Wykład 3

Twierdzenie 3.1 *Zbiór rozwiązań układu równań liniowych nad ciałem K jest podprzestrzenią K^n wtedy i tylko wtedy gdy układ jest jednorodny.*

Twierdzenie 3.2 *Jeżeli $W_i, i \in I$ jest zbiorem podprzestrzeni to $\bigcap\limits_{i \in I} W_i$ też jest podprzestrzenią.*

Definicja 3.3 *Niech X będzie podzbiorem przestrzeni V zaś $T = \{W \mid W$ jest podprzestrzenią V zawierającą $X\}$. Symbolem*

$$\mathrm{lin}(X) = \bigcap_{t \in T} W_t$$

oznaczać będziemy podprzestrzeń rozpiętą przez zbiór X.

Definicja 3.4 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $B \subset V$ nazywamy bazą przestrzenią V jeżeli jest minimalnym podzbiorem rozpinającym V. To znaczy:*
1) $\mathrm{lin}\, B = V$.
2) $\forall_{\alpha \in B}\ \mathrm{lin}\,(B \setminus \{\alpha\}) \neq V$.

Definicja 3.5 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in V$. Kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o współczynnikach $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ nazywamy wektor $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$.*

Twierdzenie 3.6 *Podprzestrzeń $\mathrm{lin}(X)$ jest zbiorem kombinacji liniowych wektorów z X lub $\mathrm{lin}(X) = \{\theta\}$ gdy $X = \emptyset$.*

Definicja 3.7 *Niech V przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $X \subset V$ nazywamy liniowo niezależnym jeżeli dla każdego ciągu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ różnych wektorów z X jedynym rozwiązaniem równania $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \theta$ jest $x_1 = 0 = x_2 = ... = x_n$.*

Uwaga. Jeżeli $X = \emptyset$ to X jest liniowo niezależny i $\mathrm{lin}\, X = \{\theta\}$.

Twierdzenie 3.8 *Niech B będzie uporządkowanym podzbiorem przestrzeni liniowej V. Wówczas równoważne są warunki:*
1) B jest bazą.
2) B jest zbiorem liniowo niezależnym rozpinającym V.
3) B jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym w V.
4) Każdy wektor z V można jednoznacznie zapisać jako kombinację liniową wektorów z B.

Przykład 3.9 *Bazą przestrzeni K^n nad K jest zbiór:*
$B = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$. *Baza ta zwana jest bazą standardową.*

Przykład 3.10 *Szukamy bazy W przestrzeni rozwiązań układu równań:*

$$U = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} .$$

Budujemy macierz układu i sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej.
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$
Parametrami są zmienne x_3 i x_4. Wracamy do układu $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$.
i wyliczamy $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 5x_4 \\ x_2 = -x_3 + 3x_4 \end{cases}$ ..

Zatem każde rozwiązanie ma postać: $(2x_3 - 5x_4, -x_3 + 3x_4, x_3, x_4) = (2x_3, -x_3+, x_3, 0) + (-5x_4, +3x_4, 0, x_4) = x_3(2, -1, 1, 0) + x_4(-5, 3, 0, 1)$.

Bazą jest zbiór $B = \{(2, -1, 1, 0), (-5, 3, 0, 1)\}$. *Uzasadnienie: Każde rozwiązanie jest kombinacją liniową wektorów z B i zbiór B jest liniowo niezależny.*

Uwaga Powyższy algorytm zawsze daje bazę przestrzeni rozwiązań.

Twierdzenie 3.11 *Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ będzie skończonym zbiorem zaś K ciałem. Wówczas jedną z baz przestrzeni V wszystkich funkcji z w K jest zbiór $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, gdzie e_j jest funkcją określoną wzorem:*

$$e_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Wniosek 3.12 *Bazą przestrzeni macierzy K_t^n nad K jest zbiór*
$B = \{e_{i,j} \mid i = 1, 2, \ldots, t,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, *gdzie $e_{i,j}$ jest macierzą mającą same zera z wyjątkiem jedynki w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Elementy tej bazy nazywamy jedynkami macierzowymi.*

Twierdzenie 3.13 *Każda przestrzeń ma bazę.*

Lemat 3.14 (Steinitza) *Niech $B = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ będzie ciągiem liniowo niezależnym. Wówczas:*

1) $t \leq n$.

2) Ciąg $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ można uzupełnić do n-elementowej bazy przestrzeni V pewnymi wektorami z B.

Twierdzenie 3.15 *Dowolne dwie bazy przestrzeni V są równoliczne.*

Definicja 3.16 *Wymiarem przestrzeni V nad K nazywamy moc dowolnej bazy i oznaczamy* $\dim_K V$ *lub* $\dim V$.

Lemat 3.17

Niech $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni V. Niech $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ będzie ciągiem powstałym z $\mathscr{A}$ przez operacje elementarne. Wówczas:

1) $\operatorname{lin} \mathscr{A} = lin \mathscr{B}$.

2) Ciąg $\mathscr{A}$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ ciąg $\mathscr{B}$ jest liniowo niezależny,

3) Ciąg $\mathscr{A}$ jest bazą V $\Leftrightarrow$ ciąg $\mathscr{B}$ jest bazą V.

Lemat 3.18

Niech $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni K^t. Zapisujemy te wektory w postaci macierzy $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. *Jeżeli macierz M jest w postaci schodkowej to niezerowe wektory z ciągu $\mathscr{A}$ tworzą zbiór liniowo niezależny.*

Algorytm szukania bazy przestrzeni $\operatorname{lin} \mathscr{A}$.

1) Zapisujemy ciąg $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ w postaci macierzy M.

2) Operacjami elementarnymi sprowadzamy M do postaci schodkowej.

3) Niezerowe wiersze otrzymanej macierzy tworzą bazę $\operatorname{lin} \mathscr{A}$.

Przekształcenia liniowe.

Definicja 3.19 *Niech V i W będą przestrzeniami nad tym samym ciałem K. Przekształcenie $f : V \to W$ nazywamy liniowym jeżeli zachowuje działania. To znaczy:*

1) $f(\theta_V) = \theta_W$.

2) $\forall_{\alpha,\beta \in V}\ f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.

3) $\forall_{\alpha \in V}\ \forall_{r \in K}\ \ f(r\alpha) = rf(\alpha)$.

Twierdzenie 3.20 *Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem przestrzeni liniowych nad tym samym ciałem K. Wówczas równoważne są warunki:*

1) f jest przekształceniem liniowym.

2) f zachowuje kombinacje liniowe.

3) $\forall_{\alpha,\beta \in V}\ \forall_{r,s \in K}\ \ f(r\alpha + s\beta) = rf(\alpha) + sf(\beta)$.