Zbiory uporządkowane

Relację binarną $R \subseteq X \times X$, która jest

- **zwrotna**, jeśli $\forall\, x \in X \,:\, xRx$
- **przechodnia**, jeśli $\forall\, x, y, z \in X \,:\, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
- **antysymetryczna**, jeśli $\forall\, x, y \in X \,:\, (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

nazywamy relacją (częściowego porządku) i oznaczamy $\preceq$.

Parę (X, $\preceq$) nazywamy zbiorem (częściowo) uporządkowanym:

X – zbiór podstawowy, $\preceq$ – relacja porządkująca X

Dwa elementy $x, y \in X$ nazywamy **porównywalnymi** ,
jeśli $x \preceq y$ lub $y \preceq x$,

w przeciwnym przypadku są one **nieporównywalne**.

Jeśli każde dwa elementy $x, y \in X$ są porównywalne, to parę (X, $\preceq$) nazywamy zbiorem **liniowo uporządkowanym**.

W zbiorze uporządkowanym (X, $\preceq$) wprowadzamy oznaczenie:

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$$

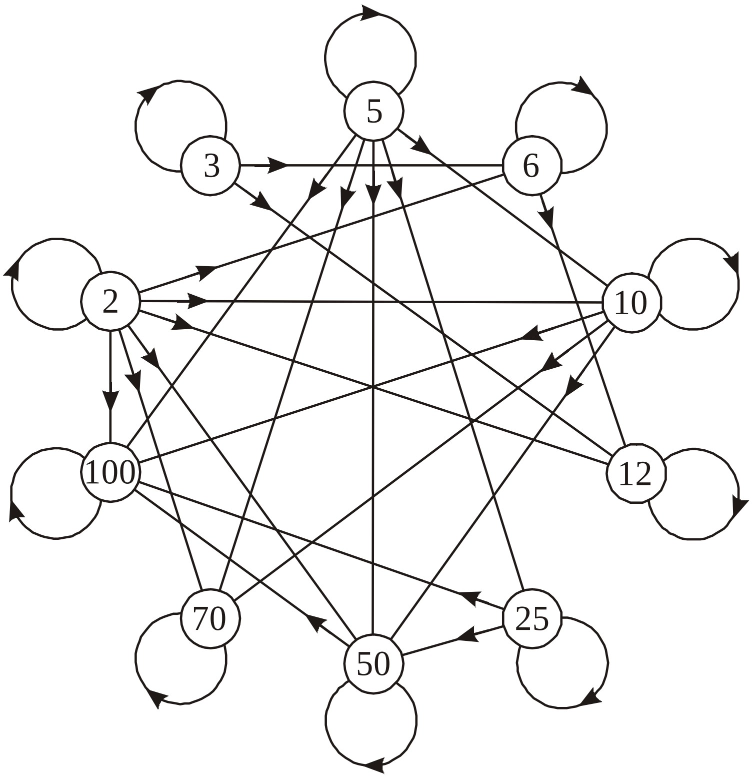
Jeżeli dla dwóch elementów $s, t \in X$ zachodzi $s \prec t$ i nie istnieje taki element $u \in X$, że $s \prec u$ i $u \prec t$, to s nazywamy **bezpośrednim poprzednikiem** t, a t – **bezpośrednim następnikiem** s.

Przykład zbioru uporządkowanego

X = { 2, 3, 5, 6, 10, 12, 25, 50, 70, 100 },

dla $a, b \in X$, $a \preceq b \iff b \bmod a = 0$ (relacja podzielności).

Graf relacji:



$(X, \preceq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym,

ale nie jest zbiorem liniowo uporządkowanym, bo ani (2, 3), ani (3, 2) nie należy do relacji.

$3 \prec 12$, ale 3 nie jest bezpośrednim poprzednikiem 12, bo zachodzi:

$3 \prec 6$ i $6 \prec 12$

Przykład zbioru uporządkowanego

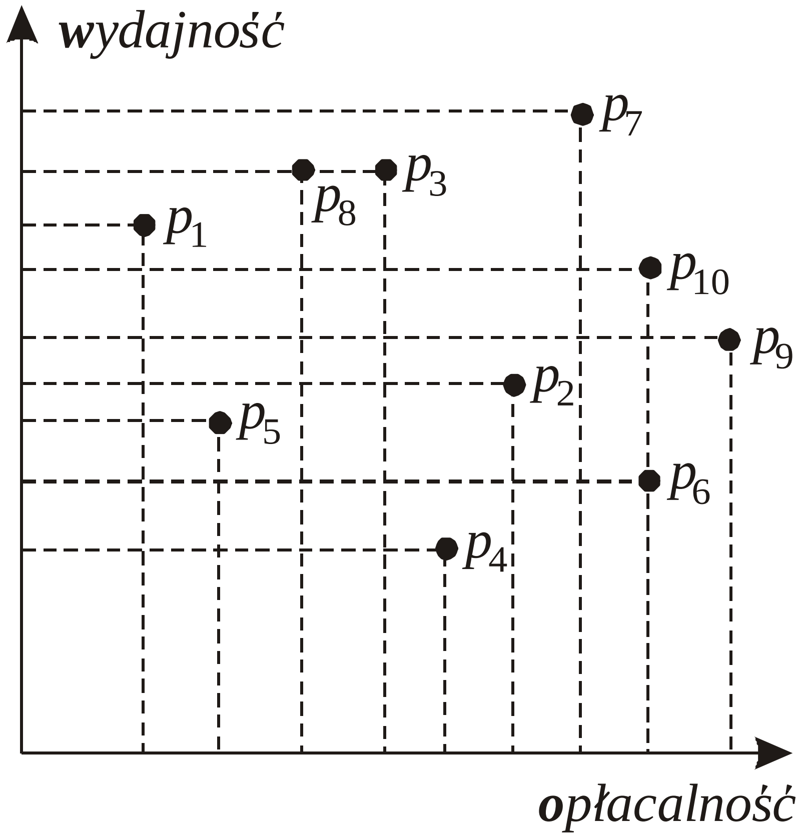
$X = \{ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10} \}$ – zbiór procesorów;

$w(p_i)$ – wydajność procesora i , $o(\mathrm{p}_i)$ – opłacalność procesora i ;

$$p_i \preceq p_j \;\Leftrightarrow\; w(p_i) \le w(p_j) \;\wedge\; o(p_i) \le o(p_j) \quad (p_j \text{ „nie gorszy od” } p_i)$$

$$p_i = p_j \;\Leftrightarrow\; w(p_i) = w(p_j) \;\wedge\; o(p_i) = o(p_j) \quad (p_j \text{ „taki sam jak” } p_i)$$

$$p_i \prec p_j \;-\; p_j \text{ „lepszy od” } p_i$$



procesory p_2 i p_3 są nieporównywalne,

procesor p_{10} jest lepszy od p_6 i jest jego bezpośrednim następnikiem,

procesor p_{10} jest lepszy od p_4 , ale nie jest jego bezpośrednim następnikiem.

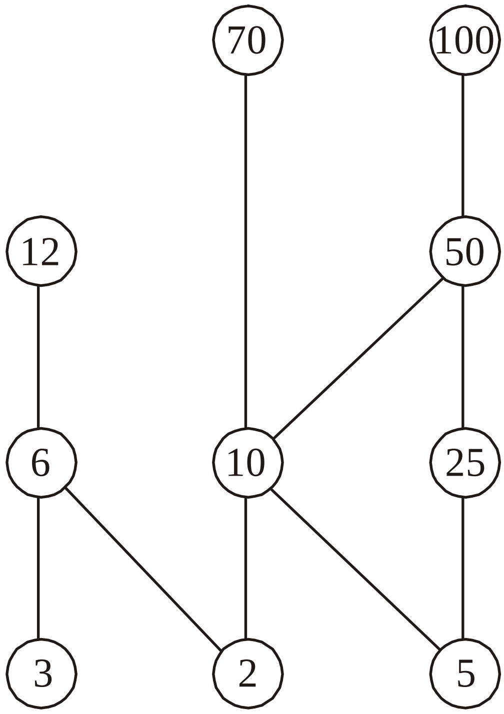
Wygodnym i czytelnym sposobem przedstawienia zbioru uporządkowanego $(X, \preceq)$ jest tzw. **diagram Hassego**, na którym łączymy odcinkami tylko bezpośrednie poprzedniki z ich następnikami i następniki umieszczamy powyżej poprzedników.

Przykład diagramu Hassego

$X = \{ 2, 3, 5, 6, 10, 12, 25, 50, 70, 100 \}$,

$a \preceq b \iff b \bmod a = 0$.

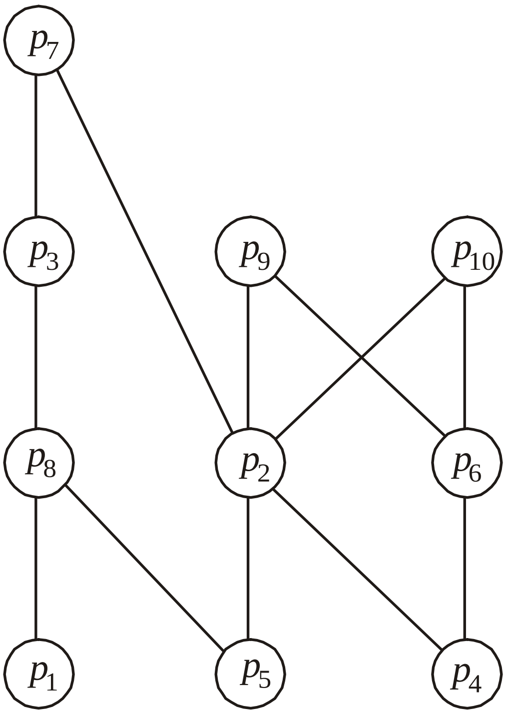
Diagram:



Przykład diagramu Hassego

$X = \{ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10} \}$ – zbiór procesorów;

$p_i \preceq p_j \;\Leftrightarrow\; p_j$ „nie gorszy od” p_i



Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem maksymalnym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli w zbiorze X nie istnieje element $x \neq x_o$, dla którego $x_o \preceq x$.

Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem minimalnym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli w zbiorze X nie istnieje element $x \neq x_o$, dla którego $x \preceq x_o$.

Przykład

Procesory p_7, p_9, p_{10} są elementami maksymalnymi,

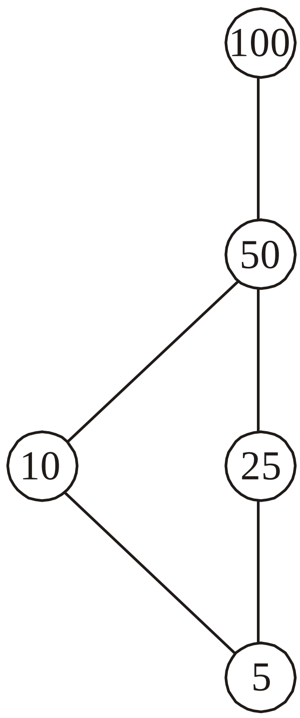
a procesory p_1, p_4, p_5 są elementami minimalnymi.

Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem największym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi zależność $x \preceq x_o$.

Element $x_o \in X$ nazywamy **elementem najmniejszym** w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi zależność $x_o \preceq x$.

Przykład

$X = \{ 5, 10, 25, 50, 100 \}$, $a \preceq b \iff b \bmod a = 0$;



Element 100 jest elementem największym, a element 5 jest elementem najmniejszym,

Twierdzenie

W zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden element największy i co najwyżej jeden element najmniejszy.
Przy tym element największy jest elementem maksymalnym, a element najmniejszy jest elementem minimalnym.

Twierdzenie

W zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, \preceq)$ następujące stwierdzenia są równoważne:

- $x_o \in X$ jest elementem największym,
- $x \preceq x_o$ dla każdego $x \in X \setminus \{ x_o \}$,
- $x_o \in X$ jest elementem maksymalnym.

Twierdzenie

W zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, \preceq)$ następujące stwierdzenia są równoważne:

- $x_o \in X$ jest elementem najmniejszym,
- $x_o \preceq x$ dla każdego $x \in X \setminus \{ x_o \}$,
- $x_o \in X$ jest elementem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli $(X, \preceq)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym oraz X jest zbiorem skończonym i niepustym, to w $(X, \preceq)$ istnieją elementy największy i najmniejszy.

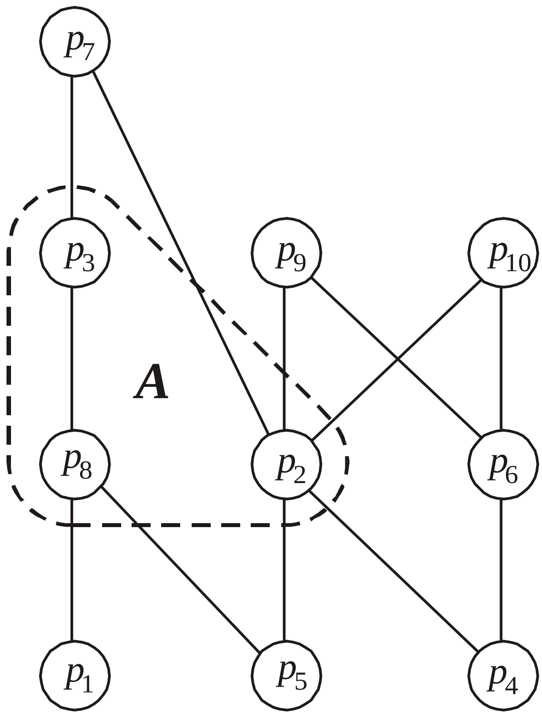
Element $x_o \in X$ nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru $A \subseteq X$,

jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi zależność $x_o \preceq x$.

Element $x_o \in X$ nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru $A \subseteq X$,

jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi zależność $x \preceq x_o$.

Przykład



Procesor p_7 jest ograniczeniem górnym dla zbioru procesorów A;

a procesor p_5 jest ograniczeniem dolnym dla zbioru A.

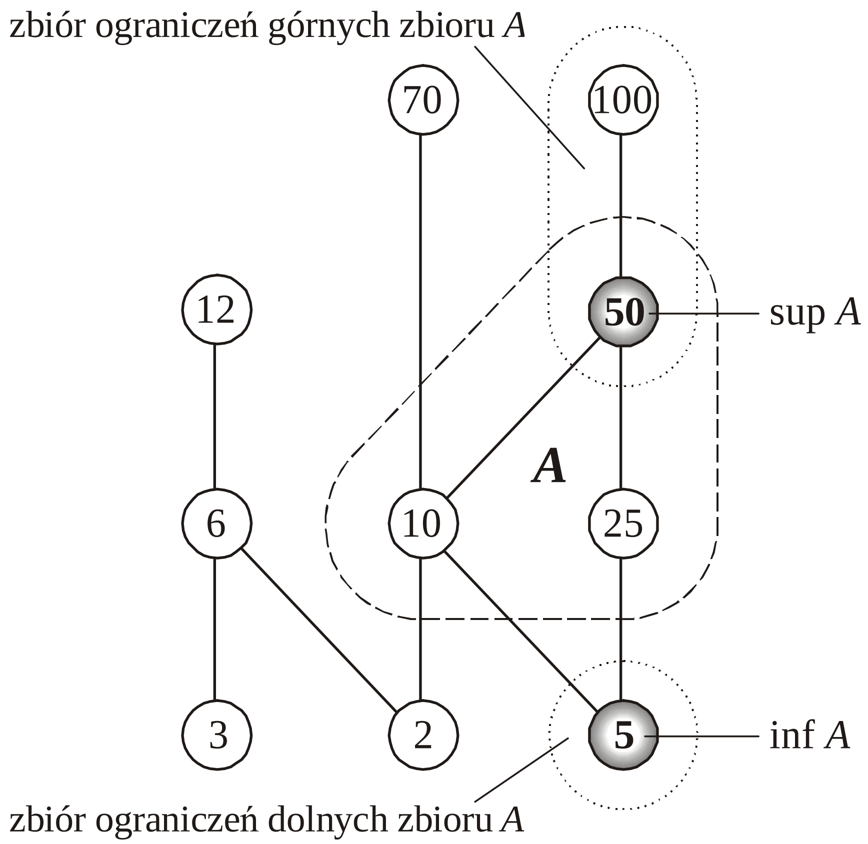
Jeśli zbiór ograniczeń górnych zbioru *A* ma element najmniejszy, to nazywamy go **kresem górnym** zbioru *A* i oznaczamy **sup** *A*

(łac. *supremum* – wyżej stojące)

Jeśli zbiór ograniczeń dolnych zbioru *A* ma element największy, to nazywamy go **kresem dolnym** zbioru *A* i oznaczamy **inf** *A*

(łac. *infimum* – niżej położone)

Przykład



Jeśli x_o = **sup** A oraz $x_o \in A$, to stosujemy zapis x_o = **max** A

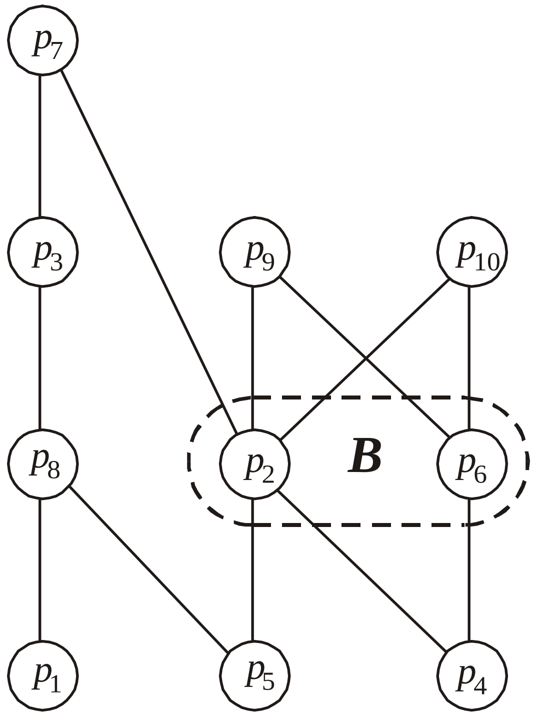
(łac. *maximum* – największe)

Jeśli x_o = **inf** A oraz $x_o \in A$, to stosujemy zapis x_o = **min** A

(łac. *minimum* – najmniejsze)

np. 50 = **sup** *A* i 50 = **max** *A*

Przykład



$\{ p_9, p_{10} \}$ jest zbiorem ograniczeń górnych dla zbioru procesorów B, ale w tym zbiorze nie ma elementu najmniejszego;

zatem nie istnieje kres górny zbioru B.

Kres dolny oczywiście istnieje i $p_4 = \mathbf{inf}\ B$.

Pokryciem zbioru X nazywamy taką rodzinę jego podzbiorów $\{ Y_1, Y_2, ..., Y_k \}$ $(Y_i \subseteq X)$, dla której zachodzi $X = Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_k$.

Zbiory $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ pokrywają zbiór X.

Przykład

Rodzina $\{\{ 2, 3, 5\}, \{5, 6, 10, 12\}, \{25, 50\}, \{25, 50, 70, 100\}\}$,

jest pokryciem zbioru $\{ 2, 3, 5, 6, 10, 12, 25, 50, 70, 100 \}$,

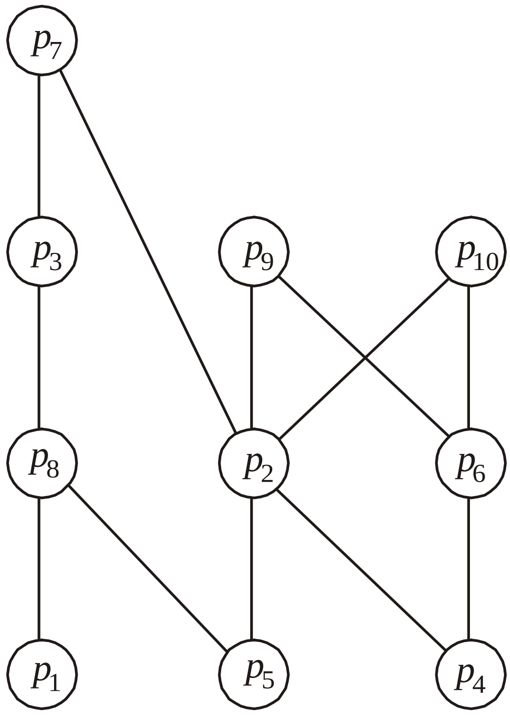
---

Łańcuchem z zbiorze uporządkowanym $(X, \preceq)$ nazywamy taki podzbiór $L \subseteq X$, w którym każde dwa elementy $x, y \in L$ <u>są porównywalne</u>, tzn. zawsze zachodzi $x \preceq y$ lub $y \preceq x$.

Para złożona z łańcucha L i relacji porządku $\preceq$ obciętej do L tworzy zatem zbiór liniowo uporządkowany $(L, \preceq_L)$.

Antyłańcuchem z zbiorze uporządkowanym $(X, \preceq)$ nazywamy taki podzbiór $A \subseteq X$, w którym żadne dwa różne elementy $x, y \in L$ <u>nie są porównywalne</u>, tzn. zawsze zachodzi $x \preceq y \Leftrightarrow x = y$.

Przykład łańcucha i antyłańcucha



$$L = \{ p_3 , p_5 , p_7 , p_8 \} \text{ lub } L = \{ p_2 , p_5 , p_{10} \} \;;$$

$$A = \{ p_1 , p_2 , p_6 \} \text{ lub } A = \{ p_3 , p_9 , p_{10} \}$$

Robert P. Dilworth (1914 – 1993, California)

Twierdzenie

W każdym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$

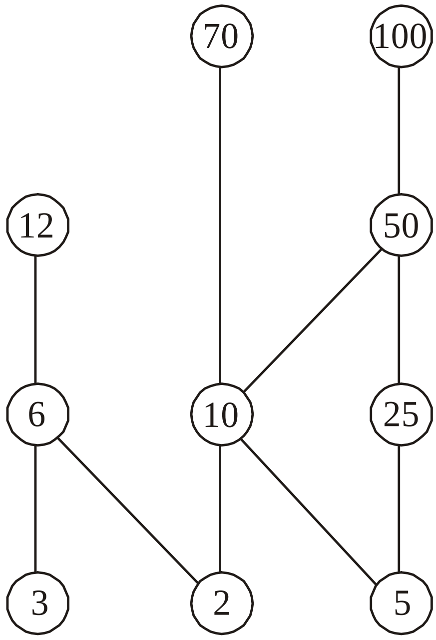
maksymalna liczność antyłańcucha jest równa minimalnej liczbie łańcuchów pokrywających zbiór X.

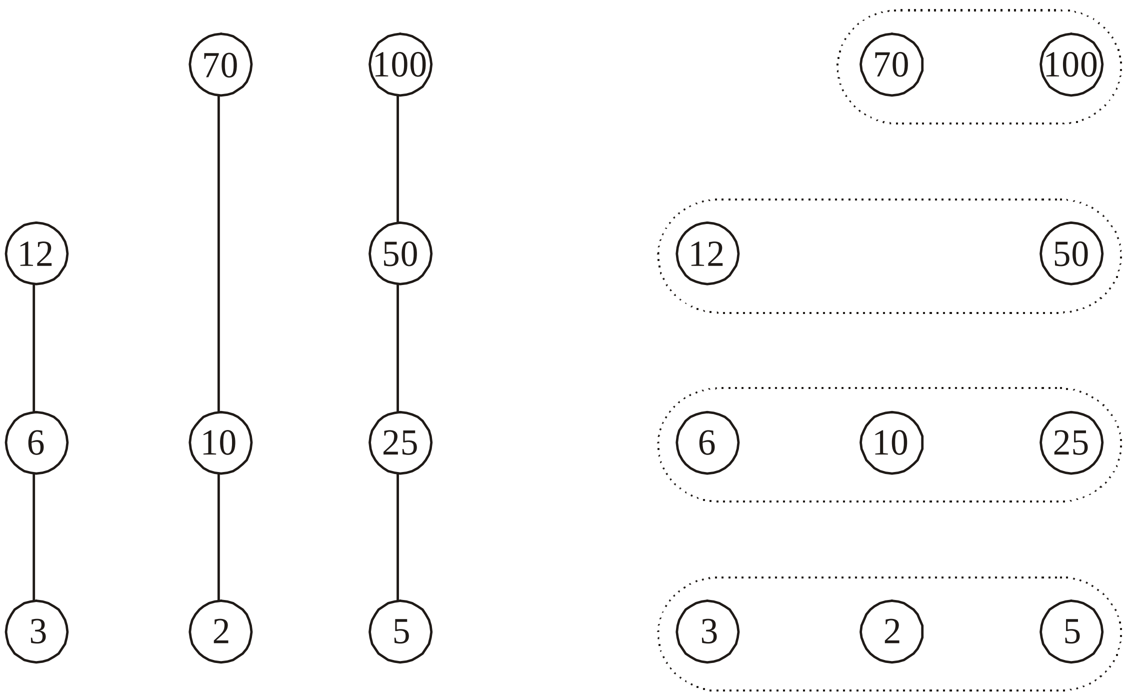
Twierdzenie (dualne)

W każdym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$

maksymalna liczność łańcucha jest równa minimalnej liczbie antyłańcuchów pokrywających zbiór X.

Przykład





Jeśli istnieją 3 łańcuchy, które pokrywają zbiór *X*, to maksymalna liczność antyłańcucha nie może być większa od 3.

Jeśli najliczniejszy łańcuch ma 4 elementy, to potrzeba nie mniej niż 4 antyłańcuchy, aby pokryć zbiór *X*.

Techniki rozwiązywania problemów kombinatorycznych

- zasada mnożenia
- zasada równoliczności
- zasada szufladkowa Dirichleta
- zasada włączania-wyłączania
- funkcje tworzące

Zasada mnożenia

Jeżeli rozważane są funkcje $f : X \to Y$,

dla których $X = X_1 \cup X_2$ i $Y = Y_1 \cup Y_2$ oraz spełnione są warunki

$X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $f(X_1) \subseteq Y_1$ i $f(X_2) \subseteq Y_2$,

to $|Fun(X, Y)| = |Fun(X_1, Y_1)| \cdot |Fun(X_2, Y_2)|$

Jeżeli ponadto $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$,

to $|Inj(X, Y)| = |Inj(X_1, Y_1)| \cdot |Inj(X_2, Y_2)|$

Przykład

Jaka jest maksymalna liczba tablic rejestracyjnych typu WI07049?

Tablica to zbiór 7 znaków $X = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$,

$X_1 = \{z_1, z_2\}$, $X_2 = \{z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$, Y_1 – zbiór liter, Y_2 – zbiór cyfr,

$|X_1| = 2$, $|X_2| = 5$, $|Y_1| = 26$, $|Y_2| = 10$, $|Fun(X, Y)| = \mathbf{26^2 \cdot 10^5}$

Jaka jest maksymalna liczba tablic o różnych literach i różnych cyfrach?

$|Inj(X, Y)| = \mathbf{26^{\underline{2}} \cdot 10^{\underline{5}}}$

Zasada równoliczności

$$Bij(X, Y) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad |X| = |Y|$$

Przykład

Dlaczego podziałów liczby n na k składników jest tyle samo co podziałów liczby n o największym składniku równym k ?
Bo możemy wzajemnie jednoznacznie przyporządkować podziałowi liczby n na k składników jego podział sprzężony, który jest podziałem liczby n o największym składniku równym k.

Zasada szufladkowa

Dla skończonych zbiorów X i Y, takich że $|X| > r \cdot |Y|$ dla $r > 0$: dla każdej funkcji $f \in Fun(X, Y)$ warunek $|f^{-1}(\{y\})| > r$ jest spełniony dla co najmniej jednego $y \in Y$.
(jeśli wkładamy n przedmiotów do m pudełek i $n > r \cdot m$, to w przynajmniej jednym pudełku znajdzie się ponad r przedmiotów)

Przykład

Dlaczego na egzaminie dla 401 studentów, na którym każdy student może dowolnie wybrać do rozwiązania 7 zadań z 9, będzie co najmniej 12 studentów rozwiązujących ten sam zestaw zadań?

Bo wszystkich zestawów, które mogą powstać jest $\binom{9}{7}$= 36, a zatem

liczba studentów $401 > 11 \cdot 36 = 396$ i w twierdzeniu $r = 11$.