Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Igor Nowicki

20 grudnia 2020

Spis treści

1 Drugie kolokwium

1.1 Ściąga

- Dystrybuanta: $F(X) = \int_\Omega f(x) \mathrm{d}x$,
- wartość oczekiwana: $EX = \int_\Omega x \cdot f(x) \mathrm{d}x$,
- wariancja: $\sigma^2 = \int_\Omega (x - EX) \cdot f(x) \mathrm{d}x$,
- odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_\Omega (x - EX) \cdot f(x) \mathrm{d}x}$.
- Schemat Bernoulliego - prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,
- Przybliżenie Poissona (dla $np^2 \ll 1$): $f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.
- Rozkład geometryczny, w którym zakładamy że proces odniesie sukces dokładnie w k-tej próbie, gdzie k jest liczbą naturalną, dodatnią: $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.
- Wartość oczekiwana dla rozkładu geometrycznego: $EX = \frac{1}{p}$,
- Wariancja dla rozkładu geometrycznego: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Odchylenie standardowe dla rozkładu geometrycznego: $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$
- Rozkład hipergeometryczny, w którym ze zbioru N elementów w którym jest R elementów wyróżnionych pobieramy losowo n elementów i sprawdzamy jaka jest szansa by k elementów było wyróżnionych: $P(X = k) = HG(N, R, n) = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-n}{R-k}}{\binom{N}{R}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{R-k}}{\binom{N}{R}}$.
- Gęstość prawdopodobieństwa dla rozkładu wykładniczego to $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, gdzie x oznacza odstęp czasu między awariami.

- Dystrybuanta dla rozkładuw wykładniczego to: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Średni czas odstępu między awariami to: $\bar{x}_{\text{śr}} = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$.
- Rozkład normalny: $f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$.
- Przekształcenia dla innych wartości średniej i wariancji (μ, σ^2): $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

1.2 Zmienne dyskretne

Zadanie 1.1. Prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych ocen z egzaminu z RPS są następujące:

x_i	2	3	4	5
p_i	0.15	0.55	a	b

Wiadomo, że prawdopodobieństwo uzyskania piątki jest dwa razy większe niż uzyskania czwórki.

a) Wyznacz wartości stałych a i b tak, aby powyższa tabelka określała rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisujacej możliwą do uzyskania ocenę z egzaminu.

b) Sporzadź wykres funkcji prawdopodobieństwa.

c) Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej i sporządź jej wykres.

d) Wyznacz i zinterpretuj prawdopodobieństwa: $P(X > 3)$, $P(X \geqslant 3)$, $P(3 < X \leqslant 4)$.

e) Wyznacz wartość oczekiwaną, wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej.

Rozwiązanie. a) Wyznacz wartości stałych a i b tak, aby powyższa tabelka określała rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisujacej możliwą do uzyskania ocenę z egzaminu.

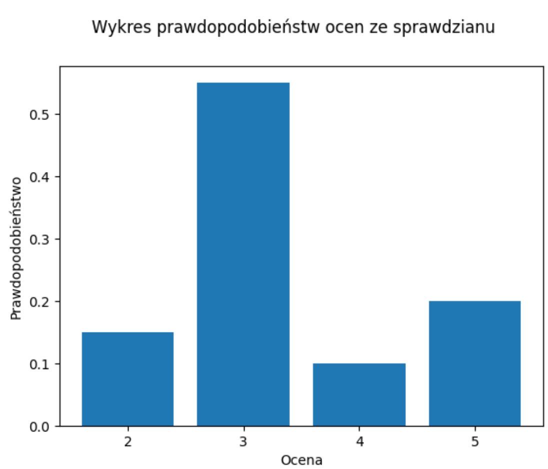
Wiadomo, że szansa uzyskania jakiejkolwiek oceny powinna być równa 1. Razem z informacją, że $b = 2a$, mamy równanie:

$$\begin{aligned} 0.15 + 0.55 + a + b &= 1, \\ 0.7 + a + 2a &= 1, \\ 3a &= 0.3, \\ a &= 0.1, \\ b &= 0.2. \end{aligned}$$

Uzupełniona tabelka prawdopodobieństw wygląda następująco:

x_i	2	3	4	5
p_i	0.15	0.55	0.1	0.2

b) Sporządź wykres funkcji prawdopodobieństwa.



c) Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej i sporządź jej wykres.

Dystrybuantę F definiuje się następująco:

$$F(t) = \mathbb{F}((-\infty, t]).$$

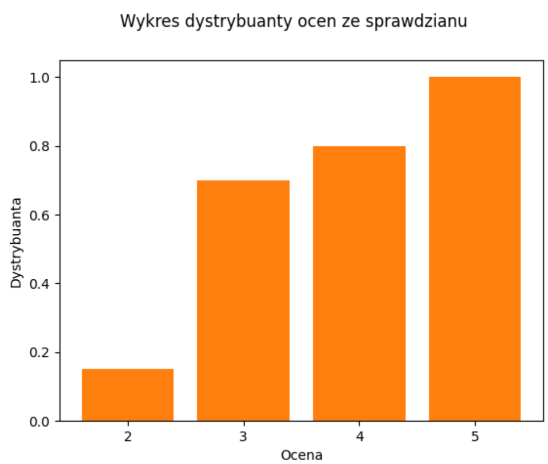
Dla rozkładu dyskretnego możemy zastosować następujący wzór:

$$F(x_k) = \sum_{i=0}^{k} p_i.$$

W ten sposób możemy stworzyć nową tabelę dla dystrybuanty ocen.

x_i	2	3	4	5
$F(x_i)$	0.15	0.7	0.8	1

Wykres dystrybuanty:



d) Wyznacz i zinterpretuj prawdopodobieństwa:

- $P(X > 3) = \mathbb{F}(\infty) - \mathbb{F}(3) = 0.3$ - prawdopodobieństwo otrzymania oceny lepszej niż 3,
- $P(X \geqslant 3) = \mathbb{F}(\infty) - \mathbb{F}(2) = 0.85$ - prawdopodobieństwo zdania egzaminu z oceną pozytywną,
- $P(3 < X \leqslant 4) = \mathbb{F}(4) - \mathbb{F}(3)$ - prawdopodobieństwo zdania egzaminu na 4.

e) Wyznacz wartość oczekiwaną, wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej.

- Wartość oczekiwana: $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.55 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.2 = 3.35$,
- Wariancja: $\sigma^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i = 0.9275$,
- Odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.9275} \approx 0.963$.

$\square$

Zadanie 1.2. Dystrybuanta pewnej dyskretnej zmiennej losowej dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ 0.4 & \text{dla } x \in [-2, 3) \\ 0.5 & \text{dla } x \in [3, 5) \\ 1 & \text{dla } x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej. Oblicz:

a) $P(X \leqslant -2)$,

b) $P(X < 3)$,

c) $P(X \geqslant 3)$,

d) $P(-2 \leqslant X \leqslant 5)$,

e) $P(-2 \leqslant X < 5)$.

Rozwiązanie. Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej:

x_i	-2	3	5
p_i	0.4	0.1	0.5

a) $P(X \leqslant -2) = 0.4$

b) $P(X < 3) = 0.4$,

c) $P(X \geqslant 3) = 0.6$,

d) $P(-2 \leqslant X \leqslant 5) = 1$,

e) $P(-2 \leqslant X < 5) = 0.5$.

□

Zadanie 1.3. Wirus komputerowy próbuje uszkodzić dwa pliki. Pierwszy z nich zostanie uszkodzony z prawdopodobieństwem 0.4. Niezależnie od tego, drugi zostanie uszkodzony z prawdopodobieństwem 0.3. Wyznacz rozkład oraz dystrybuantę zmiennej losowej X opisujacej możliwą liczbę uszkodzonych plików.

Rozwiązanie. Szansa na uszkodzenie:

- Żadnego pliku: $P((A \cap B)') = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) = 0.42$.
- Jednego pliku: $P(A \oplus B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.24 = 0.46$.
- Obydwu plików: $P(A \cap B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$.

Rozkład prawdopodobieństw i dystrybuanta:

x_i	0	1	2
p_i	0.42	0.46	0.12
$F(x_i)$	0.42	0.88	1

$\square$

Do rozwiązania poniższych zadań potrzebujemy **schematu Bernoulliego** na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie.

Zadanie 1.4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucajac pięć razy kostką wyrzucimy trzy razy szóstkę.

Rozwiązanie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucajac pięć razy kostką wyrzucimy trzy razy szóstkę:

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 3.215\%$$

$\square$

Zadanie 1.5. Szacuje się, że aż 10% studentów nie lubi zajęć z RPS. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 6 przypadkowo napotkanych studentów co najmniej dwóch nie będzie lubiło tego przedmiotu?

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego skądinąd wzoru na prawdopodobieństwo dopełnienia:

$$\mathcal{P}(A') = 1 - \mathcal{P}(A).$$

A zatem - prawdopodobieństwo że co najmniej dwóch studentów nie lubi przedmiotu jest dopełnieniem prawdopodobieństwa że co najwyżej jeden student nie lubi przedmiotu. To prawdopodobieństwo można wyrazić jako:

$$\mathcal{P}(A') = \mathcal{P}(A_0) + \mathcal{P}(A_1) = \binom{6}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^6 + \binom{6}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^5 = 0.9^6 + 6 \cdot 0.1 \cdot 0.9^5 = 88.57\%.$$

Zatem szansa że co najmniej dwóch studentów nie będzie lubiło przedmiotu wynosi $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A') = 1 - 88.57\% = 11.43\%$.

$\square$

Zadanie 1.6. Janek spóźnia się do pracy z prawdopodobieństwem 0.15 każdego dnia. Interesuje nas możliwa liczba dni w tygodniu (5 dni roboczych), w których Janek spóźnia się do pracy.

a) Wyznacz funkcję rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuantę liczby spóźnień w ciagu 5 dni.

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciagu 5 dni Janek spóźni się co najwyżej raz?

Rozwiązanie. a) Wyznacz funkcję rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuantę liczby spóźnień w ciagu 5 dni.

Zastosujemy rozkład Bernoulliego:

$$\mathcal{P}_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gdzie $n = 5$ to liczba dni w tygodniu (roboczym), a k to liczba dni w których Janek się spóźnił. Zatem:

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}_5(k)$	44.37%	39.15%	13.82%	2.43%	0.21%	0.001%
$\mathcal{F}(k)$	44.37%	83.52%	97.34%	99.78%	99.99%	100%

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciagu 5 dni Janek spóźni się co najwyżej raz?

Szansa że Janek spóźni się najwyżej raz to suma szans że spóźni się zero lub jeden razy - zatem prawdopodobieństwo bedzie równe dystrybuancie $\mathcal{F}(1) = 83.52\%$.

□

Zadanie 1.7. W statystycznej kontroli jakości partia wyrobów zostaje zaakceptowana jako dobra tylko wtedy, gdy liczba sztuk wadliwych w stosunku do liczebności całej partii nie przekracza pewnej z góry określonej wartości. Przypuśćmy, że w dużej partii wyrobów jest 20% sztuk wadliwych. Pobrano próbę liczacą 20 sztuk. Procedura kontrolna przewiduje zaakceptowanie partii wyrobów tylko wtedy, gdy nie więcej niż 2 sztuki wśród 20 okażą się wadliwe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że partia wyrobów nie zostanie zaakceptowana?

Rozwiązanie. Szansa że partia wyrobów nie zostanie zaakceptowana jest dopełnieniem szansy że zostanie zaakceptowana, tj. nie więcej niż dwie sztuki będą wadliwe. Szansa na to że co najwyżej dwie sztuki są wadliwe jest równa dystrybuancie $\mathcal{F}(2) = p_{20}(0) + p_{20}(1) + p_{20}(2)$. Potrzebujemy obliczyć prawdopodobieństwa $p_{20}(0), p_{20}(1), p_{20}(2)$ - uzyskujemy je ze wzoru Bernoulliego:

$$p_{20}(0) = \binom{20}{0} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^{20} = 1.15\%,$$
$$p_{20}(1) = \binom{20}{1} \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^{19} = 5.76\%,$$
$$p_{20}(2) = \binom{20}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^{18} = 13.69\%.$$

Suma powyższych prawdopodobieństw to 20.6% - jest to szansa że partia zostanie zaakceptowana. Zatem szansa że partia będzie odrzucona wynosi 79.4%.

□

Zadanie 1.8. Prawdopodobieństwo trafienia przez strzelca w dziesiatkę jest równe 0.7, a w dziewiątkę - 0.3. Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelec zdobędzie przy trzech strzałach co najmniej 29 punktów.

Rozwiązanie. Aby strzelec uzyskał co najmniej 29 punktów w trzech strzałach, musi spudłować (tj. trafić w dziewiątkę) co najwyżej raz. Prawdopodobieństwa strzałów obliczamy z rozkładu Bernoulliego:

$$p_3(0) = \binom{3}{0} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^0 = 34.3\%,$$
$$p_3(1) = \binom{3}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^2 = 44.1\%.$$

Szansa że strzelec spudłuje co najwyżej raz jest równa dystrybuancie $\mathcal{F}(1) = p_3(0)+p_3(1) = 78.4\%$. $\square$

Zadanie 1.9. Została wydana ekscytujaca gra komputerowa. Sześćdziesiat procent graczy ukończyło wszystkie poziomy. Trzydzieści procent z nich kupi zaawansowaną wersję gry. Spośród 15 użytkowników jaka jest oczekiwana liczba osób, które kupią wersję zaawansowaną? Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupią ją co najmniej dwie osoby?

Rozwiązanie. Szansa na kupienie zaawansowanej wersji gry wynosi $p = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$. Ze wzoru na wartość średnią, wiemy że:

$$EX = p \cdot n = 0.18 \cdot 15 = 2.7.$$

Prawdopodobieństwo na kupienie przez co najmniej dwie osoby jest dopełnieniem prawdopodobieństwa że rozszerzenie zostanie kupione przez co najwyżej jedną osobę:

$$p' = F(1) = p_{15}(0) + p_{15}(1) = \binom{15}{0} \cdot 0.18^0 \cdot 0.82^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0.18^1 \cdot 0.82^{14} = 21.87\%.$$

Zatem szansa że gra zostanie kupiona przez co najmniej dwie osoby wynosi $p = 1 - F(1) = 78.13\%$. $\square$

Zadanie 1.10. W skład złożonej aparatury wchodzi 1000 elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciagu roku każdego z tych elementów wynosi 0.001 i nie zależy od stanu pozostałych elementów. Korzystajac z przybliżenia Poissona oszacuj prawdopodobieństwa uszkodzenia w ciagu roku:

a) dokładnie dwóch elementów,

b) nie mniej niż 2 elementów.

Rozwiązanie. Wartość oczekiwana liczby uszkodzonych elementów to

$$EX = \lambda = p \cdot n = 1000 \cdot 0.001 = 1.$$

Korzystając z przybliżenia Poissona wiemy, że szansa na uzyskanie k wyników w zestawie n prób przy wartości oczekiwanej λ to:

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Możemy korzystać z przybliżenia, bowiem $np^2 = 0.001$ jest małe. Zatem:

a) Prawdopodobieństwo uszkodzenia dokładnie dwóch elementów w ciągu roku:

$$f(2, 1) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = 18.4\%,$$

b) nie mniej niż 2 elementów (dopełnienie prawdopodobieństwa wystąpienia co najwyżej jednego elementu):

$$1 - f(1, 1) - f(0, 1) = 1 - \frac{1^1 e^{-1}}{1!} - \frac{1^0 e^{-1}}{0!} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 26.42\%.$$

$\square$

Zadanie 1.11. Liczba czastek emitowanych przez substancję promieniotwórczą w ciagu 10 sekund jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 3. Oblicz prawdopodobieństwo wyemitowania w tym czasie więcej niż jednej czastki.

Rozwiązanie. Szansa na wyemitowanie więcej niż jednej cząstki to dopełnienie prawdopodobieństwa wyemitowania dokładnie zera lub jednej cząstki.
Stosując wzór Poissona możemy uzyskać szansę na k cząstek przy wartości oczekiwanej λ cząstek:

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Zatem, rozwiązanie wygląda następująco:

$$p(x > 1) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1) = 1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!} - \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 1 - e^{-3} - 3 \cdot e^{-3} = 80.1\%.$$

$\square$

Zadanie 1.12. Klienci dostawcy usług internetowych tworzą dziennie średnio 10 nowych kont.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dzisiaj zostanie utworzonych ponad 8 nowych kont?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że więcej niż 16 kont zostanie utworzonych w ciagu 2 dni?

Rozwiązanie. Wzór na rozkład Poissona:

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

gdzie k oznacza liczbę zdarzeń, natomiast λ - oczekiwaną liczbę zdarzeń.

a) Szansa że dzisiaj zostanie utworzone więcej niż 8 kont to dopełnienie prawdopodobieństwa, że zostanie utworzone 8 lub mniej kont. Zatem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X > 8) &= 1 - \mathcal{P}(X \leqslant 8), \\
&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - \cdots - P(X = 8), \\
&= 1 - \frac{10^0}{0!} e^{-10} - \frac{10^1}{1!} e^{-10} - \frac{10^2}{2!} e^{-10} - \cdots - \frac{10^8}{8!} e^{-10}, \\
&= 66.7\%.
\end{aligned}$$

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że więcej niż 16 kont zostanie utworzonych w ciagu 2 dni?

Tym razem liczymy w odcinku czasowym 2 dni - wartość oczekiwana to $\lambda = 16$ kont w tym przedziale. Prawdopodobieństwo więcej niż 16 kont to dopełnienie prawdopodobieństwa utworzenia 16 kont i mniej:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X > 16) &= 1 - \mathcal{P}(X \leqslant 16), \\
&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - \cdots - P(X = 16), \\
&= 1 - \frac{20^0}{0!} e^{-20} - \frac{20^1}{1!} e^{-20} - \frac{20^2}{2!} e^{-20} - \cdots - \frac{20^{16}}{16!} e^{-20}, \\
&= 77.89\%.
\end{aligned}$$

$\square$

Zadanie 1.13. Rzucamy symetryczną kostką dopóki nie wypadnie jedynka. Jaka jest wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe liczby potrzebnych do wykonania rzutów? Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda nam się to dopiero za piątym razem?

Rozwiązanie. Korzystamy z rozkładu geometrycznego w którym zakładamy że proces odniesie sukces dokładnie w k-tej próbie, gdzie k jest liczbą naturalną, dodatnią:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

W tym wypadku prawdopodobieństwo p wyrzucenia jedynki wynosi $\frac{1}{6}$. Zatem, szansa że dopiero w piątym rzucie uzyskamy 1 wynosi $p = (1 - \frac{1}{6})^4 \cdot \frac{1}{6} \approx 8\%$.
W rozkładzie geometrycznym wartość oczekiwana wynosi:

$$EX = \frac{1}{p} = 6,$$

wariancja:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} \approx 30.$$

natomiast odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \approx 5.5.$$

$\square$

Zadanie 1.14. Prawdopodobieństwo, że student zda egzamin z matematyki wynosi $p = 0.6$. Student może podchodzić do egzaminu, dopóki dopóty nie zaliczy przedmiotu. Oblicz prawdopodobieństwo, że student zaliczy egzamin za 2 podejściem oraz prawdopodobieństwo, że będzie podchodził do egzaminu nie więcej niż 3 razy.

Rozwiązanie. Korzystamy z rozkładu geometrycznego. Szansa że student zda za 2 podejściem wynosi

$$P(X = 2) = (1 - p)^1 p^1 = 0.4 \cdot 0.6 = 24\%.$$

Szansa że student będzie podchodził do egzaminu nie więcej niż trzy razy to suma prawdopodobieństw:

$$P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = p + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p = 93.6\%.$$

$\square$

Poniższe zadania rozwiązuje się poprzez zastosowanie **rozkład hipergeometryczny** - sposób na ustalenie prawdopodobieństwa dla zbioru N elementów gdzie m elementów jest wyróżnionych. Ze zbioru pobiera się w sposób losowy n elementów. Szansa że k elementów tego podzbioru jest wyróżnionych, wynosi:

$$P(X = k) = HG(N, m, n) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Wartość oczekiwana: $EX = \frac{nm}{N}$.

Zadanie 1.15. Przypuśćmy, że samochody nadchodzą do salonu samochodowego w partiach po 10 sztuk i że ze względów oszczędnościowych tylko 5 sztuk z każdej partii bada się z punktu widzenia wymagań bezpieczeństwa. Te 5 samochodów wybiera się losowo. Jeżeli w partii 10 samochodów 2 nie spełniają wymagań bezpieczeństwa, to jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 1 spośród poddawanych badaniom 5 samochodów okaże się nie spełniajacym tych wymagań?

Rozwiązanie. Moc głównego zbioru to $N = 10$, gdzie mamy $m = 2$ elementów wyróżnionych. Pobieramy $n = 5$ elementów podzbioru i szukamy prawdopodobieństw dla $k \geqslant 1$:

$$P(X = k) = HG(10, 2, 5) = \frac{\binom{2}{k}\binom{10-2}{5-k}}{\binom{10}{5}}$$

$$P(X \geqslant 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{10-2}{5-1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{10-2}{5-2}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

□

Zadanie 1.16. Z partii składajacej się ze 100 wyprodukowanych przedmiotów, wśród których jest 10 wykonanych wadliwie, wybrano w sposób losowy pięć sztuk. Oblicz prawdopodobieństwo, że w wylosowanej próbie znalazły się dwie sztuki wadliwe.

Rozwiązanie. Dla opisanego powyżej przypadku ($N = 100, m = 10, n = 5, k = 2$) szansa na wylosowanie dwóch sztuk wadliwych wynosi:

$$P(X = k) = HG(100, 10, 5) = \frac{\binom{10}{k}\binom{100-10}{5-k}}{\binom{100}{5}}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{100-10}{5-2}}{\binom{100}{5}} = 7.02\%.$$

□

Zadanie 1.17. Prawdopodobieństwo znalezienia wybrakowanego towaru wynosi 5%. Kontrola sprawdza liczbę braków spośród 12 losowo wybranych sztuk towaru z partii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola napotka w tej próbie nie więcej niż 1 wadliwą sztukę produktu? Rozwiąż to zadanie zakładajac, że:

a) liczność produktów w rozpatrywanej partii jest bardzo duża,

b) liczba wyprodukowanych towarów wynosi 100.

Rozwiązanie. a) Jeśli liczność produktów w partii jest bardzo duża, to możemy użyć rozkładu dwumianowego:

$$\mathcal{P}(X \leqslant 1) = \mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) = \binom{12}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{11} = 88.16\%.$$

b) Jeśli liczba wyprodukowanych towarów wynosi 100, to liczba wadliwych próbek spośród nich musi wynosić 5 (dla $p = 0.05$). Zastosujemy tutaj rozkład hipergeometryczny dla wartości $N = 100, m = 5, n = 12$:

$$P(X = k) = HG(100, 5, 12) = \frac{\binom{5}{k}\binom{100-5}{12-k}}{\binom{100}{12}}.$$

$$\mathcal{P}(X \leqslant 1) = \mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) = \frac{\binom{5}{0}\binom{100-5}{12-0}}{\binom{100}{12}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{100-5}{12-1}}{\binom{100}{12}} = 89.2\%.$$

□

1.3 Ciagłe zmienne losowe

Zadanie 1.18. Czas instalacji pewnego programu w godzinach jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^3) & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \leqslant 1. \end{cases}$$

(a) Wyznacz stałą k.

(b) Oblicz prawdopodobieństwo, że program zainstaluje się w czasie nie dłuższym niż pół godziny.

(c) Oblicz średni czas instalacji programu.

(d) Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej.

Rozwiązanie. (a) Stałą k można wyznaczyć poprzez scałkowanie gęstości prawdopodobieństwa - całkowite prawdopodobieństwo powinno być równe 1. Zatem ponieważ:

$$\int_0^1 k(1 - x^3)\mathrm{d}x = k \cdot \left[x - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{4}k = 1,$$

to stała k jest równa $\frac{4}{3}$.

(b) Prawdopodobieństwo instalacji w czasie nie dłuższym niż pół godziny jest równe dystrybuancie $F(x \leqslant 0.5)$, co odpowiada całce z gęstości prawdopodobieństwa od 0 do 0.5:

$$F(X \leqslant 0.5) = \frac{4}{3}\int_0^{0.5}(1 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{64}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{31}{64} = \frac{31}{48}.$$

(c) Średni czas instalacji programu jest określany przez całkę z przemnożonej zmiennej czasowej x z gęstością prawdopodobieństwa po całym przedziale:

$$\bar{x}_{\text{śr}} = \frac{4}{3}\int_0^1 x \cdot (1 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1 (x - x^4)\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{10} = 0.4h$$

(d) Dystrybuanta zmiennej losowej:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{4}{3} \cdot (t - \frac{t^4}{4}) & \text{dla } t \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } t > 1. \end{cases}$$

(wartość $F(t)$ dla przedziału $t \in [0,1]$ ustalany przez całkę $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$).

□

Zadanie 1.19. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ cx^2 + d & \text{dla } 1 \leqslant x < 4, \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Wyznacz stałe c i d. Wyznacz gęstość $f(x)$.

Rozwiązanie. Wartość dystrybuanty musi być ciągła. Mamy równania dla $x = 1$ oraz $x = 4$:

$$\begin{aligned} c + d &= \frac{1}{4}, \\ 16c + d &= 1. \end{aligned}$$

Zatem wartości $c = \frac{1}{20}$, $d = \frac{1}{5}$.
Wartość $f(x)$ można uzyskać poprzez różniczkowanie dystrybuanty:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0.25 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{20}x & \text{dla } 1 \leqslant x < 4, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$$

□

Zadanie 1.20. Czas pobierania się pliku w minutach jest opisany zmienną losową X o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x & \text{dla } 0 \leqslant x < 10, \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geqslant 10, \end{cases}$$

a) Oblicz prawdopodobieństwo pobrania się pliku co najwyżej w 5 minut.

b) Oblicz średni czas pobierania się pliku.

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że plik będzie pobierał się dłużej niż 1 minutę, ale krócej niż 4 minuty.

d) Ile co najwyżej minut będzie pobierał się plik z prawdopodobieństwem 0.9?

Rozwiązanie. a) Prawdopodobieństwo pobrania pliku w co najwyżej 5 minut to wartość dystrybuanty:

$$F(5) = \int_0^5 \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}x\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\Big(x - \frac{1}{20}x^2\Big)\Big|_0^5 = \frac{1}{5}\Big(5 - \frac{25}{20}\Big) = \frac{3}{4}.$$

b) Średni czas oblicza się ze wzoru:

$$\bar{x}_{\text{śr}} = \int_0^{10} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_0^{10}\Big(x - \frac{x^2}{10}\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{15}\Big)\Big|_0^{10} = \frac{1}{5}\Big(\frac{100}{2} - \frac{1000}{30}\Big) = 3.33.$$

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że plik będzie pobierał się dłużej niż 1 minutę, ale krócej niż 4 minuty.

Szansa na czas dłuższy niż minutę ale krótszy niż 4 minuty to:

$$F(1 \leqslant X \leqslant 4) = \int_1^4 \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}x\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\Big(x - \frac{x^2}{20}\Big)\Big|_1^4 = \frac{1}{5}\Big(4 - \frac{16}{20} - 1 + \frac{1}{20}\Big) = 45\%.$$

d) Prawdopodobieństwo 0.9 dla czasu najwyżej t prowadzi do wzoru:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = 0.9$$

co, po podstawieniu, można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\Big(t - \frac{t^2}{20}\Big) &= 0.9, \\ t - \frac{t^2}{20} &= 4.5, \\ t^2 - 20t + 90 &= 0, \end{aligned}$$

co ma rozwiązania dla $t = 10 \pm \sqrt{10}$. Ponieważ odrzucamy rozwiązania dla $t > 10$ (bo wtedy prawdopodobieństwo jest równe 1), przyjmujemy mniejszą z wartości: $t = 6.84$.

□

Zadanie 1.21. Czas przez jaki maszyna działa zanim ulegnie awarii (czyli odstęp czasu między dwiema kolejnymi awariami) ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 2$ (miesiące). Jakie jest prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy maszyny przez co najmniej 1 miesiąc? Jaki jest średni odstęp czasu między awariami?

Rozwiązanie. Gęstość prawdopodobieństwa dla rozkładu wykładniczego to

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

gdzie x oznacza odstęp czasu między awariami.
Dystrybuanta dla tego rozkładu to:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Jeśli pytamy o prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy przez co najmniej jeden miesiąc, to szukamy wartości:

$$P(x \geqslant 1) = 1 - F(1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-2} \approx 0.14.$$

Średni czas odstępu między awariami to:

$$\bar{x}_{\text{śr}} = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 0.5 \text{ (miesiąca)}.$$

□

Zadanie 1.22. Czas w miesiącach pomiędzy awariami drukarki ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 0.5$. W przypadku wystapienia awarii drukarka jest natychmiast naprawiana.

a) Określ rozkład liczby awarii drukarki w ciągu miesiąca.

b) Średnio ilu awarii możemy spodziewać się w ciagu miesiaca?

c) Średnio ilu awarii możemy spodziewać się w ciagu roku?

Rozwiązanie. a) Rozkład prawdopodobieństwa liczby awarii jest rozkładem Poissona:

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

gdzie k jest liczbą awarii, a $\lambda = 0.5$ - oczekiwaną liczbą awarii.

b) W ciągu miesiąca możemy się spodziewać $\lambda = 0.5$ awarii.

c) W ciągu roku możemy się spodziewać $12\lambda = 6$ awarii.

□

Zadanie 1.23. Z dotychczasowych obserwacji wynika, że liczba klientów przybywajacych w ciagu godziny do banku ma rozkład Poissona o średniej 4 (klientów na godzinę).

a) Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa czasu pomiędzy momentami przyjścia kolejnych klientów?

b) Jaki jest średni czas oraz odchylenie standardowe czasu pomiędzy momentami przybywania kolejnych klientów?

c) Jeżeli w danej chwili do oddziału banku wszedł klient, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciagu najbliższych minut kolejny klient przybędzie do oddziału?

d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciagu godziny do oddziału banku nie przyjdzie ani jeden klient?

Rozwiązanie. Średnia 4 klientów na godzinę (wartość oczekiwana liczby klientów) przekłada się na parametr $\lambda = 4$, zarówno w rozkładzie Poissona:

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

jak i rozkładzie prawdopodobieństwa czasu pomiędzy kolejnymi klientami:

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

a) Rozkład prawdopodobieństwa czasu pomiędzy kolejnymi klientami: $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$.

b) Średni czas:

$$\bar{x}_{\text{śr}} = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} = 0.25 \text{ (h)},$$

Odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_0^{\infty} (x - \bar{x}_{\text{śr}})^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}} = \sqrt{0.0625} = 0.25 \text{ (h)}.$$

c) Jeżeli w danej chwili do oddziału banku wszedł klient, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciagu najbliższych 30 minut kolejny klient przybędzie do oddziału?

Szansa na to, że w ciągu kolejnych 30 minut przyjdzie kolejny klient, wynosi:

$$p(x \leqslant 0.5 \text{ h}) = \int_0^{0.5} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 86.47\%.$$

d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciagu godziny do oddziału banku nie przyjdzie ani jeden klient?

Szansę na zerową liczbę klientów w ciągu godziny uzyskamy z rozkładu Poissona:

$$p(k=0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1.8\%.$$

□

Zadanie 1.24. Czas bezawaryjnej pracy X pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 5$. Oblicz:

a) wartość średnią bezawaryjnego czasu pracy urządzenia,

b) medianę,

c) prawdopodobieństwo, że bezawaryjny czas pracy urzadzenia wynosi co najmniej 5 godzin.

Rozwiązanie. a) Wartość średnia:

$$\bar{x}_{\text{śr}} = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 0.2.$$

b) Mediana rozkładu wykładniczego:

$$m = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 0.1386$$

c) prawdopodobieństwo, że bezawaryjny czas pracy urzadzenia wynosi co najmniej 5 godzin:

$$P(x \geqslant 5) = \int_5^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1.39 \cdot 10^{-11}.$$

□

Zadanie 1.25. Niech Z będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Oblicz:

a) $P(Z < 1.25)$,

b) $P(Z \leqslant 1.25)$,

c) $P(Z > 1.25)$,

d) $P(|Z| < 1.25)$,

e) $P(Z < 6)$,

f) $P(Z > 6)$,

g) Jakiej wartości nie przekracza zmienna Z z prawdopodobieństwem 0.8?

Rozwiązanie. Na podstawie tablic statystycznych:

a) $P(Z < 1.25) = 89.43\%$,

b) $P(Z \leqslant 1.25) = 89.43\%$,

c) $P(Z > 1.25) = 10.57\%$,

d) $P(|Z| < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z > -1.25) = 89.43\% - 10.57\% = 78.86\%$,

e) $P(Z < 6) = 1$,

f) $P(Z > 6) = 0$,

g) Jakiej wartości nie przekracza zmienna Z z prawdopodobieństwem 0.8?
Odpowiedź: $P(Z < 0.85) = 0.8$.

□

Zadanie 1.26. Dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym ze średnią $\mu = -3$ oraz wariancją $\sigma^2 = 4$ oblicz:

a) $P(X \leqslant 2.39)$,

b) $P(X \geqslant -2.39)$,

c) $P(|X| \geqslant 2.39)$,

d) $P(|X + 3| \geqslant 2.39)$,

e) $P(X < 5)$,

f) $P(|X| < 5)$,

g) Jaką wartość przekracza zmienna losowa X z prawdopodobieństwem 0.33?

Rozwiązanie. W przypadku innych wartości średniej μ i odchylenia standardowego σ musimy dokonać przekształcenia:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

a) $P(X \leqslant 2.39) = 0.9964$,

b) $P(X \geqslant -2.39) = 0.3802$,

c) $P(|X| \geqslant 2.39) = 1 - 0.3767 =$,

d) $P(|X+3| \geqslant 2.39) = P(X \leqslant -5.39) + P(X \geqslant 0.61) = 0 + (1 - 0.9640) = 0.036$,

e) $P(X < 5) = 1$,

f) $P(|X| < 5) = P(X < 5) - P(X < -5) = 1 - (1 - 0.8413) = 0.8413$,

g) Jaką wartość przekracza zmienna losowa X z prawdopodobieństwem 0.33?

$u = 0.42$, co oznacza, że $x = \sigma \cdot u + \mu = 2 \cdot 0.42 - 3 = -2.16$.

□

Zadanie 1.27. Włoski producent samochodów jest przekonany, że liczba kilometrów które można przejechać na jednym z jego silników ma rozkład normalny ze średnią 160 tys. km i odchyleniem standardowym 30 tys. km. Jakie jest prawdopodobieństwo, że silnik tego typu wytrzyma przebieg między 150 tys. km a 190 tys. km, zanim trzeba go będzie wymienić?

Rozwiązanie. $\mu = 160, \sigma = 30$. Zatem poszukiwana wartość to:

$$P(150 \leqslant x \leqslant 190) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{150}^{190} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) = 47.19\%.$$

□

Zadanie 1.28. Zakładamy, że wyniki skoku w dal mają rozkład normalny ze średnią 6.8 m i odchyleniem standardowym 0.3 m. Poniżej jakiego wyniku plasuje się 20% najsłabszych rezultatów?

Rozwiązanie. $\mu = 6.8$, $\sigma = 0.3$. Dla N(0,1) wartość 0.8 jest dla $u = 0.85$ - zatem 0.2 będzie dla $u = -0.85$, co odpowiada $x \approx 6.54$. □

Zadanie 1.29. Wzrost mieszkańców w pewnym mieście opisany jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej 173 cm i wariancji 100 cm^2.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba ma nie więcej niż 179 cm?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba ma więcej niż 181 cm?

c) Jaka jest frakcja osób majacych wzrost pomiędzy 167 a 180 cm?

d) Wyznacz wartość wzrostu, którego nie przekracza 60% badanej populacji.

Rozwiązanie. □

Zadanie 1.30. Stężenie zanieczyszczeń w półprzewodnikach używanych do produkcji mikroprocesorów ma rozkład normalny ze średnią 127 pewnych jednostek i odchyleniu standardowym 22 jednostki. Półprzewodnik może być użyty do produkcji tylko wtedy, gdy stężenie zanieczyszczeń jest mniejsze niż 150 jednostek. Jaka część półprzewodników nadaje się do tego, by ją użyć do produkcji mikroprocesorów?

Rozwiązanie. $\mu = 127, \sigma = 22$.

$$\Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{23}{22}\Big) \approx \Phi(1.04) \approx 85.08\%$$

$$P(X \leqslant 150) = 85.21\%$$

□

Zadanie 1.31. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{dla } 0 \leqslant x < 2, \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geqslant 2. \end{cases}$$

a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej X.

b) Wyznacz wartość oczekiwaną, wariancję, medianę zmiennej X.

Rozwiązanie. Przekształćmy $f(x)$ do bardziej przejrzystej formy:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, x < 0, \\ 1-x & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ x-1 & \text{dla } 1 \leqslant x < 2, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Dystrybuanta zmiennej x to scałkowana forma gęstości prawdopodobieństwa, według wzoru:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

zatem dystrybuanta przyjmuje formę:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, x < 0, \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{x^2}{2} - x + c & \text{dla } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Wartość c (zmienną całkowania) możemy wyznaczyć na podstawie punktów styku w $x = 1$ lub $x = 2$. Dla obydwu przypadków wychodzi wartość $c = -1$.
Wartość oczekiwana EX wyznaczana jest ze wzoru:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x,$$

i jej wartość wynosi:

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x, \\
&= \int_0^1 x \cdot (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 x \cdot (x-1)\mathrm{d}x, \\
&= \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^1 + \Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_1^2, \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, \\
&= 1 - \frac{2}{3} + 2\frac{2}{3} - 2, \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Wariancja jest obliczana ze wzoru:

$$
\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\mathrm{d}x
$$

Jej wartość:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_0^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x, \\
&= \int_0^1 (x-1)^2(1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)^2(x-1)\mathrm{d}x, \\
&= -\int_0^1 (x-1)^3\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)^3\mathrm{d}x, \\
&= 0.5.
\end{aligned}
$$

Mediana znajduje się dokładnie w miejscu kwantyla rzędu 0.5. Ponieważ wykres jest symetryczny wokół osi $x = 1$, możemy ustalić, że mediana jest równa 1. □

Zadanie 1.32. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$
f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & \text{dla } 0 \leqslant x < 2, \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geqslant 2. \end{cases}
$$

a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej x.

b) Wyznacz kwantyl rzędu 0.25 (pierwszy/dolny kwartyl) zmiennej x.

Rozwiązanie. Przekształćmy gęstość prawdopodobieństwa do bardziej czytelnej formy:

$$
f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x & \text{dla } 1 \leqslant x < 2, \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geqslant 2. \end{cases}
$$

a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej x.

Dystrybuanta:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Zatem po scałkowaniu:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2} + c & \text{dla } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 2, \end{cases}$$

gdzie wartość c (stałej całkowania) możemy wyznaczyć na podstawie punktu styku dla $x = 1$ lub $x = 2$. W obydwu przypadkach mamy $c = -1$.

b) Wyznacz kwantyl rzędu 0.25 (pierwszy/dolny kwartyl) zmiennej X.

Chcemy znaleźć wartość x dla której dystrybuanta ma wartość dokładnie 0.25 - będzie to w przedziale $x \in (0, 1)$, dla wartości spełniającej równanie:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0.25, \\ \frac{x^2}{2} &= 0.25, \\ x^2 &= 0.5, \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□