Zastosowanie algebry liniowej 2. Model Leontiewa

(materiały dla studentów WSISiZ, w ramach wykładu z algebry)

Model przepływów międzygałęziowych, input-output model,

Модель «витрати — випуск», яку також називають моделлю міжгалузевого балансу Леонтьєва,

Мадэль таксама вядомая як «выдаткі-выпуск,

Межотраслевой баланс МОБ, метод «затраты — выпуск» .

0. Wstęp. Różne gałęzie gospodarki są ze sobą związane mniej lub bardziej ściśle. Do produkcji samochodu potrzeba stali, gumy i wyrobów elektrycznych (współcześnie także elektroniki). Przemysł gumowy potrzebuje transportu (czyli samochodów) i oczywiście także elektroniki na przykład (do komputerów sterujących produkcją). Podobnie huty potrzebują i samochodów, i żarówek. Czy można te skomplikowane zależności ująć matematycznie i, co ważniejsze, **by był z tego jakiś pożytek?**

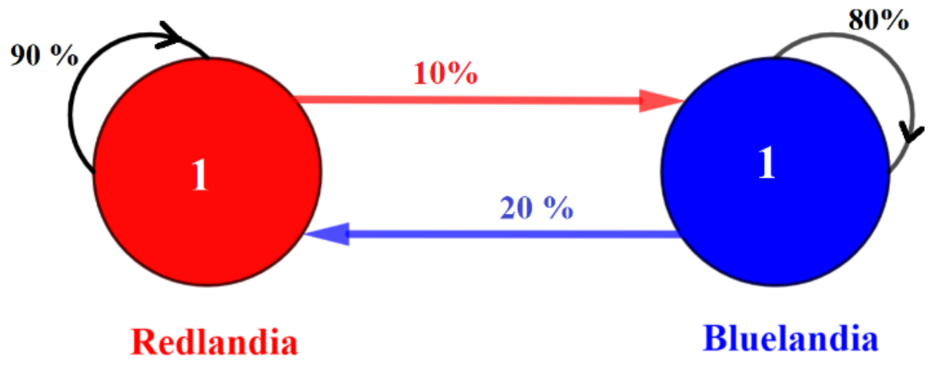
W 1973 roku nagrodę Nobla z ekonomii otrzymał Wasyli Leontieff (amerykański ekonomista rosyjskiego pochodzenia, Василий Васильевич Леонтьев, 1905 – 1999). Opracował on właśnie stosowny model przepływów międzygałęziowych (w angielskiej terminologii input-output model). Po polsku mówimy także „model nakładów i wyników". Omówię bardzo okrojoną wersję jego wersję i skupię się na matematycznych stronach zagadnienia. Model Leontiewa nabrał znaczenia dopiero po upowszechnieniu się metod komputerowych. Obliczenia, które należy wykonać, są przy użyciu tylko długopisu, są bardzo czasochłonne i żmudne – należy rozwiązać układ równań o bardzo wielu niewiadomych.

Leontieff zaczął od analizy gospodarki amerykańskiej po II wojnie światowej. Panowało przekonanie, że USA eksportują wyroby kapitałochłonne, a importują te oparte na taniej sile roboczej. Leontieff wykazał, że jest odwrotnie. W ekonometrii nazywa się to zresztą paradoksem Leontiewa. To skłoniło go do analizy bardziej skomplikowanych zależności.

Wspomnę tylko jeszcze o nagrodzie Nobla z ekonomii dla 1997 za model wyceny opcji. W uproszczeniu, *opcja kupna* jest ofertą sprzedającego, że w przyszłości sprzeda komuś swój produkt po ustalonej teraz cenie, niezależnej od przyszłych wahań giełdowych. Za taką ofertę kupujący powinien zapłacić.

Nagrodę tę, czyli 'Nobel 1997 in economics' dostali Robert Merton i Myron Scholes, a powinien ją dostać także Fisher Black, który jednak zmarł w 1995 r., a według regulaminu Nagrodę przyznaje się tylko osobom żyjącym. Wspominam o tej nagrodzie dlatego, że matematyka tam stosowana 'z bardzo wysokiej półki'. Może nawet zbyt wysokiej.

1. **Migranci.** Zacznę od lekkiej, trochę anegdotycznej wersji problemu. Otóż na Oceanie Kolorowym są dwie wyspy, Redlandia i Bluelandia. Redlandia jest bogatsza, ale brzydka. Bluelandia jest nieco biedniejsza, ale piękna krajobrazowo. Do czasu zniesienia utrudnień w podróżach na każdej z tych wysp mieszkało po 100 tysięcy ludzi. Gdy zawarto porozumienie o swobodnej wymianie, okazało się, że każdego roku 10% Redlanczyków emigruje do Bluelandii, a 20% Bluelandczyków do Redlandii. Po przybyciu na sąsiednią wyspę imigrant dostaje od razu nowe obywatelstwo. Jak będzie kształtować się populacja tych dwóch wysp w kolejnych latach?



To w miarę proste zadanie. Oznaczmy przez r i b liczbę ludności tych wysp. Warunek początkowy (czyli stan w roku zerowym w setkach tysięcy) to $r = b = 1$.

Po roku liczba ludności w Redlandii, czyli r, zmienia się na $0{,}9\, r + 0{,}2\, b$, natomiast b staje się $0{,}1\, r + 0{,}8\, b$. Oznaczmy: $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow M \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix},$$

a to znaczy, że czyli po roku liczba ludności wyniesie

$$\begin{pmatrix} 0.9\, r + 0.2\, b \\ 0.1\, r + 0.8\, b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}.$$

Sto dziesięć tysięcy w Redlandii, 90 tysięcy w Bluelandii.

W następnym roku zmieni się to na $M \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$, czyli $M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

W następnych latach będzie oczywiście $M^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i tak dalej.

Przeprowadźmy stosowne wyliczenia:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.34 \\ 0.17 & 0.66 \end{pmatrix} \qquad M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.17 \\ 0.83 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0.781 & 0.438 \\ 0.219 & 0.562 \end{pmatrix} \qquad M^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.22 \\ 0.78 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0.747 & 0.507 \\ 0.253 & 0.493 \end{pmatrix} \qquad M^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0.723 & 0.555 \\ 0.277 & 0.445 \end{pmatrix} \qquad M^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.28 \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0.706 & 0.588 \\ 0.294 & 0.412 \end{pmatrix} \qquad M^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.29 \\ 0.71 \end{pmatrix}$$

Czy proces ten się zatrzyma? Może Bluelandia się całkiem wyludni? Nie. Obliczając wektory własne macierzy *M* zobaczymy, że

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

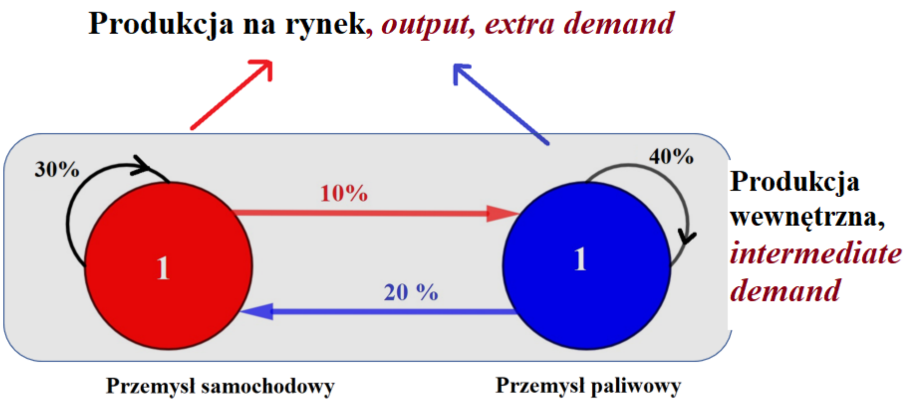
Wyznaczyliśmy stan równowagi. Jeżeli w **Redlandii** będzie $\frac{4}{3}$ ludności w stosunku do roku zerowego, (czyli 133,3 tysięcy), a w Bluelandii $\frac{2}{3}$ (67,7 tysięcy), to ustali się równowaga między emigrującymi w obu kierunkach **R** $\longrightarrow$ **B** i **B** $\longrightarrow$ **R** . Zobaczmy, już za piętnastym razem będzie prawie tak:

$$M^{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.33 \\ 0.67 \end{pmatrix}$$

No tak, ale czy za takie rachunki można było dostać nagrodę Nobla?

2. <u>Przejdźmy do gospodarki.</u> Są dwie kooperujące ze sobą firmy, **R** i **B**.

Rozpatrzmy takie dane. Na produkcję, którą daje **R**, składa się 30% produktu własnego (na przykład: przemysł samochodowy potrzebuje samochodów) i 20 % produkcji **B**. Natomiast **B** zużywa na własne potrzeby aż 40% swoich wyrobów i 10% produkcji **R** . Na przykład: przemysł paliwowy potrzebuje i paliwa, i samochodów.



Ujmę to inaczej. Przemysł samochodowy wytwarza x , z czego 0.3 x przeznacza na własne potrzeby, oraz oddaje paliwowemu 0.1 x. Paliwowy wytwarza y , z czego na własne potrzeby bierze 0.4 y, a samochodowemu daje 0.2 y .

Opisuje to tak zwana input-output matrix (wejścia-wyjścia)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.3} & \mathbf{0.2} \\ \mathbf{0.1} & \mathbf{0.4} \end{pmatrix}$$

To znaczy, że jeżeli produkcja jest $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, to na wewnętrzne potrzeby idzie $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, zatem na rynek można dać $\mathbf{X} - \boldsymbol{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$, gdzie $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Zakładamy teraz, że jest zapotrzebowanie na $\boldsymbol{r}$ od pierwszego (czerwonego) , oraz $\boldsymbol{b}$ od drugiego (niebieskiego). Wektor $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$ nazywa się wektorem *extra demand* (output, wektor zewnętrznego zapotrzebowania)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Stąd $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}$, o ile macierz ta jest odwracalna.

Przykład . Niech $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 3000 \end{pmatrix}$. To znaczy, że gospodarce potrzebne jest 7000 od **R** i 3000 od **B**.

Mamy $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$, zatem otrzymujemy

Input

$$\begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} . \{7000, 3000\}$$

Result (12000, 7000)

Sprawdźmy. **Czerwony** produkuje **12000**, z czego na własne potrzeby musi przeznaczyć 30%, czyli **3600** a **niebieski** wyciąga od **czerwonego** 20 % swojej produkcji, czyli 20% od 7000 , czyli 1400. Łącznie zatem czerwony daje „do wewnątrz" **3600 +1400** = **5000**. Na zewnątrz (extra demand) zostaje **12000 – 5000 = 7000.**

Zgadza się.

Niebieski: produkuje **70000**, z tego 40 % czyli **28000** idzie na własne potrzeby. **Czerwony** bierze od **niebieskiego** 10 % jego produkcji, czyli **1200**. **Niebieskiemu** zostaje **7000 – 2800 – 1200** = **3000**. Też się zgadza.

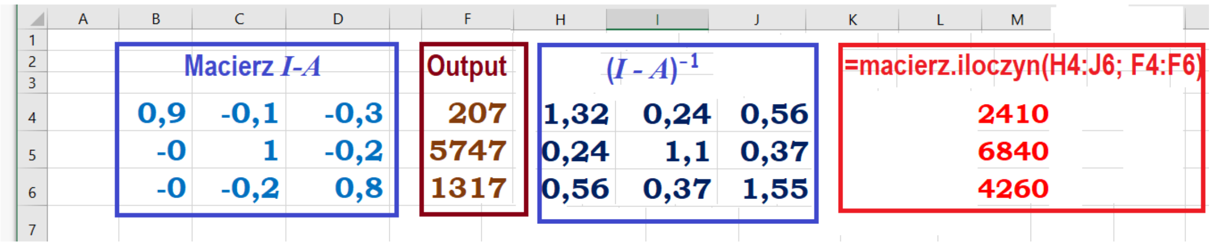
Zadanie 1. Wyznacz wielkość produkcji, gdy macierzą przepływów między-gałęziowych jest

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix},$$

a wektor extra demand (*dodatkowe zapotrzebowanie, produkcja na rynek*) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 207 \\ 5747 \\ 1317 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Równanie input-output to $(\mathrm{I}-A).\boldsymbol{d} = X$, czyli $\mathbf{X} = (\mathrm{I}-A)^{-1}\,\boldsymbol{d}$

Rozwiążę Excelem



Macierz I-A			Output	$(I - A)^{-1}$			=macierz.iloczyn(H4:J6; F4:F6)
0,9	-0,1	-0,3	207	1,32	0,24	0,56	2410
-0	1	-0,2	5747	0,24	1,1	0,37	6840
-0	-0,2	0,8	1317	0,56	0,37	1,55	4260

Odpowiedź: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2410 \\ 6840 \\ 4260 \end{bmatrix}$.

Sprawdzenie (+ zrozumienie „o co chodzi", what does it all mean, як це зрозуміти, як гэта зразумець, в чем дело).

Mamy trzy zakłady: **Pierwszy**, **Drugi** i **Trzeci**.

1) **Pierwszy** produkuje 2410, z czego na wewnętrzne potrzeby idzie:

241 własnej produkcji, 684 produkcji **Drugiego** i 0,3· 4260 produkcji **Trzeciego**. Łącznie 241 + 684 + 1278 = 2203. Na zewnątrz zostaje zatem tylko 2410 – 2203 = **207**. Zgadza się.

2) Zauważmy, że **Drugi** do produkcji nie potrzebuje w ogóle własnych wyrobów. Wytwarza 6840, z czego na własne potrzeby przeznacza

0,1· 2410 + 0 · 6840 + 0,2· 4260 = 1093. Zostaje 6840 - 1093 = **5747.**

3) **Trzeci** wytwarza 4260, ale na wewnętrzne potrzeby zużywa

0,3· 2410 + 0,2 · 6840 + 0,2· 4260 = 2943. Zostaje 4260 - 2943 =**1317.**

Zgadza się.

Zadanie 2. Wyznacz wielkość produkcji, gdy macierzą przepływów między-gałęziowych jest

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

a wektor extra demand (*dodatkowe zapotrzebowanie, produkcja na rynek*) to

$$d = \begin{pmatrix} \mathbf{11400} \\ \mathbf{5600} \\ \mathbf{39600} \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź: $\begin{pmatrix} \mathbf{40000} \\ \mathbf{30000} \\ \mathbf{72000} \end{pmatrix}$. Sprawdzenie:

1) Jeżeli Pierwszy produkuje 40000, to na własne potrzeby idzie:

4000 własnej produkcji, 3000 produkcji **Drugiego** i 0,3· 72000 produkcji **Trzeciego**, czyli 4000 + 3000 + 21600 = 28600. Na zewnątrz wychodzi zatem 40000 – 28600 = **11400**. Zgadza się.

2) Wyliczyliśmy, że **Drugi** wytwarza 30000, z czego na potrzeby wewnętrzne przeznacza 0,1· 40000 + 0,2 · 30000 + 0,2· 72000 = **24400.**

Zostaje 30000 – 24400 = **5600.** Zgadza się.

3) **Trzeci** wytwarza 72000, ale na wewnętrzne potrzeby zużywa

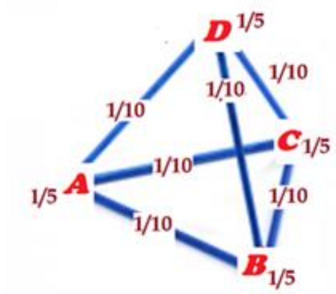
0,3· 40000 + 0,2 · 30000 + 0,2· 72000 = 12000 + 6000 + 14400 = 32400.

Zostaje 72000 – 32400 = **39600.** Zgadza się.

Zadanie 3. Przyjmijmy, że między zakładami *A*, *B*, *C* nie ma żadnych zależności. Każdy z tych zakładów zużywa na własne potrzeby połowę własnych wyrobów. Jaka powinna być wielkość produkcji dla wektora *extra demand* $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{100} \\ \mathbf{200} \\ \mathbf{300} \end{pmatrix}$. Rozwiąż to „na zdrowy rozsądek" i sprawdź ogólną formułą dla modelu Leontiewa.

Zadanie 4. Wyznacz wielkość produkcji dla podanego schematu przepływów międzygałęziowych i wektora *extra demand* $\boldsymbol{d}$.

Zadanie Wyznacz wielkość produkcji dla podanego schematu przepływów międzygałęziowych i wektora *extra demand* $\boldsymbol{d}$.



$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 18000 \\ 27000 \\ 36000 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Mamy macierz wejścia-wyjścia:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

. Wyznaczamy odwrotność macierzy $\mathbf{I}-\boldsymbol{A}$.

$$(\mathrm{I}-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Mnożymy przez wektor $\boldsymbol{d}$ i otrzymujemy wynik:

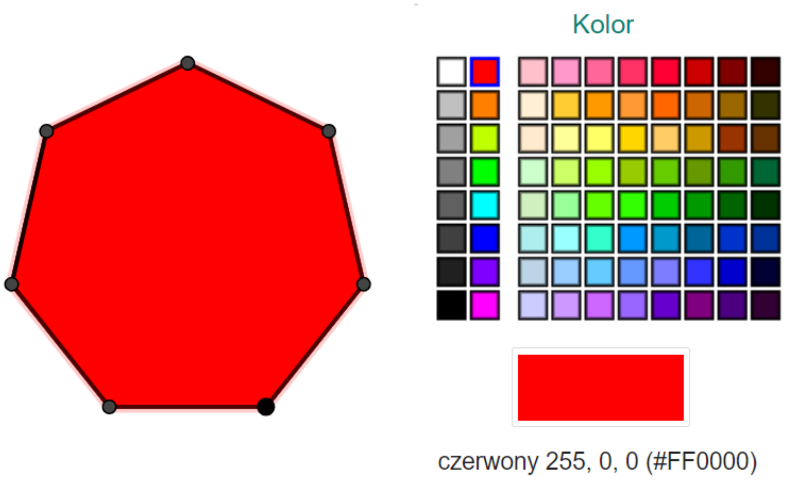
$$\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.\{9000, 18000, 27000, 36000\}$$

Result (30000, 40000, 50000, 60000)

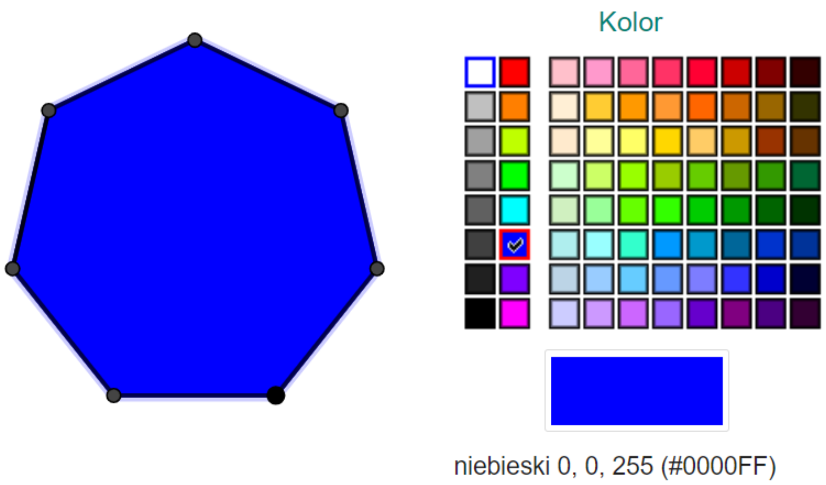
Zadanie 5. Rozwiąż podobne zadanie dla danych

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.2} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.1} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0.2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.3} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 6000 \\ 6000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

3. Kolory. Używamy często palety barw **RGB** (**Red**-**Green**-**Blue**). Spójrzmy na rysunek z Geogebry.



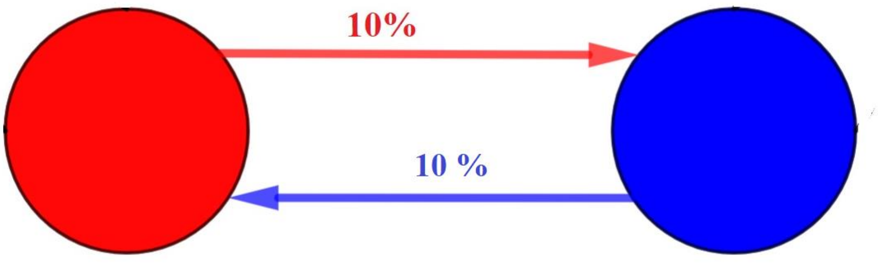
FF to w układzie szesnastkowym 255



W programie *Mathematica* (w którym zrobione są poniższe rysunki) *m*amy:

RGBColor[1,0,0] = **czerwony**, RGB[0,1,0] = **zielony** , RGB[0,0,1] = **niebieski**.

Oto i **zadanie 6**. W niepoważnej wersji „migrantów” ujmę to tak. Na jednej z wysp żyli sobie Czerwoni, na drugiej Niebiescy. Gdy czerwoni emigrują do Bluelandii, zmieniają kolor skóry na niebieski – a właściwie to nie dokładnie tak, bo to wszyscy mieszkańcy Bluelandii trochę „czerwienieją” – proporcjonalnie do liczby nowych przybyszów. I oczywiście symetrycznie: uchodźca z Bluelandii powoduje, że wszyscy w Redlandii trochę czerwienieją. W wersji zupełnie poważnej może to wyglądać tak. Mamy dwa zbiorniki: jeden z czerwonym barwnikiem i drugi z niebieskim. Za każdym razem wymieniamy 10% ich zawartości. Jak zmieniają się kolory?



Mamy tu input-output matrix:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$ W Redlandii mamy stan zerowy RGBColor[1,0,0]. Pomińmy środkowe zero (bo nie mamy w ogóle zielonego), tj. mamy r = 1, b = 0, czyli $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Po roku będzie $0.9\, r + 0.1\, b$.

W Bluelandii na odwrót, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zmieni się na $\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$.

Mamy więc – jak poprzednio - przejście $\begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$. Pamiętając, że w kolumnach macierzy przekształcenia liniowego znajdują się współrzędne obrazów wektorów bazowych, u nas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mamy w kolejnych iteracjach następujący układ kolorów:

Po pierwszym roku (pierwszym mieszaniu) odpowiednio na pierwszej i na drugiej wyspie:

RGBColor[0.9, 0, 0.1] **RGBColor[0.1, 0, 0.9]**

Następnie

$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.82 & 0.18 \\ 0.18 & 0.82 \end{pmatrix}$ **[0.82, 0, 0.18]** **[0.18, 0, 0.82]**

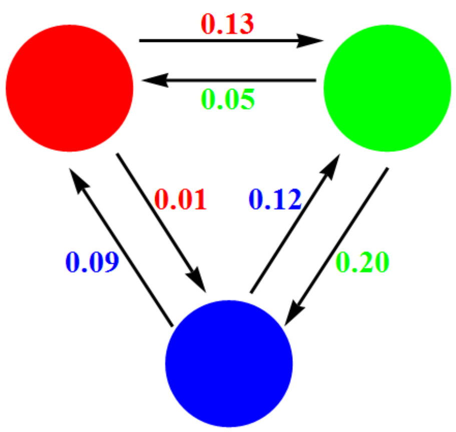
$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix}$ **[0.76, 0, 0.24]** **[0.76, 0, 0.24]**

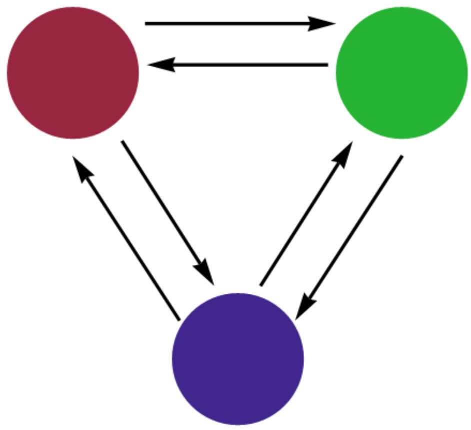
$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0.705 & 0.295 \\ 0.295 & 0.705 \end{pmatrix}$$

[0.705, 0, 0.295] **[0.705, 0, 0.295]**

Zadanie 7. Jakie barwy będą miały koła przy zmieszaniu barw jak na rysunku? Strzałki pokazują, jaką część pojemnika wlewamy do innego, np. z **G** wlewamy 5% do **R**, oraz (jednocześnie) z **R** wlewamy 13% do **G**.

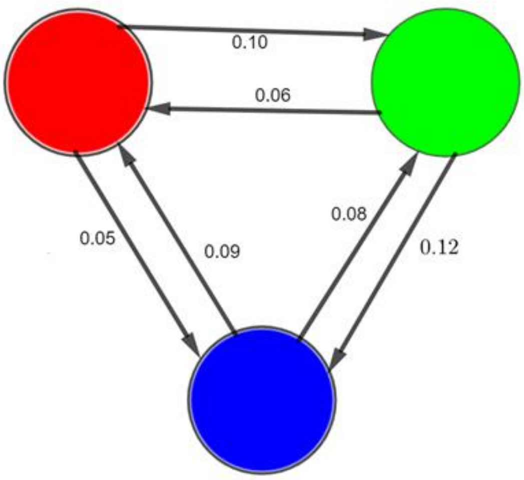
$$A = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.13 & 0.01 \\ 0.05 & 0.75 & 0.20 \\ 0.09 & 0.12 & 0.79 \end{pmatrix}$$





Rozwiązanie. Macierzą w.-w. jest $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0.86} & \mathbf{0.13} & \mathbf{0.01} \\ \mathbf{0.05} & \mathbf{0.75} & \mathbf{0.20} \\ \mathbf{0.09} & \mathbf{0.12} & \mathbf{0.79} \end{pmatrix}$. Jej kolumny wyznaczają rozkład kolorów po pierwszym mieszaniu. Możemy to narysować. Na prawym rysunku, ten śliwkowy kolor po lewej u góry to właśnie RGB[0.86, 0,05,0.09]

<u>Zadanie 8</u>. Rozwiąż problem „mieszania barw", to jest wyznacz, jakie barwy będą miały koła po kolejnych mieszaniach. Dane są na rysunku. Strzałki pokazują, jaką część pojemnika wlewamy do innego, np. z **G** wlewamy 6% do **R**, oraz (jednocześnie)

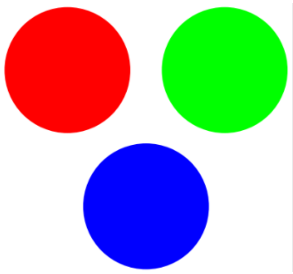


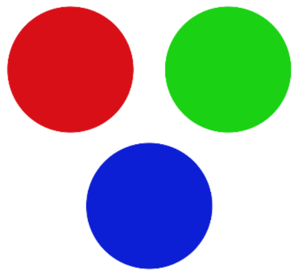
z **R** wlewamy 10% do **G**.

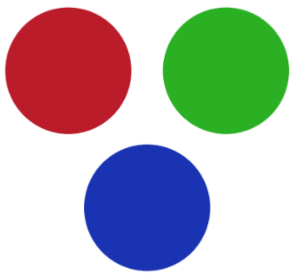
Rozwiązanie. Oznaczmy odpowiednie pojemniki, jak przedtem, literami odpowiadającymi kolorom **R**, **G**, **B**.

Macierzą wejścia-wyjścia jest $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.85} & 0.10 & 0.05 \\ 0.06 & \mathbf{0.82} & 0.12 \\ 0.09 & 0.08 & \mathbf{0.83} \end{pmatrix}$. Istotnie, po pierwszym mieszaniu w pojemniku **R** jest 85% czerwonego, 6% zielonego i 9% niebieskiego. Jest to właśnie pierwsza kolumna macierzy *A*, czyli $\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

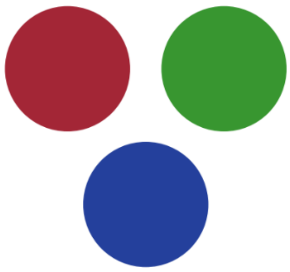
Podobnie dla $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Kolumny kolejnych potęg macierzy *A* wyznaczają rozkład kolorów w pojemnikach. Zobaczmy:

Stan początkowy: 

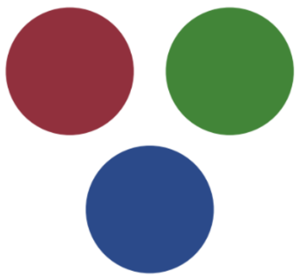
Po pierwszym mieszaniu (działanie macierzy $\boldsymbol{A}$) 

Po działaniu macierzy A^2, Kolory **[0.73, 0.11, 0.16], [0.17, 0.69, 0.14]** i **[0.10, 0.20, 0.70]** wyglądają tak: 

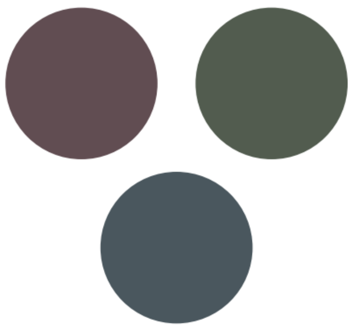
A^3: Kolory **[0.64, 0.15, 0.21]**, **[0.22, 0.59, 0.19]** i **[0.14, 0.25, 0.61]** to takie **jak niżej**



Kolejno **A^4**, ***A^5*** **A^6**



A^{10} jest już całkiem szare:



Zobaczmy jeszcze ***A^{30}*** **.**

$$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.06 & 0.82 & 0.12 \\ 0.09 & 0.08 & 0.83 \end{pmatrix}^{30} = \begin{pmatrix} 0.333514 & 0.333401 & 0.333085 \\ 0.333148 & 0.333325 & 0.333527 \\ 0.333338 & 0.333275 & 0.333388 \end{pmatrix}$$