Ewa Figielska – Badania operacyjne ćwiczenia

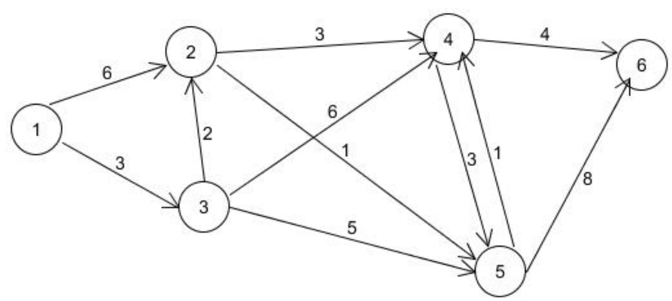
Modele sieci przepływowych

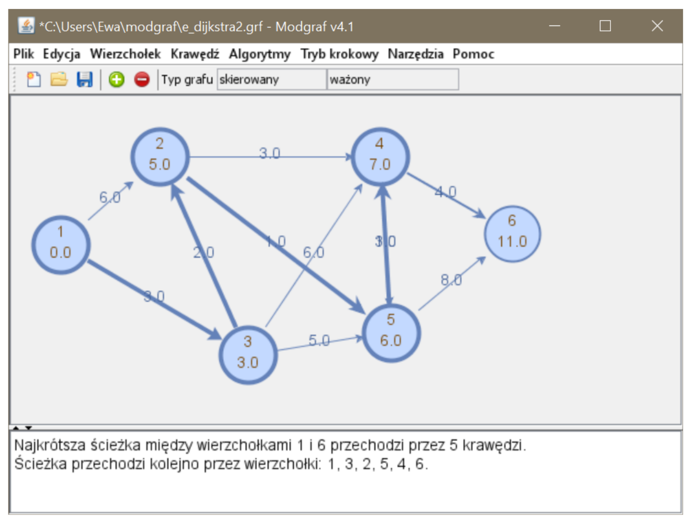
Zadanie 1. Znajdowanie najkrótszej drogi w grafie skierowanym ważonym.

Algorytm Dijkstry

V – zbiór wierzchołków
$a[u,v]$ – długość łuku (u,v)
s – ustalony wierzchołek początkowy
$g[v]$ – długość najkrótszej drogi z wierzchołka początkowego s do wierzchołka v

begin
  for $v \in V$ **do** $g[v] := \infty$;
  $g[s] := 0$;
  while V$\neq$ 0 **do begin**
    wybierz wierzchołek $u \in V$, dla którego $g[u]$ ma najmniejszą wartość.
    $V := V \setminus \{u\}$;
    for $v \in V$ **do** $g[v] := min\{g[v],\ g[u] + a[u,v]\}$;
  end;
end.





Zadanie 2. Zagadnienie maksymalnego przydziału

Danych jest 4 pracowników i 4 prace. Należy przydzielić pracowników do prac tak, aby:

- każdy pracownik wykonywał co najwyżej jedną pracę;
- każda praca była wykonywana przez co najwyżej jednego pracownika;
- liczba wykonanych prac była jak największa;

Możliwe przydziały pracowników do prac (uwarunkowane kwalifikacjami pracowników) przedstawia poniższa tabela:

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">prace</td></tr>
<tr><td rowspan="5">pracownicy</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
</table>

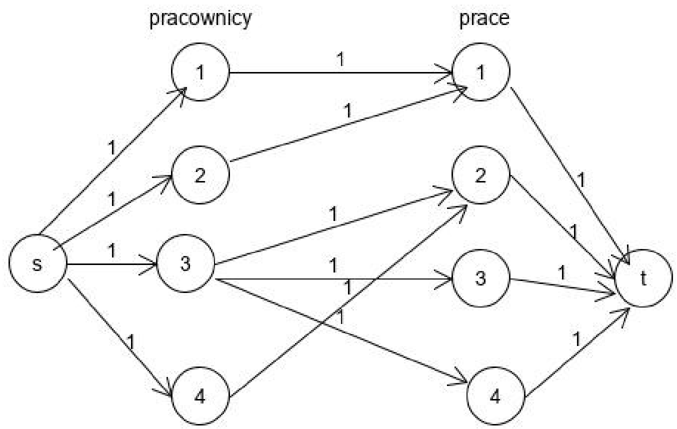
Dane

Możliwe przydziały pracowników do prac

		prace			
pracownicy		1	2	3	4
	1	x			
	2	x			
	3		x	x	x
	4		x		

Model sieciowy zadania

Szukamy maksymalnego przepływu w poniższej sieci:



gdzie wierzchołki s, t oznaczają odpowiednio źródło i ujście, wartości na łukach są to górne przepustowości tych łuków.

Model w postaci zadania programowania liniowego

F – funkcja celu – przepływ w sieci,

f_{vw} – zmienna - przepływ między wierzchołkiem v i w; f_{vw} jest równy 1, gdy pracownik v jest przydzielony do pracy w, 0 w p.p.

$\max F = f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + f_{4t}$

$f_{11} = f_{s1}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracownika 1

$f_{21} = f_{s2}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracownika 2

$f_{32} + f_{33} + f_{34} = f_{s3}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracownika 3

$f_{42} = f_{s4}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracownika 4

$f_{1t} = f_{11} + f_{21}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracę 1

$f_{2t} = f_{32} + f_{42}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracę 2

$f_{3t} = f_{33}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracę 3

$f_{4t} = f_{34}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracę 4

$0 \leq f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}, f_{s4}, f_{11}, f_{21}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, f_{42}, f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}, f_{4t} \leq 1$

Rozwiązanie optymalne: maksymalny przepływ F = 3 (da się wykonać 3 prace), możliwy przydział pracowników do prac : 1-1, 3- 3, 4-2

Zadanie 3. Zagadnienie najtańszego przydziału

Należy przydzielić 4 pracowników do 4 prac tak, aby:

- każdy pracownik wykonywał dokładnie jedną pracę;
- każda praca była wykonywana przez dokładnie jednego pracownika;
- całkowity koszt wykonania prac był jak najmniejszy;

Koszty przydziałów pracowników do prac przedstawia poniższa tabela (puste pole oznacza, że nie można przydzielić pracownika do pracy):

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">prace</td></tr>
<tr><td rowspan="5">pracownicy</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>8</td><td></td><td>5</td></tr>
</table>

W powyższym sformułowaniu zakładamy, że da się znaleźć taki przydział, w którym wszystkie prace są wykonywane (jeżeli nie, to zadanie nie ma rozwiązania).

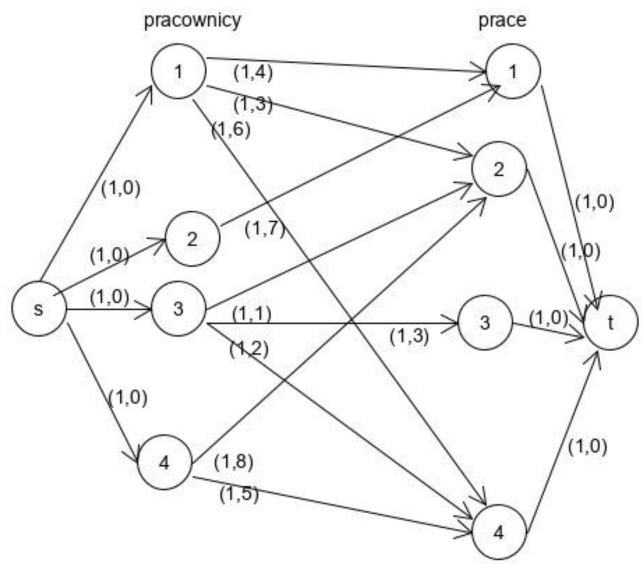
Dane

Koszty przydziałów pracowników do prac

		1	2	3	4
pracownicy	1	4	3		6
	2	7			
	3		1	3	2
	4		8		5

Model sieciowy

Szukamy najtańszego przepływu o zadanej wielkości F = 4 w poniższej sieci:



gdzie wierzchołki s, t oznaczają odpowiednio źródło i ujście, pary wartości na łukach oznaczają: górną przepustowość łuku (pierwszy składnik pary) i koszt łuku (drugi składnik pary).

Model w postaci zadania programowania liniowego

K – funkcja celu - całkowity koszt przepływu;

f_{vw} – zmienna - przepływ między wierzchołkiem v i w; f_{vw} jest równy 1, gdy pracownik v jest przydzielony do pracy w, 0 w p.p.;

F – parametr – żądana wielkość przepływu w sieci; dla podanych danych $F = 4$;

$min\ K = 4f_{11} + 3f_{12} + 6f_{14} + 7f_{21} + f_{32} + 3f_{33} + 2f_{34} + 8f_{42} + 5f_{44}$

$F \leq f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + f_{4t}$ **wymagany przepływ**

$f_{11} + f_{12} + f_{14} = f_{s1}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego pracownika 1

... bilanse przepływów dla pozostałych wierzchołków sieci reprezentujących pracowników i prace

$0 \leq f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}, f_{s4}, f_{11}, f_{21}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, f_{42}, f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}, f_{4t} \leq 1$

Zadanie 4. Zagadnienie transportowe

Danych jest 2 dostawców towaru: A i B oraz 3 odbiorców towaru: D, E i F. Możliwości dostawców wynoszą: $d_A = 6, d_B = 4$ jednostek towaru. Zapotrzebowania odbiorców wynoszą $z_D = 3, z_E = 4, z_F = 2$. Znane są jednostkowe koszty transportu po drogach łączących dostawców z odbiorcami. Transport może odbywać się z wykorzystaniem stacji pośredniej C. Należy wyznaczyć plan dostaw towaru zaspokajający zapotrzebowania odbiorców, nieprzekraczający możliwości dostawców i minimalizujący sumaryczne koszty transportu. Plan ma określać wielkości dostaw oraz trasy przejazdu.

Jednostkowe koszty transportu (puste pola oznaczają brak połączeń).

	A	B	C	D	E	F
A			3	4	8	
B			2	5		
C				2	1	3

Dane

Możliwości dostawców: $d_A = 6, d_B = 4.$

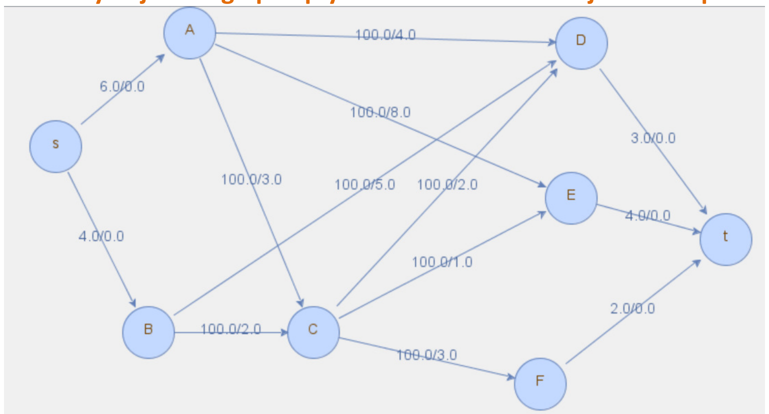
Zapotrzebowania odbiorców: $z_D = 3, z_E = 4, z_F = 2$

Jednostkowe koszty transportu

	A	B	C	D	E	F
A			3	4	8	
B			2	5		
C				2	1	3

Model sieciowy

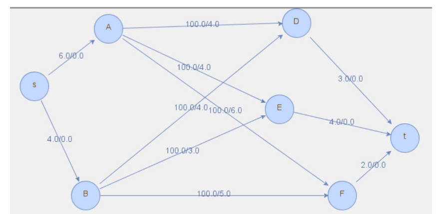
Szukamy najtańszego przepływu o wielkości równej sumie zapotrzebowań (9) wszystkich odbiorców w poniższej sieci:



gdzie wierzchołki s, t oznaczają odpowiednio źródło i ujście, pary wartości na łukach oznaczają: górną przepustowość łuku (pierwszy składnik pary) i koszt łuku (drugi składnik pary).

Najtańsze trasy przewozu towaru

	D	E	F
A	(A-D) 4	(A-C-E) 4	(A-C-F) 6
B	(B-C-D) 4	(B-C-E) 3	(B-C-F) 5



Model w postaci zadania programowania liniowego

K - funkcja celu - całkowity koszt przepływu, tzn. przesłania towaru;

f_{vw} – zmienna – przepływ między wierzchołkiem v i w; f_{vw} reprezentuje ilość (liczbę sztuk) przesyłanego towaru;

$min\ K = 4f_{AD} + 4f_{AE} + 6f_{AF} + 4f_{BD} + 3f_{BE} + 5f_{BF}$

$f_{Dt} + f_{Et} + f_{Ft} = 9$ **przepływ wpływający do ujścia t zaspokaja zapotrzebowania odbiorców (3+4+2)**

$f_{AC} + f_{AD} + f_{AE} = f_{sA}$ bilans przepływów dla wierzchołka reprezentującego dostawcę A

... bilanse przepływów dla pozostałych wierzchołków sieci reprezentujących dostawców i odbiorców

$0 \le f_{sA} \le 6$ możliwości dostawcy A

$0 \le f_{sB} \le 4$ możliwości dostawcy B

$0 \le f_{Dt} \le 3$ zapotrzebowanie odbiorcy D

$0 \le f_{Et} \le 4$ zapotrzebowanie odbiorcy E

$0 \le f_{Ft} \le 2$ zapotrzebowanie odbiorcy F

$0 \le f_{AD}, f_{AE}, f_{AF}, f_{BD}, f_{BE}, f_{BF} \le M,$ gdzie M oznacza dostatecznie dużą liczbę (uwzględniając wartości danych zadania, parametr M powinien być nie mniejszy niż 9)

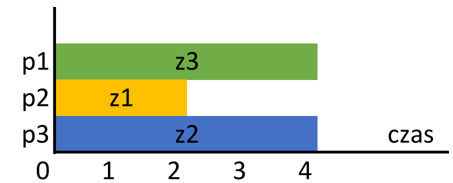
Zadanie 5. Wyznaczenie najkrótszego czasu wykonania grupy zadań

Dane są czasy wykonywania zadań na procesorach:

	z1	z2	z3
p1		1	4
p2	2		3
p3	2	4	3

Należy przydzielić zadania do procesorów tak, aby każde zadanie zostało wykonane na dokładnie jednym procesorze, każdy procesor wykonał dokładnie jedno zadanie, a czas wykonania całej grupy zadań był jak najmniejszy. Wszystkie zadania zaczynają się wykonywać w chwili 0.

Załóżmy, że mamy rozwiązanie, dla którego minimalny czas wykonania całej grupy zadań wynosi T=4: $x_{13} = 1, x_{21} = 1, x_{32} = 1$ otrzymane np. przez rozwiązanie zagadnienia maksymalnego przepływu ($x_{ij} = 1$ oznacza, że zadanie j zostało przydzielone do procesora i).

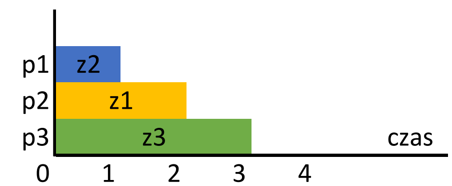


Chcemy sprawdzić, czy można wykonać całą grupę zadań w czasie krótszym, np. równym 3.
W tym celu modyfikujemy usuwamy możliwości przydziału, dla których czas wykonania jest większy niż 3:

	z1	z2	z3
p1		1	4
p2	2		3
p3	2	4	3

i rozwiązujemy zadanie maksymalnego przepływu dla zmienionych danych.

W wyniku otrzymaliśmy przydział, w którym zostaną wykonane wszystkie 3 zadania: $x_{12} = 1, x_{21} = 1, x_{33} = 1$.



Natomiast, jeżeli wymagalibyśmy, żeby czas wykonania całej grupy zadań T był nie większy niż 2, to nie da się wykonać wszystkich 3 zadań - największa możliwa liczba wykonanych zadań wyniesie 2, np. $x_{12} = 1, x_{21} = 1$.

	z1	z2	z3
p1		1	4
p2	2		3
p3	2	4	3