Zadania przygotowawcze 2

Zadanie 1 *Niech V i W będą zbiorami rozwiązań następujących układów równań:*

$$V: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad W: \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Znajdź bazy przestrzeni V, W, $V \cap W$ i $V + W$.

Rozwiązanie:

V) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Parametrami są x_2 i x_4.

Rozwiązanie ogólne: $(2x_2 + x_4, x_2, x_4, x_4) = x_2(2,1,0,0) + x_4(1,0,1,1)$

Odp. Bazą V jest zbiór $\{(2,1,0,0),(1,0,1,1)\}$

W) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{21}{10} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix}$

Parametrami są x_3 i x_4.

Rozwiązanie ogólne:

$(-\frac{21}{10}x_3 + x_4, \frac{3}{10}x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_3(-\frac{21}{10}, \frac{3}{10}, 1, 0) + x_4(1,-1,0,1)$

Odp. Bazą V jest zbiór $\{(-\frac{21}{10}, \frac{3}{10}, 1, 0), (1,-1,0,1)\}$.

$V \cap W$) Przestrzeń $V \cap W$ jest opisana wszystkimi 4 równaniami co daje macierz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Stąd $V \cap W = \{(0,0,0,0)\}$

Odp. Bazą jest zbiór pusty $\emptyset$.

Ponieważ $V \cap W = \{(0,0,0,0)\}$ więc $V + W = R^4$ i bazą tej przestrzeni jest np. baza standardowa $\{e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,0)\,, e_2 = (0,0,1,0,0)\,, e_4 = (0,0,0,1)\}$

□

Zadanie 2 *Zbadaj, czy wektory* $(2,0,3,1,1)\,,(1,-2,1,2,1)\,,(3,8,0,1,-2)\,,(3,3,2,2,0)$ *są liniowo niezależne.*

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie: $x_1\,(2,0,3,1,1) + x_2\,(1,-2,1,2,1) + x_3\,(3,8,0,1,-2) + x_4\,(3,3,2,2,0) = \theta$ o macierzy

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ Stosując operacje elementarne otrzymujemy kolejno:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -15 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -22 & -11 \\ 0 & 1 & -15 & -7 \\ 0 & 0 & 26 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Przyjmując wartość parametru $x_3 = 1$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

i $(2,0,3,1,1) + (1,-2,1,2,1) + (3,8,0,1,-2) - 2\,(3,3,2,2,0) = \theta$

Odp. Wektory te są liniowo zależne.

□

Zadanie 3 *Znajdź bazę przestrzeni* $V = Lin\left\{(2,3,1), (1,-2,2), (3,8,0)\right\}$

Rozwiązanie:

Układamy wektory w macierz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ i sprowadzamy do postaci schodkowej :

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 14 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Odp. Bazą jest zbiór $\{(1,-2,2), (0,7,3)\}$.

Zadanie 4 *Oblicz następujące iloczyny macierzy:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Odp. a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 13 & 17 & 12 \\ -1 & -6 & -7 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 5 *Znajdź wszystkie macierze o współczynnikach rzeczywistych spełniających równanie:*

$$X \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy $X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a^2+bc=4 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=6 \\ bc+d^2=0 \end{cases} \text{stąd } b=0 \text{ i}$$

$$\begin{cases} a^2=4 \\ ca+dc=6 \\ d^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=2 \\ b=0 \\ c_1=3 \\ d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=-2 \\ b=0 \\ c_1=-3 \\ d=0 \end{cases}$$

Odp. $X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

□

Zadanie 6 *Znajdź wszystkie macierze o współczynnikach rzeczywistych spełniających równanie:*

$$X \cdot X = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odp. $X_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 7 *Oblicz następujące wyznaczniki:*

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \; d) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 3 & 7 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Odp. a) -2, b) -1.

$$\text{c)} \begin{array}{c} \begin{matrix} & -2I & & -2I \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

d) -60.

□

Zadanie 8 *Znajdź macierz odwrotną do:*

$$a) \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2III \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3I \\ -2I \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -III \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3II \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +III \\ (-1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

odp. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$\square$

Zadanie 9 *Stosując metodę Cramera rozwiąż następujące układy równań:*

a) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Rozwiązanie:

a) $W = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$ więc $x_1 = \frac{-6}{-3} = 2$

$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ więc $x_2 = \frac{3}{-3} = -1$

$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ więc $x_3 = \frac{-3}{-3} = 1$

b) $\{x_3 = 1, x_2 = -2, x_1 = 3\}$.

$\square$

Zadanie 10 *Stosując metodę Cramera policz zmienną* x_2

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=5 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+3x_4=4 \\ 4x_1+4x_2+4x_3+4x_4=2 \\ 5x_1+7x_2+6x_3+5x_4=3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$W=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}=16,\ W_1=32,\ W_2=-16,\ W_3=40,\ W_4=-48,$$

Odp. $\left\{x_1=2, x_2=-1, x_3=\frac{5}{2}, x_4=-3\right\}$

$\square$

Zadanie 11 *Znajdź wzór analityczny i macierz w bazie standardowej przekształcenia* $\phi: R^2 \to R^2$,

które jest rzutem na prostą $Lin\{(1,-4)\}$ *wzdłuż prostej* $Lin\{(2,-5)\}$.

Rozwiązanie:

$\phi(1,-4)=(1,-4)$
$\phi(2,-5)=(0,0)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

Odp. $M(\phi)=\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$, $\phi(x,y)=(-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y, \frac{20}{3}x+\frac{8}{3}y)$.

$\square$

Zadanie 12 *Niech* $\phi : R^3 \to R^3$ *będzie określone macierzą* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

a) Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ.
b) Zapisz macierz przekształcenia ϕ *w znalezionej bazie.*

Rozwiązanie:
Liczymy wielomian charakterystyczny:
$\begin{vmatrix} 2-x & 2 & 5 \\ 1 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x)\begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (5-x)(x^2-5x+4) =$
$(5-x)(x-1)(x-4)$.

Dla każdej z wartości własnych 1,4,5 szukamy wektora własnego rozwiązując układy jednorodne o macierzach $\begin{bmatrix} 2-1 & 2 & 5 \\ 1 & 3-1 & 2 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 & 5 \\ 1 & 3-4 & 2 \\ 0 & 0 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 2 & 5 \\ 1 & 3-5 & 2 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla $x = 1$ wektorem własnym jest np.$(-2,1,0)$, dla $x = 4$ wektorem własnym jest np.$(1,1,0)$ i dla $x = 5$ wektorem własnym jest np.$(14,11,7)$.

W bazie $((-2,1,0),(1,1,0),(14,11,4))$ macierzą ϕ jest $M(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

□

Zadanie 13 *Niech* $\phi : R^3 \to R^3$ *będzie określone macierzą* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Znajdź taką bazę B *przestrzeni* R^3, *w której macierzą* ϕ *jest* $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Odp. Np. $((5,1,-1),(1,1,0),(-2,1,0))$.