Zadania przygotowawcze I, Algebra Liniowa

1. Zbadać czy następujące układy wektorów są liniowo zależne. Jeśli układ jest zależny to znaleźć nietrywialną zależność między nimi.

(a) [1,2,-3,4], [2,2,0,-3],[8,10,-6,5],[10,12,-6,2].
(b) [1,2,0,-1,3], [-2,3,1,0,2],[1,1,0,2,7].

2. Dla jakich wartości parametru p układ wektorów jest zależny?
(a) $[1, p, 2,], [2, 3, 4], [0, 2, 1], [2, p, 4]$,
(b) $[0, 1, -2, 1], [2, 1, 1, 1], [0, p, 1, 1], [0, 0, 0, p]$.

3. Dla jakich wartości parametru s następujący układ wektorów jest bazą w odpowiedniej przestrzeni
(a) $[s, 1], [1, s]$ w R^2.
(b) $[1, 0, s], [1, 1, 1], [s, 1, 1]$ w R^3.
(c) $[1, 2, s], [0.1.2]$ w przestrzeni rozwiązań równania $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

4. Układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$jest układem niezależnym. Czy następujące układy są zależne czy są niezależne?

(a) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1$.
(b) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3, \alpha_4$.
(c) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3$.
(d) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3, 2\alpha_4$.

5. (a) Czy wektory $w_1 = [1, 2, 3], w_2 = [-2, 3, 1], w_3 = [2, 11, 13], w_4 = [-3, 1, -2]$ rozpinają przestrzeń R^3? (tzn. czy każdy wektor przestrzeni R^3 jest kombinacją liniową tych wektorów).
(b) Czy wektory $[-1, 2], [1, 1]$ rozpinają przestrzeń R^2?

6. Czy wektory [1,1,2,2], [0,1,2,1] stanowią bazę przestrzeni rozwiązań układu

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & - & x_4 & = 0 \end{cases}$$

7. Wyznaczyć bazę w przestrzeni rozwiązań układu. Znaleźć wymiar tej przestrzeni.

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +7x_4 & = & 0 \end{cases}$$

8.(a) Obliczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Obliczyć rząd macierzy $A, B, A \cdot B$.

9. Obliczyć rząd macierzy w zależności od parametru t.
(a) $\begin{bmatrix} -1 & t & 2 \\ 2 & 2 & t \\ 3 & 2 & t \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & t & 2 & 1 \\ 1 & 2 & t & 1 \\ 2 & 2 & t & t \end{bmatrix}$.

10. Znaleźć przedstawienie parametryczne zbioru rozwiązań układu równań.
(a) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +7x_2 & -5x_3 & +7x_4 & -11x_5 & = & 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -3x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 1 \\ -x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = 1 \\ -5x_1 & +4x_2 & +3x_2 & -x_4 & = 2 \\ -6x_1 & +9x_2 & +3x_3 & & = 2 \end{cases}$.

11. Wektor w ma w bazie α_1, α_2 współrzędne 1,3. Znaleźć współrzedne tego wektora w bazie:
(a) α_2, α_1
(b) $2\alpha_1, 3\alpha_2$
(c) $-\alpha_1, -\alpha_2$
(d) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$.

12. Wyznaczyć metodą Gaussa rozwiązania ogólne układów

(a) $5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4$
$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2$

(b) $-9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3$
$-6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$
$-3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1$

(c) $-9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7$

$-4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$
$7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3.$

W każdym przypadku znaleźć po dwa szczególne rozwiązania i sprawdzić poprawność rachunków podstawiając te rozwiązania do odpowiednich układów.

13. Rozwiązać układ

$$x + y + z = 1$$
$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + 3y + 4z = 2$$
$$3x + 2y + z = 3$$

Czy istnieje rozwiązanie (x, y, z) tego układu spełniające warunek $y = x^2$?.

14. Rozwiązać układ

$$x - y + 2z - t = 1$$
$$2x - 3y - z + t = -1$$
$$x + 7y \quad - t = 4$$

Podać jakiekolwiek rozwiązanie spełniające warunek $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$.

15. Rozwiązać układy metodą Cramera.

(a) $2x + y + z = 1$
$x - y - 2z = 3$
$x + y + 3z = 10$

(b) $x + 2y - 3z = 14$
$4x - 3y - z = 10$
$-x - y + z = 2$

16. Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in R$, dla których macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{pmatrix}$ jest odwracalna (tzn. ma macierz odwrotną). Następnie dla $x = -2$ znaleźć macierz odwrotną obiema metodami.

17. Wyznaczyć A^{-1} dla $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$

18. Stosując wzory Cramera wyznaczyć niewiadomą y z układu

$$x + 2y + 2z + 3t = 3$$

$$3y \quad + t = 1$$

$$5x - 2y \quad + t = 1$$

$$4x - 5y \quad + 2t = 1$$

19. Znaleźć macierz transponowaną do macierzy B , jeżeli

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Znaleźć macierz A spełniającą równanie

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Wsk. Pomnożyć obie strony z lewej strony przez macierz odwrotną do $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

21. Rozwiązać w zależności od parametru λ układ równań

(a) $-6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9$
$-2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1$
$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3$
$-3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = \lambda$

Odp. Dla $\lambda \neq 0$ układ sprzeczny, dla $\lambda = 0$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(7 + 19x_2 + 7x_4), \; x_2 = -\frac{1}{2}(3 + 13x_3 + 5x_4)$$

(b) $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$
$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4$
$4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7.$

Odp. Dla $\lambda = 1$ układ sprzeczny, dla $\lambda \neq 1$

$$x_1 = \frac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda} - \frac{9}{8}x_3, \ x_2 = \frac{5}{4 - 4\lambda} + \frac{x_3}{4}, \ x_4 = \frac{5}{\lambda - 1};$$

22. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Które z iloczynów $ABA, \ B^{-1}A^TA, \ B^2A, \ AA^TB^{-1}, \ B^{-1}AB^T$ istnieją?

(b) Obliczyć te z iloczynów , które istnieją.

23. Znaleźć macierz A spełniającą równanie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A = A + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

24. Dla jakich wartości parametru p , układ równań

$$px + 2y + 2z = 10$$

$$x + py + z = 4$$

$$x + y + z = 6$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Rozwiązać układ dla $p = 0$.

. Odpowiedzi i wskazówki.

1.(a) Zależny; $0 \cdot w_1 - 1 \cdot w_2 - 1 \cdot w_3 + 1 \cdot w_4 = 0$.
(b) Niezależny; ustawić w macierz i znaleźć rząd. Jest równy 3.
2.(a) Zależny dla dowolnego p. Cztery wektory w 3-wymiarowej przestrzeni są zawsze zależne.
(b) Ustawiamy wektory w macierz. Wyznacznik jest równy $-2p(1 + 2p)$. Zatem układ jest zależny wtedy i tylko wtedy gdy $p = 0$ lub $p = -\frac{1}{2}$.
3.(a) $s \neq -1$ i $s \neq 1$.
(b) $s \neq 0$ i $s \neq 1$.
(c) Te wektory spełniają równanie gdy $s = 5$. Przestrzeń tych rozwiązań jest 2-wymiarowa.Dla $s = 5$ te wektory są niezależne więc stanowią bazę.
4.(a) Niezależny
(b) niezależny
(c) Zależny; $22w_1 + w_2 + w_3 = w_4$
(d) Zależny; pierwszy=-drugi.
5.(a) Nie ; rząd macierzy utworzonej z tych wektorów jest równy 2. Zatem maksymalny układ niezależny wśród nich składa się z 2 wektorów. Widać, że np. pierwsze 2 są niezależne. Zatem w_3 i w_4 są zależne od w_1 i w_2 czyli są kombinacjami liniowymi w_1 oraz w_2. Zatem

każda kombinacja liniowa tych 4 wektorów jest kombinacją wektorów w_1 i w_2. Dwa wektory nie mogą rozpinać 3-wymiarowej przestrzeni. Na to trzeba przynajmniej trzech wektorów.

(b) Tak; te wektory stanowią bazę R^2 zatem każdy wektor z R^2jest ich kombinacją liniową.

6. Tak. Wymiar tej przestrzeni jest równy 2. Dane wektory są rozwiązaniami (podstawić) i są niezależne więc jest baza.

7. R0związanie ogólne $(x_3 - x_4, -x_3, x_3, x_4)$. Baza (1,-1,1,0), (-1,0,0,1). Wymiar=2.

8.(a) rz=3

(b) rz $A = 2$, rz$B = 2$, rz$A \cdot B = 2$.

9.(a) det=$t^2 - 4$. Zatem rz=3 dla $t \neq 2$ i $t \neq -2$. Dla $t = 2$ lub $t = -2$ rząd jest równy 2 bo są minory stopnia 2 różne od 0.

(b) Gdy skreślimy ostatnią kolumnę to dostajemy minor stopnia 3 równy$t^2 - 4$. Zatem dla $t \neq 2$ i $t \neq -2$ rząd jest 3. Dla 2 lub -2 rząds też jest 3; (obliczyć inne minory stopnia 3 lub przekształcić do postaci schodkowej).

10.(a) Rozwiązanie ogólne

$$(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_5, -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x_3 + \frac{15}{4}x_5, x_3, 1 - 2x_5, x_5)$$

przedstawienie parametryczne

$$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0, 1, 0\right) + t\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, 0\right] + s\left[\frac{5}{4}, \frac{15}{4}, 0, -2, 1\right], \quad s, t \in R$$

(b) Rozw.ogólne

$$(1 - 9x_2 - 3x_4, x_2, 1 - 7x_2 - 2x_4, x_4)$$

Przedstawienie parametryczne

$$(1, 0, 1, 0) + t[-9, 1, -7, 0] + s[-3, 0, -2, 1]$$

11.(a) 3,1; (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, (c) -3,-1; (d)2,-1.

16. Wyznacznik jest równy $x(x + 1)$. zatem macierz odwracalna dla $x \neq 0$ i $x \neq -1$.

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

18. $W = -70$, $W_y = -10$, $y = \frac{1}{7}$.

20. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ więc $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

21. (a) Wyznacznik macierzy tego układu jest równy 0. Trzeba więc rozwiązywać metodą Gaussa.

(b) wyzanacznik macierzy układu=$8\lambda - 8$. Zatem układ ma jedno rozwiązanie dla $\lambda \neq 1$ (z tw. Cramera). Dla $\lambda = 1$ zastosować metodę Gaussa.

22. Istnieją B^2A oraz AA^TB^{-1}.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$. Zatem równanie przybiera postać

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A = A + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Dalej

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - I\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Czyli

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mnozymy obie strony (z lewej) przez macierz odwrotna do $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

24. Wyznacznik macierzy współczynników jest równy $p^3 - 3p + 2$. Zatem z tw. Cramera, układ ma jedno rozwi.azanie gdy $p \neq 1$ i $p \neq 2$. Dla $p = 1$ lub $p = 2$ układ jest sprzeczny (stosować metodę Gaussa).