

Egzamin z Podstaw Matematyki

lipiec 2013 seria 3

.....
Imię Nazwisko Grupa Nr. indeksu

Zad 1. (10 p.)

Napisz zaprzeczenie zdania: $(p \vee \neg q) \wedge (p \Rightarrow r)$ w taki sposób by znak negacji nie stał przed żadnym nawiasem. Dla jakich wartości zdań p, q i r zaprzeczenie to jest prawdziwe?

Zad 2. (10 p.)

Znajdź takie podzbiory liczb naturalnych A, B i C by:

$$B \setminus (A \cap C) \neq (B \setminus C) \cup (A \setminus C).$$

Zad 3. (16 p.)

Niech A_n będzie odcinkiem $(-3 - \frac{6}{n}, 2 + \frac{4}{n})$. Opisz zbiory:

a) $\bigcap_{n=2}^6 A_n$, b) $\bigcup_{n=2}^9 A_n$

c) $\bigcap_{n=3}^{\infty} A_n$, d) $\bigcup_{n=4}^{\infty} A_n$.

Zad 4. (16 p.)

Udowodnij lub znajdź kontrprzykład na następujące twierdzenia:

a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad n < n^2 + 1$ b) $\exists_{t \in \mathbb{R}} \quad t + 2 = t^2 + t$

c) $\forall_{t \in \mathbb{R}} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad n - 5 \geq t$ d) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} \quad n - 5 \geq t$

gdzie \mathbb{N} oznacza zbiór liczb naturalnych, zaś \mathbb{R} zbiór liczb rzeczywistych.

Zad 5. (16 p.)

Niech $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -3x - 8, & x \leq -2 \\ -x - 4, & x > -2 \end{cases}$$

a) Naskicuj wykres funkcji $\varphi(x)$.

b) Napisz wzór na φ^{-1}

c) Napisz wzór na $\varphi \circ \varphi$.

Zad 6. (16 p.)

Niech $\tau \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie relacją określoną wzorem:

$$\tau = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; |y| = |x|\}$$

a) Narysuj wykres τ .

b) Zbadaj czy τ jest: i) relacją symetryczną, ii) relacją zwrotną, iii) funkcją.

c) Opisz τ^{-1} i narysuj jej wykres.

Zad 7. (16 p.)

Badamy następujące elementy grupy S_{10}

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 9 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \text{ i } h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Przedstaw g i h^{-1} w postaci iloczynów cykli rozłącznych,

b) Oblicz rzędy elementów: g , h^{-1} i gh ,

c) Sprawdź które z elementów: g , h i gh są permutacjami parzystymi,

d) Sprawdź czy $gh = hg$.

e) Przedstaw w postaci iloczynów cykli rozłącznych permutacje g^2 i g^3 .

Odpowiedzi

Zad 1. $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$ prawdziwe gdy: $p=0, q=1$ lub $p=1, r=0$.

Zad 2. Np. $A = \{1\}$ i $B = C = \emptyset$

Zad 3.

- a) $\bigcap_{n=2}^6 A_n = (-4, 2\frac{2}{3})$, b) $\bigcup_{n=2}^9 A_n = (-6, 4)$
 c) $\bigcap_{n=3}^{\infty} A_n = \langle -3, 2 \rangle$,
 d) $\bigcup_{n=4}^{\infty} A_n = (-4\frac{1}{2}, 3)$.

Zad 4.

- a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad n < n^2 + 1$ Prawda bo $\Delta < 0$ b) $\exists_{t \in \mathbb{R}} \quad t + 2 = t^2 + t$ Prawda np. $t = \sqrt{2}$
 c) $\forall_{t \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad n - 5 \geq t$ Prawda np. $n = \max\{1, \lfloor t + 6 \rfloor\}$ d) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{t \in \mathbb{R}} \quad n - 5 \geq t$
 Fałsz np. $t = n + 1$.

Zad 5.

- b) $\varphi^{-1} = \begin{cases} -x - 4, & x \leq -2 \\ -\frac{x+8}{3}, & x > -2 \end{cases}$
 c) $\varphi \circ \varphi = 3x + 4$.

Zad 6.

$$\tau = \tau^{-1} \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; y = x \text{ lub } y = -x \}$$

wykresem są dwie proste prostopadłe.

- b) τ jest: relacją symetryczną, relacją zwrotną, nie jest funkcją.

Zad 7. (16 p.)

Badamy następujące elementy grupy S_{10}

- a) $g = (1, 8, 6)(2, 5, 7, 3, 9, 4)$ i $h^{-1} = (4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)$
 b) $rz \, g = 6$, $rz \, h^{-1} = 10$ i $rz \, gh = 8$,
 c) g i h są permutacjami nieparzystymi, gh jest parzysta.
 d) $gh \neq hg$.
 e) $g^2 = (1, 6, 8)(2, 7, 9)(3, 4, 5)$ i $g^3 = (2, 3)(4, 7)(5, 9)$