Matematyka dyskretna

Igor Nowicki

2 lutego 2021

Spis treści

1 Cheat sheet

Rzeczy na pierwsze kolokwium:

- Relacje. Symetryczność, zwrotność, przechodniość. Macierz relacji, liczba możliwych relacji, klasy abstrakcji.
- Funkcje. Surjekcja, injekcja, bijekcja.
- Permutacje. Cykle rozłączne, inwersje, typ, znak.
- Zasada włączania-wyłączania zbiorów.
- Kombinacje zbiorów nieuporządkowanych.
- Zliczanie kombinacji ustawień elementów rozróżnialnych, nierozróżnialnych.
- Rozmieszczenia uporządkowane.
- Wektory charakterystyczne, zbiór potęgowy.
- Zliczanie całkowitych rozwiązań równań i nierówności.
- Zliczanie najkrótszych dróg na kracie z warunkami.
- Zasada Dirichleta.
- Zbiory z powtórzeniami, funkcje tworzące.

1.1 Relacje

Najprościej - relacja jest procesem powiązania pary elementów z jednego zbioru w parę uporządkowaną. Dla relacji mamy wyszczególnione trzy przypadki szczególne:

- relacja jest *symetryczna*, jeśli $xRy \Rightarrow yRx$. Odpowiada to symetryczności macierzy relacji.
- relacja jest *zwrotna*, jeśli dla każdego $x \in X$ mamy xRx. Odpowiada to jedynkowej diagonali macierzy relacji.
- relacja jest *przechodnia*, jeśli xRy oraz yRz implikują xRz.

Przy spełnieniu tych trzech warunków możemy mówić o *relacji równoważności*. Podzbiór X dla którego R jest relacją równoważności nazywany jest *klasą abstrakcji*.

1.2 Funkcje

Funkcja jest procesem powiązania pary elementów z dwóch zbiorów (*dziedziny* i *przeciwdziedziny*) w parę, z założeniem że każdy element dziedziny ma przyporządkowany dokładnie jeden element z przeciwdziedziny. Wyszczególniamy trzy przypadki szczególne funkcji:

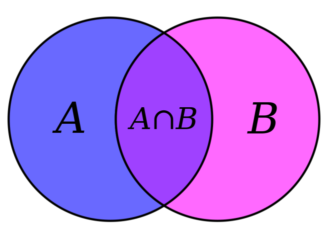
- funkcja jest *injektywna* (różnowartościowa) - każdy element $x \in X$ ma przyporządkowany inny element $y \in Y$. Jest to oczywiście możliwe, gdy $|X| \leqslant |Y|$.
- funkcja jest *surjektywna* (na) - każdy element $y \in Y$ jest przyporządkowany przynajmniej jednemu elementowi $x \in X$. Jest to możliwe gdy $|X| \geqslant |Y|$.
- funkcja jest *bijektywna* - spełnione są jednocześnie warunki iniekcji i surjekcji, wszystkie $x \in X$ oraz $y \in Y$ są ze sobą powiązane w pary. Oznacza to, że $|X| = |Y|$.

1.3 Permutacje

Permutacją π można określić dowolne przyporządkowanie różnowartościowe ze zbioru $\{1, ..., n\}$ do zbioru $\{1, ..., n\}$. Oznacza to, że możliwych permutacji dla n-elementowego zbioru jest zawsze $n!$. Przy permutacjach mamy parę pojęć, które dobrze jest mieć zapisane z boku:

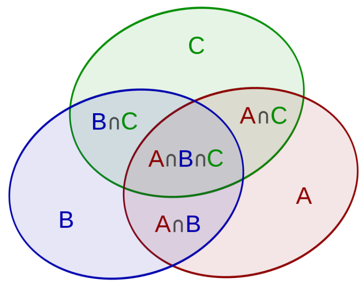
- cykl rozłączny - dla danego $x \in X$ najmniejszy taki ciąg gdzie $\{x, \pi(x), \pi^2(x), ..., \pi^r(x)\}$, oraz $\pi^{r+1}(x) = x$.
- inwersja - para liczb a_j, a_k, gdzie $j < k$ oraz $a_j > a_k$ (czyli para wartości większa-mniejsza w ciągu).
- typ permutacji - zapis polegający na przedstawieniu ile występuje k-elementowych cykli w n-elementowej permutacji. Możemy to zapisać za pomocą iloczynu $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} ... n^{\alpha_n}$, lub za pomocą wektora $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$.
- znak permutacji - iloczyn znaków poszczególnych cykli w permutacji (wartości ± 1), gdzie cykl o parzystej liczbie elementów jest **nieparzysty** (wartość -1), natomiast cykl o nieparzystej liczbie elementów jest **parzysty**.

1.4 Zasada włączania-wyłączania zbiorów



Najprościej - załóżmy że chcemy policzyć moc (lub miarę) sumy zbiorów $A \cup B$, jednak wiemy również, że istnieje jakieś przecięcie tychże zbiorów $A \cap B$. Wzór który możemy zastosować to:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Dalej - dla zbiorów trójelementowych analogiczną sumę możemy wyznaczyć jako:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

W ogólności wzór przedstawia się następująco:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j\colon i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k\colon i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ \cdots + (-1)^{n-1} \left|A_1 \cap \cdots \cap A_n\right|.$$

1.5 Kombinacje zbiorów nieuporządkowanych

Załóżmy że chcemy włożyć n nierozróżnialnych piłek do m rozróżnialnych pudełek - na ile sposobów można to zrobić? Otóż każda piłka ma przyporządkowane jedno i tylko jedno pudełko do którego należy - rozwiązaniem będzie m^n.

1.6 Zliczanie kombinacji ustawień elementów rozróżnialnych, nierozróżnialnych

Załóżmy że chcemy ustawić n piłek w m slotach, gdzie $n \geqslant m$ - na ile sposobów możemy to zrobić? Otóż będzie tu się stosował symbol Newtona, tj. $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, dla nierozróżnialnych piłek, oraz $\binom{m}{n} \cdot n!$ dla rozróżnialnych piłek.

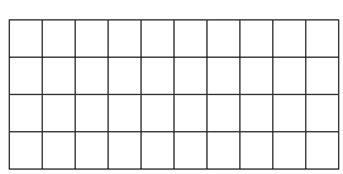
1.7 Rozmieszczenia uporządkowane

Chcemy poustawiać n klientów w m kolejkach, gdzie kolejność klientów ma znaczenie - na ile sposobów możemy to zrobić? Stosuje się wzór $n^{\overline{m}} = n \cdot (n+1) \cdot ... \cdot (n+m-1)$.

1.8 Wektory charakterystyczne, zbiór potęgowy

Mając zbiór n elementów (załóżmy że możemy wprowadzić jakąś kolejność dla tych elementów) możemy każdemu z podzbiorów przyporządkować **wektor charakterystyczny** - ciąg zer i jedynek określających który z elementów zbioru się pojawia, a który nie. Pytając o moc zbioru potęgowego, czyli liczbę wszystkich możliwych podzbiorów, docieramy w ten sposób do analogii z liczbą wszystkich możliwych liczb binarnych o n bitach: 2^n.

1.9 Zliczanie najkrótszych dróg na kracie z warunkami



Mając kratę $n \times m$ i poszukując wszystkich możliwych dróg z lewego dolnego rogu do prawego górnego możemy rozwiązać równanie w następujący sposób - musimy wykonać $n+m$ kroków, oraz n z nich musi być w prawo (bądź, alternatywnie, m z nich musi być do góry). Znalezienie liczby możliwych najkrótszych dróg (o $n+m$ krokach) sprowadza się do policzenia wszystkich kombinacji rozmieszczenia n (lub m) strzałek w $n+m$ slotach: $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$.

1.10 Zliczanie całkowitych rozwiązań równań i nierówności

Mając zadanie policzenia wszystkich możliwych rozwiązań całkowitoliczbowych równania:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n,$$

gdzie $x_i \geqslant 0$, możemy sprowadzić do do poruszania się po kracie (patrz poprzedni paragraf) o m węzłach w jednej osi (czyli $m-1$ krokach) oraz n węzłach w drugiej. Liczba możliwych rozwiązań zatem to $\binom{n+m-1}{m-1}$.
Jeśli któraś z wartości stanowiłaby inną nierówność, należy dokonać podstawienia, tak by nowy zbiór zmiennych sprowadzał się do $x_i \geqslant 0$. Jeśli zamiast równania mamy nierówność, należy zsumować liczby wszystkich przypadków dla poszczególnych n.

1.11 Zasada Dirichleta

Mamy n skarpet w m szufladach, gdzie $n > r * m$ - należy udowodnić, że istnieje szuflada w której jest ponad r skarpet. Korzystamy z zasady Dirichleta, tzn. założenia że jeśli r jest maksymalną wartością elementów w m pudełkach, to nie może ich być więcej niż $m \cdot r$. Zatem jeśli elementów jest więcej niż $m \cdot r$, oznacza to że istnieje szuflada w której jest przynajmniej $r+1$ elementów.

1.12 Zbiory z powtórzeniami, funkcje tworzące

Definiowany jest szczególny typ zbioru, *zbiór z powtórzeniami* - przykładowo, $\{3a, 2b, 4c\}$. Zadajemy teraz pytanie, ile jest takich podzbiorów że liczba a jest parzysta, liczba b nieparzysta etc. Pewną metodą rozwiązania jest użycie *funkcji tworzącej* - iloczynu wielomianów odpowiadających a, b, c w których każda potęga odpowiada konkretnej liczbie elementów. I tak, warunek parzystego a, nieparzystego b oraz parzystego c można przetłumaczyć na:

$$(x^0 + x^2)(x^1)(x^0 + x^2 + x^4) = x^0 + x^3 + x^5 + x^7,$$

czyli zbiorów zero-elementowych będzie dokładnie 1, zbiorów 1-elementowych: 0, zbiorów 2-elementowych: 0, zbiorów 3-elementowych: 1, i tak dalej.

2 Rozwiazania zadań

2.1 Relacje

Zadanie 2.1.1. Dana jest relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, reprezentowana macierzą $\mathcal{M}$:

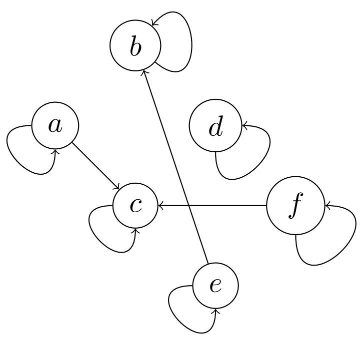
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Narysuj graf relacji R.

b) W macierzy dodaj jak najmniej jedynek by powstała macierz określająca relację równoważności R'.

c) Wyznacz klasy abstrakcji relacji R'.

Rozwiązanie. a) Graf relacji R polega na graficznym przedstawieniu relacji pomiędzy punktami.



b) Jeśli chcemy mieć relację równoważności, to musimy mieć spełnione następujące warunki:

- relacja musi być zwrotna. Warunek zwrotności jest spełniony, ponieważ dla każdego elementu $x \in X$ mamy xRx.
- relacja musi być symetryczna, Warunek symetrii można zapisać jako warunek tego by reprezentacja macierzowa $\mathcal{M}$ była symetryczna - brakuje nam wtedy zatem trzech jedynek do spełnienia $(\mathcal{M}_{ca}, \mathcal{M}_{be}, \mathcal{M}_{cf})$.
- relacja musi być przechodnia, Warunek przechodniości jest rozumiany jako "dla dowolnych $x, y, z \in X$, jeśli xRy oraz yRz to xRz".

Moglibyśmy również przedstawić relację równoważności jako warunek by wszystkie pola macierzy były jedynkowe. □

Zadanie 2.1.2. Ile jest wszystkich relacji symetrycznych w zbiorze 6-elementowym?

Rozwiązanie. **Relacją symetryczną** nazywamy taką relację f, że spełniony jest następujący warunek:

$$\forall x, y \in A : xfy \Rightarrow yfx,$$

tzn. jeśli x jest w relacji f z y, to y jest w relacji f z x.
Zadanie możemy rozwiązać poprzez reprezentację relacji jako macierzy binarnej $n \times n$, gdzie n jest liczbą elementów w zbiorze:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

gdzie 0 oznacza brak relacji, natomiast 1 oznacza istniejącą relację wartości z kolumny i wartości z wiersza (w tej kolejności). Od razu widać, że dla relacji symetrycznej wyżej przedstawiona macierz musi być symetryczna - tj. warunek $xfy \Rightarrow yfx$ tłumaczy się jako warunek $a_{ij} = a_{ji}$ w języku macierzy. W takiej sytuacji mamy tak naprawdę $n \cdot (n+1)/2$ wartości którymi możemy manipulować. Ponieważ dozwolone wartości są 0 lub 1, oznacza to $2^{n \cdot (n+1)/2}$ możliwych relacji - dla $n = 6$ mamy $2^{3 \cdot 7} = 2,097,152$ relacji. □

Zadanie 2.1.3. Zbiór $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ rozbito na podzbiory $A = \{a, c, d\}$, $B = \{e, h, i, j\}$, $C = \{b, k\}$, $D = \{f, g\}$.

a) Zdefiniuj w X relację równoważności R taką, by podane zbiory były klasami abstrakcji relacji R. Ile różnych relacji równoważności o powyższej własności można zdefiniować?

b) Ile zer ma macierz binarna relacji z podpunktu a)?

Rozwiązanie. a) Klasa równoważności może być reprezentowana jako macierz relacji wypełniona jedynkami. Ponieważ wszystkie elementy ze zbioru X są w jednej z klas równoważności, nie mamy żadnych stopni swobody - jest tylko jedna relacja którą możemy zdefiniować dla tak zadanych warunków.

b) Cała macierz relacji ma $11^2 = 121$ elementów. Każdy z podzbiorów jest reprezentowany jako macierz jedynek - w sumie jest to $3^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 = 9 + 16 + 4 + 4 = 33$ elementy. Zatem mamy $121 - 33 = 88$ zer.

□

Zadanie 2.1.4. $A = \{1, 2, 3, B, \{1, 2\}\}; B = \{1, 2, A, \{1, 2\}, x, y, z\}$. Ile jest:

a) funkcji $f : A \times B \to A$?

b) funkcji różnowartościowych $g : B \to A$?

c) funkcji różnowartościowych $g : B \to A \times B$.

d) surjekcji $s : A \to B$

e) podzbiorów zbioru $B \times A$?

f) wszystkich relacji w zbiorze A?

g) Ile jest relacji symetrycznych w B?

h) Ile jest relacji zwrotnych w B?

Rozwiązanie. a) Zliczamy na ile sposobów można przyporządkować elementy z dziedziny $A \times B$ ($|A \times B| = 5 \cdot 7 = 35$ elementów) do elementów z przeciwdziedziny A ($|A| = 5$). Każda wartość dziedziny może mieć jeden i tylko jeden element z przeciwdziedziny - zatem liczba rozwiązań to 5^{35}.

b) Funkcja różnowartościowa polega na warunku pojawiania się co najwyżej raz elementów z przeciwdziedziny - tj. $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Ponieważ w B mamy 7 elementów, a w A mamy 5 elementów, to niemożliwe jest takie przyporządkowanie, by każdy element dziedziny miał unikalny odpowiadający mu element przeciwdziedziny.

c) Przyporządkowujemy z dziedziny 7 elementów do przeciwdziedziny 35 elementów w sposób różnowartościowy. Wynikiem będzie $35 \cdot 34 \cdot ... \cdot 29$ możliwości.

d) Surjekcja polega na zaalokowaniu wszystkich elementów przeciwdziedziny - czyli każda wartość z B powinna się pojawić przynajmniej raz. Ponieważ elementów zbioru A jest mniej niż elementów zbioru B, taka sytuacja jest niemożliwa.

e) Moc zbioru potęgowego zbioru 35 elementów to 2^{35}.

f) Wszystkich relacji w zbiorze 5-elementowym jest $2^{5 \cdot 5}$.

g) Wszystkich relacji symetrycznych w zbiorze 7-elementowym jest $2^{8 \cdot 7/2}$.

h) Wszystkich relacji zwrotnych w zbiorze 7-elementowym jest $2^{7 \cdot 6} = 2^{42}$

$\square$

2.2 Permutacje

Zadanie 2.2.1. f, g to permutacje zbioru $X = \{1, 2, \ldots, 14\}$.

$$f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 1 & 4 & 6 & 8 & 14 & 2 & 11 & 9 & 10 & 13 & 5 & 7 & 3 \end{smallmatrix}\right),$$

$$g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 11 & 6 & 14 & 12 & 3 & 1 & 13 & 10 & 9 & 5 & 8 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right).$$

a) Rozłóż na cykle rozłączne permutację $h = (fg)^{-1}$.

b) Wskaż cztery inwersje permutacji h.

c) Wyznacz typ i znak permutacji h.

Rozwiązanie. a) Permutacja $h = (fg)^{-1}$ może być przedstawiona jako $g^{-1} \circ f^{-1}$. Rozkład na cykle wygląda następująco:

$$h = (1, 13, 2) \circ (3, 4, 6, 14) \circ (5) \circ (7, 8, 11, 12) \circ (9, 10).$$

(przechodzimy z dolnego wiersza f na górny wiersz, a następnie z dolnego wiersza g na górny wiersz).

b) **Inwersją permutacji** nazywamy parę liczb a_i, a_j, gdzie $i < j$ oraz $a_i > a_j$. Na przykład w permutacji h, wartości a_1, a_2 to odpowiednio 13 oraz 1 - jest spełniony warunek inwersji. Inne możliwe inwersje to:

- $a_6, a_{11} = 14, 12,$
- $a_6, a_{12} = 14, 7,$
- $a_{11}, a_{12} = 12, 7.$

c) Permutacja h jest typu $1^1 2^1 3^1 4^2$ - bierzemy stopień cykli i w potęgach zaznaczamy ile ich jest. Znak permutacji wyznaczamy mnożąc przez siebie znaki cykli - pamiętamy, że cykl o nieparzystej liczbie elementów jest **parzysty** (znak +1), a cykl o parzystej liczbie elementów jest **nieparzysty** (znak -1). W tym przypadku mamy:

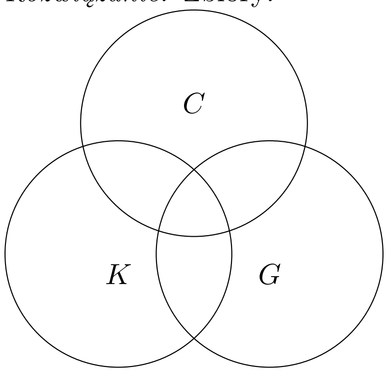
$$\text{sgn}(h) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$$

$\square$

2.3 Zasada włączania-wyłączania

Zadanie 2.3.1. W kawiarni są 22 osoby. 13 osób pije kawę, 14 osób czyta gazetę. Ciastko je tyle samo osób ile tych, które piją kawę i jednocześnie czytają gazetę. 6 osób ma kawę z ciastkiem. 4 osoby jedzą ciastko i równocześnie czytają gazetę, ale nie mają kawy.
Ile osób nie ma ani kawy, ani ciastka, ani nie czyta gazety?

Rozwiązanie. Zbiory:



Mamy następujące miary zbiorów:

- $|K| = 13$,
- $|G| = 14$,
- $|C| = |K \cap G|$,
- $|K \cap C| = 6$,
- $|C \cap G \setminus K| = |C \cap G \setminus (C \cap G \cap K)| = 4$.

Zadanie możemy rozwiązać korzystając ze wzoru na sumę trzech zbiorów:

$$\begin{aligned}
|K \cup G \cup C| &= |K| + |G| + |C| - |K \cap G| - |K \cap C| - |G \cap C| + |K \cap G \cap C|,\\
&= |K| + |G| + (|C| - |K \cap G|) - |K \cap C| - (|G \cap C| - |K \cap G \cap C|),\\
&= |K| + |G| + (|C| - |K \cap G|) - |K \cap C| - (|G \cap C| - |K \cap G \cap C|),\\
&= 13 + 14 - 6 - 4,\\
&= 17.
\end{aligned}$$

□

Zadanie 2.3.2. a) Ile różnych liczb nieparzystych można utworzyć z 4 cyfr wybranych ze zbioru $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 0\}$?

b) Ile liczb naturalnych z przedziału $\langle 1000, 10000)$ ma w zapisie dziesiętnym jedynie cyfry mniejsze od siedmiu, przy czym na ostatnich dwóch miejscach nie mogą wystąpić dwie identyczne cyfry?

Rozwiązanie. a) Warunek nieparzystości wyraża się jako przymus postawienia nieparzystej cyfry ze zbioru na ostatnim miejscu w liczbie - to daje nam 5 możliwości zamiast 7. Dodatkowo, na pierwszym miejscu nie możemy postawić wartości 0. Obydwa te warunki zostawiają nas z kombinacją $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 = 1470$ możliwości.

b) Pierwszy warunek - mniejszość cyfr od 7 - wyraża się łatwo, bo zostawia nas z 7 cyframi zamiast standardową liczbą 10. Drugi warunek można wyrazić następująco - od zestawu wszystkich możliwych liczb z cyframi mniejszymi od 7 ($6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ możliwości) odejmujemy wszystkie liczbę wszystkich wartości z cyframi mniejszymi od 7, dla których dwie ostatnie cyfry są identyczne ($6 \cdot 7 \cdot 7$) możliwości. Zostawia nas to z następującą liczbą rozwiązań:

$$6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 6 \cdot 7 \cdot 7 = 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 1764.$$

□

2.4 Kombinacje zbiorów nieuporządkowanych

Zadanie 2.4.1. Jest 5 pudełek $\{p_1, p_2, \ldots, p_5\}$ i 8 książek $\{k_1, k_2, \ldots, k_8\}$. Na ile sposobów można włożyć książki do pudełek, spełniając warunki:

1. nie stawiamy żadnych warunków;
2. do pudełka p1 nic nie wkładamy;
3. do pudełka p2 wkładamy przynajmniej jedną książkę;
4. do pudełka p3 wkładamy dokładnie 2 książki.

Rozwiązanie. Zakładam, że książki nie są poukładane w pudełkach.

1. Każdej z książek można przypisać numer pudełka w którym się znajduje. W ten sposób dostajemy 5^8 kombinacji.
2. Pomijamy jedno z pudełek, zatem zostaje nam 4^8 kombinacji.
3. Wynikiem będzie liczba kombinacji przy wszystkich pudełkach - liczba kombinacji gdzie do pudełka p_2 nie włożyliśmy żadnej książki. To pierwsze to 5^8, to drugie natomiast to 4^8. Wynikiem jest $5^8 - 4^8$.
4. Ze zbioru 8 książek możemy wybrać 2 książki na $\binom{8}{2} = 8 \cdot 7/2$ sposobów. Te wkładamy do pudełka p_3. Zostaje nam 6 książek które możemy włożyć do 4 pudełek - zatem 4^6 kombinacji. Ostateczne rozwiązanie to:
$$\binom{8}{2} \cdot 4^6 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 4^6.$$

□

Zadanie 2.4.2. Jest 7 klocków - 4 identyczne białe i 3 identyczne czarne. Ustawiamy je w szeregu tak, że ani klocki białe, ani klocki czarne nie stoją obok siebie w komplecie. Ile jest wszystkich ustawień, spełniających ten warunek?

Rozwiązanie. Od wszystkich możliwych kombinacji klocków należy odjąć te kombinacje, w których mamy klocki stojące w komplecie. A zatem - liczba wszystkich kombinacji to $\binom{7}{4}$. Liczba wszystkich kombinacji gdzie czarne są razem to 5. Liczba wszystkich kombinacji gdy białe są razem to 4. Liczba wszystkich kombinacji gdy czarne ORAZ białe są razem to 2 (zaczyna się albo białymi, albo czarnymi). Ze wzoru na sumę zbiorów:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

zatem liczba wszystkich ustawień gdzie czarne lub białe są razem to $5 + 4 - 2 = 7$. Ostatecznie, wszystkie kombinacje kul gdzie ani czarne, ani białe nie stoją obok siebie to $\binom{7}{4} - 7$. $\square$

Zadanie 2.4.3. Jest 7 osób - 4 Francuzów i 3 Anglików. Ustawiamy je w szeregu, tak że członkowie żadnej narodowości nie stoją w komplecie obok siebie. Ile jest wszystkich ustawień, spełniających ten warunek?

Rozwiązanie. Zakładamy, że członkowie narodowości są rozróżnialni. Oznacza to, że po uzykaniu wszystkich możliwych ustawień spełniających warunki powinniśmy jeszcze przemnożyć rozwiązanie przez liczbę wszystkich możliwych kombinacji kolejności osób.
Pokolei. Chcemy usunąć przypadek, gdy członkowie narodowości stoją obok siebie - oznacza to że musimy policzyć liczbę przypadków gdzie stoją Anglicy obok siebie, gdzie stoją Francuzi obok siebie oraz gdy Anglicy i Francuzi stoją obok siebie.
Liczba kombinacji (nierozróżnialnych) Anglików stojących obok siebie to 5. Liczba kombinacji Francuzów stojących obok siebie to 4. Liczba kombinacji gdy Francuzi i Anglicy stoją obok siebie to 2. Z zasady mierzenia sumy zbiorów:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Czyli liczba kombinacji w których przynajmniej jedna z narodowości stoi obok siebie to $5+4-2 = 7$. Dalej. Przy chwilowym założeniu nierozróżniania osób tej samej narodowości mamy $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!}$. Po odjęciu kombinacji gdy narodowości stoją obok siebie oraz przemnożeniu przez możliwe kombinacje osób w narodowościach (czyli zaaplikowaniu rozróżnialności) dostajemy:

$$\left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} - 7\right) \cdot 3! \cdot 4! = 7! - 7 \cdot 4! \cdot 3! = 7 \cdot 4! \cdot (5 \cdot 6 - 2 \cdot 3) = 4032.$$

$\square$

2.5 Rozmieszczenia uporządkowane

Definiujemy nowy zapis **potęgi przyrastającej**:

$$k^{\overline{n}} = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+n-1),$$

gdzie symbol $k^{\bar{n}}$ określa się jako **k do n-tej przyrastającej**. W ogólności, ten rodzaj potęg określa się jako **potęgi kroczące**.

Zadanie 2.5.1. Na ile sposobów można umieścić 3 rozróżnialne obiekty w 2 pudełkach. Porządek ma znaczenie.

Rozwiązanie. Stosuje się następującą metodę:

- Zaczynamy od pierwszego obiektu. Możemy go włożyć na dwa sposoby - do pudełka nr 1 lub 2. Koniec.
- Drugi obiekt możemy włożyć do jednego z dwóch pudełek, jednak w przypadku jednego pudełka możemy go włożyć **za** lub **przed** poprzedni obiekt.
- Trzeci obiekt możemy włożyć do jednego z dwóch pudełek. W obydwu przypadkach rozmieszczeń mamy do czynienia z czterema ustawieniami:

– jeśli dwa poprzednie obiekty są w jednym z pudełek, możemy włożyć nowy obiekt do tego pudełka na trzy sposoby (przed, pomiędzy, za), lub do drugiego pudełka na jeden sposób.
– jeśli dwa poprzednie obiekty są w dwóch pudełkach, możemy włożyć nowy obiekt do pierwszego pudełka na dwa sposoby (przed lub za) oraz do drugiego pudełka również na dwa sposoby (przed lub za).

Całkowita liczba kombinacji to:

$$2^{\overline{3}} = 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

□

Zadanie 2.5.2. W kinie są 4 kasy $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, bilety chce kupić dziesięć osób $\{o_1, \ldots, o_{10}\}$.

a) Ile jest wszystkich ustawień osób do kas?

b) Nikt nie stanął przy kasie k_1 lub k_2. Ile jest takich ustawień?

c) Przy kasie k_4 stoją dokładnie 3 osoby. Ile jest takich ustawień?

Rozwiązanie. a) Korzystając z wiedzy z poprzedniego zadania - najpierw pierwszą osobę umieszczamy na jeden z 4 sposobów, kolejną na jeden z 5... efektywnie, liczba ustawień to $4^{\overline{10}} = 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 12 \cdot 13$.

b) Chcemy policzyć możliwe ustawienia kiedy:

(a) Nikt nie stoi przy kasie k_1,
Rozwiązanie to ustawienie 10 osób przy 3 kasach: $3^{\overline{10}}$.

(b) nikt nie stoi przy kasie k_2,
Identyczne z powyższym.

(c) nikt nie stoi przy kasie k_1 oraz k_2.
Rozwiązanie to ustawienie 10 osób przy 2 kasach: $2^{\overline{10}}$.

Korzystając ze wzoru na sumę zbiorów uzyskujemy:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3^{\overline{10}} + 3^{\overline{10}} - 2^{\overline{10}}.$$

Zatem liczba możliwych ustawień w których nikt nie stoi przy kasie k_1 lub k_2 lub obydwu to:

$$4^{\overline{10}} - 2 \cdot 3^{\overline{10}} + 2^{\overline{10}}.$$

c) Musimy najpierw sprawdzić na ile sposobów ze zbioru 10 osób możemy wybrać i poustawiać w kolejności 3 osoby - odpowiedź to oczywiście $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$. Dalej, zostało nam 7 osób które musimy poustawiać przy pozostałych trzech kasach - liczba kombinacji to $3^{\overline{7}}$. Zatem całkowita liczba kombinacji to:

$$\frac{10!}{7!} \cdot 3^{\overline{7}}$$

□

Zadanie 2.5.3. Dany jest kod składający się z 5 znaków ze zbioru 10 cyfr i 26 liter. Kod musi się zaczynać dwiema różnymi cyframi i kończyć literą. Na trzeciej i czwartej pozycji może być cyfra lub litera, ale nie może się powtórzyć ta sama litera. Ile jest takich kodów?

Rozwiązanie. Zadanie musimy rozbić na fragmenty:

- Pierwsze dwie cyfry - możliwe jest $10 \cdot 9$ kombinacji, jako że cyfry muszą być różne.
- Ostatnia litera - 26 kombinacji.
- Dwa znaki na trzeciej i czwartej pozycji, z zastrzeżeniem że litera nie może się powtarzać. Biorąc pod uwagę ostatni znak, mamy do dyspozycji 25 liter i 10 cyfr. Najprościej będzie to policzyć poprzez znalezienie wszystkich kombinacji 35 znaków i odjęcie wszystkich przypadków w których powtarza się inna litera niż ta początkowa - czyli 25 kombinacji. W sumie $35 \cdot 35 - 25$.

Całkowita liczba kombinacji:

$$(10 \cdot 9) \cdot (26) \cdot (35 \cdot 35 - 25) = 2,808,000$$

□

Zadanie 2.5.4. X - zbiór ciągów długości 8 o wyrazach ze zbioru $A = \{a, b, c, d, e\}$.

a) Ile jest ciągów, w których nie występuje ani b, ani c?

b) Rozpatrujemy ciągi, w których przynajmniej jeden wyraz jest równy b i przynajmniej jeden wyraz jest równy c. Ile jest takich ciągów?

Rozwiązanie. a) Najprostszym sposobem jest zbudowanie ciągów na podstawie podzbioru $X \setminus \{b, c\}$. A zatem - szukamy wszystkich ciągów długości 8 o wyrazach ze zbioru $B = A \setminus \{b, c\} = \{a, d, e\}$. W każdym z ośmiu miejsc ciągu możemy podstawić jedną z trzech wartości ze zbioru B. Zatem liczba kombinacji to 3^8.

b) Wszystkich możliwych 8-wyrazowych ciągów o elementach ze zbioru A jest 5^8. Możliwych 8-wyrazowych ciągów nie zawierających jednej litery jest 4^8, natomiast ciągów bez dwóch liter jest 3^8. Szukamy mocy zbioru:

$$\begin{aligned}|X_{\mathrm{b+c}}| &= |X| - |X_{\text{bez b}}| - |X_{\text{bez c}}| + |X_{\text{bez b i bez c}}|,\\ &= 5^8 - 4^8 - 4^8 + 3^8,\\ &= 266,114.\end{aligned}$$

□

2.6 Wektory charakterystyczne; zbiór potęgowy

Zadanie 2.6.1. $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Wyznacz wektor charakterystyczny $\xi(A)$ podzbioru $A = \{b, c, h\}$ zbioru X oraz podaj liczbę dziesiętną (naturalną) z zakresu od 0 do 255 jaka reprezentuje ten pozbiór.

Rozwiązanie. Wektor charakterystyczny $\xi(\{b, c, h\}) = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$. Reprezentacja w postaci liczby dziesiętnej: 97. $\square$

Zadanie 2.6.2. a) Ile jest wszystkich wektorów binarnych długości 8, które mają parzystą liczbę jedynek?

b) Ile jest wektorów binarnych długości 12, w których jest mniej niż 8 zer, ale przynajmniej dwa zera?

Rozwiązanie. a) Rozwiązanie to suma wektorów z zerem, dwiema, czterema, szcześcioma i ośmioma jedynkami. Odpowiednio:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128.$$

b) Rozwiązanie to suma wszystkich wektorów w których są od dwóch do ośmiu zer:

$$\sum_{k=2}^{8} \binom{12}{k} = \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{12}{7} + \binom{12}{8} = 3784.$$

$\square$

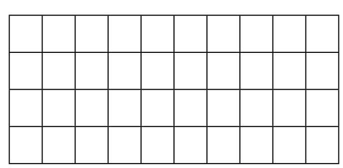
2.7 Zliczanie rozwiązań

Zadanie 2.7.1. Zlicz wszystkie rozwiązania równania:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$$

gdzie wartości x_i są całkowite nieujemne.

Rozwiązanie. Metoda rozwiązania - możemy przedstawić zadanie jako przemieszczanie się po kracie od lewego dolnego rogu do prawego górnego:



Długości dróg poziomych w każdym z wierszów muszą sumować się do 10, zatem widzimy że jest to analogiczny problem to wyżej przedstawionego.
Najkrótsza droga na kracie musi składać się z 14 kroków - 10 kroków w prawo i 4 kroków do góry. Możemy zatem przedstawić problem jako rozmieszczenie czterech (nierozróżnialnych) kroków do góry w 14 krokach całkowitych: $\binom{14}{4}$, lub, analogicznie, rozmieszczenie 10 nierozróżnialnych kroków w prawo w czternastu krokach całkowicie: $\binom{14}{10}$.
Rozwiązanie to:

$$\binom{14}{4} = \frac{14!}{10! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1001.$$

$\square$

Zadanie 2.7.2. Ile nieujemnych, całkowitoliczbowych rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20,$$

gdzie dodatkowo spełnione są warunki: $x_1 \geqslant 3$, $x_2 > 0$, $x_3 > 2$, $x_4 \geqslant 3$, $x_5 = 2$?
Wskazówka: dokonać podstawienia zmiennych.

Rozwiązanie. Dokonujemy następujących podstawień:

- $y_1 = x_1 - 3$,
- $y_2 = x_2 - 1$,
- $y_3 = x_3 - 3$,
- $y_4 = x_4 - 3$,

oraz podstawiamy wartość pod x_5. W ten sposób równanie sprowadzamy do postaci:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8,$$

co rozwiązujemy już analogicznie do poprzednich przypadków, poprzez zliczanie kombinacji strzałek. Liczba rozwiązań to $\binom{11}{3}$.

□

Zadanie 2.7.3. Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$$

jeśli przyjąć, że zmienne $x_1, \ldots, x_5$ są całkowite, nieujemne?

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązujemy w analogiczny sposób do zadania z chodzeniem po kracie - musimy wykonać 10 kroków w prawo oraz 4 kroki w górę by dotrzeć do końcowego punktu. Możemy myśleć zatem o liczbie rozwiązań jako o policzeniu kombinacji na ile sposobów możemy postawić 4 strzałki w górę w ciągu 14 strzałek. Ponieważ strzałki są nierozróżnialne, daje nam to $\binom{14}{4} = 1001$ rozwiązań. □

Zadanie 2.7.4. Ile jest całkowitoliczbowych nieujemnych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + a + b = 12$$

takich, że $a = 2$ lub $b = 5$?

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązujemy analogicznie do poprzedniego, z tym że musimy zastosować wzór na sumowanie zbiorów. Mamy powiem trzy przecinające się zbiory:

- Zbiór gdzie $a = 2$,
- zbiór gdzie $b = 5$,
- zbiór gdzie $a = 2$ oraz $b = 5$.

W pierwszym przypadku liczba kombinacji równania sprowadza się do liczby kombinacji $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$, czyli $\binom{14}{4} = 1001$ przypadków (patrz poprzednie zadanie).
W drugim przypadku mamy $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$, czyli $\binom{11}{4} = 330$ kombinacji.
W trzecim przypadku mamy $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, czyli $\binom{8}{3} = 56$ kombinacji.
Równanie na moc sumy zbiorów:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 1001 + 330 - 56 = 1275.$$

$\square$

Zadanie 2.7.5. Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 40$, gdzie x_1, x_2, x_3 są dodatnie, $x_4 \geqslant 5, x_5 > 3, x_6 = 2, x_7 > 4$? Zmienne są całkowitoliczbowe.

Rozwiązanie. Zadanie należy rozwiązać przez taką podmianę zmiennych, by wszystkie spełniały jedynie warunek $x \geqslant 0$. W tym wypadku będzie to:

- $y_1 = x_1 - 1$,
- $y_2 = x_2 - 1$,
- $y_3 = x_3 - 1$,
- $y_4 = x_4 - 5$,
- $y_5 = x_5 - 4$,
- $y_6 = x_7 - 5$,

natomiast x_6 eliminujemy. Dostajemy zatem:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 21.$$

Rozwiązujemy zadanie analogicznie do poprzednich - liczba kombinacji (dla $y_i \geqslant 0$) to $\binom{26}{5} = 65780$. $\square$

Zadanie 2.7.6. Ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 20$$

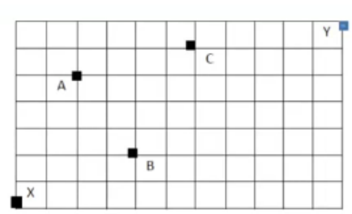
gdzie x_1, x_2, x_3 są dodatnie, x_4, x_5, x_6, x_7 są nieujemne.

Rozwiązanie. Ponownie, stosujemy podstawienie w którym x_1, x_2, x_3 zastępujemy wartościami pomniejszymi o 1 ($x_i \geqslant 0$). W ten sposób uzyskujemy równanie:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 17,$$

zatem liczba rozwiązań to $\binom{23}{6} = 100947$. $\square$

Zadanie 2.7.7. Ile jest najkrótszych dróg z X do Y które:



a) Przechodzą przez A, B i C?

b) przechodzą przez A lub B lub C?

c) Przechodzą przez A lub B, ale nie przechodzą przez C?

Rozwiązanie. a) Żadna z najkrótszych dróg z X do Y nie przechodzi jednocześnie przez A, B oraz C.

b) Drogi mogą przechodzić przez A albo B (ale nie jednocześnie przez obydwa), mogą również przechodzić przez A oraz C i B oraz C. Oznacza to że liczbę wszystkich dróg można policzyć poprzez zastosowanie wzoru:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,\\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C|.\end{aligned}$$

(ponieważ ustaliliśmy że nie ma dróg $A \cap B$, moc jest zerowa). Liczba wszystkich dróg przechodzących przez A to $\binom{7}{2} \cdot \binom{11}{2}$, liczba wszystkich dróg przechodzących przez B to $\binom{6}{2} \cdot \binom{11}{5}$, liczba kroków przez C to $\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{1}$. Liczba kroków $A \cap C$ to $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1}$. Liczba kroków $B \cap C$ to $\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1}$. Zatem ostateczne równanie to:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| = \binom{7}{2}\binom{11}{2} + \binom{6}{2}\binom{11}{5} + \binom{12}{6}\binom{6}{1} - \binom{7}{2}\binom{5}{1}\binom{6}{1} - \binom{6}{2}\binom{6}{2}\binom{6}{1}.$

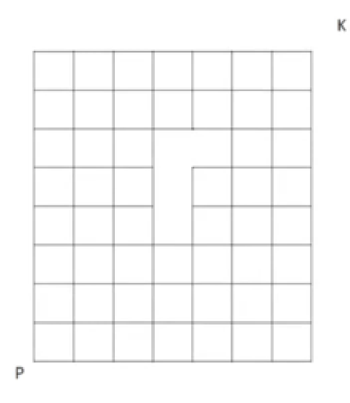
c) Przechodzą przez A lub B, ale nie przechodzą przez C?

Poszukujemy rozwiązania $|(A \setminus C) \cup (B \setminus C)|$. Ponieważ A oraz B są rozłączne, upraszcza nam to poszukiwania. Od mocy zbioru A musimy odjąć moc zbioru $A \cap C$, od mocy zbioru B musimy odjąć moc zbioru $B \cap C$. Równanie to:

$|(A \setminus C) \cup (B \setminus C)| = |A| - |A \cap C| + |B| - |B \cap C| = \binom{7}{2} \cdot \binom{11}{2} - \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} + \binom{6}{2} \cdot \binom{11}{5} - \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{1}.$

□

Zadanie 2.7.8. Ile jest najkrótszych dróg z P do K? Uwaga: nie można przechodzić przez pusty obszar wewnątrz kraty.



Rozwiązanie. Rozwiązanie polega na policzeniu wszystkich najkrótszych dróg z P do K: $\binom{15}{7}$, po czym odjęciu tych sumy trzech przypadków, gdy przechodzimy przez zakazane "mosty" - nazwijmy je, od dołu, A, B, C (gdzie C jest pionowy). Przejście przez A oraz B się wykluczają, jednak przecięcie obydwu z C jest niepuste. Mamy zatem:

- $|A| = \binom{7}{3}\binom{7}{3}$,
- $|B| = \binom{8}{3}\binom{6}{3}$,
- $|C| = \binom{9}{4}\binom{5}{2}$,
- $|A \cap C| = \binom{7}{3}\binom{5}{2}$,
- $|B \cap C| = \binom{8}{3}\binom{5}{2}$.

Zbierając do kupy:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| = \binom{7}{3}\binom{7}{3} + \binom{8}{3}\binom{6}{3} + \binom{9}{4}\binom{5}{2} - \binom{7}{3}\binom{5}{2} - \binom{8}{3}\binom{5}{2}$.
A zatem liczba wszystkich rozwiązań to:

$$\binom{15}{7} - \binom{7}{3}\binom{7}{3} - \binom{8}{3}\binom{6}{3} - \binom{9}{4}\binom{5}{2} + \binom{7}{3}\binom{5}{2} + \binom{8}{3}\binom{5}{2}.$$

□

Zadanie 2.7.9. (Zmienne są całkowitoliczbowe.) Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 40$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są dodatnie, $x_4 \geqslant 5, x_5 > 3, x_6 = 2,\ x_7 > 4$.

Rozwiązanie. Stosujemy podstawienie:

- $y_1 = x_1 - 1$,
- $y_2 = x_2 - 1$,
- $y_3 = x_3 - 1$,
- $y_4 = x_4 - 5$,
- $y_5 = x_1 - 4$,
- $y_6 = x_7 - 5$,

oraz pozbywamy się x_6 z obydwu stron. Uzyskujemy:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 21,$$

gdzie $y_i \geqslant 0$. Liczba rozwiązań to oczywiście $\binom{21+5}{5}$.

□

Zadanie 2.7.10. Ile (wszystkich) rozwiązań ma nierówność $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6$, gdzie x_1, x_2, x_3 są liczbami całkowitymi, nieujemnymi?

Rozwiązanie. Liczba kombinacji to suma przypadków gdy $x_1 + x_2 + x_3 = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Zatem moglibyśmy to rozwiązać poprzez zsumowanie:

$$\sum_{i=0} 6 \binom{i+2}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{8}{2} = 84.$$

□

Zadanie 2.7.11. Ile (wszystkich) rozwiązań ma ta nierówność zadania 6., jeśli dodatkowo muszą być spełnione warunki: x_1 - nieparzysta, $x_2 < 5$, $x_3 = 0, 3, 5$? (Tu też zakładamy, że x_1, x_2, x_3 są liczbami całkowitymi, nieujemnymi)

Zadanie 2.7.12. W sklepie w koszu jest 40 jednakowych skarpet.
8 (rozróżnialnych) klientów $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ wybiera je z kosza. Na ile sposobów mogli to zrobić, jeśli:

- każdy klient coś kupił,
- każdy kupił parzystą liczbę skarpet,
- wszystkie skarpety zostały sprzedane?

Rozwiązanie. Ponieważ każdy klient kupił parzystą liczbę skarpet, możemy podejść do zadania jakbyśmy zliczali 20 jednakowych par skarpet. Dalej, ponieważ każdy z klientów coś kupił, badamy ile par ponad jedną zostało kupione. W końcu, ponieważ wszystkie pary zostały wyprzedane, możemy stworzyć równanie:

$$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f + x_g + x_h = 20,$$

lub:

$$y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_f + y_g + y_h = 12,$$

gdzie $y_i = x_i - 1$, zatem $y_i \geqslant 0$. W ten sposób zadanie sprowadzamy do przypadku, gdzie 7 nierozróżnialnych elementów $(n-1)$ rozmieszczamy na 12+7 slotach. Mamy zatem $\binom{19}{7}$ kombinacji. □

2.8 Zasada Dirichleta - zastosowanie

Przytoczę tutaj *zasadę szufladkową Dirichleta*:

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa Dirichleta)**.** Jeśli X oraz Y są niepustymi zbiorami skończonymi i $f \in Fun(X, Y)$ oraz $|X| > r \cdot |Y|$ dla pewnego $r > 0$, to co najmniej jeden ze zbiorów $f^{-1}(\{y\})$ ma więcej niż r elementów.

Rozwiązanie. Istotnie, jeśli maksimum elementów w $|Y|$ zbiorach to r, to nie możemy mieć więcej niż $|Y| \cdot r$ elementów we wszystkich zbiorach. Zatem $|X| > r \cdot |Y|$ gwarantuje nam istnienie przynajmniej jednego zbioru o przynajmniej $r + 1$ elementach. □

Zadanie 2.8.1. W cukierni jest 8 różnych smaków lodów. Deser = kubek z 5 różnymi gałkami lodów. Było 120 klientów. Czy to prawda, że co najmniej 3 klientów wybrało taki sam deser?

Rozwiązanie. Możliwych do wybrania deserów jest $\binom{8}{5} = 56$. Jeśli maksymalną liczbą klientów którzy wybrali ten sam deser byłoby dwa, oznacza to że nie mogło być więcej niż 112 klientów. Ponieważ mieliśmy 120 klientów, istniał przynajmniej jeden taki deser który został wybrany przez 3 lub więcej klientów. □

Zadanie 2.8.2. 83 pomarańcze umieszczono w 9 koszach.

a) Czy to prawda, że musi istnieć przynajmniej jeden kosz, do którego trafiło 20 pomarańczy?

b) Czy to prawda, że musi istnieć przynajmniej jeden kosz, do którego trafiło więcej niż 9 pomarańczy?

Rozwiązanie. a) Kontrprzykład - rozkładamy pomarańcze po 9 do każdego kosza i 11 do ostatniego.

b) W tym wypadku $83 > 9 \cdot 9$, zatem musi istnieć kosz do którego trafiło przynajmniej 10 pomarańczy.

□

Zadanie 2.8.3. 10 drużyn rozegrało 8 meczów. Udowodnić, że są przynajmniej dwie drużyny, które rozegrały tyle samo spotkań.

Rozwiązanie. Każda z 10 drużyn mogła rozegrać co najwyżej 8 meczów. Jeśli byśmy przyporządkowywali każdej z drużyn liczbę meczów, to przynajmniej jedna z liczb meczów musiałaby mieć wiecej niż jedną drużynę. □

Zadanie 2.8.4. X = zbiór ciągów binarnych długości 10. Czy w X musi istnieć 80 ciągów, których suma wyrazów jest taka sama?

Rozwiązanie. Wszystkich możliwych ciągów binarnych jest 1024 (2^{10}). Wszystkich możliwych wartości ciągów jest 9 (od 0 do 8). Jeśli nie istniałoby 80 ciągów o tej samej wartości, wtedy maksymalną możliwą liczbą ciągów o tej samej wartości byłoby 79 - oznaczałoby to co najwyżej $9 \cdot 79 = 711$ możliwych ciągów. Stąd zatem wiemy, że musi istnieć przynajmniej 80 ciągów o tej samej wartości. □

2.9 Zliczanie podzbiorów

Zadanie 2.9.1. a) Jest 8 osób. Trzeba utworzyć 3 rozłączne grupy, liczące odpowiednio 2, 3 i 3 osoby. Na ile sposobów można to zrobić?

b) Mamy cyfry $7, 7, 5, 5, 5, 2, 2, 2$. Ile ośmiocyfrowych liczb można utworzyć, zapisując w dowolnej kolejności te cyfry?

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązujemy w obydwu przypadkach poprzez iloczyn trzech symboli Newtona:

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}.$$

W drugim przypadku tworzymy trzy zbiory z ośmiu elementów pozycji cyfr od 1 do 8 - dwuelementowy zbiór pozycji na których jest cyfra 7, trójelementowy zbiór pozycji cyfr 5 oraz trójelementowy zbiór pozycji cyfr 2. □

Zadanie 2.9.2. Dany jest zbiór z powtórzeniami:

$$X = \{3a, 2b, 4c\}.$$

a) Ile elementów ma X?

b) Ile podzbiorów ma X (chodzi o podzbiory z powtórzeniami)?

Rozwiązanie. a) Ile elementów ma X?

Odpowiedź to 9: suma krotności wszystkich elementów.

b) Ile podzbiorów ma X (chodzi o podzbiory z powtórzeniami)?

Odpowiedź: $4 \cdot 3 \cdot 5$ (wszystkie kombinacje 0-3 elementy a, 0-2 elementy b, 0-4 elementy c).

$\square$

2.10 Funkcje tworzące

Zadanie 2.10.1. Dany jest zbiór z powtórzeniami: $X = \{7a, 4b, 2c\}$. Rozważ takie podzbiory, w których element a występuje nieparzystą liczbę razy, zaś elementy b i c występują parzystą liczbę razy.
Ile takich podzbiorów zawiera więcej niż 5 elementów?

Rozwiązanie. Rozważamy przypadki kiedy mamy $1, 3, 5, 7$ elementy a, $0, 2, 4$ elementy b oraz $0, 2$ elementy c. Daje to nam $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ możliwości.
Aby policzyć liczbę podzbiorów o więcej niż 5 elementach, użyjemy następującego algorytmu postępowania:

- Zareprezentujemy każdą z liczb elementów (tj. 1,3,5,7 elementów a itd.) jako sumę potęg x. Następnie przemnożymy przez siebie powstałe w ten sposób wielomiany.
- Powstanie wielomian, w którym potęgi przy x będą reprezentowały liczbę elementów, natomiast liczby przy tych potęgach - liczby możliwości. Należy zliczyć i dodać wszystkie interesujące nas możliwości.

W tym wypadku mamy następujące wyrażenie:

$$(x^1 + x^3 + x^5 + x^7) \cdot (x^0 + x^2 + x^4) \cdot (x^0 + x^2) = x^{13} + 3x^{11} + 5x^9 + 6x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x^1,$$

czyli mamy: 1 kombinację zbioru o 13 elementach, 3 kombinacje zbiorów o 11 elementach, 5 kombinacji zbiorów o 9 elementach... itd. Zatem zbiorów które mają więcej niż 5 elementów będzie $1 + 3 + 5 + 6 = 15$. $\square$

Zadanie 2.10.2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Rozpatrujemy tylko liczby sześciocyfrowe, utworzone z cyfr ze zbioru A. Ile jest liczb, w których występują przynajmniej trzy cyfry 5?

Rozwiązanie. Zbiór wszystkich liczb sześciocyfrowych złożonych z elementów A ma 9^6 kombinacji. Jeśli chcemy teraz policzyć wszystkie kombinacje, w których są przynajmniej trzy cyfry 5, to musimy odjąć wszystkie:

- kombinacje w których są dokładnie 2 cyfry 5: $\binom{6}{2} \cdot 8^4$ (nierozróżnialne piątki w 2 z 6 miejsc, 8 możliwych cyfr na 4 pozostałych miejscach)
- kombinacje w których jest dokładnie 1 cyfra 5: $\binom{6}{1} \cdot 8^5$ (piątka w 1 z 6 miejsc, 8 możliwych cyfr na 5 pozostałych miejscach)
- kombinacje w których nie ma cyfry 5: 8^6 (8 możliwych cyfr na 6 pozycjach).

Liczba wszystkich kombinacji:

$$9^6 - \binom{6}{2} \cdot 8^4 - \binom{6}{1} \cdot 8^5 - \cdot 8^6.$$

$\square$

Zadanie 2.10.3. Cyfry $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, litery $\{a, b, c, d, e, f\}$. Ile różnych ciągów długości 7 można utworzyć, jeśli na dwóch ostatnich pozycjach nie mogą wystąpić te same litery? Ile jest ciągów, w których występują najwyżej cztery litery?

Zadanie 2.10.4. Tworzymy kody długości 10 z dwóch znaków b oraz c. Ile jest kodów, które mają nie więcej niż 5 znaków b?

Zadanie 2.10.5. Dziesięć osób $\{o_1, \ldots, o_{10}\}$ przydzielono do trzech zespołów $\{z_1, z_2, z_3\}$. Ile jest sposobów przydziału, jeśli do każdego zespołu ktoś trafił?

Zadanie 2.10.6. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$, takich że 2 i 7 lub 6 i 8 stoją obok siebie?

Rozwiązanie. Należy policzyć wszystkie możliwe permutacje i odjąć od nich sumę zbiorów w których stoją obok siebie 2 i 7 lub 6 i 8. Zatem:

- Wszystkich ciągów jest $10!$,
- ciągów w których 2 i 7 stoją obok siebie jest $9 \cdot 2! \cdot 8!$,
- identycznie z ciągami gdzie 6 i 8 stoją obok siebie,
- ciągi w których 2 i 7 oraz 6 i 8 stoją obok siebie - mamy dwie kombinacje - najpierw 2 i 7, potem 6 i 8, lub odwrotnie. Każda z nich ma dwie kombinacje kolejności 2 i 7, oraz dwie kombinacje 6 i 8. Pozostaje zliczyć na ile sposobów możemy rozmieścić dwie pary na 10 pozycjach:
  - Jeśli pierwsza para jest na miejscu 1, to drugą można wstawić na 7 miejscach (8-1).
  - Jeśli pierwsza para jest na miejscu 2, to drugą można wstawić na 6 mijescach (7-1),
  - ...
  - itd.

  Zatem mamy $7 + 6 + \cdots + 2 + 1 = 8 \cdot 7/2 = 28$ możliwości postawienia par. Daje nam to w sumie $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 28 = 224$ kombinacje.

Chcemy zatem policzyć wszystkie możliwe kombinacje z uwzględnionymi warunkami:

$$|\Omega \setminus (A \cup B)| = |\Omega| - |A \cup B| = |\Omega| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 10! - (9 \cdot 2! \cdot 8! + 9 \cdot 2! \cdot 8! - 224).$$

□

Zadanie 2.10.7. Mamy ciągi długości 12, o wyrazach z $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

a) Ile jest ciągów, w których nie ma znaków b lub c lub d?

b) Ile jest ciągów, w których jest przynajmniej jedna b-tka i przynajmniej jedna c-tka?

Rozwiązanie. a) Ile jest ciągów, w których nie ma znaków b lub c lub d?

Zliczamy moce zbiorów ciągów 12-znakowych które nie zawierają liter:

- $|b| = |c| = |d| = 7^{12}$,
- $|b \cap c| = |c \cap d| = |d \cap b| = 6^{12}$,

- $|b \cap c \cap d| = 5^{12}$,

Korzystamy z zasady wyłączania zbiorów:

$$|b \cup c \cup d| = |b| + |c| + |d| - |b \cap c| - |c \cap d| - |b \cap d| + |b \cap c \cap d| = 3 \cdot 7^{12} - 3 \cdot 6^{12} + 5^{12}.$$

b) Ile jest ciągów, w których jest przynajmniej jedna b-tka i przynajmniej jedna c-tka?

Najprościej rozwiązać zadanie poprzez znalezienie różnicy zbioru wszystkich rozwiazań oraz sumy zbiorów gdzie jest przynajmniej jeden z elementów. Mamy zatem:

- $|\Omega| = 7^{12}$,
- $|B| = 12 \cdot 6^{11}$,
- $|C| = 12 \cdot 6^{11}$,
- $|B \cap C| = 12 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5^{10}$,

zatem całkowita liczba zbiorów gdzie mamy przynajmniej jedną b-tkę i c-tkę to:

$$|\Omega \setminus (B \cup C)| = |\Omega| - |B \cup C| = |\Omega| - (|B| + |C| - |B \cap C|) = 7^{12} - (12 \cdot 6^{11} + 12 \cdot 6^{11} - 12 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5^{10}).$$

$\square$