Zadanie 1.1. W wyniku egzaminu student uzyskuje jedną z czterech ocen: $2, 3, 4, 5$. Interesuje nas ocena losowo wybranego studenta. Zakładamy, że zdobycie każdej oceny jest jednakowo prawdopodobne.

a. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω i wypisz wszystkie zdarzenia losowe, które można rozpatrzeć w tym zagadnieniu.
b. Zinterpretuj następujące zdarzenia: $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{2\}$, $C = \{\omega \in \Omega : \text{ocena z egzaminu nie mniejsza niż } 4\}$, $A \cup B$, $\Omega \setminus B$, $B \cap C$, B'.
c. Oblicz prawdopodobieństwo zdania egzaminu.

Zadanie 1.2. Przeprowadź podobne rozumowanie w przypadku, gdy możliwymi ocenami są: $2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$.

Zadanie 1.3. Eksperyment polega na losowym wyborze liczby całkowitej n nie mniejszej niż -5 i mniejszej niż 10. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej z liczb jest takie samo. Niech $A = \{n \leqslant 3\}$, $B = \{n > 0\}$, $C = \{n \text{ parzysta}\}$, $D = \{-1 \leqslant n < 8\}$. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń. (a.) $A \cap B$, (b.) $(C \cap D) \cup B'$, (c.) $[(B \cap C') \cup A]'$.

Zadanie 1.4. W szafce Janka leży luzem 6 par różniących się kolorem skarpet. Pewnego razu nasz bohater, spiesząc się na zajęcia z RPS, założył wybrane po omacku 2 skarpetki. (a.) Opisz przestrzeń probabilistyczną. (b.) Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie wzbudzi on ogólnej radości w swoim otoczeniu?

Zadanie 1.5. Rzucamy dwiema siedmiościennymi kośćmi do gry fantasy. Wyznacz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a. liczba oczek na obydwu kostkach jest taka sama,
b. na pierwszej kostce wypadła liczba parzysta,
c. liczba oczek na obydwu kostkach jest taka sama i na pierwszej kostce wypadła liczba parzysta,
d. liczba oczek na obydwu kostkach jest taka sama lub na pierwszej kostce wypadła liczba parzysta.

Zadanie 1.6. Rzucamy symetryczną czworościenną kością do gry tak długo, aż wypadnie jedno oczko. Niech ω_i oznacza zdarzenie, że potrzeba było do tego i rzutów ($i = 1, 2, \dots$). (a.) Opisz przestrzeń probabilistyczną modelującą ten eksperyment losowy. (b.) Oblicz prawdopodobieństwo, że „jedynka” pojawi się nie wcześniej niż w trzecim rzucie.

Zadanie⋆ 1.7. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie wynosi $\frac{1}{2}$. Rzucamy monetą aż do pojawienia się pierwszego orła. Jakie jest prawdopodobieństwo oddania parzystej liczby rzutów?

Zadanie 1.8. W urnie znajduje się 6 kul niebieskich, 3 czerwone i 2 zielone. Wybrano bez zwracania 6 kul. Podaj kilka możliwych wyników losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul:

a. znajdują się dokładnie 4 kule niebieskie?
b. znajdują się dokładnie 3 kule niebieskie i 2 kule czerwone?

Zadanie 1.9. Rozwiąż poprzednie zadanie przy założeniu, że losowanie odbywa się ze zwracaniem.

Zadanie 1.10. Z worka zawierającego 5 kul granatowych, 3 kule pomarańczowe oraz 2 kule turkusowe wyciągamy 4 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, iż:

a. wylosujemy 2 kule granatowe, 1 kulę pomarańczową i 1 kulę turkusową,
b. otrzymane kule nie będą pomarańczowe,
c. otrzymane kule nie będą różowe,
d.⋆ otrzymamy kule tylko dwóch kolorów,
e.⋆ otrzymamy kule w trzech kolorach.

W każdym przypadku rozważ zarówno losowanie ze zwracaniem jak i bez zwracania.

Zadanie 1.11. Na parterze 10-piętrowego budynku wsiada do windy 6 osób.

a. Wyznacz prawdopodobieństwo, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze.
b. Wyznacz prawdopodobieństwo, że dokładnie 3 osoby wysiądą na VII piętrze.

Zadanie⋆ 1.12. W klasie jest 30 uczniów (wszyscy rocznik 1999). Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajdziemy wśród nich 2 osoby obchodzące urodziny tego samego dnia roku?

Zadanie 1.13. Partia towaru składa się ze 200 elementów, wśród których jest 10 elementów wadliwych. Poddajemy kontroli 20 losowo wybranych elementów. Partię przyjmujemy, jeśli wśród kontrolowanych elementów jest nie więcej niż jeden element wadliwy. Obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia tej partii towaru.

Zadanie 1.14. Oblicz prawdopodobieństwo, że przypadkowo wybrany punkt kwadratu $|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$ leży wewnątrz koła $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Zadanie 1.15. Maurycy umówił się na czacie z Grubą Kaśką między godziną 21 a 22. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda im się wymienić choć kilka zdań, przy założeniu, że ze względu na koszty połączenia modemowego każde z nich będzie czekać na siebie tylko przez 10 minut. Czasy zalogowania się na pogawędce są losowe i niezależne.

Zadanie 1.16. Załóżmy, że punkt w którym spada odłamek meteorytu na Ziemię jest zupełnie przypadkowy (żadne miejsce nie jest preferowane).

a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że meteoryt trafi gdzieś na terytorium Polski?
b. Jak bardzo powinni być uradowani/zmartwieni mieszkańcy Beneluksu, jeśli wiadomo, że niebawem ów kosmiczny pyłek na pewno spadnie na Europę?

Uwaga: do tego zadania potrzebny jest np. atlas geograficzny bądź encyklopedia.

Zadanie 1.17. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania ręki brydżowej (13 kart z 52-kartowej talii) z koroną pikową (posiadającą 5 honorów: A, K, Q, J, 10 ♠).

Zadanie 1.18. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania ręki brydżowej z koronką kierową (dowolne 4 spośród 5 honorów: A, K, Q, J, 10 ♡).

Zadanie⋆⋆ 1.19. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania ręki brydżowej z koroną w dowolnym kolorze.

Zadanie 1.20. Wybieramy losowo liczbę 3-cyfrową $(100, 101, \ldots, 999)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że tylko jedna cyfra jest większa niż 4.

Zadanie 1.21. (Ash, 1970) An urn contains 3 red, 8 yellow, and 13 green balls; another urn contains 5 red, 7 yellow, and 6 green balls. One ball is selected from each urn. Find the probability that both balls will be of the same color.

Zadanie 1.22. (Ash, 1970) An experiment consists of drawing 10 cards from an ordinary 52-card pack.

a. If the drawing is done with replacement (*ze zwracaniem*), find the probability that no two cards will have the same face value (*ta sama wartość*).

b. If the drawing is done without replacement (*bez zwracania*), find the probability that at least 9 cards will be of the same suit (*ten sam kolor*).

Zadanie 1.23. Rurociąg naftowy „Przyjaźń" może maksymalnie przetransportować 1,4 mln baryłek ropy na dobę. W pewnym roku prosperity i wspaniałych układów w Europie Wschodniej okazało się, że z prawdopodobieństwem $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$ przepływ danego dnia przyjmie wartość z przedziału $(0{,}4; 1{,}0]$ [mln baryłek], zaś z prawdopodobieństwem $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$, że z przedziału $(0{,}6; 1{,}2]$. Wiemy nadto, że $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}8$. Oblicz i zinterpretuj prawdopodobieństwa: (a.) $\mathrm{P}(A')$, (b.) $\mathrm{P}(B')$, (c.) $\mathrm{P}(A \cap B)$, (d.) $\mathrm{P}(A' \cap B')$, (e.) $\mathrm{P}(B \cap A')$, (f.) $\mathrm{P}(B \cup A')$.

Zadanie⋆ 1.24. Litery A,B,C,...,J ustawiono w przypadkowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a. A,B,C,D będą stały obok siebie dokładnie w takiej kolejności,
b. A,B,C,D będą stały obok siebie (dowolna kolejność),
c. pomiędzy A i B będą dokładnie 3 inne litery.

Zadanie⋆ 1.25. Z partii $N > 0$ sztuk towarów, w których jest $M < N$ sztuk spełniających pewną normę jakości losujemy n sztuk; a. bez zwrotu, b. ze zwrotem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdują się:

a. mniej niż 2 sztuki wadliwe,
b. dokładnie k sztuk zgodnych z normą.

Zadanie 1.26. Zdzisława i Genowefa nie przepadają za sobą. Zapisy do lekarza trwają między godziną 10:20 a 11:00, a czas oczekiwania w kolejce wynosi dokładnie 10 minut. Zakładając, że czas przyjścia każdej z pań jest losowy, wyznacz prawdopodobieństwo, że nie spotkają się one w przychodni.

Zadanie 1.27. Oblicz prawdopodobieństwo, że dowolnie wybrany punkt kwadratu $K = [-1; 1] \times [-1; 1]$ należy do obszaru $\left\{(x, y) \in K : \ -x^2 \leqslant y \leqslant x^2\right\}$.

Zadanie⋆⋆ 1.28. Losujemy dwie liczby z przedziału $[0; 1]$: x i y. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a. $x < y$,
b. $|x - y| < \frac{1}{2}$,
c. $x < \frac{1}{3}y$.

Zadanie 1.29. Z brydżowej licytacji wynika, że Janek i jego partnerka mają łącznie 8 pików. Oblicz prawdopodobieństwo, że ich rozkład na tych dwu rękach będzie następujący: (a) 0-8, (b) 1-7, (c) 2-6, (d) 3-5, (e) 4-4.

Rozwiązanie zadania 1.3. $\Omega = \{-5, -4, -3, \ldots, 9\}$ — zbiór zdarzeń elementarnych. $|\Omega| = 15$.

Określenie prawdopodobieństwa: $(\forall\omega \in \Omega)\,\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, tzn. $\mathrm{P}(\{-5\}) = \mathrm{P}(\{-4\}) = \cdots = \mathrm{P}(\{9\}) = \frac{1}{15}$.

$(\Omega, 2^\Omega, \mathrm{P})$ — przestrzeń probabilistyczna modelująca rozpatrywany eksperyment.

$A = \{-5, -4, \ldots, 3\}$. $B = \{1, 2, \ldots 9\}$. $C = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$. $D = \{-1, 0, \ldots, 7\}$.

(a.) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$.

(b.) $(C \cap D) \cup B' = \{0, 2, 4, 6\} \cup \{-5, -4, \ldots, 0\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 4, 6\}$.

(c.) $[(B \cap C') \cup A]' = [\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup A]' = \{-5, -4, \ldots, 3, 5, 7, 9\}' = \{4, 6, 8\}$.

Rozwiązanie zadania 1.6. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — zbiór zdarzeń elementarnych, gdzie ω_i oznacza, iż „jedynka" pojawiła się dopiero za i-tym razem ($i = 1, 2, \ldots$). Ω jest zbiorem przeliczalnym nieskończonym. $(\Omega, 2^\Omega, \mathrm{P})$ — przestrzeń probabilistyczna. $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$, bo osiągnięcie „sukcesu" za i-tym razem („jedynka" w pojedynczym rzucie wypada z prawdopodobieństwem 1/4) poprzedzone jest $i - 1$ „porażkami" (2,3 lub 4 oczka wypadają w każdym rzucie z prawdopodobieństwem 3/4).

$A = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2\}'$. Zatem $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$.

Wskazówka do zadania 1.7. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — zbiór zdarzeń elementarnych. Niech ω_i — zdarzenie elementarne polegające na pojawieniu się pierwszego orła dopiero w i-tym rzucie ($i = 1, 2, \ldots$). Ω jest zbiorem przeliczalnym nieskończonym. $(\Omega, 2^\Omega, \mathrm{P})$ — przestrzeń probabilistyczna.

$\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1/2^i$.

$$\mathrm{P}(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\}) = \sum_{i=2,4,6,\ldots} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \text{(analiza matematyczna, I rok studiów\ldots)}.$$

Rozwiązanie zadania 1.8. $(\Omega, 2^\Omega, \mathrm{P})$ — przestrzeń probabilistyczna, gdzie zbiór zdarzeń elementarnych składa się ze zbiorów (losowanie bez zwracania — kolejność elementów nieistotna) 6-elementowych reprezentujących kolory wylosowanych 6 kul, tzn. $\Omega = (\{k_1, k_2, \ldots, k_6\} : k_i \in \{NIEBIESKI1, \ldots, NIEBIESKI6, CZERWONY1, CZERWONY2, CZERWONY3, ZIELONY1, ZIELONY2\}, k_i \neq k_j$ dla $i \neq j)$.

Liczba wszystkich możliwych wyników losowania $|\Omega| = \binom{11}{6} = \frac{11!}{6!5!} = 462$ (losujemy 6 bez zwracania spośród 11 — dwumian Newtona).

Prawdopodobieństwo wylosowania każdego zestawu kul jest takie samo i wynosi $\mathrm{P}(\{\omega\}) = 1/462$ dla każdego $\omega \in \Omega$.

Interesują nas prawdopodobieństwa dwóch zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

Niech A reprezentuje zdarzenie (zdarzenie to podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych, czyli zbiór składający się z wybranych wyników losowania) oznaczające, że wylosowano dokładnie 4 kule niebieskie (i 2 jakiś innych kolorów). Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, oznaczana jako $|A|$, wynosi $\binom{6}{4}\binom{5}{2} = \frac{6!}{4!2!}\frac{5!}{2!3!} = 150$ (losujemy 4 kule spośród 6 niebieskich i dwie spośród 5 zielonych lub czerwonych). Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie 4 kul niebieskich wynosi $\mathrm{P}(A) = |A|/|\Omega| = 150/462 \simeq 0{,}325$.

Niech B oznacza zdarzenie reprezentujące wylosowanie dokładnie 3 kul niebieskich oraz 2 czerwonych (więc jest jedna zielona w tym zestawie). Mamy $|B| = \binom{6}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 120$. Zatem $\mathrm{P}(B) = 120/462 \simeq 0{,}260$.

Rozwiązanie zadania 1.9. W tym zadaniu rozpatrujemy losowanie ze zwracaniem. Przypadek ten różni się od poprzedniego tym, że tym razem zbiór zdarzeń elementarnych Ω nie będzie się składał z ze zbiorów 6-elementowych, ale z 6-elementowych ciągów (a więc istotna będzie kolejność elementów, może się zdarzyć, że wylosujemy kilkakrotnie np. tę samą kulę niebieską; w zad. 1.8 to było niemożliwe).

$(\Omega, 2^\Omega, \mathrm{P})$ — przestrzeń probabilistyczna, gdzie $\Omega = ((k_1, \ldots, k_6) : k_i \in \{NIEBIESKI1, \ldots, NIEBIESKI6, CZERWONY1, CZERWONY2, CZERWONY3, ZIELONY1, ZIELONY2\})$.

Mamy $|\Omega| = 11^6 = 1771561$ (11 różnych kul losowanych 6 krotnie).

Interesują nas prawdopodobieństwa dwóch zdarzeń $A, B \subset \Omega$ (to są inne zbiory niż w poprzednim zadaniu).

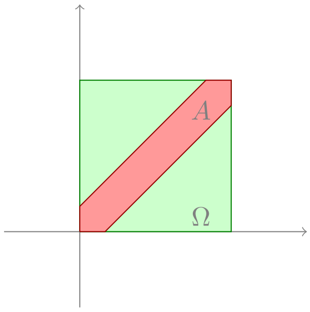
Niech A reprezentuje zdarzenie oznaczające, że wylosowano dokładnie 4 kule niebieskie. Rozważmy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu. Wylosować najpierw 4 kule niebieskie a potem 2 innych kolorów można na $6^4 5^2$ sposobów. Jednakże nie wyczerpuje to wszystkich możliwości — kolejność losowania przecież wcale nie musi być taka. Należy tę liczbę pomnożyć jeszcze przez liczbę wszystkich możliwych permutacji z powtórzeniami, czyli przez $\frac{6!}{4!2!}$ (permutujemy 6 elementów, z których 4 należą do jednej grupy, a 2 do innej). Zatem $|A| = 486000$ i $\mathrm{P}(A) \simeq 0{,}274$.

W drugim przypadku mamy $|B| = 6^3 3^2 2^1 \frac{6!}{3!2!1!} = 233280$ i z tego $\mathrm{P}(B) \simeq 0{,}132$.

Wskazówka do zadania 1.11. Niech $P = \{1, 2, \ldots, 10\}$ — zbiór pięter, na których mogą wysiąść pasażerowie. Przyjmij $\Omega = P^6 = \{(o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6) : o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 \in P\}$.

Rozwiązanie zadania 1.15. Czas zalogowania się na czacie jednej i drugiej osoby można wyrazić za pomocą punktu (t_1, t_2) w kwadracie o boku 1 (1 godzina pomiędzy 22:00 a 23:00). Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zatem $\Omega = ((t_1, t_2) : t_1, t_2 \in [0, 1])$. Pewien podobszar tego kwadratu odpowiada punktom, które reprezentują czasy zalogowania się takie, że dochodzi do spotkania Maurycego i Kasi. Spełniają one warunek $|t_1 - t_2| < 10/60$, tzn. różnica pomiędzy czasami zalogowania się jest mniejsza niż 10 minut (1/6 część godziny). Zatem zdarzenie, które interesuje nas w tym zadaniu można zapisać jako $A = ((t_1, t_2) : |t_1 - t_2| < 1/6, t_1, t_2 \in [0, 1])$.

Prawdopodobieństwo spotkania kochanków, $\mathrm{P}(A)$, można wyznaczyć za pomocą tzw. wzoru na prawdopodobieństwo geometryczne, gdzie rozpatruje się iloraz pól figur A i Ω.



Oczywiście $\mathrm{Pole}(\Omega) = 1$. Figura A jest ograniczona przez proste $t_2 = t_1 - 1/6$ oraz $t_2 = t_1 + 1/6$. Łatwo zauważyć, że punkty należące do Ω, lecz nie należące do A tworzą dwa trójkąty prostokątne o boku 5/6. Zatem $\mathrm{Pole}(A) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{11}{36}$. Więc prawdopodobieństwo spotkania wynosi $\mathrm{P}(A) = \mathrm{Pole}(A)/\mathrm{Pole}(\Omega) = \frac{11}{36}$.

Odpowiedź do zadania 1.17. $\binom{47}{8} / \binom{52}{13}$.

Wskazówka do zadania 1.19. Uwaga: zdarzenia „korona w pikach”, „korona w kierach”, „korona w karach” i „korona w treflach” nie są niezależne.

Odpowiedź do zadania 1.19.

$$\frac{4\binom{47}{8} - 6\binom{42}{3}}{\binom{52}{13}}.$$

Wskazówka do zadania 1.27. Wystarczy przypomnieć sobie, że pole pod krzywą np. $y = x^2$ można obliczyć wyznaczając wartość odpowiedniej całki.