Modele sieciowe

Siecią (przepływową) nazywamy graf skierowany $G(V,E)$, w którym każdy łuk $(u,v)\in E$ ma nieujemną ***przepustowość*** $c_{uv}\geq 0$. (jeżeli $(u,v)\notin E$, to przyjmujemy $c_{uv}=0$).

W sieci wyróżniamy dwa wierzchołki: ***źródło*** s i ***ujście*** t.

Przepływem o ***wartości*** F ze źródła s do ujścia t nazywamy dowolną funkcję f: $E\rightarrow R^+$ spełniającą następujące warunki.

- $$\sum_{z\in V} f(v,z) - \sum_{u\in V} f(u,v) = \begin{cases} F & dla \quad v=s \\ 0 & dla \quad v\in V-\{s,t\} \\ -F & dla \quad v=t \end{cases}$$
- $0\leq f(u,v)\leq c_{uv}$ dla każdego $(u,v)\in V$

Podstawowe modele sieciowe

• problem maksymalnego przepływu

Należy znaleźć przepływ o maksymalnej wartości ze źródła *s* do ujścia *u*.

• problem najtańszego przepływu

Dane są koszty jednostkowe przepływów w łukach. Należy znaleźć przepływ o zadanej wartości ze źródła *s* do ujścia *u* i minimalnym sumarycznym koszcie.

Właściwości modeli sieciowych

- dobrze modelują wiele rzeczywistych problemów decyzyjnych
- istnieją bardzo efektywne (wielomianowe) algorytmy rozwiązywania
- jeżeli parametry (dane liczbowe) charakteryzujące sieć są całkowitoliczbowe, to istnieją rozwiązania całkowitoliczbowe
- są szczególnym przypadkiem Zadań Programowania Liniowego

Schemat algorytmu ścieżek powiększających Forda-Fulkersona dla problemu maksymalnego przepływu

(*w nawiasach modyfikacje dla problemu najtańszego przepływu*)

1. Startujemy z przepływu dopuszczalnego np. zerowego
2. Budujemy graf użytecznych łuków dla aktualnego przepływu *f* (*koszty łuków przeciwnych ujemne)*
3. Znajdujemy dowolną (*najtańszą*) ścieżkę powiększającą łączącą *s* z *t*.
4. Zwiększamy przepływ wzdłuż ścieżki powiększającej, tak aby
    - nie przekroczyć przepustowości ścieżki
    - (*sumaryczny przepływ nie był większy od zadanej wartości przepływu*)
5. Aktualizujemy przepływ i wracamy do p. 2.

Koniec algorytmu

- nie ma ścieżek powiększających od *s* do *t*
- (*osiągamy zadaną wartość przepływu*)

Przekroje w sieciach

Niech S i $T=V\text{-}S$ będzie dowolnym podziałem zbioru wierzchołków sieci $G(V,E)$ takim, że $s\in S$ i $t\in T$.
Zbiór łuków (u,v) takich, że $u\in S$ i $v\in T$ nazywamy ***przekrojem*** i oznaczamy (S,T).

Przepustowość przekroju c(S,T)

$$c(S,T)=\sum_{(u,v)\in(S,T)} c(u,v)$$

Tw.1 Wartość dowolnego przepływu w sieci nie jest większa niż przepustowość dowolnego przekroju.

Tw.2 Wartość maksymalnego przepływu w sieci G jest równa przepustowości minimalnego przekroju w sieci G.

Zapis problemów sieciowych w postaci Zadań Programowania Liniowego

zmienne decyzyjne – przepływy $f_{u,v}$ w poszczególnych łukach
ograniczenia – bilans przepływu w wierzchołkach sieci

• problem maksymalnego przepływu

$$\max F$$

$$\sum_{z \in V} f_{sz} - F = 0$$

$$\sum_{z \in V} f_{vz} - \sum_{u \in V} f_{uv} = 0 \qquad v \neq s, v \neq t$$

$$0 \leq f_{uv} \leq c_{uv} \qquad (u,v) \in E$$

• problem najtańszego przepływu

$$\min \sum_{(u,v) \in E} d_{uv} f_{uv}$$

$$\sum_{z \in V} f_{sz} = F$$

$$\sum_{z \in V} f_{vz} - \sum_{u \in V} f_{uv} = 0 \qquad v \neq s, v \neq t$$

$$0 \leq f_{uv} \leq c_{uv} \qquad (u,v) \in E$$

Przykładowe klasy zadań, które można sformułować w postaci modeli sieciowych

- zadania transportowe
- zadania przydziału
- zadania znajdowania najkrótszej ścieżki