REPETYTORIUM Z KOMBINATORYKI

Relacja binarna

$$R \subseteq X \times Y$$

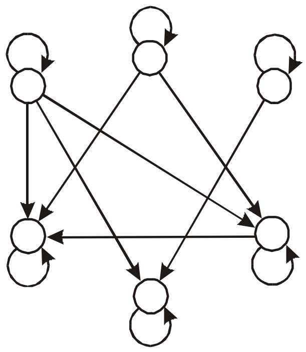
Relacja binarna w zbiorze *X*: $R \subseteq X \times X$

Może być określona za pomocą:

zdania logicznego $\quad \boldsymbol{xRy} \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lceil y \rceil,$

zbioru par uporządkowanych $\quad \{(x, y), (x, x), ...\},$

grafu relacji



tablicy relacji

	x	y	z	...
x	**1**	**0**	**1**	
y	**0**	**1**	**0**	
z	**1**	**1**	**0**	
...				

Cechy relacji binarnej w zbiorze *X*:

- **zwrotna**, jeśli $\forall\, x \in X : xRx$
- **przechodnia**, jeśli $\forall\, x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
- **symetryczna**, jeśli $\forall\, x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
- **antysymetryczna**, jeśli $\forall\, x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

Relacja **równoważności** jest zwrotna, przechodnia i symetryczna.

Relacja **porządku** jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

- Dla zbioru skończonego $|X| = n$:

liczba wszystkich relacji binarnych w *X* wynosi 2^{n^2} ,

liczba wszystkich zwrotnych relacji w *X* wynosi $2^{n(n-1)}$,

liczba wszystkich symetrycznych relacji w *X* wynosi $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

liczba wszystkich antysymetrycznych relacji w *X* wynosi $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

liczba wszystkich relacji równoważności w *X* wynosi B_n (liczby Bella),

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \;\; ; \;\; B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot B_i$$

Każdej relacji równoważności E w zbiorze X można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować **podział zbioru** X **na bloki**: $$X \vert E = \{ a \vert E : a \in X \} \;,$$ gdzie pojedynczy blok $a \vert E = \{ b \in X : aEb \}$ nazywany jest **klasą abstrakcji** elementu a.

Jeżeli *G* jest **grupą permutacji** zbioru *X*, to szczególna rolę odgrywa **relacja indukowana** w zbiorze *X* przez grupę *G* (oznaczana $\boldsymbol{R_G}$).
Relacja indukowana R_G jest relacją równoważności.
Każdą z klas abstrakcji relacji indukowanej R_G nazywamy **orbitą działania** grupy *G*. Symbol $\boldsymbol{o(G)}$ oznacza liczbę orbit.

Zbiór orbit działania jest podziałem zbioru *X* na $o(G)$ bloków. $$o(G) = \frac{1}{\vert G \vert} \sum_{p \in G} Inv(p) \;,$$ gdzie $\boldsymbol{Inv(p)}$ jest liczbą niezmienników permutacji $p \in G$.

Relacja **porządku** $\preceq$ wraz ze zbiorem , w którym została zdefiniowana tworzy zbiór uporządkowany **(X, $\preceq$)**.

Dwa elementy $x, y \in X$ nazywamy **porównywalnymi**, jeśli $x \preceq y$ lub $y \preceq x$, w przeciwnym przypadku są one **nieporównywalne**.

Jeśli każde dwa elementy $x, y \in X$ są porównywalne, to parę (X, $\preceq$) nazywamy zbiorem **liniowo uporządkowanym**.

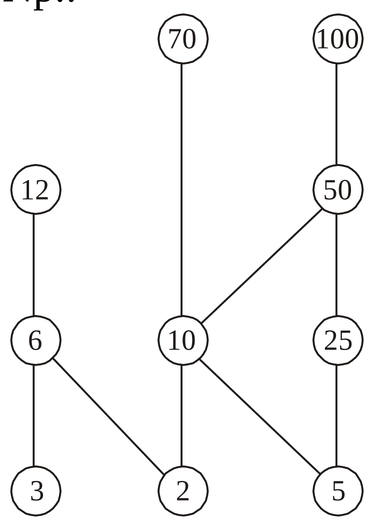
W zbiorze uporządkowanym (X, $\preceq$) wprowadzamy „ostrą” relację

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$$

Jeżeli dla dwóch elementów $s, t \in X$ zachodzi $s \prec t$ i nie istnieje taki element $u \in X$, że $s \prec u$ i $u \prec t$, to s nazywamy **bezpośrednim poprzednikiem** t, a t – **bezpośrednim następnikiem** s.

Wygodnym i czytelnym sposobem przedstawienia zbioru uporządkowanego (X, $\preceq$) jest tzw. **diagram Hassego**, na którym łączymy odcinkami tylko bezpośrednie poprzedniki z ich następnikami i następniki umieszczamy powyżej poprzedników.

Np.:



Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem maksymalnym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli w zbiorze X nie istnieje element $x \neq x_o$, dla którego $x_o \preceq x$.

Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem minimalnym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli w zbiorze X nie istnieje element $x \neq x_o$, dla którego $x \preceq x_o$.

Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem największym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi zależność $x \preceq x_o$.

Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem najmniejszym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi zależność $x_o \preceq x$.

W zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden element największy i co najwyżej jeden element najmniejszy.
Przy tym element największy jest elementem maksymalnym, a element najmniejszy jest elementem minimalnym.
Jeśli $(X, \preceq)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym oraz X jest zbiorem skończonym i niepustym, to w $(X, \preceq)$ istnieją elementy największy i najmniejszy.

Element $x_0 \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru $A \subseteq X$, jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi zależność $x_0 \preceq x$.

Element $x_0 \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru $A \subseteq X$, jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi zależność $x \preceq x_0$.

Jeśli zbiór ograniczeń górnych zbioru A ma element najmniejszy, to nazywamy go **kresem górnym** zbioru A i oznaczamy **sup** A.
Jeśli zbiór ograniczeń dolnych zbioru A ma element największy, to nazywamy go **kresem dolnym** zbioru A i oznaczamy **inf** A.
Pokryciem zbioru X nazywamy taką rodzinę jego podzbiorów $\{ Y_1, Y_2, ..., Y_k \}$ ($Y_i \subseteq X$), dla której zachodzi $X = Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_k$.
Mówimy, że rodzina $\{ Y_1, Y_2, ..., Y_k \}$ pokrywa zbiór X.
Łańcuchem z zbiorze uporządkowanym $(X, \preceq)$ nazywamy taki podzbiór $L \subseteq X$, w którym każde dwa elementy $x, y \in L$ są porównywalne, tzn. zawsze zachodzi $x \preceq y$ lub $y \preceq x$.

Antyłańcuchem z zbiorze uporządkowanym $(X, \preceq)$ nazywamy taki podzbiór $A \subseteq X$, w którym żadne dwa różne elementy $x, y \in L$ nie są porównywalne, tzn. zawsze zachodzi $x \preceq y \Leftrightarrow x = y$.

W każdym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$ maksymalna liczność antyłańcucha jest równa minimalnej liczbie łańcuchów pokrywających zbiór X, a maksymalna liczność łańcucha jest równa minimalnej liczbie antyłańcuchów pokrywających zbiór X.

Funkcja

$$\boldsymbol{f : X \to Y}$$

jest relacją binarną $f \subseteq X \times Y$ taką, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para postaci $(x, y = f(x)) \in f$

Funkcja f jest **injekcją** (funkcją różnowartościową, „1−1”), jeśli

$$\forall\, x, y \in X \quad x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y)$$

Funkcja f jest **surjekcją** (funkcją „na”), jeśli

$$\forall\, y \in Y \;\exists\, x \in X \quad f(x) = y$$

Funkcja f jest **bijekcją** , jeśli jest jednocześnie injekcją i surjekcją.

Fun(*X*, *Y*) oznacza zbiór wszystkich funkcji z *X* w *Y*,

Inj(*X*, *Y*) oznacza zbiór wszystkich injekcji z *X* w *Y*,

Sur(*X*, *Y*) oznacza zbiór wszystkich surjakcji z *X* na *Y*,

Bij(*X*, *Y*) oznacza zbiór wszystkich bijekcji z *X* w *Y*,

$$Bij(X, Y) = Sur(X, Y) \cap Inj(X, Y)$$

- Dla zbiorów skończonych $|X| = n$ i $|Y| = m$:

$$|Fun(X, Y)| = m^n$$

$$|Inj(X, Y)| = m^{\underline{n}} \text{ (dla } n \le m \text{)}$$

$$|Sur(X, Y)| = s_{n,m} = m! \cdot \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

$$|Bij(X, Y)| = n^{\underline{n}} = n!$$

<u>Zasada równoliczności</u> pozwala rozstrzygać o liczbie elementów jednego zbioru na podstawie liczby elementów drugiego po skonstruowaniu bijekcji pomiędzy tymi zbiorami.

$$\boxed{\text{Jeżeli } Bij(X, Y) \neq \varnothing \text{, to } |X| = |Y| = n}$$

Rozmieszczeniem uporządkowanym nazywamy wskazanie pewnej funkcji $f: X \to Y$ wraz z określeniem uporządkowań we wszystkich zbiorach $f^{-1}(\{y\})$ dla $y \in Y$.

Liczba wszystkich rozmieszczeń uporządkowanych wynosi $m^{\overline{n}}$.

Przy zliczaniu funkcji $f: X \to Y$ stosujemy często **zasadę mnożenia**:

jeżeli $X = X_1 \cup X_2$ i $Y = Y_1 \cup Y_2$

oraz spełnione są warunki $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $f(X_1) \subseteq Y_1$ i $f(X_2) \subseteq Y_2$,

to $$|Fun(X, Y)| = |Fun(X_1, Y_1)| \cdot |Fun(X_2, Y_2)|;$$

jeżeli ponadto $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$,

to $$|Inj(X, Y)| = |Inj(X_1, Y_1)| \cdot |Inj(X_2, Y_2)|.$$

Jeżeli na zbiorze X zdefiniowano funkcję f w zbiór Y, to obowiązuje także **zasada szufladkowa**:

jeżeli dla zbiorów X i Y zachodzi $|X| > r \cdot |Y|$ dla $r > 0$, to dla każdej funkcji $f \in Fun(X, Y)$ warunek $|f^{-1}(\{y\})| > r$ jest spełniony dla co najmniej jednego $y \in Y$.

<u>Permutacją</u> zbioru X nazywamy bijekcję $p: X \to X$

$$|Bij(X, X)| = n!$$

$\boldsymbol{S_n}$ oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, ..., n\}$.

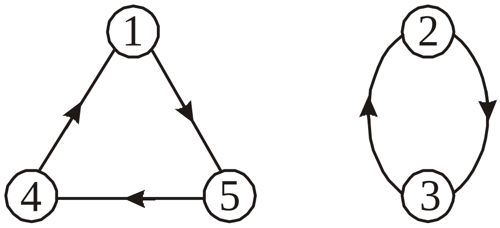
Zbiór S_n wraz z operacja składania permutacji tworzy **grupę**.

Operacja składania permutacji jest **łączna**, ale nie jest przemienna.

W zbiorze S_n istnieje element neutralny operacji składania e (permutacja **identycznościowa**) i dla każdego $p \in S_n$ istnieje element odwrotny $p^{-1} \in S_n$ (permutacja **odwrotna**).

Permutacja p może być określona za pomocą:

tablicy $$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

grafu  .

Każdą permutację $p \in S_n$ można przedstawić w postaci złożenia **rozłącznych cykli**: $p = [\,1, 5, 4\,]\,[\,2, 3\,]$

Każdą permutację $p \in S_n$ można scharakteryzować przez podanie jej **typu**: $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$, gdzie λ_i oznacza liczbę cykli o długości i.

Parę (a_i, a_j), gdzie $p(i) = a_i$ i $p(j) = a_j$ dla $i < j \le n$, nazywamy **inwersją** permutacji $p \in S_n$, jeśli $a_i > a_j$.

***I*(*p*)** oznacza liczbę wszystkich inwersji w permutacji $p \in S_n$.

Znakiem permutacji $p \in S_n$ nazywamy liczbę $\mathbf{sgn}(p) = (-1)^{I(p)}$.

Dla permutacji typu $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$ jej znak $\mathbf{sgn}(f) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_{2j}}$.

Znak cyklu o długości k jest równy $(-1)^{k-1}$.

Dla permutacji $p, s \in S_n$ zachodzi równość $\operatorname{sgn}(p\,s) = \operatorname{sgn}(p) \cdot \operatorname{sgn}(s)$.

Transpozycją nazywamy cykl o długości **2**.

Transpozycją **sąsiednią** nazywamy cykl postaci $[i, i+1]$.

Każdą permutację $p \in S_n$ można przedstawić w postaci złożenia $I(p)$ transpozycji sąsiednich, np. $p = [2, 3]\,[3, 4]\,[4, 5]\,[1, 2]$.

Każda transpozycja ma znak równy -1.

Element $i \in \{1, 2, ..., n\}$ nazywamy **niezmiennikiem** permutacji $p \in S_n$, jeśli $p(i) = i$.

***Inv*(*p*)** oznacza liczbę niezmienników permutacji p.

Nieporządkiem nazywamy taką permutację $p \in S_n$, dla której $Inv(p) = 0$.

$\boldsymbol{D_n}$ oznacza zbiór wszystkich nieporządków w zbiorze S_n.

$$\boxed{|D_n| = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}}$$

<u>**Rodzina podzbiorów**</u> zbioru X:

$$\mathbb{P}(X) = \{ Y : Y \subseteq X\}$$

Każdy podzbiór $Y \in \mathbb{P}(X)$ może być jednoznacznie określony przez swój **wektor charakterystyczny** $\xi(Y) = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \{0, 1\}^n$

według wzoru: $b_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_i \in Y \\ 0 & \text{jeśli } x_i \notin Y \end{cases}$, dla $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

$$|\mathbb{P}(X)| = 2^n$$

Wektory charakterystyczne są wygodnym narzędziem do generowania wszystkich elementów rodziny $\mathbb{P}(X)$.

<u>**Podzbiory *k*-elementowe**</u> zbioru X ($|X| = n$):

$$|\{ Y \in \mathbb{P}(X) : |Y| = k \}| = \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}, \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n, \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i = n2^{n-1},$$

Rozbiciem zbioru X na m podzbiorów o zadanych liczbach elementów $k_1, k_2, ..., k_m$ nazywamy taką rodzinę rozłącznych zbiorów $\{ X_1, X_2, ..., X_m \}$, dla której spełnione są warunki:

$X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla $1 \le i < j \le m$ i $|X_i| = k_i$.

Liczba wszystkich rozbić zbioru X wynosi:

$$\binom{n}{k_1 \quad k_2 \quad ... \quad k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$$

<u>**Zbiór z powtórzeniami**</u> $A = < k_1 * x_1, ..., k_n * x_n >$

określony jest przez podanie wektora krotności $(k_1, ..., k_n)$ dla zbioru bazowego $X = \{ x_1, ..., x_n \}$.

Liczba elementów w zbiorze z powtórzeniami A wynosi

$$| A | = k_1 + ... + k_n$$

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru z powtórzeniami A wynosi

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_n + 1)$$

Liczba k-elementowych podzbiorów zbioru z powtórzeniami $< k * x_1, ..., k * x_n >$ (szczególny przypadek $k_i = k$) wynosi

$$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Funkcja tworząca dla ciągu liczb podzbiorów k-elementowych zbioru z powtórzeniami A ma postać

$$A(x) = \sum_{k=0}^{|A|} c_k x^k = (1 + x + ... + x^{k_1}) \cdot ... \cdot (1 + x + ... + x^{k_n}) ;$$

c^k jest liczbą podzbiorów k-elementowych zbioru z powtórzeniami A.

Liczba całkowitych nieujemnych rozwiązań **liniowego równania diofantycznego** $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ dla całkowitego i nieujemnego k wynosi

$$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>**Podziałem zbioru**</u> X ($|X| = n$) na k bloków nazywamy taką rodzinę niepustych zbiorów $\pi = \{ A_1, \ldots, A_k \}$, dla której zachodzi $X = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $1 \le i < j \le k$ oraz $A_i \ne \varnothing$.

$\Pi_k(X)$ oznacza zbiór wszystkich podziałów zbioru X na k bloków.

$\Pi(X)$ oznacza zbiór wszystkich podziałów zbioru X.

$$|\,\Pi_k(X)\,| = \left\{ {n \atop k} \right\} \quad \text{(liczby Stirlinga 2 rodzaju)}$$

$$\boxed{\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \quad \text{dla } 0 < k < n}$$

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \text{ dla } n \ge 0; \qquad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, \text{ dla } n > 0$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{(m-i)^n}{(m-i)! \cdot i!}$$

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot m^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot m^{\overline{k}} \quad \text{zachodzi dla } m, n \in \mathbb{N}$$

$$|\Pi(X)| = B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \quad \text{(liczby Bella)}$$

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot B_i$$

Każdemu podziałowi $\pi \in \Pi(X)$ można jednoznacznie przyporządkować relację równoważności $E(\pi)$ w zbiorze X, definiując ją jako

$$E(\pi) = \bigcup_{A \in \pi} A \times A$$

tzn. dwa elementy $x, y \in X$ są w relacji $E(\pi)$, czyli $x\, E(\pi)\, y$ wtedy i tylko wtedy, kiedy x i y należą do tego samego bloku podziału.

Podziałem liczby n na k składników ($n, k \in \{ 1, 2, ... \}$) nazywamy taki skończony ciąg całkowity $a_1, a_2, ..., a_k$, dla którego zachodzi

$$n = a_1 + ... + a_k \text{ i } a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_k > 0$$

$P(n, k)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na k składników.

$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k)$ oznacza liczbę wszystkich podziałów liczby n.

$P^k(n)$ oznacza liczbę podziałów liczby n o największym składniku równym k.

$$P(n, k) = P^k(n)\,, \qquad \text{dla } k \le n$$

$$\boxed{P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k) \text{ dla } n \ge k > 0}$$

$$P(0, 0) = P(0) = 1$$

$$P(n, k) = \sum_{i=0}^{k} P(n-k,i) \text{ i } P_k(n) = \sum_{i=1}^{k} P(n,i) \text{ dla } n \ge k > 0$$

Zasada włączania-wyłączania to sposób wyznaczania liczby elementów w sumie mnogościowej skończonej liczby zbiorów (niekoniecznie rozłącznych):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{\{p_1, p_2, \ldots, p_i\} \subseteq \{1, \ldots, n\}} | A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_i} |$$

Funkcją tworzącą dla ciągu liczbowego $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ nazywamy szereg potęgowy $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ dla zmiennej zespolonej z.

Funkcje tworzące wybranych ciągów:

Ciąg	*Funkcja tworząca*
(1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, 0, 0, ...), $a_i = \binom{8}{i}$	$(1+z)^8$
(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, ...), $a_n = 1$ i $a_i = 0$ dla $i \neq n$	z^n
(1, 1, ..., 1, ...), $a_i = 1$ dla $i = 0, 1, ...$	$\frac{1}{1-z}$
$(c^0, c^1, c^2, ..., c^i, ...)$, $a_i = c^i$ dla $i = 0, 1, ...$	$\frac{1}{1-c \cdot z}$

Operacjom na ciągach odpowiadają operacje na funkcjach tworzących:

Operacja na ciągu	*Operacja na funkcjach tworzących*
mnożenie przez liczbę: $(a_i) \to (c \cdot a_i)$	$A(z) \to c \cdot A(z)$
dodawanie ciągów: $(a_i), (b_i) \to (a_i + b_i)$	$A(z), B(z) \to A(z) + B(z)$
przesunięcie w prawo o m pozycji: $(a_i) \to (0, ..., 0, a_0, a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ $(a_i = 0$ dla $i = 0, 1, ..., m-1)$	$A(z) \to z^m \cdot A(z)$

Za pomocą funkcji tworzącej można otrzymać nierekurencyjny wzór na kolejny wyraz **ciągu Fibonacciego**.

Wzór rekurencyjny:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} + \lfloor i = 1 \rceil \quad \text{dla} \ \ i = 0, 1, 2, 3, \ldots \ \ (F_i = 0 \ \ \text{dla} \ \ i < 0)$$

Równanie dla funkcji tworzącej:

$$F(z) = z^2 \cdot F(z) + z \cdot F(z) + z$$

Funkcja tworząca:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i$$

Wzór na kolejne wyrazy ciągu:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i \right] \ \text{dla} \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Za pomocą funkcji tworzącej można rozwiązać rekurencyjne równanie dla złożoności rekurencyjnego algorytmu dla problemu wież Hanoi.

Wzór rekurencyjny:

$$T_i = 2 \cdot T_{i-1} + 1 - \lfloor i = 0 \rceil \ \ \text{dla} \ \ i = 0, 1, 2, \ldots \ \ (T_i = 0 \ \ \text{dla} \ \ i < 0)$$

Równanie dla funkcji tworzącej:

$$T(z) = 2\, z \cdot T(z) + \frac{1}{1 - z} - 1$$

Funkcja tworząca:

$$T(z) = \frac{z}{(1 - z)(1 - 2z)}$$

Wzór na zależność liczby ruchów od liczby krążków:

$$T_i = 2^i - 1 \quad \text{dla} \ \ i = 0, 1, 2, \ldots$$