Zadanie 2

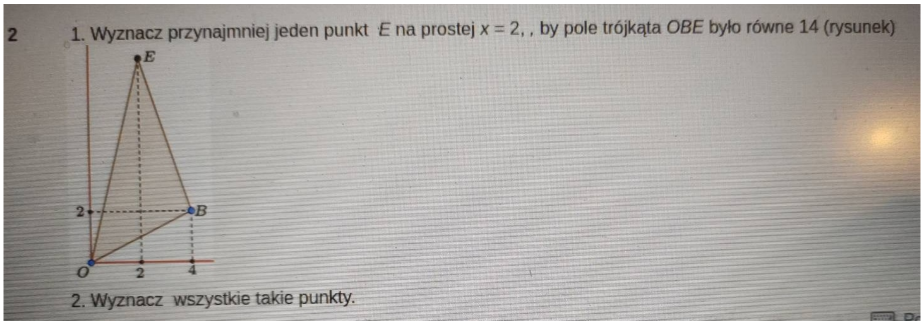


Figure 1: Zadanie 2

Do rozwiązania tego zadania potrzebujemy znać zastosowanie iloczynu wektorowego. Iloczyn wektorowy jest operacją, która zwraca wektor prostopadły do dwóch wektorów. Długość wektora prostopadłego odpowiada polu powierzchni odpowiedniego równoległoboku tworzonego przez dwa wektory. Ponieważ omawiamy trójkąt, nie równoległobok, to pole powierzchni trójkąta jest połową pola równoległoboku.

Dane są dwa wektory (w postaci współrzędnych):

$$\vec{a} = O\vec{B}$$
$$\vec{b} = O\vec{E}$$

Znamy współrzędne wektora $\vec{a}$:

$$\vec{a} = (4, 2)$$

Współrzędne wektora $\vec{b}$ znamy tylko częściowo:

$$\vec{b} = (2, y),$$

gdzie y to nieznana wartość. Znamy również pole trójkąta $OBE = 14$. Pole trójkąta obliczamy ze wzoru:

$$P_{OBE} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Wzór na iloczyn wektorowy (już w postaci trójwymiarowej) to:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}.$$

Zatem długość wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ to:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Podstawiając znane wartości:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |4 \cdot y - 2 \cdot 2| = |4y - 4|.$$

Wstawiając do wzoru na pole:

$$14 = \frac{1}{2}|4y - 4| = 2|y - 1|.$$
$$7 = |y - 1|.$$

Rozwiązując równanie otrzymujemy dwie wartości y:

$$y_1 = 8,$$
$$y_2 = -6.$$

Czyli, obydwa punkty:

$$E_1 = (2, 8),$$
$$E_2 = (2, -6).$$

Zadanie 3

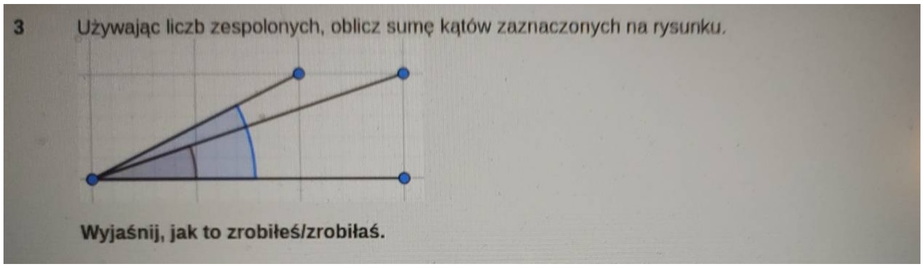


Figure 1: Zadanie 3

Oznaczmy obydwa kąty jako α oraz β. Niech α będzie mniejszym z kątów. Dodatkowo, mamy cztery punkty, O (początek układu współrzędnych), A, B oraz C. Przekształcamy rysunek na:

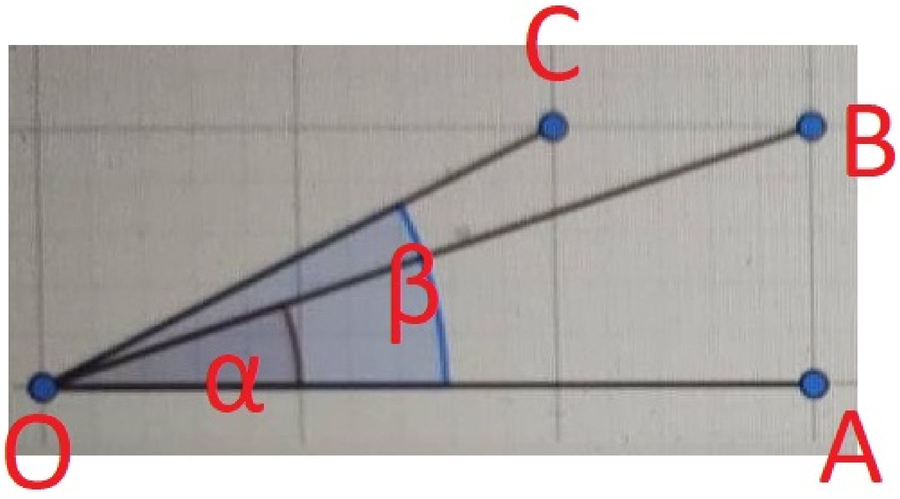


Figure 2: Zadanie 3 - przekształcenie

Zamierzamy działać w doktrynie liczb zespolonych. Zauważamy, że mamy siatkę współrzędnych na podstawie której możemy wyliczyć współrzędne punktów A, B oraz C. Nie mamy jednostek, ale ze względu na podobieństwo trójkątów nie jest to istotne - zatem możemy przypisać punktom następujące współrzędne:

$$A = (3, 0),$$
$$B = (3, 1),$$
$$C = (2, 1).$$

Ponieważ chcemy rozwiązać problem w dziedzinie liczb zespolonych, to przypiszemy punktom odpowiednie liczby zespolone:

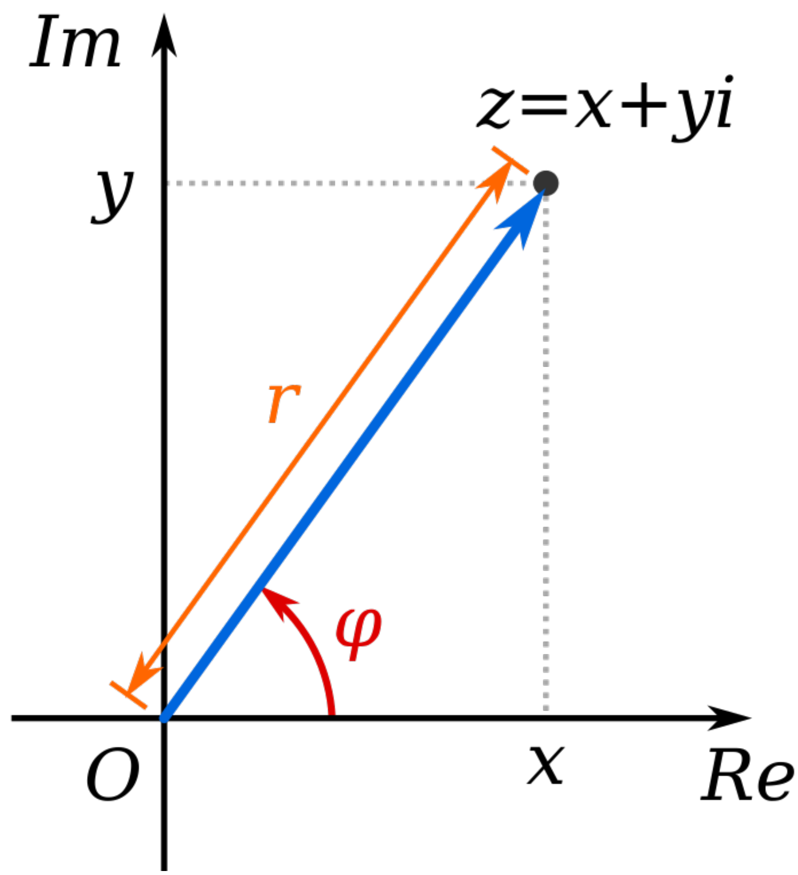
$$A = 3$$
$$B = 3 + i$$
$$C = 2 + i$$

(zgodnie z konwencją, że współrzędne (x, y) odpowiadają liczbie $z = x + iy$).

Liczby zespolone mogą być reprezentowane na dwa sposoby. Pierwszy z nich to przedstawiony wyżej $z = x + iy$, czyli współrzędne kartezjańskie. Drugi z nich to współrzędne biegunowe, gdzie liczba zespolona jest reprezentowana jako $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdzie r to odległość od początku układu współrzędnych, a θ to kąt między osią rzeczywistą a wektorem łączącym punkt z początkiem układu współrzędnych. Współrzędne biegunowe mogą być również zwinięte do wyrażenia

$$z = r\exp\phi$$

.



Jeśli szukamy kąta między dwiema liczbami zespolonymi, to możemy skorzystać z wyrażenia:

$$\cos\theta = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|},$$

gdzie operator $\Re$ oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej, a $\overline{z}$ to sprzężenie liczby zespolonej (czyli zastąpienie $x + iy$ wyrażeniem $x - iy$).

Szukamy kąta α, tj. kąta między A oraz B.

W naszym przypadku, mamy:

$$z_1 = A = 3,$$
$$z_2 = B = 3 + i.$$

Obliczamy iloczyn $z_1 \cdot \overline{z_2}$:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 \cdot (3 - i) = 9 - 3i.$$

Obliczamy wartości bezwzględne:

$$|z_1| = |3| = 3,$$
$$|z_2| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Obliczamy wartość cosinusa kąta α:

$$\cos \alpha = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Zatem:

$$\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18.43^\circ.$$

Analogicznie obliczamy kąt β:

$$z_1 = A = 3,$$
$$z_2 = C = 2 + i.$$

Obliczamy iloczyn $z_1 \cdot \overline{z_2}$:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 \cdot (2 - i) = 6 - 3i.$$

Obliczamy wartości bezwzględne:

$$|z_1| = |3| = 3,$$

$$|z_2| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Obliczamy wartość cosinusa kąta β:

$$\cos \beta = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Zatem:

$$\beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 26.57^\circ.$$

Odpowiedź:

$$\alpha = 18.43^\circ,$$
$$\beta = 26.57^\circ.$$

$$\alpha + \beta \approx 45^\circ.$$

(zadanie można wykonać jeszcze inaczej, konstruując punkt D będący zbudowany o przekręcenie punktu C względem punktu A o α, a następnie obliczając kąt dla liczby zespolonej D).

Zadanie 4

4 Masz przekształcenie liniowe o macierzy A = ((5,0,1,1), (-1, 4, -1, -1), (0,0,6,0), (1,0,-1,5)) w bazie standardowej, $e_1 = [1, 0, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1, 0]$, $e_4 = [0, 0, 0, 1]$

1. Czy jest taka baza przestrzeni $\mathbf{R}^4$, która składa się z wektorów własnych tej macierzy, z których każdy ma sumę współrzędnych równą 2? Jeżeli taka baza jest, to podaj ją. Jeżeli nie ma, to uzasadnij.
2. Jaką macierz ma to przekształcenie w bazie e_4, e_3, e_2, e_1?
3. Podaj przykład **dwóch** par prostopadłych wektorów własnych.
3. Czy wektor [2,3,4,5] należy do przestrzeni rozpiętej na wierszach? Czy należy do przestrzeni rozpiętej na kolumnach? Czy należy do przestrzeni zerowej tej macierzy?

Zadanie za 15 pkt. Uzasadniaj odpowiedzi. Zamiast wpisywać, możesz przekopiować macierz do Wolframa.

Pomoc

Dana jest macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie wymaga znalezienia wektorów własnych tej macierzy, tj. takich wektorów, które będą spełniały wyrażenie:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

gdzie λ jest skalarem (liczbą), nazywaną **wartością własną**. Do znalezienia wektorów własnych potrzebujemy znaleźć najpierw wartości własne macierzy. Zrobimy to opierając się na równaniu:

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

(gdzie I to macierz jednostkowa).

Zatem:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik tej macierzy metodą Studenta, tj. przekopiowując do Wolframa:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 20\lambda^3 + 148\lambda^2 - 480\lambda + 576 = (\lambda - 6)^2(\lambda - 4)^2.$$

Oznacza to, że mamy dwa wektory o wartościach własnych $\lambda_1 = 6$ oraz dwa o wartościach własnych $\lambda_2 = 4$.

Poszukiwanie wektorów własnych polega na znalezieniu jądra macierzy $A - \lambda I$, tj. takich wektorów, które przemnożone przez macierz zwracają wektor 0. Dla $\lambda_1 = 6$ mamy:

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Natychmiast widzimy, że trzeci wiersz macierzy jest zerowy, zatem wektor własny dla $\lambda_1 = 6$ to $\vec{v}_1 = (0, 0, 1, 0)$. Możemy sprawdzić, że po przemnożeniu przez macierz dostajemy zero.

Jeśli zignorujemy pierwszą i drugą kolumnę, to wszystkie wiersze są liniowo zależne, tj. można je uzyskać poprzez przemnożenie pierwszego wiersza przez -1. Zatem, wektor własny dla $\lambda_1 = 6$ to $\vec{v}_2 = (0, 0, 1, -1)$.

Wektory $\vec{v}_1$ oraz $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne, zatem są to dwa wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 6$.

Dalej, liczymy jądro macierzy $A - 4I$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Od razu nam się rzuca w oczy, że druga kolumna jest zerowa. Zatem, wektor własny dla $\lambda_2 = 4$ to $\vec{v}_3 = (0, 1, 0, 0)$.

Ponownie, jeśli zignorujemy trzecią kolumnę, to wszystkie wiersze są liniowo zależne, zatem wektor własny dla $\lambda_2 = 4$ to $\vec{v}_4 = (1, 0, 0, -1)$.

Uzyskujemy zatem zestaw czterech wektorów własnych:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (0, 0, 1, 0), \\ \vec{v}_2 &= (0, 0, 1, -1), \\ \vec{v}_3 &= (0, 1, 0, 0), \\ \vec{v}_4 &= (1, 0, 0, -1). \end{aligned}$$

Sprawdzamy jeszcze raz, że dla oryginalnej macierzy A są one wektorami własnymi, tj. po przemnożeniu przez macierz zwracają ten sam, ale przemnożony przez liczbę, wektor:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Mając wektory własne, możemy odpowiedzieć na pytanie, czy jesteśmy w stanie stworzyć taką bazę, w której suma współrzędnych każdego wektora zwraca 2. Nie, ponieważ $\vec{v}_4$ ma sumę współrzędnych równą 0.

Podpunkt 2 - zmiana bazy

Zadane zostało pytanie, jak wyglądałaby oryginalna macierz A w bazie (e_4, e_3, e_2, e_1), tj, w bazie z odwróconą kolejnością wektorów. Oznacza to, że każda wartość z n kolumny i m wiersza powinna się znaleźć na $4 - n$ kolumnie i $4 - m$ wierszu. Zatem, macierz A w nowej bazie to:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Podpunkt 3 - dwie pary prostopadłych wektorów własnych

Prostopadłość wektorów oznacza, że ich iloczyn skalarny jest równy 0. Zatem, dla wektorów $\vec{v}_1$ oraz $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (0, 0, 1, -1) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0$$
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4 = (0, 0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0, -1) = 0$$

Podpunkt 4 - przestrzeń rozpięta na wierszach, kolumnach, przestrzeń zerowa

Przestrzeń rozpięta na wierszach to przestrzeń wektorów, które można uzyskać poprzez liniową kombinację wierszy macierzy. W naszym przypadku, mamy macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

więc wektory rozpinające przestrzeń to:

$$\vec{v}_1 = (5, 0, 1, 1),$$

$$\vec{v}_2 = (-1, 4, -1, -1),$$
$$\vec{v}_3 = (0, 0, 6, 0),$$
$$\vec{v}_4 = (1, 0, -1, 5).$$

Pytanie sprowadza się do tego, czy te wektory można zsumować do wektora $(2, 3, 4, 5)$. Moglibyśmy oczywiście zgadywać, jednak jeśli rozwiązanie nie jest oczywiste, strasznie sie napracujemy. Ponieważ możemy sprawdzić, że wyznacznik macierzy A jest niezerowy (wynosi 576), wiemy, że te wektory są liniowo niezależne, zatem rozpinają całą przestrzeń $\mathbb{R}^4$. Moglibyśmy kombinować, jak uzyskać z nich wektor $(2, 3, 4, 5)$, ale pytanie było czy można to zrobić, nie natomiast, jak to zrobić.

Analogicznie, przestrzeń rozpięta na kolumnach to przestrzeń wektorów, które można uzyskać poprzez liniową kombinację kolumn macierzy:

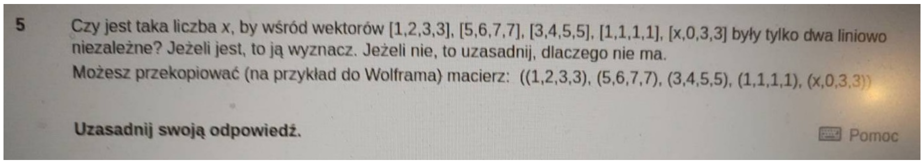
$$\vec{w}_1 = (5, -1, 0, 1),$$
$$\vec{w}_2 = (0, 4, 0, 0),$$
$$\vec{w}_3 = (1, -1, 6, -1),$$

$$\vec{w}_4 = (1, -1, 0, 5).$$

W dalszym ciągu macierz oparta o te wektory ma niezerowy wyznacznik, zatem wektory te są liniowo niezależne, i rozpinają całą przestrzeń $\mathbb{R}^4$. Informuje to nas, że możemy uzyskać z nich wektor $(2, 3, 4, 5)$ poprzez kombinacje liniowe.

Ostatnie pytanie, czy wektor $(2, 3, 4, 5)$ jest w przestrzeni zerowej macierzy A, czyli - czy należy do jego jądra. Wektor należy do jądra macierzy, jeśli po przemnożeniu przez macierz daje wektor zerowy. Jednak, ponieważ wyznacznik macierzy jest niezerowy, to macierz jest odwracalna, zatem jądro macierzy jest przestrzenią zerową, składajacą się jedynie z punktu 0. Zatem, wektor $(2, 3, 4, 5)$ nie należy do jądra macierzy A.

Zadanie 5


5 Czy jest taka liczba x, by wśród wektorów [1,2,3,3], [5,6,7,7], [3,4,5,5], [1,1,1,1], [x,0,3,3] były tylko dwa liniowo niezależne? Jeżeli jest, to ją wyznacz. Jeżeli nie, to uzasadnij, dlaczego nie ma.
Możesz przekopiować (na przykład do Wolframa) macierz: ((1,2,3,3), (5,6,7,7), (3,4,5,5), (1,1,1,1), (x,0,3,3))

Uzasadnij swoją odpowiedź.

Pomoc

Figure 1: Zadanie 5

Dane są wektory:

$$\vec{v_1} = (1,2,3,3),$$
$$\vec{v_2} = (5,6,7,7),$$
$$\vec{v_3} = (3,4,5,5),$$
$$\vec{v_4} = (1,1,1,1),$$
$$\vec{v_5} = (x,0,3,3).$$

Pytanie jest następujące - czy możemy dobrać taką liczbę x, by istniały tylko dwa wektory niezależne? Najpierw zadajmy pytanie, czy wektory $\vec{v}_1 - \vec{v}_4$ są liniowo niezależne. Liniowa zależność (czyli możliwość konstrukcji jednego wektora z pozostałych) jest tożsama z zerowaniem się wyznacznika macierzy, której wierszami (bądź kolumnami) są wektory. Po wpisaniu do Wolframa Alpha uzyskujemy:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Oznacza to, że wektory $\vec{v}_1 - \vec{v}_4$ są liniowo zależne, zatem istnieją co najwyżej trzy wektory liniowo niezależne wśród wektorów $\vec{v}_1 - \vec{v}_4$.

Zauważmy, że czwarta współrzędna jest we wszystkich przypadkach powieleniem trzeciej. Zatem moglibyśmy nasz przypadek zredukować do:

$$\vec{w_1} = (1,2,3),$$
$$\vec{w_2} = (5,6,7),$$
$$\vec{w_3} = (3,4,5),$$
$$\vec{w_4} = (1,1,1),$$
$$\vec{w_5} = (x,0,3).$$

Możemy zaobserwować, że wektor $\vec{w_3}$ jest sumą wektorów $\vec{w_1}$ oraz $\vec{w_2}$, podzieloną przez 2. Zatem redukujemy układ do:

$$\begin{aligned}\vec{w_1} &= (1, 2, 3),\\ \vec{w_2} &= (5, 6, 7),\\ \vec{w_4} &= (1, 1, 1),\\ \vec{w_5} &= (x, 0, 3).\end{aligned}$$

Sprawdzamy, czy układ $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_4}$ jest liniowo niezależny. Wyznacznik macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Zatem wektory są liniowo zależne. Istotnie, możemy zauważyć, że $\vec{w_1} + 4\vec{w_4} = \vec{w_2}$. Zatem zostawmy tylko wektory $\vec{w_1}$ oraz $\vec{w_4}$. Dorzućmy do nich wektor $\vec{w_5}$.

Głównym pytaniem jest, czy istnieje taka wartość x, by wektory $\vec{w_1}, \vec{w_4}, \vec{w_5}$ były liniowo zależne, tj. istniały tylko dwa liniowo niezależne. Już wiemy, że wektory będą liniowo zależne, jeśli macierz:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

Prowadzi to do równania:

$$1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot x = 0$$

$$3 + 2x - 6 - 3x = 0$$

$$-3 - x = 0$$

$$3 + x = 0$$

Zatem $x = -3$.

Zadanie 6

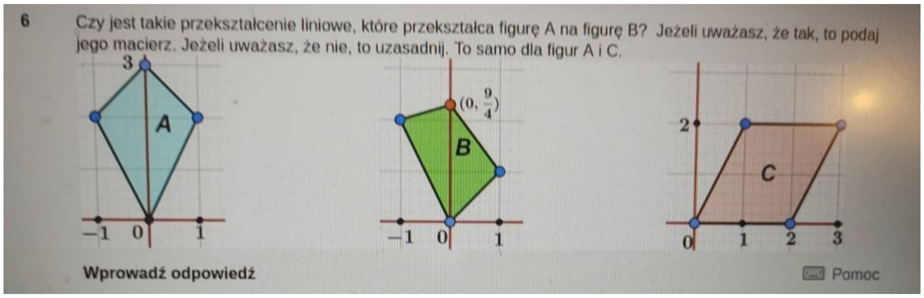


Figure 1: Zadanie 6

Pytanie sprowadza się do znalezienia przekształcenia liniowego, które zestaw punktów:

[A = (-1,2),\ B = (0,3),\ C = (1,2),]

przekształca na zestaw punktów:

[A' = (-1,2),\ B' = (0,2.25),\ C' = (1,1),]

(punkt $(0,0)$ pomijam, jako że zawsze będzie się transformował na $(0,0)$).

Poszukujemy macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, która spełnia równania:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.25 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Czyli mamy układy równań:

$$\begin{cases} -a + 2b = -1, \\ 3b = 0, \\ a + 2b = 1, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} -c + 2d = 2 \\ 3d = 2.25 \\ c + 2d = 1 \end{cases} \qquad .$$

Od razu widzimy, że wartość $b = 0$, natomiast $a = \frac{1}{2}$. Wartość $d = 0.75$, natomiast $c = -0.5$. Tak ustalone wartości spełniają równania, zatem macierz przekształcenia to:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Zatem figura A może zostać przekształcona do figury A' za pomocą przekształcenia liniowego.

Drugi przypadek

W drugim przypadku poszukujemy kolejnego przekształcenia liniowego transformującego punkty:

[A = (-1,2),\ B = (0,3),\ C = (1,2),]

na:

[A" = (1,2),\ B" = (3,2),\ C" = (2,0).]

Ponownie, poszukujemy macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, która spełnia równania:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Czyli mamy układy równań:

$$\begin{cases} -a + 2b = 1, \\ 3b = 3, \\ a + 2b = 2, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} -c + 2d = 2 \\ 3d = 2 \\ c + 2d = 0 \end{cases} .$$

Od razu widzimy, że wartość $b = 1$. Prowadzi to jednak do sprzeczności:

$$\begin{cases} -a+2=1, \\ 3=3, \\ a+2=2, \end{cases}$$

czyli $a = 0 = 1$, co jest sprzeczne. Zatem nie istnieje macierz przekształcenia, która spełniałaby równania. Zatem figura A nie może zostać przekształcona do figury A'' za pomocą przekształcenia liniowego.