MATEMATYKA DYSKRETNA

Program wykładu w semestrze zimowym:

<u>KOMBINATORYKA</u>

1. Notacja i podstawowe pojęcia
2. Relacja binarna i jej własności; funkcja i jej własności
3. Zasady równoliczności, mnożenia i włączania-wyłączania
4. Zasada „szufladkowa” Dirichleta
5. Zbiory uporządkowane; zliczanie łańcuchów i antyłańcuchów
6. Zliczanie funkcji, injekcji i rozmieszczeń uporządkowanych
7. Permutacja i jej własności
8. Zliczanie i generowanie podzbiorów zbioru *n*-elementowego
9. Zliczanie w zbiorach z powtórzeniami (równania diofantyczne)
10. Metoda funkcji tworzącej
11. Zliczanie podziałów zbioru (liczby Stirlinga II rodzaju)
12. Zliczanie surjekcji
13. Zliczanie podziałów liczby
14. Wprowadzenie do ogólnej teorii zliczania

<u>Literatura:</u>

- *M.Libura, J.Sikorski* „Wykłady z matematyki dyskretnej. Cz.I: Kombinatoryka” Wydawnictwo WSISiZ (2003)
- *Z.Palka, A.Ruciński* „Wykłady z kombinatoryki” WNT (1998, 2004)
- *W.Lipski* „Kombinatoryka dla programistów” WNT (1989, 2004)
- *K.Ross, C.Wright* „Matematyka dyskretna” PWN (1996, 2003)
- *R.Graham, D.Knuth, O.Patashnik* „Matematyka konkretna” PWN (2002)

NOTACJA I POJĘCIA PODSTAWOWE

Funktory zdaniotwórcze:

$\vee$ - *lub* (alternatywa, suma logiczna)

$\wedge$ - *i* (koniunkcja, iloczyn logiczny)

$\neg$ - *nie* (negacja)

$\Rightarrow$ - *jeśli ..., to ...* (implikacja)

$\Leftrightarrow$ - *... wtedy i tylko wtedy, kiedy ...* (równoważność)

Kwantyfikatory:

$\exists$ - *istnieje* (kwantyfikator szczegółowy, egzystencjalny)

$\forall$ - *dla każdego* (kwantyfikator ogólny)

Zbiory:

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{C}$ - zespolonych,

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$ - zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{B} = \{ 0, 1\}$ - zbiór „binarny”, $\varnothing$ - zbiór pusty,

$\{ a_1, \ldots, a_n \}$ - zbiór składający się z n elementów $a_1, \ldots, a_n$

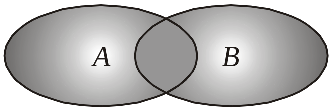
$\{ a \}$ - zbiór jednoelementowy zawierający tylko a,

$\{ x \in X : \boldsymbol{W}(x) \}$ - zbiór tych elementów zbioru X, dla których funkcja zdaniowa $\boldsymbol{W}(x)$ ma wartość „prawda”,

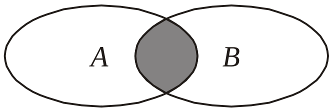
$\cup$ - suma zbiorów, $\cap$ - iloczyn zbiorów, $\setminus$ - różnica zbiorów,

$\otimes$ - różnica symetryczna zbiorów: $A \otimes B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

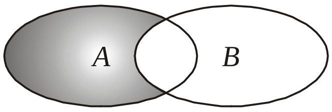
$C = A \cup B$



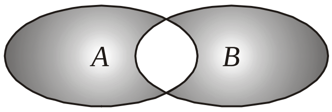
$C = A \cap B$



$C = A \setminus B$



$C = A \otimes B$



$\subseteq$ - zawieranie się zbiorów: $A \subseteq B$ (A jest zawarty w B)

$\subset$ - właściwe zawieranie się: $A \subset B$

(A jest podzbiorem właściwym zbioru B) $\forall A: A \subseteq A$, ale $A \not\subset A$

$\mathbb{P}(A)$ - zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A;

$$\forall A:\ \varnothing \subseteq A \ \Rightarrow\ \forall A:\ \varnothing \in \mathbb{P}(A) \quad \text{oraz}\ \forall A:\ A \in \mathbb{P}(A)$$

$|A|$ - liczność (moc) zbioru A, np. $|\{a_1, a_2, a_3\}| = 3$

(a, b) - para uporządkowana: a - poprzednik, b - następnik

$A \times B$ - <u>iloczyn kartezjański</u> zbiorów A i B:

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{ (a, b) :\ a \in \mathrm{A} \wedge\ b \in \mathrm{B} \}$$

$(a_1, ..., a_n)$ - n-tka uporządkowana (wektor n-elementowy)

$A_1 \times ... \times A_n$ - iloczyn kartezjański zbiorów $A_1, ..., A_n$

$$A_1 \times ... \times A_n = \{ (a_1, ..., a_n) : a_1 \in A_1 \wedge ... \wedge a_n \in A_\mathrm{n} \}$$

Funkcje i operacje:

$$\lfloor Q \rceil = \begin{cases} 1, \text{jesli zdanie Q jest prawdziwe} \\ 0, \text{jesli zdanie Q jest falszywe} \end{cases}$$ - „binarna wartość zdania”,

$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in Z : y \leq x\}$ - „podłoga”; $\lceil x \rceil = \min\{y \in Z : y \geq x\}$ - „sufit”

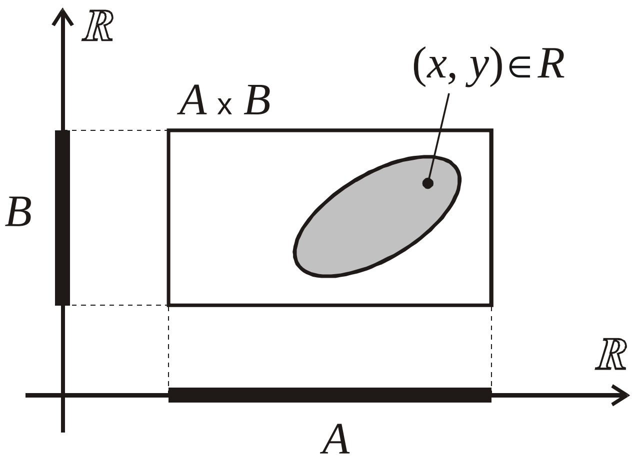
$x \bmod y = x - y \cdot \lfloor x/y \rfloor$ - „modulo”, czyli reszta z dzielenia x przez y

$\mathrm{x, y} \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{y} \neq 0$

Relacja binarna

$$R \subseteq A \times B$$

(relacja dwuczłonowa w iloczynie kartezjańskim zbiorów *A* i *B*)



Relacja binarna na zbiorze *A*: $R \subseteq A \times A$

to, że elementy *a* i *b* są w relacji, zapisujemy: $(a, b) \in R$ lub aRb

Dziedzina relacji *R* : $\{ a \in A : (\exists\, b \in B : (a, b) \in R) \}$

- zbiór poprzedników par należących do *R*

Przeciwdziedzina relacji *R* : $\{ b \in B : (\exists\, a \in A : (a, b) \in R) \}$

- zbiór następników par należących do *R*

Przykład relacji

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\} \}$

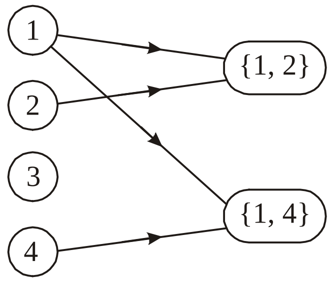
R - relacja przynależności do zbioru

$R = \{ (1, \{1, 2\}), (1, \{1, 4\}), (2, \{1, 2\}), (4, \{1, 4\}) \} \subseteq A \times B$

dziedzina relacji *R* : $\{ 1, 2, 4 \}$

przeciwdziedzina relacji *R* : $\{ \{1, 2\}, \{1, 4\} \}$

graf relacji:



tablica relacji:

	{1, 2}	{1, 4}
1	**1**	**1**
2	**1**	0
3	0	0
4	0	**1**

Relacja (binarna) R na zbiorze X jest:

- **zwrotna**, jeśli $\forall\, x \in X \;:\; xRx$
- **przechodnia**, jeśli $\forall\, x, y, z \in X \;:\; (\, xRy \wedge yRz\,) \Rightarrow xRz$
- **symetryczna**, jeśli $\forall\, x, y \in X :\; xRy \;\Rightarrow\; yRx$
- **antysymetryczna**, jeśli $\forall\, x, y \in X \;:\; (\, xRy \wedge yRx\,) \Rightarrow x = y$

Relację zwrotną, przechodnią i symetryczną

nazywamy relacją **równoważności**

typowe oznaczenie: $\approx$, np. $a \approx b$

Przykład relacji równoważności w zbiorze liczb rzeczywistych

dla $x, y \in \mathbb{R}$ relacja $x \approx y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy,

gdy $x - y \in \mathbb{Z}$ (różnica jest liczbą całkowitą)

Relację zwrotną, przechodnią i antysymetryczną

nazywamy relacją **porządkującą** zbiór X

typowe oznaczenie: $\preceq$, np. $a \preceq b$

Przykłady relacji porządkujących

- Relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{R}$: $a\boldsymbol{R}b \Leftrightarrow a$ jest podzielnikiem b
- Relacja zawierania w zbiorze $\mathbb{P}(X)$: $A\boldsymbol{R}B \Leftrightarrow A \subseteq B$

Pierwsze pytania „kombinatoryczne”:

- Ile jest relacji binarnych w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$,
  jeśli $|X| = n$ i $|Y| = m$?
- Ile jest relacji binarnych na zbiorze $|X| = n$?
- Ile jest zwrotnych relacji binarnych na zbiorze $|X| = n$?
- Ile jest (anty)symetrycznych relacji binarnych na zbiorze $|X| = n$?

<u>Funkcja</u> $\quad \boldsymbol{f : X \to Y}$

to taka relacja $R \subseteq X \times Y$, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para postaci $(x, y = f(x)) \in R$

Fun(X, Y) – zbiór wszystkich funkcji z X w Y

Dla dowolnych zbiorów $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ definiujemy:

$f(A) = \{ y \in Y : \exists\, x \in A : \ y = f(x) \}$ (**obraz** zbioru A)

$f^{-1}(B) = \{ x \in X : \ f(x) \in B \}$ (**przeciwobraz** zbioru B)

- o funkcji $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ mówimy, że jest „**na**” jeśli $f(X) = Y$
  Sur(X, Y) – zbiór wszystkich funkcji z X <u>na</u> Y (**surjekcji**)
- funkcja jest **różnowartościowa** (wzajemnie jednoznaczna), jeśli
  $\forall\, a, b \in \mathrm{X} \quad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
  Inj(X, Y) – zbiór wszystkich funkcji <u>różnowart</u>. z X w Y (**injekcji**)
  Bij(X, Y) = *Sur*$(X, Y) \cap$ *Inj*(X, Y) – zbiór wszystkich **bijekcji** z X na Y

Zasada równoliczności

$$Bij(X, Y) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad |X| = |Y|$$

Przykład zastosowania zasady

X – zbiór wszystkich rozmieszczeń n jednakowych przedmiotów w k ponumerowanych pojemnikach,

Y – zbiór wszystkich wektorów binarnych ($a_i \in \{0, 1\}$) o $n+k-1$ składowych, z których n jest równych 0

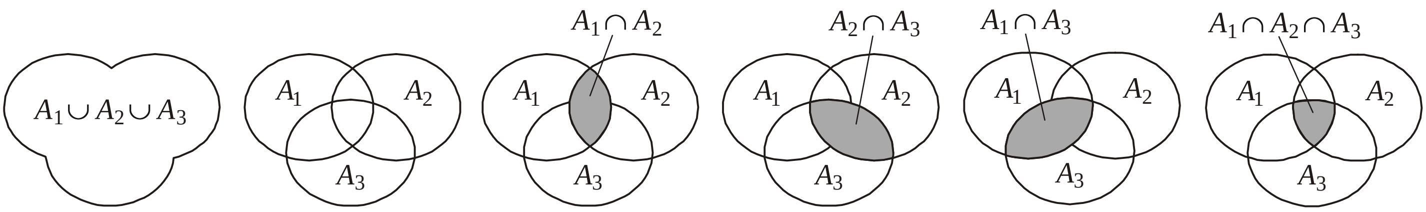
$$|X| \text{ ? } |Y|$$

Zasada włączania-wyłączania

Dla 2 zbiorów: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Dla 3 zbiorów: $|A \cup B \cup C| =$

$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



Dla n zbiorów: $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = ?$

Twierdzenie **(zasada włączania-wyłączania)**

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ...$$

$$... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

Przykłady zastosowania zasady włączania-wyłączania (prosty)

Zbadano 50 samochodów wykonując testy na poziom zawartości trzech grup zanieczyszczeń: NO_x, HC, CO;
1 samochód nie spełnia żadnej z trzech norm, 3 samochody przekroczyły poziom NO_x i HC, 2 samochody przekroczyły poziom NO_x i CO, 1 samochód przekroczył poziom HC i CO, 6 samochodów ma zbyt wysoki poziom NO_x, 4 samochody maja zbyt wysoki poziom HC a 3 samochody maja zbyt wysoki poziom CO.

Ile samochodów spełnia wszystkie testowane normy?

A – zbiór samochodów, które przekroczyły poziom NO_x ,
B – zbiór samochodów, które przekroczyły poziom HC ,
C – zbiór samochodów, które przekroczyły poziom CO ;
$|A| = 6$, $|B| = 4$, $|C| = 3$,
$|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 2$, $|B \cap C| = 1$,
$|A \cap B \cap C| = 1$
| zbiór samochodów, które nie spełniają co najmniej jednej normy| =
$|A \cup B \cup C| = 6 + 4 + 3 - 3 - 2 - 1 + 1 = 8$
| zbiór samochodów, które spełniają wszystkie normy| = 50 – 8 = 42

Zasada szufladkowa

Twierdzenie (Dirichlet)

Dla skończonych zbiorów X i Y, takich że $|X| > r \cdot |Y|$ dla $r > 0$: dla każdej funkcji $f \in Fun(X, Y)$ warunek $|f^{-1}(\{y\})| > r$ jest spełniony dla co najmniej jednego $y \in Y$.

J. Lejeune Dirichlet (1805 – 1869)

Dla $r = 1$:

jeśli chowamy do szuflad więcej przedmiotów niż mamy szuflad, to w co najmniej jednej szufladzie znajdzie się więcej niż jeden przedmiot.

Przykład zastosowania zasady szufladkowej (mało ambitny)

W aglomeracji warszawskiej mieszkają co najmniej 4 osoby o tej samej liczbie włosów na głowie.

Zliczanie funkcji

Dane są dwa zbiory X i Y o licznościach $|X| = n$ i $|Y| = m$.

$$|Fun(X, Y)| = \mathbf{?}$$

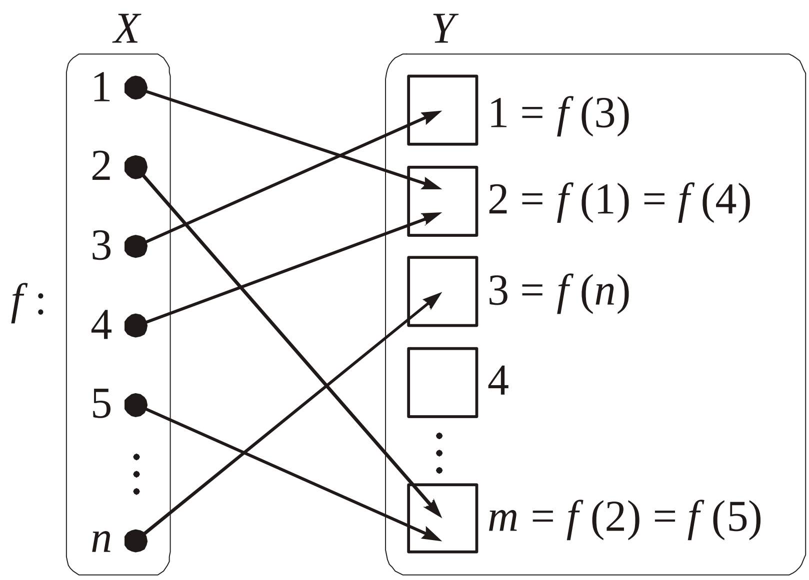
Ile jest funkcji $f : X \to Y$?

- Interpretacja

Na ile sposobów można rozmieścić ***n*** *ponumerowanych przedmiotów w* ***m*** *ponumerowanych pudełkach?*

X - zbiór przedmiotów, Y - zbiór pudełek,

każda funkcja $f : X \to Y$ określa pewne rozmieszczenie przedmiotów w pudełkach przez wskazanie dla każdego przedmiotu $x \in X$ pudełka $f(x) \in Y$, w którym ten przedmiot zostaje umieszczony



Elementy w skończonych zbiorach X i Y można ponumerować i przyjmować, że $X = \{ 1, 2, ..., n \}$ i $Y = \{1, 2, ..., m \}$

<u>Twierdzenie</u>

Jeśli $|X| = n$ i $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji $f : X \to Y$ jest równa $\boldsymbol{m^n}$; $|Fun(X, Y)| = m^n$

	m^n										
	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$m = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	
3	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	
4	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	
6	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	
7	1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	
8	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	
9	1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	
...											...

Zliczanie injekcji

Dane są dwa zbiory X i Y o licznościach $|X| = n$ i $|Y| = m$ $(n \leq m)$.

$$|Inj(X, Y)| = \mathbf{?}$$

Ile jest funkcji <u>różnowartościowych</u> $f : X \to Y$?

- Interpretacja

*Na ile sposobów można rozmieścić **n** ponumerowanych przedmiotów w **m** ponumerowanych pudełkach, tak aby w żadnym pudełku nie był więcej niż 1 przedmiot?*

Twierdzenie

Jeśli $|X| = n$, $|Y| = m$ i $n \leq m$ to liczba wszystkich funkcji różnowartościowych (injekcji) $f : X \to Y$ jest równa

$\boldsymbol{m \cdot (m - 1) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1) = m^{\underline{n}}}$; $\qquad |Inj(X, Y)| = m^{\underline{n}}$

$m^{\underline{n}}$	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$m = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	1	3	6	6	0	0	0	0	0	0	0	
4	1	4	12	24	24	0	0	0	0	0	0	
5	1	5	20	60	120	120	0	0	0	0	0	
6	1	6	30	120	360	720	720	0	0	0	0	
7	1	7	42	210	840	2520	5040	5040	0	0	0	
8	1	8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320	0	0	
9	1	9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880	0	
10	1	10	90	720	5040	30240	151200	604800	1814400	3628800	3628800	
...												...

Przyjmując formalne oznaczenie symbolu <u>potęgi ubywającej</u>:

$\boldsymbol{m^{\underline{n}} = m \cdot (m - 1)} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{(m - n + 1)}$, dookreślamy jego wartość $\boldsymbol{m^{\underline{0}} = 1}$

Jeśli $m = n$, to każda funkcja różnowartościowa $f : X \to Y$ jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru X na zbiór Y.

$$m = n \Rightarrow |Inj(X, Y)| = |Sur(X, Y)| = |Bij(X, Y)|$$

Permutacja

Permutacją zbioru X nazywamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie (bijekcję) $f : X \to X$.

$$|Bij(X, X)| = \boldsymbol{n^{\underline{n}} = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!}, \text{ dla } |X| = n$$

Twierdzenie

Liczba permutacji zbioru n-elementowego jest równa $\boldsymbol{n!}$

Zasada mnożenia

Jeżeli rozważane są funkcje $f : X \to Y$,

dla których $X = X_1 \cup X_2$ i $Y = Y_1 \cup Y_2$ oraz spełnione są warunki

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $f(X_1) \subseteq Y_1$ i $f(X_2) \subseteq Y_2$,

to $$|Fun(X, Y)| = |Fun(X_1, Y_1)| \cdot |Fun(X_2, Y_2)|$$

Jeżeli ponadto $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$,

to $$|Inj(X, Y)| = |Inj(X_1, Y_1)| \cdot |Inj(X_2, Y_2)|$$

Zliczanie rozmieszczeń uporządkowanych

- Interpretacja

Na ile sposobów można rozmieścić ***n*** *ponumerowanych przedmiotów w* ***m*** *ponumerowanych pudełkach, jeśli dodatkowo rozróżniamy uporządkowanie przedmiotów, które trafiły do tego samego pudełka? Dwa rozmieszczenia są identyczne, jeśli w każdym pudełku jest taka sama liczba i kolejność przedmiotów.*

Twierdzenie

Liczba rozmieszczeń uporządkowanych n przedmiotów

w m pudełkach jest równa $\boldsymbol{m^{\overline{n}} = m\cdot(m + 1)\cdot \ldots \cdot(m + n - 1)}$

(symbol $m^{\overline{n}}$ nazywa się potęgą przyrastającą)

	$m^{\overline{n}}$										
	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$m = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	
2	1	2	6	24	120	720	5040	40320	3628800	3628800	
3	1	3	12	60	360	2520	20160	181440	1814400	19958400	
4	1	4	20	120	840	6720	60480	604800	6652800	79833600	
5	1	5	30	210	1680	15120	151200	1663200	19958400	259459200	
6	1	6	42	336	3024	30240	332640	3991680	51891840	726485760	
7	1	7	56	504	5040	55440	665280	8648640	121080960	1816214400	
8	1	8	72	720	7920	95040	1235520	17297280	259459200	4151347200	
9	1	9	90	990	11880	154440	2162160	32432400	518918400	8821612800	
...											...

Przykład rozmieszczania uporządkowanego

$X = \{ a, b \}$, $| X | = 2,$ $| Y | = 3$

	1	2	3
1.	a b		
2.	b a		
3.	a	b	
4.	b	a	
5.	a		b
6.	b		a
7.		a	b
8.		b	a
9.		a b	
10.		b a	
11.			a b
12.			b a

$$3^{\overline{2}} = 3 \cdot 4 = 12$$