3. Podstawy teorii względności

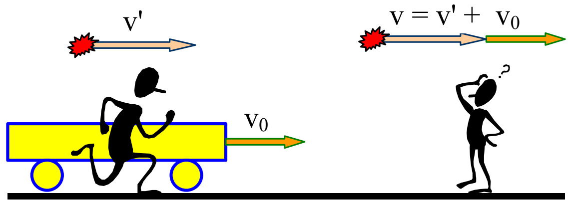
Względność praw

Prawa przyrody mają jednakową postać we wszystkich układach tzn. nie ma wyróżnionego punktu odniesienia we Wszechświecie (Ziemia porusza się w Układzie Słonecznym, który porusza się wokół centrum naszej Galaktyki, która oddala się od innych galaktyk itd.). Wyróżnienie pewnych układów wiąże się jedynie np. z tym, że pojawiają się w nich siły lub, że pewne obiekty są w nich nieruchome (np. z punktu widzenia ludzi wyróżnionym układem jest układ związany ze środkiem Ziemi, lecz prawa fizyczne obowiązujące na Ziemi są takie same na każdej innej planecie o takim samym przyspieszeniu grawitacyjnym na jej powierzchni).

Światło rozchodzi się w próżni $\Rightarrow$ nie wyróżnia żadnego układu odniesienia $\Rightarrow$ wszystkie układy dla światła są równoważne $\Rightarrow$ **prędkość światła w próżni względem każdego układu odniesienia jest taka sama**. Zostało to potwierdzone doświadczalnie: Michelson (w 1881) wykazał, że nie ma ośrodka (nazywanego eterem) koniecznego do rozchodzenia się światła i w przeciwieństwie np. do fal dźwiękowych światło propaguje się w próżni. W laboratorium CERN (w 1964) dokonano pomiaru prędkości fotonów γ emitowanych przez mezony π^o poruszające się z prędkością 0,99975c i pokazano, że bez względu na prędkość źródła światła jego prędkość jest zawsze taka sama.

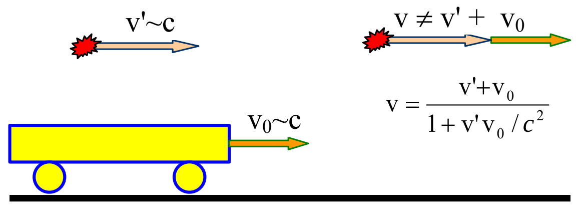
Dodawanie prędkości

Skoro prędkość światła ma taką samą wartość względem każdego obserwatora to nie obowiązuje klasyczna reguła dodawania prędkości, mówiąca, że prędkość v' mierzona przez obserwatora poruszającego się z prędkością v_0 różni się od prędkości v mierzonej przez nieruchomego obserwatora o wartość v_0: $v = v' + v_0$.



Aby prędkość światła była identyczna dla wszystkich obserwatorów prędkość względna wynosi:

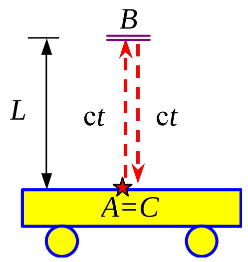
$$v = \frac{v'+v_0}{1+v'v_0/c^2}$$



i wówczas, gdy v' = c to również v = c. Natomiast, jeśli v'<c to zawsze v<c. Dla prędkości małych w porównaniu z prędkością światła $v'v_0 \ll c^2$ wzór ten staje się identyczny z klasycznym. W ogólności nie jest możliwe, aby obiekt o skończonej masie mógł osiągnąć prędkość światła w próżni c.

Dylatacja czasu

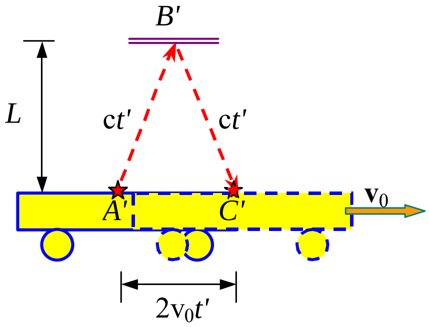
Rozpatrzmy następujący proces: światło od punktu A biegnie do punktu B na zwierciadle oddalonym o odległość L, odbija się i wraca do początkowego punktu C = A. Czas przelotu w obie strony wynosi $2t = 2L/c$.



Ten sam proces obserwowany z innego układu odniesienia wygląda inaczej. Jeśli źródło światła i zwierciadło odbijające znajdują się na wózku poruszającym się z prędkością v_0 to droga, którą przebywa światło od punktu początkowego do zwierciadła i z powrotem jest dłuższa, gdyż zanim światło dotarło do punktu początkowego wózek przejechał pewną odległość. Jednak prędkość światła jest taka sama, stąd czas na to potrzebny musi być dłuższy.

Z trójkąta prostokątnego uzyskuje się: $(ct')^2 = (v_0 t')^2 + L^2$, czyli $(c^2 - v_0^2)t'^2 = L^2$. Czas, jaki trwał ten proces:

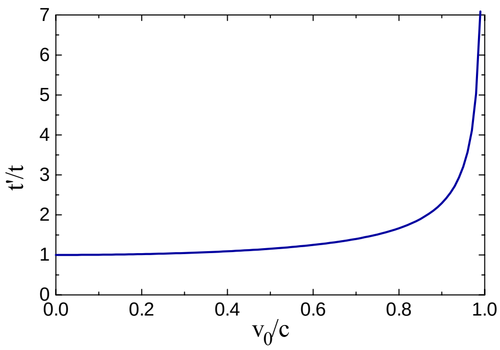
$$2t' = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} > 2t = \frac{2L}{c}.$$



Porównując czas trwania tego samego procesu mierzony względem dwóch różnych punktów odniesienia uzyskuje się, zatem:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

gdzie czas t mierzony w układzie własnym (w którym zachodzi proces), jest krótszy niż czas t' w układzie względem którego układ własny się porusza. Wydłużenie czasu spowodowane poruszaniem się układu nazywa się dylatacją.



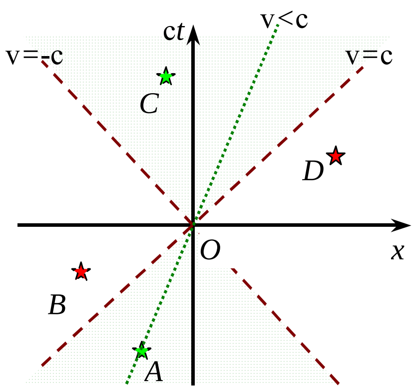
Zjawisko dylatacji staje się znaczące dopiero przy prędkościach porównywalnych z prędkością światła. Nawet, gdy $v_0 = c/2$ to wydłużenie wynosi jedynie kilkanaście procentów: $t'/t \approx 1{,}15$. Aby wydłużenie czasu było dwukrotne należy poruszać się z prędkością równą 87% prędkości światła.

Dylatacja czasu jest dobrze potwierdzona w licznych eksperymentach i tłumaczy wiele zjawisk. Min. potwierdza wydłużenie średniego czasu życia szybko poruszających się cząstek, (bo w układzie własnym cząstki, czyli takim, w którym ona jest nieruchoma, czas upływa wolniej niż w układzie laboratoryjnym, względem którego porusza się ona z dużą prędkością). Przykładowo miony mają średni czas życia $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s a docierają do powierzchni Ziemi, mimo, że są wytwarzane w górnych warstwach atmosfery (przebywają odległość rzędu 100km, czyli gdyby czas ich życia się nie wydłużył musiałyby poruszać się z prędkością przeszło 100-krotnie przewyższającą prędkość światła). Wspomniane na początku mezony π^o wykorzystane do pomiaru prędkości światła, poruszające się z prędkością 0,99975c, ulegały rozpadowi po czasie prawie 45 razy dłuższym niż mezony nieruchome.

Dylatację czasu można zmierzyć również dla małych prędkości. W 1972 roku w USA umieszczono w samolotach pasażerskich okrążających Ziemię po 4 zegary cezowe i porównano ich wskazania z zegarami pozostawionymi w laboratorium. W rzeczywistości z powodu ruchu obrotowego Ziemi, względem nieruchomego inercjalnego układu odniesienia najwolniej poruszały się zegary w samolotach lecących na zachód. Po powrocie zegary lecące na wschód były opóźnione o 60ns a lecące na zachód spieszyły się o 270ns w stosunku do zegarów laboratoryjnych. Oprócz wpływu efekt kinematyczny rzędu ±100ns na pomiar miał wpływ efekt grawitacyjny rzędu +150ns.

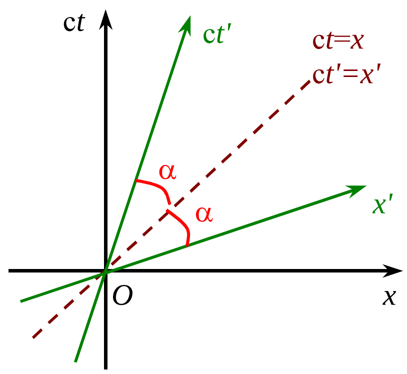
Czasoprzestrzeń

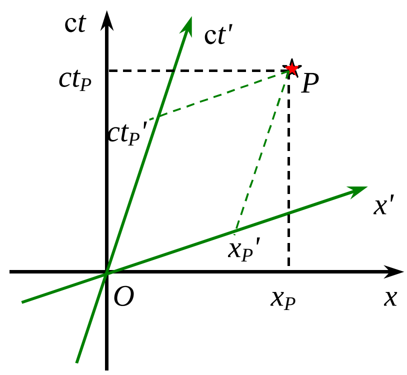
Czas w teorii względności nie jest wielkością niezależną od układu odniesienia i traktuje się go podobnie jak współrzędne położenia. Przestrzeń (trójwymiarowa) z czasem tworzy zatem czterowymiarową czasoprzestrzeń. Aby wymiar współrzędnej czasowej był taki sam jak wymiary współrzędnych przestrzennych, czas na swojej osi pomnożony jest przez prędkość światła. Wykres przedstawiający dwa wymiary (czasowy i jeden przestrzenny) przedstawiony jest obok. Punkty w czasoprzestrzeni określają zdarzenia, którym przyporządkowane jest miejsce i czas. Względem punktu O (obserwator umieszczony w początku układu współrzędnych: $x = 0$, $t = 0$) zdarzenia A i B miały miejsce w przeszłości ($t<0$) zaś zdarzenia C i D dopiero się odbędą ($t>0$). Prędkość światła jest prędkością graniczną również dla przesyłania informacji. Dlatego o zaistnienia zdarzenia można się dowiedzieć dopiero po czasie nie krótszym niż potrzebny na przebycie przez światło odległości dzielącej od zdarzenia. Informacja o zdarzeniu A mogła dotrzeć do obserwatora O nawet z prędkością mniejszą niż c (kropkowana zielona linia $v = x/t<c$). Jednak informacja o zdarzeniu B dotrze do miejsca $x = 0$ dopiero w przyszłości. Dlatego do przeszłości obserwatora O należą tylko zdarzenia wewnątrz obszaru ograniczonego liniami światła $v = c$ i $v = -c$ (obszar zaznaczony). Podobnie jest ze zdarzeniami w przyszłości: na zdarzenie C można mieć jeszcze wpływ będąc w miejscu O, podczas gdy zdarzenie D odbędzie się niezależnie od zdarzenia O. Stąd do przyszłości zdarzenia O należy tylko obszar zaznaczony (zawierający też zdarzenie C), podczas gdy pozostałe zdarzenia są niezależne od zdarzenia O.



Układ poruszającego się obserwatora

Początek układu współrzędnych przestrzennych wraz z upływem czasu przesuwa się wzdłuż osi współrzędnej czasowej (zdarzenie O określa położenie początku układu przestrzennego $x = 0$ w chwili $t = 0$). Dlatego oś czasu można traktować jako położenie w czasoprzestrzeni obserwatora znajdującego się w początku układu przestrzennego. Jeśli drugi obserwator oddala się z prędkością $v_0<c$, to jego położenie wyznacza prosta nachylona do osi ct. Prosta ta wyznacza jednocześnie oś czasu ct' dla tego drugiego obserwatora, (który znajduje się w początku swojego układu współrzędnych przestrzennych). W klasycznym podejściu oś współrzędnej przestrzennej x' drugiego obserwatora powinna pokrywać się z osią x. Jednak z warunku, że prędkość światła jest jednakowa dla wszystkich obserwatorów wynika, że linia wyznaczająca promień świetlny (określona przez $ct = x$ a dla drugiego układu $ct' = x'$) jest dwusieczną kąta pomiędzy osią czasową ct (ct') i przestrzenną x (x') w każdym układzie. W rezultacie oś x' jest nachylona symetrycznie do osi x tak jak oś ct' do osi ct.

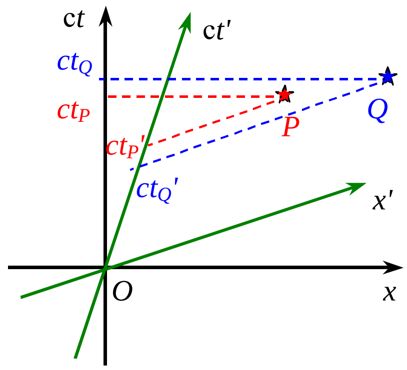




Współrzędne zdarzenia P wyznacza się w układzie poruszającym się (x',ct') tak jak w układach z nieortogonalnymi osiami.

Jednoczesność zdarzeń

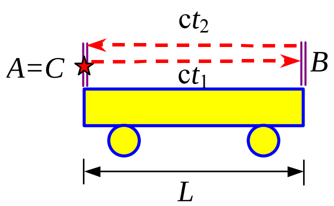
Na wykresie czasoprzestrzennym obok zaznaczone są dwa zdarzenia P i Q oraz odpowiadające im współrzędne czasowe w dwóch układach odniesienia (nieruchomym i poruszającym się). W układzie nieruchomym zdarzenie P zaszło przed zdarzeniem Q ($t_P<t_Q$) natomiast w układzie poruszającym kolejność zdarzeń była odwrotna ($t_P'>t_Q'$). Skoro kolejność tych zdarzeń jest różna dla różnych obserwatorów nie można powiedzieć w sposób bezwzględny, które z nich zaszło wcześniej. Taka niejednoznaczność dotyczy tylko zjawisk niezależnych od siebie, tzn. takich, dla których informacja pomiędzy nimi musiałaby się poruszać szybciej niż prędkość światła (odcinek je łączący leży na prostej odpowiadającej prędkości nadświetlnej). Oznacza to, że ani zdarzenie P nie może wpłynąć na przebieg zdarzenia Q ani na odwrót. Zdarzenia te są od siebie odseparowane przestrzennie.



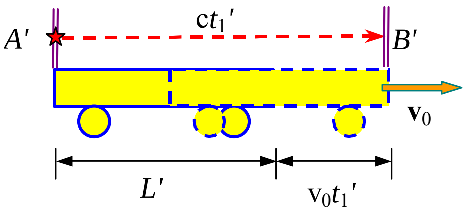
Kolejność zdarzeń nie budzi wątpliwości w momencie, gdy jedno ze zdarzeń znajduje się w obszarze przeszłości (lub przyszłości) drugiego zdarzenia (tak jak np. zdarzenia A i O lub O i C na pierwszym z wykresów czasoprzestrzeni).

Kontrakcja długości

Rozpatrzmy teraz proces, gdy światło biegnie wzdłuż wózka o długości L. Czas t_1 przelotu do przodu (od A do B) jest równy czasu powrotu t_2 (od B do C) a czas przelotu w obie strony wynosi $t = t_1 + t_2 = 2L/c$. Dla tego samego procesu obserwowanego w układzie, względem którego wózek się porusza z prędkością v_0, światło biegnąc do przodu (od A' do B') przebywa dłuższą drogę niż biegnąc z powrotem (od B' do C'). Odległości te wynoszą odpowiednio:



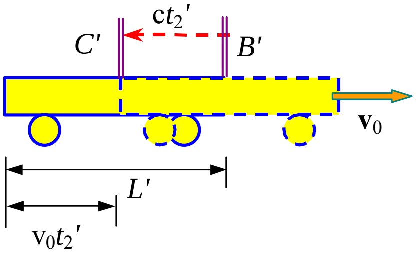
$ct_1' = L' + v_0 t_1'$, oraz $ct_2' = L' - v_0 t_2'$, a związane z tym czasy:



$$t_1' = \frac{L'}{c - v_0}, \text{ oraz } t_2' = \frac{L'}{c + v_0}.$$

Całkowity czas przelotu w obie strony wynosi w rezultacie:

$$t' = t_1' + t_2' = \frac{2L'c}{(c - v_0)(c + v_0)} = \frac{2L'}{c\left(1 - v_0^2/c^2\right)}.$$



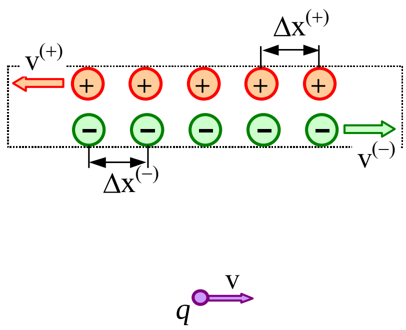
Jednocześnie zgodnie ze zjawiskiem dylatacji pomiędzy czasami t i t' zachodzi związek

$t = t'\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$, który może być spełniony jedynie wtedy, gdy długość wózka w układzie poruszającym się L' jest mniejsza niż w układzie nieruchomym (własnym) L:

$$L' = L\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \le L.$$

Skrócenie wymiarów podłużnych nazywane jest kontrakcją długości.

Relatywistyczna kontrakcja długości między innymi tłumaczy powstawanie pola magnetycznego. W układzie nieruchomych ładunków istnieje tylko pole elektryczne a pole magnetyczne wytwarzane jest przez poruszające się ładunki. Ruch ładunków tworzy prąd



elektryczny, który obrazowo przedstawiony jest na rysunku obok jako strumień ładunków dodatnich i ujemnych. Jeśli ładunki dodatnie i ujemne się równoważą (jest ich tyle samo i poruszają się z jednakowymi prędkościami w przeciwnych kierunkach), to nie ma pola elektrycznego. Dlatego, gdy ładunek q jest nieruchomy (v = 0), to nie działa na niego żadna siła. Jednak, gdy ładunek q zaczyna się poruszać równolegle do kierunku prądu z prędkością v, to w jego układzie własnym prędkość ładunków dodatnich jest inna niż prędkość ładunków ujemnych. W rezultacie relatywistycznego skrócenia odległości między ładunkami $\Delta x^{(+)}$ i $\Delta x^{(-)}$ stają się różne (bo różne są prędkości), co powoduje że liczba ładunków dodatnich na jednostkę długości jest inna niż ładunków ujemnych. Oznacza to, że wypadkowa różnica gęstości ładunków jest różna od zera (ładunki przestają się równoważyć) i istnieje pole elektryczne oddziałujące na ładunek q. Pojawienie się siły działającej na poruszający się ładunek wiąże się z istnieniem pola magnetycznego, które jak widać można sprowadzić do relatywistycznej transformacji pola elektrycznego. Mimo, że relatywistyczny efekt od pojedynczego ładunku jest bardzo mały, to duża liczba poruszających się ładunków daje znaczącą wartość pola magnetycznego. Osobne traktowanie pól elektrycznego i magnetycznego wynika jedynie z prostoty matematycznej.

<u>Pęd i siła</u>

Zasada zachowania pędu powinna być spełniona w każdym inercjalnym układzie odniesienia. Ponieważ nie obowiązuje klasyczne dodawanie prędkości, pęd zdefiniowany jako $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ nie spełnia tego warunku. Dlatego relatywistycznie pęd ma inną postać:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}}$$

i w rezultacie jego wartość rośnie do nieskończoności wraz ze wzrostem prędkości do prędkości światła. Czasami wielkość $m / \sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}$ nazywa się masą relatywistyczną. Definicja siły ($\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$) nie zmienia się, lecz teraz siła nie jest już iloczynem masy i przyspieszenia:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}}\right) = \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}} + m\mathbf{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}}\right).$$