_1 = 1$, $q_2 = -1$
Odp. $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -4 - i$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = (-3i)^2 - 4i(3i - 1) = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i$

$$\sqrt{\Delta} = p + qi \begin{cases} 2pq = 4 \\ p^2 - q^2 = 3 \\ p^2 + q^2 = |\Delta|^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}. \; 2p^2 = 8$$

$p^2 = 4$ stąd $p_1 = 2$, $p_2 = -2$

Z pierwszego $q = \frac{2}{p}$ stąd $q_1 = 1$, $q_2 = -1$
Przyjmujemy $\sqrt{\Delta} = 2 + i$
Odp.

$$x_1 = \frac{3i-(2+i)}{2i} = \frac{2i-2}{2i} = 1 + i,$$
$$x_2 = \frac{3i+(2+i)}{2i} = \frac{4i+2}{2i} = 2 - i.$$

c)Przyjmijmy $z = p + qi$. Teraz $2(p + qi) + 3(p - qi) - p = 8 - 3i$
$4p - qi = 8 - 3i$
$p = 2$, $q = 3$. Odp. $z = 2 + 3i$.
d) $|z| + 3\overline{z} = 2 + 6i$
Przyjmijmy $z = p + qi$. Teraz $\sqrt{p^2 + q^2} + 3(p - qi) = 2 + 6i$.
Porównując części urojone otrzymujemy $-3qi = 6i$, stąd $q = -2$.
Porównując części rzeczywiste otrzymujemy $\sqrt{p^2 + (-2)^2} + 3p = 2$
$\sqrt{p^2 + 4} = 2 - 3p$ podnosimy do kwadratu
$p^2 + 4 = 4 - 12p + 9p^2$
$8p^2 - 12p = 0$
$p = 0$ lub $p = \frac{3}{2}$
$z = -2i$ lub $z = \frac{3}{2} - 2i$.

□

Zadanie 5 *Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby*
a) $z = \frac{4+5i}{3i-4}$
b) $z = (i^5 + i^6)^{20}$

Rozwiązanie:
a) $z = \frac{4+5i}{3i-4} = \frac{(4+5i)(3i+4)}{(3i-4)(3i+4)} = \frac{1+32i}{-25}$

Odp. $Re\, z = -\frac{1}{25}$, $Im\, z = -\frac{32}{25}$.

b) $z = (i^5 + i^6)^{20} = (i - 1)^{20} = \left((i - 1)^2\right)^{10} = (-2i)^{10} = -1024$

Odp. $Re\, z = -1024$, $Im\, z = 0$.

□

Zadanie 6 *Znajdź wszystkie liczby zespolone z, które są rozwiązaniami równania: (opisz część rzeczywistą i urojoną rozwiązań).*
a) $(1 + i)\, z^2 + (3 - 5i)\, z - 6 = 0$,
b) $(3 + 2i)\, z^2 - 13z + 9 - 7i = 0$,
c) $(1 - 2i)\, z^2 - (9 + 2i)\, z + 10i = 0$,
d) $(1 + i)\, z^2 + (1 - 3i)\, z + 6i = 0$,
e) $(1 + i)\, z^2 + (3 + 3i)\, z + 2 + 4i = 0$,
f) $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$.

Rozwiązanie:
a) $\Delta = (3 - 5i)^2 - 4\,(1 + i)\,(-6) = 8 - 6i$
$\sqrt{\Delta} = 3 - i$,
Odpowiedź : $\{z = 1 + i\}$, $\{z = 3i\}$
b) $\Delta = 13^2 - 4\,(3 + 2i)\,(9 - 7i) = 5 + 12i = (3 + 2i)^2 = 5 + 12i$
Odpowiedź : $\{z = 2 - i\}$, $\{z = 1 - i\}$
c) $\Delta = (9 + 2i)^2 - 40i\,(1 - 2i) = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$

Odpowiedź : $\{z = 1+2i\}$, $\{z = 2i\}$
d) $\Delta = (1-3i)^2 - 4(1+i)(6i) = 16-30i,\ \ |16-30i| = 34$
Odpowiedź : $\{z = 1-i\}$, $\{z = 3i\}$
$\Delta = (1-3i)^2 - 4(1+i)(6i) = 16-30i = z^2,$
Odpowiedź : $\{z = -5+3i\}$, $\{z = 5-3i\}$
e) $(1+i)z^2 + (3+3i)z + 2 + 4i = 0$, Odpowiedź : $\{z = -1-i\}, \{z = -2+i\}$
f) $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$, Odpowiedź : $\{z = 2-i\}, \{z = 1+i\}$.

$\square$

Zadanie 7 *Sprowadź macierz następującego układu równań do postaci schodkowej i napisz rozwiązanie ogólne tego układu.* $\begin{cases} x + 2y + iz = 5 \\ ix + (1+i)y + 3z = 2+i \\ 2x + (3-i)y - 2iz = 6-2i \end{cases}$

Rozwiązanie:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & i & 5 \\ i & 1+i & 3 & 2+i \\ 2 & 3-i & -2 & 6-2i \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -iI \\ -2I \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & i & 5 \\ 0 & 1-i & 4 & 2-4i \\ 0 & -1-i & -4i & -4-2i \end{array}\right] /1-i \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & i & 5 \\ 0 & 1 & 2+2i & 3-i \\ 0 & -1-i & -4i & -4-2i \end{array}\right] \begin{array}{c} -2II \\ \\ (1+i)\,II \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4-3i & -1+2i \\ 0 & 1 & 2+2i & 3-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + (-4-3i)x_3 = -1+2i \\ x_2 + (2+2i)x_3 = 3-i \end{cases}$$

Odp. $\begin{cases} x_1 = -1+2i + (4+3i)x_3 \\ x_2 = 3-i-(2+2i)x_3 \end{cases}$. Parametrem jest x_3.

$\square$

Zadanie 8 *Sprowadź macierz następującego układu równań do postaci schodkowej i napisz rozwiązanie ogólne tego układu.*

$$\begin{cases} x_1 + (1+i)x_2 + (2+2i)x_3 + 2x_4 = 2-2i \\ (1-i)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + (-1+i)x_4 = 2 \\ (2-i)x_1 + (3+i)x_2 + (5+2i)x_3 + ix_4 = 4-i \end{cases}.$$

Rozwiązanie:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+i & 2+2i & 2 & 2-2i \\ 1-i & 2 & 3 & -1+i & 2 \\ 2-i & 3+i & 5+2i & i & 4-i \end{array}\right] \to \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+i & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + (1+i)x_2 = -2 \\ x_3 = 1-i \\ x_4 = -i \end{cases}$$

Odp. $\begin{cases} x_1 = -2-(1+i)x_2 \\ x_3 = 1-i \\ x_4 = -i \end{cases}$. Parametrem jest x_2.

$\square$

Zadanie 9

Które z następujących podzbiorów przestrzeni liniowej R^3 są podprzestrzeniami:
$A = \{(x, y, z)\,;\ 2x = 4y - 3z\}$,
$B = \{(x, y, z)\,;\ 2x + 5y - 3z = 2\}$,
$C = \{(x, y, z)\,;\ y = 2x^2 - z\}$,
$D = \{(x, y, z)\,;\ 2x^2 + 5z^2 = 0\}$.

Rozwiązanie:

a) Tak bo jest zbiorem rozwiązań układu jednorodnego równań liniowych.
b) Nie bo jest zbiorem rozwiązań układu niejednorodnego równań liniowych. $\theta \notin B$.
c) Nie bo $(1, 1, 1) \in C$ zaś $2(1, 1, 1) \notin C$.
d) Tak bo $D = \text{lin}\,\{(0, 1, 0)\}$.

$\square$

Zadanie 10 *Niech* $V = \text{lin}\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 5, 6)\}$ *zaś* $W = \text{lin}\{(1, 3, 3, 5), (-2, 1, -2, 1)\}$. *Przedstaw przestrzeń* $V \cap W$ *przez wektory rozpinające.*

Rozwiązanie:

Budujemy układ równań $x(1, 2, 3, 4) + y(2, 3, 5, 6) = z(1, 3, 3, 5) + t(-2, 1, -2, 1)$ o macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przyjmując za parametr $t = 1$ Otrzymujemy: $x = 5, y = -4, z = -1$.
Rzeczywiście $5(1, 2, 3, 4) - 4(2, 3, 5, 6) = -(1, 3, 3, 5) + (-2, 1, -2, 1) = (-3, -2, -5, -4)$.
Odp. $V \cap W = \text{lin}\{(-3, -2, -5, -4)\}$

$\square$

Zadanie 11 *Niech* V *i* W *będą zbiorami rozwiązań następujących układów równań:*

$$V : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Przedstaw przestrzenie $V \cap W$ V, W *i* $V \cap W$ *przez wektory rozpinające.*

Rozwiązanie:

V) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Parametrami są x_2 i x_4.
Rozwiązanie ogólne: $(2x_2 + x_4, x_2, x_4, x_4) = x_2(2, 1, 0, 0) + x_4(1, 0, 1, 1)$
Odp. $V = \text{lin}\{(2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$

W) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{21}{10} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix}$

Parametrami są x_3 i x_4.
Rozwiązanie ogólne: $(-\frac{21}{10}x_3 + x_4, \frac{3}{10}x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_3(-\frac{21}{10}, \frac{3}{10}, 1, 0) + x_4(1, -1, 0, 1)$
Odp. $W = \text{lin}\{(-\frac{21}{10}, \frac{3}{10}, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$.

$V \cap W$) Przestrzeń $V \cap W$ jest opisana wszystkimi 4 równaniami co daje macierz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Odp. $V \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$

$\square$

Zadanie 12 *Zapisz następujące wektory jako kombinacje liniowe wektorów* $\{(2,3,2),(3,4,2),(1,2,1)\}$:
a) $(1,0,0)$,
b) $(1,2,3)$,
c) $(1,2,1)$.

Rozwiązanie:
a) Rozwiązujemy równanie $x_1(2,3,2)+x_2(3,4,2)+x_3(1,2,1)=(1,0,0)$.

Opisuje się ono macierzą $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ stąd $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$

b) $(1,2,3)=4(2,3,2)-2(3,4,2)-(1,2,1)$.

c) $(1,2,1)=0(2,3,2)+0(3,4,2)+1(1,2,1)$.

$\square$