Zadania treningowe przed 1. kolokwium

Zadanie 1.

[1.1] Czy istnieje graf skierowany G, który ma cykl Eulera, ale którego graf pochodny PG nie ma cyklu Eulera?
[1.2] Niech G będzie grafem skierowanym. Wiemy, że w G istnieje cykl Eulera. Czy graf musi być silnie spójny? Jeśli musi - udowodnij to. Jeśli nie musi - podaj przykład odpowiedniego grafu.

Zadanie 2.

G = (V, E) graf nieskierowany zdefiniowany jest następująco: zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, ..., 10\}$;
zbiór krawędzi $E = \{\{i, j\};\ i = 1,..., 9;\ j = i+1\} \cup \{10, 1\} \cup \{8, 4\}$.
Czy ten graf ma drogę Eulera? Uzasadnij. Jeśli tak, to jaką długość ma ta droga?
Czy ten graf ma cykl Eulera? Uzasadnij. Jeśli nie ma cyklu Eulera, dodaj jak najmniejszą liczbę krawędzi, żeby w grafie istniał cykl Eulera.

Zadanie 3.

M - macierz sąsiedztwa grafu skierownego G. Czy G ma cykl Eulera? Czy G ma drogę Eulera?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli ma cykl (drogę) Eulera - wskaż ten cykl (drogę).
Jeśli nie ma, dodaj jak najmniej łuków,
żeby zmodyfikowany graf miał drogę (cykl) Eulera.
Uzasadnij swoją konstrukcję.

Zadanie 4.

(a) Skonstruuj graf spójny nieskierowany G o 10 wierzchołkach i 30 krawędziach.
(b) Skonstruuj graf spójny nieskierowany H o 10 wierzchołkach i 40 krawędziach.
(c) Polecenie jak w punktach (a) i (b), ale grafy mają mieć dwie składowe spójności.

Zadanie 5.

G = (V, E) graf nieskierowany; $|V|= n$, $|E|= k$;
W którym z poniższych przypadków graf G na pewno nie jest planarny. Który może być planarny?
Który musi być planarny? Podaj pełne uzasadnienie.
(a) $n = 6$ $k = 11$; (b) $n = 8$ $k = 19$.

Zadanie 6.

Wiemy, że graf nieskierowany G ma cykl Eulera. Czy jego graf krawędziowy LG musi mieć cykl Hamiltona?
Jeśli tak - uzasadnij. Jeśli nie, podaj przykład opowiedniego grafu G.

Zadanie 7.

Czy graf dwudzielny $K_{7,5}$ ma cykl Hamiltona? Przeprowadź dowód swojej odpowiedzi.

Zadanie 8.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

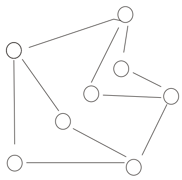
A - macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego X [B - macierz incydencji grafu Y]
Sprawdź, czy w grafie X [w grafie Y] spełnione są warunki istnienia cyklu Hamiltona.
Podaj te warunki.
(a) Warunek na liczbę krawędzi.
(b) Warunek z twierdzenia Diraca.
(c) Warunek z twierdzenia Ore'a.
(d) **C**zy sekwencja wstępująca stopni wierzchołków spełnia warunek z twierdzenia Chvatala?
(e) Czy graf X [graf Y] jest hamiltonowski? Uzasadnij. Jeśli graf ma cykl Hamiltona - wyznacz ten cykl.

Zadanie 9.

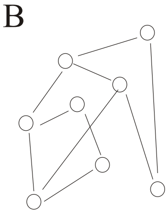
Czy graf X z zadania 8. jest dwudzielny? Uzasadnij.

Zadanie 10.
Czy graf A jest izomorficzny z grafem B? Czy graf C jest izomorficzny z grafem D?
Czy graf E jest izomorficzny z grafem F? Uzasadnij.

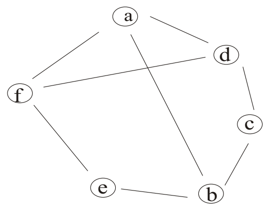
A



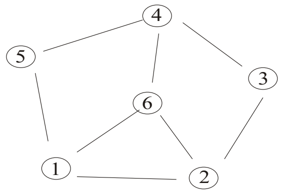
B



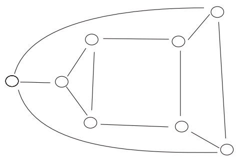
D



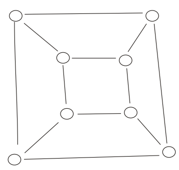
C



E



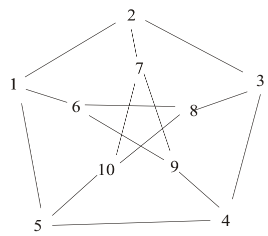
F



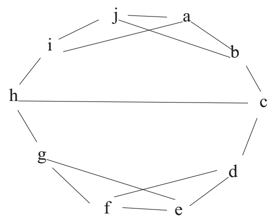
Zadanie 11.
[11.1] Czy graf K = (V, E) jest planarny?

[11.2] Czy graf L = (V', E') jest izmorficzny z grafem K?

K



L



Zadanie 12.
[1] Startując z wierzchołka 3, przeszukaj poniższy graf w głąb i narysuj uzyskane drzewo rozpinające.
Wypisz krawędzie grafu, które podczas procedury były kolejno dołączane do drzewa.
[2] Startując z wierzchołka 1, przeszukaj poniższy graf wszerz i narysuj uzyskane drzewo rozpinające.
Wypisz krawędzie grafu, które podczas procedury były kolejno dołączane do drzewa.