2.1. Po zakończeniu sesji stwierdzono, że 60% studentów drugiego roku zdało egzamin z języka C++, natomiast 25% zdało egzamin z C++ oraz z RPS. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student, który zdał egzamin z C++, zdał również egzamin z RPS?

2.2. Okazało się, że 70% programistów pewnej firmy zna dobrze język Ruby, zaś 50% — zarówno Ruby jak i Lua. Wyznacz prawdopodobieństwo, że przypadkowo napotkany na korytarzu pracownik znający Ruby potrafiłby napisać skrypt w Lua.

2.3. Rzucamy czterema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła trójka wiedząc, iż na wszystkich kostkach wypadła inna liczba oczek.

2.4. W studenckim punkcie ksero stoją 2 kopiarki. Prawdopodobieństwo, że każda z nich jest używana wynosi 0,6. Gdy ktoś korzysta z jednego urządzenia to prawdopodobieństwo, że drugie będzie zajęte, wynosi 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kopiarka będzie wolna.

2.5. Kazik ma trzy koleżanki. U Ani bywa 10 razy w miesiącu, u Basi 15 razy w miesiącu, a u Cecylii w pozostałe dni (rzecz dzieje się w październiku). Jako że Kazik to łasuch, a każda z niewiast „cicho" zabiega o jego względy, często spotkanie kończy się sowitą wyżerką. Ania wita Kazika suto zastawionym stołem średnio 3 razy na 5 randek, Basia — 7 razy na 13, a Cecylia tylko raz na 9 spotkań.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym dniu Kazik nie wróci do domu z pustym żołądkiem?
(b) Tomek widział Kazika zataczającego się na ulicy z przejedzenia. Którą przyjaciółkę najprawdopodobniej odwiedził nasz bohater? Z jakim prawdopodobieństwem jest to Cecylia?

2.6. (PG) Wśród dziennikarzy rozgorzał spór, kto będzie ubiegał się o fotel prezydencki z ramienia partii rządzącej. Według komentatorów jest tylko trzech liczących się kandydatów, przy czym z prawdopodobieństwem 0,4 rekomendancję partii otrzyma poseł Glut, z prawdopodobieństwem 0,35 poseł Dryg oraz z prawdopodobieństwem 0,25 senator Klaps. Uważa się przy tym, iż gdyby kandydatem stronnictwa został pan Glut, to prawdopodobieństwo wygrania przezeń wyborów wynosiłoby 0,7, w przypadku rekomendowania Dryga 0,8, zaś Gluta — 0,9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kandydat wysunięty przez partię rządzącą wygra wybory?

2.7. Wytwórnia słodyczy produkuje 4 rodzaje cukierków: krówki, irysy, landryny i kukułki. Miesięczna produkcja wynosi odpowiednio 9, 6, 13 i 7 ton. Przez pomyłkę wypuszczono partię towaru, w której zamiast cukru użyto soli. Szacuje się, że prawdopodobieństwo znalezienia słonej krówki wynosi 12%, irysa — 19%, landrynki — 21% oraz kukułki — 2%. (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany cukierek będzie słony? (b) Mama kupiła synkowi cukierka w lokalnym sklepie. Okazało się, że był on słony. Z jakim prawdopodobieństwem była to kukułka?

2.8. (PG) Kanałem łączności nadaje się dwa rodzaje sygnałów: A oraz B z prawdopodobieństwami, odpowiednio, 0,6 i 0,4. Sygnały te podlegają zakłóceniom, na skutek których synał A może być odebrany jako B, sygnał B jako A, bądź też sygnał może w ogóle nie zostać odebrany. Prawdopodobieństwa zaistnienia poszczególnych sytuacji podano w poniższej tabeli. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyemitowany sygnał nie został odebrany.

		Sygnały odebrane		
		A	B	Zanik
Sygnały	A	0,7	0,2	0,1
nadane	B	0,2	0,7	0,1

2.9. Dominik umawia się dziś na randkę. Prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania z Kamilą wynosi 0,6, a z Dorotą 0,7. Zadzwonił więc do obu dziewcząt i zaproponował schadzkę pod Hotelem Giewont o godz. 17, oczywiście nie mówiąc nic o „tej drugiej". Wiedząc że, rzecz jasna, dziewczyny przychodzą niezależnie od siebie, oblicz prawdopodobieństwo, że Dominik (a) straci dwie „koleżanki", (b) spędzi miły wieczór z którąś z nich.

2.10. Borys i Sasza niezbyt często pojawiają się na zajęciach w szkole. Borys jest obecny na 60% zajęć, zaś jego koleżanka wagaruje zwykle 3 razy na 10 lekcji. Oboje można spotkać jednocześnie na 40% lekcji. Oblicz prawdopodobieństwo, że na zajęciach (a) jest choć jedno z nich, (b) jest dokładnie jedno z nich, (c) nie ma żadnego z nich. Czy „przyjście Borysa" i „przyjście Saszy" na zajęcia są zdarzeniami niezależnymi?

2.11. Czerwony Kapturek idzie do babci. Dziewczynkę po drodze mogą spotkać nieprzyjemności, na przykład czyhający w zaroślach (z prawdopodobieństwem $p_{\text{wilk}} = 0{,}3$) zły wilk albo otwarte złamanie nogi ($p_{\text{noga}} = 0{,}2$). Zdarzenia te wydarzają się niezależnie od siebie. (a.) Oblicz prawdopodobieństwo, że babunia ujrzy dziś swoją wnuczkę całą i zdrową. (b.) Jakie jest prawdopodobieństwo spełnienia się znanego powiedzenia, że nieszczęścia chodzą parami?

2.12. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. (a) Sprawdź (korzystając z definicji), czy „wylosowanie asa" i „wylosowanie karty czerwonej" (♢ lub ♡) są zdarzeniami niezależnymi. (b) Sprawdź, czy „wylosowanie karty mniejszej od 10" i „wyciągnięcie pika" (♠) są zdarzeniami niezależnymi. (c) Sprawdź, czy "wylosowanie pika (♠) i „wyciągnięcie czarnego asa" (♣ lub ♠) są zdarzeniami niezależnymi.

2.13. Wujek Karol robi dla swojej rodziny lampki choinkowe, łącząc żarówki w przedziwne układy. Żarówki przepalają się niezależnie od siebie, a prawdopodobieństwo poprawnej pracy każdej z nich przez święta wynosi p. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dzieci Karola będą mogły się cieszyć widokiem świecącej choinki? Dokonaj obliczeń dla schematów poniżej.

```
a)                    b)                      c)
                            /--p--\                      /--p--\
-----p---p-----       ------+     +------       -----p---+     +---p-----
                            \--p--/                      \--p--/
```

2.14. Załóżmy, że wujek Karol kupił żarówki o 3 typach sprawności: a, b, c. Prawdopodobieństwa popsucia się każdej z nich wynoszą odpowiednio 0,1, 0,2 i 0,3. Czy pod koniec świąt będzie panował w domu błogi klimat?

```
a)                      b)                       c)
                              /--c--\
           /--c--\            |     |                   /--b--b--b--\
-----a--b--+     +---   ------+--a--+--a--        ---a--+           +------
           \--c--/            |     |                   \---c---c---/
                              \--b--/
```

```
d)                                               e)
               /--------b--------------\                 /--a--b--\
           ----+                       +----             |        |
               |     /--b--\  /--b--\  |            --b--+--c-----+--a--
               \--a--+     +--+     +--/                 |        |
                     \--b--/  \--a--/                    \--b-----/
```

2.15. Zdzisiek strzela „w dziesiątkę” o każdej porze dnia i nocy z prawdopodobieństwem 1/3. Romek założył się z nim, że co jak co, ale dziś nie uda mu się trafić ani razu w 3 strzałach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Roman ma rację?

2.16. Bolek spieszy się na zajęcia z RPS. Jeżeli po drodze będą korki, to na pewno się spóźni. Z prawdopodobieństwem 10% utknie na ul. Powązkowskiej, z prawdopodobieństwem 15% w al. Prymasa Tysiąclecia (budowa węzła A2), a na ul. Kasprzaka — 5%. Załóżmy, że korki powstają niezależnie od siebie. Jaką ma szansę dojechać na czas?

2.17. W małym schronisku znajduje się 10 psów, 6 kotów, 3 tchórzofretki i 1 pawian. Zwierzęta od czasu do czasu podejmują próby ucieczki. Prawdopodobieństwa sukcesu „dezercji” są różne dla każdego gatunku i wynoszą odpowiednio 13%, 43%, 18% i 70%.

(a) Ze schroniska uciekło zwierzę. Oblicz prawdopodobieństwo, że był to pawian.

(b) Każdemu kotkowi przydzielona została losowo jedna z 10 klatek. Oblicz prawdopodobieństwo, że pewne dwa kotki zamieszkają razem.

(c) Pewna panienka z „dobrego” domu zażyczyła sobie 4 dowolne zwierzątka. Jej rodzice spełnili tę zachciankę (w drodze losowania) i właśnie wracają do domu ze zwierzątkami w bagażniku. Nie wiedzą jednak, że córcia wpadnie w histerię, gdy ujrzy nieparzystą liczbę piesków. Wyznacz prawdopodobieństwo, że wszyscy będą szczęśliwi.

2.18. Rozpatrzmy eksperyment w schemacie klasycznym, polegający na rzucie dwiema kostkami do gry. W każdym przypadku podaj przykłady takich dwóch zdarzeń A i B (o ile istnieją), że: (a) A i B są niezależne, (b) A i B są rozłączne, (c) A i B są niezależne oraz rozłączne, (d) $A \neq B$ oraz $\mathrm{P}(A|B) = 1$, (e) $\mathrm{P}(A|B) = 0$, (f) $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$, (g) $A \cap B = \emptyset$ oraz $\mathrm{P}(A|B) > 0$.

2.19. Określono oczekiwaną zawodność elementów elektronicznych dla różnych kategorii jakości. Klasa A dopuszcza awaryjność na poziomie 1%, B — 2,5%, C — 5% oraz D — 10%. Zakładając, że każdy z elementów psuje się niezależnie od siebie, wyznacz dla którego z poniższych układów przewidywany jest najdłuższy czas poprawnej pracy.

```
a)                              b)   /--D--\          c)
                                     |     |
    /--------D--------\              +--D--+
----+                 +----          |     |            /--C--A--\
    |     /--C--\     |         -----+--D--+-----    ---+        +--
    \--A--+     +--A--/              |     |            \--B--A--/
          \--C--/                    +--D--+
                                     |     |
                                     \--D--/
```

2.20. W pudełku roztargnionego Zenka znajduje się 6 płyt CD, 8 DVD i 2 Blu-ray. Wiadomo, że Zenek szanuje płyty w różnym stopniu. Prawdopodobieństwo, że znajdziemy zarysowany dysk CD wynosi 30%, DVD — 20% a Blu-ray — 10%.

(a) Z pudełka wyciągnęliśmy losowo płytę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona zarysowana?

(b) Okazało się, że jest ona jednak zarysowana. W jakiej technologii została ona najbardziej prawdopodobnie wyprodukowana? Jakie jest prawdopodobieństwo, że była to płyta DVD?

2.21. Egzamin z pewnego przedmiotu składa się z 3 pytań. Szanse na poprawne odpowiedzenie na poszczególne pytania wynoszą $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$. Zaliczenie bądź niezaliczenie jednego pytania nie wpływa na wynik innego. Wykładowca wstawia pozytywną ocenę z egzaminu, jeżeli student odpowie poprawnie na choć jedno pytanie. Oblicz prawdopodobieństwo zdania egzaminu.

2.22. 25% kobiet i 70% mężczyzn popiera obecną politykę rządu wobec pewnej kontrowersyjnej sprawy. Przeprowadzono ankietę, w której wzięło udział 700 kobiet i 500 mężczyzn. Wylosowano osobę, która, jak się okazało, nie popiera owej polityki. Wyznacz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

2.23. (Ash, 1970) Two coins are available, one unbiased (*„sprawiedliwa"*) and the other two-headed (*posiadająca z dwóch stron orły*). Choose a coin at random and toss it once; assume that the unbiased coin is chosen with probability 3/4. Given that the result is heads, find the probability that the two-headed coin was chosen.

2.24. 78% kobiet oraz 56% mężczyzn spośród kapituły Orderu Uśmiechu popiera kandydaturę Pana Kleksa do otrzymania nagrody. Rada składa się z 21 kobiet i 39 mężczyzn. (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba popiera Pana Kleksa? (b) Losowo wybrana osoba popiera Pana Kleksa. Określ prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

2.25. W pewnej grze przygodowej bohater musi przejść bezpiecznie przez system komnat. Startuje z pomieszczenia A, a kończy w G. Komnata A połączona jest z B. Z B można dojść do C i D. Z C do E i F. Do komnaty G przychodzi się z E, F bądź D. Prawdopodobieństwo, że bohater wpadnie pułapkę w komnacie A wynosi 10%, w B 5%, w C 3%, w D 30%, w E 10%, w F 15% oraz w G 5%. Jakie jest prawdopodobieństwo zwycięstwa?

Wskazówka do zadania 2.19. W tym zadaniu należy wyznaczyć prawdopodobieństwa poprawnej pracy wszystkich przedstawionych układów i wybrać ten, który cechuje się największą niezawodnością.

Dla ułatwienia rozwiążemy przypadek (a).

Oznaczmy poszczególne elementy układu (a) w następujący sposób:

```
a)       /---------D1---------\
     ----+                    +----
         |      /--C1--\      |
         \--A1--+      +--A2--/
                \--C2--/
```

Mamy do czynienia z 5 elementami elektronicznymi; każdy z osobna może w danej chwili albo funkcjonować poprawnie (oznaczmy ten stan przez T) albo być uszkodzony (ozn. N). Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zatem, opisujący stany wszystkich elementów na raz — czyli układu jako całości, może być zdefiniowany jako

$$\Omega = \{(A1, A2, C1, C2, D1),\ A1, A2, C1, C2, D1 \in \{T, N\}\} = \{T, N\}^5.$$

Mamy $|\Omega| = 2^5 = 32$. Teraz $(\Omega, 2^\Omega, \mathrm{P})$ — przestrzeń probabilistyczna modelująca rozpatrywane zagadnienie.

Niech $S_{A1} = \{\omega \in \Omega :$ element A1 działa prawidłowo$\} = \{(T, A2, C1, C2, D1),\ A2, C1, C2, D1 \in \{T, N\}\}$. Podobnie definiujemy zdarzenia $S_{A2}, S_{C1}, S_{C2}, S_{D1}$. Z treści zadania wynika, iż $\mathrm{P}(S_{A1}) = \mathrm{P}(S_{A2}) = 0{,}99$, $\mathrm{P}(S_{C1}) = \mathrm{P}(S_{C2}) = 0{,}95$, $\mathrm{P}(S_{D1}) = 0{,}90$, oraz że zdarzenia $S_{A1}, S_{A2}, S_{C1}, S_{C2}, S_{D1}$ są niezależne.

Oznaczmy przez U zdarzenie $\{\omega \in \Omega :$ układ (a) jako całość działa prawidłowo$\}$. Mamy:

$$S_U = S_{D1} \cup [S_{A1} \cap (S_{C1} \cup S_{C2}) \cap S_{A2}]\,.$$

Dla ułatwienia obliczeń pogrupujmy pewne elementy w jednostki „wyższego rzędu”. Niech $S_X = S_{C1} \cup S_{C2}$ oraz niech $S_Y = S_{A1} \cap (S_{C1} \cup S_{C2}) \cap S_{A2} = S_{A1} \cap S_X \cap S_{A2}$, czyli $S_U = S_{D1} \cup S_Y$. Nasz układ może być zatem przedstawiony w formie

```
         /---------D1---------\
     ----+                    +----
         \----------Y---------/
```

bądź

```
         /---------D1---------\
     ----+                    +----
         |                    |
         \--A1-----X------A2--/
```

Zdarzenia S_{D1}, S_Y oraz $S_{D1}, S_{A1}, S_X, S_{A2}$ są oczywiście niezależne.

Elementy C1 i C2 działają w tzw. połączeniu równoległym. Mamy:

$$\mathrm{P}(S_X) = \mathrm{P}(S_{C1} \cup S_{C2}) = \mathrm{P}(S_{C1}) + \mathrm{P}(S_{C2}) - \mathrm{P}(S_{C1} \cap S_{C2}).$$

S_{C1}, S_{C2} są zdarzeniami niezależnymi, więc $\mathrm{P}(S_{C1} \cap S_{C2}) = \mathrm{P}(S_{C1}) \cdot \mathrm{P}(S_{C2})$, czyli $\mathrm{P}(S_X) = 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975$.

Elementy A1,X i A2 działają w tzw. połączeniu szeregowym (element X jest „wirtualny”). Mamy (z niezależności zdarzeń):

$$\mathrm{P}(S_Y) = \mathrm{P}(S_{A1} \cap S_X \cap S_{A2}) = \mathrm{P}(S_{A1}) \cdot \mathrm{P}(S_X) \cdot \mathrm{P}(S_{A2}) = 0{,}99 \cdot 0{,}9975 \cdot 0{,}99 = 0{,}97764975 \simeq 0{,}9776.$$

I ostatecznie możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania układu (a) jako całości:

$$\mathrm{P}(S_U) = \mathrm{P}(S_{D1} \cup S_Y) \simeq 0{,}9978.$$

Odpowiedź do zadania 2.23. $\frac{2}{5}$.