MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Oprac.
Marian Gewert
Zbigniew Skoczylas

Analiza matematyczna 1

Kolokwia i egzaminy

Wydanie piąte

GiS

Opracowanie
Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Kolokwia i egzaminy

Wydanie piąte powiększone

Oficyna Wydawnicza **GiS**
Wrocław 2001

Wstęp

Niniejsza książka jest trzecią częścią zestawu podręczników do **Analizy matematycznej 1**. Pozostałymi częściami zestawu są *„Definicje, twierdzenia, wzory"* oraz *„Przykłady i zadania"*. Książka zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach. Zadania te obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami w fizyce i technice. Do wszystkich zestawów kolokwialnych oraz do zestawów egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi. Niniejszy zbiór zawiera także komplet zestawów z egzaminów na ocenę celującą. Na końcu opracowania omówiono zasady zaliczania kursu **Analiza matematyczna 1**, zalecane w Politechnice Wrocławskiej.

Niniejsze opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki. Zestawy zadań z tego zbioru mogą być wykorzystywane przez wykładowców oraz prowadzących ćwiczenia na kolokwiach i egzaminach.

Do tego wydania podręcznika dołączono odpowiedzi do wszystkich zestawów kolokwialnych. Ponadto dodano kolejne zestawy zadań z egzaminu na ocenę celującą. Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach.

Marian Gewert
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
gewert@im.pwr.wroc.pl

Zbigniew Skoczylas
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
z.skoczylas@im.pwr.wroc.pl

Spis treści

Zestawy zadań z kolokwiów#

PIERWSZE KOLOKWIUM

Zestaw I

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2+3n+2}-n-1\right)$.

2. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x+2|} & \text{dla } x<0,\\ b & \text{dla } x=0,\\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{ax} & \text{dla } 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0=0$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$.

5. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x)=\sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0\neq 0$.

Grupa B

1. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $g(x)=3^x$ w punkcie x_0.

2. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\dfrac{1}{x^2}$.

3. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}-1-\dfrac{1}{x}$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^n}{4^n+5^n}$.

Od roku akademickiego 2000/2001 na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania po 4 zadania.

5. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja g określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sin 2x} & \text{dla} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ x^2 + x + 1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Grupa C

1. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

2. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla} \quad x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\arcsin x}{ax} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

3. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n+6}{n+3} \right)^{4n+2}$.

5. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x) = \cos x$ w punkcie x_0.

Grupa D

1. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja g określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla} \quad x < 1, \\ b & \text{dla} \quad x = 1, \\ x^2 + ax + 1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + \sin n}$.

3. Obliczyć z definicji pochodną funkcji $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0 \neq 0$.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

5. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $g(x) = |x| + \dfrac{\sin x^2}{x}$.

Zestaw II

Grupa A

1. Obliczyć granicę ciagu $a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+1}$.

3. Znaleźć kresy dolny i górny zbioru

$$A = \left\{\frac{(-1)^n}{3n+2} : n \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3 + \operatorname{tg} x}$.

5. Czy można tak dobrać parametry a i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{a}{x^3} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Grupa B

1. Obliczyć granicę ciągu $b_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n + \frac{1}{n}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{2-3n}$.

3. Wyznaczyć dziedzinę naturalną oraz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = 2\arcsin \frac{1-|x|}{2}.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

5. Czy można tak dobrać parametry a i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1} & \text{dla} \quad x \neq 0 \text{ oraz } x \neq 1, \\ a & \text{dla} \quad x = 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Grupa C

1. Obliczyć granicę ciągu $c_n = \sqrt[n]{1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n-1}$.

3. Niech $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}x$ oraz $g(x) = E(x)$. Napisać wzory określające funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$ oraz narysować ich wykresy.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\sin\dfrac{1}{2x}} - 1\right)$.

5. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ a & \text{dla} \quad x = 0, \\ b + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę ciągu $d_n = \dfrac{4^{n+1} - 5^{n+2}}{5^n - 4^n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n-2}$.

3. Uzasadnić, że granica $\lim\limits_{x\to 0+} 2^{\sin\frac{1}{x}}$ nie istnieje.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+7^x)}{\ln(1+6^x)}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} b + 3(x-1)^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x\sin\dfrac{a}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła na $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw III

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+5n+1} - \sqrt{n^3+5n}\right)$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x+1}$.

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{dla} \quad x\leqslant 1,\\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x>1\end{cases}$$
była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie $4^x=\dfrac{2}{x}$ ma w przedziale $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$ w punkcie $(0,f(0))$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5}+1}{\sqrt{n^5+1}+1}$.

2. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równość
$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x>0\end{cases}$$
była ciągła na $\mathbb{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie $\ln x+2x=1$ ma w przedziale $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{x}\cos(x-1)$ w punkcie $(1,f(1))$.

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+(-1)^n}{5n+1}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}$.

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} 5x^2+x+a & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ \dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla} \quad x>0\end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie $\ln(x+1)+x=1$ ma w przedziale $[0,1]$ dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{e^x+x}$ w punkcie $(0,f(0))$.

Grupa D

1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left[5+(-1)^n\right]^n.$$

2. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{5x^5}-\sqrt{3x^3}}{2x^2}$.

3. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}+a & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x>0\end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie $3^x+x=3$ w przedziale $[0,1]$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$ w punkcie $(0,f(0))$.

Zestaw IV

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$.

2. Zbadać jednostronną ciągłość w punkcie $x_0=\pi$ funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x<\pi,\\ 1 & \text{dla} \quad x=\pi,\\ \dfrac{\sin x}{\pi-x} & \text{dla} \quad x>\pi.\end{cases}$$

3. Obliczyć kąt, pod którym wykresy funkcji $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$ przecinają się we wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

4. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ jest rosnąca. Czy funkcja ta ma asymptoty?

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{9n+7}$.

2. Dobrać parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - a & \text{dla} \quad x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ \sqrt{x} \cos \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbf{R}$.

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 3^{-x}$. Styczną wystawić w punkcie $\left(x_0, \sqrt{3}\right)$ wykresu.

4. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $f(x) = x^2 \ln x$ jest malejąca. Czy funkcja ta ma asymptoty?

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} [x (2 \operatorname{arctg} x + \pi)]$.

Grupa C

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{9^n + 3^n} - \sqrt{9^n + 1}\right)$.

2. Zbadać jednostronną ciągłość w punkcie $x_0 = 0$ funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \frac{\sin x}{x^2} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Obliczyć kąt, pod którym wykres funkcji $f(x) = e^{\sqrt{3}x} - 1$ przecina oś Ox.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$ oraz wyznaczyć przedziały, na których funkcja ta jest malejąca.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + 3^n + \pi^n}$.

2. Funkcja f jest określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} q \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + 1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ p & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin x^2}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$
Dobrać parametry p i q tak, aby funkcja ta była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 3 - x^2$, która tworzy kąt $\frac{\pi}{3}$ z dodatnią częścią osi Ox.

4. Znaleźć asymptoty i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.

Zestaw V

Grupa A

1. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^3}$.

2. Wyznaczyć kąt pod jakim oś Ox jest przecięta przez wykres funkcji
$$f(x) = xe^{\frac{x}{2}}.$$

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sin 211°$.

4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{n+2}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b, funkcja f dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} a + \operatorname{arcctg} x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 + b & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła na $\boldsymbol{R}$?

Grupa B

1. Obliczyć $f''(1)$ dla funkcji $f(x) = \cos \ln x + \sin \ln x$.

2. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$.

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln 0.99\,.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^n}{1+2^n+3^n}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b, funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} a+3(x-1)^3 & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ x\sin\dfrac{b}{x} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$
jest ciągła na $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Grupa C

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x)=\sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0=2$.

2. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\operatorname{arctg}\left(-x^2\right)$ w punkcie $(1,f(1))$.

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\cos 209^\circ\,.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 3x-5\sin 5x}{x}$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} x^2+b+2 & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ a+\operatorname{arctg}\sqrt{x} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$
jest ciągła na $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Grupa D

1. Obliczyć drugą pochodną funkcji $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$ w punkcie $x_0=0$.

2. Dla jakich wartości parametrów a i b wykres funkcji $f(x)=-x^2+ax+b$ jest styczny do prostej $y=x$ w punkcie $(-1,-1)$?

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\operatorname{arcctg} 0.999\,.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n+5^{-n}}$.

5. Dla jakich wartości parametru a, funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} a+\dfrac{2\sin x}{x} & \text{dla} \quad x<0,\\ \sqrt{x}+a^2 & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases}$$
jest ciągła na $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw VI

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{n}\right)^{2n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln x-\ln(\sin 2x)]$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<-1, \\ \arcsin x+a & \text{dla} \quad -1\leqslant x\leqslant 0, \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=\dfrac{3x^3}{2x^2+x}$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x)=x^{\cos x}+\dfrac{3}{x}$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{3}{\sqrt{n}}-1\right)$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{ctg}(1-x)}$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1, \\ \log_a x & \text{dla} \quad 1\leqslant x\leqslant 4, \\ \dfrac{\pi}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}} & \text{dla} \quad x>4 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+3x$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x)=(\ln x\cdot\operatorname{tg} x)^2$.

Grupa C

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n}+3^n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ bx + 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \operatorname{arctg} x & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{2x^2 - 3x}$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{2 \ln x + e^x}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{2n^3 + 1}}{n\sqrt{3n - 2}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to \pi+} \dfrac{x \sin x}{\cos x + 1}$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{a} & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\arcsin x}{\pi x} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{2b} & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = 1 + \dfrac{\arcsin x}{\ln x}$.

Zestaw VII

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 5^n + 3^n \sin^2 n}.$$

2. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \dfrac{1}{2} \arccos\left(1 - \dfrac{|x|}{2}\right)$. Naszkicować wykres tej funkcji.

3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

4. Czy funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla} \quad x < 2, \\ x + 10 & \text{dla} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$
jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 2$? Odpowiedź uzasadnić.

5. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = \sqrt{3}$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n+1}\right)^{6n+3}$.

2. Wyznaczyć równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ w punktach jego przecięcia z hiperbolą $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

3. Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność w punkcie $x_0 = 0$ funkcji
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = 2x - \arccos\dfrac{1}{x}$.

5. Wykazać, że w przedziale $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ istnieje dokładnie jeden pierwiastek równania
$$e^{2x^2+x} = \frac{2}{x}.$$

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n} + 6^{-n}}.$$

2. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$ w punkcie $(1, f(1))$.

3. Podać definicję ciągłości funkcji. Zbadać ciągłość funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. Po wyznaczeniu asymptot naszkicować wykres tej funkcji.

4. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ w punkcie $x_0 = 4$.

5. Wykazać, że równanie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, ma pierwiastek rzeczywisty.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2+5n+4}-4n\right)$.
2. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ w punkcie o odciętej $x_0=3$.
3. Dla jakiej wartości parametru a, funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} a+3(x-1)^3 & \text{dla} \quad x\leqslant 0,\\ x\cos\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0=0$?
4. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x)=\dfrac{3}{2}x\ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right)$.
5. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\pi}(1+2\sin x)^{\frac{1}{\pi-x}}$.
2. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu
$$a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}.$$
3. Uzasadnić, że równanie $3^x+x^3=0$ ma w przedziale $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ dokładnie jeden pierwiastek.
4. Dobrać stałą A tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{dla} \quad x<0,\\ A & \text{dla} \quad x=0,\\ \dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0=0$. Następnie zbadać jej różniczkowalność w tym punkcie.
5. Napisać równanie stycznej do krzywej $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{\ln\sqrt{x}}$ w punkcie $(1,y_0)$.

Grupa B

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność ciągu
$$a_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

2. Uzasadnić, że równanie $x^3+x=-1$ ma w przedziale $(-1,0)$ dokładnie jeden pierwiastek.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{5}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

4. Wyznaczyć stałą A tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{A} & \text{dla} \quad x\leqslant 0, \\ \dfrac{Ax}{e^x-1} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$. Zbadać jej różniczkowalność w punkcie $x_0=0$.

5. Napisać równanie stycznej do krzywej $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$ w punkcie $(1,y_0)$.

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+7^n+\cos^2 n}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-5}\right)^{2x+1}$.

3. Uzasadnić, że równanie $2x=\pi\sin x$ ma pierwiastek w przedziale $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

4. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0, \\ a & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$. Następnie korzystając z definicji obliczyć $f'(0)$.

5. Dla funkcji
$$f(x)=x^3+3x^2-5$$
napisać równanie stycznej prostopadłej do prostej $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}$.

2. Obliczyć granicę $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji $f(x) = 2x - \arccos\frac{1}{x}$.

4. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = |e^x - 1|$ na $\boldsymbol{R}$.

5. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:
$$f(x) = 4 - x, \qquad g(x) = 4 - \frac{x^2}{2}.$$

Zestaw IX

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n}+3^{-n}+6^{-n}}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+3x+5}\right)$.

3. Dla funkcji f określonej wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+\cos x}{3^{\frac{1}{x}}-a} & \text{dla} \quad x<0, \\ 3^x+1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$
dobrać parametr a tak, aby była ona ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x^3$.

5. Uzasadnić, że równanie $3^x + x^3 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

Grupa B

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu
$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

2. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\sqrt[3]{8n^3+2}}{(5n+3)\sqrt{n^2+7}}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+3\cos x)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}$.

4. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} b-e^{\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x<0, \\ a & \text{dla} \quad x=0, \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

5. Uzasadnić, że równanie $x^3+x=-1$ ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(-1,0)$.

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu

$$a_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+2}+\ldots+\frac{1}{5^n+n}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+5}{4n+7}\right)^n$.

3. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty}\frac{E\left(3e^x\right)+2}{E\left(2e^x\right)+1}.$$

4. Zbadać ciągłość funkcji

$$\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x=-1, \\ \dfrac{x^3-1}{|x^2-1|} & \text{dla} \quad |x|\neq 1, \\ \dfrac{3}{2} & \text{dla} \quad x=1. \end{cases}$$

W przypadku nieciągłości określić jej rodzaje.

5. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2x^3\right)}{7x^3}$.

3. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < -2, \\ |x^2 + x| & \text{dla} \quad |x| \leqslant 2, \\ a \log_2 x - bx & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5. Uzasadnić, że równanie $xe^x = 1$ ma tylko jedno rozwiązanie w $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Zestaw X

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \frac{2n^2 + \sin n}{3n^2 + (-1)^n}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{n-1}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$.

4. Dobrać stałą a tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{a(\pi - 2x)} & \text{dla} \quad x < \dfrac{\pi}{2}, \\ ax & \text{dla} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

5. Zbadać, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} \ln \cos x & \text{dla} \quad 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Grupa B

1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \frac{2n^3 + 1}{4n^2 + \cos n^2}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n! + n^3}{(n+3)! + 1}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^x$.

4. Uzasadnić, że równanie $x2^x = 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.

5. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{\sin x} & \text{dla} \quad 0 < |x| < \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{n^2 + \sin n}\ .$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n + 7^n}{4^n + 5^n}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2x}}$.

4. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin ax}{e^{ax} - 1} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

5. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin 5x}{\sin 3x} & \text{dla} \quad 0 < |x| < \dfrac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Grupa D

1. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = (4 - \operatorname{arctg} n)^n\ .$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{3n^2}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)}{x^2}$.

4. Określić wartość funkcji $f(x) = x \operatorname{ctg} 5x$ w punkcie $x_0 = 0$ tak, aby funkcja ta była ciągła w tym punkcie.

5. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

DRUGIE KOLOKWIUM

Zestaw I

Grupa A

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

2. Znaleźć przedziały monotoniczności i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x-3).$$

3. Napisać wzór Taylora z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i punktu $x_0 = 8$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+4\right) dx}{x^3+x^2-2}$.

5. Znaleźć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

Grupa B

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę

$$\lim_{x \to \infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}} \right).$$

2. Znaleźć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ na przedziale $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

5. Znaleźć pole obszaru D określonego przez nierówności: $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $|x| \leqslant 1$.

Grupa C

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}$.

2. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x \ln x^2$.

3. Oszacować błąd przybliżenia $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2}$ dla $|x| < 0.1$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x + 12}{x^3 + 4x}\, dx$

5. Obliczyć objętość bryły V powstałej przez obrót obszaru ograniczonego krzywymi: $y = \sqrt{x}e^x$, $y = 0$, $x = 1$ dookoła osi Ox.

Grupa D

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę
$$\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right).$$

2. Znaleźć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt[5]{31.98}\ .$$

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x \cos 2x\, dx$.

5. Znaleźć długość łuku krzywej $\Gamma : y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Zestaw II

Grupa A

1. Z jaką dokładnością wielomian Maclaurina stopnia drugiego przybliża na przedziale $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ funkcję
$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}?$$

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\, dx}{3 - \cos x}$.

3. Zbadać funkcję $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ i sporządzić jej wykres.

4. Obliczyć długość łuku krzywej $\Gamma : y = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{\ln x}{2}$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant e$.

5. Znaleźć granicę ciągu $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{2} + 2\sqrt[n]{2^2} + 3\sqrt[n]{2^3} + \ldots + n\sqrt[n]{2^n}}{n^2}$.

Grupa B

1. Zbadać funkcję $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x}$ i sporządzić jej wykres.
2. Z jaką dokładnością wielomian Maclaurina stopnia drugiego przybliża funkcję $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ na przedziale $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$?
3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$.
4. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $y = xe^{-x}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$, wokół osi Ox.
5. Znaleźć granicę ciągu $x_n = \dfrac{1}{n} \ln\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{n}{n}\right)\right]$.

Grupa C

1. Zbadać funkcję $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ i sporządzić jej wykres.
2. Znaleźć wielomian Maclaurina stopnia drugiego dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ i oszacować dokładność przybliżenia funkcji tym wielomianem na przedziale $[0, 2]$.
3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(x+2)\, dx}{x^3 + x^2 + x}$.
4. Punkt porusza się wzdłuż osi Ox z prędkością $v(t) = 1 + \cos^2 \pi t$. Znaleźć położenie punktu w chwili $t = 0.25$, jeżeli wiadomo, że w chwili $t = 0$ znajdował się on w początku układu współrzędnych.
5. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+4} + \ldots + \sqrt[3]{n+2n}}{n\sqrt[3]{n}}$.

Grupa D

1. Zbadać funkcję $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ i sporządzić jej wykres.
2. Znaleźć wielomian Maclaurina drugiego stopnia dla funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Na przedziale $\left[0, \dfrac{1}{10}\right]$ oszacować błąd przybliżenia funkcji tym wielomianem.
3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ctg} x}$

4. Obliczyć całkę $\int\limits_0^2 \frac{2-x}{2+x}\,dx$.

5. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$.

Zestaw III

Grupa A

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.

2. Oszacować dokładność wzoru przybliżonego
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ dla } |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

3. Wyznaczyć przedziały wypukłości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

4. Obliczyć całkę $\int \ln\left(x^2\right)\,dx$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = 2x$, $y = 3 - x^2$.

Grupa B

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

2. Stosując wzór Maclaurina obliczyć $\ln 1.2$ z dokładnością 10^{-3}.

3. Wyznaczyć przedziały, na których funkcja
$$f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$$
jest jednocześnie malejąca i wklęsła.

4. Obliczyć całkę $\int \arcsin x\,dx$.

5. Obliczyć pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 2$, wokół osi Ox.

Grupa C

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln \arcsin 6x}{\ln \arcsin x}$.

2. Korzystając ze wzoru Maclaurina obliczyć $\sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-2}.

3. Znaleźć ekstrema i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

5. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu krzywej $y = xe^x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$, wokół osi Ox.

Grupa D

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{\sin x - x}$.

2. Korzystając ze wzoru Maclaurina obliczyć $\sin 3^\circ$ z dokładnością 10^{-4}.

3. Znaleźć przedziały, na których funkcja $f(x) = x^3e^{-x}$ jest jednocześnie malejąca i wypukła.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x\sqrt{2-x^2}\,dx$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y^2 = 2x$, $x + y = 1$.

Zestaw IV

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x$.

2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne oraz znaleźć wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+2x+8}$.

4. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnię powstałą przez obrót krzywej $y = \sqrt{\cos^3 x}$, gdzie $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, wokół osi Ox.

5. Średnica kuli d zmierzona z dokładnością 1 mm wynosi 14.3 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole S powierzchni tej kuli? Przyjąć $\pi \approx 3.14$.

Grupa B

1. Wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegiecia wykresu funkcji
$$f(x) = xe^{-x}.$$

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{2x^2\,dx}{x^2+4x+8}$.

Brak

Zestaw V

Grupa A

1. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia
$$3^{1.98}\,.$$

2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji
$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}$$
na przedziale $\left[e^{-1},e\right]$.

3. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+4}{x^3+4x}$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int\frac{\sin\ln x}{x^2}\,dx$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresami funkcji: $y=0$, $y=\ln x$, $y=\ln(1-x)$.

Grupa B

1. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4}$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx$.

3. Łuk wykresu funkcji $y=\ln x$, gdzie $1\leqslant x\leqslant 2$, obracamy wokół osi Ox. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powstałą powierzchnią.

4. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=x^x$ na przedziale $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$.

5. Znaleźć punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji $f(x)=e^{-\cos x}$.

Grupa C

1. Znaleźć wszystkie wartości A, dla których pole figury ograniczonej osią Ox, prostą $x=A$ oraz krzywą $y=x^2e^{x^3}$ jest równe 1.

2. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$.

3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int\frac{\sin x\sin 2x\,dx}{\cos 2x}$.

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne i zbadać monotoniczność funkcji
$$f(x)=\ln\left(x^3-3x\right).$$

5. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{2}{\cos 119^\circ}.$$

Grupa D

1. Obliczyć całkę $\int e^{3\sin x}\sin 2x\,dx$.

2. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x) = \dfrac{6x^2 - 3x + 1}{(9x^2+1)(1-x)}$.

3. Zbadać monotoniczność i wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$$
na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Znaleźć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = e^{-x^2}.$$

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresami funkcji:
$$x^2 = 32y,\ x^2 = \frac{1}{y} - 4.$$

Zestaw VI

Grupa A

1. Dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ napisać wzór Maclaurina z resztą R_5. Korzystając z tego wzoru obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{2}$ i oszacować błąd tego przybliżenia.

2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = x^2 \ln x$ i narysować jej wykres.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int (x^3+1)\cos x\,dx$.

4. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{e^{2x}-1}\,dx$.

5. Obliczyć pole mniejszej z części, na które parabola $y^2 = 6x$ dzieli koło $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

Grupa B

1. Dla funkcji $f(x) = \sin^2 x$ napisać wzór Maclaurina z resztą R_4. Korzystając z tego wzoru obliczyć przybliżoną wartość $\sin^2 \dfrac{1}{5}$ i oszacować błąd tego przybliżenia.

2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ i narysować jej wykres.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$.

4. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$.

5. Obliczyć długość łuku krzywej Γ: $y = 1 - \ln\cos x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

Grupa C

1. Dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ napisać wzór Maclaurina z resztą R_4. Korzystając z tego wzoru obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ i oszacować błąd tego przybliżenia.

2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$ i narysować jej wykres.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int e^{-x} \sin 2x\,dx$.

4. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

Grupa D

1. Dla funkcji $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ napisać wzór Maclaurina z resztą R_4. Korzystając z tego wzoru obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{e}$ i oszacować błąd tego przybliżenia.

2. Określić przedziały monotoniczności funkcji $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ i znaleźć jej wszystkie asymptoty.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$.

4. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_0^{e} \ln(x+1)\,dx$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywą $x + y = y^2 - 2$ i osią Oy.

Zestaw VII

Grupa A

1. Obliczyć pochodną i następnie wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

2. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$.

3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ na przedziale $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Całkując przez części obliczyć $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1-4x^2}$.

Grupa B

1. Obliczyć pochodną i następnie wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

2. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ na przedziale $[-1, 2]$.

4. Całkując dwukrotnie przez części obliczyć $\displaystyle\int x^2\cos x \, dx$.

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+2x}{4+x^2}\, dx$.

Grupa C

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ na przedziale $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ napisać wzór Taylora w punkcie $x_0 = 4$ z resztą R_4.

4. Za pomocą podstawienia obliczyć całkę $\displaystyle\int x^5\sqrt{1+2x^3}\, dx$.

5. Obliczyć całkę $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx$.

Grupa D

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ na przedziale $[-2, 2]$.

3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\cos 61^\circ.$$

4. Za pomocą podstawienia obliczyć całkę $\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$.

5. Obliczyć całkę $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1+2x}{4+x^2}\,dx$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. O ile, w przybliżeniu, zmieni się objętość kuli o promieniu 10 m, gdy jej promień wzrośnie o 5% ?

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ na $\mathbb{R}$.

3. Wyznaczyć przedziały wypukłości wykresu funkcji

$$f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

4. Obliczyć całkę $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

5. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2}$.

Grupa B

1. Objętość walca o wysokości równej promieniowi, wyznaczona z dokładnością do $5\,\mathrm{mm}^3$, wynosi $216\pi\,\mathrm{mm}^3$. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością można obliczyć wysokość tego walca?

2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

3. Oszacować błąd bezwzględny wzoru przybliżonego $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ dla $|x| \leqslant 0.1$.

4. Obliczyć całkę $\int x \ln(x+1)\, dx$.

5. Obliczyć całkę $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Grupa C

1. Sprawdzić, czy funkcja $f(x) = e^{x \ln x}$ ma asymptoty.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x + \sin 2x$.
3. Wyznaczyć przedziały, na których funkcja $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ jest ściśle wypukła.
4. Obliczyć całkę $\int 2x \operatorname{arctg} x\, dx$.
5. Obliczyć całkę $\int \cos^3 2x\, dx$.

Grupa D

1. Znaleźć wszystkie punkty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, w których styczna jest nachylona do dodatniej części osi Ox pod kątem $\frac{\pi}{4}$. Sporządzić rysunek.
2. Naszkicować wykres funkcji ciągłej $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spełniającej warunki:
$$f(1) = -1,\ f'_-(1) = \infty,\ f'_+(1) = -\infty,\ f''(x) > 0 \text{ dla każdego } x \neq 1.$$
3. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = (x+1)^4 e^{-x}$.
4. Obliczyć całkę $\int x^2 \sin 2x\, dx$.
5. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+13}$.

Zestaw IX

Grupa A

1. Wykorzystując różniczkę funkcji wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$2^{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{16}}.$$
2. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

3. Wykorzystując twierdzenie Lagrange'a uzasadnić, że nierówność
$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|$$
jest prawdziwa dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{R}$.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \arcsin x \, dx$.

5. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \, dx$.

Grupa B

1. Naszkicować wykres funkcji spełniającej warunki:
a) $f'(x) < 0$ dla każdego $x \neq 2$,
b) $f'(2) = -\infty$,
c) $f''(x) < 0$ dla $x < 2$ oraz $f''(x) > 0$ dla $x > 2$.

2. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

3. Wykorzystując wzór Maclaurina przybliżyć funkcję $f(x) = \sin(\sin x)$ wielomianem trzeciego stopnia.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}$.

5. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, gdzie $a > 0$.

Grupa C

1. Określić przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

2. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0+} (1 + x)^{\operatorname{ctg} x}$.

3. Wykorzystując wzór Maclaurina przybliżyć funkcję $f(x) = \arccos x$ wielomianem trzeciego stopnia.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^3 \ln^2 x \, dx$.

5. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{\pi} (x \sin x)^2 \, dx$.

Grupa D

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \operatorname{ch} 3x}$.
3. Wykorzystując wzór Maclaurina przybliżyć funkcję $f(x) = \operatorname{arctg} x$ wielomianem trzeciego stopnia.
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x \, dx$.
5. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Zestaw X

Grupa A

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{\pi - x}}$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \left|\ln\left(x^2-1\right)\right|.$$
3. Korzystając ze wzoru Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ uzasadnić nierówność $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{2}$ dla każdego $x > 0$.
4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x}$.
5. Obliczyć długość krzywej $y = \ln\cos x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

Grupa B

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.
2. Oszacować błąd przybliżonego wzoru $\sqrt[5]{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{5}$ dla $0 < x \leqslant 0.1$.
3. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$
4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}\, dx$.
5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresami funkcji: $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$. Sporządzić rysunek.

Grupa C

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
2. Korzystając ze wzoru Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^x$ obliczyć $\sqrt[10]{e}$ z dokładnością do 10^{-3}.
3. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$
4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$.
5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji $y = 2 - \ln(x+1)$ oraz osiami układu współrzędnych. Sporządzić rysunek.

Grupa D

1. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin 2x}\right)$.
2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji
$$f(x) = |x|(x-1).$$
3. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_4 dla funkcji $f(x) = x^2 e^{-x}$.
4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x}\,dx$.
5. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = x\sqrt{\ln x}$, gdzie $x \in [1, e]$.

Zestawy zadań z egzaminów#

EGZAMIN PODSTAWOWY

Zestaw I

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu
$$a_n = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+2} + \ldots + \frac{1}{e^n+n}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+n}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x}\right)$.

4. Wyznaczyć dwie liczby dodatnie o sumie 20 takie, aby iloczyn kwadratu pierwszej i sześcianu drugiej był największy.

5. Dobrać parametry $a, b \in \boldsymbol{R}$ tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x < -2, \\ x^2+x-4 & \text{dla} \quad |x| \leqslant 2, \\ \dfrac{b\sin(x-2)}{x-2} & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

6. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+\sqrt[3]{x}}$.

7. Znaleźć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y^2 = 3x$, $y = x^2 - 2x$.

8. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = \sin x + \cos x$, gdzie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Od roku akademickiego 2000/2001 na obu egzaminach studenci otrzymują do rozwiązania po 6 zadań.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \arcsin 2x}{\ln \arcsin 3x}$.
2. Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji
$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{2} - 4\ln x.$$
3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia
$$\sqrt[4]{80.7}\ .$$
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernej $\dfrac{x(x+4)}{x^2+4x+5}$.
5. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2}$.
6. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin 3x}{e^{2x}}\, dx$.
7. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{e^{x-1}+1}$ w punkcie $(1, f(1))$.
8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{4n^2 + \frac{9}{2}n - 1}\right)$.

Grupa C

1. Napisać wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x) = e^{\cos x}$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Naszkicować wykres funkcji $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, która spełnia warunki: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -\infty$, prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$, granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje - nawet niewłaściwa.
3. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernej $\dfrac{4x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}$.
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$.
5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n+1}\right)^{6n-1}$.
6. Podać definicję pochodnej funkcji. Korzystając z tej definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x\sqrt{x}$ w punkcie $x_0 > 0$.
7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{tg} x)^x$.
8. Wśród prostokątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.

Grupa D

1. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ na przedziale $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$.
2. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$.
3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{3n-2}-7}{8^{2n}-5}$.
4. Zbadać, czy równanie $10\sin\pi x = x+1$ na rozwiązanie:
   a) w przedziale $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, b) w przedziale $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
5. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x} + x\operatorname{arctg} x$.
6. Znaleźć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji
   $$f(x) = x\sqrt{1-4x^2}.$$
7. Uzasadnić, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\sqrt{1+2x} > 1 + x - \dfrac{x^2}{2}$.
8. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+9x}$.

Zestaw II

Grupa A

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywą $y^2 = x^3 - x^2$ oraz prostą $x = 2$.
2. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. Znaleźć ekstrema lokalne i asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.
4. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, punktu $x_0 = 0$ oraz $n = 3$.
5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.
6. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ na przedziale $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
7. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

8. Zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Grupa B

1. Oszacować dokładność wzoru przybliżonego

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Obliczyć objętość bryły V utworzonej przez obrót dookoła osi Ox obszaru ograniczonego parabolą $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ i prostą $5x - 8y + 14 = 0$.

3. Znaleźć ekstrema lokalne i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.

4. Dla jakich wartości parametru k ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{(k-2)n+1}{(k^2-2k-3)\,n-2}$$

jest zbieżny do 1?

5. Dana jest funkcja $f(x) = |x^2 - 1|$. Sporządzić wykres tej tej funkcji, a następnie z definicji obliczyć $f'_-(-1)$ oraz $f'_+(-1)$.

6. Na krzywej $y = x^3 - 3x + 5$ znaleźć punkty, w których styczna do tej krzywej jest równoległa do prostej $y = -2x$.

7. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}$.

8. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Grupa C

1. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach. Korzystając z tego twierdzenia obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n + 7^n)^{\frac{1}{n}}.$$

2. Wyznaczyć kąt nachylenia asymptoty ukośnej funkcji $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ do osi Ox.

3. Zbadać ciągłość funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

4. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ na przedziale $[-2, 5]$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi:
$$|y| = \sqrt{x-1}, \quad x - 2y - 4 = 0.$$

6. Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji $y = \sin 2x - 4\sin x + 2x$, gdzie $x \in (0, 2\pi)$.

7. Korzystając ze wzoru Taylora wykazać, że
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} \quad \text{dla każdego } x \in \boldsymbol{R}.$$

8. Podstawiając $x + 2 = t^3$ obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}\,dx}{x + \sqrt[3]{2+x}}$, gdzie $x \neq -1$.

Grupa D

1. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln\left(0.2 + \sqrt{1 + 0.04}\right).$$

2. Zbadać ciągłość funkcji
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

3. Wykazać, że przy obliczaniu wartości funkcji $f(x) = e^x$ dla $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ według wzoru przybliżonego:
$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$
popełniamy błąd bezwzględny mniejszy niż 0.006 .

4. Wykazać, że funkcja $f(x) = \operatorname{arctg} x + \arccos \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ma wartość stałą na całym przedziale określoności. Znaleźć tę stałą.

5. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x^3 e^{3x}\,dx$.

6. Znaleźć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = |\log x|$, $y = 0$, $x = 0.1$, $x = 10$.

7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(\dfrac{n^3 + 3n + 2}{n^2 + 2n}\right)^{3n+1}$.

8. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Zestaw III

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}$.
2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 6x}{\arcsin 3x}$.
3. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f była ciągła na $\boldsymbol{R}$, jeżeli
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<-2, \\ |x^2+x| & \text{dla} \quad |x|\leqslant 2, \\ a\log_2 x - bx & \text{dla} \quad x>2. \end{cases}$$
4. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x)=\sin^2 x$ w punkcie $x_0\in\boldsymbol{R}$.
5. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji
$$f(x)=4x+\frac{1}{x}.$$
6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(x^2+4)}$.
7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x)=\sin x$, gdzie $0\leqslant x\leqslant \pi$, wokół osi Ox.
8. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x\cos\frac{x}{3}\,dx$.

Grupa B

1. Obliczyć długość łuku krzywej $y=e^x$, gdzie $0\leqslant x\leqslant \ln 3$.
2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przy obrocie wykresu funkcji $f(x)=\operatorname{tg} x$, gdzie $0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{3}$, wokół osi Ox.
3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.
4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.
5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y=\dfrac{\ln x}{x}$ w punkcie (e,y_0).
6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2^n+1}-\sqrt{2^n-1}\right)$.
7. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x)=xe^{-x}.$$

8. Zbadać ciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ -\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + \frac{1}{3^n}}.$$

2. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ w $x_0 \neq 0$.

3. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)^x$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt[3]{8.3}\ .$$

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2 - 4}$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \arccos x\,dx$.

7. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$. Sporządzić rysunek.

8. Znaleźć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Grupa D

1. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(5 - 4x)\,dx}{x^2 - 4x + 20}$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = -1$, $x = e$.

4. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{6^n}{1^n + 2^n + 3^n}$.

5. Krawędź sześcianu zmierzono z dokładnością 1 mm i otrzymano 10.0 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tego sześcianu?

6. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$.

7. Nie korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin 2x}$.

8. Znaleźć dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji $f(x) = \arcsin\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)$. Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw IV

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + \frac{1}{2^n}}.$$

2. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ ax + b & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, a dla jakich jest ona tam różniczkowalna?

3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$ w punkcie $\left(\dfrac{1}{2}, y_0\right)$.

5. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ i następnie uzasadnić, że funkcja ta jest stała na przedziale $(1, \infty)$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2 + 2x + 10}$.

7. Całkując przez części obliczyć całkę $\displaystyle\int e^{3x} \cos 3x \, dx$.

8. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = x^2$, $y = 3x^2 - 1$, $x = 1$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n+1}\right)$.

2. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

3. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ jest ściśle wypukła na $\boldsymbol{R}$.

4. Uzasadnić, że wykres funkcji $f(x) = x^2 e^x - 1$ w przedziale $[0, 1]$ przecina oś Ox dokładnie jeden raz.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ ax+b & \text{dla} \quad x>1 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0=1$, a dla jakich jest ona tam różniczkowalna?

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+4x+5}$.

7. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x\sin 4x\,dx$.

8. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$, gdzie $\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{3}$, wokół osi Ox.

Grupa C

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

2. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ w $x_0>0$.

3. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)^x$.

4. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f dana wzorem
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<0, \\ \cos x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $x_0=0$, a dla jakich jest ona tam różniczkowalna?

5. Pokazać, że funkcja $f(x)=\operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{\pi}$ jest malejąca na przedziale $(-1,1)$.

6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y=\sin x$, $y=5x$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

7. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części obliczyć całkę
$$\int x^2\ln x\,dx.$$

8. Obliczyć całkę $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+2x}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{1+2^n+3^n}$.

2. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < 1, \\ \operatorname{arctg} x & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$, dla jakich jest ona tam różniczkowalna?

3. Przy użyciu różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia

$$\frac{1}{\cos 0.03}.$$

4. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{4x^2+1}$.

6. Korzystając ze wzoru na objętość bryły obrotowej wyprowadzić wzór na objętość kuli o promieniu $R > 0$.

7. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sin^2 3x$.

8. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Zestaw V

Grupa A

1. Narysować wykres funkcji ciągłej $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spełniającej podane warunki: $f(1) = 4$, $f(4) = 1$; $f'(x) > 0$ na przedziale $(-\infty, 1)$; $f'(x) < 0$ na przedziale $(1, 4)$; $f'(x) > 0$ na przedziale $(4, \infty)$; $f'(1) = 0$, $f'(4)$ nie istnieje.

2. Uzasadnić, że $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+n} = 1$.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$.

4. Wyznaczyć asymptotę ukośną w ∞ funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$. Sporządzić rysunek.

6. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ jest ściśle rosnąca i ściśle wypukła.

7. Całkując przez części obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx$.

8. Korzystając z metod rachunku różniczkowego uzasadnić, że nierówność

$$2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} > 0$$

jest prawdziwa dla każdego $x > 1$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$.
2. Przekątna sześcianu zmierzona z dokładnością 1 mm wynosi 14.3 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni całkowitej tego sześcianu?
3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ w punkcie $(1, f(1))$.
4. Obliczyć całkę $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$.
5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywą $y = \ln x$ oraz prostymi $y = -1$, $x = e$. Sporządzić rysunek.
6. Uzasadnić, że dla każdego $x > 0$ prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$
Wykorzystać w tym celu wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$.
7. Obliczyć granicę $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.
8. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x) = x\sin 4x$ na przedziale $[0, \pi]$.

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\pi^n}{(n+1)!}$.
2. Trapez krzywoliniowy ograniczony krzywą $y = xe^x$ oraz prostymi $x = 1$ i $y = 0$ obraca się dookoła osi Ox. Obliczyć objętość powstałej bryły obrotowej.
3. Obliczyć granicę $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{\sin x - x}$.
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x}$.
5. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.
6. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)^2}$ na przedziale $[-2, 3]$.

7. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < -2, \\ |x^2 + x| & \text{dla} \quad |x| \leqslant 2, \\ a \log_2 x - bx & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$$
była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

8. Napisać wzór Taylora z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \operatorname{ch} x \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ w punkcie $x_0 = \ln 2$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{\pi^n} - \sqrt{e^n}\right)$.
2. Wyznaczyć dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 20, a iloczyn kwadratu pierwszej i trzeciej potęgi drugiej ma wartość największą.
3. Wyznaczyć funkcję pierwotną dla funkcji $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 6x + 18}$.
4. Obliczyć długość łuku krzywej $y = x\sqrt{x}$ między punktami $(0,0)$, $\left(\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}\right)$.
5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2(1 + 2^x)}{\log_3(1 + 3^x)}$.
6. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.
7. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 3}.$$
8. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt[4]{15.96}\ .$$

Zestaw VI

Grupa A

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego osią Ox, prostymi $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ oraz wykresem funkcji $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
2. Zbadać, czy równanie $\sin x = 1 - x$ ma rozwiązanie w przedziale $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Odpowiedź uzasadnić.
3. Obliczyć objętość bryły V powstałej przez obrót dookoła osi Ox figury ograniczonej osią Ox, prostymi $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ oraz wykresem funkcji
$$f(x) = \sqrt{x \cos x}.$$

4. Znaleźć przedział, na którym funkcja $f(x) = x^2 \ln x$ jest malejąca i wklęsła.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

6. Obliczyć całkę $\int \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-5n+7}\right)$.

8. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = 3\sqrt{-x^2-3x+4}-1$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{2}x-\cos\sqrt{5}x}{x^2}$.

2. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \arcsin\left(1-\frac{1}{|x|}\right)$.

3. Za pomocą odpowiedniego podstawienia obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int\frac{\sin^3 x\,dx}{1+\cos^2 x}.$$

4. Znaleźć równania wszystkich asymptot wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+3x+2}.$$

5. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego łukami parabol:
$$y = 4-x^2, \qquad y = x^2-2x.$$

6. Obliczyć objętość bryły V powstałej przez obrót dookoła osi Ox figury ograniczonej osią Ox, prostymi: $x = 0$, $x = 1$ oraz wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{xe^{-x}}$.

7. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{5n-1}$.

Grupa C

1. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$.

2. Obliczyć pole powierzchni Σ powstałej przez obrót dookoła osi Ox wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $2 \leqslant x \leqslant 6$.

3. Za pomocą podstawienia obliczyć całkę $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

4. Zbadać, czy równanie $2^x = \sqrt{x} + 2$ ma rozwiązanie w przedziale $(1, 2)$. Odpowiedź uzasadnić.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3x+1}{2x+3} \right)^{\frac{3}{2-x}}$.

6. Obliczyć pole figury ograniczonej osią Ox oraz wykresem funkcji $f(x) = x \sin 2x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

7. Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

8. Niech $f(x) = \left(1 + \arcsin \sqrt{x}\right)^5$. Znaleźć funkcję odwrotną $f^{-1}(y)$ i określić jej dziedzinę.

Grupa D

1. Znaleźć równania wszystkich asymptot funkcji $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

2. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego łukami parabol:
$$2y = -x^2, \quad 2x = -y^2.$$

3. Niech $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$. Narysować wykresy funkcji złożonych $f \circ g$, $g \circ f$.

4. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2 - 3}$.

5. Obliczyć długość łuku krzywej $y = x\sqrt{x}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}$.

7. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - \cos 3n}{3n^2 - 2n + 1}.$$

8. Metodą całkowania przez części obliczyć całkę $\displaystyle\int e^{2x} \cos x \, dx$.

Zestaw VII

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$.

2. Znaleźć asymptoty i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

3. W punkcie $x_0 = 0$ zbadać lewo- i prawostronną ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x^2} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

4. Pokazać, że funkcja $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ jest stała na przedziale $[1, \infty)$. Wyznaczyć tę stałą.

5. Oszacować błąd bezwzględny wzoru przybliżonego $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ dla $-\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2 - 2x + 10}$.

7. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \sin^2 x$, $y = x(x-\pi)$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Sprządzić rysunek.

8. Obliczyć długość łuku krzywej $y = x^{\frac{3}{2}}$, gdzie $x \in [0, 4]$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{9n+7}$.

2. Pokazać, że równanie $3^x = 2\cos x$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.

3. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [x(2\operatorname{arctg} x + \pi)]$.

4. Udowodnić, że nierówność $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ jest prawdziwa dla każdego $x > 1$.

5. Jaką przybliżoną równość otrzymamy odrzucając resztę R_5 we wzorze Maclaurina dla funkcji cosinus hiperboliczny? Oszacować błąd jaki popełniamy obliczając z tej przybliżonej równości wartość wyrażenia $\operatorname{ch} \dfrac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

7. Trapez krzywoliniowy ograniczony krzywą $y = xe^x$ oraz prostymi $x = 1$, $y = 0$ obraca się dookoła osi Ox. Znaleźć objętość powstałej bryły V. Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć długość łuku krzywej $y = 1 - \ln\cos x$, gdzie $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Grupa C

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9^n+3^n}-\sqrt{9^n+1}\right)$.

2. W punkcie $x_0=\pi$ zbadać jednostronną ciągłość funkcji

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x<\pi,\\ 1 & \text{dla} \quad x=\pi,\\ \dfrac{\sin x}{\pi-x} & \text{dla} \quad x>\pi.\end{cases}$$

3. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

4. Pokazać, że funkcje $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ i $g(x)=\operatorname{arctg}x$ mają jednakowe pochodne i następnie znaleźć zależność między tymi funkcjami dla $x<1$.

5. Oszacować błąd bezwzględny przybliżonego wzoru $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{3}$ dla $0<x<\dfrac{1}{10}$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int\frac{3x^2+x+9}{x^3+9x}\,dx$.

7. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y=xe^{-x}$, $x=1$, $y=0$. Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y=\sqrt{\sin^3 x}$, gdzie $0\leqslant x\leqslant\pi$, dookoła osi Ox.

Grupa D

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach uzasadnić równość

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right)=0.$$

2. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}q\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+1 & \text{dla} \quad x<0,\\ p & \text{dla} \quad x=0,\\ \dfrac{\sin x^2}{x} & \text{dla} \quad x>0.\end{cases}$$

Dobrać parametry rzeczywiste p i q tak, aby funkcja ta była ciągła na $\mathbb{R}$.

3. Obliczyć kąt, pod którym wykresy funkcji $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$ przecinają się we wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Sporządzić rysunek.

4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji

$$f(x)=xe^{-2x}.$$

5. Oszacować błąd bezwzględny wzoru przybliżonego

$$\cos\frac{x}{2} \approx 1 - \frac{x^2}{8} \quad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}.$$

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(x+16)\,dx}{x^3+16x}$.

7. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = \sqrt{x\sin x}$, gdzie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \ln\sin x$, gdzie $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

2. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{2n+1}$.

3. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

4. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi:

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \qquad y = \frac{x^2}{2}.$$

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

6. Wykazać, że styczne do krzywej

$$y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$$

poprowadzone w punktach $(x_0, 1)$ tej krzywej przecinają się w początku układu współrzędnych.

7. Czy można dobrać stałą A tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(x + \frac{|x|}{x}\right)} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

była ciagła na $\boldsymbol{R}$?

8. Znaleźć długość łuku krzywej $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, gdzie $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$.

2. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y^2 = 2x+1$, $x-y-1=0$.

4. Wyznaczyć przedział, w którym funkcja $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ jest ściśle rosnąca i ściśle wklęsła.

5. W punkcie $x_0 = 0$ zbadać różniczkowalność funkcji f określonej wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x}{3} & \text{dla} \quad x < 0, \\ \dfrac{1}{3} & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{e^x - x}{3} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

6. Obliczyć pole powierzchni Σ utworzonej przez obrót krzywej $3y - x^3 = 0$, gdzie $x \in [0,1]$, dookoła osi Ox.

7. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

8. Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = (3-\pi)\arcsin\dfrac{1-x^2}{4}$.

Grupa C

1. Niech $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ ax+b & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$. Dla jakich wartości parametrów a i b, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$?

2. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = x^2 \ln x.$$

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\sin\dfrac{1}{2n}} - 1\right)$.

4. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

5. Dla krzywej $y = x^3 + 3x^2 - 5$ napisać równanie stycznej prostopadłej do prostej $2x - 6y + 1 = 0$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{x^2+6x+18}$.

7. Obszar ograniczony łukami parabol $y = x^2$, $y^2 = x$ obraca się wokół osi Ox. Obliczyć objętość bryły V, która przy tym powstaje.

8. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Grupa D

1. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach. Korzystając z tego twierdzenia wyznaczyć granicę ciągu
$$x_n = \sqrt[2n]{3^n + 5^n + 7^n}.$$

2. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)^2}{e^{x^2}}$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe: $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ oraz proste: $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $y = 0$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2+x}\,dx$.

5. Oszacować dokładność wzoru przybliżonego $\operatorname{tg} x \approx x$ dla $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x+1}{4^x}\,dx$.

7. Wyznaczyć przedziały, na których funkcja $f(x) = \left(x^2-4\right)e^x$ jest jednocześnie malejąca i ściśle wypukła.

8. Bok trójkąta równobocznego ma długość a. Wyznaczyć wymiary prostokąta wpisanego w ten trójkąt, który ma największe pole.

Zestaw IX

Grupa A

1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{1}{\sqrt[5]{31.98}}.$$

2. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} 2a + x\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ b & \text{dla} \quad x = 0, \\ a + \dfrac{\ln x}{\ln\sin x} & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

3. Sformułować twierdzenie Lagrange'a. Następnie korzystając z niego uzasadnić, że nierówność $\ln(1+x) < x$ jest prawdziwa dla każdego $x > 0$.

4. Obliczyć długość łuku krzywej $y = x\sqrt{x}$ zawartego pomiędzy punktami $(0,0)$, $\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}\right)$.

5. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)^2}$ na przedziale $[-2, 3]$.

6. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$.

7. Uzasadnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+2n} = 1$.

8. Korzystając ze wzoru Maclaurina oszacować dokładność wzoru przybliżonego
$$\sin^2 x \approx x^2 \text{ dla } \quad |x| \leqslant \frac{1}{10}.$$

Grupa B

1. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach. Korzystając z tego twierdzenia obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n+1}+3^{n+3}+5^{n+2}}.$$

2. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

4. Sformułować twierdzenie Lagrange'a. Następnie korzystając z niego uzasadnić, że nierówność
$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y|$$
jest prawdziwa dla dowolnych $x, y \in \boldsymbol{R}$.

5. Sformułować twierdzenie Taylora. Napisać wzór Taylora dla funkcji
$$f(x) = \sqrt[5]{1+x},$$
punktu $x_0 = -2$ z resztą R_3. Określić, dla jakich x otrzymany wzór jest prawdziwy.

6. Wyznaczyć funkcję pierwotną dla funkcji $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3-1}$, gdzie $x > 1$.

7. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią otrzymaną po obrocie krzywej $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$, gdzie $x \in [0,1]$, dookoła osi Ox.

8. Narysować wykres funkcji f ciągłej na zbiorze $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ takiej, że: prosta $x = 0$ jest jej lewostronną asymptotą pionową, ale nie jest prawostronną; w punkcie $x = -2$ funkcja ta nie ma pochodnej, $f'(x) < 0$ dla $x < -2$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$.

Grupa C

1. Sformułować twierdzenie Maclurina. Następnie korzystając z niego obliczyć $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ z dokładnością 10^{-2}.

2. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią otrzymaną po obrocie krzywej
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}},$$
gdzie $x \in [0, 1]$, dookoła osi Ox.

3. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

4. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} b + \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 3 & \text{dla} \quad x = 0, \\ ax^x & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

5. Uzasadnić, że równanie $3^x + x^3 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie. Obliczyć jedno z nich z dokładnością 0,25.

6. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \left(\frac{3n - 2}{3n + 5}\right)^{2-5n}$.

7. Wyznaczyć funkcję pierwotną F dla funkcji $f(x) = x^2 \ln x$, gdzie $x > 0$, taką, że $F(1) = 1$.

8. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $x = y^2$, $x + y = 2$.

Grupa D

1. Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0. Korzystając z tej definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ w punkcie $x_0 \neq 0$.

2. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ na odcinku $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ na przedziale $[-3, 3]$.

4. Sformułować twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym. Korzystając z tego twierdzenia wykazać, że ciąg $a_n = \frac{7^n}{n!}$ jest zbieżny.

5. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^3 - x^2 + 2x}$.

6. Sformułować twierdzenie Maclaurina. Następnie korzystając z niego oszacować błąd bezwzględny wzoru przybliżonego

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{w przedziale } [0,1].$$

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{\sin x - x}$.

8. Uzasadnić, że równanie $e^x = \ln x + 3$ ma co najmniej jedno rozwiązanie na przedziale $[1,2]$.

Zestaw X

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-n^2}{2+4+6+\ldots+2n}$.

2. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x & \text{dla} \quad x < 0, \\ 3b+1 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{ax^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt{2+(x-1)^2}$.

4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$$

w punkcie $(0, f(0))$.

5. Określić przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

6. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$1.05^{1.05}.$$

7. Korzystając z metody całkowania przez części obliczyć całkę

$$\int (4x+2)e^{2-x}\,dx.$$

8. Znaleźć długość wykresu funkcji $y = x^{\frac{3}{2}}$, gdzie $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Grupa B

1. Określić przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji
$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) e^{x+2}.$$

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{2+n}\right)^{2(1-n)}$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ oraz prostymi: $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{12}$.

4. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ b + 1 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{1 - e^{ax}}{\operatorname{tg} x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

5. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$.

7. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$ w punkcie $(1, f(1))$.

8. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x\,(x^2+1)}$.

Grupa C

1. Korzystając z metody całkowania przez części obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int (2x + 3) \ln x \, dx.$$

2. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą w wyniku obrotu wokół osi Ox krzywej $f(x) = \sin x$, gdzie $[0, \pi]$.

3. Określić przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$.

4. Obliczyć $\sqrt[5]{e}$ z dokładnością 10^{-2} wykorzystując metody rachunku różniczkowego.

5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x+1}}$ w punkcie $(0, f(0))$.

6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{xe^x}{x-1}$.

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$.

8. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x < 0, \\ 3b + 1 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin ax}{\ln(x+1)} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Grupa D

1. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \cos(\operatorname{arctg}(\ln x))$ w punkcie $(1, f(1))$.

2. Wyznaczyć wszytkie asymptoty funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}$.

4. Określić przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

5. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

6. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 3b & \text{dla} \quad x = 0, \\ (1 + ax)^{\frac{1}{\sin x}} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

7. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresami funkcji: $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$, $g(x) = -3x + 6$ i prostą $y = 0$.

8. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n + 2^n}{5^n}}$.

EGZAMIN NA OCENĘ CELUJĄCĄ

Zestaw I

1. Funkcja f spełnia dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^3.$$

Uzasadnić, że funkcja ta jest stała na $\mathbb{R}$.

2. Wśród walców wpisanych w sześcian, o osiach pokrywających się z przekątną sześcianu, znaleźć ten, który ma największą objętość.

3. Funkcja g spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} g(x) = 3$ oraz jest ciągła na przedziale $[1,\infty)$. Wyznaczyć granicę
$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt\right\}.$$

4. Znaleźć kres dolny i górny zbioru $\{\sqrt[n]{n} : n \in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}\}$.

Zestaw II

1. Funkcja f spełnia warunek
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)+f'(x)] = 0.$$
Uzasadnić, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Uzasadnić, że zbiór
$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$
jest ograniczony.

3. Narysować wykres funkcji $y = \cos(2\arccos x)$.

4. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[0,1]$. Uzasadnić równość
$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

Zestaw III

1. Zbadać, czy istnieje funkcja f spełniająca wszystkie podane niżej warunki:
a) pochodne $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(99)}(0)$ istnieją i są właściwe;
b) nie istnieją pochodne $f_-^{(100)}(0)$, $f_+^{(100)}(0)$ właściwe ani niewłaściwe.
Odpowiedź uzasadnić.

2. Uzasadnić, że ciągi $s_n = \sin n$, $c_n = \cos n$ są rozbieżne.

3. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe f, które dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełniają równość
$$f(x) = f(3x).$$

4. Funkcja $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jest różniczkowalna na przedziale $[0,1]$ oraz spełnia warunki $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Pokazać, że istnieją liczby $0 < a < b < 1$ spełniające warunek $f'(a)\cdot f'(b) = 1$.

Zestaw IV

1. Funkcja f jest ciągła na odcinku $[0,3]$ oraz spełnia warunek $f(0) = f(3)$. Udowodnić, że istnieją punkty $x, y \in [0,3]$ spełniające warunki
$$|x-y| = 1, \qquad f(x) = f(y).$$

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+e^{\sin^4 x}}}$ z dokładnością 0.005 .

3. Sześcian ma krawędź o długości 1. Obliczyć objętość bryły zakreślonej przez sześcian podczas obrotu wokół jego przekątnej.

4. Przez punkt $P = (-3, 2)$ poprowadzono wszystkie możliwe styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Znaleźć równania tych stycznych.

Zestaw V

1. Dla $n \in \boldsymbol{N}$ niech a_n i b_n oznaczają liczby naturalne spełniające warunek $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

2. Czy istnieje funkcja ciągła, której wykres ma punkty wspólne z każdą prostą na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

3. Funkcja f jest całkowalna na dowolnym odcinku oraz spełnia warunki: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Pokazać, że istnieje liczba a, dla której spełniona jest równość
$$\int_a^{a+\pi} f(x)\,dx = e.$$

4. Dwaj kolarze minęli jednocześnie trzy kolejne lotne premie. Udowodnić, że w pewnej chwili przyspieszenia obu kolarzy były jednakowe.

Zestaw VI

1. Funkcja f jest ciągła na $\boldsymbol{R}$ oraz dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek
$$\int_{a-1}^{a+1} f(x)\,dx = 2.$$
Udowodnić, że funkcja ta jest okresowa.

2. Przekrój poprzeczny rynny ma kształt paraboli o równaniu $y = x^2$. Znaleźć promień największej kuli, która będzie mogła toczyć się po dnie rynny.

3. W dowolne puste ramki studenci A i B wpisują na przemian współczynniki rzeczywiste wielomianu

$x^{10} + \square x^9 + \square x^8 + \square x^7 + \square x^6 + \square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + 1.$

Jeżeli otrzymany wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych, to wygrywa student A. W przeciwnym przypadku wygrywa student B. Wpisywanie współczynników rozpoczął student A. Pokazać, że student B ma strategię wygrywającą.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right]$.

Zestaw VII

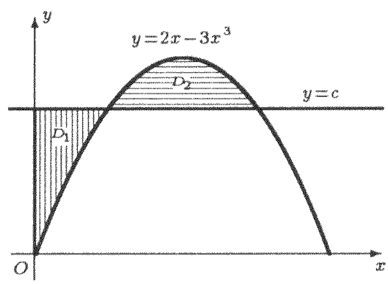
1. Dla liczby naturalnej n niech x_n oznacza pierwiastek równania $e^{-x} = nx$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(nx_n - 1\right)\right].$$

2. Funkcja f jest ciągła i ma okres $T = 1$. Pokazać, że istnieje liczba x_0, dla której zachodzi równość

$$f\left(x_0 + \pi\right) = f\left(x_0\right).$$

3. Znaleźć liczbę rzeczywistą c, dla której pola obszarów D_1 i D_2 (zobacz rysunek) są jednakowe.



4. Zbadać, czy istnieją funkcje wypukłe f i g takie, że $f(x) - g(x) = \sin x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$. Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw VIII

1. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \dfrac{3}{\sqrt{n^4+3}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$.

2. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\sin x + nx\right) dx = 0.$$

3. Funkcja $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ jest rosnąca oraz spełnia warunek

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1.$$

Pokazać, że

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(5x)}{f(x)} = 1.$$

4. Z długiego prostokątnego kawałka blachy o szerokości d trzeba zrobić rynnę. Rynna ma mieć kształt części powierzchni bocznej walca. Jaki powinien być promień walca, aby rynną mogło spływać najwięcej wody?

Zestaw IX

1. Zbadać, czy istnieją ciągi (x_n), (y_n), których wyrazy są liczbami naturalnymi i takie, że

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right) = \sqrt[3]{2000}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

2. Znaleźć wszystkie kąty α, gdzie $0 < \alpha < \pi$, o jakie można obrócić (wokół początku układu współrzędnych) wykres funkcji:

a) $y = e^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$,

b) $y = \sin x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$,

aby otrzymana krzywa była wykresem pewnej funkcji w tym samym układzie współrzędnych. Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech p_n będzie przybliżeniem dziesiętnym liczby π z dokładnością do n cyfr po przecinku. Pokazać, że liczba

$$P_n = p_n + \sin p_n$$

jest przybliżeniem liczby π z dokładnością do $3n$ cyfr po przecinku. Na przykład dla $p_2 = 3.14$ mamy $P_2 = 3.141593\ldots$.

4. Udowodnić nierówność

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9.0001\,.$$

Zestaw X*

1. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb rzeczywsitych φ, λ zachodzi równość

$$\lim_{n \to \infty} \left(\cos\frac{\varphi}{n} + \lambda \sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = e^{\lambda\varphi}.$$

*Zestaw ten opracowała dr Teresa Jurlewicz.

2. Wskazać większą z liczb

$$\sqrt[2000]{2000}, \qquad \sqrt[2001]{2001}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania

$$2^x = x^2.$$

4. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły obrotowej uzyskanej w wyniku obrotu wokół osi Oy koła o promieniu r i środku $(R, 0)$, gdzie $R > r$.

Zestaw XI

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right].$$

2. Podać przykład funkcji f określonej na $\mathbb{R}$, której dziedziny naturalne D_1, D_2, D_3, ... pochodnych f', f'', f''', ... spełniają warunek

$$\mathbb{R} \supset D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \ldots,$$

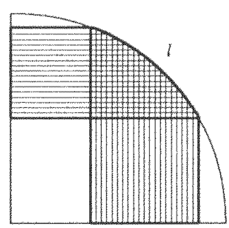
przy czym żadne z zawierań nie jest równością. Odpowiedź uzasadnić.

3. Określić liczbę rozwiązań rzeczywistych równania

$$4^x = x^4.$$

Odpowiedź uzasadnić.

4. W pierwszej ćwiartce okręgu jednostkowego wybrano łuk o długości l mniejszej niż $\frac{\pi}{2}$. Pokazać, że suma pola trapezu krzywoliniowego leżącego poniżej tego łuku oraz pola trapezu leżącego po jego lewej stronie nie zależy od położenia łuku (zobacz rysunek).



EGZAMIN POPRAWKOWY

Zestaw I

Grupa A

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \dfrac{2}{x^2+6x+18}$.

2. Obliczyć całkę $\int x^2 \operatorname{sh} x\, dx$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe:

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{4}{x},\ y = 1,\ y = 4.$$

Sporządzić rysunek tego obszaru.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+4^x)}{\ln(1+3^x)}$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2+n+n^2} - \sqrt{(n+1)^2+2}\right)$.

6. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$ na przedziale $[-1, 2]$.

7. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0 = 2$.

8. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ jest ściśle rosnąca i ściśle wklęsła.

Grupa B

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \dfrac{1}{4x^2+8x+40}$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe:

$$y = x^2,\ y = x^2 + 3,\ y = 4.$$

Sporządzić rysunek tego obszaru.

4. Napisać wzór Taylora z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ przyjmując $x_0 = 1$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(4^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$.

6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2+4n+1}\right)$.

7. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ na przedziale $[-7, 0]$.

8. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = -\sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 9$.

Grupa C

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 10x + 34}$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$.

3. Narysować i obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe:
$$x = y^2, \quad x = \frac{y^2}{4}, \quad y = 1, \quad y = 2.$$

4. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ przyjmując $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ oraz $n = 3$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left[x \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right) \right]$.

6. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{16n^2 + 5n - 4} - 4n \right)$.

7. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ w punkcie $x_0 = 4$.

8. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = x\sqrt{x+1}$ jest ściśle malejąca i ściśle wypukła.

Grupa D

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x) = \dfrac{9}{9x^2 + 6x + 5}$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

3. Narysować i obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe:
$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 3.$$

4. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \operatorname{ch} x$ przyjmując $x_0 = \ln 2$ oraz $n = 3$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

6. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(2n - \sqrt{1 + n + 4n^2} \right)$.

7. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x)^2}$ na przedziale $[-2, 3]$.

8. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zestaw II

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + \sin^2 n}{n^2 + n + 1}$.

2. Funkcja f jest określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ Ax + B & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$
Dla jakich wartości parametrów A i B funkcja ta jest a) ciągła, b) różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$?

3. Przy pomocy reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x} \right)$.

4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

5. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[0, +\infty)$.

6. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\, dx$.

7. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - x}$.

8. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Grupa B

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + \frac{1}{2^n}}.$$

2. Funkcja f jest określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ Ax + B & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$
Dla jakich wartości parametrów A i B funkcja ta jest a) ciągła, b) różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$?

3. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

5. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

7. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernej $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3+x}$.

8. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = \cos x$, gdzie $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, wokół osi Ox.

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + \sin^2 n}$.

2. Funkcja f jest określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ Ax + B & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$
Dla jakich wartości parametrów A i B funkcja ta jest a) ciągła, b) różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$?

3. Przy pomocy reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[5]{1+2x} - x}{\sqrt[3]{2+x} + x}$.

4. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ w jej dziedzinie.

5. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, a następnie uzasadnić nierówność $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$ dla każdego $x > 0$.

6. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

7. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernej $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2}$.

8. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe: $x = y^2$, $x + y = 2$.

Grupa D

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$.

2. Funkcja f określona jest wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ Ax + B & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$
Dla jakich wartości parametrów A i B funkcja ta jest a) ciągła, b) różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$?

3. Przy pomocy twierdzenia de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^x$.

4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}.$$

5. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ w jej dziedzinie.

6. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \arcsin x \, dx$.

7. Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernej $f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$.

8. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = \sqrt{\cos^3 x}$, gdzie $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, wokół osi Ox.

Zestaw III

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

2. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{1}{\sqrt[4]{15.996}}.$$

3. Obliczyć całkę $\int \frac{x\,dx}{(e^x)^3}$.

4. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji
$$y = \frac{5-4x}{x^2-4x+20},$$
prostymi $x = 0$, $x = 1$ oraz osią Ox.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4n - \sqrt{16n^2+9n-1}\right)$.

6. Wyznaczyć przedziały, na których funkcja $f(x) = x^2 \ln x$ jest jednocześnie rosnąca i ściśle wypukła.

7. Sformułować twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej. Korzystając z tego twierdzenia wyprowadzić wzór
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

8. Narysować wykres funkcji $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, która spełnia wszystkie podane warunki:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$;

prosta $y = \pi$ jest asymptotą funkcji f w $-\infty$;
granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje (właściwa ani niewłaściwa).
Na rysunku zaznaczyć fragmenty wykresu, które spełniają podane warunki.

Grupa B

1. Uzasadnić, że granica $\lim\limits_{x\to\infty} [4^x(\cos x + 1)]$ nie istnieje.
2. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresami funkcji: $y = \operatorname{tg} x$, gdzie $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $y = \operatorname{ctg} x$, gdzie $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ oraz osią Ox.
3. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach. Korzystając z tego twierdzenia obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n} + 2 \cdot 3^{-n} + 3 \cdot 4^{-n}}.$$
4. Znaleźć wymiary konserwy w kształcie walca o objętości $V = 250\pi\,\mathrm{cm}^3$, do wykonania której trzeba użyć najmniej blachy. Sporządzić rysunek.
5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 4x}$.
6. Oszacować dokładność wzoru przybliżonego $\cos 2x \approx 1 - 2x^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}$.
7. Sformułować twierdzenie Darboux o miejscach zerowych funkcji. Korzystając z tego twierdzenia wskazać przedział o długości $\frac{1}{2}$, w którym równanie $3^x + x^3 = 0$ ma rozwiązanie.
8. Znaleźć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Grupa C

1. Podać wzór na objętość bryły obrotowej. Korzystając z tego wzoru obliczyć objętość stożka ściętego o wysokości H i promieniach podstaw R, r, gdzie $R > r$. Sporządzić rysunek.
2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^x$.
3. Napisać wzór Taylora z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ i punktu $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$.
5. Przez punkt $P = (1, 3)$ poprowadzić prostą tak, aby wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych utworzyła trójkąt o najmniejszym polu. Sporządzić rysunek.

6. Obliczyć całkę $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$.

7. Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0. Korzystając z tej definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ w punkcie $x_0 > 0$.

8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+3}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \left(\frac{4n+2}{4n+3}\right)^{5-8n}$.

2. Wykorzystując wzór Maclaurina obliczyć $\sqrt[3]{e}$ z dokładnością 10^{-3}.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(4^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}\right)$.

4. Obliczyć całkę $\int \frac{\cos 2x}{e^x}\,dx$.

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granicę
$$\lim_{x\to-\infty} e^x(2+3\sin x).$$

6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = x^2$, $y = x^2+3$, $y = 4$. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć całkę $\int \frac{(4x+1)\,dx}{x^2+10x+34}$.

8. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$ na przedziale $[-1, 2]$.

Zestaw IV

Grupa A

1. Podać dziedzinę, zbadać różniczkowalność i obliczyć pochodną funkcji
$$f(x) = \log_2 (x\sin x)^2 .$$

2. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+2}{2}}$.

3. Uzasadnić nierówność $\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right) \leqslant x + \frac{\pi}{4}$ dla każdego $x \geqslant 0$.

4. Wyznaczyć taką całkę nieoznaczoną $F(x) = \int xe^{-\frac{x}{2}}\,dx$, która spełnia warunek $F(2) = 0$.
5. Korzystając ze wzoru Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sqrt[10]{1+x}$ obliczyć $\sqrt[10]{2}$ z dokładnością 0.001 .
6. Dobrać parametry a, b i c tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x < -1, \\ bx^2 & \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ c\sin x & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
była różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$.
7. Podać definicję granicy funkcji w nieskończoności. Obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^4 - 2^x\right)$.
8. Obliczyć objętość bryły V powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru określonego nierównościami: $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

Grupa B

1. Dane są funkcje $f(x) = |x-1|$ i $g(x) = |x+2|$. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji złożonej $h(x) = (f \circ g)(x)$.
2. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówność
$$\ln\left(x^2 + e\right) \leqslant 1 + \frac{2x}{e} \quad \text{dla każdego } x \geqslant 0.$$
3. Podać definicję granicy właściwej ciągu. Korzystając z tej definicji uzasadnić równość
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{1-2n^2} = -\frac{1}{2}.$$
4. Korzystając ze wzoru Maclaurina obliczyć $\cos\frac{1}{3}$ z dokładnością 0.001 .
5. Wyznaczyć taką całkę nieoznaczoną $F(x) = \int x\sin 2x\,dx$, która spełnia warunek $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
6. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x^2 + \frac{1}{x}\right)$.
7. Podać dziedzinę oraz obliczyć pochodną funkcji
$$f(x) = \log_2\left(\log_2\left(x^2 - 4\right)\right).$$
8. Wykorzystując definicję całki oznaczonej obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2}.$$

Grupa C

1. Dane są funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 1. \end{cases}$$

Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji złożonej $h(x) = (g \circ f)(x)$.

2. Wyznaczyć taką całkę nieoznaczoną $F(x) = \int \operatorname{arctg} x \, dx$, która spełnia warunek $F(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Podać dziedzinę, wyznaczyć ekstrema, asymptoty oraz naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{\left(\ln x^2\right)^2}{x}.$$

4. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówność

$$x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{dla każdego } 0 \leqslant x < 1.$$

5. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x-a| & \text{dla} \quad x < a, \\ bx & \text{dla} \quad x \geqslant a \end{cases}$$

była różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$.

6. Zbadać monotoniczność, ograniczoność i zbieżność ciągu

$$a_n = (-1)^n \cdot n - (-1)^{n+1} \frac{n^2-1}{n}.$$

7. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_4^6 \frac{x^3 \, dx}{x^2 - 2x - 3}$.

8. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - |x|}}$.

Grupa D

1. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówność

$$\ln\left(1 + \sin^2 x\right) \leqslant x \sin 2x \quad \text{dla każdego } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

2. Wykazać, że równanie $x^5 + 5x + 1 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek należący do przedziału $(-1, 0)$.

3. Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a\left(2+e^{\frac{1}{x}}\right) & \text{dla} \quad x < 0, \\ \lim\limits_{t\to 0^-}\left(2+e^{\frac{1}{t}}\right) & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\boldsymbol{R}$.

4. Wyznaczyć taką całkę nieoznaczoną $F(x) = \int \log_2 x \, dx$, która spełnia warunek $F(2) = 0$.

5. Wyznaczyć ekstrema i punkty przegięcia wykresu funkcji

$$f(x) = \int_1^x \frac{1 - 2\ln t}{t^3} \, dt$$

na przedziale $(1, \infty)$.

6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right).$$

7. Korzystając ze wzoru Maclaurina obliczyć $\ln 1.2$ z dokładnością 0.01.

8. Parabolę $y = x^2$ obracamy wokół osi Oy. Obliczyć objętość bryły ograniczonej utworzoną w ten sposób powierzchnią oraz płaszczyzną $y = 4$.

Zestaw V

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 2^n \cos^2 n}.$$

2. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \cos \frac{x}{2} \, dx$.

3. Napisać wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x) = e^{\cos x}$ i punktu $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(2^{\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}}\right).$$

5. Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$ w punkcie $(0, f(0))$.

6. Znaleźć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \frac{x}{2}$, $y = 2^{-x}$, $y = 2$ i $x = 0$. Sporządzić rysunek.

7. Znaleźć przedział, na którym funkcja $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ jest jednocześnie rosnąca i ściśle wypukła.

8. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+3n+5}\right)$.

2. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\,x}$.

3. Napisać wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x) = (\ln x)^x$ i punktu $x_0 = e$.

4. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

5. Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \cos^2 x$ w punkcie $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

6. Znaleźć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = \sqrt{x}$, $y = 2-x^2$, $x = 0$. Sporządzić rysunek.

7. Znaleźć przedziały monotoniczności oraz najmniejszą wartość funkcji
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x-3).$$

8. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = x \operatorname{arcctg} x^3$.

Grupa C

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}+3^{-n}+6^{-n}}.$$

2. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$.

3. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_2 dla funkcji $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$.

4. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

5. Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1}-2$ w punkcie $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right)$.

6. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = \sin x + \cos x$, gdzie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sporządzić rysunek

7. Znaleźć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

8. Czy funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ 2 & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$? Odpowiedź uzasadnić.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n+5}{2n+1} \right)^{6n+3}$.
2. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{2\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$.
3. Napisać wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x) = x^{\cos x}$ i punktu $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
4. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\ln \arcsin 6x}{\ln \arcsin x}$.
5. Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ w punkcie $(1, f(1))$.
6. Znaleźć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, gdzie $x \in [-1, 1]$. Sporządzić rysunek.
7. Znaleźć przedział, na którym funkcja $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$ jednocześnie maleje i jest wklęsła.
8. Czy funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla} \quad x < 2, \\ x + 10 & \text{dla} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$
jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 2$? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw VI

Grupa A

1. Obliczyć całkę $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\,dx$.
2. Narysować wykres funkcji $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, która spełnia wszystkie podane warunki: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ nie istnieje, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 3$, prosta $y = 1 - 2x$ jest asymptotą funkcji f w ∞.
3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{1}{\sqrt[3]{7.997}}.$$

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-4}$.

5. Wyznaczyć przedziały monotoniczności, ekstrema oraz granice na krańcach dziedziny funkcji $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Następnie wyznaczyć zbiór wartości tej funkcji.

6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = |x|$, $y + x^2 = 2$.

7. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granicę

$$\lim_{x \to -\infty} \left[e^x(3 - 2\cos x)\right].$$

8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4 \cdot 2^n + 3^n}{5 \cdot 2^n - 3^n}$.

Grupa B

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = |x|(x-1).$$

2. Obliczyć całkę $\int \frac{\left(x^2+13\right)dx}{x^2+4x+13}$.

3. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_4 dla funkcji $f(x) = x^2e^x$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin 2x}\right)$.

5. Obliczyć całkę $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x}\,dx$.

6. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = x\sqrt{\ln x}$, gdzie $x \in [1, e]$.

7. Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0. Korzystając z tej definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{2x+1}$ w punkcie $x_0 = 4$.

8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{9^n + 3^n} - \sqrt{9^n + 9}\right)$.

Grupa C

1. Obliczyć całkę $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^3+x^2}\,dx$.

2. Dobrać parametr a tak, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + \cos x}{3^{\frac{1}{x}} - a} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 3^x + 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

była ciągła na całej prostej $\boldsymbol{R}$.

3. Napisać wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ z resztą R_3. Następnie uzasadnić nierówność
$$\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$
dla każdego $x > 0$.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(1+\sin x)^{\frac{1}{\pi - x}}$.

6. Wyznaczyć ekstrema i punkty przegięcia wykresu funkcji
$$f(x) = \left|\ln\left(x^2-1\right)\right|.$$

7. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $x = y^2$, $x = -y$.

8. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{2n+3}\right)$.

Grupa D

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi:
$$y = \frac{x}{4-x^2},\ y = 0,\ x = 1.$$

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{e^x}\,dx$.

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (x-1)^x$ w punkcie $(2, f(2))$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(6^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$.

6. Wyznaczyć przedziały, na których funkcja $f(x) = x\ln x^2$ maleje i jest wklęsła.

7. Korzystając z twierdzenia Maclaurina podać wzór do obliczania wartości $\sin 3^\circ$ z dokładnością do 10^{-4}.

8. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach. Korzystając z tego twierdzenia obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10\cdot 2^n - 5^n + 2\cdot 6^n}.$$

Zestaw VII

Grupa A

1. Obliczyć największą objętość walca o polu powierzchni całkowitej S.

2. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin|x||\,dx$.

3. Naszkicować wykres funkcji $g(x) = \int_x^1 t\,dt$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+4x+8}$.

5. Dla zadanej liczby $\alpha > 1$ obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = x^\alpha$ i $x = y^\alpha$, gdzie $x \geqslant 0$.

6. Obliczyć pochodną funkcji $y = 3^{\sin\sqrt{x}}$.

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 4x}$.

8. Znaleźć wielomian W, który spełnia równanie
$$W''(x) + 2W'(x) + 3W(x) = x^3.$$

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.

2. Obliczyć pochodną funkcji $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

3. Znaleźć największą objętość stożka o polu powierzchni bocznej S.

4. Naszkicować wykres funkcji f wiedząc, że jej pochodna jest określona wzorem
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ x & \text{dla} \quad -1 < x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 3, \\ -1 & \text{dla} \quad x > 3. \end{cases}$$

5. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_{-1}^{2} |x^2 - x|\,dx$.

6. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{3x} \sin 5x\,dx$.

7. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x\,(x^2+2x+2)}$.

8. Obliczyć objętość bryły V powstałej przez obrót wokół osi Ox figury ograniczonej krzywą $y = \dfrac{1}{x}$ oraz prostymi $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

Grupa C

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2(x+2)}\,dx$.

2. Wyznaczyć najmniejszą powierzchnię boczną stożka o objętości V.

3. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_{-1}^{2} |1-2x|\,dx$.

4. Napisać równanie stycznej do krzywej $x^2 + y^3 = 17$ w punkcie $(3, 2)$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{\sin^2 x}$.

6. Obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi Oy odcinka o końcach $(1, 1)$, $(3, 2)$.

7. Obliczyć pochodną funkcji $y = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$.

8. Znaleźć taki wielomian W, aby funkcja
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \leqslant -1, \\ W(x) & \text{dla} \quad -1 < x < 1, \\ x^2 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x. \end{cases}$$
była ciągła i różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n+3^n+4^n}$.

2. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_{-3}^{2} e^{-|2x|}\,dx$.

3. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+4}{x\,(x^2+4)}\,dx$.

4. Naszkicować wykres funkcji f spełniającej podane warunki: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$, prosta $y = x$ jest asymptotą funkcji f w $-\infty$ i ∞.

5. Obliczyć pochodną funkcji $y = \ln\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

6. Trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5 obracamy wokół najdłuższego boku. Za pomocą całki oznaczonej obliczyć objętość otrzymanej bryły.

7. Obliczyć najmniejszą powierzchnię całkowitą walca o objętości V.

8. Podać przykład takiego wielomianu W, aby spełnione były warunki

$$W(0) = W(1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \int\limits_0^1 W(x)\,dx = 3.$$

Zestaw VIII

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n}{5^0 + 5^1 + \ldots + 5^n}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

3. Obliczyć długość łuku $y = x^{\frac{3}{2}}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 2$.

4. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sin 2x$.

5. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$.

6. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x}$.

7. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{1 - x^2}$.

8. Określić przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 6\ln(x - 1)$.

Grupa B

1. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + 2^n}$.

2. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

3. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej przez powierzchnię powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \sin x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \pi$, wokół osi Ox.

4. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x^{\ln x}$.

5. Korzystając z definicji wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{2x}$, gdzie $x > 0$.

6. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \ln x \, dx$.

7. Podać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \ln x^2$ w punkcie $(-1, 0)$.

8. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi:
$$y = x^2,\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0\ (x \geqslant 0).$$

Grupa C

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$.

2. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ jest rosnąca na $\boldsymbol{R}$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = \cos^2 x$, gdzie $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, i osią Ox.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^2 + x + 4}$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$.

6. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.

7. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla} \quad x < 1, \\ x + b & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$
jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 1$?

8. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ na przedziale $[0, 2]$.

Grupa D

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$ na przedziale $[0, 2\pi]$.

2. Napisać równanie stycznej do krzywej $y = e^x$ w punkcie $(0, 1)$. Pod jakim kątem krzywa ta przecina oś Oy?

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = x^2$, $y = 3x - 2$.

4. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$.

5. Uzasadnić, że równanie $\ln(x + 1) + x = 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

6. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

7. Korzystając z definicji wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f(x) = \sin 2x$.

8. Dla jakich wartości parametru A funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ A & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$
jest ciągła na $\boldsymbol{R}$?

Zestaw IX

Grupa A

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx$.

2. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin 2x}$.

3. Obliczyć długość łuku krzywej $y = 2\sqrt{x^3}$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 2$.

4. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2+\sin 2n} + \frac{4}{n^2+\sin 2n} + \ldots + \frac{2n}{n^2+\sin 2n} \right).$$

5. Wyznaczyć parametry a i b, dla których funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ \ln(ax+b) & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$
jest w swojej dziedzinie a) ciągła, b) różniczkowalna?

6. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{2x}$.

7. Wyznaczyć dziedzinę naturalną i zbiór wartości funkcji $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$. Następnie uzasadnić istnienie funkcji odwrotnej f^{-1} i podać jej postać.

8. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.

Grupa B

1. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 4$ na przedziale domkniętym, na którym funkcja ta jest wklęsła.

2. Dla jakich $x \in (0, \infty)$ prawdziwa jest nierówność
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{x}\right)^n} > 2\,?$$

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1+x\cos x}{4x}$.

4. Wyznaczyć wszystkie styczne do wykresu funkcji $f(x) = \ln\left(x^2+e^{-x}\right)$, które są równoległe do prostej $x+y=0$.

5. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x \leqslant 2, \\ \dfrac{x^2-5}{x-2} & \text{dla} \quad x > 2. \end{cases}$

6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego osiami układu współrzędnych, prostą $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ oraz wykresem funkcji $y = \dfrac{-1}{4x^2+9}$.

7. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

8. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx$.

Grupa C

1. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \frac{9x^2+3}{9x^2+4}\,dx$.

2. Obliczyć całkę nioznaczoną $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-4}\,dx$.

3. Dla jakiej wartości parametru $\alpha > 1$ objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót fragmentu wykresu $y = \alpha\sqrt{x}$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant \alpha$, wokół osi Ox wynosi 3π?

4. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a, dla których funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+a) & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x^{2x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła.

5. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i wypukłości funkcji
$$f(x) = \ln\left(9-x^2\right).$$

6. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\operatorname{arcctg} 1.03.$$

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$.

Grupa D

1. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3}$.

3. Prosta $y = 2x + b$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right)$. Ustalić, w jakim punkcie styczna ta przecina oś Oy.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$.

5. Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

6. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_1^e \frac{\operatorname{arctg} \ln x}{x}\, dx$.

7. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{(8x+5)\, dx}{4x^2+4x+5}$.

8. Obliczyć pole figury ograniczonej osią Oy oraz wykresami funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \sqrt{2}\cos x$.

Zestaw X

Grupa A

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3}\right)^n$.

2. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granicę
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3e^x+2}{E(2e^x)+1}.$$

3. Korzystając ze wzoru Maclaurina uzasadnić nierówność
$$e^{-x} > 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad \text{dla każdego } x > 0.$$

4. Wyznaczyć przedziały wklęsłości oraz przedziały wypukłości funkcji
$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}.$$

5. Obliczyć całkę $\int \ln x^2\, dx$.

6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y = 2x$, $y = 3 - x^2$.

7. Obliczyć długość krzywej $y = \ln x$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$.

8. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^{\sin x}$ w punkcie $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Grupa B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$.
2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2x^3\right)}{5x^3}$.
3. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówność
$$\ln(1+2x) < 2x \quad \text{dla każdego } x > 0.$$
4. Znaleźć przedziały, na których funkcja $f(x) = x^3e^{-x}$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.
5. Obliczyć całkę $\int x^2 \arcsin x\, dx$.
6. Obliczyć pole obszaru D określonego nierównościami: $x^2+y^2 \leqslant 8$, $y \geqslant x+2$.
7. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 2$, wokół osi Ox.
8. Uzasadnić, że równanie $e^x = \frac{1}{x}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Grupa C

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n+3\cdot 3^n+4^n}{2\cdot 2^n+3^n+5\cdot 4^n}$.
2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-x\right)^{\frac{1}{x}}$.
3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln 1.007.$$
4. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne funkcji $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2-8}$.
5. Obliczyć całkę $\int\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3 dx$.
6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y^2 = 2x$, $x+y = 1$.
7. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \ln x$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant 2$, wokół osi Oy.
8. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$ na przedziale $[-1, 2]$.

Grupa D

1. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)\sqrt[3]{8n^3+1}}{(n+1)\sqrt{n^2+2}}$.

2. Obliczyć granicę $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+3\cos x)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}$.

3. Napisać trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ we wzorze Taylora w punkcie $x_0 = 1$ oraz resztę R_3.

4. Znaleźć ekstrema i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$.

6. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $x = 0$, $y = \sqrt{2}\cos x$, $y = \sin x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

7. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = xe^x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$, wokół osi Ox.

8. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

Odpowiedzi i wskazówki#

PIERWSZE KOLOKWIUM

Zestaw I

Grupa A

1. $\frac{1}{3}$. Wskazówka. Zastosować wzór $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

2. Granica nie istnieje.

Wskazówka. W definicji Heinego granicy funkcji przyjąć $x_n' = \sqrt{n\pi}$, $x_n'' = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

3. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$.

4. Funkcja f ma asymptotę poziomą $y = 0$ w $-\infty$ oraz ∞.

5. $f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, zastosować wzór jak w zadaniu **1**.

Grupa B

1. $g'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3^{x_0 + \Delta x} - 3^{x_0}}{\Delta x} = 3^{x_0} \ln 3$.

Wskazówka wykorzystać równość $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2. Granica nie istnieje.

Wskazówka. W definicji granicy Heinego przyjąć $x_n' = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$, $x_n'' = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$.

3. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną, asymptota ukośna $y = x - \frac{1}{2}$ w ∞ oraz $y = -x - \frac{3}{2}$ w $-\infty$.

4. 0. Wskazówka. Wykorzystać równość $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$.

5. $a = 2$, $b = 1$.

W odpowiedziach równości $f_{\min}(x_0) = a$, $f_{\max}(x_0) = b$ oznaczają, że funkcja f ma w punkcie x_0 odpowiednio minimum lokalne równe a, maksimum lokalne równe b. Z kolei równości $m = f(x_0)$, $M = f(x_0)$ oznaczają, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 odpowiednio wartości najmniejszą m, największą M.

Grupa C

1. Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji f w $-\infty$ oraz ∞.
2. $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$.
3. Granica nie istnieje, bo granice jednostronne są różne:
$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$
4. e^{12}.
5. $f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x} = -\sin x_0$.

   Wskazówka. Wykorzystać wzór $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Grupa D

1. $a = 1$, $b = 3$.
2. 3. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $3^n \leqslant 2^n + 3^n + \sin n \leqslant 3^n + 3^n$ oraz zastosować twierdzenie o trzech ciągach.
3. $g'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \dfrac{-2}{x_0^3}$.
4. 0, bo $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.
5. Funkcja f ma asymptotę ukośną $y = -x$ w $-\infty$ oraz $y = x$ w ∞.

Zestaw II

Grupa A

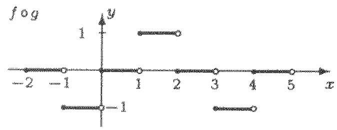
1. 1. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $1 \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant n$ oraz zastosować twierdzenie o trzech ciągach.
2. $\sqrt[3]{e^4}$.
3. $\inf A = -\frac{1}{5}$, $\sup A = \frac{1}{8}$.
4. 0. Wskazówka. Wykorzystać równości $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.
5. Można, $a = 0$, $b = 0$.

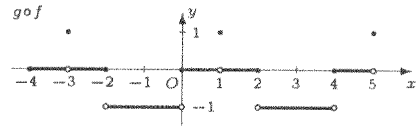
Grupa B

1. $\frac{1}{2}$.
2. 1.
3. $D_f = [-3, 3]$, $W_f = \left[-\pi, \frac{\pi}{3}\right]$.
4. 1.
5. Nie. Granice jednostronne w $x = 0$ są niewłaściwe.

Grupa C

1. 1. Wskazówka. Wykorzystać nierówności $1 \leqslant 1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10} \leqslant n \cdot n^{10}$ oraz twierdzenie o trzech ciągach.
2. e^2.
3. $(f \circ g)(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}E(x)\right)$, $(g \circ f)(x) = E\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$.





4. $\frac{1}{4}$.
5. $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = -\pi$.

Grupa D

1. -25.
2. e^2.
3. Wskazówka. Rozważyć ciągi $x_n' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x_n'' = \dfrac{1}{n\pi}$.
4. $\dfrac{\ln 7}{\ln 6}$. Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech funkcjach.
5. $a \in R$, $b = a - 3$.

Zestaw III

Grupa A

1. 0. Wskazówka. Zastosować wzór $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.
2. e^2.
3. $a = \sin 1 - 1$.
4. Wskazówka. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = 4^x - \frac{2}{x}$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.
5. $y = x$.

Grupa B

1. 1.
2. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $0 < \sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{x}$ dla $x > 0$.
3. $a = 0$.
4. Wskazówka. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = \ln x + 2x - 1$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.
5. $y = \dfrac{x+1}{2}$.

Grupa C

1. $\frac{3}{5}$. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\frac{3n-1}{5n+1} \leqslant \frac{3n+(-1)^n}{5n+1} \leqslant \frac{3n+1}{5n+1}$.
2. $\frac{1}{4}$. Wskazówka. Wykorzystać wzór $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
3. $a = 1$.
4. Wskazówka. Pokazać, że funkcja $f(x) = \ln(x+1) + x - 1$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $[0,1]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.
5. $y = x + 1$.

Grupa D

1. ∞. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $[5 + (-1)^n]^n \geqslant 4^n$.
2. $-\infty$.
3. $a = e$.
4. Wskazówka. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = 3^x + x - 3$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $[0,1]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.
5. $y = \frac{1}{2}x$.

Zestaw IV

Grupa A

1. $\frac{5}{4}$.
   Wskazówka. Uzasadnić nierówność $\frac{5^n}{2\cdot 4^n} \leqslant \frac{2^n+5^n}{3^n+4^n} \leqslant \frac{2\cdot 5^n}{4^n}$ i następnie zastosować twierdzenie o trzech ciągach.
2. Funkcja f jest ciągła prawostronnie, ale nie jest ciągła lewostronnie.
3. $\frac{\pi}{4}$.
4. Funkcja f jest rosnąca na przedziale $\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$. Funkcja ta ma asymptotę poziomą $y = 0$ w ∞.
5. 1.

Grupa B

1. e^3.
2. $a = 1$, $b = 0$.
3. $y = \sqrt{3} - \sqrt{3}\ln 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
4. Funkcja f jest malejąca na przedziale $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Nie ma.
5. -2.

Grupa C

1. $\frac{1}{2}$.

2. Funkcja f jest ciągła tylko lewostronnie.

3. $\frac{\pi}{3}$.

4. Prosta $y = -x$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ oraz ∞. Proste $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ są asymptotami pionowymi dwustronnymi tej funkcji. Funkcja f maleje na przedziałach $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$.

5. 1.

Grupa D

1. π.

2. $p = 0$, $q = \frac{2}{\pi}$.

3. $y = \sqrt{3}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{9}{4}$.

4. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f. Funkcja f jest rosnąca na przedziale $(\ln 2, \infty)$ oraz malejąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, \ln 2)$.

5. 1.

Zestaw V

Grupa A

1. Prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową obustronną, a prosta $y = 0$ asymptotą poziomą w $-\infty$ oraz w ∞.

2. $\frac{\pi}{4}$.

3. $\sin 211^\circ \approx -\frac{180 + \pi\sqrt{3}}{360}$.

4. $\sqrt[3]{e}$.

5. $b = a + \frac{\pi}{2}$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.

Grupa B

1. $f''(1) = -2$.

2. Prosta $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞, a prosta $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ w $-\infty$.

3. $\ln 0.99 \approx -0.01$.

4. ∞.

5. $a = 3$, $b \in \boldsymbol{R}$.

Grupa C

1. $f'(2) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

   Wskazówka. Wykorzystać wzór $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

2. $y = -x + 1 - \frac{\pi}{4}$.

3. $\cos 209^\circ \approx -\dfrac{\pi + 180\sqrt{3}}{360}$.

4. -16.

5. $a = b + 2$, gdzie $b \in \boldsymbol{R}$.

Grupa D

1. $f''(0) = 4$.

2. $a = b = -1$.

3. $\operatorname{arctg} 0.999 \approx \dfrac{\pi}{4} + 0.0005$.

4. 2.

5. $a = -1$ lub $a = 2$.

Zestaw VI

Grupa A

1. e^6

2. $-\ln 2$.

3. $a = 1$, $b = 4 - \dfrac{\pi}{2}$.

4. Prosta $x = -\dfrac{1}{2}$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f. Natomiast prosta $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4}$ jest asymptotą ukośną tej funkcji w $-\infty$ oraz ∞.

5. $f'(x) = x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right) - \dfrac{3}{x^2}$ dla $x > 0$.

Grupa B

1. $-\dfrac{9}{2}$.

2. $\dfrac{1}{e}$.

3. $a = 2$, $b = -2$.

4. Prosta $y = 2x - 1$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$, a prosta $y = 4x + 1$ w ∞.

5. $f'(x) = 2\ln x \cdot \operatorname{tg} x\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$ dla $x > 0$ oraz $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

Grupa C

1. 4.

2. 0.

3. $a = 1$, $b = \dfrac{\pi}{4} - 1$.

4. Proste $x = 0$ i $x = \dfrac{3}{2}$ są asymptotami pionowymi obustronnymi funkcji f. Prosta $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ oraz ∞.

5. $f'(x) = \dfrac{1}{3} \dfrac{\dfrac{x}{2} + e^x}{\sqrt[3]{(2\ln x + e^x)^2}}$ dla $x > 0$.

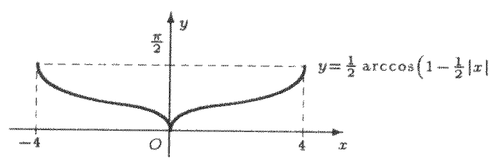
Grupa D

1. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
2. $-\infty$.
3. $a = \pi$, $b = 1$.
4. Prosta $y = x - \dfrac{2}{3}$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ oraz ∞.
5. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\arcsin x}{x}}{\ln^2 x}$ dla $x \in (0, 1)$.

Zestaw VII

Grupa A

1. 5.
   Wskazówka. Wykorzystać nierówności $5^n \leqslant 2 \cdot 5^n + 3^n \sin^2 n \leqslant 3 \cdot 5^n$.
2. $D_f = [-4, 4]$, $W_f = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.



3. Prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową prawostronną. Prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą w ∞, a prosta $y = -1$ taką asymptotą w $-\infty$.
4. $f'(2)$ nie istnieje, bo $f'_-(2) = 12$, $f'_+(2) = 1$.
5. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

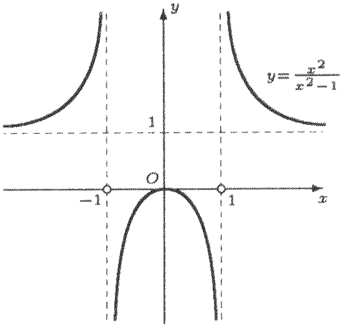
Grupa B

1. e^{12}.
2. Styczna $y = 1$ w $x = 0$ oraz $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ w $x = 1$.
3. $f'(0)$ nie istnieje, bo $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = 0$.
4. Prosta $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ oraz w $-\infty$.
5. Wskazówka. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = e^{2x^2+x} - \dfrac{2}{x}$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.

Grupa C

1. $\dfrac{1}{2}$.
2. $y - \dfrac{1}{2} = \left(1 - \dfrac{\ln 2}{2}\right)(x - 1)$.

3. W punktach $|x_0| \neq 1$ pokazać równość $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x_0^2}{x_0^2-1}$.



4. $f'(4) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}}{x-4} = \dfrac{1}{16}$.

5. Wskazówka. Pokazać najpierw, że funkcja $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest ciągła na $\boldsymbol{R}$ i spełnia warunki: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Następnie skorzystać z twierdzenia Darboux.

Grupa D

1. $\dfrac{5}{8}$.

2. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{24}x - \dfrac{\sqrt{3}}{8} + \dfrac{\pi}{3}$.

3. $a = 3$.

4. Prosta $x = \dfrac{1}{3e}$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f. Natomiast prosta $y = \dfrac{1}{2}\left(3x - \dfrac{1}{e}\right)$ jest jej asymptotą ukośną w ∞ oraz w $-\infty$.

5. $D_f = (-1, 3)$, $W_f = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. e^2.

2. Wskazówka. Pokazać najpierw, że ciąg (a_n) jest rosnący. Następnie, przy uzasadnianiu jego ograniczoności z góry, wykorzystać nierówność

$$\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}.$$

3. Wskazówka. Pokazać, że funkcja $f(x) = 3^x + x^3$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$. Następnie zastosować twierdzenie Darboux.

4. $A = 0$. Funkcja f nie ma pochodnej w punkcie 0, gdyż $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = \infty$.

5. $y = \dfrac{\ln 2}{2}(x-1) + 1$.

Grupa B

1. Wskazówka. Uzasadnić, że ciąg (a_n) jest malejący i ograniczony z dołu przez 0.
2. Wskazówka. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^3+x+1$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $(-1, 0)$. Następnie zastosować twierdzenie Darboux.
3. $\sqrt[20]{e}$.
4. $A = 1$ lub $A = -1$. Dla obu wartości parametru $f'(0)$ nie istnieje, gdyż $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$ dla $A = 1$ oraz $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = \frac{1}{2}$ dla $A = -1$.
5. $y = -\ln 2\,(x-1) + 1$.

Grupa C

1. 7. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $7^n < 5^n + 7^n + \cos^2 n < 2 \cdot 7^n$.
2. e^{18}.
3. Wskazówka. Zastosować twierdzenie Darboux do funkcji $f(x) = \frac{2x}{\pi} - \sin x$ na przedziale $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Można także „odgadnąć" pierwiastek $x = \frac{\pi}{2}$.
4. $a = 0$, $f'(0) = \frac{\pi}{2}$.
5. $y = -3(x+2)$.

Grupa D

1. e^6.
2. $\frac{10}{3}$.
3. Prosta $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ oraz ∞.
4. Funkcja f ma pochodną na $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.
5. W punkcie $x_1 = 0$ wykresy funkcji f i g tworzą kąt $\frac{\pi}{4}$, a w $x_2 = 2$ kąt $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Zestaw IX

Grupa A

1. $\frac{1}{2}$.
2. $-\frac{1}{2}$.
3. $a = -\frac{1}{2}$.
4. Prosta $y = \frac{\pi}{2}x$ jest asymptotą ukośną w ∞, a prosta $y = -\frac{\pi}{2}x$ w $-\infty$.
5. Wskazówka. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = 3^x+x^3$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.

Grupa B

1. Wskazówka. Uzasadnić, że ciąg (a_n) jest malejący i ograniczony z dołu przez 0.

2. $\frac{4}{5}$.

3. e^3.

4. $a = b = 1$.

5. Wskazówka. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^3 + x + 1$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $[-1, 0]$ i następnie zastosować twierdzenie Darboux.

Grupa C

1. Wskazówka. Pokazać najpierw, że ciąg (a_n) jest rosnący. Następnie, przy uzasadnianiu jego ograniczoności z góry wykorzystać nierówność
$$\frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \ldots + \frac{1}{5^n+n} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

2. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. $\frac{3}{2}$. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $u - 1 < E(u) \leqslant u$ dla $u \in R$.

4. Funkcja f jest ciągła na zbiorze $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcja ta ma w punkcie $x_1 = 1$ nieciągłość I rodzaju typu „skok", a w punkcie $x_2 = -1$ nieciągłość II rodzaju.

5. Prosta $y = x - 1$ jest asymptotą ukośną w ∞ i $-\infty$.

Grupa D

1. ∞. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ i następnie zastosować twierdzenie o dwóch ciągach.

2. $-\frac{2}{7}$.

3. $a = -\frac{10}{3}$, $b = -\frac{14}{3}$.

4. Prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f. Natomiast prosta $y = 1$ jest jej asymptotą ukośną w ∞, a prosta $y = -1$ w $-\infty$.

5. Wskazówka. Pokazać, że funkcja $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Następnie zastosować twierdzenie Darboux.

Zestaw X

Grupa A

1. $\frac{2}{3}$. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\frac{2n^2-1}{3n^2+1} \leqslant \frac{2n^2+\sin n}{3n^2+(-1)^n} \leqslant \frac{2n^2+1}{3n^2-1}$.

2. e^5.

3. $\frac{5}{2}$.

4. $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ lub $a = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

5. $f'(0) = 0$.

Grupa B

1. ∞. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\dfrac{2n^3+1}{4n^2+1} \leqslant \dfrac{2n^3+1}{4n^2+\cos n^2}$.
2. 0. Wskazówka. Wykorzystać tożsamość $(n+3)! = n!(n+1)(n+2)(n+3)$.
3. $\sqrt{e}$.
4. Wskazówka. Pokazać, że funkcja $f(x) = x2^x - 1$ jest ciągła i rosnąca na przedziale $[0,1]$. Następnie wykorzystać twierdzenie Darboux.
5. $f'(0)$ nie istnieje.

Grupa C

1. 1. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $n \leqslant n^2 + \sin n \leqslant 2n^2$ dla $n \geqslant 2$.
2. ∞. Wskazówka. Wykorzystać równość $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = \infty$ dla $b > 1$.
3. $\sqrt{e}$.
4. $a \in R \setminus \{0\}$, $b = 1$.
5. $f'(0) = 0$.

Grupa D

1. ∞. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $4 - \dfrac{\pi}{2} < 4 - \operatorname{arctg} n$.
2. e^3.
3. -1.
4. $f(0) = \dfrac{1}{5}$.
5. $f'(0) = 0$.

DRUGIE KOLOKWIUM

Zestaw I

Grupa A

1. $\dfrac{1}{2}$.
2. Funkcja f jest malejąca na przedziale $(3,4)$ i rosnąca na przedziale $(4,\infty)$. W punkcie $x = 4$ przyjmuje wartość najmniejszą $m = 8$.
3. $\sqrt[3]{x} = 2 + \dfrac{1}{12}(x-8) - \dfrac{1}{288}(x-8)^2 + \dfrac{5}{81\sqrt[3]{c^8}}(x-8)^3$, gdzie punkt c leży między 8 i x.
4. $\ln|x-1| - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C$.
5. $|D| = \displaystyle\int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx = 3 - e$.

Grupa B

1. $\ln 4$.

2. Funkcja f jest wypukła na przedziale $(-2, \infty)$ oraz wklęsła na przedziale $(-\infty, -2)$.

3. $m = -2 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ oraz $M = 3 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$.

5. $|D| = 2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$.

Grupa C

1. e.

2. Funkcja f jest malejąca na zbiorze $\left(-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{e}\right)$ oraz rosnąca na przedziałach $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$, $\left(, \frac{1}{e}, \infty\right)$. Ponadto $f_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$, $f_{\max}\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$.
Wskazówka. Wykorzystać fakt, że funkcja jest nieparzysta.

3. $|R_3(x)| = \left|\frac{x^3}{3(1+c)^3}\right| < \frac{1}{3\cdot 9^3}$ dla $|x| < \frac{1}{10}$, gdzie c jest liczbą między 0 i x.

4. $\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + 3\ln|x| + C$.

5. $|V| = \pi\int\limits_{0}^{1} xe^{2x}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(e^2+1\right)$.

Grupa D

1. 1.

2. Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale $[-1, 0)$ oraz ściśle wklęsła na przedziale $(0, 1]$. Początek układu jest punktem przegięcia jej wykresu.

3. $\sqrt[5]{31.98} \approx 2 - \frac{1}{4000} = 1.99975$.

4. $\frac{\cos 2x}{4} + x\frac{\sin 2x}{2} + C$

5. $|\Gamma| = \int\limits_{1}^{2}\frac{x^2+1}{2x}\,dx = \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4}$.

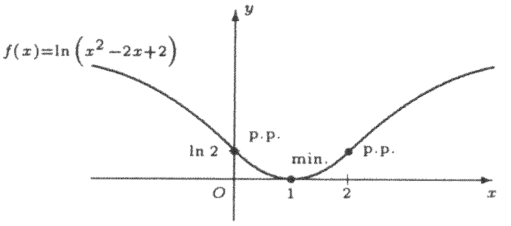
Zestaw II

Grupa A

1. $|R_3(x)| = \left|\frac{-x^3}{(1+c)^4}\right| \leqslant \frac{1}{8}$ dla $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. $-\left[\frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln(3-\cos x)\right] + C$.

3. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.

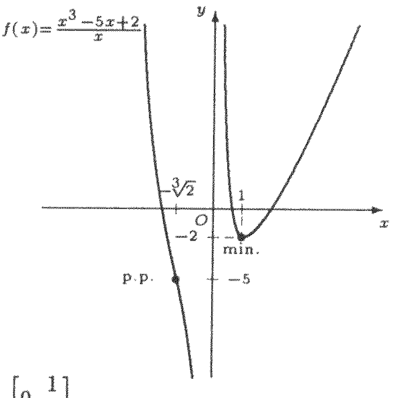


4. $|\Gamma| = \int\limits_1^e \frac{x^2+1}{2x}\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \int\limits_0^1 x2^x\,dx = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}$.

Grupa B

1. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.



2. $|R_3(x)| \leqslant \frac{5}{2^{10}\sqrt{2}}$ dla $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

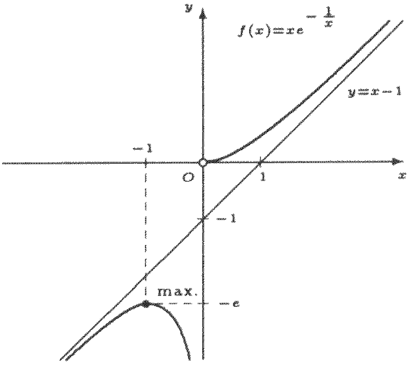
3. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$.

4. $|V| = \pi \int\limits_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx = \frac{\pi\left(1-5e^{-2}\right)}{4}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx = \ln 4 - 1$.

Grupa C

1. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.



2. $f(x) = 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{288} + R_3(x)$, gdzie $|R_3(x)| \leqslant \frac{5}{108}$ dla $x \in [0, 2]$.

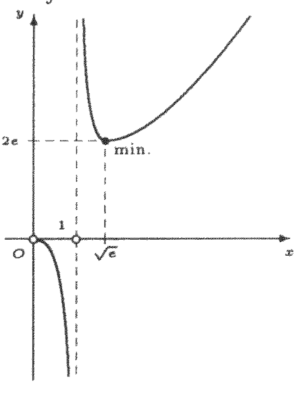
3. $2 \ln |x| - \ln \left(x^2 + x + 1\right) + C$.

4. $x\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+2x}\, dx = \frac{3}{8}\left(3\sqrt[3]{3} - 1\right)$.

Grupa D

1. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.



2. $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + R_3(x)$, gdzie $|R_3(x)| \leqslant \frac{3}{1600}$ dla $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$.

3. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C$.

4. $4 \ln 2 - 2$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+2x}\, dx = \frac{3}{8}\left(3\sqrt[3]{3} - 1\right)$.

Zestaw III

Grupa A

1. 1.
2. $|R_7(x)| \leqslant \frac{1}{2^7 7!}$.
3. Funkcja f jest wypukła na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, a wklęsła na przedziałach $(-1, 0)$, $(1, \infty)$.
   Wskazówka. Wykorzystać fakt, że funkcja f jest nieparzysta.
4. $2x(\ln|x| - 1) + C$.
5. $|D| = \int\limits_{-1}^{1} \left(3 - x^2 - 2x\right) dx = \frac{32}{3}$.

Grupa B

1. $\frac{1}{3}$.
2. $\ln 1.2 \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{50} + \frac{1}{375} = \frac{127}{750}$.
   Wskazówka. Wykorzystać wzór Maclaurina rzędu $n = 4$ dla funkcji $\ln(1 + x)$.
3. $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$.
4. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.
5. $|\Sigma| = 2\pi \int\limits_{0}^{2} \operatorname{ch}^2 x \, dx = \pi \left(\frac{\operatorname{sh} 4}{2} + 2\right)$.

Grupa C

1. 1.
2. $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{79}{48}$.
   Wskazówka. Wykorzystać wzór Maclaurina rzędu $n = 4$ dla funkcji e^x.
3. $f_{\max}\left(e^2\right) = \frac{2}{e}$; $\left(x_{pp}, y_{pp}\right) = \left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3} e^{-\frac{4}{3}}\right)$.
4. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln\left(x^2 - x + 1\right) - \frac{1}{3} \ln|x + 1| + C$.
5. $|V| = \pi \int\limits_{0}^{1} x^2 e^{2x} \, dx = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.

Grupa D

1. 2.
2. $\sin 3^\circ \approx \frac{\pi}{60}$. Wskazówka. Wykorzystać wzór Maclaurina rzędu $n = 3$ dla $\sin x$.
3. $\left(3 + \sqrt{3}, \infty\right)$.

4. $-\frac{1}{3}\sqrt{(2-x^2)^3}+C.$

5. $|D| = \int\limits_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} \left(1 - y - \frac{y^2}{2}\right) dy = 2\sqrt{3}.$

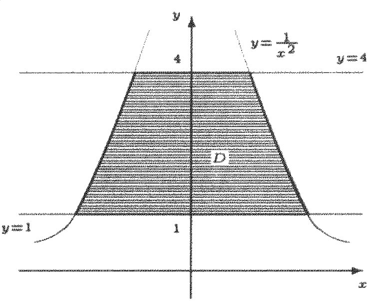
Zestaw IV

Grupa A

1. e.
2. Funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-1,1)$ i malejąca na przedziałach $\left(-\sqrt{2},-1\right)$, $\left(1,\sqrt{2}\right)$. Ponadto $f_{\min}(-1) = -1$ oraz $f_{\max}(1) = 1$.
   Wskazówka. Wykorzystać fakt, że funkcja f jest nieparzysta.
3. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+8\right)+C.$
4. $|V| = \pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{4}{3}\pi.$
5. $\Delta_S \approx 2\pi d \cdot d_\Delta \approx 8.98\,\mathrm{cm}^2.$

Grupa B

1. Funkcja f jest wypukła na przedziale $(2,\infty)$, a wklęsła na przedziale $(-\infty,2)$. W punkcie $\left(2,\frac{2}{e}\right)$ wykres tej funkcji ma punkt przegięcia.
2. $2x - 4\ln\left(x^2+4x+8\right)+C.$
3. $|D| = 2\int\limits_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4.$

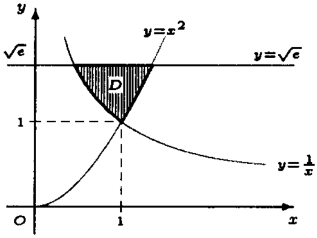


4. ∞.
5. $\sqrt[10]{e} \approx 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = 1.105$ z błędem $\left|R_3\left(\frac{1}{10}\right)\right| \leqslant \frac{\sqrt[10]{e}}{3!10^3}.$

Grupa C

1. $\frac{1}{\sqrt{e}}.$
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$

3. $|D| = \int\limits_1^{\sqrt{e}} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{6}\left(4e^{\frac{3}{4}} - 7\right).$



4. $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1.$

5. Funkcja f jest wypukła na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$, a wklęsła na przedziale $(0, 2)$. Punkt $(2, 0)$ jej punktem przegięcia jej wykresu.

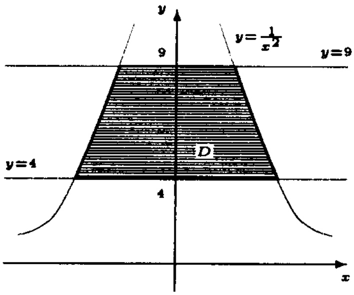
Grupa D

1. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + C.$

2. 1.

3. Funkcja jest rosnąca na przedziale $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ i malejąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ponadto $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$.

4. $|D| = 2\int\limits_4^9 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4.$



5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$, gdzie $c \in (0, x)$ dla $x > 0$.

Zestaw V

Grupa A

1. $3^{1.98} \approx 9\,(1 - 0.02\ln 3)$.

2. $f_{\min}(1) = 1$, $f_{\max}(e) = 1 + fracle$.

3. $\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln\left|x^3 + 4x\right| + C.$

4. $-\frac{\cos\ln x + \sin\ln x}{2x} + C.$

5. $|D| = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (-\ln x)\, dx = 1 - \ln 2.$

Grupa B

1. $x - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C.$

2. $\dfrac{x}{2} \sin 2x + \dfrac{1 - 2x^2}{4} \cos 2x + C.$

3. $|V| = \pi \displaystyle\int_1^2 \ln^2 x \, dx = 2\pi \left(1 - 2 \ln 2 + \ln^2 2\right).$

4. $m = f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[e]{e}},\ M = f(3) = 27.$

5. Punkty przegięcia $x_k = \pm \arccos \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2k\pi$ dla $k \in N$, $x_l = \pm \arccos \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2l\pi$ dla $l \in N$.

Grupa C

1. $A = \sqrt[3]{\ln 4}.$

2. $\dfrac{1}{2} \ln \left(x^2 + x + 1\right) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$

3. $-\sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \dfrac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1} \right| + C.$

4. Funkcja f jest rosnąca na przedziałach $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ i malejąca na przedziale $(-1, 0)$. Ponadto $f_{max}(-1) = \ln 2$.

5. $\dfrac{2}{\cos 119^\circ} \approx \dfrac{2}{\cos \dfrac{2\pi}{3}} + \dfrac{2 \sin \dfrac{2\pi}{3}}{\cos^2 \dfrac{2\pi}{3}} \cdot \left(-\dfrac{\pi}{180}\right) = -4 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{45}.$

Grupa D

1. $\left(\dfrac{2}{3} \sin x - \dfrac{2}{9}\right) e^{3 \sin x} + C.$

2. $\dfrac{1}{5} \operatorname{arctg} 3x - \dfrac{2}{15} \ln \left(9x^2 + 1\right) - \dfrac{2}{5} \ln |x - 1| + C.$

3. Funkcja f jest malejąca na przedziale $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ i rosnąca na przedziale $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ponadto $f_{min}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

4. Funkcja f jest wypukła na przedziałach $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ oraz wklęsła na przedziale $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. W punktach $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ wykres funkcji przegina się. Wskazówka. Wykorzystać parzystość funkcji.

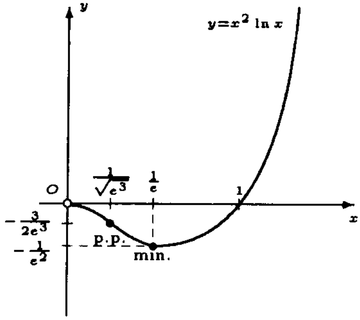
5. $|D| = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\dfrac{1}{x^2 + 4} - \dfrac{x^2}{32}\right) dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{6}.$

Zestaw VI

Grupa A

1. $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+R_5(x)$, gdzie $R_5(x) = \frac{7x^5}{256\sqrt{(1+c)^9}}$, przy czym c jest liczbą między 0 i x. Dla $x = 1$ reszta spełnia oszacowanie $0 < R_5(1) < \frac{7}{256}$. $\sqrt{2} \approx \frac{179}{128}$.

2. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.



3. $3\left(x^2-2\right)\cos x + \left(x^3-6x+1\right)\sin x + C$.

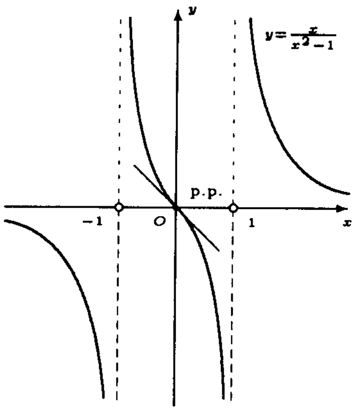
4. $\sqrt{e-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e-1}$.

5. $|D| = \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16-y^2}-\frac{y^2}{6}\right) dy = \frac{4\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$.

Grupa B

1. $\sin^2 x = x^2 - R_4(x)$, gdzie $R_4(x) = \frac{-\cos 2c}{3}x^4$, przy czym liczba c leży między 0 i x. Dla $x = \frac{1}{5}$ mamy $\sin^2\frac{1}{5} \approx \frac{1}{25}$ z błędem $\left|R_4\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{1875}$.

2. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.



3. $2\ln\left(e^x+1\right)-x+C.$

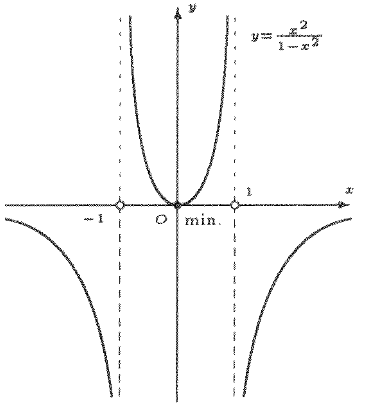
4. $\pi\left(\pi^2-6\right).$

5. $|\Gamma|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{\ln 3}{2}.$

Grupa C

1. $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+R_4(x)$, gdzie $R_4(x)=\frac{-10}{\sqrt[3]{(1+c)^{11}}}\frac{x^4}{243}$, przy czym liczba c leży między 0 i x. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\approx\frac{743}{648}$ z błędem $\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{5}{1944}.$

2. Wykres funkcji przedstawiono na rysunku.



3. $-e^{-x}\left(\frac{2}{5}\cos 2x+\frac{1}{5}\sin 2x\right)+C.$

4. $2-\frac{\pi}{2}.$

5. $|D|=\int\limits_1^e\left(\ln x-\ln^2 x\right)\,dx=3-e.$

Grupa D

1. $e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+R_4(x)$, gdzie $R_4(x)=\frac{x^4}{384}e^{\frac{c}{2}}$, przy czym c jest liczbą między 0 i x. $\sqrt{e}\approx\frac{79}{48}$ z błędem $|R_4(1)|\leqslant\frac{\sqrt{e}}{384}<\frac{1}{192}.$

2. Funkcja f jest malejąca na $\boldsymbol{R}$. Funkcja ta ma asymptotę ukośną $y=-x$ w ∞ oraz $-\infty$.

3. $2\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-x+C.$

4. $(e+1)\ln(e+1)-e.$

5. $|D|=\int\limits_{-1}^2\left(2+y-y^2\right)\,dy=\frac{9}{2}.$

Zestaw VII

Grupa A

1. $f'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{2-x^2}}$, gdzie $|x| < \sqrt{2}$. Funkcja jest rosnąca na przedziale $(-1,1)$ oraz malejąca na przedziałach $\left(-\sqrt{2},-1\right)$, $\left(1,\sqrt{2}\right)$.
2. 0.
3. $M = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$, $m = f(0) = 1$.
4. $x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$.
5. $\dfrac{\ln 3}{4}$.

Grupa B

1. $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-1,1)$ oraz malejąca na przedziałach $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$.
2. 0.
3. $m = f(-1) = -\sqrt{3}$, $M = f\left(\sqrt{2}\right) = 2$.
4. $2x\cos x + \left(x^2-2\right)\sin x + C$.
5. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{5}{4}$.

Grupa C

1. $\dfrac{4}{9}$.
2. $m = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $M = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$.
3. $\sqrt{x} = 2 + \dfrac{x-4}{2} - \dfrac{(x-4)^2}{64} + \dfrac{(x-4)^3}{512} + R_4(x)$, gdzie $R_4(x) = \dfrac{-15}{384c^3\sqrt{c}}(x-4)^4$, przy czym c leży między 4 i x.
4. $\dfrac{1}{45}\left(3x^3-1\right)\sqrt{\left(2x^3+1\right)^3} + C$.
5. $2\pi^2 - 16$.

Grupa D

1. 1.
2. $m = f(-2) == \dfrac{1}{5e^2}$, $M = f(2) = \dfrac{e^2}{5}$.
3. $\cos 61^\circ \approx \cos\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{180}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{360}$.
4. $\sin\left(\ln|x|\right) + C$.
5. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{4}{5}$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. Wzrośnie o około 15%.
2. $m = f\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = f\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{4}$, $M = f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$, gdzie $k \in Z$.
3. Funkcja f jest wypukła na przedziale $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, wklęsła na przedziale $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
4. $\frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) e^{x^2} + C$.
5. $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C$.

Grupa B

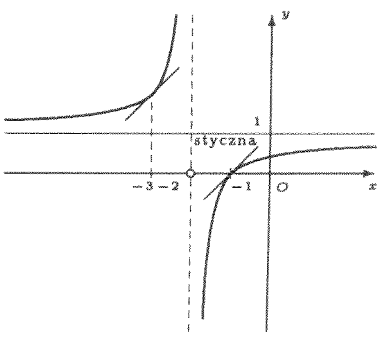
1. $\Delta_H \approx \frac{5}{108\pi}$ [mm].
2. Funkcja f jest rosnąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ oraz malejąca na przedziale $(0, 1)$.
3. $|R_3(x)| \leqslant \frac{10}{2187}$.
4. $\frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \ln|x+1| - \frac{1}{4}\left(x^2 - 2x\right) + C$.
5. $-\sqrt{3 - x^2} + C$.

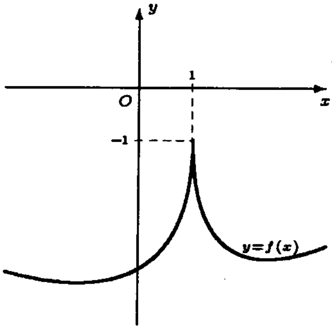
Grupa C

1. Funkcja f nie ma asymptot pionowych ani ukośnych.
2. $f_{\min}\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$, $f_{\max}\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$, gdzie $k \in Z$.
3. Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$.
4. $\left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x - x + C$.
5. $\frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 3x\right) + C$.

Grupa D

1. W punktach $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.



2. 

3. $f_{\min}(-1) = 0,\ f_{\max}(3) = \dfrac{256}{e^3}$.

4. $\dfrac{1}{4}\left(1-2x^2\right)\cos 2x + \dfrac{x}{2}\sin 2x + C$.

5. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{3} + C$.

Zestaw IX

Grupa A

1. $2 + \dfrac{\pi \ln 2}{2}$.

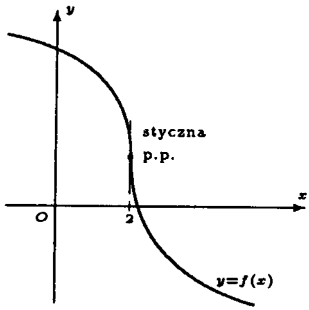
2. $\dfrac{1}{2}$.

3. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ dla $x \in \boldsymbol{R}$.

4. $\dfrac{1}{4}\left(2x^2-1\right)\arcsin x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$.

5. $\dfrac{2(e-1)}{e}$.

Grupa B

1. 

2. $\dfrac{1}{e}$.

3. $\sin(\sin x) \approx x - \dfrac{x^3}{3}$.

4. $\sqrt{\ln^2 x + 1} + C$.

5. $\dfrac{\pi a^4}{16}$.

Grupa C

1. Funkcja f jest wypukła na przedziale $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ i wklęsła na przedziale $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, a w punkcie $\left(\dfrac{1}{2}, e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$ jej wykres przegina się.
2. e.
3. $\arccos x \approx \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6}$.
4. $\dfrac{x^4}{32}\left(8\ln^2 x - 4\ln x + 1\right) + C$.
5. $\dfrac{\pi\left(2\pi^2 - 3\right)}{12}$.

Grupa D

1. Funkcja f nie ma ekstremów.
2. $\dfrac{1}{9}$
3. $\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3}$.
4. $x - \operatorname{th} x + C$.
5. $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Zestaw X

Grupa A

1. e.
2. $f_{\min}\left(-\sqrt{2}\right) = f_{\min}\left(\sqrt{2}\right) = 0$.
3. Wskazówka. Pokazać, że dla $x > 0$ reszta we wzorze Maclaurina spełnia nierówność $R_3(x) > 0$.
4. $\dfrac{5}{6}\ln|x-2| - \dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln|x| + C$.
5. $|\Gamma| = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(\sqrt{3} + 2\right)$.

Grupa B

1. 0.
2. $|R_2(x)| \leqslant \dfrac{1}{625}$ dla $0 < x < 0.1$.
3. Funkcja f jest wklęsła na przedziale $\left(0, e\sqrt{e}\right)$ oraz wypukła na przedziale $\left(e\sqrt{e}, \infty\right)$. W punkcie $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{3e\sqrt{e}}{2}\right)$ wykres funkcji przegina się.

4. $2\sqrt{1+x}\arccos x - 4\sqrt{1-x} + C$, gdzie $x \in (-1,1)$.

5. $|D| = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right)\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$.

Grupa C

1. e.

2. $e \approx 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = 1.105$.

3. Funkcja f jest wypukła na przedziałach $\left(-\sqrt{3},0\right)$, $\left(\sqrt{3},\infty\right)$ oraz wklęsła na przedziałach $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$. W punktach $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$, jej wykres przegina się.

4. $\sqrt{x^2+5} + C$.

5. $|D| = \int\limits_{0}^{e^2-1} [2 - \ln(x+1)]\, dx = e^2 - 3$.

Grupa D

1. ∞.

2. Funkcja f jest rosnąca na przedziałach $(-\infty,0)$, $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ oraz malejąca na przedziale $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Ponadto $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ oraz $f_{\max}(0) = 0$.

3. $x^2e^{-x} = x^2 - x^3 + R_4(x)$, gdzie $R_4(x) = \left(c^2 - 8c + 12\right) e^{-c}\frac{x^4}{4!}$, przy czym c jest liczbą między 0 i x.

4. $3\ln(2-\sin x) + \frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x + C$.

5. $|V| = \pi \int\limits_{1}^{e} x^2 \ln x\, dx = \frac{\pi}{9}\left(2e^3+1\right)$.

EGZAMIN PODSTAWOWY

Zestaw I

Grupa A

1. Wskazówka. Ciąg (a_n) jest rosnący, gdyż $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{e^{n+1}+n+1} > 0$. Ciąg ten jest ograniczony z góry przez sumę szeregu $\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \ldots = \frac{1}{e-1}$.

2. 1.

3. ∞.

4. 8 i 12.

5. $a = 2$, $b = 2$.

6. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{24}{5}\sqrt[6]{x^5} + 32\sqrt{x} - 384\sqrt[6]{x} + 768\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$.

7. $|D| = 6$.

8. $|V| = \frac{\pi(\pi+2)}{2}$.

Grupa B

1. 1.

2. Funkcja f jest malejąca na przedziale $(0,1)$ i rosnąca na przedziale $(1,\infty)$; w punkcie $x = 1$ funkcja f ma minimum lokalne równe 8.

3. $\frac{1079}{360}$.

4. $x - 5\operatorname{arctg}(x+2) + C$.

5. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C$.

6. $\frac{3}{13}\left(e^{-2\pi} + 1\right)$.

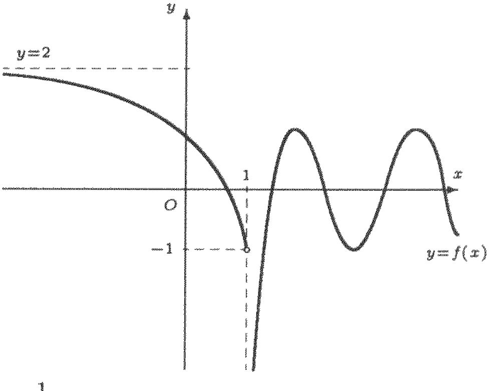
7. $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

8. $-\frac{9}{8}$.

Grupa C

1. $e^{\cos x} = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin^2 c - \cos c}{2}e^{\cos c}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, gdzie $c \in \left(\frac{\pi}{2}, x\right)$, gdy $x > \frac{\pi}{2}$ lub $c \in \left(x, \frac{\pi}{2}\right)$, gdy $x < \frac{\pi}{2}$.

2. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku poniżej.



3. $\ln\left[(x-1)^2\left(x^2+1\right)\right] - \frac{1}{x-1} + C$.

4. $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}\right)\operatorname{arctg}2x - \frac{x}{4} + C$.

5. e^{12}.

6. $f(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x\sqrt{x} - x_0\sqrt{x_0}}{x - x_0} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x_0}$.

7. 1.

8. Prostokątem o największym polu jest kwadrat o boku $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r$.

Grupa D

1. $f_{\acute{s}r} = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{24}\pi$.

2. $|\Gamma| = \dfrac{3}{4}$.

3. $\dfrac{1}{16}$.

4. Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie Darboux. Tak, tak.

5. $x = 0$ asymptota pionowa obustronna, $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$ asymptota ukośna w $-\infty$, $y = \dfrac{\pi}{2}x + 1$ asymptota ukośna w ∞.

6. Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ i ściśle wypukła na przedziale $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$. Punkt $(0,0)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

7. Wskazówka. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+2x}$ i pokazać, że $R_3(x) > 0$ dla każdego $x > 0$.

8. $\dfrac{1}{9}\ln|x| - \dfrac{1}{18}\ln\left(x^2+9\right) + C$.

Zestaw III

Grupa A

1. 2.

2. 2.

3. $a = -\dfrac{10}{3}$, $b = -\dfrac{14}{3}$.

4. $f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} = \sin 2x_0$.

5. Funkcja f jest malejąca na przedziałach $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ oraz rosnąca na przedziałach $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$. Ponadto $f_{\min}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$, $f_{\max}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$.

6. $\dfrac{1}{4}\ln|x| - \dfrac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right) + C$.

7. $|V| = \dfrac{\pi^2}{2}$.

8. $3x\sin\dfrac{x}{3} + 9\cos\dfrac{x}{3} + C$.

Grupa B

1. $|\Gamma| = \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-1}{2\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{2}-1}$.
2. $\frac{\pi\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$.
3. $-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$.
4. 1.
5. $y = \frac{1}{e}$.
6. 0.
7. Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale $(2, \infty)$ i ściśle wklęsła na przedziale $(-\infty, 2)$. Punkt $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ jest punktem przegięcia wykresu tej funkcji.
8. Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Grupa C

1. 2.
2. $f'(x_0) \stackrel{def}{=\!=} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x_0^3}}{x-x_0} = -\frac{3}{x_0^4}$.
3. $\sqrt[\pi]{e}$.
4. $2\frac{1}{40}$.
5. $\frac{x^2}{2} + 2\ln\left|x^2-4\right| + C$.
6. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.
7. $|D| = \frac{2}{15}$.
8. Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziałach $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ oraz ściśle wypukła na przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Punkty $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ są punktami przegięcia wykresu tej funkcji.

Grupa D

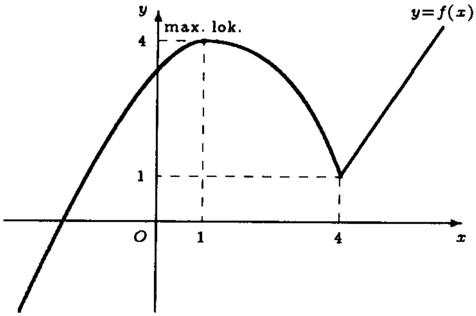
1. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.
2. $-2\ln\left(x^2-4x+20\right) - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4} + C$.
3. $|D| = e + \frac{1}{e}$.
4. ∞.
5. $\delta_V \approx 30\,\mathrm{cm}^3$.

6. Prosta $x = 0$ nie jest asymptotą pionową (nawet jednostronną) funkcji f. Prosta $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ jest asymptotą tej funkcji w $-\infty$, a prosta $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ asymptotą w ∞.
7. $\frac{1}{2}$.
8. $D_f = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $W_f = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Zestaw V

Grupa A

1. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku poniżej.



2. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $1 \leqslant 2n^2 + 1 \leqslant 3n^2$ oraz twierdzenie o trzech ciągach.
3. $x - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C$.
4. $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.
5. $|D| = \frac{2}{15}$.
6. $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
7. $-\frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C$.
8. Wskazówka. Wykazać, że funkcja $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$ jest rosnąca na przedziale $[1, \infty)$.

Grupa B

1. $\frac{1}{e^2}$.
2. $\delta_S \approx 572\,\mathrm{mm}^2$.
3. $y = -x + \frac{\pi}{4}$.
4. $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C$.

5. $|D| = e + \frac{1}{e}$.
6. Wskazówka. Udowodnić, że reszta R_3 spełnia dla każdego $x > 0$ nierówność $R_3(x) > 0$.
7. 2.
8. $f_{\text{śr}} = -\frac{1}{4}$.

Grupa C

1. Wskazówka. Dla $n \geqslant 2$ ciąg (a_n) jest malejący oraz ograniczony z dołu przez liczbę $m = 0$.
2. $|V| = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.
3. 2.
4. $-\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C$.
5. $\frac{1}{3}$.
6. $m = f(0) = 0$, $M = f(3) = \sqrt[3]{144}$.
7. $a = -\frac{10}{3}$, $b = -\frac{14}{3}$.
8. $\operatorname{ch} x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}(x - \ln 2) + \frac{5}{8}(x - \ln 2)^2 + \frac{\operatorname{sh} c}{6}(x - \ln 2)^3$, gdzie $c \in (\ln 2, x)$, gdy $x > \ln 2$ lub $c \in (x, \ln 2)$, gdy $x < \ln 2$.

Grupa D

1. ∞.
2. 8 i 12.
3. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{3} + C$.
4. $|\Gamma| = \frac{8}{27}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
5. 1.
6. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$.
7. Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $(-1, 1)$ i ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Punkty $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$, $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ są punktami przegięcia wykresu tej funkcji.
8. $1\frac{799}{800} = 1.99875$.

Zestaw VII

Grupa A

1. $\frac{5}{4}$.
2. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f. Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$ tej funkcji. Funkcja f jest rosnąca na przedziale $(\ln 2, \infty)$ i malejąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, \ln 2)$.

3. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 = 0$.
4. Wskazówka. Obliczyć pochodną funkcji f. Stała jest równa π.
5. $\sup_{|x|\leqslant \frac{1}{4}} |R_3(x)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{864} \approx 0.002$.
6. $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\ln\left(x^2 - 2x + 10\right) - \frac{26}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.$
7. $|D| = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{6}.$
8. $|\Gamma| = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$.

Grupa B

1. e^3.
2. Wskazówka. Zastosować twierdzenie Darboux do funkcji $f(x) = 3^x - 2\cos x$ na przedziale $(0, 1)$.
3. -2.
4. Wskazówka. Porównać pochodne obu stron nierówności.
5. $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ mamy $|R_5(x)| \leqslant \frac{1}{3840}$.
6. $\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x + C.$
7. $|V| = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.
8. $|\Gamma| = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Grupa C

1. $\frac{1}{2}$.
2. Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_0 = \pi$.
3. Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f, a prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną tej funkcji w $-\infty$ oraz w ∞.
4. $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$ dla $x < 1$.
5. $\sup_{0<x<\frac{1}{10}} |R_2(x)| < \frac{1}{900}$.
6. $\ln|x| + \ln\left(x^2 + 9\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$
7. $|D| = 1 - \frac{2}{e}$.
8. $|V| = \frac{2\pi}{3}$.

Grupa D

1. Wskazówka. Ciągi ograniczające rozważany ciąg z dołu i z góry mają odpowiednio postać $d_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$, $g_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$.

2. $p = 0,\ q = \dfrac{2}{\pi}$.

3. $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $(-\infty, 1)$ oraz ściśle wypukła na przedziale $(1, \infty)$. W punkcie $\left(1, \dfrac{1}{e^2}\right)$ wykres tej funkcji ma punkt przegięcia.

5. $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}} |R_4(x)| \leqslant \dfrac{1}{3840000}$.

6. $\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 16\right) + \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4} + C$.

7. $|V| = \pi$.

8. $|\Gamma| = \dfrac{\ln 3}{2}$.

Zestaw IX

Grupa A

1. $\dfrac{8001}{16000}$.

2. $a = 1,\ b = 2$.

3. Wskazówka. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = \ln(x+1)$ na przedziale $[0, x]$.

4. $|\Gamma| = \dfrac{8}{27}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

5. $m = f(0) = f(-1) = 0,\ M = f(3) = \sqrt[3]{144}$.

6. $\dfrac{1}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{6}\ln\left(x^2 + x + 1\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

7. Wskazówka. Zastosować twierdzenie o trzech ciągach.

8. $\sup\limits_{|x| \leqslant \frac{1}{10}} |R_3(x)| \leqslant \dfrac{2}{30000}$.

Grupa B

1. 5.

2. Prosta $x = 5$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f. Prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną tej funkcji w $-\infty$ oraz w ∞.

3. 2.

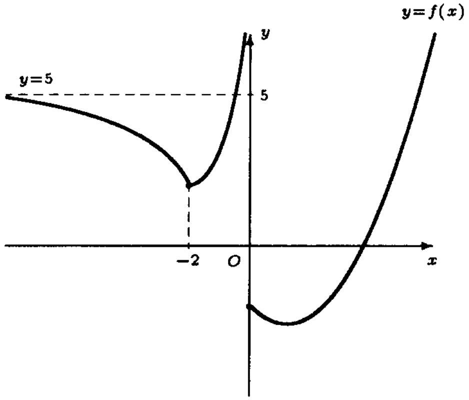
4. Wskazówka. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[x, y]$, gdzie $y > x$.

5. $\sqrt[5]{1+x} = -1 + \dfrac{1}{5}(x+2) + \dfrac{2}{25}(x+2)^2 + \dfrac{6}{125}(1+c)^{-\frac{14}{5}}(x+2)^3$, gdzie $c \in (-2, x)$. Wzór jest prawdziwy dla $x < -1$.

6. $\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + x + 1\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

7. $|V| = \dfrac{\pi(2\pi - 1)}{4}$.

8. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku poniżej.



Grupa C

1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{13}{18}.$

2. $|V| = \dfrac{\pi^2}{4}.$

3. Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziałach $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ oraz ściśle wklęsła na przedziałach $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$.
Punkty $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ są punktami przegięcia wykresu tej funkcji.

4. $A = 3$, $B = \dfrac{5}{2}.$

5. Wskazówka. Zastosować twierdzenie Darboux do funkcji $f(x) = 3^x + x^3$ na przedziale $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$; $x_0 \approx -\dfrac{3}{4}.$

6. $\sqrt[3]{e^{35}}.$

7. $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{10}{9}.$

8. $|D| = \dfrac{9}{2}.$

Grupa D

1. $f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x_0}}}{x - x_0} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^4}}.$

2. $f_{śr} = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right).$

3. $m = f(0) = 0$, $M = f(-3) = 9e^3$.

4. Wskazówka. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest malejący dla $n \geqslant 7$ oraz ograniczony z dołu przez liczbę $m = 0$.

5. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 2\right) - \frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\sqrt{\frac{3}{2}} + C.$

6. $\sup\limits_{x\in[0,1]} |R_3(x)| \leqslant \frac{1}{16}.$

7. 2.

8. Wskazówka. Zastosować twierdzenie Darboux do funkcji $f(x) = e^x - \ln x - 3$ na przedziale $[1, 2]$.

EGZAMIN POPRAWKOWY

Zestaw I

Grupa A

1. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{3} + C.$

2. $x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + C.$

3. $|D| = \ln 64.$

4. $\log_3 4.$

5. $-\frac{1}{2}.$

6. $m = f(-1) = \frac{-3}{\sqrt{5}}$, $M = f(2) = \frac{6}{\sqrt{17}}.$

7. $f'(2) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}}{x-2} = -\frac{1}{4}.$

8. $(-\infty, -1].$

Grupa B

1. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$

2. $\left(x^2 - 2\right)\sin x + 2x\cos x + C.$

3. $|D| = \frac{14}{3}.$

4. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3c^2-1}{3\left(c^2+1\right)^2}(x-1)^3$, gdzie $c \in (1, x)$, gdy $x > 1$ lub $c \in (x, 1)$, gdy $x < 1$.

5. $\ln 2.$

6. $-\sqrt{2}.$

7. $m = f(-2) = -\frac{1}{2}$, $M = f(0) = \frac{1}{2}.$

8. $f'(9) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to 9} \frac{-\sqrt{x}+3}{x-9} = -\frac{1}{6}.$

Grupa C

1. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{3} + C.$

2. $\frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$

3. $|D| = \frac{7}{4}.$

4. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}+4\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1+2\sin^2 c}{3\cos^4 c}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3$, gdzie $c \in \left(\frac{\pi}{3}, x\right)$, gdy $x > \frac{\pi}{3}$ lub $c \in \left(x, \frac{\pi}{3}\right)$, gdy $x < \frac{\pi}{3}$.

5. 1.

6. $\frac{5}{8}.$

7. $f'(4) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x-4} = -\frac{1}{16}.$

8. $\left[-1, -\frac{2}{3}\right].$

Grupa D

1. $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{2} + C.$

2. $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$

3. $\frac{39}{2}.$

4. $\operatorname{ch} x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}(x-\ln 2) + \frac{5}{8}(x-\ln 2)^2 + \frac{\operatorname{sh} c}{6}(x-\ln 2)^3$, gdzie $c \in (\ln 2, x)$, gdy $x > \ln 2$ lub $c \in (x, \ln 2)$, gdy $x < \ln 2$.

5. $\frac{2}{3}.$

6. $-\frac{1}{4}.$

7. $m = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$, $M = f(3) = 2\sqrt[3]{18}.$

8. $f'(1) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{3}.$

Zestaw III

Grupa A

1. 1.

2. $\frac{16001}{32000} = 0.50003125\ldots$

3. $-\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)e^{-3x} + C.$

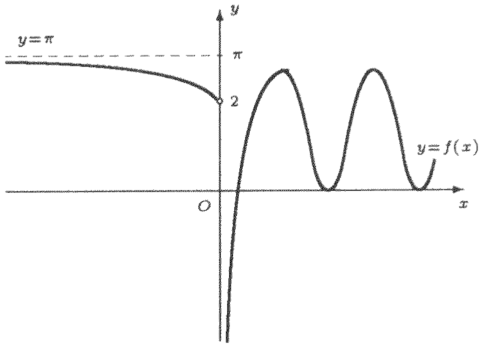
4. $|D| = 2\ln\frac{20}{17} + \frac{3}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right).$

5. $-\frac{9}{8}.$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$.

7. Wskazówka. Wykorzystać wzór $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

8. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku poniżej.



Grupa B

1. Wskazówka. Rozważyć ciągi: $x_n' = 2n\pi$, $x_n'' = \pi + 2n\pi$.

2. $|D| = \ln 2$.

3. $\frac{1}{2}$.

4. $r_{\min} = 5$, $h_{\min} = 10$.

5. $\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln\left(x^2 + 4\right) + C$.

6. $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}} |R_4(x)| \leqslant \frac{1}{15000}$.

7. $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

8. Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziałach $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ oraz ściśle wypukła na przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. W punktach $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ wykres tej funkcji przegina się.

Grupa C

1. $|V| = \pi \int\limits_0^\pi \left(r + \frac{R-r}{H} x\right)^2 dx = \frac{\pi H}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right)$.

2. 1.

3. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{9 + 8\sqrt{3}}{18}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{2 + 8\operatorname{tg}^2 c + 6\operatorname{tg}^4 c}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$, gdzie $c \in \left(\frac{\pi}{6}, x\right)$, gdy $x > \frac{\pi}{6}$ lub $c \in \left(x, \frac{\pi}{6}\right)$, gdy $x < \frac{\pi}{6}$.

4. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

5. $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1.$

6. $x-\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$

7. $f'(x_0)\stackrel{def}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x_0}}}{x-x_0}=-\dfrac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}.$

8. $\frac{1}{\sqrt{e}}.$

Grupa D

1. $e^2.$

2. $\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{1!\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 3^2}+\frac{1}{3!\cdot 3^3}=\frac{113}{81}.$

3. $\ln\frac{4}{3}.$

4. $\dfrac{2\sin 2x-\cos 2x}{5e^x}.$

5. Wskazówka. Funkcje ograniczające z dołu i z góry mają postać $d(x)=-e^x$, $g(x)=5e^x$.

6. $\frac{26}{3}.$

7. $2\ln\left(x^2+10x+34\right)-\frac{19}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{3}+C.$

8. $m=f(-1)=\frac{-1}{\sqrt{5}}$, $M=f(2)=\frac{2}{\sqrt{17}}.$

Zestaw V

Grupa A

1. 3.

2. $2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C.$

3. $e^{\cos x}=1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sin^2 c-\cos c}{2}e^{\cos c}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$, gdzie $c\in\left(\frac{\pi}{2},x\right)$, gdy $x>\frac{\pi}{2}$ lub $c\in\left(x,\frac{\pi}{2}\right)$, gdy $x<\frac{\pi}{2}$.

4. $\infty.$

5. $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}.$

6. $|D|=\frac{17}{4}-\frac{1}{2\ln 2}.$

7. $(0,\infty).$

8. Prosta $x=-1$ jest asymptotą pionową lewostronną, prosta $y=-1$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$, a prosta $y=1$ asymptotą poziomą w ∞.

Grupa B

1. $-\frac{1}{2}.$

2. $-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x|+C.$

3. $(\ln x)^x = 1+(x-e)+\frac{1}{2}(\ln c)^c\left[\left(\ln\ln c+\frac{1}{\ln c}\right)^2+\frac{1}{c\ln c}-\frac{1}{c\ln^2 c}\right](x-e)^2.$

4. $e.$

5. $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$

6. $|D|=1.$

7. Funkcja f jest malejąca na przedziale $(3,4)$ i rosnąca na przedziale $(4,\infty)$. Ponadto $m=f(4)=8.$

8. Prosta $y=\pi x$ jest asymptotą ukośną w $-\infty$, a prosta $y=0$ asymptotą poziomą w ∞.

Grupa C

1. $\frac{1}{2}.$

2. $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C.$

3. $e^{\operatorname{tg} x}=1+x+\frac{1+2\operatorname{tg} c+2\operatorname{tg}^2 c+2\operatorname{tg}^3 c+\operatorname{tg}^4 c}{2}e^{\operatorname{tg} c}x^2$, gdzie $c\in(0,x)$, gdy $x>0$ lub $c\in(x,0)$, gdy $x<0$.

4. $-\infty.$

5. $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}.$

6. $|V|=\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$

7. Funkcja f jest wypukła na przedziale $(-1,0)$ oraz wklęsła na przedziale $(0,1)$. W punkcie $(0,0)$ funkcja ta ma punkt przegięcia.

8. Nie. Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x=1$.

Grupa D

1. $e^{12}.$

2. $-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg} x+\ln|x-1|+C.$

3. $x^{\cos x}=1+c^{\cos c}\left(\frac{\cos c}{c}-\ln c\cdot\sin c\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $c\in\left(\frac{\pi}{2},x\right)$, gdy $x>\frac{\pi}{2}$ lub $c\in\left(x,\frac{\pi}{2}\right)$, gdy $x<\frac{\pi}{2}$.

4. $1.$

5. $y=\frac{2-\ln 2}{2}x-\frac{1-\ln 2}{2}.$

6. $|V|=\frac{\pi^2}{2}.$

7. $\left(\frac{1}{e},\infty\right).$

8. Funkcja f nie ma pochodnej w punkcie $x_0=2$, gdyż $f'_-(2)\neq f'_+(2)$.

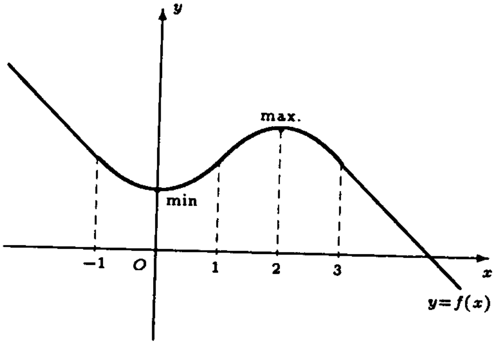
Zestaw VII

Grupa A

1. $V_{\max} = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ dla $r_{\max} = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.
2. 8.
3. $g(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$, $x \in \mathbf{R}$.
4. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 4x + 8\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C$.
5. $|D| = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$.
6. $y' = 3^{\sin\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
7. $\frac{9}{32}$.
8. $W(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{27}$.

Grupa B

1. $\frac{1}{6}$.
2. $y' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.
3. $V_{\max} = \frac{1}{3\sqrt[4]{27}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{S^3}$ dla $r_{\max} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.
4. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku poniżej.



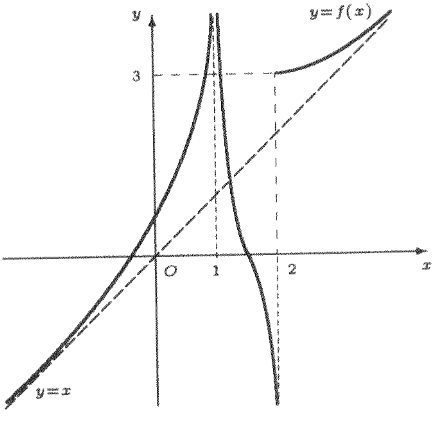
5. $\frac{11}{6}$.
6. $\left(\frac{3}{34}\sin 5x - \frac{5}{34}\cos 5x\right)e^{3x} + C$.
7. $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln\left(x^2 + 2x + 2\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C$.
8. $|V| = \frac{2}{3}\pi$.

Grupa C

1. $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{3}{4}\ln|x+2| + C$.
2. $S_{\min} = 3\sqrt[6]{\frac{3\pi^2}{2}}\sqrt[3]{V^2}$ dla $r_{\min} = \sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.
3. $\frac{9}{2}$.
4. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.
5. $\frac{3}{2}$.
6. $|\Sigma| = 4\pi\sqrt{5}$.
7. $y' = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^3\sqrt{x}}$.
8. $W(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.

Grupa D

1. 2.
2. $1 - \dfrac{e^{-6} + e^{-4}}{2}$.
3. $\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.
4. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku poniżej.



5. $y' = \dfrac{x-1}{2x(x+1)}$, $x > 0$.
6. $|V| = \frac{48}{5}\pi$.
7. $S_{\min} = 3\sqrt[3]{2\pi}\sqrt[3]{V^2}$ dla $r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.
8. $W(x) = -18x^2 + 18x$.

Zestaw IX

Grupa A

1. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+3\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$
2. $\frac{1}{4}\ln 3.$
3. $|\Gamma|=\frac{2}{27}\left(19\sqrt{19}-1\right).$
4. Wskazówka. Ciągi ograniczające z dołu i z góry rozważany ciąg mają odpowiednio postać $d_n=\frac{n^2+n}{n^2+1}$, $g_n=\frac{n^2+n}{n^2-1}$ dla $n>1$.
5. Warunek ciągłości: $A+B=1$. Funkcja jest różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$ dla $A=2$ i $B=-1$.
6. 1.
7. Funkcja odwrotna f^{-1} istnieje, bo funkcja $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$ jest rosnąca na przedziale $[2,\infty)$. Funkcja odwrotna ma postać $f^{-1}(y)=e^{y^2}+1$, gdzie $y\in W_f=[0,\infty)$.
8. Funkcja f jest malejąca na przedziale $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\ln 2\right)$ i rosnąca na przedziale $\left(-\frac{1}{3}\ln 2,\infty\right)$. Ponadto $f_{\min}\left(-\frac{\ln 2}{3}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Grupa B

1. Funkcja f jest wklęsła na przedziale $\left[-\frac{1}{2},1\right]$; $m=f(1)=1$ $M=f(0)=4$.
2. Dla $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
3. $\frac{3}{4}$.
4. $y=-x$ lub $y=-x+\ln\left(1+4e^{-2}\right)$.
5. Prosta $x=0$ jest asymptotą pionową prawostronną, także prosta $x=2$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f. Funkcja ta ma asymptotę poziomą o równaniu $y=1$ w $-\infty$ oraz asymptotę ukośną o równaniu $y=x+2$ w ∞.
6. $|D|=\frac{\pi}{36}$.
7. $\frac{\pi}{12}\ln\frac{64\pi}{81e}$.
8. $x+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$

Grupa C

1. $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{24}$.
2. $\frac{3}{4}\ln|e^x-2|+\frac{1}{4}\left(e^x+2\right)+C.$
3. Dla $\alpha=\sqrt{3}$.

4. $A = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
5. Funkcja f jest malejąca na przedziale $(0, 3)$ i rosnąca na przedziale $(-3, 0)$. Funkcja ta jest wklęsła na przedziale $(-3, 3)$.
6. $\frac{\pi}{4} - 0.015$.
7. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.
8. $\frac{1}{2}$.

Grupa D

1. Proste $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ są asymptotami ukośnymi funkcji f odpowiednio w $-\infty$ oraz w ∞. Funkcja ta nie ma asymptot pionowych.
2. $\frac{1}{e^2}$.
3. $\ln\frac{3}{2} - 6$.
4. $\frac{2}{3}$.
5. Funkcja f jest malejąca na przedziałach $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, $(1, \infty)$ oraz rosnąca na przedziale $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Ponadto $f_{\max}\left(\frac{1}{e}\right) = -e$.
6. $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.
7. $\ln\left(4x^2 + 4x + 5\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2} + C$.
8. $|D| = 1 - \frac{1}{2}\ln 2$.

Zasady zaliczania kursu Analiza matematyczna 1

Kolokwia w systemie wykładowym

Na wykładach bez ćwiczeń prowadzący organizuje dwa kolokwia (na prawach egzaminów cząstkowych w terminie zerowym). Na obu kolokwiach w czasie 60 minut studenci otrzymają do rozwiązania po 4 zadania. Za rozwiązanie każdego z nich można otrzymać max. 5 punktów. Ponadto student ma możliwość uzyskania, na zasadach podanych przez wykładowcę, dodatkowych 5 punktów (np. za odpowiedzi, kartkówki lub za dodatkowe piąte zadanie na drugim kolokwium). Studenci, którzy uzyskają łącznie co najmniej 20 punktów, będą zwolnieni z egzaminu lub zaliczenia wykładu z oceną wynikającą z tabeli:

Punkty	0–19.5	20–24	24.5–28	28.5–32	32.5–36	36.5–45
Ocena	Student zdaje zaliczenie poprawkowe	dst	dst+	db	db+	bdb

Kolokwia w systemie z ćwiczeniami

Na ćwiczeniach prowadzący organizuje dwa kolokwia. Na każdym kolokwium w ciągu 60 minut student rozwiązuje 4 zadania. Za rozwiązanie każdego z nich można otrzymać max. 5 punków. Na ćwiczeniach student może dodatkowo uzyskać 5 punktów z odpowiedzi, kartkówek lub innej formy kontroli wiedzy. Studenci, którzy z kolokwiów, odpowiedzi i kartkówek uzyskają łącznie co najmniej 20 punktów, otrzymają zaliczenie ćwiczeń z oceną wynikającą z tabeli:

Punkty	0–19.5	20–24	24.5–28	28.5–32	32.5–36	36.5–45
Ocena	Student zdaje zaliczenie poprawkowe	dst	dst+	db	db+	bdb

Studenci, którzy uzyskają zaliczenie ćwiczeń mogą być zwolnieni z egzaminu lub też zaliczenia wykładu. Decyzję o zwolnieniu podejmuje wykładowca w porozumieniu z prowadzącym ćwiczenia. Studenci, którzy nie uzyskali zaliczenia ćwiczeń przystępują do zaliczeń poprawkowych.

Egzamin podstawowy
Pierwsze zaliczenie poprawkowe wykładu
Pierwsze zaliczenie poprawkowe ćwiczeń

Studenci, którzy nie uzyskali zaliczenia kursu na podstawie kolokwiów, przystępują do egzaminu podstawowego, pierwszego zaliczenia poprawkowego wykładu lub pierwszego zaliczenia poprawkowego ćwiczeń w czasie sesji. Na tym sprawdzianie, w czasie 120 min., studenci otrzymają do rozwiązania 6 zadań. Za rozwiązanie każdego z zadań można otrzymać max. 5 punktów. Do punktów uzyskanych na egzaminie dolicza się 50 % punktów uzyskanych w czasie semestru, lecz nie więcej niż 10 punktów. Ocena końcowa będzie ustalana wtedy według tabeli:

Punkty	0–19.5	20–25	25.5–30.5	31–34	34.5–36.5	37–40
Ocena	Student zdaje drugi sprawdzian poprawkowy	dst	dst+	db	db+	bdb

Studenci, którzy uzyskają zaliczenie poprawkowe ćwiczeń, będą zwolnieni z egzaminu lub też zaliczenia wykładu z tą samą oceną.

Poprawianie ocen pozytywnych

Student może próbować poprawić ocenę pozytywną, zaproponowaną na zaliczenie kursu na podstawie kolokwiów, ryzykując jednak jej pogorszeniem nawet na ocenę niedostateczną. Poprawianie ocen odbywa się wyłącznie w terminie egzaminu podstawowego i na tych samych zasadach co ten egzamin.

Egzamin lub zaliczenie wykładu na ocenę celującą

Studenci, którym na podstawie kolokwiów zaproponowano zaliczenie kursu na ocenę bardzo dobrą, mogą zdawać specjalny egzamin na ocenę celującą, nie ryzykując przy tym pogorszeniem oceny. Za zgodą wykładowcy do tego egzaminu mogą przystąpić także studenci, którym zaproponowano zaliczenie kursu na ocenę dobrą plus lub dobrą. Na egzaminie na ocenę celującą studenci otrzymają do rozwiązania, w czasie 180 min., cztery nietypowe zadania. Za rozwiązanie każdego z tych zadań można otrzymać 5 punktów. Ocenę celującą uzyskują studenci, którzy zdobędą co najmniej 10 punktów. Egzamin na ocenę celującą odbywa się w terminie egzaminu podstawowego. Studenci, którzy uzyskają ocenę celującą, a kurs był prowadzony z ćwiczeniami, otrzymają tę samą ocenę na zaliczenie ćwiczeń.

Egzamin poprawkowy
Drugie zaliczenie poprawkowe wykładu
Drugie zaliczenie poprawkowe ćwiczeń

Na tym sprawdzianie, tak samo jak w pierwszym terminie, studenci otrzymują do rozwiązania 6 zadań w czasie 120 minut. Za rozwiązanie każdego z nich można otrzymać 5 punktów. Reguły zaliczenia są takie same jak w poprzednim terminie.

Studenci, którzy nie zaliczą **Analizy matematycznej 2**, powinni zapisać się w następnym semestrze na kurs powtórkowy z tego przedmiotu. Za powtarzanie kursu student wnosi specjalną opłatę.

Uwaga

Kolokwia w czasie semestru mogą być podstawą zwolnienia z egzaminu lub zaliczenia wykładu tylko wtedy, gdy będą obejmowały cały program kursu.

Wykładowca może wprowadzić inne zasady zaliczania kursów. Wtedy zasady te obowiązują we wszystkich jego grupach ćwiczeniowych.