ZBIORY Z POWTÓRZENIAMI

W ***zbiorze z powtórzeniami*** ten sam element może występować kilkakrotnie.
Liczbę wystąpień nazywamy ***krotnością*** tego elementu w zbiorze

$X = \{ x_1, ..., x_n \}$	-	zbiór
$k_1, ..., k_n$	-	krotności elementów
$A = < k_1{*}x_1, ..., k_n{*}x_n >$	-	zbiór z powtórzeniami

Przykład zbioru z powtórzeniami

$X = \{ a, b, c \}$ $\quad k_a = 2, \quad k_b = 1, \quad k_c = 3$

Zbiór z powtórzeniami: $\quad A = < 2{*}a, 1{*}b, 3{*}c > = < a, a, b, c, c, c >$

Liczność zbioru z powtórzeniami:

$$| A | = k_1 + ... + k_n$$

Podzbiór zbioru z powtórzeniami jest wyznaczany przez wektor n-elementowy $(m_1, ..., m_n)$, w którym

$$0 \le m_1 \le k_1, \qquad . . . , \qquad 0 \le m_n \le k_n$$

Liczba podzbiorów zbioru z powtórzeniami o krotnościach
$k_1, k_2,..., k_n$ jest równa

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_n + 1)$$

Twierdzenie

Liczba k-elementowych podzbiorów zbioru z powtórzeniami
$< k{*}x_1, ..., k{*}x_n >$ jest równa

$$\frac{[n]^k}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Dowód

Rozważmy rozmieszczenie uporządkowane k obiektów w n pudełkach. Liczba takich rozmieszczeń jest równa
$[n]^k = n \cdot (n + 1) \cdot ... \cdot (n + k - 1)$.
Każde takie rozmieszczenie wyznacza wektor n-elementowy $(r_1, ..., r_n)$, dla którego zachodzi $r_1 + ... + r_n = k$;
r_i jest liczbą obiektów w pudełku i.
Wektor $(r_1, ..., r_n)$ odpowiada k-elementowemu podzbiorowi $< r_1{*}x_1, ..., r_n{*}x_n > \subseteq < k{*}x_1, ..., k{*}x_n >$
Ponadto $k!$ rozmieszczeń wyznacza ten sam podzbiór k-elementowy, a zatem liczba różnych podzbiorów k-elementowych zbioru z powtórzeniami o wszystkich krotnościach równych k wynosi

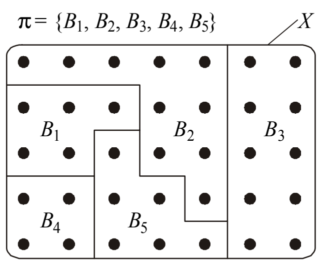
$$\frac{[n]^k}{k!} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot ... \cdot (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

■

PODZIAŁY ZBIORU

Podziałem zbioru n-elementowego X na k bloków nazywamy dowolną rodzinę zbiorów $\pi = \{ B_1, ..., B_k \}$,
taką że $\quad B_1 \cup ... \cup B_k = X, \; B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $1 \le i \le j \le k$ oraz $B_i \ne \emptyset$, $1 \le i \le k$

$B_1, ..., B_k$	-	bloki podziału π
$\Pi_k(X)$	-	zbiór wszystkich podziałów zbioru X na k bloków
$\Pi(X)$	-	zbiór wszystkich podziałów zbioru X; $\quad \Pi(X) = \Pi_1(X) \cup ... \cup \Pi_n(X)$



Przykład zbioru podziałów

$X = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad k = 3$

$\Pi_3(X)$:

$\pi^1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c, d\} \}$ $\qquad \pi^2 = \{ \{a\}, \{b, \mathrm{c}\}, \{d\} \}$

$\pi^3 = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\} \}$ $\qquad \pi^4 = \{ \{a, c\}, \{b\}, \{d\} \}$

$\pi^5 = \{ \{a\}, \{b, d\}, \{c\} \}$ $\qquad \pi^6 = \{ \{a, d\}, \{b\}, \{c\} \}$

ZWIĄZKI POMIĘDZY PODZIAŁAMI ZBIORU I RELACJAMI

- każdemu podziałowi $\pi \in \Pi(X)$ można przyporządkować relację równoważności $E(\pi)$ na zbiorze X, definiując ją jako

$$E(\pi) = \bigcup_{B\in\pi} B \times B$$

tzn. dwa elementy $x, y \in X$ są w relacji $E(\pi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego bloku podziału.

Przykład relacji definiowanej podziałem

$X = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad \pi^5 = \{ \{a\}, \{b, d\}, \{c\} \}$

$$E(\pi^5) = \{ \underbrace{(a, a)}_{\{a\}\times\{a\}}, \underbrace{(b, b), (b, d), (d, b), (d, d)}_{\{b, d\}\times\{b, d\}}, \underbrace{(c, c)}_{\{c\}\times\{c\}} \}$$

- każdej relacji równoważności E na zbiorze X można przyporządkować podział zbioru X na bloki, definiując go jako

$$X|E = \{ x|E : x \in X \} ,$$

gdzie pojedynczy blok $x|E = \{ y \in \mathrm{X} : xEy \}$ nazywany jest ***klasą abstrakcji*** elementu x

Przykład podziału na klasy abstrakcji

$X =$ $\qquad xEy \Leftrightarrow x + y$ jest liczbą parzystą

podział $\qquad |E = \{ 1|E, 2|E \}$

$1|E = \{ y \in \ : y$ jest nieparzysta $\}$, $\ 2|E = \{ y \in \ : y$ jest parzysta $\}$

- w zbiorze wszystkich podziałów zbioru $\Pi(X)$ można wprowadzić relację porządkującą:

rozważmy dwa podziały $\pi, \sigma \in \Pi(X)$;
mówimy, że podział π jest ***rozdrobnieniem*** podziału σ, jeśli każdy blok B podziału σ jest sumą mnogościową pewnej liczby bloków podziału π ;
zapisujemy ten fakt w postaci $\qquad \pi \le \sigma$
Powyższa relacja $\le$ jest relacją porządku na zbiorze $\Pi(X)$!

Przykład relacji pomiędzy podziałami zbioru na bloki

$X = \{ a, b, c, d, e \}$

$$\{ \{a, c\}, \{b\}, \{d\}, \{e\} \} \le \{ \{a, b, c\}, \{d, e\} \}$$

Ile jest podziałów zbioru n-elementowego na k bloków?

Przykład

$X = \{ a, b, c, d \}$ $\qquad | X | = 4$ $\qquad k = 3$

$\Pi_3(X) = \{ \pi^1, \pi^2, ..., \pi^6 \}$ $\qquad | \Pi_3(X) | = 6$

LICZBY STIRLINGA (drugiego rodzaju)

$S(n, k) = | \Pi_k(X) |$ $\quad$ dla $| X | = n$
$S(n, k) = 0$ $\quad$ dla $k > n$
dodatkowo przyjmujemy, że $\mathrm{S}(0, 0) = 1$

Wyznaczanie liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$S(n, n) = 1 \qquad \text{dla } n \ge 0$$
$$S(n, 0) = 0 \qquad \text{dla } n > 0$$

Twierdzenie

$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k\, S(n-1, k)$ dla $0 < k < n$

Dowód

Rozważmy zbiór wszystkich podziałów zbioru $X = \{ 1, 2, ..., n \}$ na k bloków. Dla dowolnego podziału $\pi \in \Pi_k(X)$ zachodzi jeden z dwóch przypadków: π zawiera blok jednoelementowy $\{n\}$ albo n jest elementem bloku co najmniej dwuelementowego

Liczba podziałów w $\Pi_k(X)$, dla których zachodzi przypadek pierwszy, jest równa liczbie podziałów zbioru $n-1$ elementowego na $k-1$ bloków, czyli wynosi $S(n-1, k-1)$.

Liczba podziałów, dla których zachodzi przypadek drugi, jest równa $k\, S(n-1, k)$, ponieważ podziały te otrzymujemy z podziałów zbioru $\{ 1, 2, ..., n-1 \}$ na k bloków poprzez dodawanie elementu n kolejno do każdego z bloków takiego podziału.

Oba przypadki są rozłączne, a zatem

$$| \Pi_k(X) | = S(n-1, k-1) + k\, S(n-1, k) \qquad \blacksquare$$

Ile jest wszystkich podziałów zbioru n-elementowego?

$$B_n = |\Pi(X)| \text{ dla } |X| = n\ ; \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\ ; \qquad B_n \text{ - } \textbf{liczba Bella}$$

Tablica liczb Stirlinga drugiego rodzaju i liczb Bella:

	B_n	$S(n, k)$										
		$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
$n = 0$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	15	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0
5	52	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0
6	203	0	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0
7	877	0	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0
8	4140	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0
9	21147	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0
10	115975	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1
...						...						

Tożsamości dla liczb Stirlinga i Bella: $S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1)$ dla $k \geq 2$; $\quad B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$

Związek pomiędzy liczbami Stirlinga drugiego rodzaju i funkcjami z X <u>na</u> Y

Ile jest funkcji ze zbioru n-elementowego X <u>na</u> zbiór k-elementowy Y?

Przyjmijmy oznaczenie:

$s_{n,k}$ - liczba funkcji z X na Y dla $|X| = n, |Y| = k$

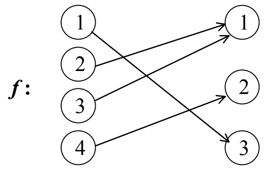
- każdej funkcji $f: X \xrightarrow{na} Y$ można przyporządkować podział zbioru X na k bloków, definiując go jako
$$N(f) = \{ f^{-1}(\{y\}) : y \in Y \}$$
- każdemu podziałowi $\pi \in \Pi_k(X)$ odpowiada dokładnie $\boldsymbol{k\,!}$ funkcji z X na Y, dla których $N(f) = \pi$. Każda z tych funkcji przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie blokom podziału π elementy zbioru Y

$$\Downarrow$$

$$s_{n,k} = k\,!\; S(n, k)$$

Przykład

$n = 4$, $k = 3$, $\Pi_3(X) \ni \pi = N(f) = \{ \{1\}, \{2, 3\}, \{4\} \}$

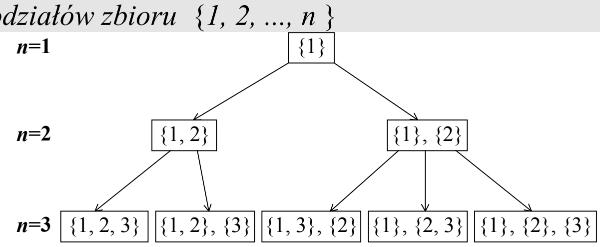


GENEROWANIE PODZIAŁÓW ZBIORU (n-elementowego)

Jeśli mamy podział $\sigma = \{ B_1, ..., B_k \}$ dla zbioru $\{ 1, ..., n-1 \}$,
to możemy utworzyć $k+1$ podziałów zbioru $X = \{ 1, ..., n \}$:

$B_1 \cup \{n\}, B_2, \quad ..., \quad B_k$
$B_1, \quad B_2 \cup \{n\}, ..., \quad B_k$
. . .
$B_1, \quad B_2, \quad ..., \quad B_k \cup \{n\}$
$B_1, \quad B_2, \quad ..., \quad B_k, \quad \{n\}$

Przykład generowania podziałów zbioru {1, 2, ..., n }



PODZIAŁY LICZBY

$n, k \in \{ 1, 2, ... \}$

Na ile sposobów można zapisać liczbę n w postaci sumy k składników: $n = a_1 + ... + a_k$,
gdzie $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k > 0$?

Każdy taki ciąg składników $a_1, ..., a_k$ nazywamy ***podziałem liczby n na k składników***

$P(n, k)$ - liczba podziałów liczby n na k składników
$P(n)$ - liczba wszystkich podziałów liczby n

Przykład zbioru podziałów liczby 6

$n = 6$	6	$P(6,1) = 1$
	5 1	$P(6,2) = 3$
	4 2	$P(6,3) = 3$
	4 1 1	$P(6,4) = 2$
	3 3	$P(6,5) = 1$
	3 2 1	$P(6,6) = 1$
	3 1 1 1	
	2 2 2	$P(6) = 11$
	2 2 1 1	
	2 1 1 1 1	
	1 1 1 1 1 1	

Diagram Ferrersa

Dla podziału $n = a_1 + ... + a_k$ tworzymy diagram o k wierszach, który zawiera a_i punktów w i-tym wierszu

Przykład diagramu dla podziału liczby 10

10 = 5 + 3 + 2

• • • • •
• • •
• •

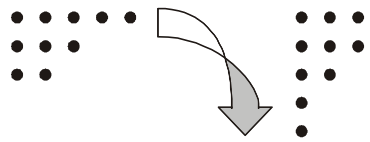
Podział sprzężony wynika z transpozycji diagramu Ferrersa

Przykład podziału sprzężonego

10 = 3 + 3 + 2 + 1 + 1

• • •
• • •
• •
•
•

10 = 5 + 3 + 2 10 = 3 + 3 + 2 + 1 + 1



Twierdzenie

Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k.

Zależność rekurencyjna dla liczby podziałów liczby *n* na *k* składników:

Przyjmujemy, że $P(0, 0) = P(0) = 1$,

a dla $n \geq k > 0$ zachodzi $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$

Tablica liczby podziałów liczby na składniki:

	$P(n)$	$P(n, k)$													
		$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$n = 0$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	5	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	7	0	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
6	11	0	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	
7	15	0	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	
8	22	0	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0	0	0	
9	30	0	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0	0	0	
10	42	0	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	0	0	
11	56	0	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1	0	
12	77	0	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1	
...								...							