GRAFY i SIECI

GRAFY – podstawowe definicje

Graf: $G = (V, E)$ - para uporządkowana

$V = \{1, 2, ..., n\}$ - zbiór wierzchołków grafu

$E \subseteq \{ \{i, j\} : i \neq j \text{ i } i, j \in V \}$ - zbiór krawędzi grafu

Terminologia:
graf = graf symetryczny, graf nieskierowany, graf niezorientowany

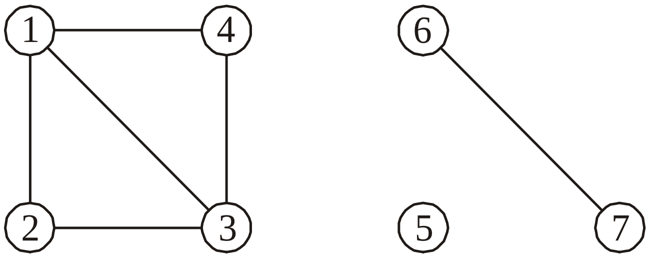
Rysunek grafu:

- **wierzchołek** i przedstawiamy symbolicznie 

- **krawędź** $\{i, j\}$ przedstawiamy 

Przykład grafu

$G = (V, E)$:



$V = \{1, ..., 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}$

Literatura:

- M.Libura, J.Sikorski „*Wykłady z matematyki dyskretnej. Cz.II: Teoria grafów*” Wydawnictwo WSISiZ (2002)
- N.Deo „*Teoria grafów i jej zastosowania w technice*” PWN (1980)
- R.Wilson „*Wprowadzenie do teorii grafów*” PWN (2000)
- K.Ross, C.Wright „*Matematyka dyskretna*” PWN (1996)

Graf skierowany: $D = (V, A)$ - para uporządkowana

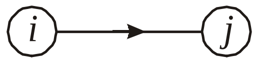
$V = \{1, 2, ..., n\}$ - zbiór wierzchołków grafu

$A \subseteq V \times V$ - zbiór łuków grafu

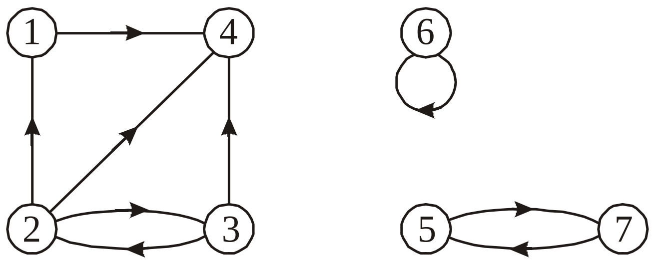
Terminologia:

graf skierowany = digraf, graf zorientowany

Rysunek grafu skierowanego:

- **wierzchołek** i przedstawiamy symbolicznie 
- **łuk** (i, j) przedstawiamy 

Przykład grafu skierowanego



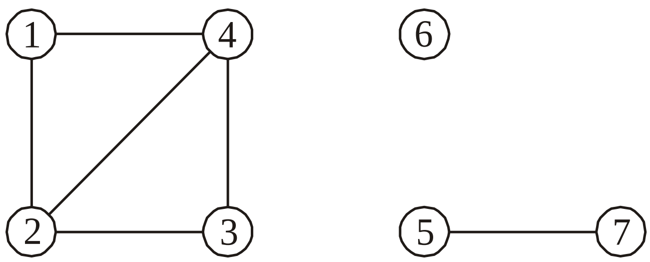
$D = (V, A)$: $V = \{1, ..., 7\}$,

$A = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 7), (6, 6), (7, 5)\}$

Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$ definiujemy ***pochodny graf nieskierowany*** $G(D) = (V, E_D)$:

$$\{i, j\} \in E_D \Leftrightarrow (i, j) \in A \vee (j, i) \in A \quad \text{dla } i \neq j$$

Przykład grafu pochodnego



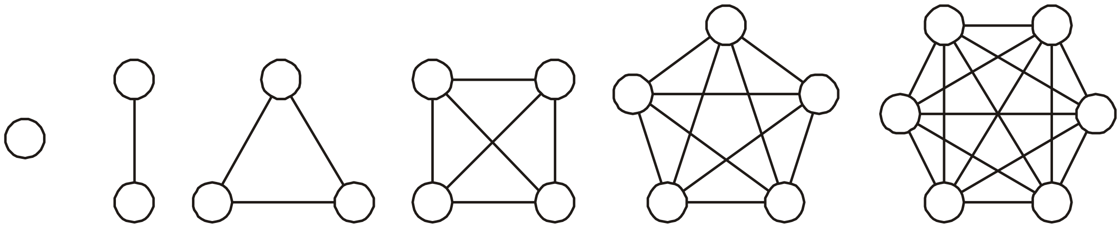
$G(D) = (V, E_D)$:

$V = \{1, ..., 7\}$, $E_D = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

Graf nazywamy ***pełnym***, jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje krawędź łącząca te wierzchołki.

Symboliczne oznaczenie grafu pełnego o *n* wierzchołkach – $\boldsymbol{K_n}$

Przykłady grafów pełnych

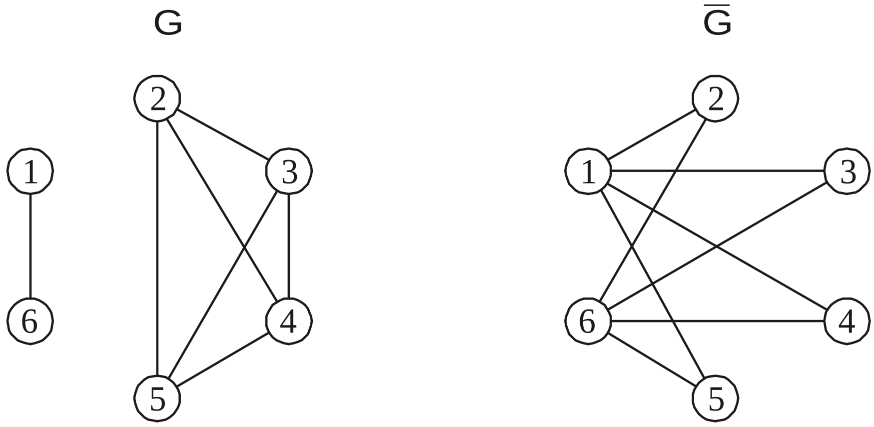


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Liczba krawędzi w grafie pełnym K_n wynosi $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G}$, który ma ten sam zbiór wierzchołków co G i wszystkie krawędzie grafu pełnego $K_{|V|}$ nie występujące w grafie G.

Przykład dopełnienia grafu

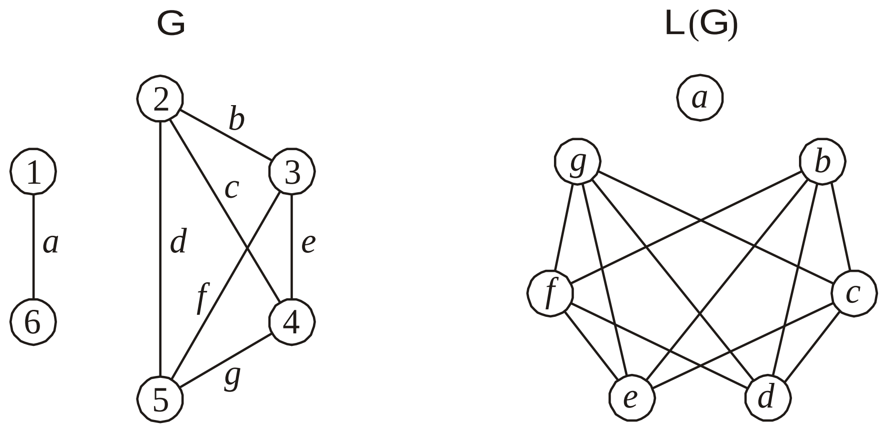


W grafie $G = (V, E)$ dla krawędzi $e = \{ i, j\} \in E$ mówimy, że wierzchołki i, j są ***incydentne*** z krawędzią e. Dwa wierzchołki grafu incydentne z tą samą krawędzią nazywamy ***sąsiednimi*** lub ***zależnymi***.

Dwie krawędzie grafu incydentne z tym samym jego wierzchołkiem nazywamy ***zależnymi***.

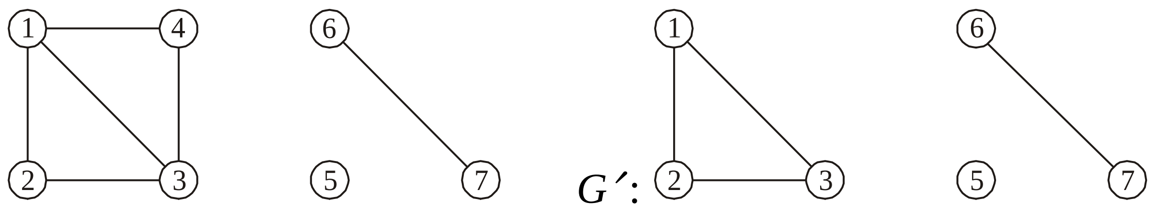
Grafem krawędziowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $L(G)$, którego wierzchołki odpowiadają krawędziom grafu G, a krawędzie odpowiadają parom zależnych krawędzi grafu G.

Przykład grafu krawędziowego



Podgrafem grafu $G = (V, E)$ nazywamy każdy graf $G' = (V', E')$, dla którego $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$.

Przykład grafu i jego podgrafu



Grafy a relacje

- Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$: A – relacja na zbiorze V
- Dla grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$:
  E może wynikać z relacji R na zbiorze V, która jest symetryczna i nie jest zwrotna: $(i, j) \in R \vee (j, i) \in R \Rightarrow \{ \mathrm{i}, \mathrm{j} \} \in E$

STOPNIE WIERZCHOŁKÓW

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

krawędź $e = \{i, j\} \in E$

– wierzchołki i oraz j są ***incydentne*** z krawędzią e, a ona z nimi.

– krawędź e łączy dwa wierzchołki i oraz j, które są jej ***końcami***.

– wierzchołki i oraz j są ***sąsiednie*** lub inaczej ***zależne***.

$V(i)$ – zbiór wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem i

$$V(i) = \{ j \in V : \{i, j\} \in E \}$$

$d(i) = | V(i) |$ – ***stopień*** wierzchołka i (inne oznaczenie $\deg(i)$)

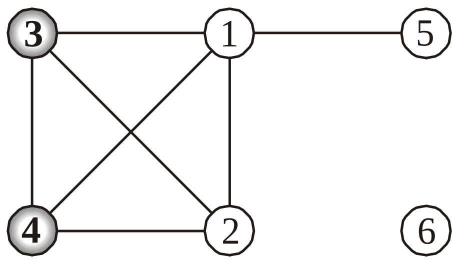
Wierzchołek stopnia 0 nazywamy wierzchołkiem ***izolowanym***.

Dla podzbioru $M \subseteq V$ definiujemy:

$$V_M(i) = \{ j \in M : \{i, j\} \in E \}$$

$d_M(i) = | V_M(i) |$ – ***stopień*** wierzchołka i względem podzbioru M

Przykład wyznaczania stopni wierzchołków w grafie



$V(1) = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow d(1) = 4$; $V(4) = \{1, 2, 3\} \Rightarrow d(4) = 3$

$V(6) = \emptyset \Rightarrow d(6) = 0$ (wierzchołek izolowany)

dla $M = \{3, 4\}$: $d_M(1) = 2$, $d_M(4) = 1$, $d_M(5) = 0$

Graf skierowany $D = (V, A)$

łuk $a = (i, j) \in A$

– wierzchołki i oraz j są ***incydentne*** z łukiem a

– wierzchołek i jest ***początkiem*** łuku a

– wierzchołek j jego ***końcem*** łuku a

$V^+(i)$ – zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka i

$$V^+(i) = \{ j \in V : (i, j) \in A \}$$

$V^-(i)$ – zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka i

$$V^-(i) = \{ j \in V : (j, i) \in A \}$$

$d^+(i) = | V^+(i) |$ – ***stopień wyjściowy*** wierzchołka i

$d^-(i) = | V^-(i) |$ – ***stopień wejściowy*** wierzchołka i

$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$ – ***stopień*** wierzchołka i

Dla podzbioru $M \subseteq V$ definiujemy:

$$V_M^+(i) = \{ j \in M : (i, j) \in A \}$$

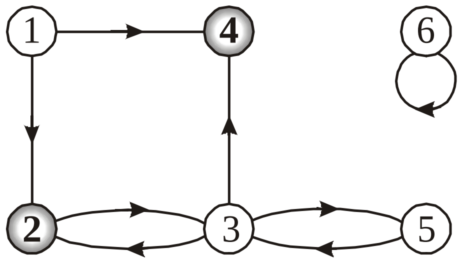
$$V_M^-(i) = \{ j \in M : \{j, i\} \in A \}$$

$d_M^+(i) = |V_M^+(i)|$ – ***stopień wyjściowy*** wierzchołka i względem M

$d_M^-(i) = |V_M^-(i)|$ – ***stopień wejściowy*** wierzchołka i względem M

$d_M(i) = d_M^+(i) + d_M^-(i)$ – ***stopień*** wierzchołka i względem M

Przykład wyznaczania stopni wierzchołków w grafie skierowanym



$V^+(3) = \{2, 4, 5\} \Rightarrow d^+(3) = 3$; $V^-(3) = \{2, 5\} \Rightarrow d^-(3) = 2$;

zatem $d(3) = d^+(3) + d^-(3) = 5$

$V^+(6) = \{6\} \Rightarrow d^+(6) = 1$; $V^-(6) = \{6\} \Rightarrow d^-(6) = 1$;

zatem $d(6) = d^+(6) + d^-(6) = 2$

dla $M = \{2, 4\}$: $d_M^+(3) = 2$, $d_M^-(3) = 1$, $d_M(3) = 3$

Twierdzenie **(lemat o uściskach dłoni)**

Dla dowolnego grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$ zachodzi

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|E|$$

Twierdzenie

Dla dowolnego grafu skierowanego $D = (V, A)$ zachodzi

$$\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |A|$$

Zatem dla grafu skierowanego $D = (V, A)$ także zachodzi

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|A|$$

Wniosek

W każdym grafie skierowanym lub nieskierowanym liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

MACIERZ INCYDENCJI

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, ..., n\}$

zbiór krawędzi $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\} \subseteq \{\{i, j\}: \mathrm{i, j} \in V\}$

Macierz incydencji grafu:

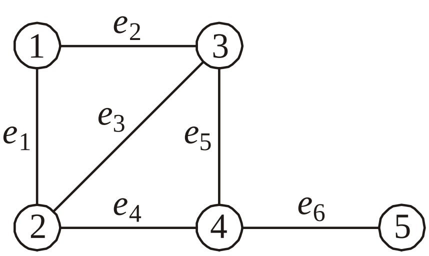
$$I(G) = [\, a_{ij} \,]_{i=1,...,n,\ j=1,...,m}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } i \in e_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy incydencji

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



$$\mathrm{I}_E = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ d(1) = 2 \\ d(2) = 3 \\ d(3) = 3 \\ d(4) = 3 \\ d(5) = 1 \end{array}$$

$$\boldsymbol{\Sigma\, d = 12}$$

Aby wykazać, że $\sum_{i \in V} d(i) = 2|E|$ wystarczy zsumować wiersze macierzy incydencji i policzyć w niej wszystkie jedynki.

Graf skierowany (bez pętli) $D = (V, A)$

zbiór wierzchołków $V = \{ 1, 2, ..., n \}$

zbiór krawędzi $A = \{a_1, a_2,..., a_m \} \subseteq V \times V$

Macierz incydencji grafu skierowanego bez pętli:

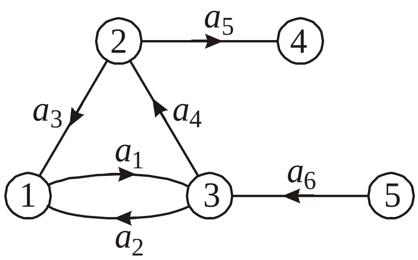
$$I(D) = [\, a_{ij} \,]_{i=1,...,n,\ j=1,...,m}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jesli} \quad a_j = (k,i) \\ 1 & \text{jesli} \quad a_j = (i,k) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy incydencji

$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2), (2, 4), (5, 3)\}$



$$\mathrm{I}_A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$d^+(1) = 1,\ d^-(1) = 2,\ d(1) = 3$
$d^+(2) = 2,\ d^-(2) = 1,\ d(2) = 3$
$d^+(3) = 2,\ d^-(3) = 2,\ d(3) = 4$
$d^+(4) = 0,\ d^-(4) = 1,\ d(4) = 1$
$d^+(5) = 1,\ d^-(5) = 0,\ d(5) = 1$

$\Sigma\, d^+ = 6,\ \Sigma\, d^- = 6,\ \Sigma\, d = 12$

Aby wykazać, że $\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |A|$ wystarczy policzyć ile jest niezerowych elementów o jednakowych znakach w wierszach macierzy incydencji i w całej macierzy.

MACIERZ SĄSIEDZTWA WIERZCHOŁKÓW

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$

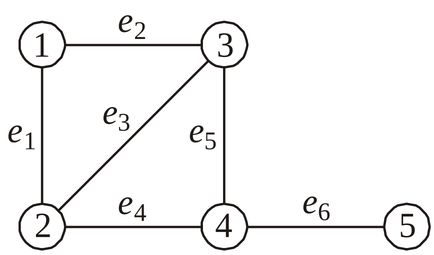
Macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu:

$$B(G) = [\, b_{ij} \,]_{i=1,\ldots,n,\; j=1,\ldots,n}$$

$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy sąsiedztwa wierzchołków

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$$B_E = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & d(1) = 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & d(2) = 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & d(3) = 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & d(4) = 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d(5) = 1 \\ \hline & d(1) = 2 & d(2) = 3 & d(3) = 3 & d(4) = 3 & d(5) = 1 & \end{array}$$

Graf skierowany $D = (V, A)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$

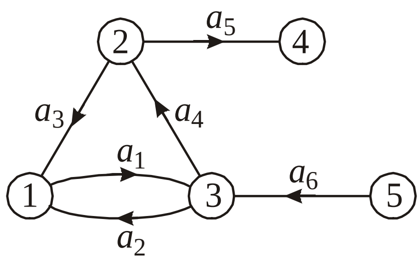
Macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu:

$$B(D) = [\, b_{ij} \,]_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } (i, j) \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy sąsiedztwa wierzchołków

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$$B_A = \begin{array}{c|ccccc|l} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d^+(1) = 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & d^+(2) = 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & d^+(3) = 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d^+(4) = 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d^+(5) = 1 \\ \hline & d^-(1) = 2 & d^-(2) = 1 & d^-(3) = 2 & d^-(4) = 1 & d^-(5) = 0 & \end{array}$$

TYPY GRAFÓW

Dwa grafy (nieskierowane) $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ są ***izomorficzne***, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $f : V \xrightarrow{1-1} V'$, takie że dla dowolnej pary wierzchołków $i, j \in V$ zachodzi

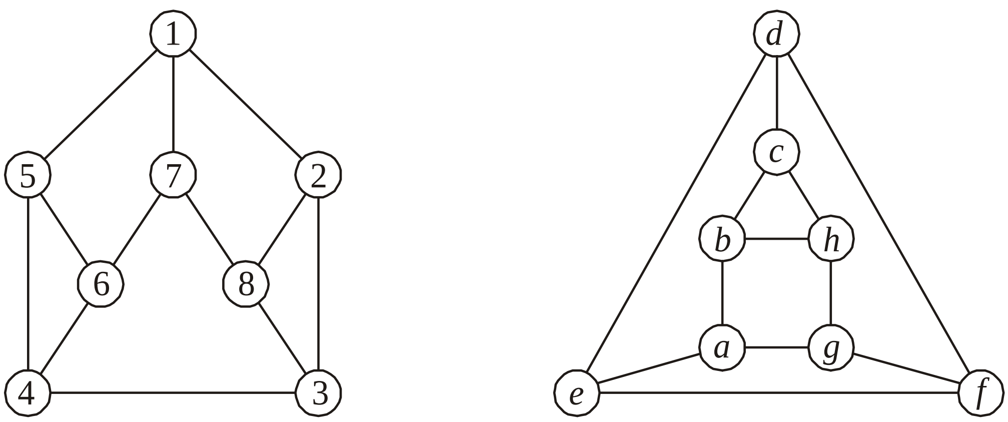
$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow \{f(i), f(j)\} \in E'$$

Dla grafów skierowanych $D = (V, A)$ i $D' = (V', A')$ odpowiednio:

$$(i, j) \in A \Leftrightarrow \big(f(i), f(j)\big) \in A'$$

Izomorfizm grafów zapisujemy $G \cong G'$

Przykład grafów izomorficznych



Izomorfizm:

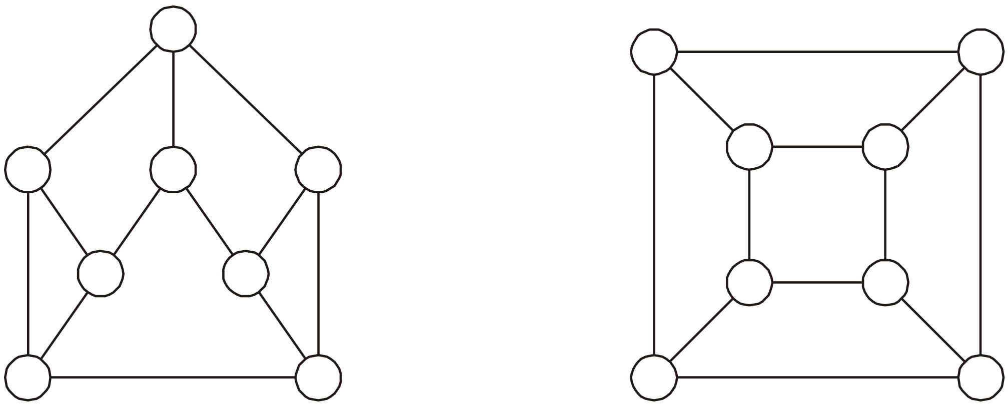
i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	a	b	c	d	e	f	g	h

Graf nazywamy ***regularnym***, jeśli wszystkie jego wierzchołki mają ten sam stopień.

Uwaga

Dwa grafy regularne o tej samej liczbie wierzchołków i tym samym stopniu wierzchołków nie muszą być izomorficzne.

Przykład ilustrujący brak izomorfizmu



TYPY GRAFÓW c.d.

Graf nazywamy ***dwudzielnym***, jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory, tak że żadne dwa wierzchołki należące do tego samego podzbioru nie są sąsiednie.

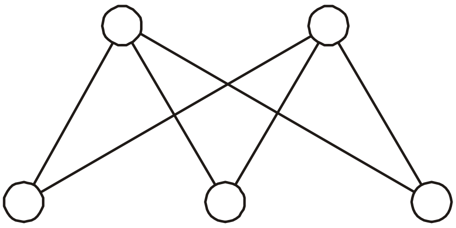
$$G = (V_1 \cup V_2 , E)$$

$$|V_1| = \mathrm{r} , \qquad |V_2| = \mathrm{s} , \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

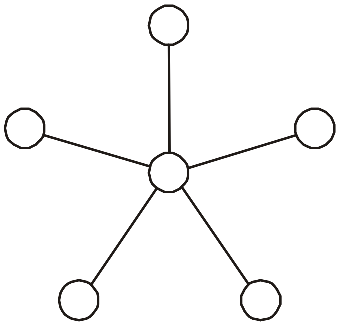
Graf $G = (V_1 \cup V_2 , E)$ nazywamy ***pełnym grafem dwudzielnym***, jeśli jest dwudzielny i zawiera wszystkie krawędzie łączące wierzchołki ze zbioru V_1 z wierzchołkami ze zbioru V_2.

Oznaczenie pełnego grafu dwudzielnego – $\boldsymbol{K_{r,\,s}}$

Przykłady pełnych grafów dwudzielnych

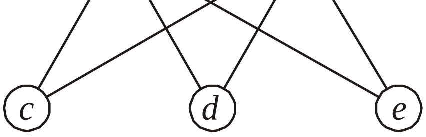


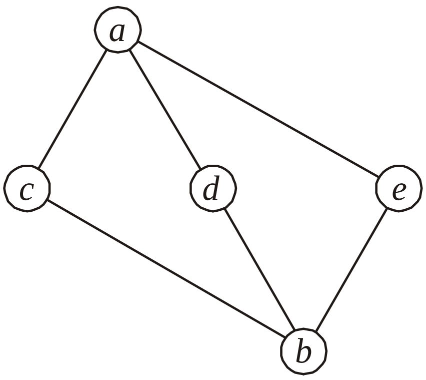
$K_{2,\,3}$



$K_{1,\,5}$

Graf jest ***planarny*** (płaski), jeśli można go narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.



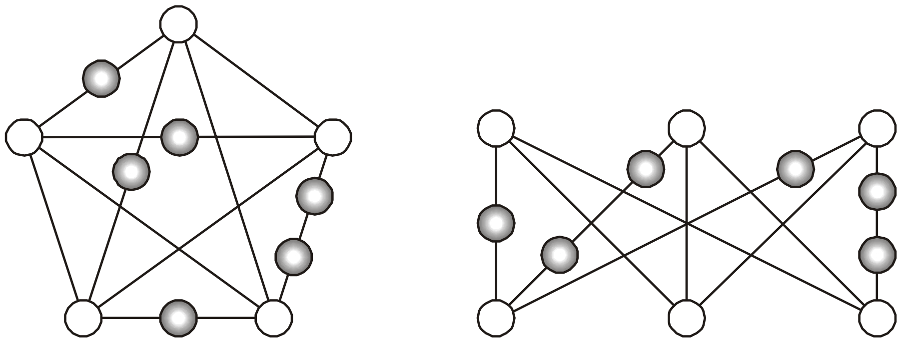


Twierdzenie (Kuratowski)

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu, który można otrzymać z grafów K_5 lub $K_{3,3}$ przez podział krawędzi wierzchołkami o stopniu 2.

Grafy, które można otrzymać z danego grafu przez podział krawędzi, polegający na wstawieniu dodatkowych wierzchołków stopnia 2, nazywamy grafami homeomorficznymi (z jęz. łac. „*podobnego kształtu*”) z tym grafem.

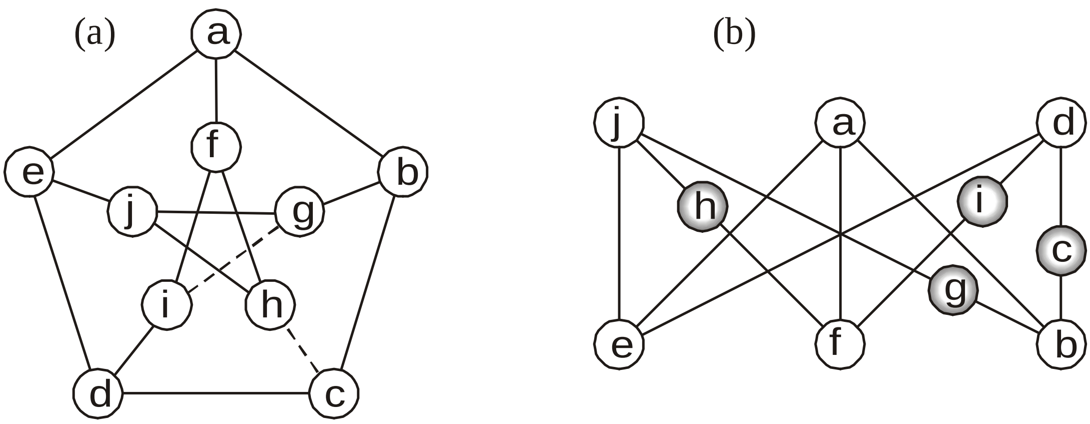
Przykłady grafów homeomorficznych z K_5 i $K_{3,3}$



Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980)

Przykład zastosowania twierdzenia Kuratowskiego

Tzw. graf Petersena:



$\Rightarrow$ graf Petersena nie jest planarny

DROGI i CYKLE w grafach

Dla grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$

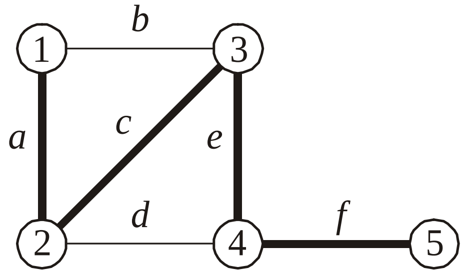
drogą z wierzchołka $\boldsymbol{v_0 \in V}$ **do** $\boldsymbol{v_t \in V}$ nazywamy ciąg

(naprzemienny) wierzchołków i krawędzi grafu:

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{t-1}, e_t, v_t),$$

spełniający warunek $e_i = \{ v_{i-1}, v_i \}$ dla $i = 1, ..., t$

Przykład drogi w grafie



droga: (1, *a*, 2, *c*, 3, *e*, 4, *f*, 5), $t = 4$

Dla drogi ($v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{t-1}, e_t, v_t$):

wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$ nazywamy jej ***początkiem***, wierzchołek $\boldsymbol{v_t}$ – jej ***końcem*** a liczbę ***t*** nazywamy ***długością*** drogi.

Drogę można utożsamiać dla uproszczenia

z ciągiem wierzchołków sąsiednich ($v_0, v_1, ..., v_t$)

lub ciągiem krawędzi zależnych ($e_1, ..., e_t$)

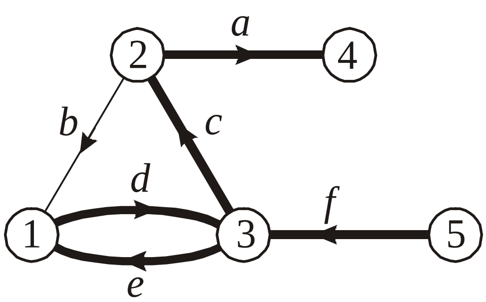
Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$

drogą z wierzchołka $\boldsymbol{v_0 \in V}$ do $\boldsymbol{v_t \in V}$ nazywamy ciąg (naprzemienny) wierzchołków i łuków grafu:

$$(v_0, a_1, v_1, a_2, ..., v_{t-1}, a_t, v_t),$$

spełniający warunek $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ dla $i = 1, ..., t$

Przykład drogi w grafie skierowanym



droga (5, *f*, 3, *e*, 1, *d*, 3, *c*, 2, *a*, 4), $t = 5$

Drogę w grafie skierowanym można utożsamiać dla uproszczenia

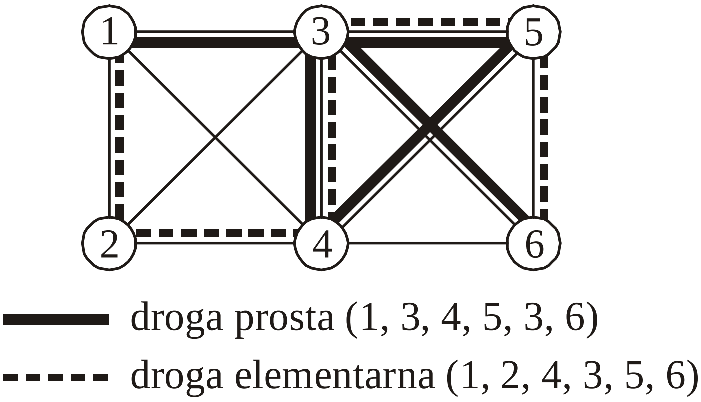
z ciągiem odpowiednio skierowanych łuków zależnych ($e_1, ..., e_t$)

---

droga prosta - droga, w której wszystkie krawędzie (łuki) w ciągu są różne

droga elementarna - droga, w której wszystkie wierzchołki w ciągu są różne

Przykłady dróg w grafie



Cyklem nazywamy drogę, dla której $\boldsymbol{v_0 = v_t}$ (droga zamknięta) i $\boldsymbol{t > 0}$

Cyklem elementarnym nazywamy cykl, w którym wierzchołki

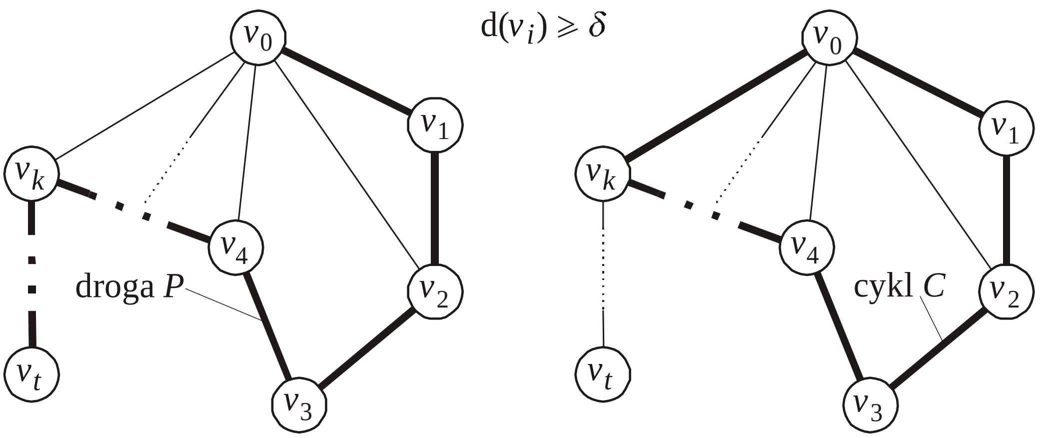
$v_1, v_2, ..., v_{t-1}$ są <u>różne</u>

<u>Twierdzenie</u> (Dirac, 1952)

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem, w którym minimalny stopień wierzchołka jest równy δ, to

- w grafie G istnieje droga <u>elementarna</u> o długości co najmniej δ,
- dla $\delta \geq 2$ w grafie G istnieje cykl <u>elementarny</u> o długości co najmniej $\delta + 1$

<u>Dowód</u>



Niech $P = (v_0, v_1, ..., v_t)$ będzie drogą elementarną w grafie G o maksymalnej długości (tzn. nie można jej przedłużyć na żadnym końcu). Wówczas wszystkie wierzchołki sąsiednie z v_0 muszą należeć do P.

Niech $k = \max \{ i : \{v_0, v_i\} \in E \}$.

Z założenia o maksymalnej długości drogi wynika, że $k \geq d(v_0) \geq \delta$.

Zatem droga P ma długość co najmniej δ.

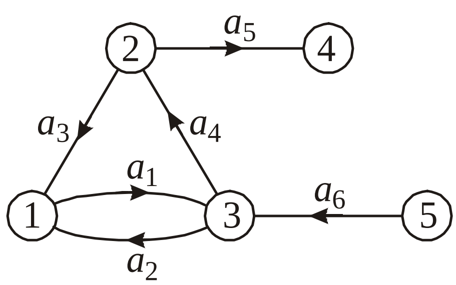
Ponadto, jeśli $\delta \geq 2$, to $C = (v_0, v_1, ..., v_k, v_0)$ jest cyklem elementarnym o długości co najmniej $\delta + 1$. ■

Graf (nieskierowany) nazywamy ***spójnym***, jeśli dla <u>każdej</u> pary wierzchołków u i v istnieje w nim droga z u do v.

Graf skierowany jest ***spójny*** (*słabo spójny*), jeśli jego pochodny graf nieskierowny jest spójny.

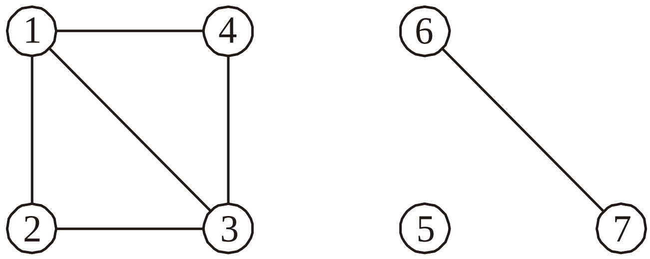
Graf skierowany jest ***silnie spójny***, jeśli dla <u>każdej</u> pary wierzchołków u i v istnieje w nim droga z u do v.

Przykład skierowanego grafu spójnego, ale nie silnie spójnego



Składową spójną grafu nazywamy taki jego podgraf, który jest spójny i nie jest podgrafem innego grafu spójnego.

Przykład grafu o 3 *składowych spójnych*



Twierdzenie

Dla grafu o n wierzchołkach i k składowych spójnych liczba krawędzi m jest ograniczona przez nierówność:

$$(n-k) \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Wniosek

W grafie spójnym liczba krawędzi m spełnia nierówność:

$$(n-1) \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Uwaga

- m jest maksymalne dla grafu pełnego K_n : $m = \frac{n(n-1)}{2}$
- m jest minimalne dla drzewa : $m = n - 1$

Warunek konieczny i dostateczny dwudzielności grafu

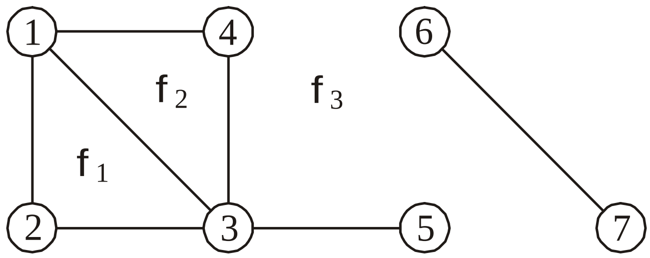
Twierdzenie

Graf o n wierzchołkach, gdzie $n \geq 2$, jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

Zauważmy, że w grafie dwudzielnym każdy cykl musi mieć parzystą długość.

Warunki konieczne planarności grafu

Rozważmy rysunek grafu planarnego $G = (V, E)$ bez przecięć krawędzi:



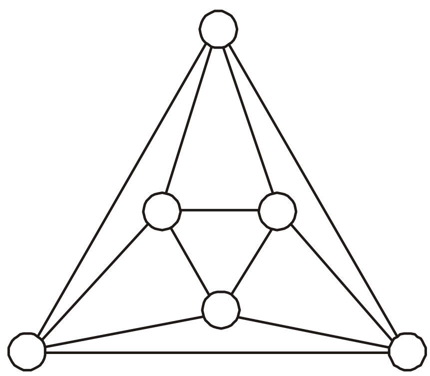
Na tym rysunku można wyróżnić podzbiory punktów płaszczyzny, które mają dwie cechy:

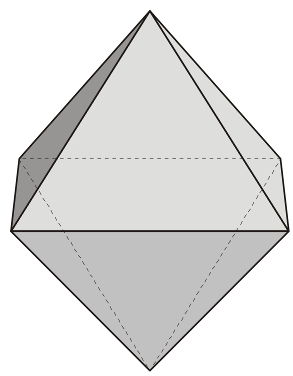
- każde dwa punkty z tego samego zbioru można połączyć krzywą na płaszczyźnie, nie przecinając żadnej z krawędzi grafu;
- każdy z tych podzbiorów jest maksymalny w sensie relacji zawierania.

Takie podzbiory nazywamy ***ścianami*** grafu planarnego (np. f_1, f_2 i f_3). Dokładnie jedna ze ścian jest „nieograniczona”.

Przykład interpretacji pojęcia „ściany” dla grafu planarnego

Graf ośmiościanu foremnego (jeden z tzw. grafów platońskich):





Twierdzenie

Jeśli graf o n wierzchołkach, m krawędziach, k składowych spójnych i f ścianach jest planarny, to $\boldsymbol{n - m + f = k + 1}$

Wniosek

Jeśli graf planarny jest spójny, to $\boldsymbol{n - m + f = 2}$ (tzw. wzór Eulera)

Wniosek

Jeśli graf jest planarny i $n \geq 3$, to $\boldsymbol{m \leq 3n - 6}$

Wniosek

Jeśli graf dwudzielny jest planarny i $n \geq 3$, to $\boldsymbol{m \leq 2n - 4}$

Wniosek

Każdy graf planarny musi zawierać co najmniej jeden wierzchołek o stopniu mniejszym niż 6.

PRZESZUKIWANIE GRAFÓW

Przeszukaniem grafu nazywamy dokonanie systematycznego przeglądu grafu w celu wymienienia kolejno wszystkich jego wierzchołków, bądź krawędzi.

Rozważmy spójny graf $G = (V, E)$ o uporządkowanym zbiorze wierzchołków – przyjmijmy dla prostoty, że jego zbiór wierzchołków to $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Wynikiem przeszukania grafu będzie ciąg $\left(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}\right)$ zawierający bez powtórzeń wszystkie jego wierzchołki.

Obie przedstawione metody oparte są na badaniu zbiorów wierzchołków sąsiednich, dopisywaniu wierzchołków do wyznaczanego ciągu i nadawaniu lub usuwaniu etykiet z wierzchołków.

Metoda przeszukiwania grafu w głąb

W trakcie działania metody kolejnym wierzchołkom będą nadawane etykiety „*zamknięty*”.

Rozpoczynamy od wskazania pierwszego wierzchołka w ciągu – v_0.

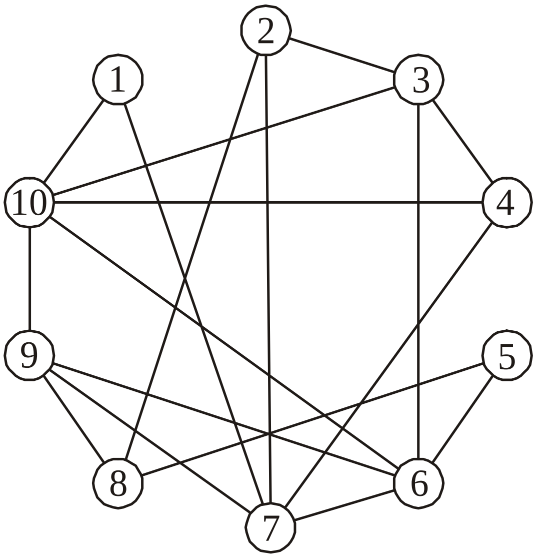
---

1. wstaw v_0 jako pierwszy element ciągu,
2. powtarzaj co następuje, aż do nadania wierzchołkowi v_0 etykiety „*zamknięty*”:
   - 2.1. wybierz z aktualnego ciągu ostatni z jego wierzchołków, który nie ma jeszcze etykiety „*zamknięty*”,
   - 2.2. jeśli dla wybranego wierzchołka zbiór wierzchołków sąsiednich, które jeszcze nie zostały dopisane do ciągu jest pusty, to nadaj temu wierzchołkowi etykietę „*zamknięty*”, w przeciwnym przypadku dopisz do ciągu pierwszy w kolejności z jego wierzchołków sąsiednich, które jeszcze nie został umieszczone w ciągu.

Uwaga:

przed rozpoczęciem przeszukiwania grafu żaden z jego wierzchołków nie może mieć etykiety „zamknięty”.

Przykład przeszukania grafu metodą w głąb



Jeśli rozpoczynamy od wierzchołka 5, to zostaje wyznaczony ciąg wierzchołków grafu (5, 6, 3, 2, 7, 1, 10, 4, 9, 8)

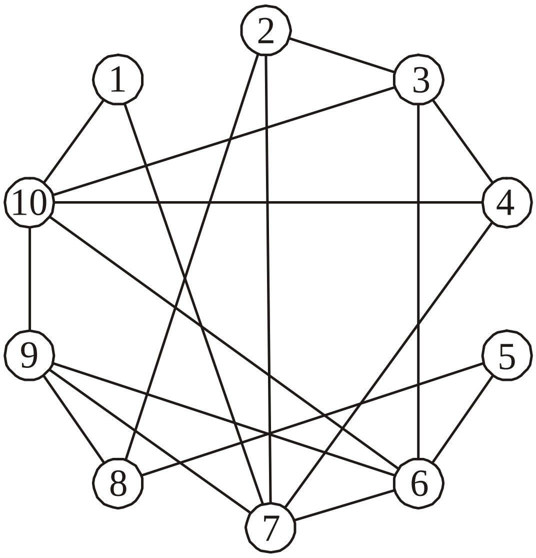
Metoda przeszukiwania grafu wszerz

W trakcie działania metody będą z kolejnych wierzchołków usuwane etykiety „*nowy*”.

Rozpoczynamy od wskazania pierwszego wierzchołka w ciągu – v_0.

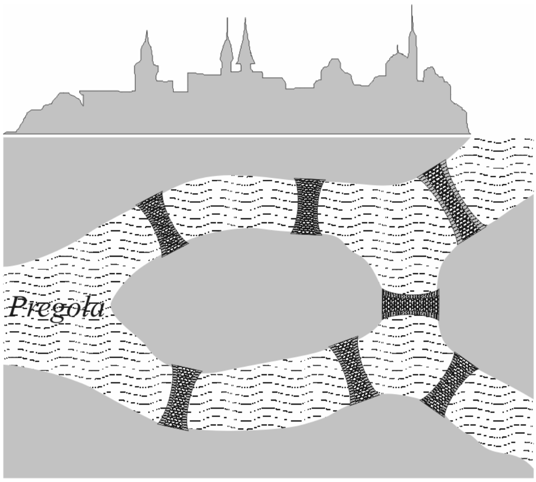
1. nadaj etykietę „*nowy*” wszystkim wierzchołkom drzewa,
2. wstaw v_0 jako pierwszy element ciągu,
3. dopóki w tworzonym ciągu występuje wierzchołek z etykietą „*nowy*”, powtarzaj co następuje:
   3.1. wybierz z aktualnego ciągu pierwszy z wierzchołków, które mają jeszcze etykietę „*nowy*”, dodaj do ciągu kolejno wszystkie jego wierzchołki sąsiednie i usuń z tego wierzchołka etykietę „*nowy*”.

Przykład przeszukania grafu metodą wszerz

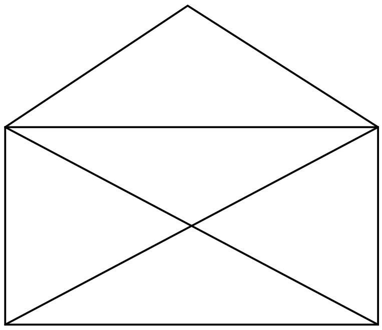


Jeśli rozpoczynamy od wierzchołka 5, to zostaje wyznaczony ciąg wierzchołków grafu (5, 6, 8, 3, 7, 9, 10, 2, 4, 1)

DROGI i CYKLE EULERA w grafach



Czy istnieje zamknięta droga spaceru przechodząca przez wszystkie mosty w Królewcu dokładnie jeden raz?



Czy można narysować podaną figurę nie odrywając ołówka od papieru i nie rysując dwukrotnie żadnego odcinka?

Drogą Eulera w grafie (skierowanym) nazywamy taką drogę prostą, która zawiera wszystkie krawędzie (łuki) grafu.

Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę Eulera.

Graf, który ma cykl Eulera nazywamy ***grafem eulerowskim***, a taki, który ma drogę Eulera nazywamy ***grafem półeulerowskim***.

Twierdzenie (Euler, 1736)

Spójny graf *G* (nieskierowany) ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka w *G* jest parzysty.

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Dowód

(⇒) Załóżmy, że graf ma cykl Eulera. Jeśli będziemy przechodzili wzdłuż krawędzi tego cyklu, usuwając je po przejściu, to w każdym przechodzonym wierzchołku stopień będzie malał o 2. Ponieważ ten cykl zawiera wszystkie krawędzie grafu dokładnie raz, to po przejściu całego cyklu wszystkie wierzchołki będą stopnia 0. Zatem na początku wszystkie musiały mieć stopień parzysty.

(⇐) *Indukcja względem liczby krawędzi m*.

Dla $m = 3$ twierdzenie oczywiście zachodzi.

Rozważmy graf o $m > 3$, zakładając, że każdy graf o mniejszej liczbie krawędzi ma cykl Eulera.

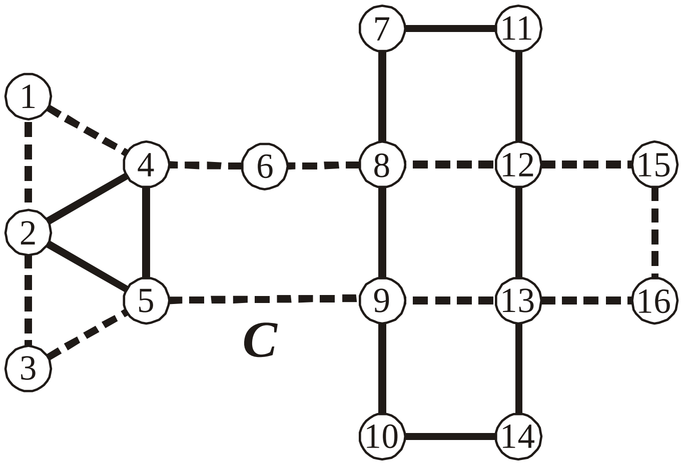
Ze spójności grafu i parzystości stopni wierzchołków wynika, że minimalny stopień wierzchołka jest równy 2. Zatem graf musi zawierać cykl elementarny o długości co najmniej 3 (tw. Diraca). Wybierzmy taki cykl i oznaczmy go przez *C*. Jeśli cykl *C* zawiera każdą krawędź grafu, to dowód jest zakończony.

Jeśli nie, to usuwamy z grafu krawędzie należące do cyklu *C*. Powstaje podgraf *H*, który ma mniej krawędzi niż graf *G* (może nie być spójny), ale nadal każdy wierzchołek ma w nim stopień parzysty (po usunięciu cyklu *C* stopień zmniejsza się o 0 lub 2). Na mocy założenia indukcyjnego w każdej składowej spójnej podgrafu *H* istnieje cykl Eulera. Ponadto ze spójności grafu *G* wynika, że każda składowa podgrafu *H* ma wierzchołek wspólny z cyklem *C*.

Zatem cykl Eulera w grafie *G* można skonstruować przechodząc kolejne krawędzie cyklu *C* w ustalonym kierunku od wybranego wierzchołka początkowego i włączając do drogi cykle Eulera w napotkanych składowych spójnych podgrafu *H*. W każdym wierzchołku, który nie jest w *H* wierzchołkiem izolowanym, przechodzimy krawędzie cyklu Eulera w tej składowej podgrafu *H*, która zawiera ten wierzchołek. Po obejściu cyklu Eulera w składowej podgrafu *H* kontynuujemy poruszanie się wzdłuż cyklu *C* i wracamy na końcu do wierzchołka początkowego. Obchodzimy w ten sposób dokładnie jeden raz wszystkie krawędzie grafu *G*.

■

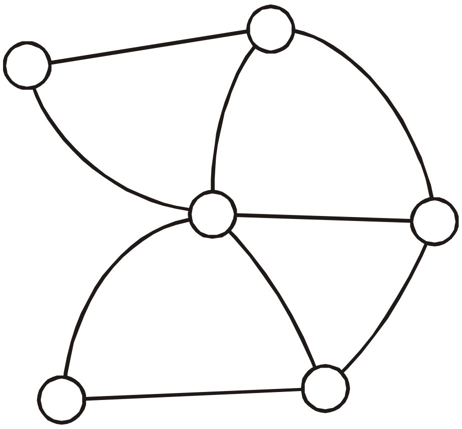
Przykład rekurencyjnego wyznaczania cyklu Eulera



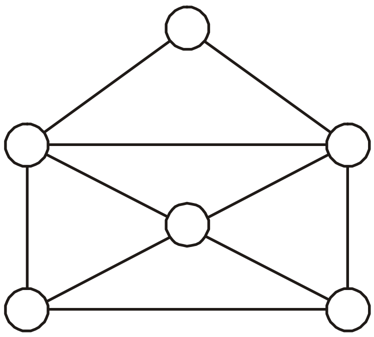
Wniosek (z tw. Eulera)

Graf spójny, który ma nie więcej niż dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, ma drogę Eulera.

Grafy reprezentujące przykładowe problemy („spacer” i ‘koperta”)

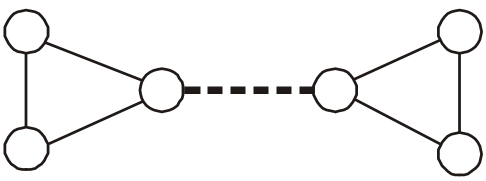


nie ma drogi Eulera



jest droga E., ale nie ma cyklu

Mostem nazywamy taką krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę składowych spójnych tego grafu.

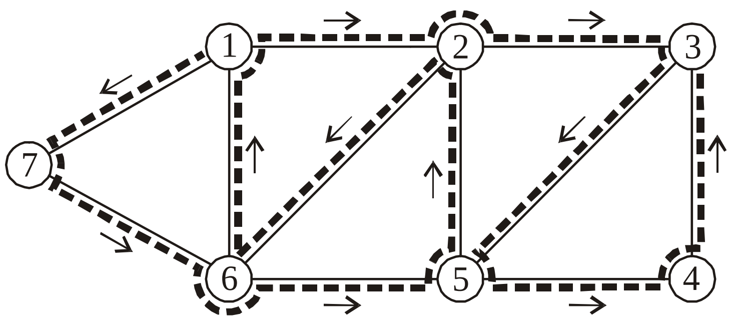


Prosty algorytm wyznaczania drogi Eulera (tzw. *alg. Fleury'ego*)

Budujemy iteracyjnie ciąg krawędzi grafu (drogę lub cykl).

1. Wybierz dowolny wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$ o nieparzystym stopniu, o ile taki istnieje; w przeciwnym przypadku wybierz dowolny wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$; podstaw $\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{v_0}$;
2. Dopóki są w grafie krawędzie incydentne z $\boldsymbol{v}$ wykonuj:
   2.1. Jeśli jest dokładnie jedna krawędź incydentna z $\boldsymbol{v}$: $\{v, w\}$, to ją wybierz;
   2.2. Jeśli istnieje więcej niż jedna krawędź incydentna z v, to wybierz dowolną krawędź incydentną $\{v, w\}$, która nie jest mostem;
   2.3. wstaw wybraną krawędź jako kolejny wyraz ciągu i usuń ją z grafu; podstaw $\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{w}$;
3. Jeśli ciąg zawiera wszystkie krawędzie grafu, to została wyznaczona w nim droga lub cykl Eulera, a jeśli nie, to graf nie był spójny i algorytm wyznaczył drogę lub cykl Eulera w jego składowej spójnej, która zawiera wybrany początkowo wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$.

Przykład działania algorytmu Fleury'ego



DROGI i CYKLE EULERA w grafach skierowanych

Twierdzenie

Spójny graf skierowany ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$.

Wniosek

Spójny graf skierowany ma drogę Eulera, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$, albo gdy istnieją dokładnie dwa wierzchołki v_1 i v_2 nie spełniające tego warunku, dla których zachodzi $d^+(v_1) - d^-(v_1) = d^-(v_2) - d^+(v_2) = 1$.

DROGI i CYKLE HAMILTONA w grafach

Rozważmy graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

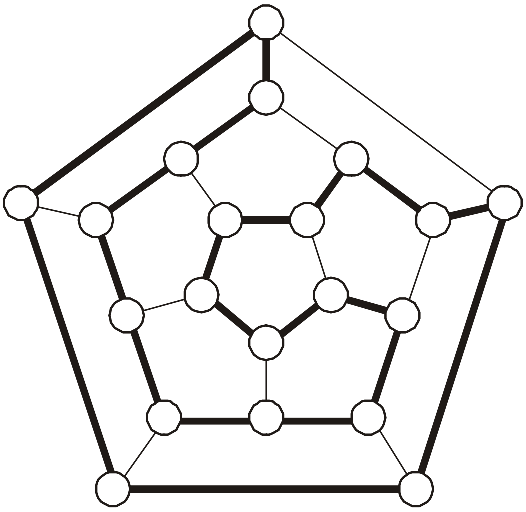
Drogą Hamiltona w grafie G nazywamy taką drogę elementarną, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu.

Cyklem Hamiltona w grafie G nazywamy taki cykl elementarny, który zawiera wszystkie wierzchołki grafu (jest zamkniętą drogą Hamiltona).

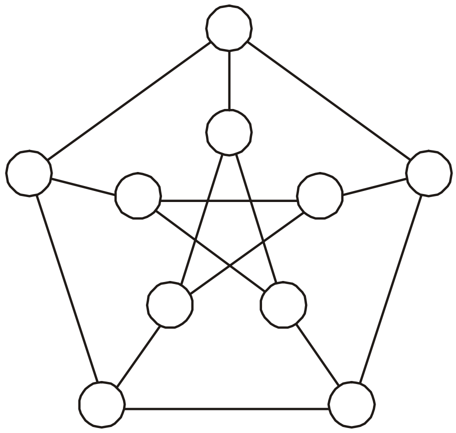
Długość cyklu Hamiltona jest równa $| V |$.

Graf, który ma cykl Hamiltona nazywamy ***grafem hamiltonowskim***, a taki, który ma drogę Hamiltona nazywamy ***półhamiltonowskim***.

Przykłady



graf dwunastościanu foremnego
(graf platoński)
jest hamiltonowski

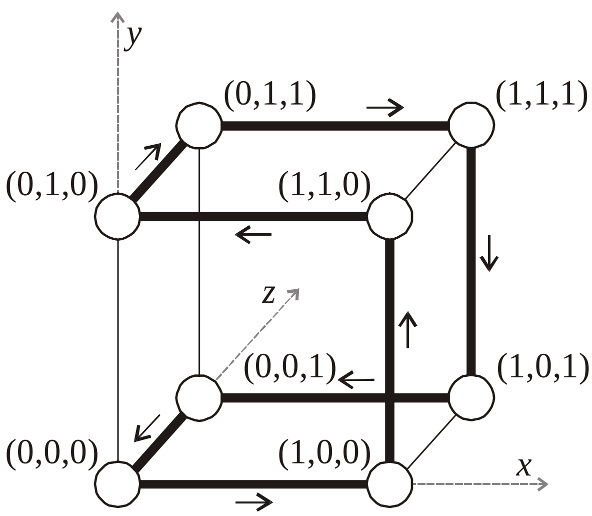


graf Petersena
nie jest hamiltonowski

Przykład cyklu Hamiltona w grafie sześcianu (*związek z kodem Graya*)

Kod Graya rzędu trzeciego (n =3):

(0,0,0) (1,0,0) (1,1,0) (0,1,0) (0,1,1) (1,1,1) (1,0,1) (0,0,1)



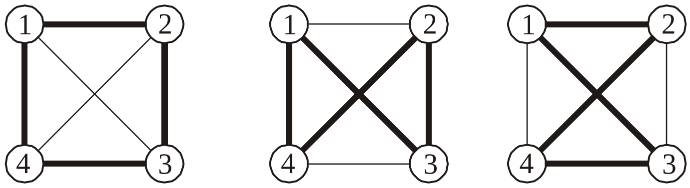
(nadawanie etykiet procesorom połączonym w tzw. kostkę)

Graf pełny K_n jest hamiltonowski dla każdego $n \geq 3$

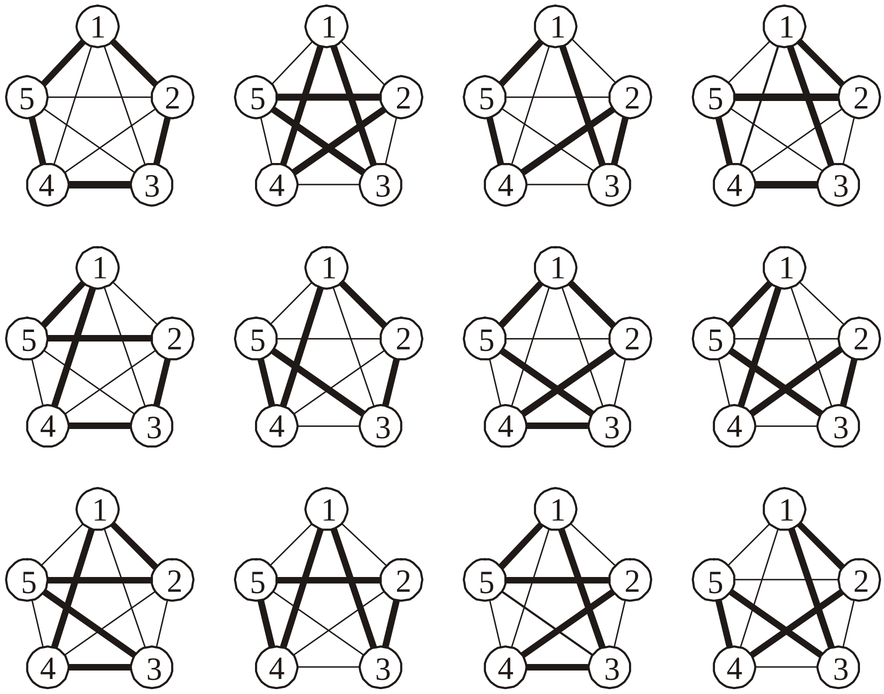
i zawiera $\frac{(n-1)!}{2}$ cykli Hamiltona.

Przykład cykli Hamiltona w grafie K_4 i K_5

K_4: $\frac{(4-1)!}{2} = 3$



K_5: $\frac{(5-1)!}{2} = 12$



Twierdzenie

Dla każdego grafu <u>dwudzielnego</u> $G = (V_1 \cup V_2, E)$ zachodzi:

- jeśli G ma cykl Hamiltona, to $|V_1| = |V_2|$,
- jeśli G ma drogę Hamiltona, to $\big||V_1| - |V_2|\big| \leq 1$.

Dla każdego <u>pełnego</u> grafu <u>dwudzielnego</u>, w którym $|V_1 \cup V_2| \geq 3$ zachodzi:

- jeśli $|V_1| = |V_2|$, to G ma cykl Hamiltona,
- jeśli $\big||V_1| - |V_2|\big| \leq 1$, to G ma drogę Hamiltona.

Warunki <u>dostateczne</u> istnienia cyklu Hamiltona

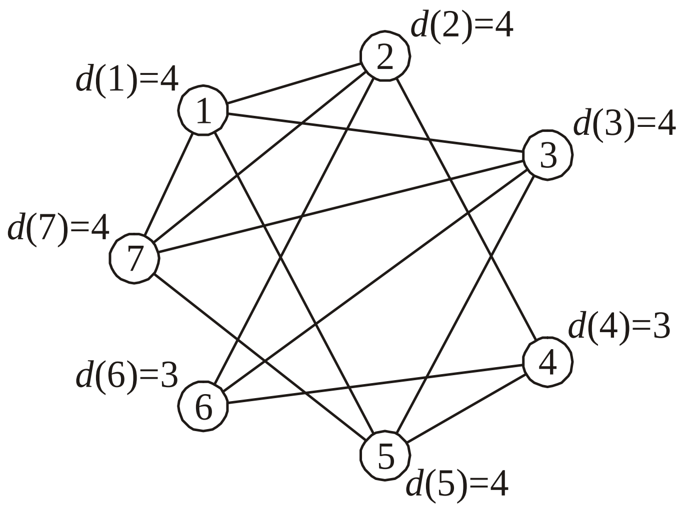
<u>Twierdzenie</u> (Ore, 1960)

Graf (nieskierowany) o n wierzchołkach dla $n \geq 3$, w którym

$d(v) + d(w) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków v i w

niepołączonych krawędzią (niezależnych), jest hamiltonowski

Przykład grafu hamiltonowskiego spełniającego warunek Ore

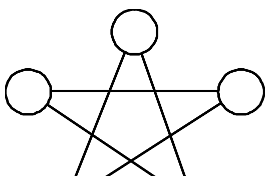


Najniższy stopień mają wierzchołki 4 i 6.

Dla wierzchołków niezależnych z w. 4: $d(v) + d(4) = 7 \geq n = 7$

Dla wierzchołków niezależnych z w. 6: $d(v) + d(6) = 7 \geq n = 7$

Przykład grafu hamiltonowskiego, w którym warunek Ore nie jest spełniony

Dla grafu:  zachodzi $d(v) + d(w) = 4 < n = 5$

dla każdej pary wierzchołków v i w niepołączonych krawędzią,

a cykl Hamiltona oczywiście w nim istnieje.

Wniosek (twierdzenie Diraca, 1952)

Jeśli graf (nieskierowany) ma $n \geq 3$ wierzchołków i $d(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka, to graf ten jest hamiltonowski.

Dowód

$\forall v \in V: \ d(v) \geq \frac{n}{2} \ \Rightarrow \ \forall u, w \in V: \ d(u) + d(w) \geq n$ ■

Wniosek

Jeśli graf ma $n \geq 3$ wierzchołków i co najmniej $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi, to jest hamiltonowski.

Dowód

Załóżmy, że graf $G = (V, E)$ ma $|E| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi.

Wybierzmy $u, v \in V$ takie, że $\{u, v\} \notin E$ i usuńmy z grafu wierzchołki u i v oraz wszystkie krawędzie z nimi incydentne.

Zatem usunęliśmy $d(u) + d(v)$ krawędzi i 2 wierzchołki.

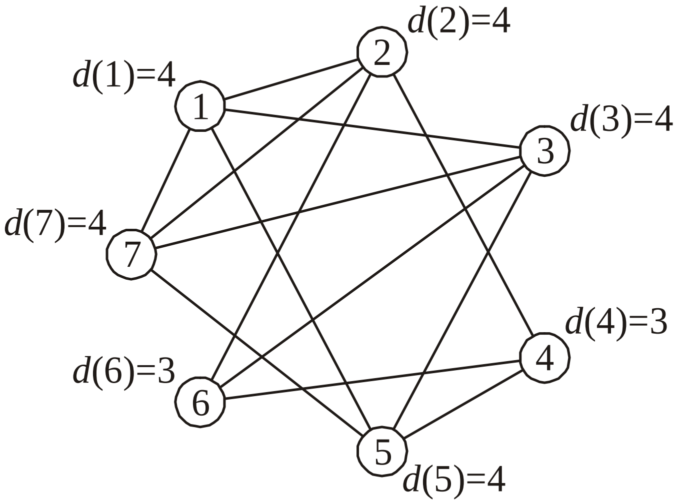
Otrzymany podgraf $G' = (V', E')$ jest na pewno podgrafem K_{n-2},

a zatem ma nie więcej niż $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ krawędzi.

Mamy więc: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - d(u) - d(v) \leq |E'| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Stąd $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 2 = n \leq d(u) + d(v)$ i spełnione są założenia twierdzenia Ore. ■

Przykład grafu hamiltonowskiego (c.d.)



Warunek Ore jest spełniony (patrz poprzedni przykład).

Warunek Diraca nie jest spełniony, bo np. $d(4) = 3 < \frac{n}{2} = 3{,}5$.

Warunek na liczbę krawędzi także nie jest spełniony,

bo $m = 13 < \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 = 17$.

W grafie G o n wierzchołkach uporządkujmy stopnie wszystkich wierzchołków w ciąg niemalejący:

$$\big(d_1(G), d_2(G), ..., d_n(G)\big), \qquad d_1(G) \le d_2(G) \le ... \le d_n(G);$$

ciąg ten nazywamy ***sekwencją wstępującą*** stopni wierzchołków.

Ciąg liczb naturalnych $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nazywamy ***ciągiem hamiltonowskim***, jeśli każdy graf nieskierowany G o n wierzchołkach, którego sekwencja wstępująca stopni wierzchołków spełnia warunek

$$d_i(G) \ge a_i\ , \ \ i = 1, 2, ..., n\ ,$$

jest grafem hamiltonowskim.

Twierdzenie (Chvátal, 1972)

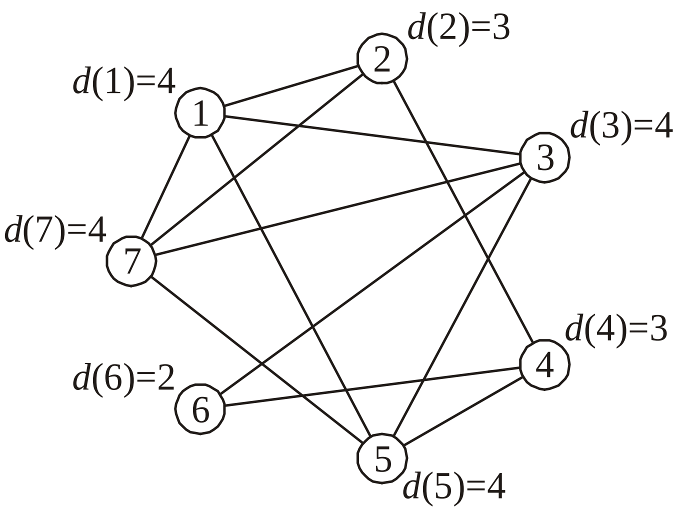
Ciąg liczb naturalnych $(a_1, a_2, ..., a_n)$,

w którym $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n < n$ dla $n \ge 3$, jest hamiltonowski

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i < \frac{n}{2}$ spełniona jest implikacja:

$$a_i \le i \Rightarrow a_{n-i} \ge n - i .$$

Przykład grafu hamiltonowskiego



Sekwencja wstępująca stopni wierzchołków: (2, 3, 3, 4, 4, 4, 4).

Zbadajmy, czy jest ona ciągiem hamiltonowskim.

$i = 1$: $a_1 = 2 > 1 \Rightarrow a_6 = 4 < 6$; implikacja prawdziwa $(0 \Rightarrow 0)$

$i = 2$: $a_2 = 3 > 2 \Rightarrow a_5 = 4 < 5$; implikacja prawdziwa $(0 \Rightarrow 0)$

$i = 3$: $a_3 = 3 \le 3 \Rightarrow a_4 = 4 \ge 4$; implikacja prawdziwa $(1 \Rightarrow 1)$

Zatem ciąg (2, 3, 3, 4, 4, 4, 4) jest ciągiem hamiltonowskim,

co oznacza, że graf o takiej sekwencji wstępującej ma cykl Hamiltona.

Warunek Ore nie jest spełniony, bo np. $d(2) + d(6) = 5 < n = 7$

DROGI i CYKLE HAMILTONA w grafach skierowanych

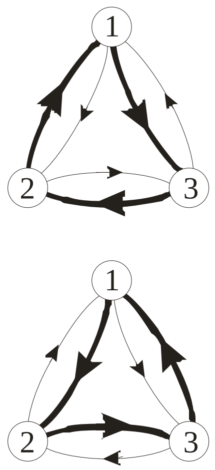
Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$

rozważmy zagadnienie istnienia cyklu ***elementarnego***, który zawiera wszystkie wierzchołki grafu, czyli ***cyklu Hamiltona***,

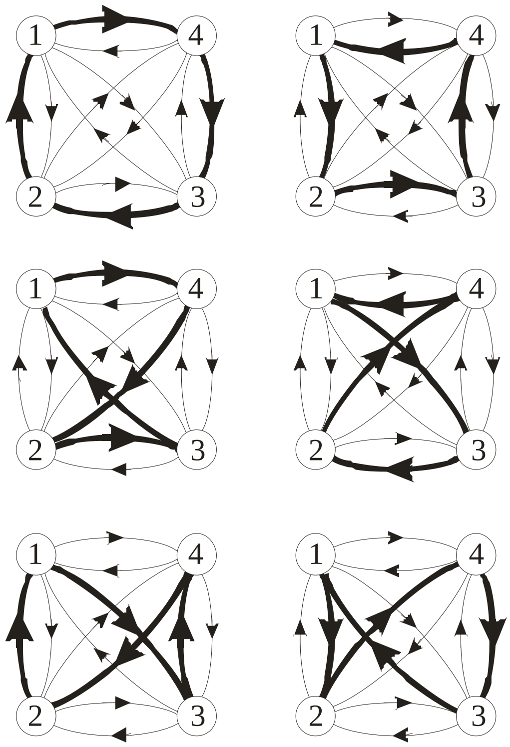
Graf skierowany pełny bez pętli D_n jest hamiltonowski dla każdego $n \geq 2$ i zawiera **$(n-1)!$** cykli Hamiltona.

Przykład cykli Hamiltona w grafie D_3 i D_4

D_3: $(3-1)! = 2$



D_4: $(4-1)! = 6$



<u>Twierdzenie</u> (Meyniel, 1973)

Jeśli D jest <u>silnie spójnym</u> grafem skierowanym bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach i dla dowolnej pary wierzchołków niezależnych zachodzi warunek $d(v) + d(w) \geq 2n - 1$, to graf D ma cykl Hamiltona.

(odpowiednik tw. Ore)

Wniosek (twierdzenie Nash-Williams, 1969)

Jeśli D jest grafem skierowanym bez pętli, w którym $d^+(v) \geq \frac{n}{2}$ i $d^-(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka v, to graf D ma cykl Hamiltona.

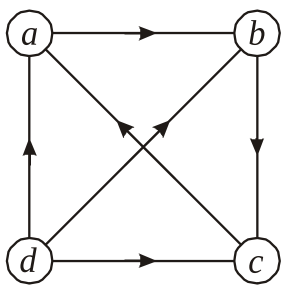
(odpowiednik tw. Diraca)

TURNIEJE

Graf skierowany bez pętli nazywamy ***turniejem***, jeśli dla każdej pary wierzchołków u i v zawiera on dokładnie jeden łuk:
albo (u, v), albo (v, u).

- turniej może reprezentować wyniki spotkań par uczestniczących w rozgrywkach sportowych typu „każdy z każdym” (bez remisów)

Przykład turnieju

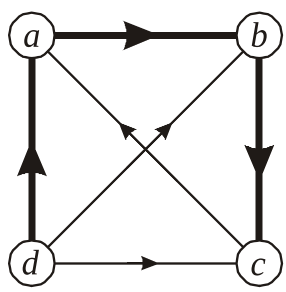


Twierdzenie (Rédei, 1934)

Każdy turniej zawiera drogę Hamiltona.

Przykład dróg Hamiltona w turnieju:

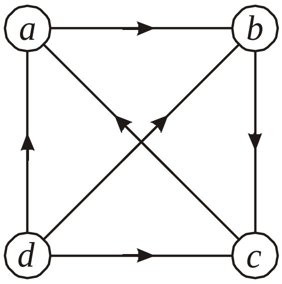
(d, a, b, c), (d, b, c, a) i (d, c, a, b)



Twierdzenie (Thomassen, 1982)

Każdy turniej zawiera drogę Hamiltona, która zaczyna się w wierzchołku o najwyższym stopniu wyjściowym i kończy w wierzchołku o najwyższym stopniu wejściowym.

Przykład turnieju bez cyklu Hamiltona

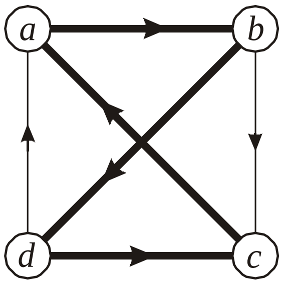


Ten turniej nie jest silnie spójny.

Twierdzenie (Camion, 1959)

Każdy silnie spójny turniej zawiera cykl Hamiltona.

Przykład cyklu Hamiltona w silnie spójnym turnieju



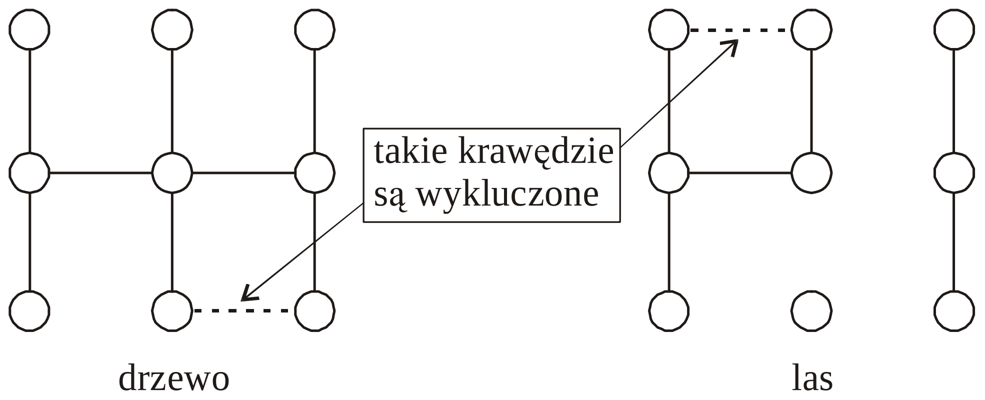
cykl Hamiltona: (a, b, d, c, a)

DRZEWA i LASY

Lasem nazywamy graf nieskierowany, który nie zawiera cykli elementarnych.

Drzewem nazywamy graf spójny, który nie zawiera cykli elementarnych.

Przykłady drzewa i lasu



Twierdzenie

Niech *G* będzie grafem nieskierowanym o n wierzchołkach.

Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

1. Graf *G* jest drzewem.
2. Graf *G* nie zawiera cykli elementarnych i ma $n-1$ krawędzi.
3. Graf *G* jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
4. Graf *G* jest spójny i każda krawędź jest mostem.
5. Dowolne dwa wierzchołki grafu *G* są połączone dokładnie jedną drogą.
6. Graf *G* nie zawiera cykli elementarnych, ale dołączenie dowolnej nowej krawędzi do *G* tworzy dokładnie jeden taki cykl.

Dowód

Dla $n = 1$ równoważność stwierdzeń jest oczywista.

Załóżmy zatem, że $n \geq 2$.

(1. $\Rightarrow$ 2.) Indukcja względem liczby wierzchołków; załóżmy, że implikacja zachodzi dla dowolnego drzewa o liczbie wierzchołków nie większej od $n-1$. Pokażemy, że zachodzi dla n. Usuńmy z G jedną krawędź. Ponieważ G nie zawiera cykli elementarnych, to usunięcie krawędzi prowadzi do rozpadu G na dwa drzewa, które na mocy założenia indukcyjnego mają razem $(n-2)$ krawędzi. Zatem G musi mieć $(n-1)$ krawędzi.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Gdyby G nie był spójny, to łączna liczba krawędzi w jego składowych, będących drzewami, byłaby co najmniej o 2 mniejsza od liczby wierzchołków. Przeczy to założeniu, że G ma $n-1$ krawędzi.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Usunięcie dowolnej krawędzi daje graf o n wierzchołkach i $n-2$ krawędziach, który nie jest spójny.

(4. $\Rightarrow$ 5.) Ponieważ G jest spójny, to każda para wierzchołków jest połączona co najmniej jedną drogą. Gdyby dla pewnej pary wierzchołków były dwie takie drogi, to powstałby cykl. Przeczy to założeniu, że każda krawędź jest mostem.

(5. $\Rightarrow$ 6.) Graf G nie może zawierać cyklu elementarnego, bo oznaczałoby to, że istnieje para wierzchołków połączona dwiema drogami wierzchołkowo rozłącznymi. Dołączenie nowej krawędzi utworzy cykl elementarny. Może być tylko jeden taki cykl, bowiem istnienie dwóch takich cykli oznaczałoby, że w G istnieje cykl elementarny nie zawierający dołączanej krawędzi.

(6. $\Rightarrow$ 1.) Graf G musi być spójny. Gdyby tak nie było, to dodanie krawędzi łączącej składowe grafu nie powodowałoby powstania cyklu elementarnego.

■

Wniosek

W drzewie o $n \geq 2$ wierzchołkach co najmniej dwa z nich są stopnia 1 (są liśćmi).

Dowód

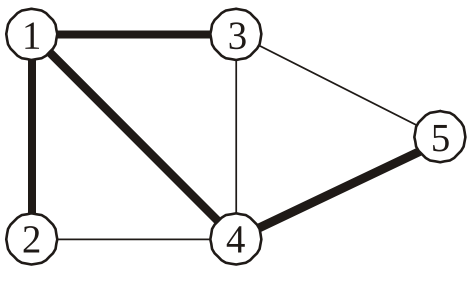
$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2 . \qquad \blacksquare$$

Wniosek

Jeśli graf G o n wierzchołkach jest lasem złożonym z k drzew, to liczba jego krawędzi $m = n - k$.

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $G_T = (V, T)$ takie, że $T \subseteq E$ nazywamy ***drzewem rozpinającym*** (*dendrytem*) grafu G.

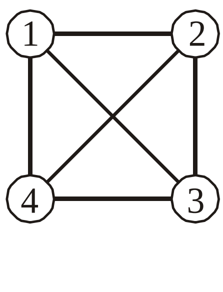
Przykład drzewa rozpinającego



Twierdzenie (Cayley, 1889)

Graf pełny K_n (dla $n \geq 2$) ma n^{n-2} różnych drzew rozpinających.

Przykład liczby drzew rozpinających w grafie pełnym

K_4 : 

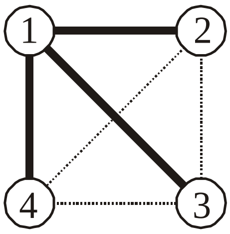
, $n^{n-2} = 4^2 = 16$

Dowód (zarys dowodu – konstrukcja kodu Prüfera dla drzewa)
Załóżmy, że wierzchołki grafu są ponumerowane liczbami naturalnymi $1, ..., n$. Łatwo sprawdzić, że dla $n = 2$ tw. zachodzi. Pokażemy, że dla $n \geq 3$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy drzewami rozpinającymi graf pełny K_n a n^{n-2} ciągami $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$, gdzie a_i jest liczbą naturalną spełniającą nierówność $1 \leq a_i \leq n$.
Załóżmy, że T jest drzewem rozpinającym K_n . Wybieramy wierzchołek v stopnia 1 o najmniejszym numerze i przyjmujemy jako a_1 numer wierzchołka sąsiedniego z v w drzewie T. Usuwamy z T wierzchołek v wraz z incydentną z nim krawędzią. Powtarzamy powyższe postępowanie kolejno dla $a_2, a_3, ..., a_{n-2}$.
Aby ustalić odwrotną odpowiedniość pomiędzy ciągiem $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ a drzewem rozpinającym, weźmy dowolny ciąg $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$, którego każdy wyraz spełnia warunek $1 \leq a_i \leq n$, i zbudujmy odpowiadające mu drzewo T. Niech v będzie najmniejszą liczbą ze zbioru $N = \{1, 2, ..., n\}$, która nie występuje w ciągu $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$. Dodajemy do T krawędź $\{a_1, v\}$. Usuwamy a_1 z ciągu i podstawiamy $N \leftarrow N \setminus \{v\}$. Powtarzamy to postępowanie kolejno dla $a_2, a_3, ..., a_{n-2}$. Na końcu łączymy krawędzią ostatnie dwa wierzchołki, które pozostały w N. ■

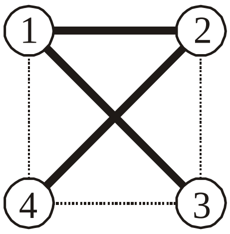
Przykład kodowania drzew rozpinających w grafie pełnym

$$K_4: \quad n^{n-2} = 4^2 = 16$$

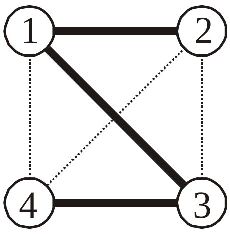
(1, 1)



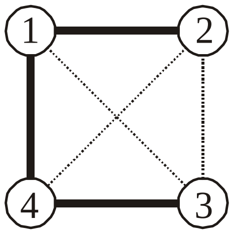
(1, 2)



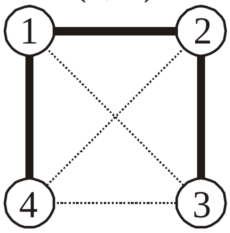
(1, 3)



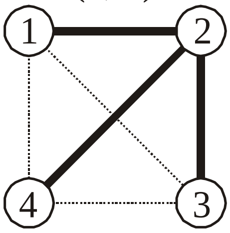
(1, 4)



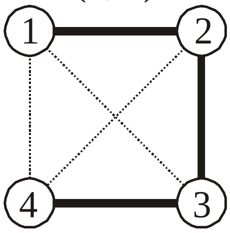
(2, 1)



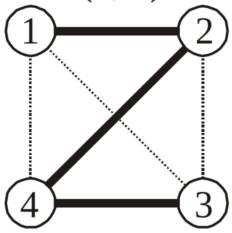
(2, 2)



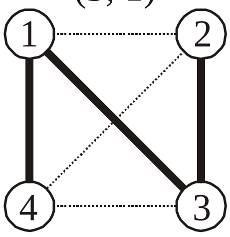
(2, 3)



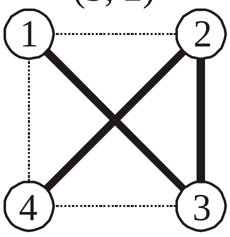
(2, 4)



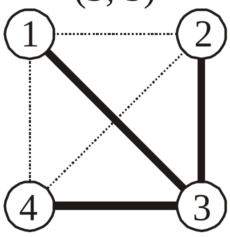
(3, 1)



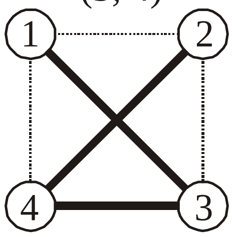
(3, 2)



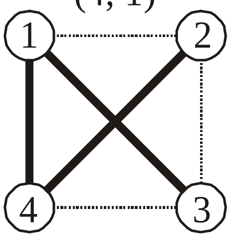
(3, 3)



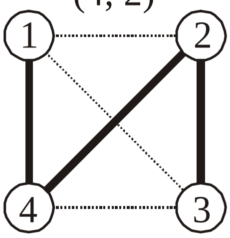
(3, 4)



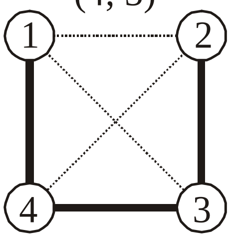
(4, 1)



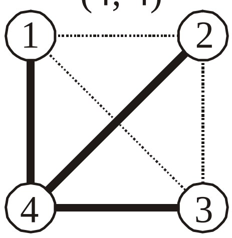
(4, 2)



(4, 3)

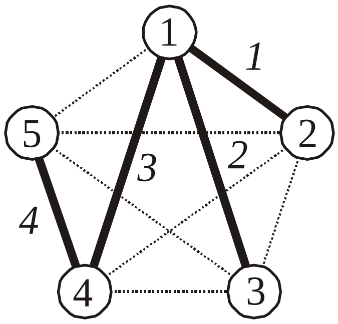


(4, 4)



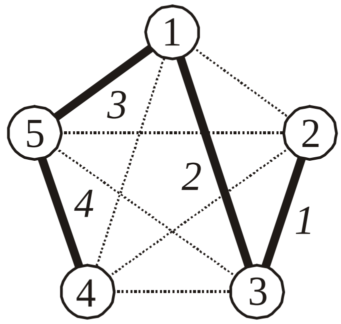
Przykład użycia kodu Prüfera

kodowanie:



(1, 1, 4)

odkodowanie: (3, 1, 5)



Drzewo przeglądu grafu w głąb

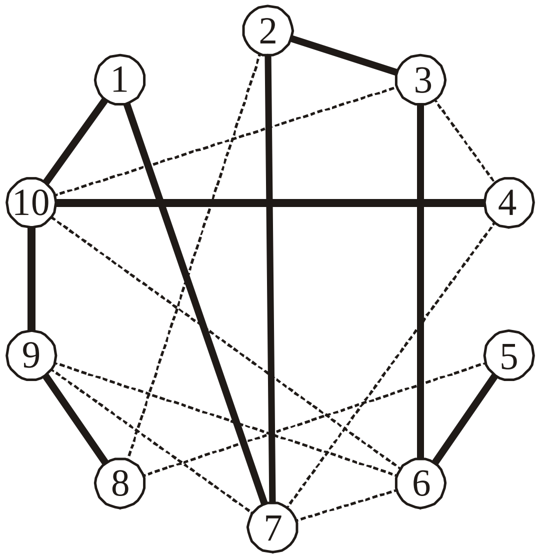
Po zakończeniu przeszukiwania grafu $G = (V, E)$ metodą w głąb uzyskujemy ciąg jego ponumerowanych wierzchołków: $(v_{i_1}, ..., v_{i_n})$.

Wyznaczamy zbiór krawędzi $\boldsymbol{T}$, który tworzy drzewo rozpinające G:

1. rozpocznij od $\boldsymbol{T} = \emptyset$,
2. dla każdego $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} - 1, ..., 2$ wykonaj co następuje:
   - 2.1. wybierz z ciągu $(v_{i_1}, ..., v_{i_n})$ wierzchołek $\boldsymbol{v}$, który jest sąsiedni z wierzchołkiem v_{i_j} i ma <u>największy</u> indeks spośród wierzchołków poprzedzających w ciągu v_{i_j},
   - 2.2. dołącz do zbioru $\boldsymbol{T}$ krawędź $\{v_{i_j}, \boldsymbol{v}\}$.

Przykład drzewa przeglądu grafu w głąb

Ciąg wyznaczony metodą przeszukania w głąb: (5, 6, 3, 2, 7, 1, 10, 4, 9, 8)



Zbiór krawędzi drzewa rozpinającego:

{{8, 9}, {9, 10}, {4, 10}, {10, 1}, {1, 7}, {7, 2}, {2, 3}, {3, 6}, {6, 5}}

Drzewo przeglądu grafu wszerz

Po zakończeniu przeszukiwania grafu $G = (V, E)$ metodą wszerz uzyskujemy ciąg jego ponumerowanych wierzchołków: $(v_{i_1}, ..., v_{i_n})$.

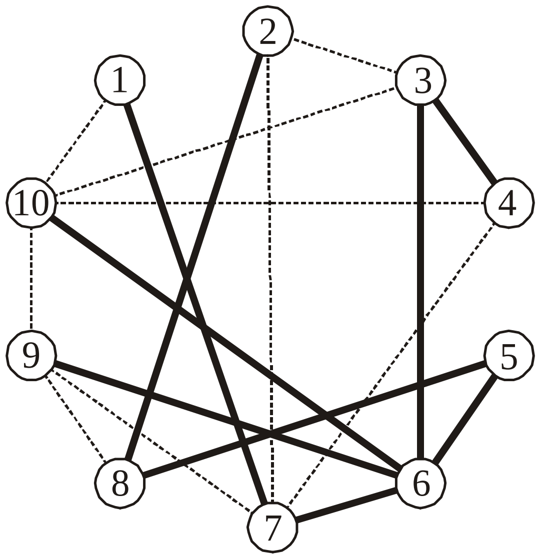
Wyznaczamy zbiór krawędzi $\boldsymbol{T}$, który tworzy drzewo rozpinające G:

---

1. rozpocznij od $\boldsymbol{T} = \varnothing$,
2. dla każdego $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} -1, ..., 2$ wykonaj co następuje:
   - 2.1. wybierz z ciągu $(v_{i_1}, ..., v_{i_n})$ wierzchołek $\boldsymbol{v}$, który jest sąsiedni z wierzchołkiem v_{i_j} i ma <u>najmniejszy</u> indeks spośród wierzchołków ciągu,
   - 2.2. dołącz do zbioru $\boldsymbol{T}$ krawędź $\{v_{i_j}, \boldsymbol{v}\}$.

Przykład drzewa przeglądu grafu wszerz

Ciąg wyznaczony metodą przeszukania wszerz: (5, 6, 8, 3, 7, 9, 10, 2, 4, 1)



Zbiór krawędzi drzewa rozpinającego:

{{1, 7}, {4, 3}, {2, 8}, {10, 6}, {9, 6}, {7, 6}, {3, 6}, {8, 5}, {6, 5}}

Terminologia dla drzew rozpinających:

Dla $G_T = (V, T)$, które jest drzewem rozpinającym grafu $G = (V, E)$:

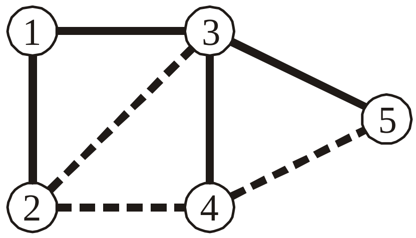
gałęziami (drzewa) nazywamy elementy zbioru T ,

cięciwami (grafu) nazywamy elementy zbioru $E \setminus T$.

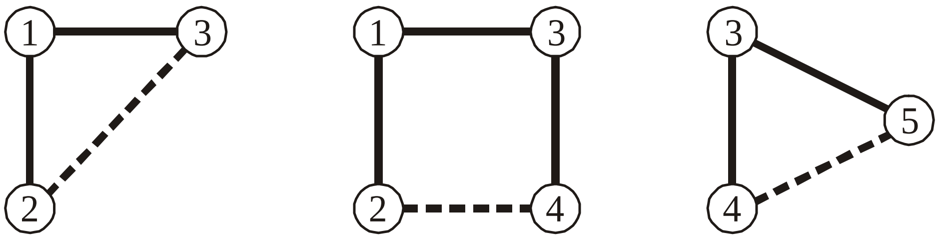
Jeśli e jest cięciwą, to graf $(V, T \cup \{e\})$ zawiera dokładnie jeden cykl C_e.

Zbiór $\Omega = \{ C_e : e \in E \setminus T \}$ nazywamy ***zbiorem cykli fundamentalnych*** grafu G (względem drzewa rozpinającego G_T)

Przykład gałęzi, cięciw i cykli fundamentalnych



$C_{\{2,3\}}$ $C_{\{2,4\}}$ $C_{\{4,5\}}$



$$T = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}, \quad E \setminus T = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}$$

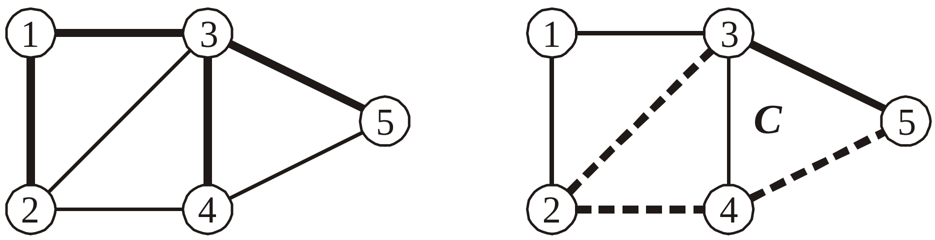
$$\Omega = \{ C_{\{2,3\}}, \; C_{\{2,4\}}, \; C_{\{4,5\}}\}$$

<u>Twierdzenie</u>

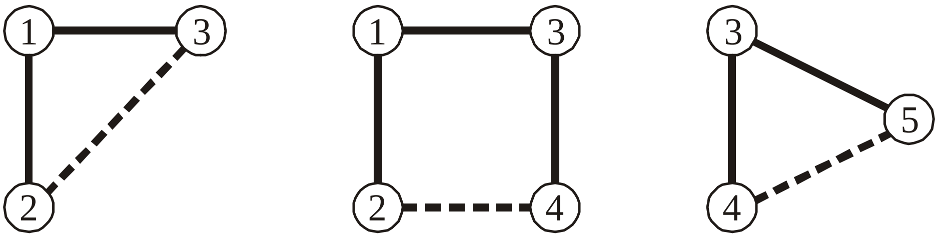
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym a $G_T = (V, T)$ jego dowolnym drzewem rozpinającym. Jeżeli każdy cykl będziemy traktowali jak zbiór krawędzi, to każdy cykl prosty C w grafie G można jednoznacznie przedstawić jako różnicę symetryczną cykli fundamentalnych: $C = C_{e_1} \otimes C_{e_2} \otimes ... \otimes C_{e_k}$,

gdzie $\{e_1,...,e_k\} = C \setminus T$ jest zbiorem cięciw względem drzewa G_T .

Przykład przedstawiania cyklu prostego jako różnicy symetrycznej



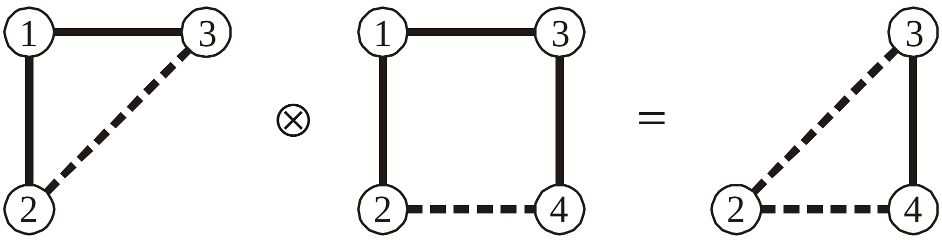
$C_{\{2,3\}}$ $C_{\{2,4\}}$ $C_{\{4,5\}}$



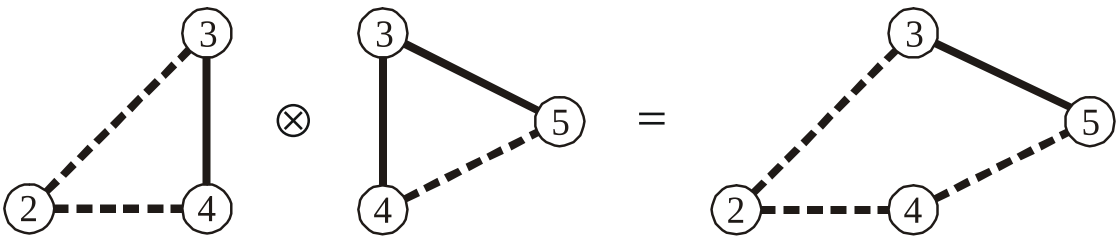
$$T = \{\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\},\{3,5\}\},\quad C \setminus T = \{\{2,3\},\{2,4\},\{4,5\}\}$$

zbiór cykli fundamentalnych $\{C_{\{2,3\}}, C_{\{2,4\}}, C_{\{4,5\}}\}$

$C_{\{2,3\}}$ $C_{\{2,4\}}$ $\{\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$



$\{\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$ $C_{\{4,5\}}$ C



$$C = \{\{2,3\},\{3,5\},\{4,5\},\{2,4\}\} = \left(C_{\{2,3\}} \otimes C_{\{2,4\}}\right) \otimes C_{\{4,5\}}$$

SPÓJNOŚĆ grafów

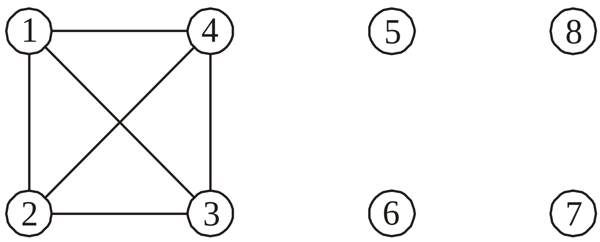
Przypomnienie

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$ jest ***spójny***, jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje droga łącząca te wierzchołki;
graf spójny ma <u>jedną</u> składową spójną (tożsamą z tym grafem), a graf niespójny ma <u>co najmniej dwie</u> składowe spójne.

<u>Twierdzenie</u>

Jeśli graf G ma n wierzchołków i k składowych spójnych, to liczba jego krawędzi m spełnia nierówności: $n - k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

Przykład grafu niespójnego o maksymalnej liczbie krawędzi



dla $n = 8$ i $k = 5$ maksymalna liczba krawędzi wynosi $m = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

<u>Wniosek</u>

Każdy graf, który ma n wierzchołków i ponad $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi jest spójny.

<u>Dowód</u>

Maksymalna liczba krawędzi dla $k \ge 2$ wynosi $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

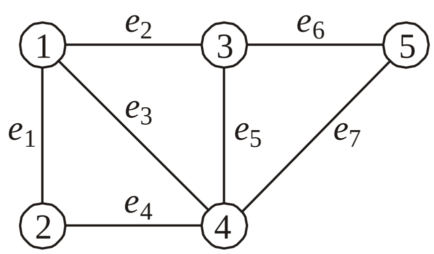
■

SPÓJNOŚĆ krawędziowa i wierzchołkowa

Zbiorem rozspajającym graf spójny G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Minimalnym zbiorem rozspajającym graf G nazywamy taki zbiór rozspajający, dla którego żaden z jego podzbiorów właściwych nie jest zbiorem rozspajającym.

Przykład zbiorów rozspajających



$\{ e_1, e_3, e_4 \}$ - zbiór rozspajający,

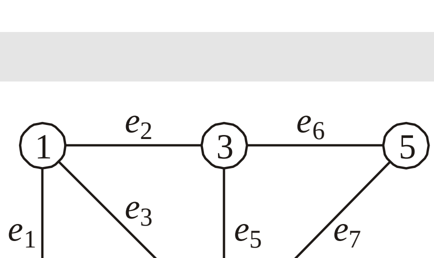
$\{ e_1, e_4 \}$ i $\{ e_2, e_3, e_4 \}$ - minimalne zbiory rozspajające

---

Spójnością krawędziową $\boldsymbol{\lambda(G)}$ grafu spójnego G (dla $n \geq 2$) nazywamy najmniejszą moc jego zbioru rozspajającego.

Graf nazywamy ***k-spójnym krawędziowo***, jeśli $\lambda(G) \geq k$

Przykład



$\lambda(G) = 2$; graf jest 2-spójny krawędziowo (także 1-spójny)

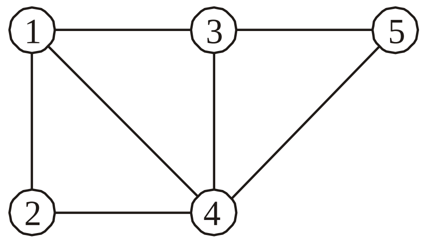
Zbiorem rozdzielającym graf spójny G nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.

Minimalnym zbiorem rozdzielającym graf G nazywamy taki zbiór rozdzielający, dla którego żaden z jego podzbiorów właściwych nie jest zbiorem rozdzielającym.

Spójnością wierzchołkową $\kappa(G)$ grafu spójnego G (dla $n \geq 2$) nazywamy najmniejszą moc jego zbioru rozdzielającego.

Graf nazywamy ***k-spójnym*** (*wierzchołkowo*), jeśli $\kappa(G) \geq k$

Przykład zbioru rozdzielającego



{ 1, 3, 4 } - zbiór rozdzielający,

{ 1, 4 } i {3, 4 } - minimalne zbiory rozdzielające

$\kappa(G) = 2$, graf jest 2-spójny (wierzchołkowo)

Twierdzenie

Dla każdego spójnego grafu G zachodzi nierówność $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

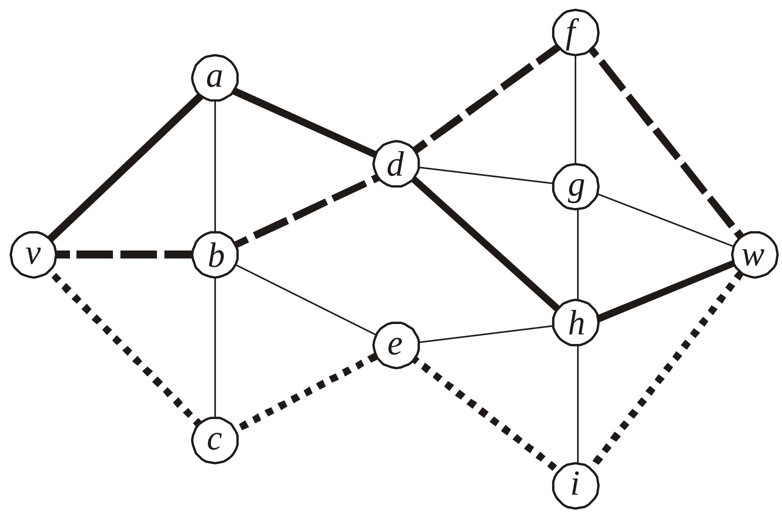
Dowód

Ze zbioru wierzchołków incydentnych z krawędziami należącymi do zbioru rozspajającego o najmniejszej mocy usuwamy jeden wierzchołek z każdej pary wierzchołków sąsiednich. Powstaje zbiór rozdzielający graf G o mocy nie większej niż $\lambda(G)$. ■

Rozważmy graf spójny $G = (V, E)$ oraz parę wyróżnionych wierzchołków $v, w \in V$ ($v \neq w$):

- ***zbiorem rozspajającym wierzchołki*** v i w nazywamy taki podzbiór krawędzi grafu, że każda droga łącząca wierzchołki v i w zawiera krawędź z tego podzbioru.
- ***zbiorem rozdzielającym wierzchołki*** v i w nazywamy taki podzbiór wierzchołków należących do $V \setminus \{v, w\}$, że każda droga łącząca wierzchołki v i w zawiera wierzchołek z tego podzbioru.
- dwie drogi z v do w nazywamy ***krawędziowo rozłącznymi***, jeśli nie mają one wspólnych krawędzi,
- dwie drogi z v do w nazywamy ***wierzchołkowo rozłącznymi***, jeśli nie mają one wspólnych wierzchołków (z wyjątkiem v i w).

Przykłady zbiorów rozspajających, rozdzielających i dróg rozłącznych



$\{\{a, d\}, \{b, d\}, \{e, h\}, \{e, i\}\}$ i $\{\{v, a\}, \{v, b\}, \{v, c\}\}$ - zbiory rozspajające v i w

$\{d, e\}$ i $\{a, b, h, i\}$ - zbiory rozdzielające v i w

(v, a, d, h, w) i (v, b, d, f, w) - drogi rozłączne krawędziowo,

(v, a, d, h, w) i (v, c, e, i, w) - drogi rozłączne wierzchołkowo,

Twierdzenie (Mengera w wersji krawędziowej)

Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym v i w.

Twierdzenie (Mengera w wersji wierzchołkowej, Menger 1927)

Maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki niesąsiednie v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym v i w.

Wniosek

Graf jest k-spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona co najmniej k drogami krawędziowo rozłącznymi.

Dowód (połowa)

Każda para różnych wierzch. jest połączona co najmniej k drogami krawędziowo rozłącznymi $\Rightarrow$ dla każdej pary wierzch. maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych wynosi co najmniej $k \Rightarrow$ dla każdej pary wierzch. minimalna liczba krawędzi w zbiorze je rozspajającym wynosi co najmniej $k \Rightarrow$ minimalny zbiór rozspajający graf liczy co najmniej k krawędzi $\Rightarrow k \leq \lambda(G)$ ■

Wniosek

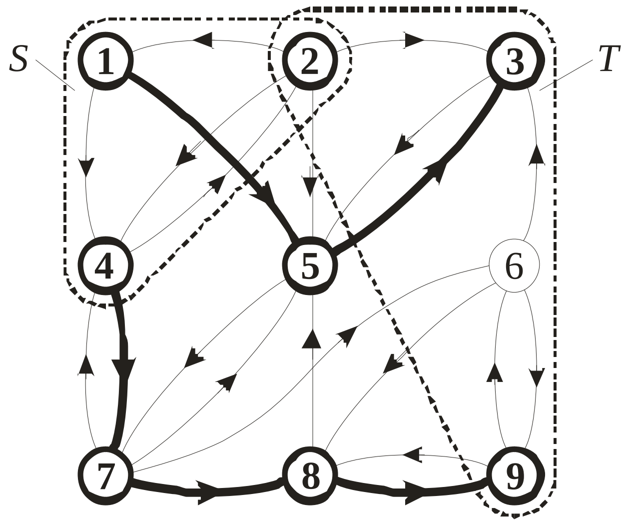
Graf o co najmniej k+1 wierzchołkach jest k-spójny (wierzchołkowo) wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona co najmniej k drogami wierzchołkowo rozłącznymi.

SEPARATORY i KONEKTORY

Rozważmy graf skierowany $D = (V, A)$ z wyróżnionymi dwoma podzbiorami wierzchołków $S, T \subseteq V$ (nie muszą być one rozłączne).

- ***S-T drogą*** dla $S, T \subseteq V$ nazywamy taką drogę elementarną $P = (v_1, ..., v_k)$ w grafie D, dla której $V(P) \cap S = \{v_1\}$ i $V(P) \cap T = \{v_k\}$ ($V(P)$ oznacza zbiór wierzchołków drogi P)

Przykład S-T dróg



$S = \{1, 2, 4\}$, $T = \{2, 3, 6, 9\}$

S-T drogi: $P_1 = (1, 5, 3)$, $P_2 = (2)$, $P_3 = (4, 7, 8, 9)$, $P_4 = (4, 7, 8, 5, 3)$

Wierzchołkami wewnętrznymi S-T drogi $P = (v_1, ..., v_k)$ nazywamy wierzchołki ze zbioru V(P) \ ($\{v_1\} \cup \{v_k\}$).

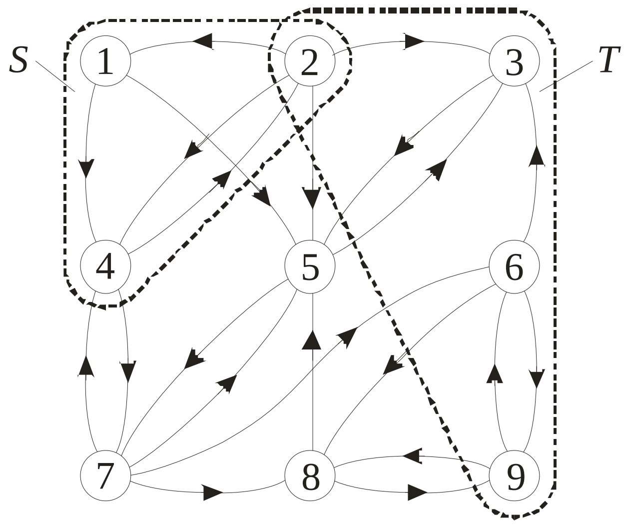
Pojedynczy wierzchołek w grafie skierowanym traktujemy jako drogę; zatem dla każdego $v \in S \cap T \neq \varnothing$ droga $P = (v)$ jest S-T drogą o pustym zbiorze wierzchołków wewnętrznych.

- ***S*-*T* separatorem** grafu skierowanego D dla $S, T \subseteq V$ nazywamy taki zbiór $Z \subseteq V$, dla którego podgraf indukowany przez zbiór wierzchołków $V \setminus Z$ nie zawiera żadnej *S*-*T* drogi

$|Z|$ nazywamy ***mocą*** *S*-*T* separatora.

Dla każdego *S*-*T* separatora $|Z| \geq |S \cap T|$, bo $S \cap T \subseteq Z$

Przykład S-T separatorów



$S = \{1, 2, 4\}$, $T = \{2, 3, 6, 9\}$

S-*T* separatory: $Z_1 = (2, 5, 7)$, $Z_2 = (2, 5, 6, 9)$, $Z_3 = (1, 2, 7)$

W przypadku $S = \{v\}$ i $T = \{w\}$

przyjęte jest stosowanie oznaczenia: *v*-*w* separator.

Pojęcie *S*-*T* separatora jest uogólnieniem pojęcia zbioru rozdzielającego:

jeżeli graf skierowany $D = (V, A)$ jest symetryczny (tzn. $(a, b) \in A \Rightarrow (b, a) \in A$) oraz $S = \{v\}$ i $T = \{w\}$ $(v \neq w)$, to każdy *v*-*w* separator w grafie D odpowiada zbiorowi rozdzielającemu wierzchołki v i w w pochodnym grafie nieskierowanym $G(D)$.

- ***S-T konektorem*** grafu skierowanego D dla $S, T \subseteq V$ nazywamy taki podgraf $Q = (V_Q, A_Q)$ grafu D, którego każda składowa spójna jest S-T drogą

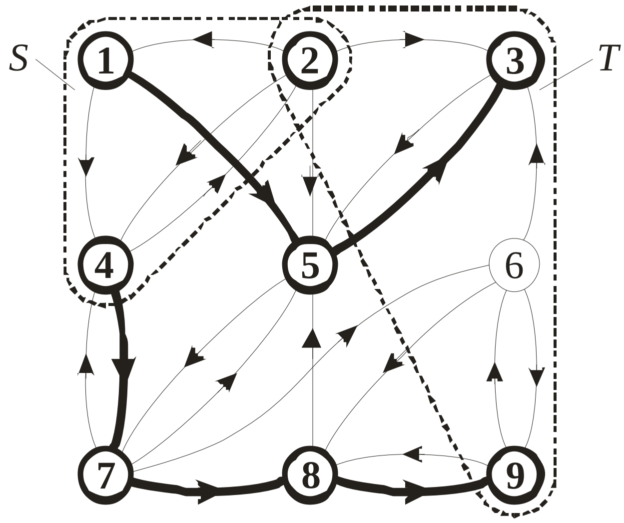
Liczbę składowych spójnych S-T konektora nazywamy jego ***mocą***.

Dla każdego $W \subseteq S \cap T$ graf skierowany pusty $Q = (W, \varnothing)$

jest S-T konektorem grafu skierowanego $D = (V, A)$;

$|W|$ jest mocą tego S-T konektora.

Przykład S-T konektorów



$S = \{1, 2, 4\}$, $T = \{2, 3, 6, 9\}$

S-T konektory: $Q_1 = (\{2\}, \varnothing)$,

$Q_2 = (\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \{(1, 5), (4, 7), (5, 3), (7, 8), (8, 9)\})$

moc Q_1 wynosi 1, a moc Q_2 wynosi 2

W przypadku $S = \{v\}$ i $T = \{w\}$

przyjęte jest stosowanie oznaczenia: v-w konektor.

Pojęcie *S*-*T* konektora jest uogólnieniem pojęcia zbioru dróg wierzchołkowo rozłącznych:
jeżeli graf skierowany $D = (V, A)$ jest symetryczny (tzn. $(a, b) \in A \Rightarrow (b, a) \in A$) oraz $S = \{v\}$ i $T = \{w\}$ ($v \neq w$), to każdy *v*-*w* konektor w grafie *D* odpowiada zbiorowi dróg wierzchołkowo rozłącznych łączących *v* i *w* w pochodnym grafie nieskierowanym $G(D)$.

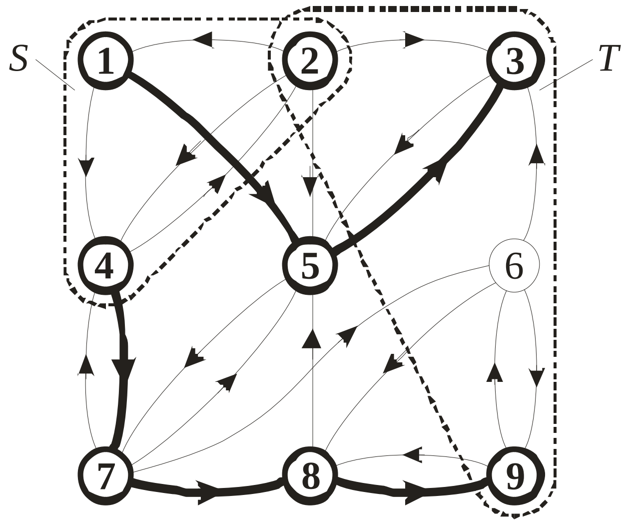
Prosta obserwacja:

minimalna moc *S*-*T* separatora w grafie $D = (V, A)$ dla zadanych $S, T \subseteq V$ ogranicza od góry moc wszystkich *S*-*T* konektorów grafu *D*.

<u>**Twierdzenie UM**</u> (uogólnienie twierdzeń Mengera)

Jeżeli w grafie skierowanym $D = (V, A)$ wybrano dwa podzbiory $S, T \subseteq V$ oraz wyznaczono minimalną moc *S*-*T* separatora równą $\boldsymbol{s}$, to istnieje *S*-*T* konektor $Q = (V_Q, A_Q)$ grafu *D* o mocy $\boldsymbol{s}$.

Przykład ilustrujący twierdzenie



S-*T* separator o mocy 3: {2, 5, 7}, i *S*-*T* konektor o mocy 3:

$$Q = (\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \{(1, 5), (4, 7), (5, 3), (7, 8), (8, 9)\})$$

Zbiorem rozspajającym silnie spójny graf skierowany D nazywamy taki podzbiór jego łuków, którego usunięcie pozbawia ten graf silnej spójności.

Zbiorem rozdzielającym silnie spójny graf skierowany D nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, którego usunięcie pozbawia ten graf silnej spójności.

W przypadku $S = \{v\}$ i $T = \{w\}$ $(v \neq w)$ z twierdzenia UM wynikają odpowiedniki obu wersji twierdzenia Mengera dla grafu skierowanego:

Wniosek (wersja wierzchołkowa)

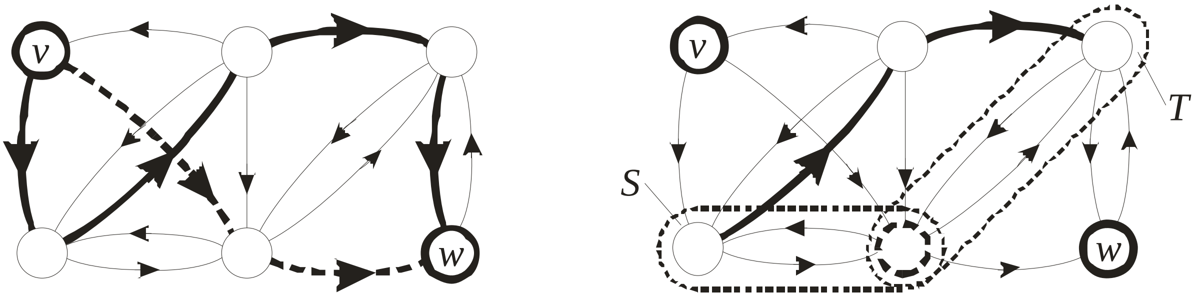
Jeżeli w grafie skierowanym $D = (V, A)$ wybrano dwa różne wierzchołki v i w, takie że $(v, w) \notin A$, to minimalna moc zbioru rozdzielającego wierzchołki v i w jest równa maksymalnej liczbie dróg wierzchołkowo rozłącznych z v do w.

Dowód (szkic)

Wystarczy zdefiniować w naturalny sposób dla grafu skierowanego odpowiednik pojęcia dróg wierzchołkowo rozłącznych oraz zastosować twierdzenie UM dla $S = V^+(v)$ i $T = V^-(w)$. ■

Przykład ilustrujący dowód wniosku

dwie drogi wierzchołkowo rozłączne



<u>Wniosek</u> (wersja łukowa)

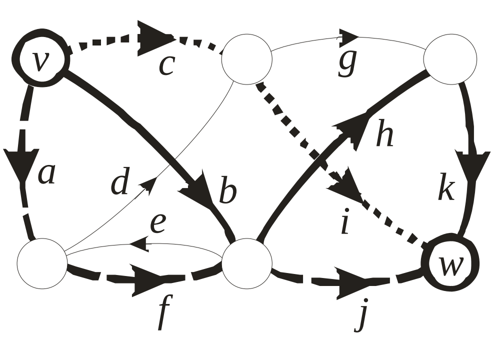
Jeżeli w grafie skierowanym $D = (V, A)$ wybrano dwa różne wierzchołki v i w, to minimalna moc zbioru rozspajającego wierzchołki v i w jest równa maksymalnej liczbie dróg łukowo rozłącznych z v do w.

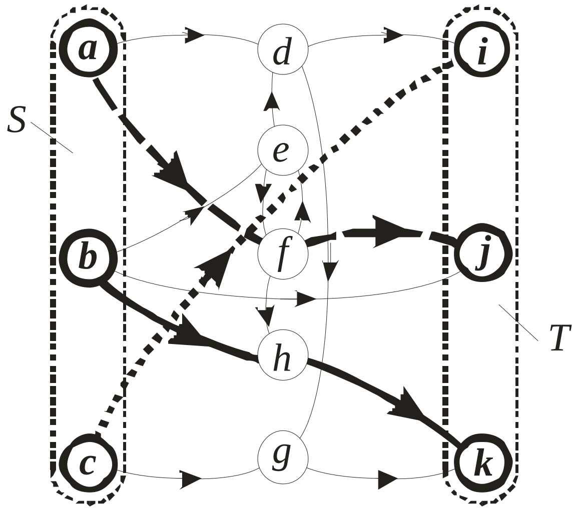
<u>Dowód</u> (szkic)

Po pierwsze, trzeba zdefiniować dla grafu skierowanego odpowiednik grafu krawędziowego (tzw. graf łukowy): $L(D) = (V', A')$ oznacza graf skierowany, w którym $V' = A$ oraz $(a', a'') \in A'$ wtedy i tylko wtedy, kiedy łuki a' i a'' są zależne. Po drugie, trzeba zdefiniować w naturalny sposób dla grafu skierowanego odpowiednik pojęcia dróg łukowo rozłącznych. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie UM dla grafu $L(D)$, gdzie S jest zbiorem takich jego wierzchołków, które odpowiadają łukom wychodzącym z v w grafie D, natomiast T jest zbiorem takich wierzchołków grafu $L(D)$, które odpowiadają łukom wchodzącym do w w grafie D. ■

Przykład ilustrujący dowód wniosku

trzy drogi łukowo rozłączne





D ***L(D)***

Silnie spójny graf skierowany D jest ***k-spójny wierzchołkowo***, jeśli pozbawienie go silnej spójności wymaga usunięcia nie mniej niż k wierzchołków.

Silnie spójny graf skierowany D jest ***k-spójny łukowo***, jeśli pozbawienie go silnej spójności wymaga usunięcia nie mniej niż k łuków.

Twierdzenie

Graf skierowany jest k-spójny wierzchołkowo, jeśli dla każdych dwóch różnych jego wierzchołków v i w istnieje co najmniej k dróg wierzchołkowo rozłącznych z v do w.

Twierdzenie

Graf skierowany jest k-spójny łukowo, jeśli dla każdych dwóch różnych jego wierzchołków v i w istnieje co najmniej k dróg łukowo rozłącznych z v do w.

PRZEPŁYWY W SIECIACH

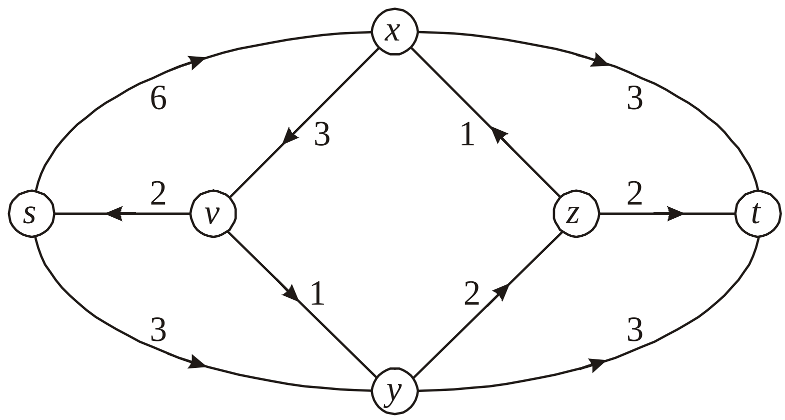
- ***Siecią*** nazywamy parę uporządkowaną $S = (D, c)$,

  gdzie: $D = (V, A)$ jest grafem skierowanym,

  $c : A \to \boldsymbol{R}_+$ jest funkcją, która przyporządkowuje łukowi (u, v) liczbę rzeczywistą nieujemną $c(u, v)$, nazywaną ***przepustowością*** łuku;

  w grafie D wyróżnione są dwa wierzchołki $s, t \in V$ $(s \neq t)$ nazywane: s – ***źródłem***, a t – ***ujściem*** sieci.

Przykład sieci



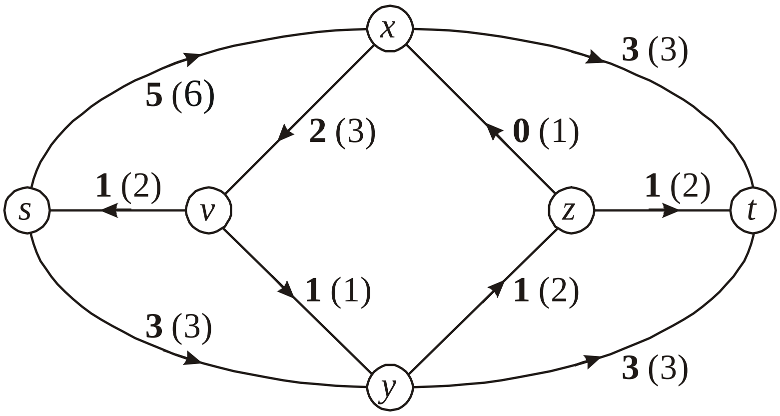
Czasami wygodnie jest zdefiniować funkcję c na całym zbiorze $V \times V$ i wtedy przyjmujemy, że $c(u, v) = 0$ dla $(u, v) \in (V \times V) \setminus A$

- ***Przepływem*** z s do t w sieci S nazywamy funkcję $f : A \to \boldsymbol{R}_+$, spełniającą następujące warunki:

  1. $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$ dla każdego $(u, v) \in A$
  2. $\sum_{u \in V^+(v)} f(v,u) - \sum_{u \in V^-(v)} f(u,v) = 0$ dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$

  (warunek zachowania przepływu)

Przykład przepływu w sieci



$$f(s, x) = 5 \le 6 = c(s, x),\ \ f(x, t) = 3 \le 3 = c(x, t)\ \text{ itd.}$$

$$\sum_{u\in V^+(x)} f(x,u) - \sum_{u\in V^-(x)} f(u,x) = (f(x, t) + f(x, v)) - (f(s, x) + f(z, x)) =$$

$$= (3 + 2) - (5 + 0) = 5 - 5 = 0\ \text{ itd.}$$

- ***Wartością przepływu*** f nazywamy liczbę $W(f)$ daną wzorem:

$$W(f) = \sum_{u\in V^+(s)} f(s,u) - \sum_{u\in V^-(s)} f(u,s)$$

Z warunku zachowania przepływu wynika, że

$$W(f) = \sum_{u\in V^-(t)} f(u,t) - \sum_{u\in V^+(t)} f(t,u)$$

Przykład wyznaczania wartości przepływu w sieci

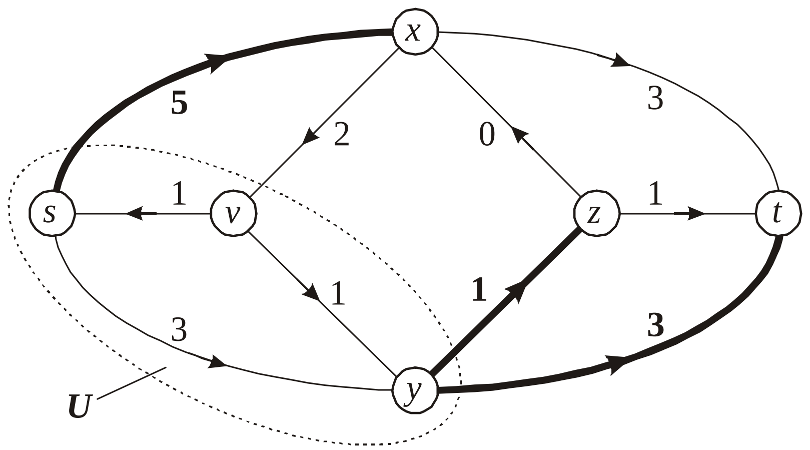
$$W(f) = f(s, x) + f(s, y) - f(s, v) = 5 + 3 - 1 = 7$$

lub

$$W(f) = f(x, t) + f(z, t) + f(y, t) = 3 + 1 + 3 = 7$$

- ***Przekrojem sieci***, który odpowiada niepustemu podzbiorowi wierzchołków sieci $U \subset V$ ($U \neq \emptyset$), nazywamy zbiór łuków $P_U = A \cap \big(U \times (V \setminus U) \big) = \{ (u, v) \in A : u \in U, v \in V \setminus U \}$

Przykład przekroju sieci



Podzbiór wierzchołków $U = \{ s, v, y \}$

(jego uzupełnienie do V to $V \setminus U = \{ x, z, t \}$)

i odpowiadający mu przekrój sieci: $P_U = \{ (s, x), (y, z), (y, t) \}$

- ***Przepływem przez przekrój*** P_U nazywamy liczbę

$$f(U, V \setminus U) = \sum_{(u,v) \in P_U} f(u,v)$$

Przykład wyznaczania przepływu przez przekrój sieci

Dla przekroju sieci $P_U = \{ (s, x), (y, z), (y, t) \}$

przepływ przez ten przekrój wynosi

$f\big(\{s, v, y\}, (\{x, t, z\}\big) = f(s, x) + f(y, z) + f(y, t) = 5 + 1 + 3 = 9$

Lemat

Jeśli $s \in U$ i $t \in V \setminus U$ dla pewnego podzbioru $U \subset V$, to dla dowolnego przepływu f z s do t zachodzi równość

$$W(f) = f(U, V \setminus U) - f(V \setminus U, U),$$

Gdzie $f(U, V \setminus U)$ jest przepływem przez przekrój P_U,
a $f(V \setminus U, U)$ jest przepływem przez przekrój $P_{V \setminus U}$.

Dowód

Z definicji wartości przepływu:

$$W(f) = \sum_{u \in V^+(s)} f(s,u) - \sum_{u \in V^-(s)} f(u,s),$$

a z warunków zachowania przepływu w wierzchołkach $v \in U \setminus \{s\}$:

$$0 = \sum_{u \in V^+(v)} f(v,u) - \sum_{u \in V^-(v)} f(u,v).$$

Zsumujmy stronami wszystkie równania:

$$W(f) = \left(\sum_{u \in V^+(s) \cap U} f(s,u) + \sum_{u \in V^+(s) \cap (V \setminus U)} f(s,u) \right) - \left(\sum_{u \in V^-(s) \cap U} f(u,s) + \sum_{u \in V^-(s) \cap (V \setminus U)} f(u,s) \right)$$

$$0 = \left(\sum_{u \in V^+(v) \cap \{s\}} f(v,u) + \sum_{u \in V^+(v) \cap (U \setminus \{s\})} f(v,u) + \sum_{u \in V^+(v) \cap (V \setminus U)} f(v,u) \right) +$$

$$- \left(\sum_{u \in V^-(v) \cap \{s\}} f(u,v) + \sum_{u \in V^-(v) \cap (U \setminus \{s\})} f(u,v) + \sum_{u \in V^-(v) \cap (V \setminus U)} f(u,v) \right) \text{ dla } v \in U \setminus \{s\}$$

Otrzymamy równanie:

$$W(f) = \left(\sum_{u \in V^+(s) \cap U} f(s,u) - \sum_{v \in U \setminus \{s\}} \left(\sum_{u \in V^-(v) \cap \{s\}} f(u,v) \right) \right) + \qquad \boxed{\text{łuki z } s \text{ do } v \in U \setminus \{s\}}$$

$$+\left(\sum_{v\in U\setminus\{s\}}\left(\sum_{u\in V^{+}(v)\cap\{s\}} f(v,u)\right)-\sum_{u\in V^{-}(s)\cap U} f(u,s)\right)+ \qquad \boxed{\text{łuki z } v\in U\setminus\{s\} \text{ do } s}$$

$$+\left(\sum_{v\in U\setminus\{s\}}\left(\sum_{u\in V^{+}(v)\cap(U\setminus\{s\})} f(v,u)-\sum_{u\in V^{-}(v)\cap(U\setminus\{s\})} f(u,v)\right)\right)+ \qquad \boxed{\text{łuki w obrębie } U\setminus\{s\}}$$

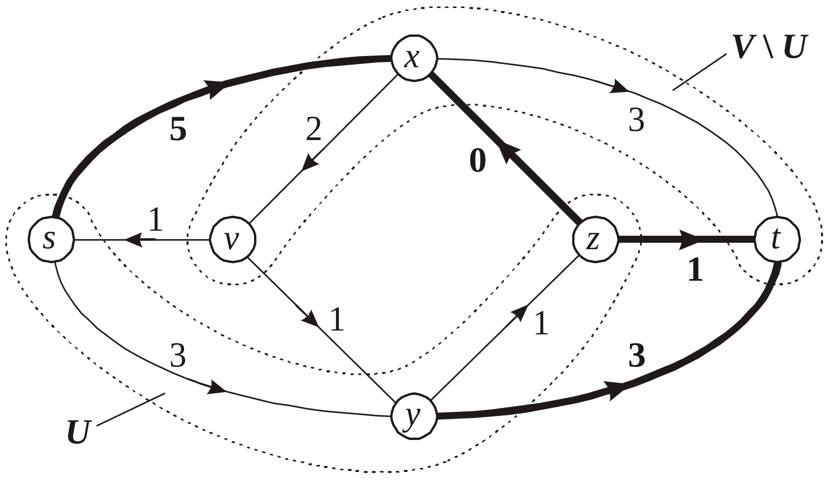
$$+\left(\sum_{u\in V^{+}(s)\cap(V\setminus U)} f(s,u)+\sum_{v\in U\setminus\{s\}}\left(\sum_{u\in V^{+}(v)\cap(V\setminus U)} f(v,u)\right)\right)+ \qquad \boxed{\text{łuki z } v\in U \text{ do } u\in V\setminus U}$$

$$-\left(\sum_{u\in V^{-}(s)\cap(V\setminus U)} f(u,s)+\sum_{v\in U\setminus\{s\}}\left(\sum_{u\in V^{-}(v)\cap(V\setminus U)} f(u,v)\right)\right) \qquad \boxed{\text{łuki z } u\in V\setminus U \text{ do } v\in U}$$

Trzy pierwsze składniki redukują się do 0 i pozostaje

$$W(f)=\sum_{(v,u)\in P_U} f(v,u)-\sum_{(u,v)\in P_{V\setminus U}} f(u,v)=f\big(U,V\setminus U\big)-f(V\setminus U,U) \qquad \blacksquare$$

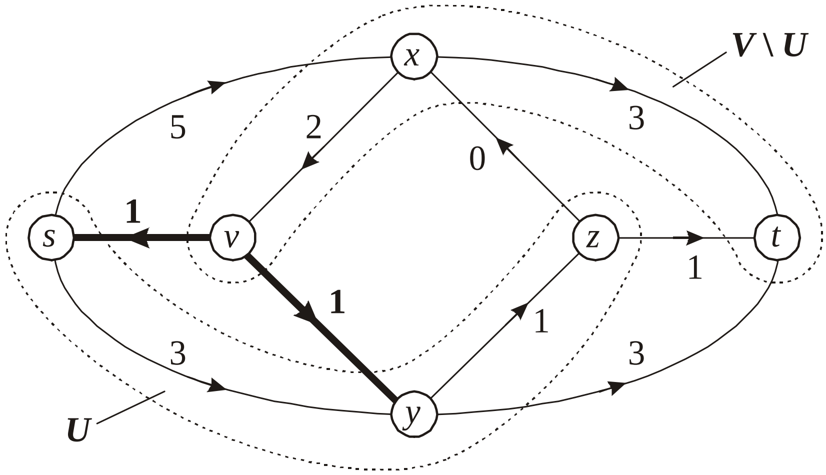
Przykład ilustrujący lemat



Podzbiór wierzchołków: $U = \{ s, y, z \}$,

odpowiadający mu przekrój sieci: $P_U = \{(s, x), (y, t), (z, x), (z, t)\}$

i przepływ przez ten przekrój $f\big(\{s, y, z\}, \{v, x, t\}\big) = 5 + 3 + 0 + 1 = 9$



Podzbiór wierzchołków: $V \setminus U = \{ v, x, t \}$,

odpowiadający mu przekrój sieci: $P_{V \setminus U} = \{(v, s), (v, y)\}$

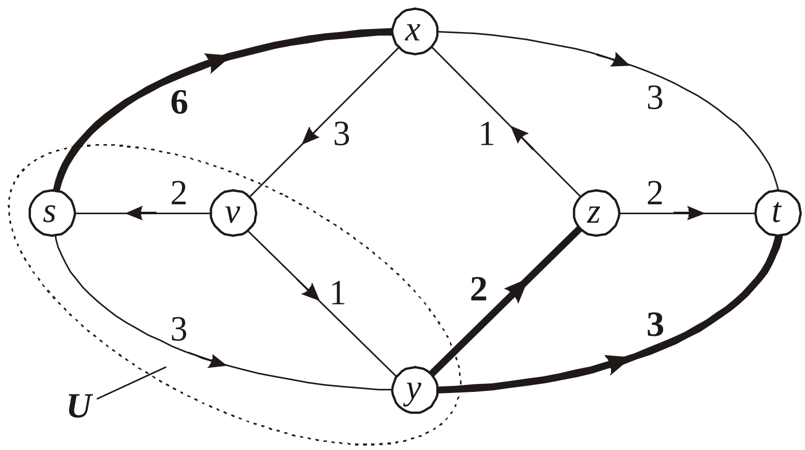
i przepływ przez ten przekrój $f\left(\{v, x, t\}, \{s, y, z\}\right) = 1 + 1 = 2$;

$$7 = W(f) = f\left(\{s, y, z\}, \{v, x, t\}\right) - f\left(\{v, x, t\}, \{s, y, z\}\right) = 9 - 2 = 7$$

- ***Przepustowością przekroju*** P_U dla $U \subset V$ nazywamy liczbę

$$C(P_U) = \sum_{(u,v) \in P_U} c(u,v)$$

Przykład wyznaczania przepustowości przekroju



$$C\left(P_{\{s,\, v,\, y\}}\right) = c(s, x) + c(y, z) + c(y, t) = 6 + 2 + 3 = 11$$

Lemat

Dla dowolnego przepływu f z s do t w sieci S oraz przekroju P_U, wyznaczonego przez podzbiór $U \subset V$, dla którego $s \in U$ i $t \in V \setminus U$, zachodzi nierówność

$$W(f) \leq C(P_U),$$

Dowód

Dla ustalonego przepływu f i zbioru U z twierdzenia wynika

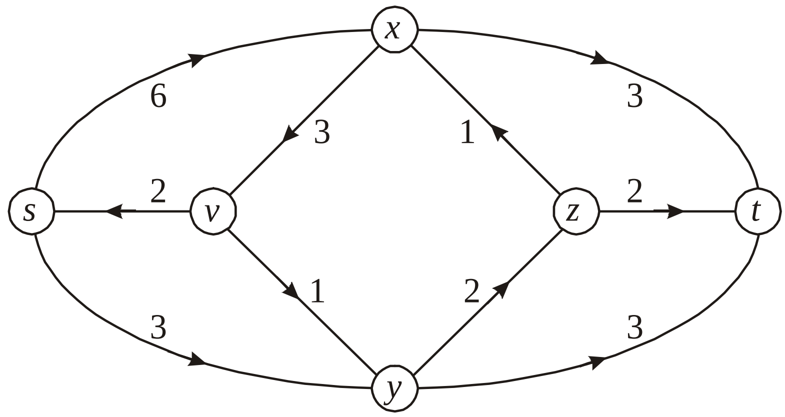
$$W(f) = f(U, V \setminus U) - f(V \setminus U, U) \leq f(U, V \setminus U)$$

Z definicji przepływu wynika, że $f(U, V \setminus U) \leq C(P_U)$ ■

- ***Minimalnym przekrojem*** sieci pomiędzy źródłem i ujściem nazywamy taki przekrój P_U, dla którego przepustowość jest najmniejsza ze wszystkich przekrojów sieci odpowiadających takim podzbiorom $U \subset V$, że $s \in U$ i $t \in V \setminus U$.

Zatem dla każdego przepływu w sieci jego wartość nie jest większa od przepustowości minimalnego przekroju.

Przykład wyznaczania minimalnego przekroju sieci



Przekroje sieci pomiędzy s i t odpowiadają wszystkim zbiorom postaci $\{s\} \cup A$, gdzie A jest podzbiorem $\{v, x, y, z\}$:

$U_1 = \{s\}$, $U_2 = \{s, v\}$, $U_3 = \{s, v, x\}$, $U_4 = \{s, x\}$,

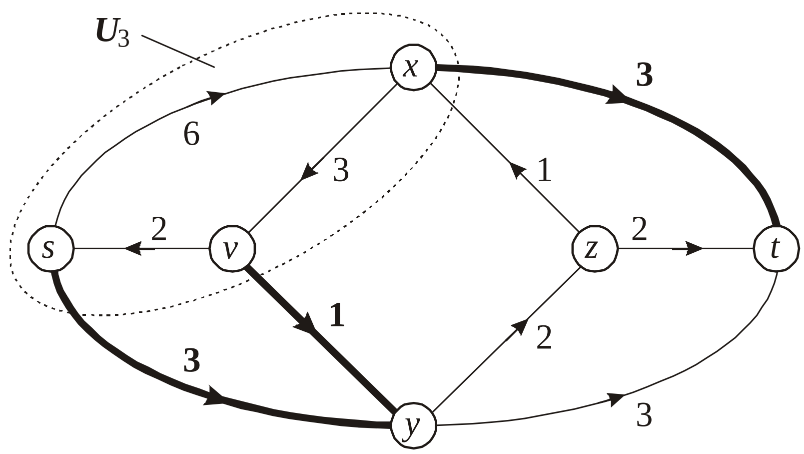
$U_5 = \{s, x, y\}$, $U_6 = \{s, v, x, y\}$, $U_7 = \{s, v, y\}$, $U_8 = \{s, y\}$,

$U_9 = \{s, y, z\}$, $U_{10} = \{s, v, y, z\}$, $U_{11} = \{s, v, x, y, z\}$, $U_{12} = \{s, x, y, z\}$,

$U_{13} = \{s, x, z\}$, $U_{14} = \{s, v, x, z\}$, $U_{15} = \{s, v, z\}$, $U_{16} = \{s, z\}$.

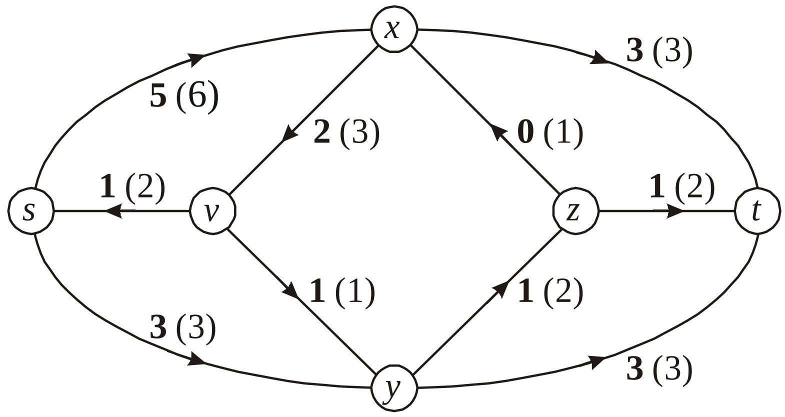
$\left(C\left(P_{U_i}\right)\right)_{i=1,\ldots,16} = (9, 10, 7, 9, 11, 8, 11, 11, 12, 12, 8, 11, 11, 9, 13, 12)$

Wartość minimalna w tym ciągu to $7 = C\left(P_{\{s,v,x\}}\right)$



Podzbiór $U_3 = \{s, v, x\}$ wyznacza minimalny przekrój P_{U_3} pomiędzy źródłem i ujściem o przepustowości $C(P_{U_3}) = \mathbf{7}$.

Zatem przepływ:



o wartości **7** jest przepływem o maksymalnej wartości w tej sieci.

Czy w każdej sieci można znaleźć przepływ o wartości równej przepustowości minimalnego przekroju?

TAK

Twierdzenie (Ford i Fulkerson, 1955)

W każdej sieci maksymalna wartość przepływu ze źródła do ujścia jest równa przepustowości minimalnego przekroju pomiędzy źródłem i ujściem.

Dla danej sieci $S = (D, c)$, gdzie $D = (V, A)$ jest grafem skierowanym rozważmy drogę prostą $P = (v_1, \ldots, v_k)$ w pochodnym grafie niekierowanym $G(D)$.

Drodze P odpowiada ciąg łuków $(a_1, \ldots, a_{k-1})$, w którym $a_i \in A$ dla $i = 1, \ldots, k-1$ oraz $a_i = (v_i, v_{i+1})$ albo $a_i = (v_{i+1}, v_i)$.

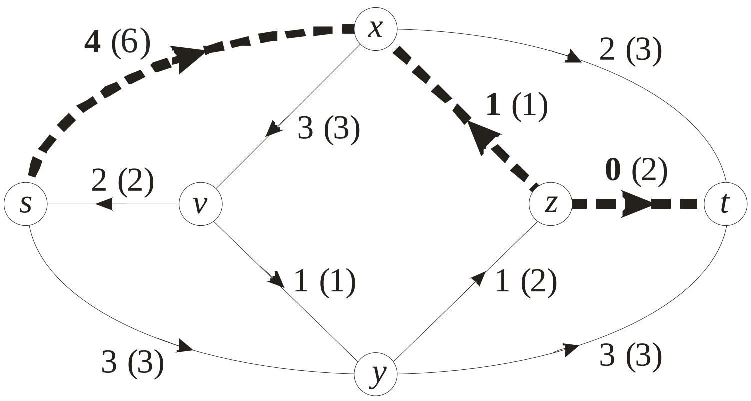
Łuk a_i w przypadku $a_i = (v_i, v_{i+1})$ nazywamy ***łukiem zgodnym z kierunkiem*** od v_1 do v_k , a w przypadku $a_i = (v_{i+1}, v_i)$ ***łukiem niezgodnym z*** tym ***kierunkiem***.

- Dla danego przepływu f w sieci S oraz drogi prostej P ciąg $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ nazywamy ***ścieżką*** z v_1 do v_k ***powiększającą przepływ f***, jeśli dla każdego łuku a_i zgodnego z kierunkiem od v_1 do v_k zachodzi $f(a_i) < c(a_i)$, a dla każdego łuku a_i niezgodnego z kierunkiem od v_1 do v_k zachodzi $f(a_i) > 0$.

Jeżeli dla danego przepływu f istnieje w sieci ścieżka z s do t powiększająca ten przepływ, to wartość przepływu przez sieć można zwiększyć o pewną wartość $\varepsilon > 0$, definiując nowy przepływ f', w którym $f'(a) = f(a) + \varepsilon$, dla każdego łuku a zgodnego z kierunkiem od s do t, oraz $f'(a) = f(a) - \varepsilon$, dla każdego łuku a niezgodnego z tym kierunkiem.

Największa możliwa wartość ε jest równa minimum z różnic pomiędzy przepustowością i wartością przepływu dla łuków zgodnych z kierunkiem z s do t oraz z wartości przepływu dla łuków niezgodnych.

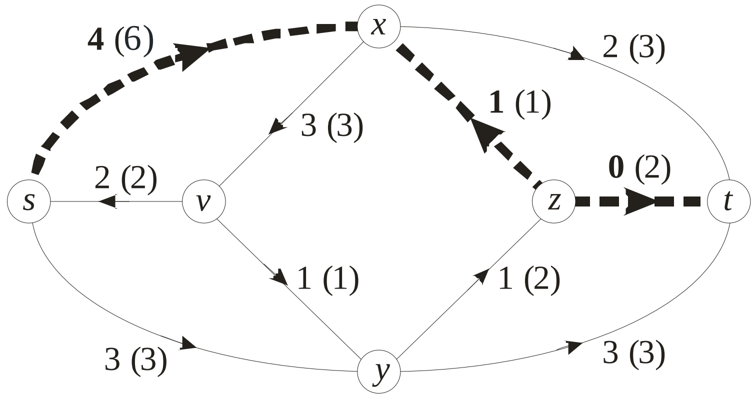
Przykłady ścieżek powiększających przepływy w sieci



$W(f) = 5$

Ciąg łuków $((s, x), (z, x), (z, t))$ odpowiada drodze $P = (s, x, z, t)$ w $G(D)$.

Łuki (s, x) i (z, t) są zgodne z kierunkiem od s do t, a łuk (z, x) jest niezgodny z tym kierunkiem.



$W(f) = 5$

Ciąg łuków ((s, x), (z, x), (z, t)) jest ścieżką z s do t powiększającą przepływ f :

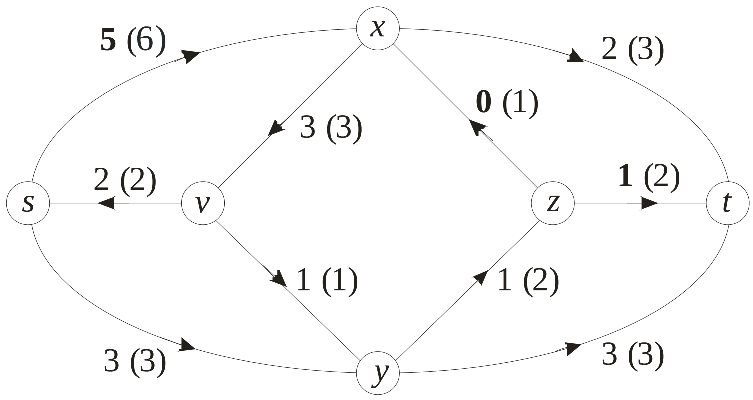
$$c(s, x) - f(s, x) = 6 - 4 = \mathbf{2} \text{ i } c(z, t) - f(z, t) = 2 - 0 = \mathbf{2},$$

czyli dla łuków zgodnych z kierunkiem od s do t zachodzi $f(a) < c(a)$; $f(z, x) = 1 > 0$ dla łuku niezgodnego z tym kierunkiem.

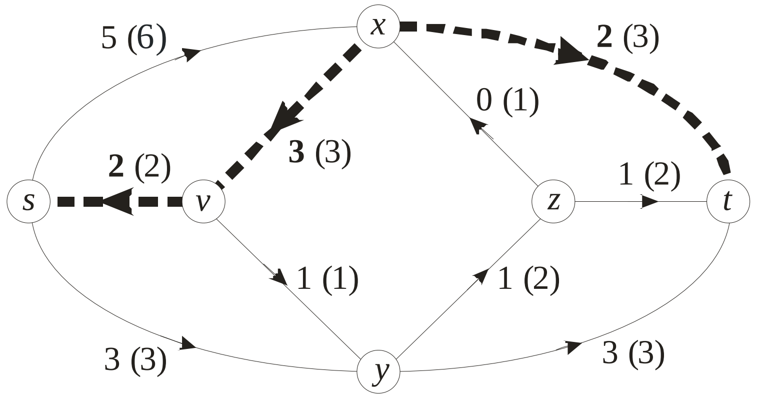
Można zatem zwiększyć wartość przepływu w sieci przyjmując $\varepsilon = 1$; nowe wartości przepływów przez łuki ze ścieżki wyniosą wtedy:

$f'(s, x) = f(s, x) + 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$, $\quad f'(z, x) = f(z, x) - 1 = 1 - 1 = \mathbf{0}$

$f'(z, t) = f(z, t) + 1 = 0 + 1 = \mathbf{1}$; $\quad W(f') = W(f) + 1 = 5 + 1 = \mathbf{6}$



$W(f') = 6$



$W(f') = 6$

Ciąg łuków ((*v*, *s*), (*x*, *v*), (*x*, *t*)) jest ścieżką z *s* do *t* powiększającą przepływ f': $\quad c(x, t) - f'(x, t) = 3 - 2 = \mathbf{1}$,

czyli dla łuku zgodnego z kierunkiem od *s* do *t* zachodzi $f'(a) < c(a)$;

$$f'(v, s) = 2 > 0 \text{ i } f'(x, v) = 3 > 0$$

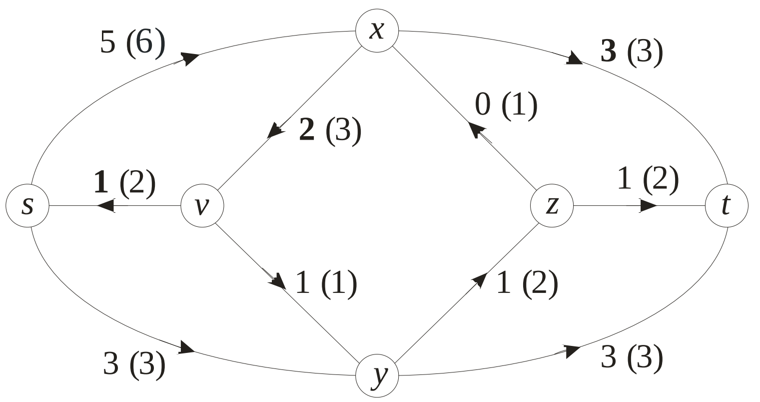
dla łuków niezgodnych z tym kierunkiem.

Można zatem zwiększyć wartość przepływu w sieci przyjmując $\varepsilon = 1$;

nowe wartości przepływów przez łuki ze ścieżki wyniosą wtedy:

$f''(v, s) = f'(v, s) - 1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$, $\quad f''(x, v) = f'(x, v) - 1 = 3 - 1 = \mathbf{2}$

$f''(x, t) = f'(x, t) + 1 = 2 + 1 = \mathbf{3}$; $\quad W(f'') = W(f') + 1 = 6 + 1 = \mathbf{7}$



$W(f'') = 7$

Twierdzenie

Przepływ *f* w sieci *S* jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie istnieje dla niego ścieżka powiększająca ze źródła *s* do ujścia *t*.

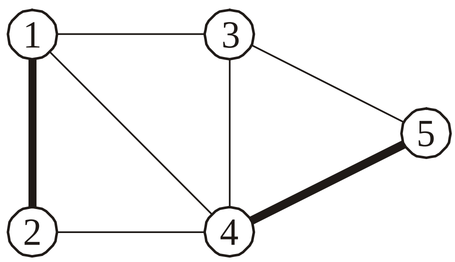
SKOJARZENIA i ZBIORY WEWN. STABILNE WIERZCH.

Rozważamy graf $G = (V, E)$

Dwie krawędzie $e', e'' \in E$ nazywamy ***niezależnymi***, jeśli nie są incydentne ze wspólnym wierzchołkiem.

- ***Skojarzeniem*** w grafie G nazywamy dowolny podzbiór krawędzi parami niezależnych.

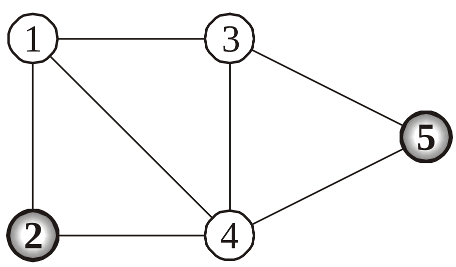
Przykład skojarzenia



Dwa wierzchołki $v', v'' \in V$ nazywamy ***niezależnymi***, jeśli nie są wierzchołkami sąsiednimi (nie są incydentne z tą samą krawędzią).

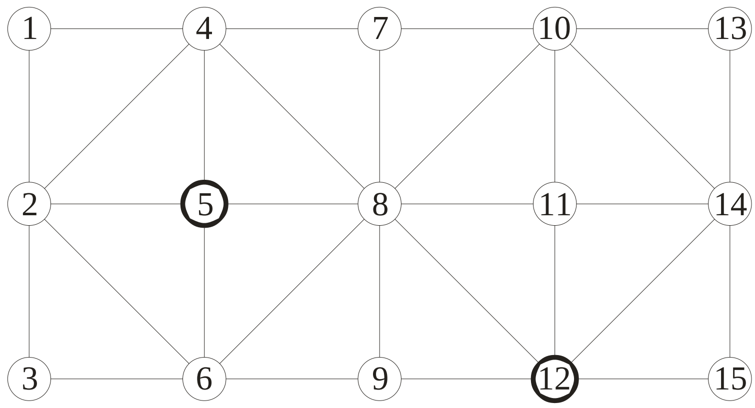
- ***Zbiorem wewnętrznie stabilnym*** wierzchołków grafu G nazywamy dowolny podzbiór wierzchołków parami niezależnych.

Przykład zbioru wewnętrznie stabilnego



Przykład zastosowania zbioru wewnętrznie stabilnego

Na zadanym obszarze mamy ustaloną liczbę n miejsc, w których możemy ulokować pewną liczbę obiektów. Miejsca te są ponumerowane od 1 do n i będziemy je przedstawiali jako wierzchołki grafu. Dla każdego miejsca $i = 1, \ldots, n$ znany jest podzbiór miejsc $K(i)$, w których umieszczenie kolejnego obiektu nie jest możliwe, jeśli jest on już umieszczony w miejscu i. Chcemy na podanym obszarze umieścić jak największą liczbę obiektów w podanych lokalizacjach.



Np. $K(5) = \{2, 4, 6, 8\}$, $K(12) = \{8, 9, 11, 14, 15\}$.

Opisane zagadnienie można wygodnie przedstawić jako poszukiwanie wewnętrznie stabilnego zbioru wierzchołków o maksymalnej mocy w tzw. *grafie konfliktów*: $V = \{1, \ldots, n\}$ i $E = \{\{i, j\} : i \in V, j \in K(i)\}$.

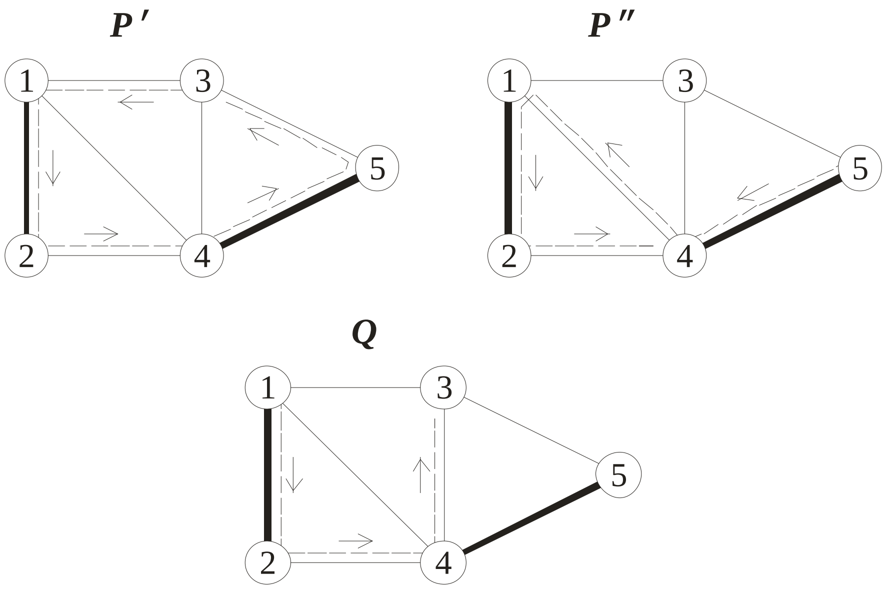
Uwaga:

Zagadnienie wyznaczania maksymalnego skojarzenia w grafie jako problem algorytmiczny ma <u>złożoność wielomianową</u>, ale zagadnienie wyznaczania maksymalnego zbioru wewnętrznie stabilnego wierzchołków należy niestety do klasy problemów <u>NP-trudnych</u>.

Rozważmy skojarzenie $M \subseteq E$ w grafie $G = (V, E)$

- ***Drogą przemienną względem skojarzenia*** *M* w grafie *G* nazywamy drogę prostą w tym grafie, której kolejne krawędzie na przemian albo należą, albo nie należą do *M*.

Przykłady dróg w grafie ze skojarzeniem



P' = (3, {3, 1}, 1, {1, 2}, 2, {2, 4}, 4, {4, 5}, 5, {3, 5}, 3) jest drogą przemienną względem skojarzenia M = {{1, 2}, {4, 5}};

P'' = (5, {4, 5}, 4, {1, 4}, 1, {1, 2}, 2, {2, 4}, 4) jest drogą przemienną względem skojarzenia *M*;

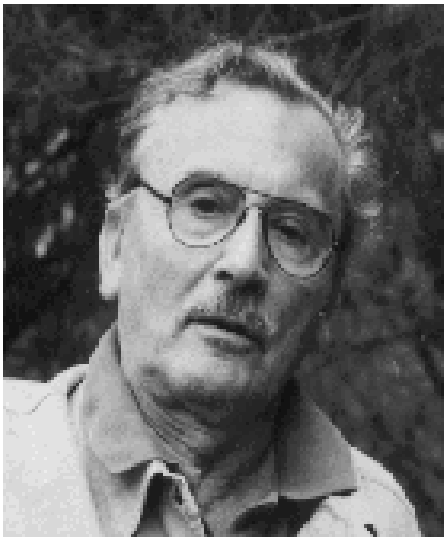
Q nie jest drogą przemienną względem *M*.

Wierzchołki grafu incydentne z krawędziami należącymi do skojarzenia *M* nazywamy ***wierzchołkami nasyconymi***, natomiast pozostałe wierzchołki grafu nazywamy ***wierzchołkami nienasyconymi***.

- ***Drogą powiększającą względem skojarzenia*** M w grafie G nazywamy drogę przemienną względem M, która nie jest cyklem i której końce są wierzchołkami nienasyconymi względem tego skojarzenia.

Twierdzenie (Berge, 1957)

Skojarzenie M w grafie G jest skojarzeniem o maksymalnej mocy wtedy i tylko wtedy, kiedy graf G nie zawiera drogi powiększającej względem M.

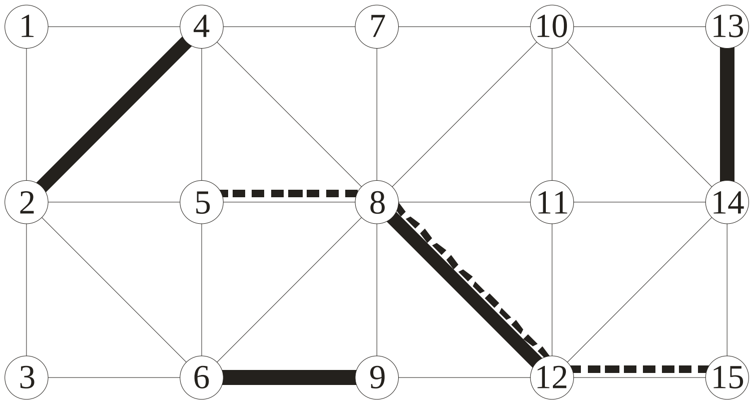


Claude Berge (1926 – 2002)

Dowód twierdzenia oparty jest na spostrzeżeniu, że jeśli w grafie G istnieje droga P powiększająca względem skojarzenia M, to zbiór krawędzi $M \otimes E(P)$ jest także skojarzeniem w grafie G i ma moc o jeden większą od mocy M .

$E(P)$ oznacza zbiór krawędzi w drodze P.

Przykłady wykorzystania tw. Berga



Skojarzenie $M = \{\{2, 4\}, \{6, 9\}, \{8, 12\}, \{13, 14\}\}$ o mocy $|M| = 4$;

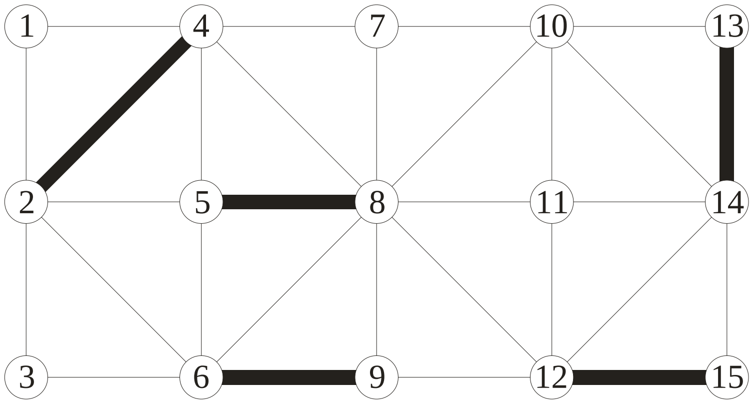
droga $P = (5, \{5, 8\}, 8, \{8, 12\}, 12, \{12, 15\}, 15\}$ jest drogą powiększającą względem M (jest drogą przemienną względem M oraz wierzchołki 5 i 12 są nienasycone względem M);

$M' = M \otimes E(P) =$

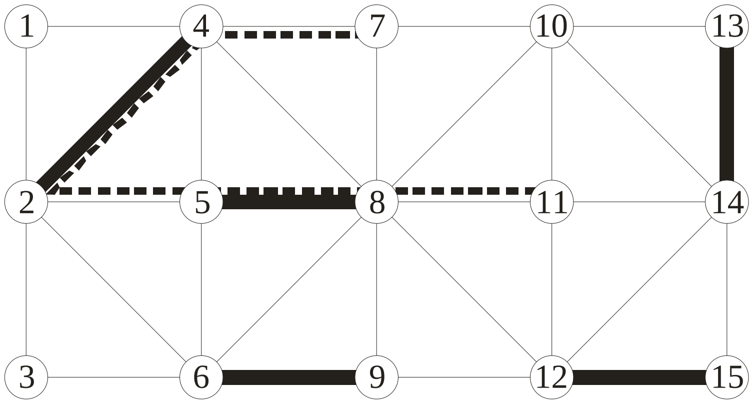
$\{\{2, 4\}, \{6, 9\}, \{8, 12\}, \{13, 14\}\} \otimes \{\{5, 8\}, \{8, 12\}, \{12, 15\}\} =$

$= \{\{2, 4\}, \{5, 8\}, \{6, 9\}, \{12, 15\}, \{13, 14\}\}$

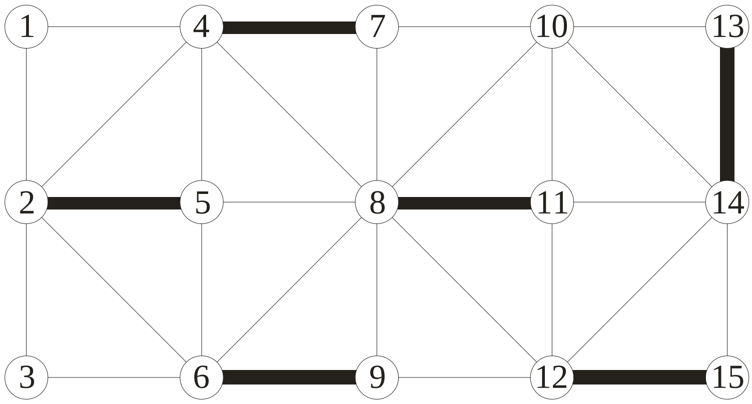
jest skojarzeniem w grafie G i $|M'| = 5$.



Dla skojarzenia M' :



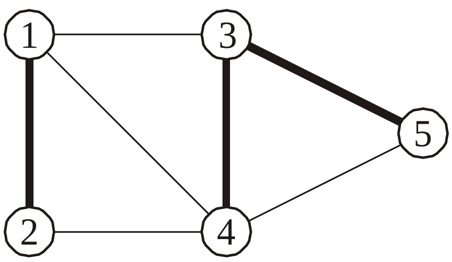
można zbudować skojarzeniem M'' o mocy równej 6.



POKRYCIA KRAWĘDZIOWE i WIERZCHOŁKOWE

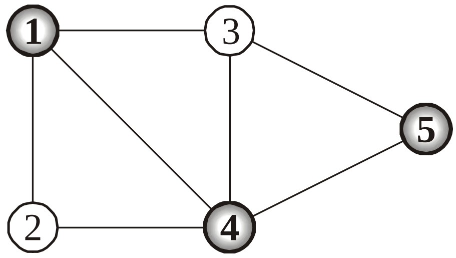
- ***Pokryciem krawędziowym*** grafu nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, że każdy wierzchołek grafu jest incydentny z co najmniej jedną krawędzią z tego podzbioru.

Przykład pokrycia krawędziowego



- ***Pokryciem wierzchołkowym*** grafu nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, że każda krawędź grafu jest incydentna z co najmniej jednym wierzchołkiem z tego podzbioru.

Przykład pokrycia wierzchołkowego



Uwaga:

Zagadnienie wyznaczania minimalnego pokrycia krawędziowego w grafie jako problem algorytmiczny ma złożoność wielomianową, ale zagadnienie wyznaczania minimalnego pokrycia wierzchołkowego należy niestety do klasy problemów NP-trudnych.

Dla grafu G bez wierzchołków izolowanych przyjmijmy oznaczenia:

$\nu(G)$ - maksymalna liczba krawędzi niezależnych w grafie G,

$\alpha(G)$ - maksymalna liczba wierzchołków niezależnych w grafie G,

$\rho(G)$ - minimalna liczba krawędzi pokrywających wszystkie wierzchołki grafu G,

$\tau(G)$ - minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie grafu G.

Twierdzenie (Gallai, 1959)

Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem bez wierzchołków izolowanych, to

$$\alpha(G) + \tau(G) = |V|,$$

czyli maksymalna moc zbioru wewnętrznie stabilnego wierzchołków i minimalna moc pokrycia wierzchołkowego sumują się do liczby wierzchołków w grafie, oraz

$$\nu(G) + \rho(G) = |V|,$$

czyli maksymalna moc skojarzenia i minimalna moc pokrycia krawędziowego także sumują się do liczby wierzchołków w grafie.

Ponadto zachodzą nierówności:

$$\nu(G) \le \tau(G) \qquad \text{i} \qquad \alpha(G) \le \rho(G).$$

(maks.moc skojarz. ≤ min.moc pokr.wierz.) (maks.moc zb.w.stab. ≤ min.moc pokr.kraw.)

Twierdzenie (König, 1916)

Jeśli graf jest dwudzielny, to $\nu(G) = \tau(G)$

(maksymalna moc skojarzenia jest równa minimalnej mocy pokrycia wierzchołkowego).

- ***Skojarzeniem doskonałym*** w grafie nazywamy takie skojarzenie, względem którego wszystkie wierzchołki tego grafu są nasycone.

Dla grafu $G = (V, E)$ i podzbioru $S \subseteq V$ przyjmijmy oznaczenie:

$q(G–S)$ - liczba składowych spójnych o nieparzystej liczbie wierzchołków w podgrafie grafu G, indukowanym przez podzbiór wierzchołków $V \setminus S$.

<u>Twierdzenie</u> (Tutte, 1947)

Graf G ma skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, kiedy

$$q(G–S) \leq | S | \text{ dla każdego } S \subseteq V.$$

Rozważmy teraz graf <u>dwudzielny</u> $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

- ***Skojarzeniem pełnym względem zbioru V₁*** (lub V_2) nazywamy takie skojarzenie w grafie G, względem którego wszystkie wierzchołki $v \in V_1$ (lub $v \in V_2$) są nasycone.

Dla podzbioru $S \subseteq V_1$ przyjmijmy oznaczenie:

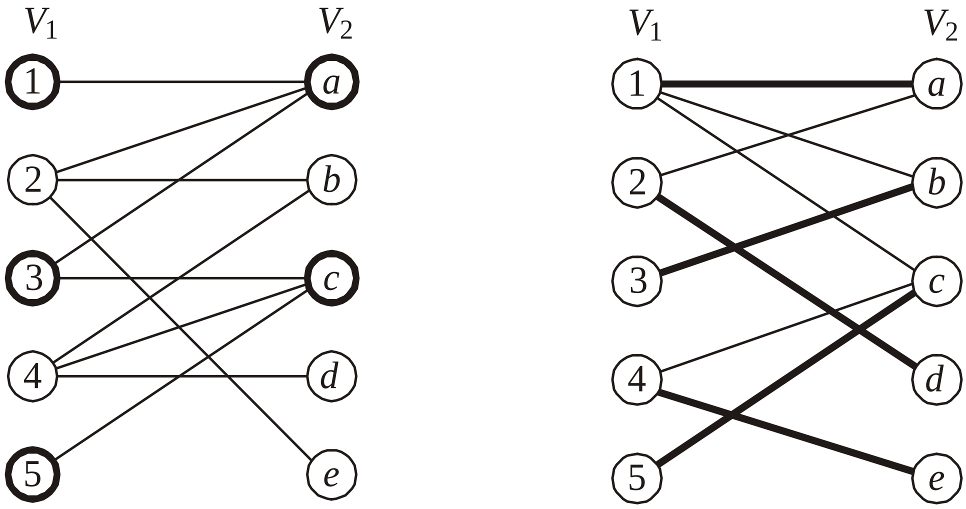
$N(S)$ – zbiór takich wierzchołków $v_2 \in V_2$, dla których istnieje w zbiorze S co najmniej jeden wierzchołek sąsiedni ($N(S) \subseteq V_2$).

<u>Twierdzenie</u> (Hall, 1935) – tzw. „twierdzenie o małżeństwach"

W grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ istnieje skojarzenie pełne względem zbioru V_1 wtedy i tylko wtedy, kiedy

$$| N(S) | \geq | S | \text{ dla każdego } S \subseteq V_1 .$$

Przykład sprawdzania warunku z tw. Halla



$N(\{1, 3, 5\}) = \{a, c\}$

(warunek Halla nie zachodzi) (istnieje skojarzenie pełne wzg. V_1)

Wniosek (z tw. Halla)

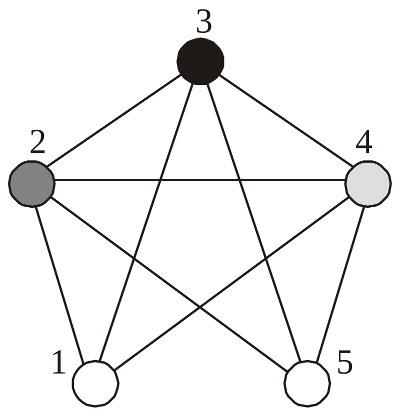
Jeśli niepusty graf *G* jest dwudzielny i regularny, to ma skojarzenie doskonałe.

KOLOROWANIE WIERZCHOŁKÓW GRAFU

Graf *G* jest ***k*-barwny**, jeśli każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z *k* kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory (nazywamy to pokolorowaniem *prawidłowym*).

- ***Liczbą chromatyczną*** grafu *G* (ozn. $\chi(G)$) nazywamy najmniejszą liczbę naturalną *k*, dla której graf ten jest *k*-barwny.

Przykład określenia liczby chromatycznej grafu



$\chi(G) = 4$

Wyznaczenie liczby chromatycznej dla niektórych klas grafów jest łatwe:

- dla grafu K_n liczba chromatyczna wynosi n,
- dla drzewa o co najmniej 2 wierzchołkach – wynosi 2,
- dla niepustego grafu dwudzielnego – wynosi 2,

ale w ogólnym przypadku jako problem algorytmiczny jest NP-trudne.

<u>Proste oszacowania dla liczby chromatycznej:</u>

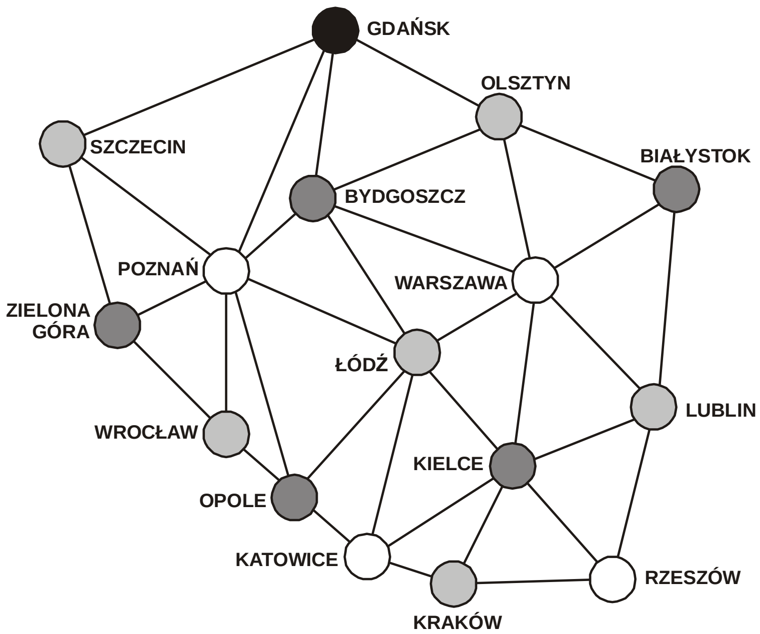
- dla dowolnego grafu G o m krawędziach $\chi(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$

  np. dla m =10 daje to oszacowanie $\chi(G) \le 5$,
- dla dowolnego grafu $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$, gdzie $\Delta(G)$ oznacza maksymalny stopień wierzchołka w grafie G,
- jeśli graf G jest spójny, nie jest grafem pełnym i nie jest cyklem elementarnym o nieparzystej długości, to $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Przez stulecia rozważany był problem znany jako „*zagadnienie 4 barw*”: czy każdą mapę płaską można *prawidłowo* pokolorować 4 barwami?

- pierwsza pisana wzmianka o problemie – list do De Morgana (1852)
- dowód rozstrzygającego twierdzenia (ze wspomaganiem komputerowym) – Appel i Haken (1976)

Przykład zagadnienia kolorowania mapy płaskiej



Twierdzenie „o czterech barwach”

Każdy graf planarny jest 4-barwny.

(każdą mapę płaską można pokolorować czterema barwami tak, że każde dwa obszary o wspólnej granicy będą miały różne barwy)

Twierdzenie (Grötzsch, 1959)

Każdy graf planarny, który nie zawiera podgrafu izomorficznego z K_3, jest 3-barwny.

Twierdzenie (König, 1916)

Graf jest 2-barwny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera cykli o nieparzystej długości.

REPETYTORIUM Z GRAFÓW

Graf = para uporządkowana dwóch zbiorów

Graf nieskierowany	***Graf skierowany***
$G = (V, E)$, wierzchołki i krawędzie, $E \subseteq \{\{i, j\} : i \neq j \text{ i } i, j \in V\}$;	$D = (V, A)$, wierzchołki i łuki, $A \subseteq V \times V$;

incydencja, sąsiedztwo, zależność

$d(v)$ – stopień wierzchołka v $d(v) = 0$ – wierzchołek izolowany, $d(v) = 1$ – liść	$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ – stopień wierzchołka v : $d^+(v)$ – stopień wyjściowy v , $d^-(v)$ – stopień wejściowy v

Pochodny graf $G(D) = (V, E_D)$ dla grafu skierowanego $D = (V, A)$:

$$\{i, j\} \in E_D \Leftrightarrow (i, j) \in A \vee (j, i) \in A \quad \text{dla } i \neq j$$

Graf **pełny** (dla $|V| = n$):

$E = \{\{i, j\} : i \neq j \text{ i } i, j \in V\}$; $\lvert E \rvert = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$; ozn. K_n	$A = V \times V$; $\lvert A \rvert = n^2$

Dopełnienie grafu:

$\overline{G} = (V, \overline{E})$: $\overline{E} = \{\{i, j\}: i, j \in V, i \neq j, \{i, j\} \notin E\}$	$\overline{D} = (V, \overline{A})$: $\overline{A} = V \times V \setminus A$

Graf **krawędziowy**:

$L(G) = (E, L(E))$: $\{e_1, e_2\} \in L(E) \Leftrightarrow e_1$ i e_2 są zależne	$L(D) = (A, L(A))$: $(a_1, a_2) \in L(A) \Leftrightarrow a_1$ i a_2 są zależne

Związki pomiędzy stopniami wierzch. i liczbą krawędzi (łuków):

$\sum_{i\in V} d(i) = 2\lvert E\rvert$	$\sum_{i\in V} d(i) = 2\lvert A\rvert$, $\sum_{i\in V} d^-(i) = \sum_{i\in V} d^+(i) = \lvert A\rvert$

Macierzowy opis grafu (dla | V | = n i | E | = m lub | A | = m):

- Macierz **incydencji**

$I(G) = [s_{ij}]_{i=1,\ldots,n\ \ j=1,\ldots,m}$ $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \ i \in e_j \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases}$	$I(D) = [s_{ij}]_{i=1,\ldots,n\ \ j=1,\ldots,m}$ $s_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jesli } \ a_j = (k,i) \\ 1 & \text{jesli } \ a_j = (i,k) \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases}$

- Macierz **sąsiedztwa**

$B(G) = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,n\ \ j=1,\ldots,n}$ $b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \ \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases}$	$B(D) = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,\ n\ \ j=1,\ldots,\ n}$ $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \ (i,j) \in A \\ 0 & \text{w przec. przyp.} \end{cases}$

Izomorfizm grafów:

$G \cong G'$ $\exists\ f : V \xrightarrow{1-1} V'$ taka, że $\forall\ i, j \in V$ zachodzi $\{i,j\} \in E \Leftrightarrow \{f(i),\ f(j)\} \in E'$	$D \cong D'$ $\exists\ f : V \xrightarrow{1-1} V'$ taka, że $\forall\ i, j \in V$ zachodzi $(i,j) \in A \Leftrightarrow \left(f(i),\ f(j)\right) \in A'$

Graf **dwudzielny**:

$G = (V_1 \cup V_2, E)$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

wierzchołki w każdym ze zbiorów V_1 i V_2 są parami niezależne.

Graf **dwudzielny pełny**: oznaczenie $K_{r,s}$

Graf **planarny**:

graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$

(grafami **homeomorficznymi** z danym grafem nazywamy takie grafy, które można z niego otrzymać przez podział krawędzi dodatkowymi wierzchołkami stopnia 2)

Droga w grafie:

naprzemienny ciąg wierzchołków i krawędzi grafu	naprzemienny ciąg wierzchołków i łuków grafu
$(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{t-1}, e_t, v_t),$	$(v_0, a_1, v_1, a_2, ..., v_{t-1}, a_t, v_t),$
spełniający warunek	spełniający warunek
$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ dla $i = 1, ..., t$	$a_i = (v_{i-1}, v_i)$ dla $i = 1, ..., t$

Droga **prosta**:

żadna krawędź się nie powtarza	żaden łuk się nie powtarza

Droga **elementarna**:

żaden wierzchołek się nie powtarza.

Cykl w grafie:

droga zamkniętą, dla której $v_0 = v_t$ i $t > 0$

Istnienie drogi i cyklu w grafie G o minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G)$:

- w grafie G istnieje droga elementarna o długości co najmniej $\delta(G)$,
- dla $\delta(G) \geq 2$ istnieje w grafie G cykl elementarny o długości co najmniej $\delta(G)+1$.

Graf **spójny**:

dla każdej pary wierzchołków *u* i *v* istnieje w nim droga z *u* do *v*	pochodny graf nieskierowny jest spójny

Graf **silnie spójny**:

dla każdej pary wierzchołków *u* i *v* istnieje w nim droga z *u* do *v*

Składowa spójna grafu:

podgraf danego grafu, który jest spójny i nie jest podgrafem innego grafu spójnego.

Związek liczby krawędzi (*m*), wierzchołków (*n*) i składowych spójnych (*k*) w grafie:

$$(n-k) \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Warunek **konieczny i dostateczny dwudzielności** grafu:

dla n ≥ 2 graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

Związek z liczbą ścian (*f*) w grafie planarnym:

$$n - m + f = k + 1$$

Warunki **konieczne planarności** grafu:

- jeśli graf jest planarny i $n \geq 3$, to $m \leq 3n - 6$,
- jeśli graf dwudzielny jest planarny i $n \geq 3$, to $m \leq 2n - 4$,
- jeśli graf jest planarny, to musi zawierać co najmniej jeden wierzchołek o stopniu mniejszym niż 6.

Metody przeszukiwania grafu:

- przeszukiwanie grafu w głąb z „zamykaniem” wierzchołków,
- przeszukiwanie grafu wszerz z usuwaniem „nowości” wierzchołków.

Droga Eulera w grafie:

droga prosta, która zawiera wszystkie krawędzie grafu	droga prosta, która zawiera wszystkie łuki grafu

Cykl Eulera w grafie:

zamknięta droga Eulera

Warunek **konieczny i dostateczny istnienia cyklu Eulera**:

graf jest spójny i dla każdego wierzchołka jego stopień $d(v)$ jest liczbą parzystą	graf jest spójny i dla każdego wierzchołka zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$

Warunek **konieczny i dostateczny istnienia drogi Eulera**:

graf jest spójny i dla nie więcej niż dwóch wierzchołków ich stopień jest liczbą nieparzystą	graf jest spójny i albo dla każdego wierzchołka zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$, albo dla dokładnie dwóch wierzchołków v_1 i v_2 ten warunek nie zachodzi, ale spełniona jest dla nich równość $d^+(v_1)–d^-(v_1)=d^-(v_2)–d^+(v_2)=1$

Mosty są wykorzystywane w **algorytmie Fleury’ego**.

Droga Hamiltona w grafie:

droga elementarna, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu

Cykl Hamiltona w grafie:

zamkniętą droga Hamiltona o długości $|V|$

Liczba cykli Hamiltona w grafie pełnym dla $n \geq 3$:

$\frac{(n-1)!}{2}$	$(n-1)!$

Warunki **dostateczne istnienia cyklu Hamiltona**:

- jeśli $n \geq 3$ i dla każdej pary niezależnych wierzchołków v i w zachodzi $d(v) + d(w) \geq n$, to graf ma cykl Hamiltona;
- jeśli $n \geq 3$ i dla każdego wierzchołka zachodzi $d(v) \geq \frac{n}{2}$, to graf ma cykl Hamiltona;
- jesli $n \geq 3$ i graf ma co najmniej $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi, to ma on cykl Hamiltona;
- jeśli $n \geq 2$, graf jest silnie spójny i bez pętli oraz dla każdej pary niezależnych wierzchołków v i w zachodzi $d(v) + d(w) \geq 2n - 1$, to graf ma cykl Hamiltona;
- jeśli $n \geq 2$, graf jest bez pętli i dla każdego wierzchołka zachodzi $d^{+}(v) \geq \frac{n}{2}$ oraz $d^{-}(v) \geq \frac{n}{2}$, to graf ma cykl Hamiltona;

• jeśli istnieje ciąg $(a_1, a_2, ..., a_n)$, w którym zachodzi $a_i \le i \Rightarrow a_{n-i} \ge n - i$ dla $i < \frac{n}{2}$, i dla którego sekwencja wstępująca stopni wierzchołków grafu spełnia warunek $d_i(G) \ge a_i$, to graf ma cykl Hamiltona.	• jeśli graf jest silnie spójnym **turniejem**, to ma cykl Hamiltona (każdy turniej ma drogę Hamiltona).

Drzewo:

- graf spójny bez cykli elementarnych,
- graf o n–1 krawędziach bez cykli elementarnych,
- graf spójny o n–1 krawędziach,
- graf spójny, którego każda krawędź jest mostem,
- graf, którego każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą,
- graf bez cykli elementarnych, w którym dołączenie nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl elementarny.

Las:

- graf bez cykli elementarnych

Drzewo rozpinające grafu $G = (V, E)$:

- drzewo $G_T = (V, T)$ takie, że $T \subseteq E$

Liczba drzew rozpinających w grafie pełnym K_n (dla $n \ge 2$):

$$n^{n-2}$$

Kod **Prüfera**.

(Rozpinające) **drzewa przeglądu** grafu w głąb i wszerz.

Dla $G_T = (V, T)$, które jest drzewem rozpinającym grafu $G = (V, E)$:

- T – zbiór **gałęzi**,
- $E \setminus T$ – zbiór **cięciw**,
- $\Omega = \{C_e : e \in E \setminus T\}$ – zbiór **cykli fundamentalnych**.

Przedstawienie cyklu prostego w grafie spójnym $G = (V, E)$:
dla dowolnego drzewa rozpinającego $G_T = (V, T)$ każdy cykl prosty C w grafie G można jednoznacznie przedstawić jako różnicę symetryczną cykli fundamentalnych:

$$C = C_{e_1} \otimes C_{e_2} \otimes \ldots \otimes C_{e_k},$$

gdzie $\{e_1, \ldots, e_k\} = C \setminus T$ jest zbiorem cięciw względem drzewa G_T.

Spójność krawędziowa $\boldsymbol{\lambda(G)}$ grafu spójnego G (dla $n \geq 2$) to najmniejsza moc zbioru rozspajającego ten graf;

graf jest **k-spójny krawędziowo**, jeśli $\lambda(G) \geq k$.

Spójność wierzchołkowa $\boldsymbol{\kappa(G)}$ grafu spójnego G (dla $n \geq 2$) to najmniejsza moc zbioru rozdzielającego ten graf;

graf jest **k-spójny** (*wierzchołkowo*), jeśli $\kappa(G) \geq k$.

$$\kappa(G) \leq \lambda(G)$$

Związki liczby dróg łączących dwa dane wierzchołki grafu z liczbą elementów w zbiorach rozspajających i rozdzielających te wierzch.:

- maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki *v* i *w* w grafie spójnym, jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym *v* i *w*,
- maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki niesąsiednie *v* i *w* w grafie spójnym, jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym *v* i *w*.

Związki liczby dróg łączących pary różnych wierzchołków w grafie z odpornością grafu na utratę spójności:

- graf jest *k*-spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona co najmniej *k* drogami krawędziowo rozłącznymi,
- graf o co najmniej *k*+1 wierzchołkach jest *k*-spójny (wierzchołkowo) wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona co najmniej *k* drogami wierzchołkowo rozłącznymi.

Uogólnione związki liczby dróg łączących dwa zbiory wierzchołków z liczbą wierzchołków rozdzielających te zbiory:

- uogólnieniem pojęcia zbioru rozdzielającego jest *S*-*T* separator,
- uogólnieniem pojęcia zbioru dróg wierzchołkowo rozłącznych jest *S*-*T* konektor,

- jeżeli w grafie skierowanym $D = (V, A)$ wybrano dwa podzbiory $S, T \subseteq V$ oraz wyznaczono minimalną moc S-T separatora równą s, to istnieje S-T konektor $Q = (V_Q, A_Q)$ grafu D o mocy s.

Związki liczby dróg łączących dwa dane wierzchołki grafu skierowanego z liczbą elementów w zbiorach rozspajających i rozdzielających te wierzchołki:

- jeżeli w grafie skierowanym $D = (V, A)$ wybrano dwa różne wierzchołki v i w, takie że $(v, w) \notin A$, to minimalna moc zbioru rozdzielającego wierzchołki v i w jest równa maksymalnej liczbie dróg wierzchołkowo rozłącznych z v do w;
- jeżeli w grafie skierowanym $D = (V, A)$ wybrano dwa różne wierzchołki v i w, to minimalna moc zbioru rozspajającego wierzchołki v i w jest równa maksymalnej liczbie dróg łukowo rozłącznych z v do w.

Związki liczby dróg łączących pary różnych wierzchołków w grafie skierowanym z odpornością grafu na utratę spójności:

- graf skierowany jest k-spójny wierzchołkowo, jeśli dla każdych dwóch różnych jego wierzchołków v i w istnieje co najmniej k dróg wierzchołkowo rozłącznych z v do w;
- graf skierowany jest k-spójny łukowo, jeśli dla każdych dwóch różnych jego wierzchołków v i w istnieje co najmniej k dróg łukowo rozłącznych z v do w.

Sieć = graf skierowany z wyróżnionymi dwoma wierzchołkami (źródło i ujście) + przepustowości wszystkich łuków

Przepływ w sieci ze źródła do ujścia = wartości przepływów przez wszystkie łuki, mieszczące się w granicach przepustowości i spełniające warunek zachowania przepływu we wszystkich wierzchołkach poza źródłem i ujściem.

Wartość przepływu przez sieć = bilans wypływu i wpływu do źródła = bilans wpływu i wypływu z ujścia.

Przekrój sieci = zbiór łuków wychodzących z zadanego zbioru wierzchołków.

Przepływ przez przekrój = suma przepływów przez łuki przekroju.

Przepustowość przekroju = suma przepustowości łuków przekroju.

Minimalny przekrój sieci = przekrój zadany zbiorem wierzchołków zawierającym źródło, którego przepustowość jest minimalna.

Związek przepustowości minimalnego przekroju z maksymalnym przepływem przez sieć:

- w każdej sieci maksymalna wartość przepływu ze źródła do ujścia jest równa przepustowości minimalnego przekroju pomiędzy źródłem i ujściem.

Podstawa wyznaczania maksymalnego przepływu:

- przepływ w sieci jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie istnieje dla niego ścieżka powiększająca ze źródła do ujścia.

Skojarzenie w grafie = podzbiór krawędzi, które są parami niezależne.

Zbiór wewnętrznie stabilny wierzchołków = podzbiór wierzchołków, które są parami niezależne.

Podstawa wyznaczania skojarzenia maksymalnej mocy:

- skojarzenie w grafie ma maksymalną moc wtedy i tylko wtedy, kiedy ten graf nie zawiera drogi powiększającej względem tego skojarzenia.

Pokrycie krawędziowe grafu = taki podzbiór jego krawędzi, że każdy wierzchołek grafu jest incydentny z co najmniej jedną krawędzią z tego podzbioru.

Pokrycie wierzchołkowe grafu = taki podzbiór jego wierzchołków, że każda krawędź grafu jest incydentna z co najmniej jednym wierzchołkiem z tego podzbioru.

Związki pomiędzy mocami skojarzenia, zbioru wewnętrznie stabilnego wierzchołków i mocami pokryć:

- maksymalna moc zbioru wewnętrznie stabilnego wierzchołków i minimalna moc pokrycia wierzchołkowego sumują się do liczby wierzchołków w grafie,
- maksymalna moc skojarzenia i minimalna moc pokrycia krawędziowego także sumują się do liczby wierzchołków w grafie,
- maksymalna moc skojarzenia nie przekracza minimalnej mocy pokrycia wierzchołkowego,

- maksymalna moc zbioru wewnętrzne stabilnego wierzchołków nie przekracza minimalnej mocy pokrycia krawędziowego,
- jeśli graf jest dwudzielny, to maksymalna moc skojarzenia jest równa minimalnej mocy pokrycia wierzchołkowego.

Skojarzenie doskonałe = takie skojarzenie, względem którego wszystkie wierzchołki tego grafu są nasycone.

Warunek konieczny i dostateczny istnienia skojarzenia doskonałego:

- graf $G = (V, E)$ ma skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, kiedy liczba składowych spójnych o nieparzystej liczbie wierzchołków w podgrafie grafu G, indukowanym przez podzbiór wierzchołków $V \setminus S$, nie przekracza liczby wierzchołków w zbiorze S dla każdego wyboru $S \subseteq V$.

Skojarzenie pełne względem zbioru V_1 (lub V_2) w grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ = takie skojarzenie, względem którego wszystkie wierzchołki $v \in V_1$ (lub $v \in V_2$) są nasycone.

Warunek konieczny i dostateczny istnienia skojarzenia pełnego względem V_1:

- w grafie dwudzielnym istnieje skojarzenie pełne względem zbioru V_1 wtedy i tylko wtedy, kiedy zbiór takich wierzchołków $v_2 \in V_2$, dla których istnieje w zbiorze $S \subseteq V_1$ co najmniej jeden wierzchołek sąsiedni, liczy co najmniej tyle samo elementów co zbiór S dla każdego wyboru $S \subseteq V_1$.

Graf jest **k-barwny**, jeśli można **prawidłowo** pokolorować jego wierzchołki, tzn. każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory.

Liczba chromatyczna grafu $\chi(G)$ = najmniejsza liczba naturalna k, dla której graf ten jest k-barwny.

Ile barw potrzeba do prawidłowego pokolorowania grafu?

- każdy graf planarny jest czterobarwny,
- każdy graf planarny, który nie zawiera podgrafu izomorficznego z K_3, jest trzybarwny,
- graf jest dwubarwny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera cykli o nieparzystej długości,
- każde drzewo jest dwubarwne,
- każdy graf dwudzielny jest dwubarwny,
- graf pełny K_n jest n-barwny.