(*wersja z dnia 25 lutego 2009*)

Zadania z Podstaw Matematyki dla studentów Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania w Warszawie.

Materiały uzupełniające do wykładu Michała Szurka z podstaw matematyki, do następującego programu:

Wykład 1. Podstawowe pojęcia logiki.
Wykład 2. Indukcja matematyczna. Rekursja.
Wykład 3. Podstawowe operacje na zbiorach.
Wykład 4. Zliczanie (najprostsze sytuacje kombinatoryczne).
Wykład 5. Relacje.
Wykład 6. Funkcje. Obraz, przeciwobraz zbioru.
Wykład 7. Permutacje.
Wykład 8. Zbiór potęgowy.
Wykład 9. Iloczyn kartezjański i ciągi.
Wykład 10. Relacje równoważności. Zasada abstrakcji.
Wykład 11. Relacje porządkujące.
Wykład 12. Różne rodzaje relacji porządkujących.
Wykład 13. Przeliczalność i nieprzeliczalność. Moc zbioru.
Wykład 14. Paradoksy logiczne i antynomie teorii mnogości.
Wykład 15. Przejścia graniczne w matematyce.

(stan na 25 lutego 2009: wykłady 12-15 są jeszcze nieopracowane)

Wykład 1. Logika

Zadanie 1.1. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

a) $2 \cdot 2 = 4$;

b) $2 \cdot 2 \neq 5$;

c) $2^{100} = 1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,3767$;

d) Nieprawda, że liczba rozwiązań równania $x^2 - 4x + 3 = 0$ jest parzysta ;

e) Nieprawda, że liczba rozwiązań równania $x^2 - 4x + 3 = 0$ nie jest nieparzysta ;

f) Jeżeli $\frac{1}{x} = 0$, to $x^2 - x = 2008$;

g) Jeżeli $x^2 = y^2$, to $x^3 = y^3$; (x, y oznaczają tu liczby rzeczywiste) ;

h) Jeżeli $x^3 = y^3$, to $x^2 = y^2$; (x, y oznaczają tu liczby rzeczywiste);

i) Jeżeli $x^2 = y^2$, to $x^3 = y^3$; (x, y oznaczają tu liczby zespolone) ;

j) Jeżeli $x^3 = y^3$, to $x^2 = y^2$; (x, y oznaczają tu liczby zespolone);

k) Jeżeli $A^3 = B^3$, to $A^2 = B^2$; (A, B oznaczają tu macierze kwadratowe);

Przypominam, że jeżeli prawdziwa jest implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$, to

α jest warunkiem **wystarczającym** (albo: warunkiem **dostatecznym**) na to, by zachodziło β;

natomiast β jest warunkiem **koniecznym** na to, by α.

Oczywiście, jeżeli prawdziwa jest równoważność $\alpha \Leftrightarrow \beta$, to α jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by β. Mówimy też, że α zachodzi *wtedy i tylko wtedy*, gdy β.

Określeń „warunek dostateczny” i „warunek wystarczający” używamy wymiennie.

Zadanie 1.2. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

a) Warunkiem koniecznym na to, by trójkąt był równoboczny jest, by był równoramienny;

b) Warunkiem dostatecznym na to, by trójkąt był równoboczny jest, by był równoramienny;

c) Warunkiem koniecznym na to, by trójkąt był równoramienny jest, by był równoboczny;

d) Warunkiem dostatecznym na to, by trójkąt był równoramienny jest, by był równoboczny;

e) Warunkiem dostatecznym na to, by liczba naturalna była podzielna przez 2 jest, by była podzielna przez 4;

f) Warunkiem dostatecznym na to, by liczba naturalna była podzielna przez 4 jest, by była podzielna przez 2;

g) Warunkiem koniecznym na to, by liczba naturalna była podzielna przez 2 jest, by była podzielna przez 4;

h) Warunkiem koniecznym na to, by liczba naturalna była podzielna przez 4 jest, by była podzielna przez 2;

i) Warunkiem wystarczającym do prawdziwości zdania $\exists_{x\in\mathbb{R}} -x^2 \geq a+1$ jest $a \leq 0$;

j) Warunkiem koniecznym prawdziwości zdania $\exists_{x \in \mathbb{R}} - x^2 \geq a + 1$ jest $a \leq 0$;

k) Warunkiem wystarczającym do prawdziwości zdania $\exists_{x \in \mathbb{R}} - x^2 \geq a+1$ jest $a \geq -1$;

l) Warunkiem koniecznym prawdziwości zdania $\exists_{x \in \mathbb{R}} - x^2 \geq a + 1$ jest $a \geq -1$;

m) Warunkiem koniecznym prawdziwości zdania $\exists_{x \in \mathbb{R}} - x^2 \geq a + 1$ jest $\mid a \mid \ \geq 1$;

n) Warunkiem wystarczającym do prawdziwości zdania $\exists_{x \in \mathbb{R}} - x^2 \geq a+1$ jest $\mid a \mid \ \geq 1$;

o) Warunkiem koniecznym na to, by ciąg była zbieżny jest, by spełniał warunek Cauchy'ego;

p) Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by macierz kwadratowa miała nacierz odwrotną jest, by jej wyznacznik był różny od zera;

q) Warunkiem wystarczającym do zbieżności szeregu liczbowego $\sum a_n$jest zbieżność ciągu (a_n);

r) Warunkiem koniecznym do zbieżności szeregu liczbowego $\sum a_n$jest zbieżność ciągu (a_n);

s) Warunkiem wystarczającym do zbieżności ciągu (a_n) jest zbieżność szeregu liczbowego $\sum a_n$;

t) Warunkiem koniecznym do zbieżności ciągu (a_n) jest zbieżność szeregu liczbowego $\sum a_n$;

u) Warunkiem koniecznym do zdobycia mistrzostwa świata w rzucie dyskiem jest, by umieć nim rzucać;

v) Warunkiem wystarczającym do zdobycia mistrzostwa świata w rzucie dyskiem jest, by umieć nim rzucać;

w) Warunkiem wystarczającym do tego, by zostać prezydentem Polski jest wygranie wyborów prezydenckich,

x) Warunkiem koniecznym do tego, by zostać prezydentem Polski jest wygranie wyborów prezydenckich,

y) Warunkiem wystarczającym do tego, by umieć rozwiązać wszystkie zadania z tego skryptu jest, by umieć czytać;

z) Warunkiem koniecznym i dostatecznym do tego, by zostać królem Togo jest, by być Eskimosem.

Zadanie 1.3. Które z podanych niżej zdań są warunkami dostatecznymi, a które wystarczającymi do prawdziwości zdania $\exists_{x \in \mathbb{R}} - x^2 \geq a + 1$

a) $a \leq 0$ b) $a = -1$ c) $a < 0$ d) $a \leq -1$ e) $\mid a \mid \ \geq 1$

Odpowiedź: Konieczne są a, c, d, e Dostateczne są: b, d.

Jak to rozwiązać? Wystarczy się zastanowić, co to znaczy „konieczny" i "dostateczny" (=„wystarczający"). Jeżeli z $alfa$ wynika $beta$, to $alfa$ jest wystarczający dla $beta$. Bo przecież *wystarczy*, żeby zaszło $alfa$, żeby $beta$ też się zdarzyło. Z tego, że deszcz pada, wynika, że ulice sa mokre. A więc wystarczy, żeby trochę popadało i już jest mokro. Przeciwnie, $beta$ jest konieczny dla $alfa$.Na przykład, z tego, że pada deszcz, wynika, ze ulice są mokre. Jeżeli zobaczymy, suchą ulicę, to znaczy, że deszcz nie pada. Ulice muszą być mokre po deszczu.

Nstępnie, trzeba oswoić podany warunek z kwantyfikatorem. Co znaczy podany warunek: istnieje *iks* o tej własności, że liczba przeciwna do jego kwadratu spełnia coś tam? Otóż przecież „liczbą przeciwną do kwadratu" może być każda liczba ujemna (i zero) i odwrotnie, każda liczba ujemna (także i zero) jest liczbą przeciwną do pewnego kwadratu. Na przykład -2009 jest liczbą przeciwną do kwadratu liczby $\sqrt{2009}$. A zatem zdanie zamieszczone znaczy ni mniej ni więcej tylko: $a+1$ jest liczbą ujemną (bądź zerem). Co wystarcza, by $a+1 \leq 0$? Oczywiście jest to to samo, co $a \leq -1$. Zatem ten warunek jest i konieczny i dostateczny. Warunek a) jest oczywiście za słaby, bo $-\frac{1}{2} \leq 0$, ale nie jest ≤ -1.Podobnie z c) . Warunek b) wystarcza, ale nie jest konieczny. Wreszcie, jeżeli liczba jest mniejsza od -1, to jej moduł (wartość bezwzględna) jest większy od 1, ale nie na odwrót.

Zadanie 1.4. Sformułować zdanie odwrotne do

a) twierdzenia Pitagorasa,

b) twierdzenia Talesa,

c) twierdzenia Bezouta,

d) twierdzenia mówiącego, że środki boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą równoległobok,

e) twierdzenia mówiącego, że każda liczba pierwsza większa od 2 jest nieparzysta.

Zadanie 1.5. Na płaszczyźnie zaznacz zbiór punktów spełniających alternatywę podanych warunków:

a) $x = 0$, $y = 0$,

b) $y = 0$, $x < 0$,

c) $x = 0$, $y \neq 0$,

d) $y = 0$, $x \neq 0$,

e) $x \neq 0$, $y = 0$,

f) $y \neq 0$, $x = 0$,

g) $x \neq 0$, $y \neq 0$,

h) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy \neq 0$,

i) $x = 0$, $y > 0$,

j) $y = 0$, $x > 0$

j) $x < 0$, $y > 0$,

k) $y < 0$, $x > 0$

k) $x \in [1; 2]$, $y \in [1; 2]$,

i) $x \notin [1; 2]$, $y \in [1; 2]$.

Zadanie 1.6. Na płaszczyźnie zaznacz zbiór punktów spełniających koniukcję podanych warunków:

a) $x = 0$, $y = 0$,

b) $y = 0$, $x < 0$,

c) $x = 0$, $y \neq 0$,

d) $y = 0$, $x \neq 0$,

e) $x \neq 0$, $y = 0$,
f) $y \neq 0$, $x = 0$,
g) $x \neq 0$, $y \neq 0$,
h) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy \neq 0$,
i) $x = 0$, $y > 0$,
j) $y = 0$, $x > 0$
j) $x < 0$, $y > 0$,
k) $y < 0$, $x > 0$
k) $x \in [1; 2]$, $y \in [1; 2]$,
i) $x \notin [1; 2]$, $y \in [1; 2]$.

Zadanie 1.7. Na płaszczyźnie zaznacz zbiór tych punktów (x, y), których współrzędne *spełniają* podany warunek

a) $x = 0 \Rightarrow y = 0$,
b) $y = 0 \Rightarrow x = 0$,
c) $x = 0 \Rightarrow y \neq 0$,
d) $y = 0 \Rightarrow x \neq 0$,
e) $x \neq 0 \Rightarrow y = 0$,
f) $y \neq 0 \Rightarrow x = 0$,
g) $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$,
h) $xy \neq 0$,
i) $x = 0 \Rightarrow y > 0$,
j) $y = 0 \Rightarrow x > 0$
j) $x < 0 \Rightarrow y > 0$,
k) $y < 0 \Rightarrow x > 0$
k) $x \in [1; 2] \Rightarrow y \in [1; 2]$,
i) $y \in [1; 2] \Rightarrow x \in [1; 2]$.

Zadanie 1.8. Na płaszczyźnie zaznacz zbiór tych punktów (x, y), których współrzędne nie *spełniają* podanego warunku

a) $x = 0 \Rightarrow y = 0$,
b) $y = 0 \Rightarrow x = 0$,
c) $x = 0 \Rightarrow y \neq 0$,
d) $y = 0 \Rightarrow x \neq 0$,
e) $x \neq 0 \Rightarrow y = 0$,
f) $y \neq 0 \Rightarrow x = 0$,
g) $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$,
h) $xy \neq 0$,
i) $x = 0 \Rightarrow y > 0$,
j) $y = 0 \Rightarrow x > 0$
j) $x < 0 \Rightarrow y > 0$,
k) $y < 0 \Rightarrow x > 0$
k) $x \in [1; 2] \Rightarrow y \in [1; 2]$,
i) $y \in [1; 2] \Rightarrow x \in [1; 2]$.

Zadanie 1.9. Na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ zaznacz zbiór liczb spełniających koniukcję podanych warunków:

a) $\mid z \mid\ =\ 1$, $\arg\ z\ \geq 0$;
b) $z^{12} = 1$, $\arg\ z\ \geq 0$;
c) $z^{12} =\ -1$, $z^{16} =\ 1$;
d) $z^2 + 2z + 5 = 0$, $\mid z \mid\ =\ \sqrt{5}$,
e) $z^2 + 2z + 5 = 0$, $z =\ \overline{z}$,
f) $z =\ \overline{z}$, $z =\ -\overline{z}$,
g) $z^2 =\ \overline{z}$, $\mid z \mid\ \neq\ 1$.

Zadanie 1.10. Jakich trójkątów dotyczy następujące twierdzenie:
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych.

Zadanie 1.11.
Dla jakich liczb m i n jest prawdą, że następujące dwa zdania są równoważne?
Liczba k jest podzielna przez mn .
Liczba k jest podzielna przez m i jest podzielna przez n .

Zadanie 1.12. Uzupełnij
Kąt wpisany w okrąg jest . . . . . $\Leftrightarrow$ kąt jest oparty na średnicy.

Zadanie 1.13. Uzupełnij następujące twierdzenia, wstawiając w miejsce kropek słowa konieczny, dostateczny, albo konieczny i dostateczny:
a) Warunkiem ... ... na to, by trójkąt był równoramienny, jest, aby dwa jego kąty miały te same miary;
b) Podzielność liczby całkowitej przez 2 i przez 3 jest warunkiem ... ... jej podzielności przez 6 ;
c) Warunkiem ... ... na to, by trójkąt był równoramienny, jest przystawanie dwóch jego kątów.

Zadanie 1.14.
a) O co chodzi w tej wypowiedzi: *Nie ma powodu, żebym nie całkowicie się z tobą nie zgadzał.* Wypowiedz tę myśl prościej.
b) Czy to jest podstawa do dyskwalifikacji: *Zwycięzca Tour de France nie zaprzeczył doniesieniom o niestosowaniu przez niego niedozwolonych środków.*
c) Czy to dobrze, czy źle, że w pewnej instytucji *nikt nigdy niczego niepotrzebnego nie robi*?
d) *Przetłumacz na strawną polszczyznę*: Nie sądzę, abym nie mogła Ci nie powiedzieć o tym, że nie przemyślałam decyzji o powtórnej zmianie decyzji, że nie wyjdę za ciebie za mąż.

e) Wytłumacz, co miał na myśli prezydent Rurytanii, gdy powiedział: "Nie podpiszę ustawy o zniesieniu obowiązującego w naszym kraju prawa nierównego traktowania osób chudych i grubych". Czy gdyby parlament Rurytanii odrzucił prezydenckie weto, grubi i chudzi byli by równi wobec prawa, czy nie?
f) W pracowni informatycznej Wydziału Matematyki, Mechaniki i Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego wisi napis: "Zakaz jedzenia lub picia". Czy z tego wynika, że w pracowni tej można jeść hamburgera, byle nie popijać?

W logice klasycznej odróżnia się starannie terminy „znaczy" i „oznacza". Dwie nazwy mogą znaczyć to samo, a oznaczać co innego. Oznaczenie odnosi się do zakresu, znaczenie do treści. „Stolica Wielkopolski" i „największe miasto nad Wartą" oznaczają to samo, ale znaczą co innego. Treścią pojęcia „stolicy" jest to, że urzędują tam władze (wojewódzkie, państwowe). Gdy usłyszymy zaś „największe miasto nad Wartą" , być może najpierw wyobrazimy sobie duże miasto nad malowniczą rzeką, a dopiero po chwili dotrze do nas, że to Poznań. Zakresem obu pojęć jest zbiór, którego jedynym elementem jest miasto z ratuszem z trykającym się w południe koziołkami na Starym Rynku, nieopodal ulicy Święty Marcin.

Zawieranie się zakresów pojęć (inkluzja zbiorów) nazywało się w dawniejszej logice stosunkiem podporządkowania i nadrzędności, na zbiory o niepustym przecięciu mówi „pojęcia krzyżujące się", pojęcia reprezentowane przez zbiory rozłączne nazywano „wykluczającymi się", a rozłączne i dopełniające do całej przestrzeni „przeciwnymi" (zatem 'zielony' i 'czerwony' to pojęcia wykluczające się i sprzeczne, a przeciwnym do 'zielonego' jest 'niezielony').

Zadanie 1.21. Określić, w jakim stosunku pozostają do siebie zakresy następujących pojęć: trójkąt równoboczny, trójkąt równokątny, papież, biskup rzymski, pierwszy cesarz Francji, zwycięzca spod Austerlitz, sole, ciała chemiczne złożone, dzieła Słowackiego, Kordian, wieloboki, utwory geometryczne płaskie, figury mające przekątne, książki naukowe, książki zajmujące, mahometanie, mieszkańcy Europy, ciecze, ciała lżejsze od wody, niziny, miejsca bagniste, prostokąt, czworobok mający koło wpisane, przeżuwacz, zwierzę mięsożerne, wulkan, góra w Polsce.

Zadanie 1.22. Podać pojęcia a) równoważne, b) nadrzędne, c) krzyżujące się, d) podrzędne, e) przeciwne, f) sprzeczne względem każdego z następujących pojęć: woda, sześcian, ptak, pierwszy południk, wszystko, nic.

Zadanie 1.23. Czy prawdziwe jest zdanie:

Jeśli na świętego Prota jest pogoda albo słota, na świętego Hieronima jest deszcz, albo go nie ma.

Zadanie 1.24. Wyraź w inny sposób zaprzeczenie zdań:

a) nieprawda, że niebo jest niebieskie,

b) nie jestem mądry,

c) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_\delta \mid x_1 - x_2 \mid \; < \delta \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid \; < \varepsilon = 0$

d) w niedziele nikt tu nigdy niczego niepotrzebnego nie robi.

Zadanie 1.25. Skonstruuj, wskaż albo opisz, jak mogą wyglądać kontrprzykłady do nastepujących fałszywych stwierdzeń:

a) każda liczba podzielna przez 2 jest podzielna przez 4;

b) w każdym trójkącie środek okręgu opisanego pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego;

c) na każdym czworokącie da się opisać okrąg;

d) W każdy czworokąt można wpisać koło.

e) W żaden czworokąt nie można wpisać koła.

f) Na każdym czworokącie można opisać koło.

g) Na żadnym czworokącie nie można opisać koła.

h) jeżeli funkcja jest rosnąca dla $x < 0$ i jest rosnąca dla $x > 0$, to jest rosnąca dla wszystkich x;

i) każdy mężczyzna jest wyższy od każdej kobiety;

j) żaden student nie umie algebry;

k) każdy student zna dobrze algebrę;

l) wszyscy studenci chodzą zawsze na zajęcia;

m) gdy tylko wychodzę z domu, żona pyta, dokąd idę;

n) Każda liczba podzielna przez 3 jest podzielna przez 7.

o) Jeżeli dwie liczby mają równe kwadraty, to są równe.

p) Jeżeli $sin\ a = sin\ b$, to $a = b$.

q) Każda liczba pierwsza jest nieparzysta.

r) Nie ma dwóch liczb pierwszych różniących się tylko o 3 .

s) Nie istnieją rozwiązania równania $x^n + y^n = z^n$ w liczbach całkowitych.

t) Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta prostokątnego, to $a^2 + b^2 = c^2$;

u) Jeżeli wczoraj był dzień 28 lutego, to dziś jest 1 marca.

v) Jeżeli wczoraj był dzień 28 lutego, to dziś jest 29 lutego.

x) Prezydent państwa musi być kobietą.

y) Każdy Polak uwielbia chipsy czekoladowe.

z) Jak przygoda, to tylko we Lwowie.

Zadanie 1.26. Skonstruuj, wskaż albo opisz, jak mogą wyglądać kontrprzykłady do następujących fałszywych stwierdzeń:

a) Jeśli Barbara po lodzie, to Boże Narodzenie po wodzie.

b) Jeśli na świętego Jana pada wieczór albo z rana, na świętego Izydora pada rano lub z wieczora.

c) Dzieckiem w kolebce kto łeb urwał hydrze, ten młody zdusi centaury.

d) Piłka nożna jest takim sportem, gdzie dwie drużyny grają 90 minut, a wygrywają Niemcy.

e) Z punktu widzenia kobiety mężczyzna jest jak telefon. Albo jej nie odpowiada, albo jest zajęty.

f) Każde zwierzę,co ma pierze, fruwa.

g) Matematyka? Nikt jej nie lubi i nikt jej nie umie.

Zadanie 1.27.

1. Zdanie p brzmi: *Bitwa pod Grunwaldem odbyła się przed rokiem 1500 lub bitwa pod Grunwaldem odbyła się po roku 1450.*

Zdanie q brzmi: *Jeżeli $1 = 2$, to $2 = 10$.* Wtedy (wybierz prawidłową odpowiedź):

a) obydwa zdania p i q są prawdziwe,

b) p jest prawdziwe, q fałszywe,

c) p jest fałszywe, q prawdziwe,

d) obydwa zdania są fałszywe.

Zadanie 1.28.

Zdanie p $\Rightarrow$ (p $\Rightarrow$ q) jest fałszywe, gdy (wybierz prawidłową odpowiedź)

a) obydwa zdania p i q są prawdziwe,

b) p jest prawdziwe, q fałszywe,

c) p jest fałszywe, q prawdziwe,

d) obydwa zdania są fałszywe.

Rozwiązanie. Trudnością w zadaniu tym może być samo zrozumienie treści. Poprawnej odpowiedzi można najlepiej udzielić, podstawiając za p , q wartości logiczne 0, 1. W a) mamy $1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 1)$; jest to zdanie prawdziwe. W b) mamy $1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)$, jest to zdanie fałszywe. W c) mamy $0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 1)$; jest to zdanie prawdziwe. W d) mamy $0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0)$; jest to zdanie prawdziwe.

Zadanie 1.29. Kulturalny doping. W czasie meczu piłkarskiego rzucono na murawę stadionu butelkę, która trafiła bramkarza drużyny gości. Oskarżono o to czterech kibiców: Antoniego, Mariana, Witolda i Bogdana. Każdy dał jedną odpowiedź fałszywą i dwie prawdziwe:

Antoni: To nie ja. Witold nie wie, kto rzucił butelkę. Wie to Marian.

Bogdan: To nie ja. Pierwszy raz widzę Mariana. Butelkę rzucił Witold.

Marian: To nie ja. To zrobił Antoni. Przez cały mecz piłem piwo z Bogdanem.

Witold: To nie ja. To zrobił Marian. Bogdan kłamie, że to ja.

Kto rzucił butelkę?

Rozwiązanie. Butelkę rzucił Antoni. Przypuśćmy bowiem, że to Bogdan. Jego pierwsza wypowiedź jest zatem fałszywa, więc dwie pozostałe prawdziwe. W szczególności prawdziwa byłaby wypowiedź o winie Witolda. A zatem z przypuszczenia, że to Bogdan, wynika, że to nie Bogdan. Reguła Claviusa mówi, że to nie Bogdan. Przypuśćmy, że to Marian. Zatem jego pierwsza wypowiedź o własnej niewinności jest fałszywa. Musi być zatem prawdą, że butelkę rzucił Antoni. Mamy tę samą sytuację:

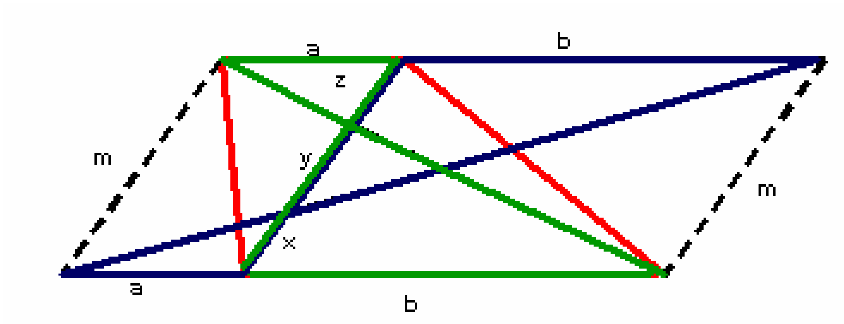
z założenia, że to Marian wynika, że to nie on. A zatem (reguła Claviusa) to nie Marian. Tak samo przekonujemy się o niewinności Witolda. Zostaje Antoni.

Zadanie 1.30. Po maturze. Na spotkaniu z okazji dziesięciolecia matury ktoś powiedział: „Każdy absolwent naszego liceum ukończył potem studia wyższe". Czy z tego wynika, że ci, co nie ukończyli studiów wyższych, byli absolwentami innych liceów? Czy te zdania są równoważne?

Odpowiedź. Są ludzie dorośli, którzy nie skończyli liceów. Każdy z nich stanowi kontrprzykład na stwierdzenie, że podane zdania są równoważne.

Zadanie 1.31. Student rozwiązywał test. Miał udzielić odpowiedzi „tak" lub „nie" na pięć pytań. Wiedział, że w teście było więcej odpowiedzi twierdzących niż przeczących i że nie było tej samej odpowiedzi na trzy kolejne pytania. Domyślił się, że pytanie pierwsze i ostatnie mają przeciwne odpowiedzi. Znał tylko odpowiedź na pytanie drugie i siedział bezradnie, dopóki nauczyciel nie podpowiedział mu: „skoro znasz odpowiedź na drugie, to tak, jak byś znał na wszystkie". Jakie były odpowiedzi na test?

Zadanie 1.32. Matematycy na balu. Czterej małżeństwa wybrały się na bal sylwestrowy. Z początku każdy tańczył z własną żoną, ale wkrótce pary



się przemieszały. Basia tańczyła z Edwardem, Ola z mężem Karoliny, Dorota z mężem Oli, Franciszek z żoną Janka i Janek z żoną Edwarda. W przerwie Hubert opowiadał dowcipy. Podaj imiona współmałżonków i kto z kim tańczył.

Rozwiązanie. Ponumerujmy informacje.

1. Basia tańczyła z Edwardem, 2. Ola tańczyła z mężem Karoliny, 3. Dorota tańczyła z mężem Oli, 4. Franciszek tańczył z żoną Janka, 5. Janek tańczył z żoną Edwarda, 6. Jeden z mężów (ten dowcipny) ma na imię Hubert.

Z przesłanki 1 wiemy, że Basia nie jest żoną Edwarda. Jak ma na imię tancerz Oli? Kto jest żoną Edwarda? Nie Ola, bo z mężem Oli tańczyła Dorota (przesłanka nr 3), a z Edwardem Basia. Nie Karolina, bo z mężem Karoliny tańczyła Ola (przesłanka nr 2), a z Edwardem Basia (przesłanka nr 1). Zatem Edward i Dorota to małżeństwo. Zatem Janek tańczył z Dorotą (przesłanka nr 5). Z przesłanki nr 3 wynika zatem, że Janek jest mężem Oli. Przesłanka nr 4 powiada, że Franciszek tańczył z Olą, a więc (nr 2) mąż Karoliny to Franciszek. Basi przypada zatem dowcipny Hubert. A zatem:

Tańczyli: Basia - Edward, Dorota - Janek, Ola - Franciszek, Karolina - Hubert.

Małżeństwa: Dorota - Edward, Ola - Janek, Karolina - Franciszek, Basia - Hubert.

Zadanie 1.33. Trapez nie istnieje. Wykażemy, że figura zwana trapezem nie istnieje. Przypuśćmy, że jest coś takiego, jak trapez. Przedłużmy podstawy w sposób pokazany na rysunku tak, żeby utworzył się równoległobok. Jego przekątne dzielą drugą z przekątnych trapezu na odcinki, których długości oznaczymy przez x, y, z, jak na rysunku. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy proporcje: $x+y=\frac{bz}{a}$ oraz $\frac{y+z}{x}=\frac{b}{a}$, skąd wyznaczamy $y+z=\frac{bx}{a}$.

Zatem $x-z=(x+y)-(y+z)=\frac{bz}{a}-\frac{bx}{a}=-\frac{b}{a}(x-z)$, czyli $\frac{b}{a}=-1$

Ale liczby a, b to długości podstaw trapezu. Jeżeli ich suma wynosi zero, to one same są zerami. To znaczy, że nie może istnieć figura taka jak trapez.

Znajdź błąd w tym rozumowaniu.

Zadanie 1.34. Oceń wartość logiczną podanych zdań. Wypowiedz je prościej, w formie twierdzącej.

a) Nieprawda, że niebo czasem jest niebieskie.
b) Nieprawda, że nie ma dymu bez ognia.
c) Nie każdy Polak jest lekarzem.
d) Nieprawda, że istnieje łabedź, który nie jest biały.

Zadanie 1.35. Ucz się logiki! Sędzia na rozprawie:
– Jeśli oskarżony popełnił to przestępstwo, to miał wspólnika.
Obrońca:
– To nieprawda!
Dlaczego jest to najgorsza rzecz, jaką mógł powiedzieć? Wskazówka: przypomnij sobie prawo zaprzeczenia implikacji!

Zadanie 1.36. Ktoś nabył jakiś artykuł za 100 zł, sprzedał za 200 zł, odkupił znów za 300 zł i sprzedał za 400 zł. Ile na tym zyskał?

Zadanie 1.37. Ktoś poprosił w restauracji o piwo . Kelner przyniósł, ale gość w tym czasie się rozmyślił i poprosił o coca-colę w tej samej cenie. Po wypiciu wstał i skierował się do wyjścia. Kelner dogonił go przy wyjściu i upomniał się o zapłatę. „Za co?” zdumiał się gość? „Jak to za co? Za lemoniadę!”. „Przecież za colę dałem panu piwo, które pan zabrał!”. „W takim razie proszę zapłacić za piwo!”. „Zapłacić za piwo? Przecież ja piwa nie piłem!”.
Gdzie jest błąd w tym rozumowaniu?

Zadanie 1.38. Dwie monety dają łącznie 3 złote, choć jedna z nich nie jest złotówką. Jak to możliwe?

Zadanie 1.39. Pan A miał fałszywą stuzłotówkę. Zapłacił nią dentyście za plombę. Dentysta wracał taksówką do domu i zapłacił tym banknotem za kurs. Taksówkarz wydał banknot na benzynę. Właściciel stacji benzynowej podarował banknot swojemu synowi, który kupił za niego kalkulator w sklepie obok. Akurat zaraz potem do tego samego sklepu przyszedł pan A. Za swój zakup wartości 100 złotych dał 200 złotych i jako resztę otrzymał ową fałszywą stuzłotówkę. Kto na tych transakcjach stracił i ile? Czy ktoś zarobił?

Zadanie 1.40. Które z nastepujących zdań są prawdziwe dla liczb rzeczywistych x :

a) $\exists_x \ x + 1 = 0$,
b) $\exists_x \ x + 1 \neq 0$,
c) $\forall_x \ x^2 > 0$,
d) $\forall_x \ x^2 \geq 0$.

Zadanie 1.41. Które z nastepujących zdań są prawdziwe dla liczb rzeczywistych x, y :

a) $\exists_x \ \exists_y \ x + y = 0$,
b) $\exists_x \ \forall_y \ x + y = 0$,
c) $\forall_x \ \exists_y \ x + y = 0$,
d) $\forall_x \ \forall_y \ x + y = 0$.

Zadanie 1.42. Które z nastepujących zdań są prawdziwe dla liczb zespolonych x, y :

a) $\exists_x \ \exists_y \ x \cdot y = 0$,
b) $\exists_x \ \forall_y \ x \cdot y = 1$,
c) $\forall_x \ \exists_y \ x \cdot y = i$,
d) $\forall_x \ \forall_y \ x \cdot y = -i$.

Zadanie 1.43. Które z nastepujących zdań są prawdziwe dla liczb rzeczywistych a, b, c:

$\exists_a \exists_b \exists_c \ a + b + c = 0$
$\exists_a \exists_b \forall_c \ a + b + c = 0$
$\exists_a \forall_b \forall_c \ a + b + c = 0$
$\forall_a \exists_b \exists_c \ \ a + b + c = 0$
$\forall_a \forall_b \exists_c \ \ a + b + c = 0$
$\forall_a \forall_b \forall_c \ \ a + b + c = 0$.

Zadanie 1.44. Które z podanych niżej zdań są warunkami dostatecznymi, a które wystarczającymi do prawdziwości zdania $\exists_{x\in\mathbb{R}} - x^2 \geq a + 1$

a) $a \leq -2009$ b) $a = -1$ c) $a \leq -1$ d) $a \leq 2009$ e) $|\ a\ | \ \geq 1$

Rozwiązanie. Przepiszmy zdanie $\exists_{x\in\mathbb{R}} - x^2 \geq a + 1$ tak $\exists_{x\in\mathbb{R}} \ x^2 \leq -a - 1$. A zatem kwadrat pewnej liczby rzeczywistej jest mniejszy (bądź równy) $-a-1$. Takie stwierdzenie jest równoważne z tym, że liczba $-a - 1$ jest dodatnia bądź równa zero, $a - 1 \geq 0$, stąd $a \leq -1$. Zatem warunkiem równoważnym (= koniecznym i dostatecznym) stwierdzeniu, jest $a \leq -1$. Warunek $a \ \leq -2$ jest wystarczający, ale nie konieczny. *Wystarczy* bowiem, by liczba a była mniejsza od 2009, by $a + 1$ była liczba ujemna, a wtedy znajdziemy odpowiednie x, na przykład każde x nie większe niż $\sqrt{-a-1}$. Ale liczba a nie musi wcale być „aż tak mała" , może być np. równa 2006. Podobnie z warunkiem $a = -1$. Jeżeli $a = -1$, to $x = 0$. Ale liczba a nie musi być dokładnie równa -1. *Wystarczy* , by nie przekraczała -1.Warunek d) jest oczywiście konieczny. Aby liczba mogła być mniejsza od -1, musi „najpierw" być mniejsza od 2009. Warunek ten jest zatem konieczny, ale oczywiście nie jest wystarczający. Podobnie z warunkiem $|\ a\ | \ \geq 1$.

Zadanie 1.45. Które z podanych w zadaniu poprzednim zdań są warunkami dostatecznymi, a które wystarczającymi do prawdziwości zdania $\exists_{x\in\mathbb{C}} - x^2 \geq a + 1$ (róznica w warunku polega na tym, że x jest teraz liczbą zespoloną).

Zadanie 1.46. W reklamach telewizyjnych często powtarza się zwrot "aby wygrać samochód, wystarczy wysłać kupon". Oceń prawdziwość tego zdania z punktu widzenia logiki matematycznej.

Zadanie 1.47. Które z poniższych zdań są prawdziwe:

a) warunkiem wystarczającym na to, by drużyna polska wygrała Euro 2012 jest, by wygrała wszystkie mecze;

b) warunkiem koniecznym na to, by drużyna polska wygrała Euro 2012 jest, by wygrała wszystkie mecze;

c) warunkiem koniecznym do wygrania Euro 2012 jest, by nie przegrać żadnego meczu;

d) warunkiem wystarczającym do wygrania Euro 2012 jest, by nie przegrać żadnego meczu;

Zadanie 1.48. (zadanie trudne, Hugo Steinhaus, "100 zadań").

Uczniów klasy A nazwiemy akami, uczniów klasy B bekami. Aki chwalą się, że są wyższego wzrostu niż beki, a beki uchodzą za lepszych matematyków. Gdy raz jeden z aków popattrzył z góry na beka, ten zapytał: Co to właściwie znaczy, że jesteście wyżsi od nas. Czy to znaczy, że:

1) każdy ak jest wyższy od każdego beka?
2) największy ak jest wyższy od największego beka?
3) każdy ak ma beka, od którego jest wyższy?
4) każdy bek ma aka, od którego jest niższy?
5) każdy ak ma beka, i to każdy innego, od którego jest wyższy?
6) każdy bek ma aka, i to każdy innego, od którego jest niższy?
7) najmniejszy bek jest niższy od najmniejszego aka?

8) suma wzrostu aków jest większa od sumy wzrostu beków?
9) najmniejszy ak przewyższa więcej beków niż największy bek aków?
10) więcej jest takich aków, które przewyższają jakiegoś beka niż beków, którzy przewyższają jakiegoś aka?
11) średnia arytmetyczna wzrostu aków jest większa od średniej arytmetycznej wzrostu beków?
12) wiecej jest aków wzrostu wyższego od średniej wzrostu beków niz beków wyższego wzrostu od średniej aków?
13) mediana wzrostu aków jest większa od mediany wzrostu beków?

Jak pisze Hugo Steinhaus, oblany potokiem pytań ak zmalał. A pytanie w zadaniu jest następujące: czy i które z podanych 13 kwestii są zależne od siebie? Inaczej mówiąc, trzeba znaleźć takie pary pytań, że odpowiedź "tak" na pierwsze zmusza do odpowiedzi "tak" na drugie. Czy sa pytania równoważne, to znaczy, czy sa pary, że odpowiedzi na obydwa pytania musza być jednakowe. Czy są pary zależne, ale nierównoważne.

Odpowiedzi uzasadnić, podając ewentualne kontrprzykłady.

Początek rozwiązania. Jest zupełnie jasne, że odpowiedź "tak" na pierwsze wymusza taka odpowiedź na wszystkie inne pytania. Zagadnienie drugie jest niezależne od pozostałych. Porównanie wzrostu najwyższych członków grupy nie mówi nic o całej grupie. Pytanie 3 rozpatrzmy na przykładzie: wzrost w klasie A to 160, 159, 155,154, 152, natomiast w B to 180, 179, 175, 174 i 151. Wtedy każdy ak ma beka, od którego jest niższy, mianowicie tego ostatniego, natomiast w każdym innym sensie aki sa niższe.

Zadanie 1.49. Zasięganie informacji na wycieczce. W dolinie w górach mieszka dwóch gospodarzy. Jeden z nich jest przyjaźnie nastawiony do turystów: zaprasza do siebie, częstuje kawą, a pytany o drogę, zawsze udziela poprawnej odpowiedzi. Drugi nie lubi turystów i złośliwie udziela fałszywych informacji. Obaj mają tylko jedną wspólną cechę. Są mianowicie bardzo małomówni i w szczególności odpowiadają tylko na jedno zadane pytanie. Jak zadając tylko jedno pytanie, dowiedzieć się, który ze szlaków (czerwony czy niebieski) prowadzi na szczyt? Nie wiemy, z którym z nich rozmawiamy.

Zadanie 1.50. Jak nauczyć się lokalnego języka? Na pewnej wyspie żyją dwa niechętne sobie wzajemnie plemiona: Fitumitu i Bajtata. Każdy Bajtata kłamie, każdy Fitumitu mówi prawdę. Rozumieją po polsku, ale odpowiadają w swoim języku: huhu lub uhuhu. Nie wiemy, które z tych słów znaczy „tak", a które „nie". Jak dowiedzieć się o to za pomocą tylko jednego pytania?

Zadanie 1.51. Z kim mamy do czynienia? Jak, również za pomocą jednego pytania, dowiedzieć się, do którego plemienia należy tubylec, z którym rozmawiamy? Jeśli zapytamy go, czy jest Bajtatą, każdy odpowie, że nie. Jeśli zapytamy, czy jest Fitumitu, w odpowiedzi usłyszymy zawsze „tak".

Wykład 2. Indukcja i rekursja.

Zadanie 2.1. Udowodnić przez indukcję nastepujące wzory:

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$;

$1^4 + 2^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n2+3n+1)}{30}$;

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ... + (2n + 1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$;

$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + ... + (2n + 1)^3 = (n + 1)^2(2n^2 + 4n + 1)$;

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n - 1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$;

$\sum_{k=1}^{n}(4k - 3) = n(2n - 1)$;

$\sum_{k=1}^{n}(4k - 3)^2 = \frac{n(16n^2-12n-1)}{3}$;

$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}(2k - 1) = -2n$;

$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}(2k - 1)^2 = -8n^2$;

Zadanie 2.2. Udowodnić indukcyjnie nierowności

a) Jeżeli $n \geq 4$, to $n! > 2n$.
b) Jeżeli $n > 4$, to $2^n > n^2$.

Zadanie 2.3. Ciąg Fibonacciego określamy w ten sposób. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Początkowymi wyrazami tego ciągu są zatem 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... Wykazać indukcyjnie, że

a) liczby a_{3n} są parzyste;
b) liczby a_{4n} są podzielne przez 3;
c) co piąta liczba, począwszy od 5 , jest podzielna przez 5;
d) zachodzi ogólny wzór: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Komentarz. Na przykładzie ciągu Fibonacciego można zobaczyć olbrzymią różnicę w informatyce między programami, w których używamy indukcji, a tymi, w których rekursji. Programy, procedury i funkcje, które wywołują same siebie (tylko ze zmienionymi parametrami) są prostsze do napisania, ale wolniej działają. Na ogół bowiem „nie widzą", że mogą skorzystać z niedawno przeprowadzonych obliczeń. Na przykład, jeżeli będę chciał obliczyć n-ty wyraz ciągu Fibonacciego, to najbardziej naturalny wydaje się program według takiego schematu:

Jeżeli $n = 1$, to tym wyrazem jest 0. Jeżeli $n = 2$, to tym wyrazem jest 1. W przeciwnym razie do obliczenia tego wyrazu musisz obliczyć najpierw wyraz o numerze $n-1$, potem wyraz o numerze $n-2$ i wyniki dodać.

Taki program będzie działał niesłychanie powoli, a procesor naszego komputera będzie pracował w pocie czoła. Dlaczego? Pomyślmy. Żeby obliczyć siódmy wyraz, program musi wyliczyć wyraz szósty i piąty. Program zabiera się do wyrazu szóstego. *Myśli* sobie przy tym tak (kto myśli? No, ten program...)

– Aha, muszę w tym celu obliczyć piąty i czwarty. Wezmę się za piąty. Jak mam obliczyć ten wyraz? Zobaczmy, co każe programista. Tak, w porządku: mam obliczyć wyraz czwarty i trzeci. Już się robi. Już biegnę do czwartego... Już czytam instrukcję: żeby obliczyć wyraz czwarty, oblicz najpierw trzeci, potem drugi, a wyniki dodaj. To proste. A jak się oblicza trzeci? Słucham rozkazów: Trzeci to drugi plus pierwszy. No, wreszcie jakieś konkrety. Drugi wyraz to ... ojej, gdzież on jest... , a tu. Równy jest 1. Pierwszy wyraz? Zero. Mam to dodać? No, to proste. O co tyle krzyku. Dodaję, Wynik jest równy jeden. Mam trzeci wyraz ciągu. Co to ja teraz mam robić? Aha, obliczać wyraz czwarty.....

Przerwijmy mu ten monolog wewnętrzny. Za każdym razem program powtarza wszystkie obliczenia od nowa – bo tak mu każe rekursja.

Napisz program indukcyjny na obliczanie kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego.

Zadanie 2.4. Udowodnić indukcyjnie, że jeżeli pożyczamy z banku kapitał K na p procent na n lat (okresów) i chcemy spłacać po tyle samo, to wielkość stałej raty jest równa $K\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$, a po a po k-tym roku (okresie) zostaje kapitału do spłaty $Krk - Kr^n\frac{r^k-1}{r^n-1}$.

Zadanie 2.5. Wykazać, że średnia arytmetyczna 2^n liczb dodatnich jest większa lub równa od średniej geometrycznej tych liczb.

Zadanie 2.6. W pudle było 5 kapeluszy, dwa czarne i dwa białe. Ustawiono trzech panów w rzędzie, jednego za drugim i każdemu włożono kapelusz na głowę. Nikt nie widział ani własnego kapelusza, ani kapeluszy panów stojących za nim. Zapytano pana stojącego z tyłu, czy wie, jakiego koloru jest jego kapelusz. Odpowiedział, że nie wie. Zapytano o to samo pana stojącego w środku. Odpowiedział, że też nie wie. Na to pan trzeci oświadczył, że wobec takich odpowiedzi poprzedników on już wie, jaki ma kapelusz.

Jaki był kolor kapelusza trzeciego pana?

Rozwiązanie. Jeśli pan stojący z tyłu nie mógł określić koloru swojego kapelusza, to znaczy, że nie widział przed sobą dwóch białych. Gdyby pierwszy z panów miał biały kapelusz, to środkowy rozumowałby tak: on ma biały, a ja i on razem nie mamy dwóch białych, zatem ja mam czarny. Pan stojący z przodu rozumował tak: skoro mój poprzednik nie mógł zastosować takiego rozumowania, to ja mam czarny kapelusz!

Bardzo efektowne jest zastosowanie indukcji do zadania logicznego, stanowiącego rozszerzenie zadania o panach w kapeluszach na głowie. Podajemy treść zadania i wskazówkę, jakiego twierdzenia dowodzić indukcyjnie. Z niego już wyniknie od razu teza.

Było n panów, n kapeluszy czarnych i n–1 białych. Ustawiono n panów w rzędzie, jednego za drugim i każdemu włożono kapelusz na głowę. Nikt nie widział ani własnego kapelusza, ani kapeluszy panów stojących za nim. Zapytano pana stojącego z tyłu, czy wie, jakiego koloru jest jego kapelusz. Odpowiedział, że nie wie. Zapytano o to samo następnego pana. Odpowiedział, że też nie wie ... i tak dalej aż do przedostatniego: „nie wiem". Ostatni z panów (ten, który nie widział żadnego kapelusza) oświadczył, że wobec takich odpowiedzi poprzedników on już wie, jaki ma kapelusz.

Jaki był kolor kapelusza tego pana?

Wskazówka: Udowodnić przez indukcję następujące

Twierdzenie. Jeżeli k-ty pan nie widzi przed sobą czarnych kapeluszy, a poprzednik nie mógł rozstrzygnąć zagadnienia, to k-ty pan wie, że ma na głowie czarny kapelusz.

Zadanie 2.7. Komputer podpowiada ciekawe rozkłady:

$$25 = 1 \cdot 25$$
$$252525 = 91 \cdot 2775$$
$$2525252525 = 9091 \cdot 277775$$
$$25252525252525 = 909091 \cdot 27777775$$
$$252525252525252525 = 90909091 \cdot 2777777775$$
$$2525252525252525252525 = 9090909091 \cdot 277777777775$$

...

Jaka jest reguła budowy tej piramidki? Sformułować odpowiednie twierdzenie i udowodnić je – oczywiście przez indukcję.

Zadanie 2.8. Udowodnij, że jeżeli d_n oznacza długość boku $n-$kąta foremnego, to $d_{2k} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{(d_k)^2}{4}}}$.

Zadanie 2.9. W pewnym wierzchołku czworościanu siedzi pająk, w innym mucha. Mucha zaczyna spacerować po krawędziach czworościanu. Przejście każdej (od wierzchołka do wierzchołka) zajmuje jej minutę. W każdym narożniku (wierzchołku) czworościanu wybiera losowo krawędź do dalszej wędrówki. Oczywiście wszystko kończy się, gdy wskutek złego wyboru wpadnie na pająka, który ma na to oczywiście inny punkt widzenia: oto nadszedł obiad!

Wykazać, że prawdopodobieństwo, że pająk doczeka się obiadu nie później niż po n minutach wynosi $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Zadanie 2.10. Mucha i pająk siedzą w przeciwległych wierzchołkach sześcianu. Mucha wędruje po krawędziach sześcianu, wybierając za każdym razem (to znaczy w każdym wierzchołku) losowo jedną z nich. Na przejście każdej z nich potrzebuje minuty. Wykazać, że prawdopodobieństwo, że pająk doczeka się obiadu nie później niż po n minutach wynosi $p_{2k+1} = p_{2k+2} = \left(\frac{7}{9}\right)^k$.

Wykład 3. Zbiory

Zadanie 3.1. Wyznacz (i naszkicuj na osi liczbowej lub w układzie współrzędnych) zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jeżeli zbiory A , B są określone następująco:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 > 9\}, \ B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 1\}$.
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 > 1\}, \ B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 9\}$.
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y - x > 0\}, \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x + y < 3\}$.
d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = |\ x\ |\}, \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = |\ y\ |\}$.
e) $A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |\ x\ | \ < 1\ \}\ , \ B = \{\ (x, y\} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 6x\ \}$.

Zadanie 3.2 (a - e) . Opisz i naszkicuj uzupełnienie zbioru C na płaszczyźnie, wiedząc, że C jest sumą uzupełnień zbiorów A i B z poprzedniego zadania.

Funkcja charakterystyczna zbioru.

Rozpatrujemy podzbiory ustalonego zbioru X. Niech A będzie takim zbiorem, tj. $A \subset X$. Określamy *funkcję charakterystyczną zbioru* A w następujący sposób:

$ch_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } x \in A \\ 0, \text{ jeżeli } x \notin A \end{cases}$. Jest to funkcja, której dziedziną jest zbiór X, a wartościami - liczby 0 i 1. Jeżeli interpretujemy te liczby jako „fałsz" i „prawdę", to funkcja ch „stwierdza jak jest" dla przynależności elementu do zbioru. Zauważmy, że liczby 0 i 1 mają wiele charakterystycznych, unikatowych własności, z których najczęściej będziemy wykorzystywać to, że są one równe swoim kwadratom. Istotnie: $0^2 = 0$, $1^2 = 1$. Są to jedyne liczby o tej własności. Wynika to stąd, że równanie $x^2 = x$ ma tylko dwa pierwiastki (jako równanie kwadratowe).

Funkcje charakterystyczne pozwalają na sprowadzenie niektórych działań na zbiorach do prostych rachunków algebraicznych. Pomysł ten zrealizował matematyk angielski George Boole (w połowie XIX wieku). Wyprowadzimy funkcje charakterystyczne dla podstwowych działań na zbiorach.

1. Funkcja charakterystyczna iloczynu (przecięcia, części wspólnej) zbiorów:

$$ch_{A \cap B} = ch_A \cdot ch_B$$

Wzór ten należy rozumieć następująco: jeżeli wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , a wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, to wartością funkcji $ch_{A \cap B}$ w tym punkcie jest iloczyn ab.

Dowód. Rozpatrzymy poszczególne przypadki i w każdym z nich porównamy wartości funkcji. Jeżeli $x \in A$ a także $x \in B$, to funkcja charakterystyczna $ch_{A \cap B}$ przybiera w tym punkcie wartość 1, $ch_{A \cap B}(x) = 1$. Mamy także $ch_A(x) = 1$, $ch_B(x) = 1$, zatem $ch_A \cdot ch_B(x) = 1$.Wartości obu funkcji sa równe.

Jeżeli $x \in A$ ale $x \notin B$, to funkcja charakterystyczna $ch_{A \cap B}$ przybiera w tym punkcie wartość 0, $ch_{A \cap B}(x) = 0$. Mamy $ch_A(x) = 1$, $ch_B(x) = 0$, zatem $ch_A \cdot ch_B(x) = 0$.Wartości obu funkcji sa równe.

Jeżeli $x \notin A$ i $x \in B$, to funkcja charakterystyczna $ch_{A\cap B}$ też przybiera

w tym punkcie wartość 0, $ch_{A\cap B}(x) = 0$. W tym przypadku mamy $ch_A(x) = 0$, $ch_B(x) = 1$, zatem $ch_A \cdot ch_B(x) = 0$.Wartości obu funkcji sa równe.

Jeżeli $x \notin A$ i $x \notin B$, to funkcja charakterystyczna $ch_{A\cap B}$ przybiera w

tym punkcie wartość 0, $ch_{A\cap B}(x) = 0$. W tym przypadku mamy $ch_A(x) = 0$, $ch_B(x) = 0$, zatem $ch_A \cdot ch_B(x) = 0$.Wartości obu funkcji sa równe.

Rozumowanie to można przeprowadzić inaczej, znacznie prościej. Rozpatrzmy iloczyn ab. Czynniki a , b sa równe 0 albo 1. W tym przypadku iloczyn jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa czynniki sa równe 1. A to jest równoważne przynależności x do obydwu zbiorów A, B.

2. Funkcja charakterystyczna sumy zbiorów. Mamy

$$ch_{A\cup B} = ch_A + ch_B - ch_A \cdot ch_B$$

Wzór ten należy rozumieć następująco: jeżeli wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , a wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, to wartość funkcji $ch_{A\cup B}$ w tym punkcie jest równa $a + b - ab$.

Dowód. Rozpatrzymy poszczególne przypadki i w każdym z nich porównamy wartości funkcji. Jeżeli punkt x należy do choć jednego ze zbiorów A , B , to funkcja charakterystyczna $ch_{A\cup B}$ przybiera w tym punkcie wartość 1,

$ch_{A\cup B}(x) = 1$. Przynajmniej jedna z liczb $a = ch_A(x)$, $b = ch_B(x)$ jest równa 1. Wtedy $a + b - ab = 1$. Wartości obu funkcji sa równe.

Jeżeli $x \notin A$ i $x \notin B$, to funkcja charakterystyczna $ch_{A\cup B}$ przybiera w

tym punkcie wartość 0, $ch_{A\cup B}(x) = 0$. W tym przypadku mamy $ch_A(x) = 0$, $ch_B(x) = 0$, zatem $ch_A + ch_B(x) - ch_A \cdot ch_B = 0$.Wartości obu funkcji sa równe.

3. Funkcja charakterystyczna różnicy zbiorów. Mamy

$$ch_{A \setminus B} = ch_A \cdot (1 \setminus ch_B).$$

Wzór ten należy rozumieć następująco: jeżeli wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , a wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, to wartość funkcji $ch_{A \setminus B}$ w tym punkcie jest równa $a(1 - b)$.

Dowód. Aby iloczyn $a(1 - b)$ był równy 1, potrzeba i wystarcza, by obydwa czynniki były równe 1. A to jest równoważne stwierdzeniu, że $x \in A \setminus B$.

4. Funkcja charakterystyczna różnicy symetrycznej zbiorów.

Mamy

$$ch_{A\div B} = ch_A + ch_B - 2 \cdot ch_A \cdot ch_B$$

Wzór ten należy rozumieć następująco: jeżeli wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , a wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, to wartość funkcji $ch_{A\div B}$ w tym punkcie jest równa $a + b - 2ab$.

Dowód. Wartość funkcji $ch_{A\div B}(x)$ jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy x należy do jednego ze zbiorów A, B , lecz nie należy do drugiego. Wartość wyrażenia $a+b-2ab$ (gdzie liczby a oraz b są zerami albo jedynkami) może być równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z tych liczb jest równa 0, a druga 1, a zatem gdy jedna z wartości funkcji charakterystycznych $ch_A(x)$, $ch_B(x)$ jest rowna zero, a ta druga 1. To znaczy, że x należy do jednego ze zbiorów A, B ,

lecz nie należy do drugiego

Funkcje charakterystyczne iloczynu (produktu), sumy, różnicy i różnicy symetrycznej zbiorów A, B będziemy oznaczać odpowiednio przez $P(A,B)$, $S(A,B)$, $R(A,B)$, $X(A,B)$. Małe litery będa oznaczać odpowiednie funkcje liczbowe:

$p(a,b) = ab$, $s(a,b) = a+b-ab$, $r(a,b) = a(1-b)$, $x(a,b) = a+b-2ab$

Zadanie 3.3. Za pomocą funkcji charakterystycznych udowodnij następujące wzory:

a) rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

b) rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

c) pierwsze prawo DeMorgana: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

d) drugie prawo DeMorgana: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

e) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

f) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

Rozwiązanie.

a) Przyjmijmy, że wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, zaś wartością funkcji ch_C w tym punkcie jest c.Wtedy funkcja charakterystyczna zbioru $A \cap (B \cup C)$ przybiera w tym punkcie wartość

$p(a, s(b,c)) = a \cdot s(b,c) = a \cdot (b + c - bc) = ab + ac - abc.$

Przy obliczeniu wartości prawej strony skorzystamy z tego, że $a^2 = a$.Prawa strona przybiera zatem wartość

$s(p(a,b), p(a,c)) = s(ab, ac) = ab + ac - abac = ab + ac - abc.$

Obie strony są zatem równe.

b) Przyjmijmy, że wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, zaś wartością funkcji ch_C w tym punkcie jest c.Wtedy funkcja charakterystyczna zbioru stojącego po lewej stronie rowności, tj. $A \cup (B \cap C)$ przybiera w tym punkcie wartość

$s(a, p(b,c)) = s(a, bc) = a + bc - abc.$

Natomiast funkcja charakterystyczna zbioru stojącego po prawej stronie równości, tj. zbioru $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, ma w tym punkcie wartość

$p(s(a,b), s(a,c)) = p(a + b - ab\ ,\ a + c - ac) = (a + b - ab) \cdot (a + c - ac) =$
$= a^2 + ac - a^2c + ab + bc - abc - a^2b - abc + a^2bc = a + ac - ac + ab + bc - abc - ab - abc = a + bc - abc.$

Przy obliczeniu wartości prawej strony skorzystaliśmy z tego, że $a^2 = a$.

Obie strony są zatem równe.

c) Przyjmijmy, że wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, zaś wartością funkcji ch_C w tym punkcie jest c.Wartość funkcji charakterystycznej zbioru $A \setminus (B \cup C)$ jest równa $r(a, s(b,c)) = a(1 - s(b,c)) = a(1 - b - c + bc)$, zaś wartość funkcji charakterystycznej zbioru po prawej stronie równości , to jest zbioru $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, wynosi

$p(r(a,b),r(a,c)) = r(a,b)\cdot r(a,c) = \ a(1-b)\cdot a(1-c) = (a-ab)(a-ac) = a^2 - a^2c - a^2b + a^2bc = a - ac - ab + abc$

A zatem obydwie strony sa równe.

Zadanie 3.4. Zilustruj działania występujące w poprzednim zadaniu na diagramach Venna.

Zadanie 3.5. Wykaż za pomocą funkcji charakterystycznych, że działanie „różnica symetryczna" jest łączne, to znaczy, że zawsze jest $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że wartością funkcji ch_A w pewnympunkcie x jest a , wartością funkcji ch_B w tym punkcie jest b, zaś wartością funkcji ch_C w tym punkcie jest c.Funkcja charakterystyczna zbioru $A \div (B \div C)$ ma w tym punkcie wartość

$x(a,x(b,c)) = a + x(b,c) - 2\cdot a\cdot x(b,c) \ = \ a+b+c-2bc-2\cdot a\cdot(b+c-2bc) = = a+b+c-2bc-2ab-2ac+4abc.$

Dla zbioru $(A \div B) \div C$ otrzymujemy

$x(x(a,b),c) = x(a+b-2ab,c) = a+b-2ab+c-2(a+b-2ab)c \ = \ a+b+c-2bc-2ab-2ac+4abc.$

Obie strony są zatem równe.

Zadanie 3.6. Zilustruj łączność różnicy symetrycznej na diagramie Venna.

Zadanie 3.7. Wykazać, że zbiór $(A \cup B) \div (A \cup C)$ zawsze zawiera się w zbiorze $A \div B \div C$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru $(A\cup B)\div(A\cup C)$. Jej wartością w punkcie x jest $b+c-ab-2bc-ac+2abc$. W poprzednim zadaniu wyznaczyliśmy wartość funkcji charakterystycznej zbioru $A \div B \div C$. Mamy wykazać, że

$b+c-ab-2bc-ac+2abc \ \leq \ a+b+c-2bc-2ab-2ac+4abc.$

Upraszczamy nierówność (dodajemy do obu stron $ab+ac+2bc-b-c-2abc$)

$0 \leq \ a-ab-ac+2abc.$

$0 \leq \ a(1-b-c+2bc).$

Nierowność ta jest równoważna z wyjściową. Nietrudno zauważyć, że jest spełniona dla wszystkich liczb a, b, c będących zerami lub jedynkami.

Możemy wyrażenie $a(1-b-c+2bc)$ przekształcić tak:

$a(1-b-c+2bc) = a(1-b^2-c^2+2bc) = a(1-(b-c)^2).$

I to, że jest to zawsze nieujemne, jest teraz zrozumiałe.

Zadanie 3.8. W oznaczeniach poprzedniego zadania, znaleźć przykład, że $(A \cup B) \div (A \cup C) \subsetneq A \div B \div C$.

Rozwiązanie. Za pomocą funkcji charakterystycznych można taki przykład znaleźć następująco.

Szukamy takich liczb a, b, c (równych 0 lub 1), by

$b+c-ab-2bc-ac+2abc \ \leq \ a+b+c-2bc-2ab-2ac+4abc.$

Widzieliśmy, że sprowadza się to do podania takich wartości, by

$0 < a(1-(b-c)^2).$

Jest to możliwe w dwóch przypadkach: $a = 1,\ b = c = 0$ oraz $a = 1,\ b = c = 1$. W pierwszym przypadku znaczy to, że zbiory A, B, C są takie, że istnieje punkt $x \in A$, który nie należy ani do B, ani do C. Przypadek drugi zachodzi wtedy, gdy zbiory A, B, C mają pewien punkt wspólny x.

Zadanie 3.9. Wykaż, za pomocą funkcji charakterystycznych, że
a) $(A \cup B) \setminus B = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \varnothing$.
b) $(A \setminus B) \cup B = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subset A$.

Wykład 4. Ile tego jest?

Zadanie 4.1. Przyjmijmy, że zbiór K ma k elementów, zbiór M ma m elementów i że zbiór N ma n elementów. Przyjmijmy, że $0 < k \leq m \leq n$.

a) Ile najmniej a ile najwięcej elementów mogą mieć następujące zbiory: a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \cup B(\cap C)$, d) $A \cap (B \cup C)$, e) $A \setminus B$, f) $A \setminus (B \setminus C)$, g) $(A \setminus B) \setminus C$, h) $A \setminus (B \cup C)$, i) $A \div B$, j) $(A \div B) \div C$, k) $(A \div B) \setminus C$, l) $(A \cap B) \div C$, m) $(A \div B) \setminus (A \setminus C)$,

b) Zaznaczyć zbiory wynienione powyżej na diagramie Venn'a,

c) wyliczyć funkcje charakterystyczne tych zbiorów.

Zadanie 4.2. Ile elementów ma iloczyn kartezjański zbioru m-elementowego i zbioru n-elementowego?

Odpowiedź. mn. W matematyce szkolnej nazywa się to twierdzeniem o mnożeniu.

Zadanie 4.3. W tylnej piaście roweru jest 7 trybów; w przedniej są 3 przełożenia. Ile jest możliwości tryb-przełożenie?

Odp. Ustawienie przód-tył może być interpretowane jako element iloczynu kartezjańskiego $\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Jest zatem $3 \cdot 7 = 21$ możliwości.

Zadanie 4.4. Z Kuźnic na Halę Gąsienicową są 2 szlaki turystyczne, z Hali Gąsienicowej do doliny Pięciu Stawów cztery, z doliny Pięciu Stawów do Morskiego Oka dwa. Ile jest możliwości wycieczek Kuźnice-Hala Gąsienicowa-Dolina Pięciu Stawów-Morskie Oko?

Odp. $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

Zadanie 4.5.

a) Mam do wykonania 2 czynności. Każdą mogę wykonać na 3 sposoby. Na ile sposobów mogę wykonać ten zestaw czynności?

Odp. $3^2 = 9$.

b) Mam do wykonania 3 czynności. Każdą mogę wykonać na 2 sposoby. Na ile sposobów mogę wykonać ten zestaw?

Odp. $2^3 = 8$.

c) Mam do wykonania 2 czynności. Każdą mogę wykonać na 10 sposobów. Na ile sposobów mogę wykonać ten zestaw czynności?

Odp. $10^2 = 100$.

d) Mam do wykonania 10 czynności. Każdą mogę wykonać na 2 sposoby. Na ile sposobów mogę wykonać ten zestaw?

Odp. $2^{10} = 1024$.

Zadanie 4.6. Ile dzielników ma liczba naturalna n , której rozkładem na czynniki piewsze jest $n = p_1^{n_1} \cdot p_1^{n_1} \cdot .... \cdot p_k^{n_k}$?

Odpowiedź: $(n_1+1)(n_2+1)....(n_k+1)$.Na przykład dla liczby $24 = 2^3 \cdot 3$ mamy $4 \cdot 2 = 8$ dzielników. Są nimi $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24$.

Zadanie 4.7. Ile dzielników ma liczba 360?

Rozwiązanie. Mamy $36 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot$ Liczba d jest dodatnim dzielnikiem liczby 360, gdy d jest postaci $2^n \cdot 3^k \cdot 5^l$, gdzie wykładnik n jest niewiększy niz 3, wykładnik k jest niewiększy niż 2, a wykładnik l jest niewiększy niż 1. Zatem $(n, k, l) \in \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$. Są zatem $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ różne dodatnie dzielniki liczby 360. Oto one: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Zadanie 4.8. Ile jest dodatnich dzielników liczby 3118500?

Odpowiedź. Ponieważ $3118500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$,więc liczba ta ma $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ czynników.

Zadanie 4.9. Ile dodatnich dzielników mają liczby 111, 1111, 10000, 1234, 999999, 1000000 ?

Zadanie 4.10. Ile dodatnich dzielników ma liczba $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 = 7420\,738\,134\,810$?

Zadanie 4.11. Ile dodatnich czynników ma liczba $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$?

Zadanie 4.12. Ile dodatnich czynników ma liczba $2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{12} \cdot 7^{13} = 4290\,899\,381\,642\,207\,250\,000\,000\,000$?

Zadanie 4.13. Numer dowodu osobistego składa się z trzech liter (na początku) i sześciu cyfr (potem). W grę wchodzi 26 liter. Ile jest teoretycznie możliwych róznych numerów dowodów osobistych?

Rozwiązanie. Układ trzy litery - sześć cyfr może być interpretowany jako element iloczynu kartezjańskiego $A \times B \times C \times P \times Q \times R \times S \times T \times U$, gdzie

zbiory A, B, C mają po 26 elementów, a pozostałe po 10. Razem jest zatem do dyspozycji $26^3 \cdot 10^6 = 17\,576\,000\,000$ możliwych numerów; około dwa i pół raza więcej niż wynosi liczba ludności całego świata.

Zadanie 4.14. Hasło dostępu składa się z dziewięciu symboli, wśród których są trzy litery i sześć cyfr. Ile jest możliwych haseł?

Odpowiedź. $\binom{9}{3} \cdot 26^3 \cdot 10^6 = 1476\,384\,000\,000$.

Zadanie 4.15. Hasło dostępu składa się z dziewięciu symboli, wybranych spośród 26 liter i 10 cyfr. Ile jest możliwych haseł?

Odpowiedź. $36^9 = 101\,559\,956\,668\,416$.

Zadanie 4.16. Ile jest podzbiorów o k elementach w zbiorze o n elementach?

Odpowiedź: Oczywiście zakładamy, że $k \leq n$. Jest tych zbiorów $\binom{n}{k} = \frac{n(n-k)!}{k!} = \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$. Współczynniki $\binom{n}{k}$ nazywaja się współczynnikami dwumianowymi albo współczynnikami Newtona. Tworzą one trójkąt Pascala. W tym trójkącie liczbowym każdy wyraz (z wyjątkiem skrajnych jedynek) jest sumą dwóch stojących bezpośrednio nad nim.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6
1 7 21 35 35 21 7
1 8 28 56 70 56 28
1 9 36 84 126 126 84 36
1 10 45 120 210 252 120 120
1 11 55 165 240 462 462 240 165

Mamy zatem $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Zadanie 4.17. Ile jest

a) wszystkich podzbiorów danego zbioru $n-$elementowego X ?

b) tych podzbiorów danego zbioru $n-$elementowego X, które zawierają ustalony element?

c) tych podzbiorów danego zbioru $n-$elementowego X, które zawierają dwa ustalone elementy?

Odpowiedź. Zbiór $n-$elementowy ma 2^n podzbiorów. Podamy dowód,

który da od razu algorytm ustawiania owych podzbiorów w pewnym porządku. Porządek ten nazwiemy indukcyjnym. Zakładamy, że $X = \{1, 2, ..., n\}$. Przyjmując tak, zakładamy zatem, że elementy zbioru są ustawione w jakimś porządku. Jest to zatem zbiór uporządkowany w sensie definicji podanej niżej.

Zbiór jednoelementowy $\{1\}$ ma dwa podzbiory: zbiór pusty $\varnothing$ i pełny zbiór $\{1\}$.Ustawmy je w tej właśnie kolejności. Ponieważ $2^1 = 2$, zatem dla $n = 1$ wzór o liczbie elementów zbioru jest prawdziwy. Załóżmy, że jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 1$. To znaczy, że wszystkie podzbiory zbioru $X = \{1, 2, ..., n\}$ sa ustawione w pewnym porządku. Z każdego z tych zbiorów tworzymy nowy zbiór przez dodanie liczby $n+1$. Zatem liczba zbiorów zwiększa się dwukrotnie. Ponieważ $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, więc dowód jest zakończony.

Zbiór podzbiorów zbioru X nazywamy *zbiorem potęgowym* i oznaczamy jednym z symboli 2^X lub $P(X)$. Z przedstawionego dowodu wynika algorytm ustawiania zbioru potęgowego w pewnej kolejności. Dla kolejnych n jest to:

$\varnothing$, $\{1\}$;

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$;

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$;

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$;

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$,$\{5\}$, $\{1,5\}$, $\{2,5\}$, $\{1,2,5\}$,

$\{3,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$.

b) podzbiorów danego zbioru $n-$elementowego X, które zawierają ustalony element, a, jest 2^{n-1}. Możemy bowiem te zbiory utworzyć tak: rozwwązmy zbiór X z usuniętym elementem a, czyli $X \setminus\{a\}$. Ma on 2^{n-1} podzbiorów.

Do każdego z nich dołączamy element a. W ten sposób otrzymamy wszystkie podzbiory zbioru X , które zawierają ustalony element.

c) dla $n \geq 2$ liczba podzbiorów danego zbioru $n-$elementowego X, które zawierają dwa ustalone elementy, jest równa 2^{n-2}.

Zadanie 4.18. Dany jest zbiór X o m elementach i jego podzbiór Y o n elementach. Ile jest podzbiorów, które są

a) rozłączne z Y ,

b) mają niepuste przecięcie ze zbiorem Y ,

c) mają k elementów i zawierają jeden element ze zbioru Y,

d) mają k elementów i niepuste przecięcie ze zbiorem Y.

Rozwiązanie. a) Jest $m-n$ elementów, które należą do X, ale nie należą do Y. Zatem jest 2^{m-n} takich zbiorów.

b) do każdego niepustego podzbioru zbioru Y można dołączyć dowolny zestaw $m-n$ elementów nie należących do Y. Łącznie jest zatem $(2^n-1)\cdot 2^{m-n} =$

$2^m - 2^{m-n}$ takich zbiorów. Na przykład gdy $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3\}$, otrzymujemy następujące zbiory (jest ich cztery razy siedem):

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$,
$\{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$,
$\{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,5\}$,
$\{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$.
Zgadza się ze wzorem, który daje $2^5 - 2^{5-3} = 28$ zbiorów.

c) (wskazówka) należy oczywiście przyjąć założenie, że $n \leq k \leq m$. Do każdego elementu zbioru Y można dobrać $n-k$ elementów spoza Y.

Zadanie 4.19. Dany jest zbiór m elementach i jego dwa rozłączne podzbiory: jeden o k elementach, drugi o n elementach.

a) ile jest podzbiorów zbioru X, które mają z każdym z tych zbiorów po jednym wspólnym elemencie?

b) ile jest podzbiorów zbioru X, które mają niepustą część wspólną z każdym z tych zbiorów?

Rozwiązanie, (a). Oznaczmy "duży" zbiór m-elementowy przez X ; ten zbiór k-elementowy przez A, a zbiór n-elementowy przez B.Oczywiście musi być $k+n \leq m$. Wybieramy wszystkie pary elementów: pierwszy ze zbioru A, drugi ze zbioru B.Tych par jest $k \cdot n$. Zbiór $X \setminus (A \cup B)$ ma $m-(k+n)$ elementów. Możeny z nich utworzyć $2^{m-(k+n)}$ podzbiorów, a do każdego z nich dołączyć każdą z wybranych par. Łącznie otrzymujemy $k \cdot n \cdot 2^{m-(k+n)}$ podzbiorów. Na przykład, gdy $m = 7,\ k = 2,\ n = 3$, wzór podaje liczbę $2 \cdot 3 \cdot 2^{7-(2+3)} = 24$.

Istotnie, dla $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ otrzymujemy takie podzbiory:

$\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$,
$\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 6\}$,
$\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$,
$\{1, 3, 6, 7\}, \{1, 4, 6, 7\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{2, 4, 6, 7\}, \{2, 5, 6, 7\}$.

Zadanie 4.20. Danych jest n rozłącznych podzbiorów $A_1,\ A_2, A_3,\ \ldots\ ,\ A_k$ zbioru m-elementowego X. Kolejne te podzbiory mają $1, 2, 3, \ldots, k$ elementów. Ile jest

a) podzbiorów n elementowych zbioru X, które mają z każdym zbiorem A_j

po jednym wspólnym elemencie?,

b) wszystkich podzbiorów zbioru X, które mają z każdym zbiorem A_j po

jednym wspólnym elemencie ?

c) wszystkich podzbiorów n elementowych zbioru X, które mają niepuste przecięcie z każdym zbiorem A_j ?

d) wszystkich podzbiorów zbioru X, które mają niepuste przecięcie z każdym zbiorem A_j ?

Rozwiązanie (punkt a). Najpierw przeprowadzimy krótką dyskusję warunków zadania. Oczywiście musi być $1 + 2 + 3 + \ \ldots\ + k \ = \ \frac{k(k+1)}{2} \ \leq \ m$ oraz $k \ \leq \ n \ \leq \ m$. Spełniają to na przykład liczby $k = 3$, $m = 10$, $n = 5$.

Oznaczmy liczbę $m - \ \frac{k(k+1)}{2}$ przez K .Wybierzmy z każdego ze zbiorów $A_1,\ A_2, A_3,\ \ldots\ ,\ A_k$ po jednym elemencie. Możemy to zrobić na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \ k = k!$ sposobów. Do każdego z tych zbiorów k-elementowych dobieramy po $n - k$ elementów. Możemy to zrobić na $\binom{m-K}{n-k}$ sposobów. Otrzymujemy

$k! \binom{m-K}{n-k}$ zbiorów.

Gdy $k = 3$, $m = 10$, $n = 5$, przyjmijmy $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5, 6\}$. Naszym zadaniem jest wybrać zbiory o 5 elementach spośród liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ mających po jednym elemencie z $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$. Wybieramy najpierw po jednym elemencie z tych zbiorów, ortrzymując sześć zbiorów:

$\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$.

Do każdego z tych zbiorów możemy dodać dowolnie dwie liczby spośród $7, 8, 9, 10$.Takich par jest sześć. Zatem szukanych zbiorów jest 36. Zgadza się to

ze wzorem, bo $3! \cdot \binom{10-6}{5-3} = 36$.

Rozwiązanie (punkt b). Początek rozumowania jest tak$\int$ sam, jak w a). Wybieramy z każdego ze zbiorów $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ po jednym elemencie. Możemy to zrobić na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k = k$! sposobów. Zostaje $m - K = m - \frac{k(k+1)}{2}$ elementów. Możemy z nich utworzyć 2^{m-K} podzbiorów. Łączymy je z wybranymi wcześniej k! zbiorami. Otrzymujemy razem $k! \cdot 2^{m-K}$. Gdy $k = 3$, $m = 10$, $n = 5$, otrzymamy $3! \cdot 2^{10-6} = 96$ zbiorów.

Zadanie 4.21. Ile jest permutacji zbioru o n elementach?

Odpowiedź (szkic dowodu). Permutacji zbioru n-elementowego jest $n!$. Podamy dowód, z którego wynika też algorytm ustawiający te permutacje w ciąg. Dla $n = 1$ jest tylko jedna permutacja. Założymy, że wszystkie permutacje zbioru o n są ustawione w ciąg o $n!$ elementach.Do każdej permutacji dostawiamy liczbę $n+1$ na każdym możliwym miejscu. Tych miejsc jest $n+1$. Zatem przy przejściu od liczby n do $n+1$ liczba permutacji zwiększa się $n+1$ razy. To kończy dowód.

Oto ustawienie wszystkich permutacji liczb $1, 2, 3$ oraz permutacji liczb $1, 2, 3, 4$ w ciąg:

123, 132, 312, 213 , 231 , 321

oraz

1234, 1243 , 1423, 4123 ,
1324 , 1342 , 1432 , 1432 ,
3124, 3142, 3412, 4312,
2134 , 2143 , 2413 , 4213 ,
2314 , 2341 , 2431 , 4231 ,
3214 , 3241 , 3421 , 4321

Zadanie 4.22. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, ..., n\}$, które zachowują liczby $1, 2, 3, ..., k$ w ich naturalnym porządku? Zakładamy, że $k \leq n$.

Zadanie 4.23. Podać interpretację geometryczną wszystkich 6 permutacji zbioru o 3 elementach (jako izometrii trójkąta równobocznego).

Zadanie 4.24. Podać interpretację geometryczną wszystkich 24 permutacji zbioru o 4 elementach (jako izometrii czworościanu foremnego).

Zadanie 4.25. Ile jest permutacji n elementów, które nie mają punktu stałego?

Wykład 5. Relacje

Ogólnie o relacjach. W języku potocznym słowo relacja znaczy mniej więcej tyle co „związek, powiązanie, współzależność”. Mamy relacje pokrewieństwa, zależności służbowej i znajomości. W matematyce szkolnej mówimy o relacji podzielności. Relacją jest każda zależność funkcyjna. Precyzyjna matematyczna definicja relacji jest dość skomplikowana.

Definicja. Niech A i B będą dwoma dowolnymi zbiorami. *Relacją między elementami zbioru A i elementami zbioru B* nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Mówimy, że elementy $a \in A$ i $b \in B$ są ze sobą w relacji R , gdy $(a, b) \in$ R .

Jest to często spotykane w matematyce zjawisko: chcąc coś wyrazić precyzyjnie, musimy uciec się do skomplikowanych sformułowań. Taką cenę płacimy za precyzję. Poniżej wyjaśniamy, jak tę definicję przełożyć na codzienną praktykę matematyczną.

Wykresy relacji.

Przykład 5.1. Przyjrzyjmy się najpierw relacji podzielności dla liczb całkowitych:

$$m \text{ jest dzielnikiem przez } n \ .$$

Wypiszmy wszystkie pary liczb nie większych niż 15, dla których ta relacja zachodzi. Są to: wszystkie pary $(1, n)$ oraz pary $(2, k)$, gdzie k jest liczbą parzystą,

następnie pary (3,3), (3,6), (3,9), (3,12) i (3,15) , potem (4,4), (4,8), (4,12),

(5,5), (5,10), (5,15), (6,6), (6,12), (7,7), (7,14), (8,8), (9,9), (10,10), (11,11), (12,12) (13,13) (14,14) i (15,15).

Zaznaczając je na płaszczyźnie, otrzymamy *wykres relacji.*

Na oznaczenie ogólnej relacji używamy często litery R albo stosownego symbolu. Tu zrobimy wyjątek i oznaczymy relację przez P, bo litera P jest bardziej naturalna (od słowa *podzielność*). Piszemy:

$mPn \Leftrightarrow m$ jest dzielnikiem n

Przykład 5.2. Postąpmy podobnie (to jest narysujmy wykres) dla relacji R określonej wzorem

x R y $\Leftrightarrow$ y = x + 1 .

Tu sprawa jest prosta: punkty (x,y) spełniające te relację to punkty na wykresie funkcji $y = x + 1$:

Postąpmy teraz przeciwnie. Zaznaczmy na płaszczyźnie jakiś zbiór R i postarajmy się odczytać, jaką relację on opisuje. Jeśli zbiorem R będzie koło o środku w (0,0) i promieniu 1, to relacją będzie oczywiście

xR $y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Niech teraz zbiorem R będzie obszar, położony na płaszczyźnie „pod” prostą $x = y$. Obszar ten składa się z punktów (x, y), dla których $x > y$. Mamy zatem w tym przykładzie:

x R $y \Leftrightarrow x > y$.

Relację możemy utożsamić z jej wykresem !

Każdy zbiór na płaszczyźnie (ogólniej: w iloczynie kartezjańskim) wyznacza pewien związek między x i y, a więc pewną relację. Każda funkcja F: X $\to$ Y jest rodzajem relacji. Nie każda relacja jest funkcją.

Widzimy zatem, że podanie zbioru punktów, których współrzędne spełniają dany związek wystarcza do pełnego opisania tego związku, tej zależności.

Ćwiczenie 5.1. Narysować wykres relacji równości (liczb).

Ćwiczenie 5.2. Narysować wykres relacji mniejszości: x $<$ y gdzie x, y $\in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 5.3. Narysować wykres relacji większości: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x $>$ y .

Ćwiczenie 5.4. Przedstawić graficznie relację zachodzącą między liczbami rzeczywistymi:

$x \mathrm{~R~} y \Leftrightarrow x - y^2 > 2$.

Ćwiczenie 5.5. Ponieważ relacje są podzbiorami iloczynu kartezjańskiego, można mówić o ich sumach, iloczynach itp. Rozpatrzmy dwie relacje zachodzące między liczbami naturalnymi. Są one więc podzbiorami iloczynu kartezjańskiego N $\times$ N :

a) relacja przystawania dwóch liczb modulo 2,

b) relacja przystawania liczb modulo 3.

Jaką relacją jest ich część wspólna ?

Ćwiczenie 5.6. Jaką relację opisuje pusty podzbiór iloczynu kartezjańskiego? Opisać ją wzorem lub słownie.

Ćwiczenie 5.7. Jaką relację między liczbami opisuje pełny podzbiór iloczynu kartezjańskiego X $\times$ X, to znaczy cały zbiór X $\times$ X ? Opisać ją wzorem lub słownie.

Ćwiczenie 5.8. Jaką relację między liczbami opisuje jednopunktowy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, na przykład $A = \{(1, 2)\}$? Opisać tę relację wzorem lub słownie.

Ćwiczenie 5.9. Jaki podzbiór płaszczyzny odpowiada relacji określonej jak następuje:

x R y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y mają tą samą część całkowitą ?

Ćwiczenie 5.10. Jaki podzbiór płaszczyzny odpowiada relacji określonej jak następuje:

x R y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y mają taką samą część ułamkową?

Wykład 6. Funkcje.

Zadanie 6.1. Niech $f(x) = x^2 - 5 \mid x \mid +6$. Wyznaczyć obrazy przedziałów $[0,1], [2,3], [-1,6]$. Wyznaczyć przeciwobrazy zbiorów $[0,2]$, $[-\frac{1}{4}, 0]$.

Zadanie 6.2. Niech $f(x) = x^2 - 2 \mid x \mid +1$. Wyznaczyć obrazy przedziałów $[-1;1], [-2;2], [-1,0]$. Wyznaczyć przeciwobraz zbiorów $[0,1]$.

Zadanie 6.3. Dla podanej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i podanego przedziału I wyznaczyć jego obraz $f(I)$:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $I = [0;4]$,
b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $I = [2;3]$,
c) $f(x) = \mid x \mid$, $I = [-1;\infty)$,
d) $f(x) = \sin\ x$, $I = [0;2\pi]$,
e) $f(x) = x^2 + x + 1$, $I = [-\infty;\ 10]$.

Zadanie 6.4. Dla podanej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i podanego przedziału J wyznaczyć jego przeciwobraz $f^{-1}(J)$:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $J = [0; -\frac{1}{4}]$,
b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $J = [0;6]$,
c) $f(x) = \mid x \mid$, $J = [1;\infty)$,
d) $f(x) = \sin\ x$, $J = [0;1]$,
e) $f(x) = x^2 + x + 1$, $J = [111;133]$.

Zadanie 6.5. Niech m, n będą dwiema liczbami całkowitymi dodatnimi i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną tak: $f(x) = \begin{cases} x^m & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ x^n & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$ .Dla jakich par m, n

a) funkcja ta jest róznowartościowa,
b) funkcja ta jest surjekcją,
c) obrazem przedziału [-1,1] jest ten sam przedział,
d) obrazem przedziału [-1;1] jest przedział [0; 1] ?

Zadanie 6.6. Niech f będzie funkcją przyporządkowującą każdemu niepustemu zbiorowi złożonemu z liczb naturalnych, najmniejszą liczbę tego zbioru. Czy ta funkcja jest róznowartościowa? Określić jej dziedzinę i wyznaczyć jej obraz. Opisać przeciwobraz liczby 2008.

Zadanie 6.7. Niech f będzie funkcją przyporządkowującą każdemu skończonemu i niepustemu zbiorowi złożonemu z liczb naturalnych, największą liczbę tego zbioru. Czy ta funkcja jest róznowartościowa? Określić jej dziedzinę i wyznaczyć jej obraz. Opisać przeciwobraz liczby 2008.

Zadanie 6.8. Podać wzór funkcji wzajemnie jednoznacznej, przeprowadzającej

a) przedział domknięty [0;1] na przedział domknięty [0;2] ,
b) przedział domknięty [0;1] na przedział domknięty [-3;2] ,
c) przedział domknięty [2008;2009] na przedział domknięty [-100;100],

d) przedział domknięty [3;6] na przedział domknięty [4;8] tak, by obrazem punktu 4 był punkt 6;

e) przedział domknięty [-3,3] na przedział domknięty [-3,3] tak, by obrazem punktu -2 był punkt -1, obrazem -1 było 0, obrazem 0 był punkt 1, a obrazem 1 punkt 2.

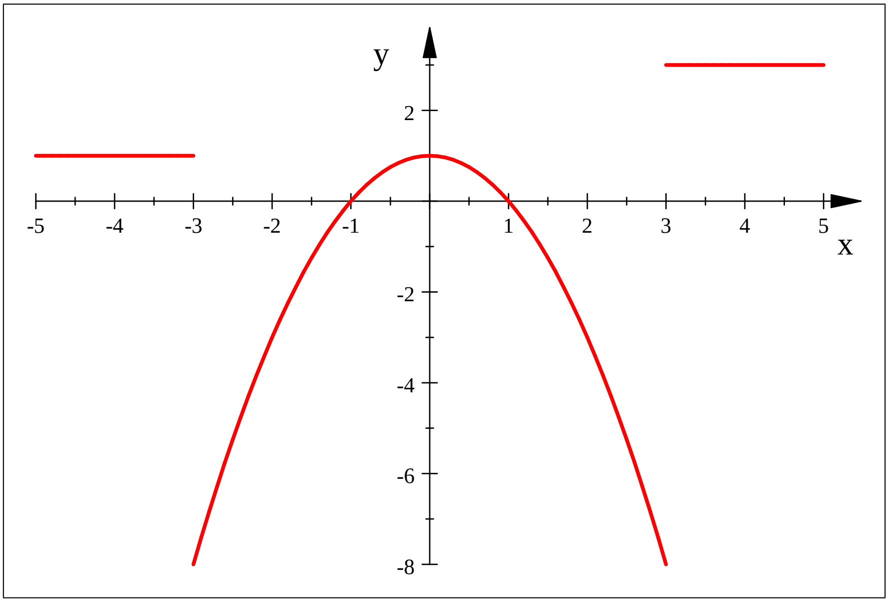
Zadanie 6.9. Zrobić wykresy funkcji z zadania 6.8.

Zadanie 6.10. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 3 \\ 1 - x^2 & \text{gdy -3} \leq x < 3 \\ 3 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$.

a) Wyznaczyć obraz przedziału otwartego (1; 6). **Odpowiedź**: (-8;0) $\cup \{3\}$
;

b) wyznaczyć przeciwobraz przedziału domkniętego $[-3;2]$. **Odp**. $(-\infty;-3)\cup [-2;2]$;

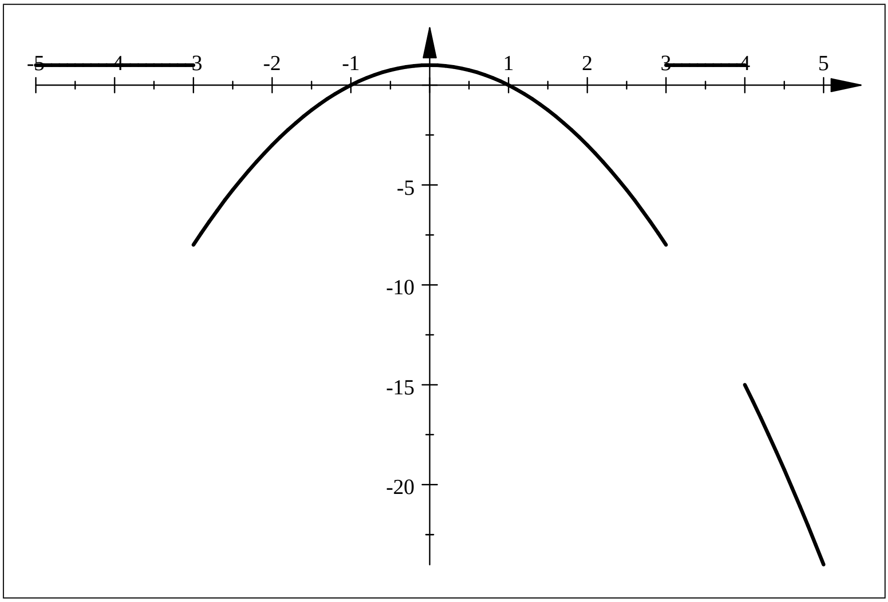
c) wyznaczyć zbiór wartości funkcji f . **Odpowiedź**: $[-8;1] \cup \{3\}$.



Zadanie 6.11. Niech $A = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 > 9 \wedge x < 4 \}$. Niech f, g będą funkcjami $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonymi jak niżej: $g(x) = 2x + 1$, zaś $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 \text{ dla } x \notin A \\ 1 \text{ dla } x \in A \end{cases}$. Zaznaczyć zbiór A na osi. Wyznaczyć obraz przedziału domkniętego $[-5;5]$ przy funkcji f . Wyznaczyć przeciwobraz zbioru A przy funkcji g. Obliczyć $f(g(1))$. Obliczyć $g(f(4))$.

Odpowiedź. Funkcję f warto przedstawić nieco innym wzorem. Określona jest ona tak:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x < -3 \\ 1 - x^2 \text{ dla } -3 < x < 3 \\ 1 \text{ dla } 3 < x < 4 \\ 1 - x^2 \text{ dla } x > 4 \end{cases}$$



Po naszkicowaniu wykresu funkcji f widzimy, że obrazem przedziału $[-5, 5]$ jest suma przedziałów, których końcami są -24 i -15 oraz -8 i 1. Do pełnego rozwiązania zadania należy rozstrzygnąć, czy są to przedziały domknięte, czy otwarte, czy domknięte.

Ponieważ $g(1) = 3$, a liczba 3 należy do zbioru A, więc $f(g(1)) = f(2 \cdot 1 + 1) = 1$. Ponieważ liczba 4 nie należy do zbioru A, więc $f(4) = -4^2 + 1 = -15$, zatem $g(f(4)) = g(15) = -29$.

Wyznaczamy przeciwobraz zbioru A przy funkcji g. Jest to suma przeciwobrazu przedziału $(-\infty; \; -3)$ i przeciwobrazu przedziału $[3; 4)$. Jest to zatem suma $(-\infty; \; -2) \cup [1, \frac{3}{2})$.

Zadanie 6.12. Funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ 1 - x^2 \quad \text{dla } x \in (-3; 3] \\ 3 \quad \text{dla } x \in (3; +\infty) \end{cases}$.

a) Wyznaczyć obraz przedziału otwartego $(-3; 5)$.
b) wyznaczyć przeciwobraz przedziału domkniętego $[1; 6]$.
c) podać argument, uzasadniający, że h nie jest funkcją różnowartościową .

Zadanie 6.13. Funkcja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $h(x) = \begin{cases} -2 \quad \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x^2 + 2 \text{ dla } x \in [-2; 2) \\ 2 \quad \text{dla } x \in [2; +\infty) \end{cases}$.

a) Wyznaczyć obraz przedziału otwartego $(-1; 3)$. **Odpowiedź**: $(-7; 2]$

b) wyznaczyć przeciwobraz przedziału domkniętego $[-2;0]$. **Odp**.$(-\infty;\sqrt{2})\cup$ $(\sqrt{2};1)$

c) wyznaczyć zbiór wartości funkcji h . **Odpowiedź**: $[-2;2]$

Zadanie 6.14. Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; c) $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$; d) $f(x)=\frac{7-6x}{7x-8}$;

Zadanie 6.15. Wyznaczyć współczynniki a,b,c,d tak, by funkcją odwrotną do $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ była ta sama funkcja.

Wykład 7. Permutacje

Zadanie 7.1. Permutacja $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, czyli cykl (123456):

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$. Jest to permutacja nieparzysta, ma pięć inwersji: pary (2,1), (3,1), (4,1), (5,1) i (6,1). Permutacja do niej odwrotna to $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Ma też 5 inwersji. Rysunek permutacji odwrotnej powstaje z rysunku danej przez odwrócenie strzałek. Narysować (przedstawić graficznie) taką permutację.

Odpowiedź: To cykl $1 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$.

Zadanie 7.2. Permutacja $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Jest to cykl (126354). Inwersje tworzą pary (6,3), (6,5), (6,4), (5,4), (5,3), (5,1), (4,3). Jest to zatem permutacja nieparzysta.

Ile inwersji ma permutacja odwrotna? Zapisać ją w postaci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$.

Zadanie 7.3. Permutacja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Jest ona iloczynem cykli (164)(2)(3)(5); cykle jednoelementowe (czyli punkty stałe) możemy opuścić. Zatem $\sigma = (164)$. Ile inwersji ma ta permutacja? Napisać permutację odwrotną.

Zadanie 7.4. Dane są permutacje $s = (145)(23)$ oraz $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obliczyć liczbę inwersji w tych permutacjach. Obliczyć ts^3 oraz t^{-3}. Wyniki przedstawić w postaci funkcji oraz w postaci rozłącznych cykli.

Rozwiązanie. Zapis $s = (145)(23)$ oznacza, że jest to permutacja, w której $1 \to 4$, $4 \to 5$, $5 \to 1$, oraz $2 \to 3$, $3 \to 2$. Można to zapisać $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Następujące pary tworzą inwersje: (4,3), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1), (5,1). Jest zatem 7 inwersji. Permutacja jest nieparzysta. Permutacja t odwraca naturalny porządek liczb. Każda para tworzy inwersję. Jest zatem 10 inwersji.

Obliczymy teraz s^3. Po trzykrotnym złożeniu tej permutacji otrzymamy $s^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Złożenie ts^3 oznacza, że wykonujemy najpierw s^3, potem t. A zatem $ts^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.Rozkładem na cykle tej permutacji jest $(1,5)(2,3,4)$. Aby obliczyć t^{-3}, przypomnijmy sobie, że permutacja t odwraca naturalny porządek liczb. Zatem $t^{-1} = t$, a stąd wynika, że $t^{-1} = t^3 = t$. Rozkładem na cykle permutacji t jest $(1,5)(2,4) = (1,5)(2,4)(3)$.

Zadanie 7.5. Dane są permutacje $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 9 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Obliczyć g^{-1}.

Rozwiązanie. Obliczając permutację odwrotną, zamieniamy wiersze i porządkujemy względem górnego (po zamianie) : $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

b) przedstawić h jako złożenie rozłącznych cykli. Odpowiedź: h jest cyklem (124356987).

c) obliczyć $g \circ h^{-2}$. Rozwiązanie: h^2 to cykl (145972368),czyli permutacja $h^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 9 & 8 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.Odwrotna do niej to $h^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, złożenie $g \circ h^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 5 & 3 & 6 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) określić znak permutacji h. Ma ona 8 inwersji; tworzą je pary: (2,1), (4.3), (4,1), (5,3), (5,1), (6,1), (9,7), (9,8). Jest to permutacja parzysta.

Zadanie 7.6. Napisać wszystkie permutacje liczb 1,2,3 w porządku indukcyjnym. Narysować wszystkie te permutacje w tym porządku. Jakim izometriom trójkata równobocznego odpowiadają kolejno te permutacje?

Odpowiedź. W skróconym zapisie: [1,2,3], [1,3,2], [3,1,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], czyli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, ($$

Permutacje te odpowiadają kolejno nastepującym izometriom trójkąta równobocznego: identyczność, symetria osiowa względem wysokości wyprowadzonej z wierzchołka 1 prostopadle do boku 12, obrót o 120 stopni, symetria względem wysokości wyprowadzonej z wierzchołka 3 prostopadle do boku 12, obrót o 240 stopni, symetria względem wysokości wyprowadzonej z wierzchołka 2 prostopadle do boku 13.

Zadanie 7.7. Wypisać wszystkie permutacje liczb 1,2,3 w porządku leksykograficznym. Zilustrować rysunkiem.

Odpowiedź. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \Big(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

Zadanie 7.8. Zmiana porządku permutacji zbioru o trzech elementach z porządku indukcyjnego na porządek leksykograficzny generuje pewna permutację zbioru sześcioelementowego. Wyznaczyć tę permutację.

Rozwiązanie. Z zadań 1 i 2 wynika, że jest to permutacja $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, czyli cykl (354).

Zadanie 7.9. Napisać wszystkie permutacje zbioru (1,2,3,4} w porządku indukcyjnym. Pierwszych 5 z nich zilustrować rysunkiem.

Zadanie 7.10. Napisać wszystkie permutacje zbioru (1,2,3,4} w porządku indukcyjnym. Pierwszych 5 z nich zilustrować rysunkiem.

Zadanie 7.11. Wyjaśnić, jakim izometriom czworościanu foremnego odpowiadają poszczególne permutacje zbioru $\{1,2,3,4\}$.

Szkic odpowiedzi.

Obrót czworościanu foremnego o 180 stopni wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych boków. Jest to permutacja parzysta $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, jest iloczynem transpozycji $(ac)(bd)$, na liczbach $(13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Czworościan ma trzy pary przeciwległych krawędzi, zatem sa trzy takie obroty. Dwa pozostałe to $(14)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $(12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Zadanie 7.12. Jaka permutacja znajduje się na miejscu 37 w grupie permutacji 5 elementów w porządku leksykograficznym, w porządku indukcyjnym? Odp. W porządku leksykograficznym $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,4\,1\,3\,5 \end{pmatrix}$.

Dla porządku indukcyjnego mamy tak. Wypiszmy najpierw porządek indukcyjny permutacji dwóch elementów: to [1,2], potem [2,1]. Porządek indukcyjny dla trzech to [1,2,3], [1,3,2], [3,1,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2]. Dla czterech otrzymujemy:

[1,2,3,4], [1,2,4,3], [1,4,2,3], [4,1,2,3],

[1,3,2,4], [1,3,4,2], [1,4,3,2], [4,1,3,2],

.... potem cztery permutacje powstające z [3,1,2] przez dopisywanie czwórki,

..... potem [2,1,3,4], [2,1,4,3], **[2,4,1,3]** i [4,2,1,3]. Permutacja [2,4,1,3] czyli $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,1\,3 \end{pmatrix}$ znajduje się na 15 miejscu w S_4 . Z każdej poprzedzającej ją powstaje 5 nowych permutacji liczb 1,2,3,4,5. Permutacja, o którą chodzi, jest na miejscu 71.

Zadanie 7.13. Na którym miejscu w każdym z tych porządków znajduje się permutacja $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,2\,1\,3\,4 \end{pmatrix}$?

Rozwiązanie. W porządku leksykograficznym grupy S_5 pierwszych 24 permutacji to te, które są postaci $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1 * * * * \end{pmatrix}$, następnych 24 to $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2 * * * * \end{pmatrix}$, potem idą $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3 * * * * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4 * * * * \end{pmatrix}$.Łącznie 96 permutacji. Następuje teraz 6 permutacji postaci $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\;1 * * * \end{pmatrix}$,razem 102. Potem dopiero $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,2\,1\,3\,4 \end{pmatrix}$. Znajduje się zatem ona na 103 miejscu.

Zadanie 7.14. Wyznaczyć setną od końca permutację w porządku leksykograficznym w S_9.

Odp. $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 9\,8\,7\,6\,1\,5\,3\,2\,4 \end{pmatrix}$.

Zadanie 7.15. Wyznaczyć permutację, która jest na miejscu 2007 w S_9 .

Odp. $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 1\,2\,5\,8\,7\,6\,4\,3\,9 \end{pmatrix}$.

Wykład 8. Zbiór potęgowy.

Rodzinę podzbiorów zbioru {1,2,3,...,n} można na przykład uporządkować leksykograficznie: najpierw zbiór pusty $\varnothing$, potem zbiory zawierające 1 , potem zbiory, których najmniejszym elementem jest 2 itd. Dla $n = 3$ daje to porządek $\varnothing$, {1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,3}, {2}, {2,3}, {3}.

Porządek leksykograficzny z gradacją polega na ustawieniu najpierw zbiorów jednoelementowych, potem dwuelementowych itd. Z tym, że na początku stawiamy zbiór pusty. Dla $n = 3$ jest to porządek

$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

Ale porządek indukcyjny daje lepszy algorytm. Zaczynamy od zbioru pustego. Zakładając, że podzbiory o n elementach już są ustawione, dopisujemy nowoprzybyły element do każdego kolejnego wyrazu ciągu. Daje to nastepujący porządek (gdy $n = 3$):

$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$.

Twierdzenie. W porządku indukcyjnym zbioru potęgowego $2^{\{1,2,3,\dots,n\}}$, to jest w rodzinie podzbiorów zbioru (1,2,3,...,n}, zbiór złożony z liczb $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, gdzie $a_1 < a_2 <$ ... a_k , znajduje się na miejscu o numerze $1{+}2^{a_1-1} + 2^{a_2-1} + ... + 2^{a_k-1}$.

Przykład-sprawdzenie. W zbiorze podzbiorów {1,2,3} mamy:

dla zbioru {1} miejsce $1 + 2^0 = 2$;

dla zbioru {2} miejsce $1 + 2^1 = 3$;

dla zbioru {1,2} miejsce $1 + 2^0 + 2^1 = 4$;

dla zbioru {3} miejsce $1 + 2^2 = 5$;

dla zbioru {1,3} miejsce $1 + 2^0 + 2^2 = 6$;

dla zbioru {2,3} miejsce $1 + 2^1 + 2^2 = 7$;

dla zbioru {1,2,3} miejsce $1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 = 8$.

Przykład. W rodzinie podzbiorów liczb całkowitych dodatnich niewiększych niż 10 zbiór złożony ze wszystkich liczb nieparzystych znajduje się na miejscu

$$1 + 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 = \ 342 \ .$$

Dowód twierdzenia. Zastosujemy indukcję względem n. Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$. Powyżej zostało też sprawdzone dla $n = 3$. Załóżmy, że jest ono prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n i rozpatrzmy rodzinę podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, ..., n + 1\}$. Widzieliśmy, że przy porządku indukcyjnym pierwszych 2^n wyrazów to podzbiory, w których nie ma $n + 1$. Jeśli zatem $a_1 < a_2 < ... < a_k$ są różnymi liczbami mniejszymi od n, to zbiór złożony z tych liczb jest na miejscu $1 + 2^{a_1-1} + 2^{a_2-1} + ... + 2^{a_k-1}$.Ze sposobu ustawiania zbiorów w ciąg wynika, że $A = \{\ a_1, a_2, ..., a_k,\ n + 1\}$

znajduje się 2^n miejsc za $\{ a_1, a_2, ..., a_k\}$. Jest to zatem miejsce o numerze $1 + 2^{a_1-1} + 2^{a_2-1} + ... + 2^{a_k-1} + 2^n$. To jest zgodne z wyprowadzanym wzorem. Na mocy zasady indukcji twierdzenie jest udowodnione.

Z twierdzenia tego wynika też algorytm ustalenia, który zbiór jest na danym miejscu m w porządku indukcyjnym. Przedstawiamy liczbę $m-1$ w układzie dwójkowym:

$m - 1 = 2^{a_k} + 2^{a_{k-1}} + ... + 2^{a_1}$. Na danym miejscu znajduje się zbiór $\{a_1 + 1,\ a_2 + 1, ..., a_k + 1\}$

Przykład-sprawdzenie. Jaki zbiór znajduje się na miejscu 342 w rodzinie podzbiorów zbioru liczb naturalnych nie większych niż 10?

Przedstawiamy liczbę 341 w układzie dwójkowym:

$341 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$. Widzimy, że na miejscu 342 znajduje się zbiór {1,3,5,7,9}.

Zadanie 8.1. Wypisać wszystkie 32 podzbiory zbioru potęgowego $2^{\{1,2,3,4,5\}}$ w porządku leksykograficznym.

Odp.

{∅}, {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4}, { 1, 2, 4, 5}, {1, 2, 5}, {1, 3}, {1, 3, 4}, {1, 3, 4, 5}, {1, 3, 5}, {1, 4}, {1, 4, 5}, {1, 5}, {2}, {2, 3}, {2, 3, 4},

{2, 3, 4, 5}, { 2, 3, 5}, {2, 4}, {2, 4, 5}, {2, 5}, {3}, {3, 4}, {3, 4, 5}, {3, 5}, {4}, {4, 5}, {5}

Zadanie 8.2. Wypisać wszystkie 32 podzbiory zbioru potęgowego $2^{\{1,2,3,4,5\}}$ w porządku leksykograficznym z gradacją.

Odp. {∅}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}, {1, 2, 3},

{1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4}, { 2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4},

{1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 5}

Zadanie 8.3. Wypisać wszystkie 32 podzbiory zbioru potęgowego $2^{\{1,2,3,4,5\}}$ w porządku indukcyjnym.

Odp. {∅}, {1}, {2}, {1, 2}, {3}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}, {4}, {1, 4}, {2, 4}, {1, 2, 4}, {3, 4},

{1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, {5}, {1, 5}, {2, 5}, {1, 2, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5}, {2, 3, 5}, {1, 2, 3, 5},

{4, 5}, {1, 4, 5}, {2, 4, 5}, {1, 2, 4, 5}, {3, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 5} .

Zadanie 8.4. Który zbiór jest na miejscu 2007 w rodzinie podzbiorów $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ w każdym z tych trzech porządków?

Odp. Ponieważ $2006 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1$,więc w porządku indukcyjnym jest to {2,3,5,7,8,9,10,11}.

W porządku leksykograficznym jest to {6,8,9,10,11}.

W porządku leksykograficznym z gradacją jest tak. Najpierw stoi zbiór pusty, potem 11 zbiorów jednoelementowych, potem $\binom{11}{2} = 55$ zbiorów dwuelementowych, potem kolejno $\binom{11}{3} = 165$ trójelementowych, $\binom{11}{4} = 330$ czteroelementowych, $\binom{11}{5} = 462$ pięcioelementowych, $\binom{11}{6} = 462$ sześcioelementowych, $\binom{11}{7} = 330$ siedmioelementowych i $\binom{11}{8} = 165$ ośmioelementowych. Ponieważ $1 + 11 + 55 + 165 + 330 + 462 + 462 + 330 + 165 = 1981$, zaś $1981 + \binom{11}{9} = 2036 > 2007$, więc interesujący nas zbiór ma 9 elementów i znajduje się na miejscu $2007 - 1981 = 26$ wśród dziewięcioelementowych. Pierwszych $\binom{7}{5} = 21$ z nich to $\{1, 2, 3, 4, x, y, z, t, u\}$ - ostatnim jest $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11\}$. Po nim następują te, których najmniejsze liczby to $1, 2, 3, 5$.Są to po kolei $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}, \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}, .\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 1$
Bezpośrednio za tym zbiorem znajduje się {1,2,3,5,6,8,9,10,11}.

Zadanie 8.5. Znaleźć miejsce zbioru {3,6,7} w rodzinie 2^X , gdy $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Odp. W porządku indukcyjnym to miejsce nr 101, w porządku leksykograficznym to 1732. W porządku leksykograficznym z gradacją to 162.

Zadanie 8.6. Napisać trzy zbiory poprzedzające {3,6,7} i trzy zbiory nastepujące po {3,6,7} w każdym z tych trzech porządków.

Zadanie 8.7. Ile jest zbiorów między {3,6,7} a {4,5,6} w każdym z tych porządków?

Zadanie 8.8. Wyznaczyć pięć końcowych zbiorów w rodzinie podzbiorów zbioru stuelementowego w porzadku leksykograficznym, leksykograficznym z gradacją i indukcyjnym.

Zadanie 8.9. Zbiór $P(\{1, ...101\})$, czyli rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych 1, 2, 3, ..., 99,100,101 porządkujemy indukcyjnie.

a) podać najbliższy zbiór dwuelementowy, który występuje po {1,8,13}.

b) ile podzbiorów o trzech elementach znajduje się przed {1,3,12,14}?

Rozwiązanie**.** Porządek indukcyjny zaczyna się od $\varnothing$, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$, potem dostawiamy liczbę 3, otrzymując dalszy ciąg: {3}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}. W rozpatrywanym przykładzie przed {1,8,13} znajdują się wszystkie zbiory zawierające liczby od 1 do 12. Ostatni z nich, mający numer $2^{12} = 4096$ to {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}. Najwcześniejszy jednoelementowy to, jak widzieliśmy, zbiór {1}.Najpóźniejszy to {12}. Dostawiamy teraz do każdego z nich 13. {12, 13} jest zbiorem o dwóch elementach najbliższym {1,8,13}.

Wszystkie złożone z trójek (a, b, c), gdzie a, b, c są liczbami ≤ 14. Jest to równe $\binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 14 \cdot 26 = 364$.

Pierwszych osiem zbiorów to $\varnothing$, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

Zadanie 8.10. Zbiór $P(\{1, ...100\})$, czyli rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych 1, 2, 3, ..., 99,100 porządkujemy indukcyjnie.

a) podać najbliższy zbiór dwuelementowy, który występuje po {1,12,13}.

b) ile podzbiorów o trzech elementach znajduje się przed {1,5,18,12}?

Zadanie 8.11. W zbiorze $P(\{1, ...10\})$, czyli w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych 1, 2, 3, ..., 10 rozpatrujemy porządek następujący: A poprzedza B , jeżeli ma mniej elementów, a jeżeli obydwa zbiory mają tyle samo elementów, to wcześniejszy jest ten, który jest wcześniejszy w porządku leksykograficznym.

a) Wyznaczyć zbiór, znajdujący się na miejscu 99.

b) wyznaczyć numer miejsca, na którym znajduje się zbiór {3,9,10}.

Zadanie 8.12. W zbiorze $P(\{1, ...11\})$, czyli w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych 1, 2, 3, ..., 11 rozpatrujemy porządek następujący: A poprzedza B , jeżeli ma mniej elementów, a jeżeli obydwa zbiory mają tyle samo elementów, to wcześniejszy jest ten, który jest wcześniejszy w porządku leksykograficznym.

a) Wyznaczyć zbiór, znajdujący się na miejscu 66.

Rozwiązanie. Jest to zbiór {9,11}. Można to obliczyć ,licząc "od końca". W tym porządku na pierwzym miejscu stoi zbiór pusty, potem 11 zbiorów jednoelementowych i $\binom{11}{2}$ = 55 zbiorów o dwóch elementach. Daje to 1+11+55 = 67 zbiorów. Ostatni z nich to {10,11} a przedostatni to {9,11}.

b) wyznaczyć numer miejsca, na którym znajduje się zbiór {4,7,10}.

Rozwiązanie**.** Jest to zbiór o trzech elementach, zatem przed nim stoi zbiór pusty, 11 zbiorów jednoelementowych i $\binom{11}{2} = 55$ zbiorów o dwóch elementach. Przed nim znajdują się też zbiory $\{1, *, *\}$, $\{2, *, *\}$, $\{3, *, *\}$ $-$ jest ich odpowiednio $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{9}{2} = 36$, $\binom{8}{2} = 28$. Mamy $1 + 11 + 55 + 45 + 36 + 28 = 176$. Przed zbiorem {4,7,10} znajduje się jeszcze 6 zbiorów $\{4, 5, *\}$, 5 zbiorów $\{4, 6, *\}$ oraz 2 zbiory {4,7,8}, {4,7,9}. To daje łącznie $176 + 6 + 5 + 2 =$ 189.Zbiór {4,7,10} jest na 190 miejscu.

Wykład 9. Ciągi. Iloczyn kartezjański $\{1, 2, 3, ..., m\} \times \{1, 2, 3, ...n\}$ **lub** $\{a, b, c, ..., m\} \times \{a, b, c, ...n\}$

Zadanie 9.1. Wypisać wszystkie elementy zbioru $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ w porządku leksykograficznym, antyleksykograficznym, odwrotnym leksykograficznym, odwrotnym antyleksykograficznym i leksykograficznym z gradacją (=przekątniowym).

Odp.: W porządku *leksykograficznym*: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3). Porządek odwrotny do danego to wypisanie elementów od końca, zatem: (3,3), (3,2), (3,1), (2,3), (2,2), (2,1), (1,3), (1,2), (1,1). Porządek *antyleksykograficzny* to taki, w którym najpierw patrzymy na drugą współrzędną, a potem na pierwszą: zatem (1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2), (1,3), (2,3), (3,3). *Odwrotny antyleksykograficzny* to napisanie powyższego ciągu od końca. *Leksykograficzny z gradacją* to (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (2,3), (3,2), (3,3).

Zadanie 9.2. Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych od 1 do 17, zaś B zbiorem liczb naturalnych od 1 do 37. Na którym miejscu w każdym z tych porządków znajduje się (10,20)? Który element znajduje się na miejscu 100?

Rozwiązanie. Ten iloczyn kartezjański możemy wyobrazić sobie jako prostokątną tablicę o podstawie 17 kropek, wysokości 37. Musimy sprawnie je policzyć. W porządku leksykograficznym liczymy w kolumnach z dołu do góry a kolumny z lewa na prawo. Para (10, 20) jest w dziesiątej kolumnie na 20 miejscu; jest to zatem miejsce numer $9 \cdot 37 + 20 = 353$. Żeby wyznaczyć, który element jest na miejscu setnym, obliczamy: w pierwszych dwóch kolumnach jest $2 \cdot 37 = 74$ miejsc, zatem szukana para jest w trzeciej kolumnie na miejscu $100 - 74 = 26$. Jest to więc para (3,26). Z tego przykładu widać, że aby wyznaczyć, jaka para jest na miejscu s w iloczynie kartezjańskim $\{1, 2, ...m\} \times \{1, 2, ...n\}$ (w porządku leksykograficznym) należy podzielić s przez m tak, by reszta była niewiększa niż n.

W porządku odwrotnym leksykograficznym para (10,20) jest na 353 miejscu "od końca", to jest na miejscu $17 \cdot 37 - 353 = 276$. W porządku antyleksykograficznym liczymy w warstwach poziomych z lewa na prawo a warstwy z dołu do góry. Element (10, 20) jest w dwudziestej warstwie (wierszu) na dziesiątym miejscu. Ogółem jest to zatem miejsce numer $19 \cdot 17 + 10 = 333$. W porządku odwrotnym antyleksykograficznym jest to 333 od końca, czyli $17 \cdot 37 - 333 = 296$.Przyjrzyjmy się porządkowi z gradacją. W nim najpierw "idą" rzędy ukośne złożone z 1, 2, 3, ..., 16 elementów (łącznie $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136 =$ elementów). Następuje 21 rzędów po 17 elementów, a potem znowu 16 rzędów, w których jest kolejno 16, 15, 13, ...,3, 2, 1 elementów. Para (10,20) znajduje się w ukośnym rzędzie numer 29, jest zatem na miejscu $1 + 2 + ... + 16\ +\ 12 \cdot 17 + 10\ = 350$.

Zadanie 9.3. W danych z poprzedniego zadania wyznacz poprzednik i następnik pary (10, 20) względem każdego z porządków wspomnianych na wstępie.

W porządku leksykograficznym mamy: $(10, 19) \prec (10, 20) \prec (10, 21)$. W odwrotnym leksykograficznym na odwrót. W antyleksykograficznym: $(9, 20) \prec (10.20) \prec (11, 20)$.

Zadanie 9.4. W danych z zadania 2 wyznacz element setny od końca (w każdym z porządków).

Zadanie 9.5. W danych z zadania 2 wyznacz parę, która stoi 17 miejsc za (7,7).

Zadanie 9.6. Jeżeli m i n są liczbami naturalnymi, to w iloczynie $\{1, 2, ...2m+1\} \times \{1, 2, ...2n+1\}$ jest nieparzysta liczba elementów. W każdym z tych porządków, podanych wyżej, wyznaczyć element środkowy.

Rowiązanie. Element środkowy zajmie miejsce $\frac{(2m+1)(2n+1)+1}{2} = m + n + 2mn+1$. W porządku leksykograficznym, odwrotnym leksykograficznym, antyleksykograficznym i odwrotnym antylekykograficznym jest to zawsze element $(m+1, n+1)$.

Zadanie 9.7. Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór liczb całkowitych dodatnich. Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ porządkujemy według porządku leksykograficznego z gradacją. Wyznaczyć element na miejscu 2007.

Rozwiązanie. Porządek leksykograficzny z gradacją polega na tym, że najpierw wypisujemy pary o sumie współrzędnych 2, potem 3, potem 4 itd. A zatem w kolejnych piętrach gradacji mamy 1,2,3,4,..., n elementów. Korzystamy ze wzoru $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.Szukamy największego n takiego, że $\frac{n(n+1)}{2}$ jest mniejsze od 2007. Rozwiązujemy nierówność $n^2+n-4014 < 0$. Mamy $\Delta = 1+4\cdot 4014 = 16\,057$, zatem dodatnim pierwiastkiem rzeczywistym równania $n^2+n-4014 = 0$ jest $\frac{-1+\sqrt{16057}}{2} = 62.858$. Poszukiwane n jest zatem równe 62. Istotnie 1+ 2+ ...+62 = $\frac{62\cdot 63}{2} = 1953$. Element stojący na miejscu 2007 ma sumę współrzędnych 64 i stoi na $2007 - 1953 = 54$ miejscu w rzędzie ukośnym. Jest to zatem (54,10).

Zadanie 9.8. Jaki element jest na miejscu 145? Odp.: (9,9).

Zadanie 9.9. Na którym miejscu znajduje się (7,13) ? Odpowiedź: na 178.

Zadanie 9.10. Na którym miejscu w tym samym porządku znajduje się (11,111)?

Rozwiązanie. Suma współrzędnych wynosi 122. Element ten znajduje się zatem na 11 miejscu w ukośnym rzędzie, w którym suma współrzędnych jest 122. Przed nim stoi:

jeden element o sumie współrzędnych 2 , to jest (1,1),

dwa elementy o sumie współrzędnych 3, to jest (1,2) i (2,1),

.....,

wreszcie 110 elementów o sumie współrzędnych 111. Razem $\frac{110\cdot 111}{2} = 6105$ elementów. Nasza para (11,111) znajduje się 11 miejsc dalej, zatem na miejscu 6116.

Zadanie 9.11. Niech $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. W iloczynie kartezjańskim $A \times A$ wprowadzamy relację $\mathbf{R}$ wzorem $(a,b)\ \mathbf{R}\ (c,d) \quad \Leftrightarrow \max\ \{a,b\} = \max\{c,d\}$.

a) Wyznaczyć klasę abstrakcji (=klasę równoważności) pary (3,4).

b) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $A \times A\ /\mathbf{R}$ **?**

c) Ile elementów ma najliczniejsza klasa równoważności?

Rozwiązanie. Jak można opisać tę relację, przyswoić ją sobie? Dwie pary uznajemy za równoważne, jeżeli większe elementy tych par są takie same. Przyjmijmy, że liczby to numery butów męża i żony - no, numeracja damska jest inna, więc może się zdarzyć, że mąż ma jedynkę a żona szóstkę, a w ogóle to przecież tylko dla wyobrażenia sobie. Jest zatem sześć klas równoważności , zbiór ilorazowy ma siedem elementów - odpowiadających numerom butów.

Jakie małżeństwa są równoważne Kowalskim, gdzie żona ma trójkę, a mąż czwórkę? Są to: Jankowscy (żona jedynkę, mąż czwórkę), Nowakowie (żona 2, mąż 4), Stefańscy (ż 3, m 4), Wiśniewscy (4,4), Zielińscy (żona czwórkę, mąż trójkę), Pietrzakowie (4,2) i Ząbkowscy (żona czwórkę, mąż jedyneczkę). A więc w klasie równoważności (3,4) jest łącznie 7 par: (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1). Najliczniejsza klasa to oczywiście (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1).

Wykład 10. Relacje równoważności

Najważniejsze relacje to relacje równoważności i wszelkiego typu relacje porządkujące.

Definicja. Mówimy, że pewna relacja (którą oznaczymy symbolem $\approx$) określona w pewnym niepustym zbiorze X jest relacją równoważności, gdy jest

a) zwrotna: $\forall_{x \in X} \quad x \approx x$,

b) symetryczna: $x \approx y \Rightarrow \; y \approx x$,

c) przechodnia: $x \approx y \wedge \; y \approx z \Rightarrow \; x \approx z$.

Podstawową własność relacji równoważności ujmuje

Twierdzenie o podziale (=**zasada abstrakcji**). Każda relacja rownoważńości, określona w niepustym zbiorze X wyznacza podział tego zbioru na rozłączne

podzbiory, zwane klasami równoważności (albo: klasami abstrakcji) w ten sposób, że do jednej klasy zaliczamy wszystkie te elementy, które są wzajemnie ze sobą w relacji. Odwrotnie, podział zbioru na rozłączne podzbiory wyznacza pewną relację równoważności.

Przykład. Ustalmy liczbę całkowitą p. Relacja zachodząca między liczbami całkowitymi, określona wzorem

$m \approx n$ wtedy, gdy $m - n$ jest liczbą podzielną przez p

jest relacją równoważności. Klasy równoważności to zbiory

$\{k \cdot p\}, \;\; \{k \cdot p + 1\}, \;\; \{k \cdot p + 2\}, \;\; ..., \{k \cdot p + p - 1\}$, ,gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Innymi słowy, są to zbiory złożone z liczb, które z dzielenia przez p dają reszty 0, 1,...,p-1.

Zadanie 10.1. Niech R będzie taką relacją w zbiorze $P(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb całkowitych $\mathbb{N}$, że dla A , B $\subset \mathbb{N}$ jest A R B $\iff$ $A = B$ lub $5 \notin A \cup B$. Opisać klasy równoważności: zbioru pustego, zbioru {1,2,3} , zbioru {1,2,3,4,5} , zbioru, którego jedynym elementem jest liczba 5 oraz zbioru 2$\mathbb{N}$ złożonego ze wszystkich liczb parzystych.

Rozwiązanie. Przypomnę, że $P(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ to rodzina podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Oznaczenie $P(X) = 2^X$ dla określenia rodziny podzbiorów danego zbioru pochodzi stąd, że gdy X jest zbiorem skończonym o n elementach, to ma on 2^n elementów. Przypominam też, że klasa równoważności danego elementu to zbiór wszystkich elementów z nim równoważnych (tak, jak w.powyższym przykładzie).

W zadaniu tym klasa równoważności zbioru pustego $\varnothing$ składa się tych zbiorów B, dla których $5 \notin \varnothing \cup B$. Ale $\varnothing \cup B = B$. Zatem klasą równoważności zbioru pustego jest rodzina tych zbiorów, które nie zawierają liczby 5. W szczególności {1,2,3} oraz zbiór złożony z liczb parzystych należą do tej rodziny. Zbiór {1,2,3,4,5} jest w relacji tylko sam ze sobą, gdyż suma $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup B$ zawsze zawiera liczbę 5. Podobnie jest dla zbioru jednoelementowego $\{5\}$. Reasumując, można powiedzieć, że rodzina tych podzbiorow rozpada się na klasy jednoelementowe (to są wszystkie zbiory zawierające 5) oraz jedną "dużą" klasę do której należą wszystkie zbiory nie zawierające 5. Obrazowo, można powiedzieć, że interesuje nas tylko to, czy zbiór zawiera 5, czy nie.

Zadanie 10.2. Niech R będzie taką relacją w zbiorze $P(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb całkowitych nieujemnych $\mathbb{N}$, że dla A , $B \subset \mathbb{N}$ jest A R $B \iff A = B$ lub $A \cup B$ nie zawiera żadnej liczby pierwszej. Opisać klasy równoważności: zbioru pustego, zbioru $\{1,2,3\}$, zbioru $\{1,2,3,4,5\}$, zbioru, którego jedynym elementem jest liczba 5 oraz zbioru $2\mathbb{N}$ złożonego ze wszystkich liczb parzystych.

Rozwiązanie jest analogiczne do 10.1. Odpowiedź: Klasa zbioru pustego to wszystkie zbiory nie zawierające żadnej liczby pierwszej. Ponieważ pozostałe podane zbiory zawierają liczbę pierwszą, klasy równoważności tych zbiorów składają się z nich samych.

Zadanie 10.3. W zbiorze kół na płaszczyźnie określamy relację $\backsimeq$, przyjmując, że $K_1 \backsimeq K_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy K_1 i K_2 mają ten sam środek. Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Wykazać, że zbiór klas równoważności może być utożsamiony z płaszczyzną.

Rozwiązanie. Każde koło ma ten sam środek, co ono samo. Jeżeli jedno koło ma ten sam środek, co drugie, to drugie ma ten sam środek, co pierwsze. Jeżeli jedno koło ma ten sam środek, co drugie, a drugie ten sam środek, co trzecie, to pierwsze ma ten sam środek, co trzecie. Jest to zatem relacja równoważności.

Klasa równoważności (klasa abstrakcji) składa się z kół o wspólnym środku. Każdej takiej klasie można więc przypisać punkt na płaszczyźnie - wspólny środek kół z tej klasy. Daje to wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem punktów płaszczyzny a klasami równoważności podanej relacji.

Zadanie 10.4. W zbiorze kół na płaszczyźnie określamy relację $\asymp$, przyjmując, że $K_1 \asymp K_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy K_1 i K_2 mają ten sam promień. Wykazać, że jest to relacja równoważności. Wykazać, że zbiór klas równoważności może być utożsamiony ze zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich.

Rozwiązanie. Wystarczy w rozwiązaniu zadania 2 zamienić słowo "środek" na "promień". A zatem: każde koło ma ten sam promień, co ono samo. Jeżeli jedno koło ma ten sam promień, co drugie, to drugie ma ten sam promień, co pierwsze. Jeżeli jedno koło ma ten sam promień, co drugie, a drugie ten sam promień, co trzecie, to pierwsze ma ten sam promień, co trzecie. Jest to zatem relacja równoważności. Klasa równoważności (klasa abstrakcji) składa się z kół o takim samym promieniu. Promień jest liczbą dodatnią. Każdej takiej klasie można więc przypisać liczbę dodatnią: wspólny promień kół z tej klasy. Daje to wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między liczbami dodatnimi a klasami równoważności podanej relacji.

Zadanie 10.5 . W zbiorze wszystkich kwadratów położonych na płaszczyźnie wprowadzamy relację $\doteqdot$ w ten sposób, że $K_1 \doteqdot K_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy kwadraty te mają równe środki i równe pola.

Rozwiązanie. Sprawdzenie, że podana relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, wykonujemy podobnie jak w zadaniach 10.3 i 10.4.

Zadanie 10.10. W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określamy relację $\equiv$ wzorem

$$a \equiv b \Longleftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z} \,:\, m \leq a < m+1 \,,\, m \leq b < m+1 \,.$$

Wykazać, że jest to relacja równoważności. Wykazać, że zbior ilorazowy $\mathbb{R}/\equiv$ może być utożsamiony ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Opisać klasę równoważności liczby π.

Rozwiązanie. Aby przekonać sie, że jest to relacja równoważności, można zauważyć, że podaną zależność można opisać tak: dwie liczby są w relacji, jeżeli należą do tego samego przedziału $[m, m+1)$ gdzie m jest liczba całkowitą. Z tej samej uwagi wynika również, że klasą równoważności liczby π jest przedział $[3, 4)$.

Zadanie 10.7. Rozpatrujemy relacje o polu $\mathbb{Z}$. Które z poniższych relacji są relacjami równoważności? Opisać klasy równoważności tych relacji.

a) $m\,\mathbf{R}\,n \iff 7 \mid m-n$,
b) $m\,\mathbf{S}\,n \iff m=n$ lub $7 \mid m+n$,
c) $m\,\mathbf{T}\,n \iff m=n$ lub $m^2+n^2=1$,
d) $m\,\mathbf{U}\,n \iff (m-n)^2=1$,
e) $m\,\mathbf{V}\,n \iff (m-n)^2<1$,
f) $m\,\mathbf{W}\,n$, gdy albo obie liczby m, n są równe zero, albo $m \cdot n > 0$,
g) $m\,\mathbf{X}\,n \iff 2^{mn} > 1$ (w tym przykładzie polem relacji jest zbiór całkowitych różnych od zera.)
g) $m\,\mathbf{Y}\,n \iff m=n$ lub ($m \geq 2008$ i $n \geq 2008$),
h) $m\,\mathbf{Z}\,n \iff m^2+n>0$.

Rozwiązania, uwagi.

R jest relacją równoważności, ponieważ jest zwrotna (bo 0 jest podzielne przez 7), symetryczna (liczba jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba do niej przeciwna jest podzielna przez 7) i przechodnia (bo jeżeli $m-n$ dzieli się przez 7 oraz $n-k$ dzieli sie przez 7, to $m-k=(m-n)+(n-k)$ dzieli się przez 7). Klasy równoważności tej relacji to zbiory liczb dające z dzielenia przez 7 tę samą resztę. Jest zatem siedem klas równoważności, każda reprezentowana przez pewną liczbę 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i każda zawiera nieskończenie wiele liczb.

Można to ująć inaczej: Relacja **R** zachodzi między dwiema liczbami wtedy i tylko wtedy, gdy dają one z dzielenia przez 7 tę samą resztę. Z tego natychmiast wynika, że jest to relacja równoważności, a zbiór liczb całkowitych jest podzielony na klasy równoważności [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6].

S nie jest to relacją równoważności. Jest wprawdzie zwrotna i symetryczna, ale nie jest przechodnia, bo na przykład 1 **S** 6 oraz 6 **S** 15 , ale nieprawda, że 1 **S** 15 .Do klasy $[j]$ zaliczamy te liczby, które z dzielenia przez 7 dają resztę j . . Relacja **T** nie jest zwrotna ani przechodnia, na przykład 0 **T** 1 oraz 1 **T** 0 , ale nieprawda, że 0 **T** 0. Relacja **U** nie jest zwrotna, relacja **V** nie jest przechodnia. Relację **W** można opisać tak: zachodzi ona między dwiema liczbami wtedy i tylko wtedy, gdy mają one ten sam znak , przy czym rozumiemy, że znakiem liczby dodatniej jest plus, ujemnej minus, a znakiem liczby zero jest zero. Jest to więc relacja równoważności i dzieli zbiór wszystkich liczb na trzy klasy: liczby ujemne, liczba zero i liczby dodatnie. Warunek w definicji relacji **X**

jest równoważny temu, by $mn > 0$. A zatem relację tę można opisać podobnie, jak relację **W**: zachodzi ona między dwiema liczbami różnymi od zera wtedy i tylko wtedy, gdy mają one ten sam znak. W tym przypadku są zatem tylko dwie klasy równoważności: zbiór liczb ujemnych oraz zbiór liczb dodatnich. Aby przekonać się, że **Y** jest relacją równoważności, opiszmy ją nieco inaczej: różne liczby są w relacji Y , gdy obydwie są większe lub równe 2008. Klasami równoważności są tu: zbiory jednoelementowe złożone z liczb mniejszych od 2008, oraz "duży" zbiór złożony ze wszystkich liczb ≥ 2008. Relacja **Z** nie jest oczywiście symetryczna.

Zadanie 10.8. W zbiorze wielomianów drugiego stopnia postaci $x^2 + px + q$, spełniających warunek $p^2 - 4q > 0$ określamy relację, uznając za równoważne te wielomiany, które mają tę samą sumę pierwiastków. Opisać klasę równoważności wielomianów $x^2 - 1$, $x^2 - 5x + 6$. Wykazać, że zbiór klas równoważności można utożsamić ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Szkic rozwiązania. Ze wzorów Viete'a wynika, że wielomiany równoważne względem tej relacji mają ten sam współczynnik p przy x.Przyporządkowanie wielomianowi tego współczynnika wyznacza utożsamienie zbioru wielomianów z e zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Zadanie 10.9. Wykazać, że klasy równoważności relacji określonej dla liczb całkowitych różnych od zera wzorem

$$m \equiv \ n \Longleftrightarrow \quad m \cdot n > 0 \ \text{ i } \ m^2 = n^2$$

są jednoelementowe.

Zadanie 10.10. Opisać klasy równoważności relacji określonej dla liczb zespolonych wzorem

$$z_1 \equiv \ z_2 \Longleftrightarrow \ z_1^2 = z_2^2 \ .$$

Zadanie 10.11. Dana jest liczba naturalna $n > 1$.Opisać klasy równoważności relacji określonej dla liczb zespolonych wzorem

$$z_1 \equiv \ z_2 \Longleftrightarrow \ z_1^n = z_2^n \ .$$

Zadanie 10.12. Opisać klasy równoważności relacji $\smile$ określonej dla liczb rzeczywistych przez

$$x \smile y \Longleftrightarrow \ \sin\, x \ = \sin\, y \text{ i } \cos\, x \ = \ \cos\, y.$$

Zadanie 10.13. Niech $f : X \to \mathbb{N}$ będzie funkcją przekształcającą zbiór X w zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Określamy relację w zbiorze X wzorem $x_1 \doteqdot x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_1) = f(x_2)$. Wykazać, że jest to relacja równoważności.

a) Opisać klasy równoważności relacji określonej tak dla liczb rzeczywistych za pomocą funkcji $f(x) = x^2 + x$.

b) Opisać klasy równoważności relacji określonej tak dla liczb rzeczywistych za pomocą funkcji $f(x) = x^2 - \ 3x$.

c) Opisać klasy równoważności relacji określonej tak dla liczb całkowitych za pomocą funkcji $f(m) = m + |\ m\ |$.

d) Opisać klasy równoważności relacji określonej tak dla liczb całkowitych za pomocą funkcji $f(n) = n^2 - (-1)^n$.

Rozwiązanie. Jest dość oczywiste, że z podanych warunków wynika, że relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Istotnie, $f(a) = f(a)$, a to znaczy, że relacja jest zwrotna. Podobnie: jeżeli $f(a) = f(b)$, to bez wątpienia $f(b) = f(a)$; relacja jest więc symetryczna. Wreszcie, jeżeli $f(a) = f(b)$ i $f(b) = f(c)$, to oczywiście $f(a) = f(c)$.

a) W tym przykładzie klasa równoważności danej liczby rzeczywistej y zawiera te liczby x , dla których $x^2+x - (y^2+y) = 0$.Rozważamy to jako równanie ze względu na x . Wyróżnikiem tego równania jest $\Delta = 1 + 4(y^2 + y) = (2y + 1)^2$, zatem pierwiastkami są

$x_1 = \frac{-1-(2y+1)}{2} = 1 - y$, $x_2 = \frac{-1+(2y+1)}{2} = y$. Są to liczby symetrycznie położone względem $\frac{1}{2}$.

c) Zauważmy, że dla liczb nieujemnych x mamy $x+ \mid x \mid = 2x$. Dla liczb ujemnych mamy $x+ \mid x \mid = x - x = 0 = 0+ \mid 0 \mid$. Oczywiście z tego, że $2m = 2n$ wynika, że $m = n$. Zatem dla liczb dodatnich relacja jest tożsamością a poza tym jest jedna "duża" klasa równoważności, złożona z liczb ujemnych i zera.

d) Rozważmy liczbę całkowitą n. Zauważmy, że $f(n) = f(-n)$. Zatem klasa równowazności każdej liczby zawiera liczbę do niej przeciwną. Wystarczy zatem ograniczyć się do liczb nieujemnych. Mamy $f(0) = 0^2 - (-1)^0 = -1$ oraz $f(1) = 1^2 - (-1)^1 = 2$, $f(2) = 2^2 - (-1)^2 = 3$, $f(4) = 4^2 - (-1)^2 = 15$. Dla dodatnich wartości argumentu funkcja ta jest funkcją rosnącą. Zatem klasy równoważności są dwuelementowe (liczba i liczba do niej przeciwna) z jednym wyjątkiem: klasa liczby 0.

Zadanie 10.14. Wykazać, że relacja $\sim$, określona dla macierzy kwadratowych nieosobliwych ustalonego rozmiaru wzorem

$M \sim N \Leftrightarrow$ istnieje taka macierz nieosobliwa A, że $M = A^{-1}NA$,

jest relacją równoważności. Wyznaczyć macierz, której klasa równoważności jest jednoelementowa.

Rozstrzygnąć, czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ są równoważne. Rozstrzygnąć, czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ są równoważne.

Rozwiązanie. Jeżeli pamiętamy, że relacja ta zachodzi między macierzami wtedy i tylko wtedy, gdy są one macierzami tego samego przekształcenia liniowego, tylko byc może w różnych bazach, to zadanie jest oczywiste. Macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ nie są równoważne, na przykąłd dlatego, że mają różne wartości własne. Możemy rozwiązać zadanie inaczej, bez odwoływania się do znajomości algebry liniowej. Relacja $\sim$ jest oczywiście zwrotna (wystarczy wziąć za A macierz jednostkową). Dalej, jeżeli $M = A^{-1}NA$, to $N = AMA^{-1}$.Relacja jest więc symetryczna. Wreszcie, jeżeli $M = A^{-1}NA$ oraz $N = B^{-1}KB$, to $M = A^{-1}B^{-1}KBA = (BA)^{-1} \cdot K \cdot (BA)$. Relacja jest więc przechodnia. Aby przekonać się, że macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ nie są równoważne, możemy zauważyć, że mają różne wyznaczniki, albo obliczyć to wprost. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$. Z równości macierzy wynika, że $b = c = d = 0$. Taka macierz A jest osobliwa.

Aby rozstrzygnąć, czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ są równoważne, możemy poszukać, jak wyżej, macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Mamy wtedy

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix}$.

Z układu równań $a + 3b = a + 3c$, $2a + 4b = b + 3d$, $c + 3d = 2a+4c$, $2c+4d = 2b+4d$ wyznaczamy wiele możliwości otrzymania nieosobliwej macierzy A. Na przykład można wziąć $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

Macierze $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ są zatem równoważne.

Zadanie 10.15. Wykazać, że relacja, zachodząca między macierzami kwadratowymi nieosobliwymi, gdy istnieje taka macierz nieosobliwa A, że $M = A^T N A$, jest relacją równoważności. Rozstrzygnąć, czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ są równoważne.

Szkic rozwiązania. Jeżeli wiemy, że relacja podana opisuje macierze, które sa macierzami formy kwadratowej w róznych bazach, to zadanie jest banalne. Jeżeli tego wiemy, możemy łatwo rozwiązać zadanie, naśladując rozwiązanie zadania poprzedniego. Relacja jest oczywiście zwrotna (wystarczy wziąć za A macierz jednostkową). Dalej, jeżeli $M = A^T N A$, to $N = AMA^T$.Relacja jest więc symetryczna. Wreszcie, jeżeli $M = A^T N A$ oraz $N = B^T K B$, to $M = A^T B^T K B A$ $= (BA)^T \cdot K \cdot (BA)$. Relacja jest więc przechodnia. Aby przekonać się, że macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ nie są równoważne, poszukajmy macierzy A. Niech będzie ona równa $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Wtedy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$. To nie może być równe $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, bo w prawym dolnym narożniku są liczby róznych znaków.

Zadanie 10.16. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. W zbiorze macierzy kwadratowych 2×2 rozpatrujemy relację: $M \equiv N \Leftrightarrow AM = AN$. Rozstrzygnąć, czy jest to relacja równoważności. Opisać klasę równoważności macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.Czy wszystkie klasy równoważności sa równoliczne?

Zadanie 10.17. W zbiorze macierzy kwadratowych $n \times n$ wprowadzamy relację $\backsim$ określoną wzorem

$A \backsim B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$. Rozstrzygnąć, czy jest to relacja zwrotna, symetryczna i czy jest przechodnia.

Rozwiązanie. Jest to relacja zwrotna, bo $A \cdot A = A \cdot A$. Jest symetryczna, bo jeżeli $AB = BA$, to $BA = AB$. Nie jest to relacja przechodnia. Każda macierz kwadratowa jest bowiem przemienna z nacierzą jednostkową, $A.I = I.A$. A zatem gdyby określona tu relacja była przechodnia, to każde dwie macierze byłyby przemienne, to znaczy dla każdych dwóch macierzy ich iloczyn nie zależałby od kolejności. Wiemy jednak, że tak nie jest.

Zadanie 10.18. Podać przykład zbioru nieskończonego X i takiej relacji równoważności o polu X , która ma dokładnie 2007 klas równoważności.

Rozwiązanie. Wystarczy podać rozbicie zbioru X na 2007 rozłącznych podzbiorów.

Zadanie 10.19. Sprawdzić, czy relacja $\mathbf{R}$ zachodząca między liczbami zespolonymi, a określona wzorem:

$$z_1 \, \mathbf{R} \, z_2 \ \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \ |\, z_1| \ + |\, z_2| \ \leq \ 3$$

jest zwrotna, czy jest symetryczna i czy jest przechodnia.

Odpowiedź: Nie jest zwrotna, jest symetryczna, nie jest przechodnia.

Zadanie 10.20. Sprawdzić, czy relacja $\mathbf{T}$ zachodząca między liczbami zespolonymi, a określona wzorem:

$$z_1 \, \mathbf{T} \, z_2 \ \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \ z_1 - z_2 \ \in \ \mathbb{R}$$

jest zwrotna, czy jest symetryczna i czy jest przechodnia.

Rozwiązanie. Relacja jest zwrotna, bo zawsze gdy od pewnej liczby odejmiemy liczbę równą, to otrzymamy zero. Relacja jest symetryczna, bo jeżeli $z_1 - z_2$ jest liczbą rzeczywistą, to $z_2 - z_1$ też. Jest to też relacja przechodnia. Istotnie, jeżeli $z_1 - z_2 \in \mathbb{R}$ oraz $z_2 - z_3 \in \mathbb{R}$, to $z_1 - z_3 = (z_1 - z_2) + (z_2 - z_3) \in \mathbb{R}$. Klasy równoważności $[z]$ są jednoelementowe, gdy $z \in \mathbb{R}$ i dwuelementowe (złożone z danej liczby i liczby do niej sprzężonej), gdy $z \notin \mathbb{R}$.

Zadanie 10.21. Sprawdzić, czy relacja $\mathbf{U}$ zachodząca między liczbami zespolonymi, a określona wzorem:

$z_1 \, \mathbf{U} \, z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$

jest zwrotna, czy jest symetryczna i czy jest przechodnia.

Rozwiązanie. Relacja nie jest zwrotna, bo kwadrat liczby zespolonej nie musi być liczbą rzeczywistą. Jest oczywiście symetryczna. Nie jest relacją przechodnią. Na przykład $(1 + i) \cdot (1 + i)^3 = -4$ jest liczbą rzeczywistą, podobnie jak $(1 + i)^3 \cdot (1 + i)$. Natomiast $(1 + i) \cdot (1 + i) = 2i \notin \mathbb{R}$.

Zadanie 10.22. Określić pole relacji tak, żeby miała ona sens i rozstrzygnąć, czy jest ona relacją równoważności: prostopadłość, równoległość, równoliczność, podobieństwo, przystawanie, posiadanie wspólnego czynnika > 1.

Zadanie 10.23. W zbiorze ciągów spełniających warunek Cauchy'ego wprowadzamy relację wzorem:

ciąg (a_n) jest w relacji z ciągiem (b_n), jeżeli ciąg $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...$ też jest ciągiem Cauchy'ego. Wykazać, że jest to relacja równoważności i że zbiór ilorazowy można utożsamić ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Zadanie 10.24. W zbiorze ciągów o wyrazach rzeczywistych wprowadzamy relację wzorem:

ciąg (a_n) jest w relacji z ciągiem (b_n), jeżeli ciągi te rożnią się na conajwyżej skończonej liczbie miejsc. Wykazać, że jest to relacja równoważności.

Zadanie 10.25. W zbiorze funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$ wprowadzamy relację uznając za równoważne te funkcje, których wartości w punkcie $x = \frac{1}{2}$ są

równe. Wykazać, że jest to istotnie relacja równoważności i że zbiór ilorazowy można utożsamić ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Zadanie 10.26. Podać przykład takiej relacji równoważności, niebędącej relacją przystawania modulo 2, która rozbija zbiór liczb całkowitych na klasy dwuelementowe.Opisać tę relację słownie i wzorem.

Zadanie 10.27. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. W iloczynie kartezjańskim $A \times A$ wprowadzamy relację $\mathbf{R}$ wzorem $(a, b)\ \mathbf{R}\ (c, d) \quad \Leftrightarrow \min\ \{a, b\} = \min\{c, d\}$.

a) Wyznaczyć klasę abstrakcji (=klasę równoważności) pary (4,6).

b) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $A \times A\ /\mathbf{R}$ **?**

c) Ile elementów ma najliczniejsza klasa równoważności?

Rozwiązanie. Co znaczy określona tu relacja? Jak można ją opisać bez wzoru? Bardzo prosto. W każdej parze liczbowej zwracamy uwagę tylko na mniejszą. A zatem pary równoważne z (4,6) to wszystkie te, w których mniejsza z liczb jest równa 4: (4,4), (4,5), (4,6), (4,7), (5,4), (6,4), (7,4).

Zbiór ilorazowy to zbiór wszystkich klas równoważności. Jest zatem siedem klas: Najliczniejsza z nich to ta, gdzie mniejsza z liczb jest 1: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (7,1), (6,1), ..., (2,1).

Mają one kolejno 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1 elementów. Najmniejsza jest klasa jednoelementowa, złozona z pary (7,7). Sprawdzamy: $13+11+9+7+5+3+1 = 49 = 7^2$.

Zadanie 10.28. Niech $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. W iloczynie kartezjańskim $A\times A$ wprowadzamy relację $\sim$ wzorem $(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow |\ \max\ \{a, b\}\ | = |\ \max\{c, d\}\ |$.

a) Wyznaczyć klasę abstrakcji (=klasę równoważności) pary (3,4).

b) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $A \times A\ /\sim$ **?**

c) Wskazać najmniej liczną klasę równoważności.

Rozwiązanie. Klasa równoważności pary (3,4) składa się z tych par, gdzie najwiekszym elementem jest 4 albo -4, a zatem z następujących par: (-4,-4), (*,4) oraz (4,*), gdzie * oznacza kolejne liczby -4, ..., 4. Zbiór ilorazowy ma 5 elementów, bo tylko 0, 1,2,3,4 mogą być największymi wartościami funkcji "moduł maksimum". Jest jedna jednoelementowa klasa: złożona z pary (0,0).

Wykład 11. Relacje porządkujace.

Trzecim najważniejszym typem relacji – po relacjach równoważności i funkcjach –

są rozmaite relacje porządkujące. Ogólnie rzecz biorąc, w relacji porządkującej musimy umieć

elementy porównywać: który jest mniejszy (wcześniejszy), a który większy (późniejszy). Ale nawet ta prosta relacja $\leq$ ma inne własności, gdy rozpatrywana jest na zbiorze liczb naturalnych, liczb całkowitych lub liczb rzeczywistych. Na przykład w zbiorze liczb naturalnych każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy, co nie jest prawdą dla relacji mniejszości w zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, ani w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych. Z kolei liczby rzeczywiste uporządkowane są w sposób gęsty: między dwie liczby rzeczywiste zawsze można wstawić trzecią. Przykłady te pokazują, że relacja porządkująca może być "lepsza" lub "gorsza", a w każdym razie mieć wiele specyficznych własności.

Dla informatyka relacje porządkujące mają z oczywistych względów duże znaczenie. Na przykład, dobre uporządkowanie zbioru (w sensie definicji podanej niżej) umożliwia konstruowanie programów rekurencyjnych i indukcyjnych.

Przypominam, że relacja w zbiorze X to pewien podzbiór $\mathbf{R}$ iloczynu kartezjańskiego $X \times X$ i że zamiast pisać $(x, y) \in \mathbf{R}$, piszemy $x\mathbf{R}y$ i mówimy, że x jest w relacji z elementem y. Zbiór X

nazywamy polem relacji. Omówimy systematycznie różne typy relacji porządkujących. Ponieważ porządek przypomina nierówność, będziemy używać symbolu $a \preceq b$ na zaznaczenie, że elementy a oraz b są związane ogólną relacją porządkującą. Jest to zapis bardziej przejrzysty niż $a\mathbf{R}b$.

Pierwszym warunkiem, który nakładamy na relacje porządkujące, jest zwrotność: każdy element jest sam ze sobą w relacji:

$\forall \ a \in X$ zachodzi $a \preceq a$.

Na przykład relacja $\leq$ spełnia ten warunek w każdym zbiorze liczbowym. Drugim wspólnym warunkiem dla wszystkich relacji porządkujących jest jej przechodniość. Znaczy to, że dla wszystkich a, b, c należących do pola tej relacji ma być spełniony warunek:

jeżeli $a \preceq b$ i także $b \preceq c$, to $a \preceq c$

Ten warunek jest również spełniony przez zwykłą relację $\leq$ w każdym zbiorze liczbowym.

Definicja. Mówimy, że pewna relacja $\prec$ polu X jest w tym zbiorze X relacją częściowego porządku wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwrotna, przechodnia oraz dla każdych a$\in$ X, b$\in$ X jest prawdą, że

a $\prec$ b oraz b$\prec$ a , to a = b

to znaczy, że jeżeli z każdych dwóch elementów pierwszy jest *mniejszy (wcześniejszy)* od drugiego, a drugi *mniejszy (wcześniejszy)* od pierwszego (w sensie rozpatrywanej relacji) , to jest to możliwe tylko wtedy, gdy elementy te są identyczne.

Jeżeli relacja spełnia powyższy trzeci warunek, to mówimy, że jest

na wpół przeciwsymetryczna. Nie jest to specjalnie szczęśliwy termin, ale utarł się i jest używany. Oznaczę go skrótem NWP. Nazywa się go też słabą antysymetrią.

Spójrzmy na relacje z przykładu 10.6 (poniżej). Widzimy, że liczby większe od 2 są w tej relacji uporządkowane "normalnie", według "starszeństwa". Zero jest mniejsze niż dwa,

liczba 1 też jest mniejsza niż dwa, ale 0 i 1 są nieporównywalne:

nie jest prawdą, że $0 \prec 1$, ale też nie jest prawdą, że $1 \prec 0$.

Mimo to warunek NWP jest spełniony.

Cwiczenie. Chcemy określić w zbiorze wszystkich liczb całkowitych relację porządkującą tak, by otrzymać porządek częściowy i by

liczba 0 była mniejsza od wszystkich innych (poprzedzała wszystkie inne),

a poza tym porządek byłby "normalny" : dla liczb różnych od zera m $\prec$ n gdy $m \leq n$.

Teorię będziemy ilustrować na kilku przykładach, do których będziemy się najczęsciej odwoływać.

Przykład 10.1 . Relacja mniejszości $\leq$ w zbiorze liczb naturalnych; na tę relację mówimy zwyczajowo relacja mniejszości, ale powinno się nazywać się ją relacja niewiększości, bo nierówność jest nieostra.

Przykład 11.2. Relacja mniejszości $\leq$ w zbiorze liczb całkowitych.

Przykład 11.3. Relacja mniejszości $\leq$ w zbiorze liczb wymiernych.

Przykład 11.4. Relacja zawierania (inkluzji) zbiorów: $A \subset B$, będących podzbiorami pewnego ustalonego zbioru X. Polem tej relacji jest zbiór potęgowy $2^X = P(X)$ – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X.

Przykład 11.5. Relacja $\prec$ zachodząca między wielomianami zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych:

jeżeli stopień f jest mniejszy niż stopień g, to $f \prec g$,

– jeżeli stopnie f i g są różne, to f $\prec$g gdy st $f <$ st g ,

- jeżeli stopnie f i g są różne i równe n, to $f \prec g$, gdy współczynnik przy x^n w wielomianie f jest mniejszy od współczynnika przy x^n w wielomianie g

– jeżeli stopnie są równe i równe są współczynniki przy najwyższej potędze x, to porównujemy współczynniki przy kolejnej potędze x^{n-1} jeśli i te są równe, to patrzymy na współczynnik przy x^{n-2} i tak dalej.

Przykład 11.6. W zbiorze liczb naturalnych z zerem włącznie $\mathbb{N}= \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

rozpatrujemy relację określoną wzorem $x \prec y$ gdy $x < y + 2$.

Przykład 11.7. Układ katalogów na twardym dysku komputera wyznacza pewien porządek. Nie ma w nim cykli. Zbiór uporządkowany o tych własnościach (tzn. niemający cykli) nazywamy drzewem.

Przykład 11.8. Inna relacją porzadkującą liczb naturalnych może być

$m \prec n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \leq 2$ lub $m \leq n$.

Przykład 11. 9. W zbiorze liczb całkowitych określamy relację

$m \prec n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \leq n$ i jednocześnie $mn > 0$

Przykład 11.10. W zbiorze liczb całkowitych dodatnich rozpatrujemy relację podzielności:

$m \prec n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m|n$ (to znaczy, gdy m jest dzielnikiem n).

Zadanie 11.1. W przykładach 11.1 - 11.10 wyznaczyć elementy minimalne i maksymalne, najmniejsze i największe.

Zadanie 11.2. W przykładzie 11.5 uporządkować w kolejności (od najmniejszego

do największego) wielomiany $x,\ 2x^2+5x+6,\ 2x^2+x+7,\ 2x^2+5x+6,\ \ x^3+1$

Zadanie 11.3 W których z przykładów 11.1-11.10 może się zdarzyć, że

dla pewnych elementów a, b nie zachodzi ani $a \prec b$,ani $b \prec a$?

Porządek leksykograficzny w iloczynie kartezjańskim zbiorów uporządkowanych

Wszyscy znamy zasadę według której tworzone są wszelkiego rodzaju listy alfabetyczne. W szkole podstawowej poznajemy uporządkowanie liter alfabetu. Obecnie jest ono takie:

AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPQRSŚTUVWXYZŹŻ

ale za czasów szkolnych autora tego skryptu kolejność Ż i Ź była przestawiona i nie mówiło się o Q, V ani X. Tak czy owak, jeśli ustalimy kolejność liter alfabetu, to nazwy porzadkujemy według oczywistej zasady: decyduje pierwsza litera, potem druga, trzecia i tak dalej. Zauważmy, że z dwóch nazwisk takich Kot i Kotański postawimy to pierwsze wcześniej, tak jakby na końcu stało nieskończenie wiele liter wcześniejszych niż a. Te zasady porządkowania są nam dobrze znane. Matematycy nazywają to porządkiem leksykograficznym.

Definicja. Niech będą dane dwa zbiory: zbiór X z relacją porządkującą, którą oznaczymy symbolem $\blacktriangleleft$ i zbiór Y z relacją porządkującą, którą oznaczymy

symbolem $\sqsubseteq$. Porządkiem leksykograficznym w iloczynie kartezjańskim X $\times$ Y nazywamy relację $\prec$

określoną tak

$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ gdy albo $x_1 \blacktriangleleft x_2$ oraz $x_1 \neq x_2$,albo $x_1 = x_2$ oraz $y_1 \sqsubseteq y_2$.

Zadanie 11.4. Przekonać się, że powyższa definicja oddaje intuicję

pojęcia porządku leksykograficznego (słownikowego): decyduje porządek na pierwszej współrzędnej, a w następnej kolejności na drugiej współrzędnej.

Zadanie 11.5. Napisać elementy iloczynu kartezjańskiego

{ 1,2,3,4,5} $\times${ 1,2,3 } w porządku leksykograficznym.

Zadanie 11.6. W zbiorze jednomianów $x^m y^n$ dwóch zmiennych x i y

wprowadzamy porządek leksykograficzny. Opisać go dokładniej.

Wypisać kilkanaście początkowych elementów ciągu

tych jednomianów uporządkowanego leksykograficznie.

Zadanie 11.7. W zbiorze liczb zespolonych wprowadzamy porządek uznając $z_1 \prec\ z_2$, gdy zarówno moduł z_1 , jak i argument (główny) z_1 jest niewiększy niż moduł i argument z_2. Naszkicować diagram Hassego dla tego porządku w zbiorze zespolonych całkowitych, to jest postaci $m + ni$, gdzie m, n sa liczbami całkowitymi.

Szkic rozwiązania. Podane określenie nie wyjaśnia, czy 0 jest mniejsza od innych liczb. Liczba 0 nie ma bowiem argumentu. Przyjmijmy, że jest ona mniejsza od wszystkich innych. Następują cztery liczby o module 1, w kolejności $1,\ i,\ \ -i,\ -1$. Następne są liczby module $\sqrt{2}$; są to $1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$

. Mamy

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \ldots & & & & & \\
 & & & & & 2i & & & & & \\
 & & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & & -1+i & \longleftarrow & i & & 1+i & & & \\
 & & & & \swarrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & & & \\
\ldots \longrightarrow & -2 & \rightarrow & -1 & & 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 2 & \longrightarrow \ldots \\
 & & & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & & -1-i & & -i & \rightarrow & 1-i & & & \\
 & & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & & -2i & & & & & \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

Zadanie 11.8. W zbiorze macierzy 2 na 2 o wyrazach będących liczbami całkowitymi 0 i 1 wprowadzamy porządek następujący: $M \ll N$, gdy det $M \leq \det N$.Gdy zaś wyznaczniki sa równe, macierz M uznajemy za mniejszą (wcześniejszą) niż N, gdy jest od niej wcześniejsza w porządku leksykograficznym. Wypisać wszystkie te macierze w porządku tak określonym.

Rozwiązanie. Jest $2^4 = 16$ takich macierzy. Z liczb 0, 1 ustawionych w macierz kwadratową 2 na 2 można uzyskać tylko wyznaczniki -1, 0 +1. Zatem najpierw wypiszemy macierze o wyznaczniku -1.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, potem te o wyznaczniku 0 :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, wreszcie o wyznaczniku 1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Big(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 11.9. W zbiorze macierzy 3 na 3 o wyrazach będących liczbami całkowitymi 0 i 1 wprowadzamy porządek następujący: $M \ll N$, gdy det $M \leq \det N$.Gdy zaś wyznaczniki są równe, macierz M uznajemy za mniejszą (wcześniejszą) niż N, gdy jest od niej wcześniejsza w porządku leksykograficznym. Napisać trzy pierwsze i trzy ostatnie macierze. Na którym miejscu jest macierz jednostkowa?

Zadanie 11.10. W zbiorze macierzy 3 na 3 o wyrazach będących liczbami całkowitymi 0 i 1 wprowadzamy porządek następujący: $M \ll N$, gdy $|det$ $M| \leq |\det N|$.Gdy zaś wyznaczniki są równe, to macierz M uznajemy za mniejszą (wcześniejszą) niż N, gdy jest od niej wcześniejsza w porządku leksykograficznym. Napisać pierwszych sto macierzy względem tego porządku.

Zadanie 11.11. W zbiorze macierzy 2 na 2 o wyrazach będących liczbami całkowitymi 0 i 1 wprowadzamy porządek następujący: $M \ll N$, gdy $|det$

$M| \leq |\det N|$.Gdy zaś moduły wyznaczników są równe, to macierz M uznajemy za mniejszą (wcześniejszą) niż N, gdy jest od niej wcześniejsza w porządku leksykograficznym z gradacją na ciągach czteroelementowych. Napisać wszystkie te macierze w opisanym porządku.

Zadanie 11.12. W zbiorze macierzy 2 na 2 o wyrazach będących liczbami całkowitymi 0 i 1 wprowadzamy porządek następujący: $M \ll N$, gdy albo macierze są równe, albo *det* $M < \det N$.Opisać ten porządek.

Zadanie 11.13. W zbiorze macierzy 2 na 2 o wyrazach będących liczbami całkowitymi 0 i 1 wprowadzamy porządek następujący: $M \ll N$, gdy

jeżeli wyznacznik macierzy M jest równy zero, a wyznacznik macierzy N nie, to $M \ll N$,

jeżeli wyznaczniki macierzy M i N są równe i niezerowe, to $M \ll N$, gdy M jest wcześniejsza w porządku leksykograficznym z gradacją na ciagach czteroelementowych,

jeżeli wyznaczniki macierzy M i N są różne i niezerowe, to $M \ll N$ gdy wyznacznik M jest większy niż wyznacznik N.

Zadanie 11.14. W zbiorze iloczynie kartezjańskim $(1, 2, 3, 4, 5, ..m\} \times (1, 2, 3, ..., n\}$ wprowadzamy porządek $\lhd$ wzorem $(a, b) \lhd (c, d)$ gdy $a \leq c$ i $b \leq d$.Wyznaczyć elementy minimalne i maksymalne. Podać przykłady łańcuchów. Niech teraz $m = n = 5$. Wyznaczyc kresy, jeżeli istnieją, par $(1, 2)$ i $(2, 1)$ oraz (2,3) i (4,2).

Rozwiązanie wynika z następującej interpretacji tego porządku: para (a, b) poprzedza $(c, d$

jeżeli na obu współrzędnych jest spełniona zwykła nierówność $\leq$. A zatem $(1, 2) \lhd (2, 3) \lhd (2, 4) \lhd (5, 5)$.Ale pary $(1, 2)$ i $(2, 1)$ są nieporównywalne. Geometrycznie, punkt A poprzedza B, jeżeli leży od niego "niżej lub

nie wyżej" i "na lewo lub chociaż nie na prawo". Na diagramie poniżej mamy $A \lhd B$, $A \lhd D$, $B \lhd C$, $C \lhd D$, ale między punktami B, D nie jest prawdą, że $B \lhd D$, ani $D \lhd B$.

Zadanie 11.15. W zbiorze macierzy 2 na 2 o wyrazach będących 0 lub 1 wprowadzamy porządek w następujący sposób. Każdej macierzy przyporządkujemy dwie liczby: jej wyznacznik $W(M)$ i jej ślad $S(M)$. *Śladem macierzy nazywamy sumę elementów na przekątnej.* Porządek określamy tak:

$M \prec N$ gdy albo $M = N$ albo para $(W(M), S(M))$ poprzedza $(W(N), S(N))$ w porządku leksykograficznym. Narysować diagram Hassego tego porządku. Wskazać elementy minimalne i maksymalne, największy i najmniejszy (jeśli są). Czy istnieje kres górny zbioru złożonego z macierzy zerowej i macierzy jednostkowej?

Rozwiązanie. Wypiszmy wszystkie macierze 2 na 2 o wyrazach 0,1 wraz z ich wyznacznikami i śladami (ślad oznaczamy przez *tr,* od angielskiego *trace*):

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$, *tr* $A = 0$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = 0$, *tr* $B = 1$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = 0$, $tr\ C = 0$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det D = 0$, tr $D = 0$,

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det E = 0$, $tr\ E = 1$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det F = 0$, tr $F = 1$,

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det G = 0$, $tr\ G = 1$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det I = 1$, $tr\ I = 2$,

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det J = -1$, $tr\ J = 0$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det K = 0$, tr $K = 1$,

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det L = 0$, $tr\ L = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det M = -1$, tr $M = 1$,

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det N = 1$, $tr\ N = 2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = 1$, tr $P = 2$,

$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det R = -1$, $tr\ R = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det S = 0$, tr $S = 2$.

Inaczej mówiąc, poszczególne macierze odpowiadają następującym parom $(\det, tr)$:

$(-1,0) \to J$; $(0,0) \to A, C, D$; $(-1,1) \to M, R$; $(0,1) \to B, E, F, G, K, L$, ; $(0,2) \to S$; $(1,2) \to I, N, P$;

W porządku leksykograficznym są one uporządkowane liniowo w ten sposób: $J, (M,R), (A,C,D), (B,E, F, G, K, L), S, (I,N,P)$. Między macierzami

z tej samej grupy (wziętej w nawias) nie zachodzi relacja. Zatem elementem minimalnym jest J i jest to też element najmniejszy. Elementami maksymalnymi są I,N,P. Ponieważ zarówno macierz zerowa A , jak i macierze C,D są macierzami mniejszymi od macierzy jednostkowej I, zatem inf (A,I) nie istnieje. Podobnie nie istnieje sup (A,I).

Zadanie 11.16. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania wprowadzamy ma macierzach porządek następujacy $M \ll N$, gdy para $(\det M\ , trM)$ jest mniejsza od $(\det M,\ tr\ N)$ w sensie porządku opisanego w zadaniu 11.14. Narysować diagram Hassego tego porządku. Wskazać elementy minimalne i maksymalne, największy i najmniejszy (jeśli są). Czy istnieje kres górny zbioru złożonego z macierzy zerowej i macierzy jednostkowej?

Rozwiązanie. Wszystko łatwo wynika z diagramu Hassego:

Zadanie 11.17. Niech dla macierzy M symbol $k(M)$ oznacza sumę elementów pierwszej kolumny macierzy. W oznaczeniach zadania 11.15 wprowadzamy porządek $\lll$, uznając, że $M \lll N$ gdy albo $M = N$ albo $(\det M, k(M))$

poprzedza $(\det M, k(M))$ w porządku opisanym w zadaniu 11.14. Powtórzyć zadanie 11.15 dla tego porządku $\lll$.

Rozwiązanie. W oznaczeniach z rozwiązania zadania 11.15 mamy
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$, $k(A) = 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det B = 0$, $k(B) = 1$,
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = 0$, $k(C) = 0$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det D = 0$, $k(D) = 1$,
$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det E = 0$, $k(E) = 0$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det F = 0$, $k(F) = 1$,
$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det G = 0$, $k(G) = 2$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det I = 1$, $k(I) = 1$,
$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det J = -1$, $k(J) = 1$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det K = 0$, $k(K) = 0$,
$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det L = 0$, $k(L) = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det M = -1$, $k(M) = 2$,
$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det N = 1$, $k(N) = 1$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = 1$, $k(P) = 2$,
$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det R = -1$, $k(R) = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det S = 0$, $k(S) = 2$.

Stąd otrzymujemy diagram Hassego:

Zadanie 11.18. W zbiorze liczb naturalnych {1,2,3,.....1024} wprowadzamy porządek w następujący sposób. Przedstawiamy liczbę n w postaci $n = 2^k + l$, gdzie $l < 2^k$. Liczbę m uznajemy za wcześniejszą niż n, gdy $m = 2^p + q$, $q < 2^p$ i para (k, l) jest wcześniejsza od (p, q) w porządku opisanym w zadaniu 11.14, to znaczy, gdy $k \leq p$ i $l \leq q$. Wyznaczyć elementy minimalne i maksymalne, największy i najmniejszy (jeżeli istnieją). Podać przykład najdłuższego łańcucha.

Wyznaczyć (jeżeli istnieją) kresy par (1,2), (10,13), (100, 128), (256,512).

Rozwiązanie. Wynika z diagramu Hassego tego porządku. Porządku tego używamy przy dowodzie

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
128 & \longrightarrow & 129 & \longrightarrow & 130 & \longrightarrow & 131 & \longrightarrow & 132 & \longrightarrow & 133 & - & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
64 & \longrightarrow & 65 & \longrightarrow & 66 & \longrightarrow & 67 & \longrightarrow & 68 & \longrightarrow & 69 & - & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
32 & \longrightarrow & 33 & \longrightarrow & 34 & \longrightarrow & 35 & \longrightarrow & 36 & \longrightarrow & 37 & - & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
16 & \longrightarrow & 17 & \longrightarrow & 18 & \longrightarrow & 19 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 21 & - & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
8 & \longrightarrow & 9 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 11 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & 13 & - & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 7 & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
2 & \longrightarrow & 3 & & & & & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

Zadanie 11.19. W zbiorze liczb naturalnych {1,2,3,.....120} wprowadzamy porządek w następujący sposób. Przedstawiamy liczbę n w postaci $n = k! + l$, gdzie $k! \leq n < (k+1)!$. Liczbę m uznajemy za wcześniejszą niż n, gdy $m = p! + q$, gdzie $p! \leq m < (p+1)!$ i para (k, l) jest wcześniejsza od (p, q) w porządku opisanym w zadaniu 11.14, to znaczy, gdy $k \leq p$ i $l \leq q$. Wyznaczyć elementy minimalne i maksymalne, największy i najmniejszy (jeżeli istnieją). Podać przykład najdłuższego łańcucha. Wyznaczyć (jeżeli istnieją) kresy par

(1,2), (5, 7),(10,13) (100, 120).

Rozwiązanie (szkic). Mamy kolejno $1 = 1! + 0$, $2 = 2! + 0$, $3 = 2! + 1$, $4 = 2! + 2$, $5 = 2! + 3$, $6 = 3! + 0$,

$7 = 3! + 1$, $8 = 3! + 2$, $9 = 3! + 3$, ...Porządek wygląda tak, jak w diagramie poniżej. Liczba 120 nie jest największa, bo np. nie zachodzi ani 119 $\prec$120 , ani 120 $\prec$ 119. Jest elementem maksymalnym.Inne elementy maksymalne to 5, 23 i 119. Liczba 1 jest najmniejsza. Najdłuższy łańcuch to 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 24 $\rightarrow$ 25 $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ 119. Mamy : $\inf\{1,2\} = 1, \sup\{1,2\} = 2$, $\inf\{5,7\} = 2$, $\sup\{5,7\}$ nie istnieje , $\inf\{10,13\} = 10$, $\sup\{10,13\} = 13$, ,

$\inf\{100,120\} = 24, \sup\{100,120\}$ nie istnieje.

$$
\begin{tikzcd}
120 \\
24 \arrow[u] \arrow[r] & 25 \arrow[r] & 26 \arrow[r] & 27 \arrow[r] & 28 \arrow[r] & 29 \arrow[r] & 30 \arrow[r] & 31 \arrow[r] & 32 \arrow[r] & \ldots \\
6 \arrow[u] \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 10 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & 12 \arrow[r] & 13 \arrow[r] & 14 \arrow[r] & \ldots \\
2 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \\
1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Wykład 12. Elementy maksymalne i minimalne. Kresy. Porządek liniowy, dobry, spójny i inne.

Określenie porządku liniowego jest bardzo proste. Zbiór X częściowo uporządkowany przez relację $\prec$ nazywamy liniowo uporządkowanym, jeżeli dla każdych dwóch elementów $a \in X$, $b \in X$, jest spełniony jeden z dwóch warunków: $a \prec b$, $b \prec a$. Innymi słowy: każde dwa elementy tego zbioru dadzą się porównać.

Zadanie 12.1. Które ze zbiorów z przykładu 11.1-11.12 są liniowo uporządkowane

przez opisane tam relacje?

Zadanie 12.2. Czy zbiór podzbiorów ustalonego zbioru może być liniowo uporządkowany przez relację inkluzji?

Zadanie 12.4. Podać sposób liniowego uporządkowania zbioru wszystkich punktów kratowych płaszczyzny, to jest punktów postaci (m, n), gdzie n oraz m są liczbami całkowitymi.

W zbiorze liczb naturalnych {1,2,3,4, 6,7....29,35} , złożonym z liczb niepodzielnych przez 5 i mniejszych od 30 oraz dodatkowo z liczby 35 określamy relację $\lhd$ wzorem $x \lhd y \;\Leftrightarrow x = y \;\vee\; x + 3 \leq y$.

a) Wyznaczyć elementy minimalne.

b) Wyznaczyć elementy maksymalne.

c) Wyznaczyć element największy.

d) Wyznaczyć element najmniejszy.

e) Wyznaczyć kresy zbioru {4,6,7},

f) Podać przykład najdłuższego ciągu $x_1 \lhd x_2 \lhd \ldots \lhd x_n$,w którym wszystkie liczby sa różne.

Odpowiedź. Elementy minimalne to 1,2,3. Najmniejszych nie ma. Liczba 35 jest największa, zatem i maksymalna. Innych maksymalnych nie ma. Kresem dolnym podanego zbioru jest 1. Kresu górnego nie ma. Są dwa ciągi o własności podanej w zadaniu: $1 \lhd 4 \lhd 7 \lhd 10 \lhd \ldots \lhd 28 \lhd 35$ oraz $2 \lhd 5 \lhd 8 \lhd 11 \lhd \ldots \lhd 29 \lhd 35$. Obydwa mają po 11 liczb.

Zadanie 12.5. W zbiorze liczb naturalnych {1,2,3,4,5,6,8, ...27,33} , złożonym z liczb niepodzielnych przez 7 i mniejszych od 28 oraz dodatkowo z liczby 33 określamy relację **R** wzorem $x \mathbf{R} y \;\Leftrightarrow x = y \;\vee\; x \leq y - 5$.

a) Wyznaczyć elementy minimalne.

b) Wyznaczyć elementy maksymalne.

c) Podać argument, rozstrzygający, że porządek nie jest liniowy.

d) Wskazać najdłuższy ciąg rosnący (względem tego porządku).

e) Wyznaczyć kresy zbioru {6,16,26}.

Porządek gęsty

Intuicja odpowiada nam, że liczby całkowite leżą rzadko na linii prostej (osi liczbowej), a wymierne i rzeczywiste *gęsto*. Ujmuje to następujące określenie.

Porządek nazywamy gęstym, jeżeli między dwa dowolne elementy zbioru możemy stawić trzeci. Formalny zapis tego warunku wygląda tak:

$\forall a \in X \; \forall b \in X \;,\; a \neq b \; \exists \; c \in X, \; c \neq a, \; c \neq b \;,\; a \prec c \prec b$

A więc istotnie, w sposób gęsty uporządkowane są liczby wymierne, a także liczby liczby rzeczywiste na prostej. Nieoczekiwanie okazuje się, że zbiór liczb naturalnych też da się uporządkować w sposób gęsty.

Przykład. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ będzie funkcją ustalającą równoliczność zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb wymiernych. A zatem f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną. Określmy porządek w zbiorze $\mathbb{N}$ tak:

$m \prec n$ jeżeli dla odpowiadających im liczb wymiernych mamy $f(m) < f(n)$ w zbiorze $\mathbb{Q}$.

Jest to porządek gęsty, bowiem jeżeli m, n są dwiema różnymi liczbami naturalnymi, to możemy wskazać liczbę leżącą między nimi (w sensie wprowadzonego porządku), na przykład $f^{-1}\left(\frac{f(m)+f(n)}{2}\right)$.

Porządek dobry.

Możliwość dobrego uporządkowania zbioru jest bardzo ważna dla zastosowań. Mówimy, że relacja $\prec$ porządkuje zbiór X w sposób dobry, jeżeli w każdym niepustym podzbiorze $Y \subset X$ istnieje element najmniejszy. Najprostszym przykładem zbioru dobrze uporządkowanego jest zbiór liczb wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

12.10. Które z poniższych relacji są relacjami częściowego porządku, dobrego porządku, porządku liniowego? Które opisują porządek gęsty? Opisać elementy maksymalne, minimalne, majwiększe, najmniejsze. Wskazać łańcuchy i drzewa.

a) relacja $\subset$ w zbiorze potęgowym 2^X;

b) relacja $\leq$ w zbiorze liczb naturalnych;

c) relacja $\leq$ w zbiorze liczb rzeczywistych;

d) relacja określona dla liczb zespolonych wzorem $z_1 \prec z_2$ gdy $\mid z_1 \mid \ \leq \ \mid z_2 \mid$

,

e) relacja okreslona dla macierzy wzorem $M_1 \prec M_2$ gdy $\det M_1 \ \leq \ \det M_2$,

f) prostopadłość prostych na płaszczyźnie,

g) równoległość prostych na płaszczyźnie,

h) relacja podzielności wśród liczb całkowitych dodatnich: $m \prec n$ gdy $m \mid n$

,

i) relacja równoliczności zbiorów,

j) relacja zachodząca między liczbami całkowitymi różnymi od zera ,a określona tak: $m \prec n$ gdy

$m \mid n$ oraz $m \leq n$,

k) relacja między liczbami naturalnymi (z zerem włącznie) określona wzorem: $m \prec n$ gdy $m + 10 \ < \ n$;

l) relacja zachodząca między liczbami rzeczywistymi a określona tak: $a \prec b$ gdy $a = 0$ lub $a = b$,

m) relacja zachodząca między liczbami rzeczywistymi a określona tak: $a \prec b$ gdy $a = 0$ lub $a \leq b$,