Zadania przygotowawcze 2

Zadanie 1 *Niech V i W będą zbiorami rozwiązań następujących układów równań:*

$$V : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Znajdź bazy przestrzeni V, W, $V \cap W$ i $V + W$.

Zadanie 2 *Zbadaj, czy wektory* $(2,0,3,1,1)\,,(1,-2,1,2,1)\,,(3,8,0,1,-2)\,,(3,3,2,2,0)$ *są liniowo niezależne.*

Zadanie 3 *Znajdź bazę przestrzeni* $V = Lin\{(2,3,1)\,,(1,-2,2)\,,(3,8,0)\}$

Zadanie 4 *Oblicz następujące iloczyny macierzy:*

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 *Znajdź wszystkie macierze o współczynnikach rzeczywistych spełniających równanie:*

$$X \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6 *Znajdź wszystkie macierze o współczynnikach rzeczywistych spełniających równanie:*

$$X \cdot X = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7 *Oblicz następujące wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$, *b)* $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, *d)* $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 3 & 7 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Zadanie 8 *Znajdź macierz odwrotną do:*

$$a)\ \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad c)\ \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9 *Stosując metodę Cramera rozwiąż następujące układy równań:*

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases},$$

$$b)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 10 *Stosując metodę Cramera policz zmienną* x_2

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

Zadanie 11 *Znajdź wzór analityczny i macierz w bazie standardowej przekształcenia* $\phi : R^2 \to R^2$,

które jest rzutem na prostą $Lin\{(1,-4)\}$ *wzdłuż prostej* $Lin\{(2,-5)\}$.

Zadanie 12 *Niech* $\phi : R^3 \to R^3$ *będzie określone macierzą* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

a) Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ.

b) Zapisz macierz przekształcenia ϕ *w znalezionej bazie.*

Zadanie 13 *Niech* $\phi : R^3 \to R^3$ *będzie określone macierzą* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Znajdź taką bazę B *przestrzeni* R^3*, w której macierzą* ϕ *jest* $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.