

# WKR egzamin - Zakres materiału

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

WKR - zaliczenie przedmiotu

WKR - zaliczenie egzaminu

- Wprowadzenie do przedmiotu; notacja i pojęcia elementarne; bezpieczeństwo informacji: poufność, integralność, uwierzytelnienie, identyfikacja; definicja i własności kryptosystemu; zasada Kerckhoffsa; teoria liczb; algebra abstrakcyjna.
- Podział i rodzaje szyfrów; twierdzenie Shanonna; algorytm Euklidesa i rozszerzona jego postać; kodowanie alfabetu; obliczanie odwrotności multiplikatywnej; szyfr przesuwający; szyfr afiniczny; szyfr Vigenere'a; szyfr Hilla.
- Generator grupy multiplikatywnej; problemy teorii liczb w kryptografii: problem rozkładu liczby całkowitej na czynniki pierwsze, problem logarytmu dyskretnego, problem Diffie-Hellmana.

# WKR egzamin - Zakres materiału

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

WKR - zaliczenie przedmiotu

WKR - zaliczenie egzaminu

## I

- Kryptografia asymetryczna - idea i własności kryptosystemów klucza publicznego.
- Algorytm Diffie-Hellmana; bezpieczeństwo algorytmu DH: atak metodą: „man in the middle”.
- Kryptosystem RSA: generacja kluczy, szyfrowanie/deszyfrowanie, generacja i weryfikacja podpisu cyfrowego; bezpieczeństwo kryptosystemu RSA.
- Kryptosystem ElGamala: generacja kluczy, szyfrowanie/deszyfrowanie, generacja i weryfikacja podpisu cyfrowego; bezpieczeństwo kryptosystemu ElGamala.

# WKR egzamin - Zakres materiału

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

WKR - zaliczenie przedmiotu

WKR - zaliczenie egzaminu

- Szyfry strumieniowe – idea szyfrowania strumieniowego; liniowe rejesty przesuwające ze sprzężeniem zwrotnym - LFSR; generator z filtrem, generator kombinacyjny, złożoność liniowa, szyfr strumieniowy Trivium. I
- Szyfry blokowe – idea szyfrowania blokowego; architektury konstruowania szyfrów blokowych; szyfr blokowy DES; szyfr blokowy AES, tryby pracy szyfrów blokowych.
- Jednokierunkowe funkcje skrótu: klasyfikacja i własności, podstawowe struktury funkcji skrótu: model ogólny iteracyjnej funkcji skrótu, rodzina MD/SHA, funkcje skrótu wykorzystujące szyfry blokowe, konstrukcja gąbki; bezpieczeństwo funkcji skrótu: ataki ogólne (kolizje, pseudokolizje, atak na przeciwbraz), paradoks dnia urodzin, funkcja skrótu SHA-3.

# Kryptologia - zastosowanie

I

- 1** Zastosowania militarne (np. szyfratory)
- 2** Dyplomacja
- 3** Łączność
  - przewodowa (PSTN, ISDN, ...)
  - bezprzewodowa (GSM, SAT, Radio, WiFi, bluetooth, ...)
- 4** Bankowość elektroniczna
- 5** Protokoły internetowe (HTTPS, SSH, SSL - TLS, PGP, ... )
- 6** Motoryzacja i lotnictwo
- 7** Systemy uwierzytelnienia
- 8** Systemy dostępowe
- 9** Kryptowaluty - Bitcoin, Ethereum, Ripe, Litecoin, itd.
- 10** IoT
- 11** ...

Obecnie kryptografia stosowana jest do ochrony wszelkich danych cyfrowych we współczesnym świecie.

Niech  $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

## Definicja

Niech  $a, b \in \mathbb{Z}$  będą liczbami całkowitymi.

Liczba  $b$  dzieli  $a$  ( $b$  jest **dzielnikiem**  $a$ ) jeśli istnieje liczba całkowita  $k$  taka, że  $a = k * b$ .

Jeśli  $b$  dzieli  $a$ , to jest to oznaczane jako  $b|a$ .

Przykład:

- $-3|18$ , ponieważ istnieje liczba całkowita  $-6$  taka, że  $(-3) \cdot (-6) = 18$ ;
- $173|0$ , ponieważ istnieje liczba całkowita  $0$  taka, że  $173 \cdot 0 = 0$ .

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Algorytm dzielenia liczb całkowitych

Jeśli  $a \in \mathbb{Z}$  i  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , to dzielenie całkowitoliczbowe  $a$  przez  $n$  daje w wyniku liczbę całkowitą  $q$  (*część całkowita dzielenia*) oraz resztę  $r$  (*reszta dzielenia*) takie że:

$$a = qn + r$$

przy czym  $0 \leq r < n$ .

Przykład:

Niech  $a = 73$  i  $n = 17$ , to:

$$q = 73 \text{ div } 17 = 4$$

$$r = 73 \text{ mod } 17 = 5.$$

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Liczba całkowita  $d$  jest wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  i  $b$  wówczas, gdy  $d|a$  oraz  $d|b$ .

## Definicja

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitoliczbowych  $a$  i  $b$ , nazywa się taką nieujemną liczbę  $d$ , oznaczaną  $d = \gcd(a, b)$  ( $d = \text{nwd}(a, b)$ ), która jest wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  oraz  $b$ , a przy tym każdy wspólny dzielnik  $a$  i  $b$  dzieli  $d$ .

Symbolicznie można to wyrazić następująco:  $d = \gcd(a, b)$ , gdy:

- 1  $d|a$  i  $d|b$ ,
- 2 jeśli  $c|a$  i  $c|b$ , to  $c|d$  dla dowolnej liczby  $c$ .

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Dwie liczby całkowite  $a, b \in \mathbb{Z}$  są względnie pierwsze wówczas, gdy  $\gcd(a, b) = 1$ .

Szybkim sposobem określenia, czy dwie liczby są względnie pierwsze jest algorytm Euklidesa.



## Przykłady:

- liczby 6 i 35 są względnie pierwsze, ale 6 i 27 nie są, gdyż obie są podzielne przez 3,
- liczba 1 jest względnie pierwsza z każdą liczbą całkowitą,
- liczby 10, 12 i 15 są względnie pierwsze, ale nie są parami względnie pierwsze.

# Kongruencje

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Niech:

$n \in N$  będzie liczbą naturalną bez zera;  
 $a, b \in Z$  będą liczbami całkowitymi.

## Definicja

Liczba  $a$  jest **kongruentna** do  $b$  ( $a$  przystaje do  $b$ ) modulo  $n$ , co zapisujemy  $a \equiv b \text{ mod } n$ , jeśli  $n|(a - b)$ .

Liczbę  $n$  nazywamy modułem kongruencji.

Przykład:

- $24 \equiv 9 \text{ mod } 5$ , ponieważ  $5|(24 - 9)$ ,
- $23 \equiv -5 \text{ mod } 7$ , ponieważ  $7|(23 - (-5))$ ,
- $-5 \equiv 4 \text{ mod } 3$ , ponieważ  $3|(-5 - 4)$ .

# Odwrotność multiplikatywna

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Odwrotnością multiplikatywną  $a$  modulo  $n$  nazywamy liczbę całkowitą  $a^{-1} \in Z_n$  taką, że  $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ .

Jeśli takie  $a^{-1}$  istnieje, to mówimy, że  $a$  jest odwracalne.

I

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawowy matematycznie

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Liczba całkowita  $d$  jest wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  i  $b$  wówczas, gdy  $d|a$  oraz  $d|b$ .

## Definicja

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitoliczbowych  $a$  i  $b$ , nazywa się taką nieujemną liczbę  $d$ , oznaczaną  $d = \gcd(a, b)$  ( $d = \text{nwd}(a, b)$ ), która jest wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  oraz  $b$ , a przy tym każdy wspólny dzielnik  $a$  i  $b$  dzieli  $d$ .

Symbolicznie można to wyrazić następująco:  $d = \gcd(a, b)$ , gdy:

- 1  $d|a$  i  $d|b$ ,
- 2 jeśli  $c|a$  i  $c|b$ , to  $c|d$  dla dowolnej liczby  $c$ .

Przykład:

Wspólnymi dzielnikami liczb 12 i 18 są  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ .

Największy wspólny dzielnik liczb 12 i 18:  $\gcd(12, 18) = 6$ .

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Algorytm dzielenia liczb całkowitych

Jeśli  $a \in \mathbb{Z}$  i  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , to dzielenie całkowitoliczbowe  $a$  przez  $n$  daje w wyniku liczbę całkowitą  $q$  (*część całkowita dzielenia*) oraz resztę  $r$  (*reszta dzielenia*) takie że:

$$a = qn + r$$

przy czym  $0 \leq r < n$ .

# Odwrotność multiplikatywna

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Odwrotnością multiplikatywną  $a$  modulo  $n$  nazywamy liczbę całkowitą  $a^{-1} \in Z_n$  taką, że  $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ .

Jeśli takie  $a^{-1}$  istnieje, to mówimy, że  $a$  jest odwracalne.

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawowy matematyczny

Szłyby - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Liczba całkowita  $d$  jest wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  i  $b$  wówczas, gdy  $d|a$  oraz  $d|b$ .

## Definicja



Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitoliczbowych  $a$  i  $b$ , nazywa się taką nieujemną liczbę  $d$ , oznaczaną  $d = \gcd(a, b)$  ( $d = \text{nwd}(a, b)$ ), która jest wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  oraz  $b$ , a przy tym każdy wspólny dzielnik  $a$  i  $b$  dzieli  $d$ .

Symbolicznie można to wyrazić następująco:  $d = \gcd(a, b)$ , gdy:

- 1  $d|a$  i  $d|b$ ,
- 2 jeśli  $c|a$  i  $c|b$ , to  $c|d$  dla dowolnej liczby  $c$ .

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Dwie liczby całkowite  $a, b \in \mathbb{Z}$  są względnie pierwsze wówczas, gdy  $\gcd(a, b) = 1$ .

Szybkim sposobem określenia, czy dwie liczby są względnie pierwsze jest algorytm Euklidesa.



Przykłady:

- liczby 6 i 35 są względnie pierwsze, ale 6 i 27 nie są, gdyż obie są podzielne przez 3,
- liczba 1 jest względnie pierwsza z każdą liczbą całkowitą,
- liczby 10, 12 i 15 są względnie pierwsze, ale nie są parami względnie pierwsze.

# Dodawanie, odejmowanie, mnożenie modularne

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Niech  $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  - oznacza zbiór liczb całkowitych modulo  $n$ .

## Definicja

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie w  $Z_n$  są wykonywane modulo  $n$ .

I

Przykład:

$$Z_{25} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}.$$

$$(13 + 16) \text{ mod } 25 = 29 \text{ mod } 25 = 4$$

$$(13 - 16) \text{ mod } 25 = -3 \text{ mod } 25 = 22$$

$$(13 \cdot 16) \text{ mod } 25 = 208 \text{ mod } 25 = 8.$$

# Arytmetyka modularna w $Z_n$

- 1 dodawanie jest zamknięte:  $a, b \in Z_n, a + b \in Z_n$ ;
- 2 dodawanie jest przemienne:  $a, b \in Z_n, a + b = b + a$ ;
- 3 dodawanie jest łączne: dla  $a, b, c \in Z_n, (a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- 4 zero jest elementem neutralnym względem dodawania:  
 $a \in Z_n, a + 0 = 0 + a = a$ ;
- 5 elementem przeciwnym do  $a \in Z_n$  jest  $n - a$ :  
 $a + (n - a) = (n - a) + a = 10$ ;
- 6 mnożenie jest zamknięte:  $a, b \in Z_n, ab \in Z_n$ ;
- 7 mnożenie jest przemienne:  $a, b \in Z_n, ab = ba$ ;
- 8 mnożenie jest łączne:  $a, b, c \in Z_n, a(bc) = (ab)c$ ;
- 9 jedynka jest elementem neutralnym względem mnożenia:  
 $a \in Z_n, 1a = a1 = a$ ;
- X elementem odwrotnym do  $a \in Z_n$  jest  $a^{-1} \in Z_n$  taki, że  
 $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ ;
- X dodawanie i mnożenie są działaniami rozdzielnymi:  $a, b, c \in Z_n$ ,  
 $(a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac$ .

# Grupy, pierścienie, ciała

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szłyby – charakterystyka  
Podsumowanie

## Definicja

Zbiór  $Z_n$  z operacją dodawania tworzy strukturę algebraiczną zwaną **grupą przemienną (abelową)**.

## Definicja

Zbiór  $Z_n$  z operacją dodawania i mnożenia jest **pierścieniem przemiennym**.

## Definicja

Jeżeli dla każdego  $a \in Z_n - \{0\}$  istnieje element odwrotny  $a^{-1} \in Z_n$  to taki pierścień nazywamy **ciałem**.



# Grupy, pierścienie, ciała

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawowy matematyczny

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Przykład:

Niech  $n = 5$ , wówczas  $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Działania dodawania i mnożenia w  $Z_5$ :

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Pierścień  $Z_5$  jest ciałem, ponieważ każdy niezerowy element pierścienia jest odwracalny.

# Arytmetyka modularna w $Z_n$

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- 1 dodawanie jest zamknięte:  $a, b \in Z_n, a + b \in Z_n$ ;
- 2 dodawanie jest przemienne:  $a, b \in Z_n, a + b = b + a$ ;
- 3 dodawanie jest łączne: dla  $a, b, c \in Z_n, (a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- 4 zero jest elementem neutralnym względem dodawania:  
 $a \in Z_n, a + 0 = 0 + a = a$ ;
- 5 elementem przeciwnym do  $a \in Z_n$  jest  $n - a$ :  
 $a + (n - a) = (n - a) + a = 0$ ;
- 6 mnożenie jest zamknięte:  $a, b \in Z_n, ab \in Z_n$ ;
- 7 mnożenie jest przemienne:  $a, b \in Z_n, ab = ba$ ;
- 8 mnożenie jest łączne:  $a, b, c \in Z_n, a(bc) = (ab)c$ ;
- 9 jedynka jest elementem neutralnym względem mnożenia:  
 $a \in Z_n, 1a = a1 = a$ ;
- 10 elementem odwrotnym do  $a \in Z_n$  jest  $a^{-1} \in Z_n$  taki, że  
 $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ ;
- 11 dodawanie i mnożenie są działaniami rozdzielnymi:  $a, b, c \in Z_n$ ,  
 $(a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac$ .

# Literatura

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## ■ Literatura podstawowa:

- 1 William Stallings: "Kryptografia i bezpieczeństwo w sieciach komputerowych. Matematyka szyfrów szyfrów i techniki kryptologii"
- 2 William Stallings: "Kryptografia i bezpieczeństwo w sieciach komputerowych. Koncepcje i metody bezpiecznej komunikacji"
- 3 Alfred J. Menezes: "Handbook of Applied Cryptography"
- 4 Jean Philippe Aumasson: "Nowoczesna kryptografia. Praktyczne wprowadzenie do szyfrowania"

## ■ Literatura uzupełniająca:

- 1 R. Stinson: "Cryptography"
- 2 B. Schneier: "Kryptografia dla praktyków"

# Grupy dyskusyjne i fora internetowe

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- **sci.crypt.research** - grupa poświęcona badaniom naukowym z dziedziny kryptologii
- **sci.crypt** - dyskusje związane z wszelkimi aspektami kryptologii
- **alt.security** - forum dyskusji na temat ogólnie pojętego bezpieczeństwa w informatyce
- **comp.security.misc** - forum dyskusyjne na temat bezpieczeństwa użytkowania komputerów
- **fórum Security and Cryptography** w witrynie devshed.com - dyskusje nt. ogólnie pojętego bezpieczeństwa i kryptografii
- **forum Cryptography** w witrynie topix.com - dyskusje są ścisłe zorientowane na techniczne aspekty kryptografii

# Standardy dot. kryptologii

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- 1 NIST (National Institute of Standards and Technology) - Narodowy Instytut Standaryzacji Technologii Stanów Zjednoczonych** - agencja federalna USA zajmująca się teorią i praktyką miar i pomiarów, standardów oraz technologii wykorzystywanych w administracji państwowej i cywilnych agencjach rządowych. Publikowane przez NIST standardy:
  - **FIPS (Federal Information Processing Standard)** - federalny standard przetwarzania informacji,
  - **SP (Special Publications)** - publikacje specjalne, mają zasięg ogólnowiatowy.
- 2 ISO (International Organization for Standardization) - Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna** będąca pozarządową organizacją zrzeszającą krajowe organizacje normalizacyjne (m.in. PKN).
- 3 PKN (Polski Komitet Normalizacyjny)**

# Plan wykładu

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## 1 Podstawowe pojęcia i terminy

## 2 Podstawy matematyczne

- teoria liczb
- kongruencje
- algebra abstrakcyjna

## 3 Szyfry - charakterystyka

- szyfry monoalfabetyczne, szyfry polialfabetyczne
- szyfry przestawieniowe, szyfry podstawieniowe
- szyfry współczesne

## 4 Podsumowanie

# Zagrożenia dla bezpieczeństwa informacji

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## 1 Podśluch:

- zdobycie informacji przechowywanych na stanowisku komputerowym
- zdobycie informacji przesyłanych w sieci
- poznanie protokołów wymiany danych
- poznanie protokołów kryptograficznych

## 2 Ataki na integralność

- 3 Nieuprawniony dostęp do zasobów sieci
- 4 Nieuprawnione działania legalnego użytkownika
- 5 Zaprzeczenie: nadania, odbioru, treści informacji
- 6 Maskarada (masquerade) - polega na podszywaniu się pod legalnego użytkownika.
- 7 Odmowa usługi (Denial of service) - to niemożność korzystania z usługi przez uprawnionych do tego użytkowników.
- 8 Generowanie sztucznego ruchu
- 9 Powtórzenia (replay) - polega na pasywnym przechwyceniu porcji danych i ich retransmisji w celu otrzymania niedozwolonych rezultatów.

# Zagrożenia dla bezpieczeństwa informacji - przykłady

- 1 Główny księgowy przesyła prezesowi plik zawierający poufną informację (np. listę płac w firmie) i jego zawartość absolutnie nie może dostać się w niepowołane ręce. Niestety pracownik Xsiński, przed którym informacja powinna być ukryta, uzyskuje możliwość monitorowania transmisji i uzyskuje kopię tego pliku.
- 2 Prezes przesyła Głównemu Księgowemu poufną informację zwrotną (np. zmodyfikowaną listę płac). Xsiński, który ma możliwość monitorowania transmisji przechwytuje plik, modyfikuje jego zawartość i przesyła zmienioną jego postać do Głównego Księgowego.
- 3 Administrator sieci chce nadać nowym użytkownikom nowe (zmodyfikować istniejące) uprawnienia w sieci. W tym celu przesyła do zarządzanego przez siebie serwera nową listę konfiguracyjną danych uwierzytelniających użytkowników. Użytkownik Xsiński przechwytuje plik konfiguracyjny, modyfikuje go według swoich potrzeb i przesyła do serwera. Serwer aktualnia uprawnienia użytkowników traktując przesłany plik konfiguracyjny jakby został wysłany przez Administratőra.

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

# Zagrożenia dla bezpieczeństwa informacji - przykłady c.d.

- 1 Xsiński zostaje zwolniony z firmy, w związku z czym kierownik działu kadr wysyła do firmowego serwera komunikat nakazujący usunięcie konta Xsińskiemu, które ma zostać potwierdzone przez serwer za pomocą odpowiedniego komunikatu. Xsiński ma możliwość przechwycenia komunikatu przesyłanego do serwera i chwilowego powstrzymania jego przesłania, dzięki czemu zyskuje czas, aby wykraść z serwera poufne informacje firmy. Następnie uwalnia przechwycony komunikat, który dociera do serwera. Serwer kasuje konto Xsińskiego i przesyła o tym komunikat zwrotny. Cała akcja może pozostać dłucho (być może na zawsze) niezauważona.
- 2 Klient przesyła maklerowi zlecenie kupna dużego pakietu akcji firmy X. Makler kupuje akcje, które zaczynają gwałtownie tracić na wartości, ale klient wypiera się wystawionego zlecenia zakupu.

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

# Środki bezpieczeństwa

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- Prawne: ustawy, kodeks karny
- Administracyjno-organizacyjne
  - 1 osoby odpowiedzialne za bezpieczeństwo
  - 2 przepisy i regulaminy postępowania
  - 3 uprawnienia
  - 4 szkolenia
- Fizyczne: kraty, zamki, sejfy, kabiny ekranujące, systemy alarmowe i ppoż.
- Techniczne
  - 1 ochrona dostępu (hasła, uprawnienia)
  - 2 przepisy i regulaminy postępowania
  - 3 ochrona antywirusowa
  - 4 kryptograficzne metody ochrony informacji
  - 5 steganograficzne metody ochrony informacji



# Kryptologia - co to takiego?

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- 1 Kryptologia jest nauką ścisłą, zajmującą się praktycznym zastosowaniem matematyki w ochronie danych.
- 2 Kryptologia zajmuje się utajnionym zapisem danych.
- 3 Kryptologia - nauka o przekazywaniu informacji w sposób zabezpieczony przed niepowołanym dostępem.
- 4 Kryptologia jest nauką o szyfrowaniu, czyli bezpiecznych sposobach przekazywania informacji.
- 5 Kryptologia jest to proces przekształcania danych (tekstu jawnego) w szyfrogram (kryptogram, tekst zaszyfrowany) za pomocą odpowiedniego algorytmu kryptograficznego.  
I  
6 ...
- 7 Kryptologia - nauka obejmująca kryptografię i kryptoanalizę.

# Kryptologia, kryptoanaliza

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

**Kryptologia = kryptografia + kryptoanaliza**

■ Kryptografia - dziedzina wiedzy i badań zajmująca się tworzeniem nowych algorytmów kryptograficznych:

- szyfrów blokowych,
- szyfrów strumieniowych,
- funkcji skrótu,
- algorytmów uwierzytelnionego szyfrowania,
- algorytmów szyfrowania/deszyfrowania kryptografii asymetrycznej,
- algorytmów generacji/weryfikacji podpisu cyfrowego,
- algorytmów uwierzytelnionego szyfrowania,
- ....

■ Kryptoanaliza - dziedzina wiedzy i badań zajmująca się łamaniem istniejących algorytmów kryptograficznych.

# Cele kryptografii - atrybuty ochrony informacji

Wstęp do  
kryptografii

Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie  
do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe  
pojęcia i terminy

Podstawy  
matematyczne

Szyfry -  
charakterystyka

Podsumowanie

- Poufność (Confidentiality)
- Integralność danych (Data integrity)
- Uwierzytelnienie (Authentication)
- Niezaprzeczalność (Non-repudiation)

# Atrybuty ochrony informacji

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

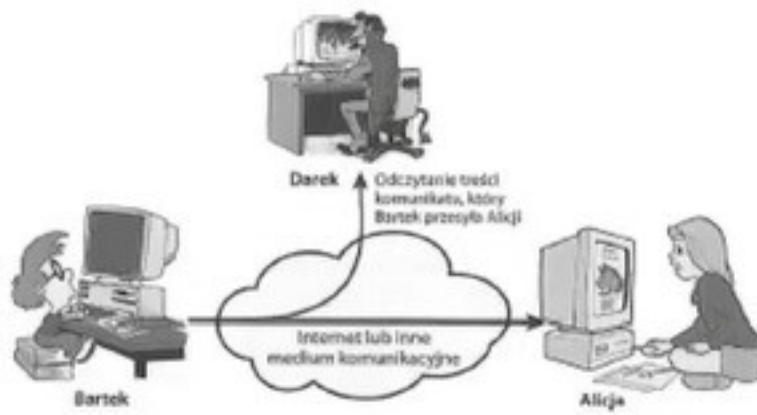
Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- Poufność – zabezpieczenie przed ujawnieniem treści informacji (danych).



# Atrybuty ochrony informacji

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

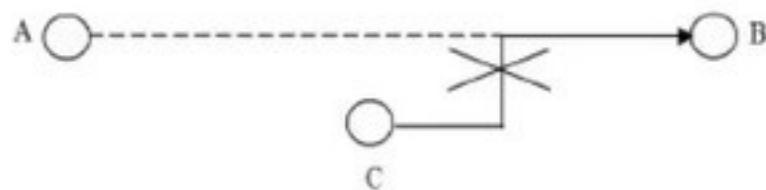
Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- **Uwierzytelnienie** – umożliwia: weryfikację autentyczności informacji (danych), potwierdzenie tożsamości nadawców, odbiorców informacji (danych), :

Nadawcy



Odbiorcy



# Kryptologia - zastosowanie

- 1** Zastosowania militarnie (np. szyfratory)
- 2** Dyplomacja
- 3** Łączność
  - przewodowa (PSTN, ISDN, ...)
  - bezprzewodowa (GSM, SAT, Radio, WiFi, bluetooth, ...)
- 4** Bankowość elektroniczna
- 5** Protokoły internetowe (HTTPS, SSH, SSL - TLS, PGP, ... )
- 6** Motoryzacja i lotnictwo
- 7** Systemy uwierzytelnienia
- 8** Systemy dostępowe
- 9** Kryptowaluty - Bitcoin, Ethereum, Ripe, Litecoin, itd.
- 10** IoT
- 11** ...

Obecnie kryptografia stosowana jest do ochrony wszelkich danych cyfrowych we współczesnym świecie.

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

# Kamienie milowe kryptologii

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

		Kryptografia		Kryptoanaliza
klasyczne szyfry ręczne	I w. p.n.e	szyfr Cezara szyfry podstawieniowe, przestawieniowe, polialfabetyczne wędrującego klucza		1863 złamanie szyfru polialfabetycznego
	1919	maszyny rotorowe Enigma		1890 złamanie szyfru wędrującego klucza
szyfry maszynowe	1926	szyfr Vernama z kluczem jednorazowym		1933 złamanie szyfru Enigmy
	1949	Shannon – Communication Theory of Secrecy Systems		1945 złamanie szyfru purpurowego
szyfry współczesne	1976	Diffie, Hellman – New Directions in Cryptography		
	1977	DES – Data Encryption Standard		
	1978	RSA – szyfr z kluczem publicznym		
	1994	DSS – Digital Signature Standard		
	2000	AES – Advanced Encryption Standard (1997 - 2001)		1982 złamanie szyfru piecakowego
	2002	SHA-0 (1993), SHA-1 (1995), SHA-2 (2002)		1990 kryptoanaliza różnicowa
	2008	eSTREAM (2004-2008)		1993 kryptoanaliza liniowa
	2013	SHA-3 (2009-2012)		2000 faktoryzacja 512-bitowej liczby modularnej RSA
	2019	CESAR (2012-2019)		
II faza		Post Quantum Cryptography (2016 - obecnie)		2004 kryptoanaliza f. skrótu MD, SHA-0, SHA-1

# Kryptograficzne metody ochrony informacji

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



- „Encryption works. Properly implemented strong cryptosystems are one of the few things that you can rely on” - Edward Snowden

# Schemat komunikacji

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Schemat komunikacji

Nadawca



klucz

szyfrowanie

algorytm  
szyfrowania



tekst jawny

jawny kanał

tekst zaszyfrowany

-1-

Adresat



klucz

deszyfrowanie

algorytm  
deszyfrowania



tekst jawny

Przeciwnik  
(kryptoanalityk)

# Realizacja usług ochrony informacji

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## 1 Poufność

- kryptosystemy symetryczne
- kryptosystemy asymetryczne

## 2 Integralność

- CRC (Cyclic Redundancy Codes) - suma kontrolna
- kody korekcyjno-detekcyjne
- funkcje skrótu (Hash Functions)
- MAC (Message Authentication Codes)

## 3 Uwierzytelnienie

- kryptosystemy asymetryczne

## 4 Poufność, integralność i uwierzytelnienie

- uwierzytelione szyfrowanie (Authenticated Encryption)

## 5 Niezaprzeczalność

- podpis cyfrowy



# Usługa poufności

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

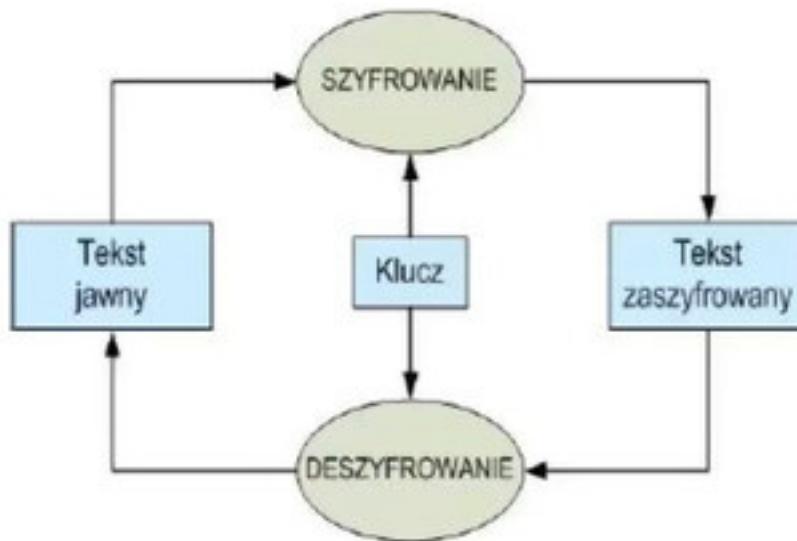
Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



- **Tekst jawny** - informacja (np. tekst w określonym języku, dane numeryczne, dźwięk, obraz, itp.), która nie została zaszyfrowana.
- **Tekst zaszyfrowany** (szyfrogram, kryptogram) - informacja, która została zaszyfrowana.

# Usługa poufności

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- **Szyfrowanie** – proces przekształcenia tekstu jawnego w tekst zaszyfrowany przy użyciu klucza szyfrowania, odbywający się według algorytmu szyfrowania.
- **Deszyfrowanie** - proces przekształcenia tekstu zaszyfrowanego w tekst jawnego przy użyciu klucza deszyfrowania, odbywający się według algorytmu deszyfrowania.
- **Szyfr** - funkcja matematyczna wykorzystywana do szyfrowania/deszyfrowania informacji z wykorzystaniem klucza szyfrowania/deszyfrowania składająca się z:
  - algorytmu szyfrowania,
  - algorytmu deszyfrowania,
  - algorytmu generacji podklucza z klucza głównego.

Zazwyczaj jedna funkcja wykorzystywana jest do szyfrowania, a druga do deszyfrowania wiadomości.

# Definicja kryptosystemu

Wstęp do kriptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Kryptosystem to dowolna piątka  $(P, C, K, E, D)$ , gdzie:

- $(P)$  - skończony zbiór tekstów jawnych;
- $(C)$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;
- $(K)$  - skończony zbiór kluczy (przestrzeń klucza);
- $(E, D)$  - zbiory reguł odpowiednio szyfrowania:  $e_k \in E$  oraz deszyfrowania  $d_k \in D$ ;
- Dla każdego  $k \in K$ :
  - 1  $e_k : P \rightarrow C$  - algorytm szyfrowania,
  - 2  $d_k : C \rightarrow P$  - algorytm deszyfrowania,spełniające warunek:

$$d_k(e_k(x)) = x$$

dla każdego  $x \in P, k \in K$ .

# Właściwości kryptosystemu

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

System kryptograficzny musi spełniać trzy podstawowe warunki:

- 1 przekształcenia szyfrujące i deszyfrujące muszą być wzajemnie odwrotne,
- 2 przekształcenia szyfrujące i deszyfrujące muszą być efektywne dla wszystkich kluczy,
- 3 bezpieczeństwo kryptosystemu powinno zależeć tylko od poufności kluczy i nie zależeć od znajomości algorytmu - zasada Kerckhoffsa.

# Zasada Kerckhoffsa (1833r.)

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Zasada Kerckhoffsa

Algorytmy kryptograficzne (szyfrowania i deszyfrowania) są jawne, natomiast ich bezpieczeństwo opiera się na tajności kluczy.

Zasada ta obowiązuje w komercyjnych zastosowaniach kryptografii i oznacza, że:

- algorytmy kryptograficzne są jawne (kryptoanalytyk zna specyfikację algorytmu);
- klucze są tajne (kryptoanalytyk nie zna klucza deszyfrowania).

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Niech  $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

## Definicja

Niech  $a, b \in \mathbb{Z}$  będą liczbami całkowitymi.

Liczba  $b$  dzieli  $a$  ( $b$  jest dzielnikiem  $a$ ) jeśli istnieje liczba całkowita  $k$  taka, że  $a = k * b$ .

Jeśli  $b$  dzieli  $a$ , to jest to oznaczane jako  $b|a$ .

# Algorytm Euklidesa, 300 r.p.n.e.

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Dane wejściowe: dwie nieujemne liczby całkowite  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \geq b$ .  
Dane wyjściowe: największy wspólny dzielnik:  $d = \gcd(a, b)$ .

- 1** Jeśli  $b = 0$  to  $d \leftarrow a$ , zwróć  $d$ ; I
- 2** Podziel  $a$  przez  $b$  otrzymując:
  - cześć całkowitą dzielenia:  $q = a \text{ div } b$ ;
  - resztę dzielenia:  $r = a \text{ mod } b$takie, że  $a = q \cdot b + r$ .
- 3** Jeśli  $r = 0$  to  $d \leftarrow b$ , zwróć  $d$ ,  
w p.p. podstaw  $a \leftarrow b$ ,  $b \leftarrow r$  i idź do pkt. 2;

## Podstawowe twierdzenie arytmetyki

Każdą liczbę całkowitą  $n \geq 2$  można rozłożyć na czynniki będące potęgami liczb pierwszych:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$$

gdzie:  $p_i$  - są różnymi liczbami pierwszymi,  
 $e_i$  - są dodatnimi liczbami całkowitymi określającymi liczbę powtórzeń  $p_i$  w rozkładzie.

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Definicja

Niech  $n \geq 1$ .

Funkcję  $\varphi(n)$ , oznaczającą ilość liczb całkowitych w przedziale  $[1, n]$  które są względnie pierwsze z  $n$ , nazywamy **funkcją Eulera**.

Funkcja Eulera dana jest dla każdej liczby naturalnej  $n$  wzorem:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

gdzie  $p_1, p_2, \dots, p_k$  są wszystkimi czynnikami pierwszymi liczby  $n$  liczymi bez powtórzeń.

# Teoria liczb

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Własności funkcji Eulera:

- Funkcja Eulera jest mnożystwa, tzn. jeśli  $\gcd(m, n) = 1$ , to  $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ .
- Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to  $\varphi(p) = p - 1$ .
- Jeśli  $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$  jest rozkładem na czynniki pierwsze liczby  $n$ , to:

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i-1} \cdot (p_i - 1)$$

### Przykład:

Niech:  $p = 13$ .  
 $\varphi(13) = 13 - 1 = 12$

Niech:  $n = 24 = 2^3 \cdot 3^1$ .  
 $\varphi(24) =$   
 $2^{3-1} \cdot (2 - 1) \cdot 3^0 \cdot (3 - 1) = 8$

# Kongruencje

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry – charakterystyka

Podsumowanie

Niech:

$n \in N$  będzie liczbą naturalną bez zera;  
 $a, b \in Z$  będą liczbami całkowitymi.

## Definicja

Liczba  $a$  jest **kongruentna do  $b$**  (a przystaje do  $b$ ) modulo  $n$ , co zapisujemy  $a \equiv b \pmod{n}$  jeśli  $n|(a - b)$ .

Liczbe  $n$  nazywamy modułem kongruencji.

Przykład:

- $24 \equiv 9 \pmod{5}$ , ponieważ  $5|(24 - 9)$ ,
- $23 \equiv -5 \pmod{7}$ , ponieważ  $7|(23 - (-5))$ ,
- $-5 \equiv 4 \pmod{3}$ , ponieważ  $3|(-5 - 4)$ .

# Podział szyfrów

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Szyfry dzielimy na:

- monoalfabetyczne - szyfr, w którym każdy ze znaków tekstu jawnego przekształcany jest zawsze na taki sam znak szyfrogramu;
- polialfabetyczne - szyfr, w którym każdy ze znaków tekstu jawnego może być przekształcany na różne znaki szyfrogramu.

# Rodzaje szyfrów

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- Szyfry przestawieniowe - zmieniają uporządkowanie bloków danych (znaków, bitów) wg. ustalonej reguły (klucza).
  - szyfr płotowy,
  - scytale;

Szyfry przestawieniowe są łatwe do złamania i nie zapewniają żadnego bezpieczeństwa.



# Szyfr płotowy

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Przykład:

tekst jawny = KRYPTOGRAFIA

klucz = „4” (wysokość płotka)

K					G			
	R			O	R			A
-	Y	T			A	I		
	P					F		

tekst zaszyfrowany = KGRORAYTAIPF

# Rodzaje szyfrów

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

- Szyfry przestawieniowe - zmieniają uporządkowanie bloków danych (znaków, bitów) wg. ustalonej reguły (klucza).
  - szyfr półtowy,
  - scytale;

Szyfry przestawieniowe są łatwe do złamania i nie zapewniają żadnego bezpieczeństwa.
- Szyfry podstawienniowe - bloki danych (znaki, bity) zastępowane są innymi blokami danych wg. ustalonej reguły (klucza).
  - dysk szyfrowy,
  - szyfr Cezara;

Ze względu na łatwość złamania tego rodzaju szyfrów, nie są one już stosowane.
- Szyfry podstawiennowo - przestawieniowe - szyfry w których zastosowano podstawnienia i przestawienia bloków danych (znaków, bitów) w wielokrotnie wykonywanej rundzie.

# Szyfr Cesara

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

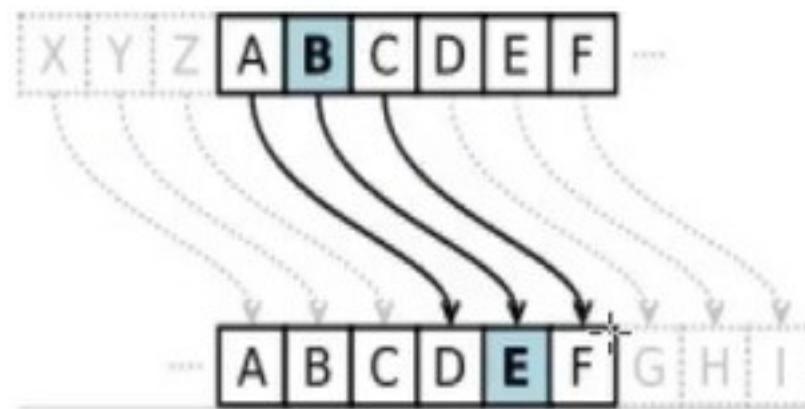
Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



## ■ Przykład:

tekst jawnny: warszawa

PT	w	a	r	s	z	a	w	a
CT	Z	D	U	V	C	D	Z	D

tekst zaszyfrowany: ZDUVCDZD

# Szachownica Polibiusza

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Szachownica Polibiusza

rodzaj szyfru monoalfabetycznego wymyślony w starożytności przez greckiego historyka Polibiusza w którym każdej literze przypisana jest odpowiednia liczba, według następującej tabeli:

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

Cyfry oznaczają położenie danej litery w tabeli – pierwszą cyfrą jest numer wiersza, a drugą – kolumny.

Przykład: tekst jawnny: "tajne"

PT	t	a	j	n	e
CT	44	11	24	33	15

# Scytale

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

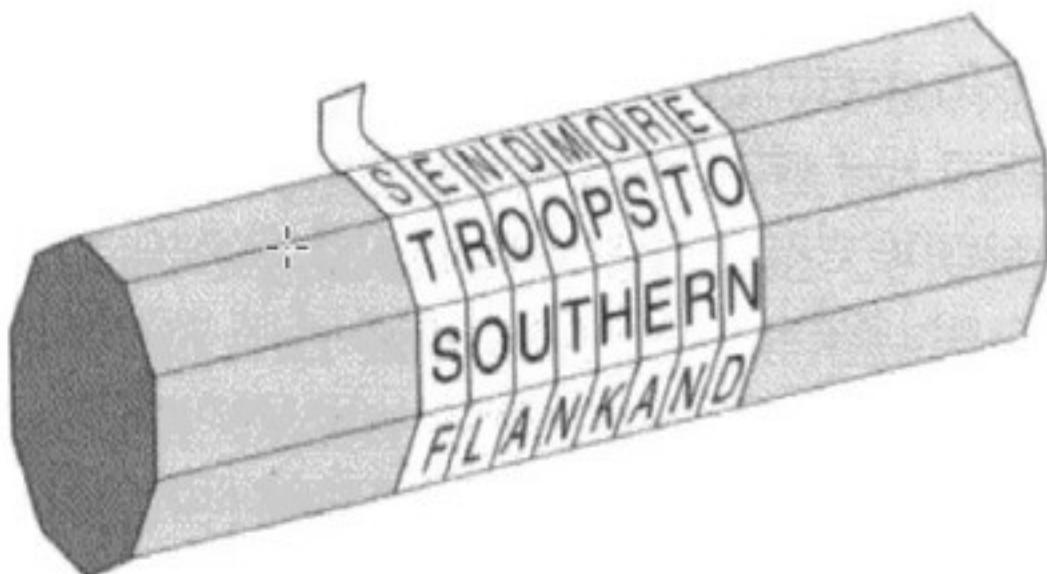
Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



# Dysk szyfrowy

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

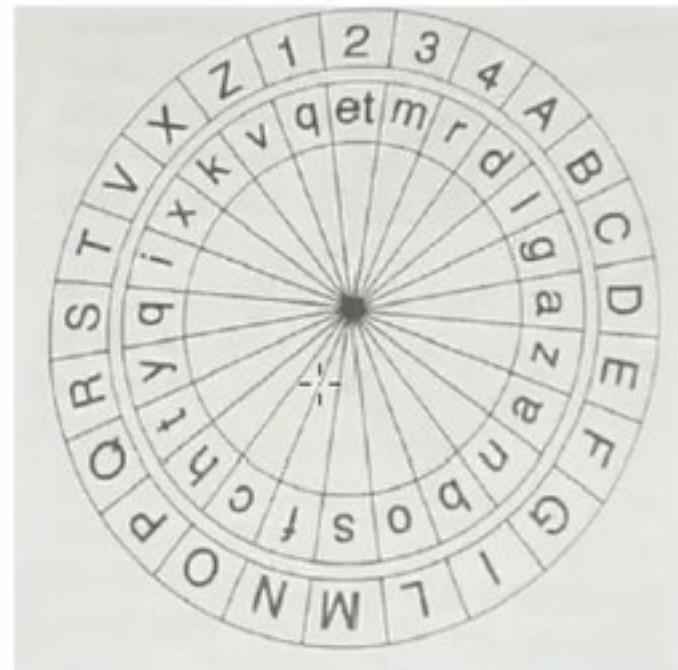
Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



# Enigma

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



# Szyfry współczesne

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podsuwy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Szyfrowanie symetryczne (systemy z kluczem tajnym):

- tajne klucze służą do szyfrowania i deszyfrowania informacji,
- klucz musi być dystrybuowany kanałem chronionym,
- klucz musi być chroniony w czasie użytkowania.

¶

# Szyfry współczesne - kryptosystemy symetryczne

Wstęp do kriptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

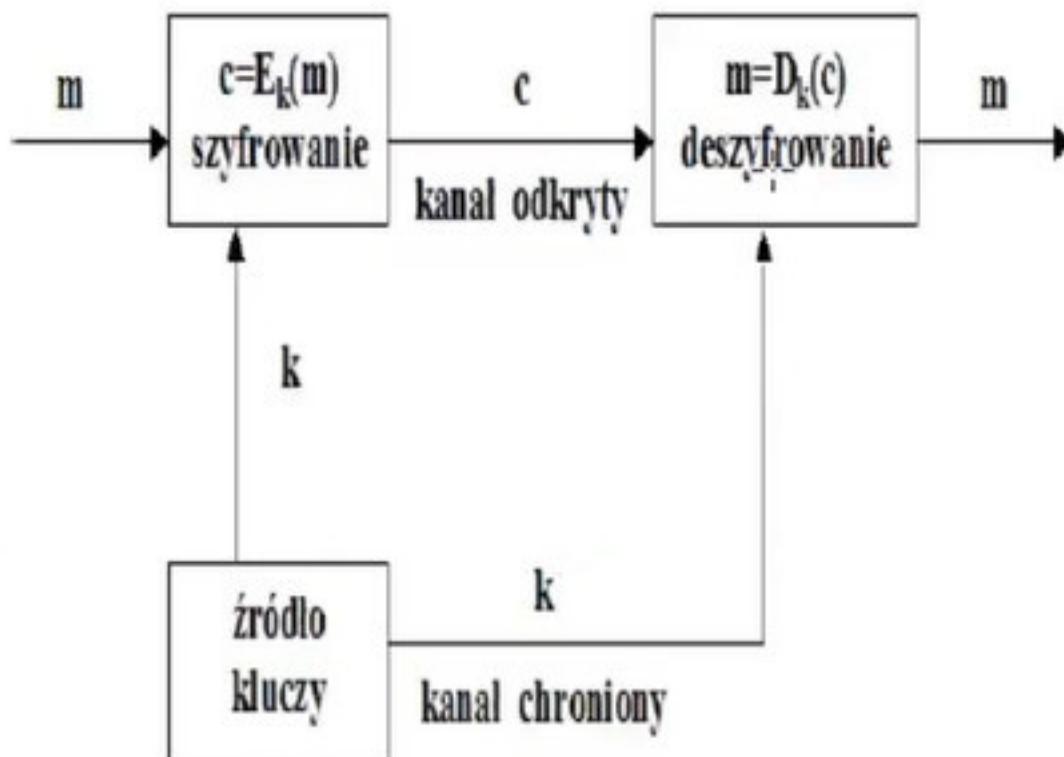
Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie



# Szyfry współczesne

Wstęp do kryptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

## Szyfrowanie asymetryczne (systemy z kluczem publicznym i prywatnym): I

- występują 2 klucze – klucz publiczny (jawny) oraz klucz prywatny (tajny),
- klucz publiczny służy do szyfrowania informacji a klucz prywatny służy do deszyfrowania informacji,

# Szyfry współczesne

Wstęp do kriptografii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie do przedmiotu

Plan wykładu

Podstawowe pojęcia i terminy

Podstawy matematyczne

Szyfry - charakterystyka

Podsumowanie

Szyfrowanie asymetryczne (systemy z kluczem publicznym i prywatnym):

- do wyznaczenia kluczy wykorzystuje się trudne do odwrócenia problemy, np.:
  - problem RSA (problem faktoryzacji liczb złożonych) - o wiele łatwiej jest pomnożyć przez siebie 2 duże liczby, niż rozłożyć dużą liczbę na czynniki pierwsze,
  - problem ElGamala - opierający się na trudności wyznaczania logarytmu dyskretnego.

# Rodzaje bezpieczeństwa

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affliniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## Bezpieczeństwo obliczeniowe

kryptosystem jest obliczeniowo bezpieczny, jeśli moc obliczeniowa (zasoby pamięci, czas obliczeń) jest niewystarczająca do złamania tego kryptosystemu przy zastosowaniu najlepszych aktualnie metod kryptoanalizy.

## Bezpieczeństwo bezwarunkowe

nie można złamać kryptosystemu niezależnie od posiadanych mocy obliczeniowych (np. szyfr Vernama).

## Bezpieczeństwo warunkowe

atakujący dysponuje ograniczoną mocą obliczeniową, bezpieczeństwo szyfru oparte jest na aktualnej wiedzy i stanie technologii.

# Szyfr Vernama (1917 r.)

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Niech:

$p = p_1, p_2, \dots, p_n$ ,  $p_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  - tekst **jawny**,

$k = k_1, k_2, \dots, k_m$ ,  $k_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  - klucz,

$c = c_1, c_2, \dots, c_n$ ,  $c_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  - tekst zaszyfrowany,

## Szyfr Vernama

szyfr, którego ciąg bitów tekstu zaszyfrowanego jest funkcją xor ciągu bitów tekstu jawnego i klucza:

- szyfrowanie:  $c_i = p_i \oplus k_i$ ;
- deszyfrowanie:  $p_i = c_i \oplus k_i$ ;

Dowód:  $p_i = c_i \oplus k_i = p_i \oplus k_i \oplus k_i = p_i$ .

## Szyfr bezarunkowo bezpieczny

Szyfr Vernama, w którym ciąg klucza jest wybrany losowo i został użyty jednokrotnie nazywamy **systemem z losowym kluczem jednorazowym (one time pad)**.

# Techniki ataków

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

- Przeszukiwanie przestrzeni klucza (atak brutalny) – podatne na ten atak są wszystkie algorytmy oprócz szyfrów "one time pad".
- Metody oparte na analizie językowej, np. analiza częstości występowania liter.
- Ataki wykorzystujące budowę algorytmów.
- Kryptoanaliza liniowa.
- Kryptoanaliza różnicowa.
- Kryptoanaliza algebraiczna.
- Atak na implementację algorytmów (side channel attack).

# Rodzaje bezpieczeństwa

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## Bezpieczeństwo obliczeniowe

kryptosystem jest obliczeniowo bezpieczny, jeśli moc obliczeniowa (zasoby pamięci, czas obliczeń) jest niewystarczająca do złamania tego kryptosystemu przy zastosowaniu najlepszych aktualnie metod kryptoanalizy.

## Bezpieczeństwo bezwarunkowe

nie można złamać kryptosystemu niezależnie od posiadanych mocy obliczeniowych (np. szyfr Vernama).

## Bezpieczeństwo warunkowe

atakujący dysponuje ograniczoną mocą obliczeniową, bezpieczeństwo szyfru oparte jest na aktualnej wiedzy i stanie technologii.

# Techniki ataków

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

- Przeszukiwanie przestrzeni klucza (atak brutalny) – podatne na ten atak są wszystkie algorytmy oprócz szyfrów "one time pad".
- Metody oparte na analizie językowej, np. analiza częstości występowania liter.
- Ataki wykorzystujące budowę algorytmów.
- Kryptoanaliza liniowa.
- Kryptoanaliza różnicowa.
- Kryptoanaliza algebraiczna.
- Atak na implementację algorytmów (side channel attack).

# Analiza częstości występowania liter

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

- Każdy język naturalny ma nadmiarowość (redundancję) – w naturalnych tekstach poszczególne znaki alfabetu występują z określonymi częstotliwościami.
- Analizując typowe teksty możemy sporządzić tabele względnych częstości (prawdopodobieństw) występowania poszczególnych znaków.



# Kodowanie alfabetu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afimiczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## Kodowanie alfabetu:

- każdej literze alfabetu przyporządkowujemy liczbę od 0 do 25:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		



# Szyfr przesuwający - definicja

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

$P = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów jawnych;

$C = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;

$K = \mathbb{Z}_{26} - \{0\}$  - skończony zbiór kluczy;

- szyfrowanie:  $y = e_k(x) = (x + k) \bmod 26$ ;
- deszyfrowanie:  $x = d_k(y) = (y - k) \bmod 26$ ;

dla:  $x \in P$ ,  $y \in C$ , dla  $k \in K$ .



# Tabela częstości występowania liter (j. angielski)

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Litera	Częstość	litera	Częstość
a	.082	n	.067
b	.015	o	.075
c	.028	p	.019
d	.043	q	.001
e	.127	r	.060
f	.022	s	.063
g	.020	t	.091
h	.061	u	.028
i	.070	v	.010
j	.002	w	.023
k	.008	x	.001
l	.040	y	.020
m	.024	z	.001

# Podział liter vs. p-sto występowania (j. angielski)

Wstęp do kryptologii

Piotr Mrażkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

grupa	p-sto występowania	litery
1	$\geq 0,120$	e
2	$I(0,120 \dots 0,07]$	t,a,o,i
3	$(0,07 \dots 0,06]$	n,s,h,r
4	$(0,06 \dots 0,04]$	d,l
5	$(0,04 \dots 0,02]$	c,u,m,w,f,g
6	$\leq 0,02$	y,p,b,v,k,s,x,q

# Analiza częstości występowania liter

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

- Sporządzamy tabele występowania znaków w szyfrogramie (dla nieznanego, ale ustalonego podstawienia).
- Na tej podstawie stawiamy hipotezę jak wygląda nieznane nam podstawienie i deszyfrujemy.
- Jeżeli otrzymamy tekst jawnny to postawiona hipoteza jest prawdziwa, w prz. stawiamy kolejną hipotezę.
- Przy posiadaniu odpowiednio długiego szyfrogramu i wykonaniu prób przy różnych podstawieniach, metoda ta pozwala złamać prosty szyfr podstawieniowy.

# Kodowanie alfabetu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## Kodowanie alfabetu:

- każdej literze alfabetu przyporządkowujemy liczbę od 0 do 25:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		



# Szyfr przesuwający - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniiczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Kryptosystem oparty na szyfrze przesuwającym nie jest bezpieczny:

- Atak brytalny - wystarczy sprawdzić kolejno 25 wartości klucza  $k \in \{1, 2, \dots, 25\}$  (średnio 13 prób).
- Analiza częstości występowania liter.

Przykład: Znajdź klucz oraz tekst jawny wiedząc, że tekst zaszyfrowany:

"FQLTWNYMRXFWJVZNYJLJSJWFQIJKN  
SNYNTSXTKFWNYMRJYNHUWTHJXX"

lit.	il.	il.										
N	7	Y	5	X	4	K	2	Q	2	U	1	
J	7	F	4	S	3	L	2	R	2	V	1	
W	5	T	4	H	2	M	2	I	1	Z	1	

# Tabela częstości występowania liter (j. angielski)

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiničny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Litera	Częstość	Litera	Częstość
a	.082	n	.067
b	.015	o	.075
c	.028	p	.019
d	.043	q	.001
e	.127	r	.060
f	.022	s	.063
g	.020	t	.091
h	.061	u	.028
i	.070	v	.010
j	.002	w	.023
k	.008	x	.001
l	.040	y	.020
m	.024	z	.001

# Szyfr przesuwający - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Szyfr afiniiczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

- 1 Zakładamy, że:  $e \rightarrow N$ , czyli:

$$y = e_k(x) = (x + k) \bmod 26;$$

$$e_k(4) = 13;$$

$$4 + k = 13 \Rightarrow k = 9;$$

tekst jawnny:

"whcknepdiownamqepacajanwhzabejeppekjokbwnepdiapeylnkyao"

- 2 Zakładamy, że:  $e \rightarrow J$ , czyli:

$$e_k(4) = 9;$$

$$4 + k = 9 \Rightarrow k = 5;$$

tekst jawny:

"algorithms are quite general definitions of arithmetic process"

algorithms are quite general definitions of arithmetic process

# Algorytm Euklidesa, 300 r.p.n.e.

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

I

Dane wejściowe: dwie nieujemne liczby całkowite  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \geq b$ .

Dane wyjściowe: największy wspólny dzielnik:  $d = \gcd(a, b)$ .

**1** Jeśli  $b = 0$  to  $d \leftarrow a$ , zwróć  $d$ ;

**2** Podziel  $a$  przez  $b$  otrzymując:

- cześć całkowitą dzielenia:  $q = a \text{ div } b$ ;
- resztę dzielenia:  $r = a \text{ mod } b$

takie, że  $a = q \cdot b + r$ .

**3** Jeśli  $r = 0$  to  $d \leftarrow b$ , zwróć  $d$ ,

w p.p. podstaw  $a \leftarrow b$ ,  $b \leftarrow r$  i idź do pkt. 2;

# Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Dane wejściowe: dwie nieujemne liczby całkowite  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \geq b$ .  
Dane wyjściowe:  $(d, u, v)$ , gdzie:  $d = \gcd(a, b)$ ,  $u$  i  $v$  - liczby spełniające warunek:  $u \cdot a + v \cdot b = \gcd(a, b)$ .

- 1** Jeśli  $b = 0$  to  $d \leftarrow a$ , zwróć  $(d, 1, 0)$ , stop.
- 2** Podstaw:  $i \leftarrow 0$ ,  $(u_0, v_0) \leftarrow (0, 1)$ ,  $(u'_0, v'_0) \leftarrow (1, 0)$ ,  
 $a_0 \leftarrow a$ ,  $b_0 \leftarrow b$ .
- 3** Oblicz:  $q_i = a_i \text{ div } b_i$ ,  $r_i = a_i \text{ mod } b_i$ .
- 4** Jeśli  $r_i = 0$  to  $d \leftarrow b_i$ , zwróć  $(d, u_i, v_i)$ , stop.
- 5** Podstaw:  $i \leftarrow i + 1$ ,  
 $u_i \leftarrow u'_{i-1} - q_{i-1} \cdot u_{i-1}$ ,  $u'_i \leftarrow u_{i-1}$ ,  
 $v_i \leftarrow v'_{i-1} - q_{i-1} \cdot v_{i-1}$ ,  $v'_i \leftarrow v_{i-1}$ ,  
 $a_i \leftarrow b_{i-1}$ ,  $b_i \leftarrow r_{i-1}$ ,
- 6** Wróć do kroku 3.

# Odwrotność multiplikatywna $a^{-1} \bmod n$

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

**Szyfr affineczny**

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## Definicja

Odwrotnością multiplikatywną  $a \in Z_n$  modulo  $n$  nazywamy liczbę całkowitą  $a^{-1} \in Z_n$  taką, że  $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \bmod n$ .

# Obliczanie $a^{-1} \bmod n$ z tw. Fermata

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

**Szyfr affine**

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## Twierdzenie Fermata

Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to dla każdej liczby  $a \in \mathbb{Z}$  takiej, że  $\gcd(a, p) = 1$  zachodzi:

$$a^{p-1} \bmod p = 1$$

## Uogólnienie Eulera twierdzenia Fermata

Dla każdego  $a \in \mathbb{Z}$  i  $n \in \mathbb{N}$  takich, że  $\gcd(a, n) = 1$  zachodzi:

$$a^{\phi(n)} \bmod n = 1$$

□

$$a^{\phi(n)} \cdot a^{-1} \bmod n = a^{-1};$$

$$a^{-1} = a^{(\phi(n)-1)} \bmod n.$$

# Obliczanie $a^{-1} \bmod n$ z tw. Fermata

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Przykład: Oblicz odwrotność multiplikatywną liczby  $a = 11 \bmod 125$  korzystając z uogólnionego twierdzenia Fermata.

## Twierdzenie

Jeśli  $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$  jest rozkładem na czynniki pierwsze, to:

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i-1} \cdot (p_i - 1)$$

$$n = 125 = 5^3;$$

$$\phi(n) = 5^2 \cdot 4 = 25 \cdot 4 = 100;$$

$$a^{-1} = a^{(\phi(n)-1)} \bmod n = 11^{100-1} \bmod 125 = 11^{99} \bmod 125 = 91.$$

# Szyfr afiniczny - definicja

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

$P = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów jawnych;

$C = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;

$K = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}_{26}^*, b \in \mathbb{Z}_{26}\}$  - skończony zbiór kluczy;

- szyfrowanie przy użyciu klucza  $k = (a, b) \in K$  :

$$y = e_k(x) = (a \cdot x + b) \bmod 26$$

- deszyfrowanie przy użyciu klucza

$$k' = (a', b') = (a^{-1}, -a^{-1} \cdot b) \in K:$$

$$x = d_{k'}(y) = (a' \cdot y + b') \bmod 26 = (a^{-1} \cdot y + (-a^{-1} \cdot b)) \bmod 26$$

gdzie:  $x \in P$ ,  $y \in C$ ,

I

$\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \dots, 25\}$  - zbiór liczb całkowitych modulo 26;

$\mathbb{Z}_{26}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$  - zbiór liczb odwracalnych w  $\mathbb{Z}_{26}$ ;

# Szyfr afiński - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiński

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

1 Zakładamy, że:  $e \rightarrow R$  i  $t \rightarrow K$  czyli:

$$e_k(4) = 17 \text{ i } e_k(19) = 7;$$

i otrzymujemy układ równań:

$$4a + b = 17$$

$$19a + b = 10,$$

który daje rozwiązanie:  $a = 3$ ,  $b = 5$  w  $Z_{26}$ , czyli

$$k = (3, 5), k' = (9, 7).$$

tekst jawnny:

"algorithmsarequitegeneraldefinitionsofarithmeticprocess"

# Szyfr afiniczny - własności

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

**Szyfr Vigenere'a**

Szyfr Hilla

Własności szyfru przesuwającego:

- 1 szyfr afiniczny dla  $a = 1$  jest szyfrem przesuwającym z kluczem  $b$ ;
- 2 jest szyfrem monoalfabetycznym;
- 3 przestrzeń klucza:  $12 \cdot 26 = 312$ .

I

# Szyfr afiniczny - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Kryptosystem oparty na szyfrze afincznym nie jest bezpieczny:

- Atak brytalny - wystarczy sprawdzić kolejno 312 wartości klucza  $k$  (średnio 156 prób).
- Analiza częstości występowania liter.

Przykład: Znajdź klucz oraz tekst jawnny wiedząc, że tekst zaszyfrowany:

"FMXVEDKAPHFERBNDKRXRSREFMORU  
DSDKDVSHVUFEDKAPRKDLYEVLRHH"

lit.	il.	il.										
D	7	K	5	V	4	L	2	U	2	N	1	
R	7	F	4	S	3	M	2	X	2	O	1	
E	5	H	4	A	2	P	2	B	1	Y	1	

# Szyfr afiniczny - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

1 Zakładamy, że:  $e \rightarrow R$  i  $t \rightarrow D$  czyli:

$$e_k(4) = 17 \text{ i } e_k(19) = 3;$$

i otrzymujemy układ równań:

$$4a + b = 17$$

$$19a + b = 3,$$

który daje rozwiązanie:  $a = 6$ ,  $b = 19$  w  $Z_{26}$ .

Ponieważ  $\gcd(6, 26) = 2 \neq 1$  to rozwiązanie jest błędne.

# Podział liter vs. p-sto występowania (j. angielski)

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

grupa	p-sto występowania	litery
1	$\geq 0,120$	f
2	(0,120 ... 0,07]	t,a,o,i
3	(0,07 ... 0,06]	n,s,h,r
4	(0,06 ... 0,04]	d,l
5	(0,04 ... 0,02]	c,u,m,w,f,g
6	$\leq 0,02$	y,p,b,v,k,s,x,q

# Szyfr afiniczny - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

I Zakładamy, że:  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  i  $t \rightarrow D$  czyli:

$$e_k(4) = 17 \text{ i } e_k(19) = 3;$$

i otrzymujemy układ równań:

$$4a + b = 17$$

$$19a + b = 3,$$

który daje rozwiązanie:  $a = 6, b = 19$  w  $Z_{26}$ .

Ponieważ  $gcd(6, 26) = 2 \neq 1$  to rozwiązanie jest błędne.

# Szyfr afiniczny - definicja

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

$P = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów jawnych;

$C = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;

$K = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}_{26}^*, b \in \mathbb{Z}_{26}\}$  - skończony zbiór kluczy;

- szyfrowanie przy użyciu klucza  $k = (a, b) \in K$  :

$$y = e_k(x) = (a \cdot x + b) \bmod 26$$

- deszyfrowanie przy użyciu klucza

$$k' = (a', b') = (a^{-1}, -a^{-1} \cdot b) \in K:$$

$$x = d_{k'}(y) = (a' \cdot y + b') \bmod 26 = (a^{-1} \cdot y + (-a^{-1} \cdot b)) \bmod 26$$

gdzie:  $x \in P$ ,  $y \in C$ ,

$\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \dots, 25\}$  - zbiór liczb całkowitych modulo 26;

$\mathbb{Z}_{26}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$  - zbiór liczb odwracalnych w  $\mathbb{Z}_{26}$ ;

# Szyfr afiniczny - przykład

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Przykład: Zaszyfruj, a następnie zdeszyfruj "kryptografia" przy użyciu klucza  $k = (5, 10)$ .

## ■ Szyfrowanie

PT	I	r	p	w	t	o	g	r	a	l	i	s
x	10	17	24	15	19	14	6	17	0	5	8	0
y	8	17	0	7	1	2	14	17	10	9	24	10
CT	I	R	A	H	B	C	O	R	K	J	Y	K

Tekst zaszyfrowany: IRAHBCORKJYK.

## ■ Deszyfrowanie

$$n = 26 = 2 \cdot 13$$

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i-1} \cdot (p_i - 1) = 2^0 \cdot 1 \cdot 13^0 \cdot 12 = 1 \cdot 12 = 12$$

$$a^{-1} = a^{(\phi(n)-1)} \bmod n = 5^{11} \bmod 26 = 21$$

$$k' = (a^{-1}, -a^{-1} \cdot b) = (21, (-21 \cdot 10) \bmod n) = (21, 24)$$

CT	I	R	A	H	B	C	O	R	K	J	Y	K
y	8	17	0	7	1	2	14	17	10	9	24	10
x	10	17	24	15	19	14	6	17	0	5	8	0
PT	I	R	A	H	B	C	O	R	K	J	Y	K

Tekst jawny : kryptografia.

# Szyfr afiniczny - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannon'a

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Kryptosystem oparty na szyfrze afincznym nie jest bezpieczny:

- Atak brytalny - wystarczy sprawdzić kolejno 312 wartości klucza  $k$  (średnio 156 prób).
- Analiza częstości występowania liter.

Przykład: Znajdź klucz oraz tekst jawny wiedząc, że tekst zaszyfrowany:

"FMXVEDKAPHFERBNDKRXRSREFMORU  
DSDKDVSHVUFEDKAPRKDLYEVLRHH"

lit.	il.	il.										
D	7	K	5	V	4	L	2	U	2	N	1	
R	7	F	4	S	3	M	2	X	2	O	1	
E	5	H	4	A	2	P	2	B	1	Y	1	

# Szyfr afiniczny - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

- 1 Zakładamy, że:  $e \rightarrow R$  i  $t \rightarrow D$  czyli:

$$e_k(4) = 17 \text{ i } e_k(19) = 3;$$

i otrzymujemy układ równań:

$$4a + b = 17$$

$$19a + b = 3,$$

który daje rozwiązanie:  $a = 6, b = 19$  w  $Z_{26}$ .

Ponieważ  $\gcd(6, 26) = 2 \neq 1$  to rozwiązanie jest błędne.

- 2 Zakładamy, że:  $e \rightarrow R$  i  $t \rightarrow E$  czyli:

$$e_k(4) = 17 \text{ i } e_k(19) = 4;$$

i otrzymujemy układ równań:

$$4a + b = 17$$

$$19a + b = 4,$$

który daje rozwiązanie:  $a = 13, b = 17$  w  $Z_{26}$ . Ponieważ  $\gcd(13, 26) = 13 \neq 1$  to rozwiązanie jest błędne.

# Szyfr afiniaczny - definicja

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniaczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

$P = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów jawnych;

$C = \mathbb{Z}_{26}$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;

$K = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}_{26}^*, b \in \mathbb{Z}_{26}\}$  - skończony zbiór kluczy;

- szyfrowanie przy użyciu klucza  $k = (a, b) \in K$  :

$$y = e_k(x) = (a \cdot x + b) \bmod 26$$

- deszyfrowanie przy użyciu klucza

$$k' = (a', b') = (a^{-1}, -a^{-1} \cdot b) \in K:$$

$$x = d_{k'}(y) = (a' \cdot y + b') \bmod 26 = (a^{-1} \cdot y + (-a^{-1} \cdot b)) \bmod 26$$

gdzie:  $x \in P$ ,  $y \in C$ ,

$\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \dots, 25\}$  - zbiór liczb całkowitych modulo 26;

$\mathbb{Z}_{26}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$  - zbiór liczb odwracalnych w  $\mathbb{Z}_{26}$ ;

# Szyfr afiniczny - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afiniczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

1 Zakładamy, że:  $e \rightarrow R$  i  $t \rightarrow K$  czyli:

$$e_k(4) = 17 \text{ i } e_k(19) = 7;$$

i otrzymujemy układ równań:

$$4a + b = 17$$

$$19a + b = 10,$$

który daje rozwiązanie:  $a = 3$ ,  $b = 5$  w  $Z_{26}$ , czyli  
 $k = (3, 5)$ ,  $k' = (9, 7)$ .

tekst jawnny:

"algorithmsarequitegeneraldefinitionsofarithmeticprocess"



# Szyfr Vigenere'a - definicja

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

$P = (\mathbb{Z}_{26})^m$  - skończony zbiór tekstów jawnych;

$C = (\mathbb{Z}_{26})^m$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;

$K = (\mathbb{Z}_{26})^m$  - skończony zbiór kluczy;

■ szyfrowanie:

$$y = e_k(x_1, \dots, x_m) = ((x_1 + k_1) \bmod 26, \dots, (x_m + k_m) \bmod 26);$$

■ deszyfrowanie:

$$x = d_k(y_1, \dots, y_m) = ((y_1 - k_1) \bmod 26, \dots, (y_m - k_m) \bmod 26);$$

gdzie:  $x = (x_1, \dots, x_m) \in P$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m) \in C$ ,  
 $k = (k_1, \dots, k_m) \in K$ .

# Szyfr Vigenere'a - przykład

I

Przykład: Zaszyfruj a potem odszyfruj słowo "kryptografia" przy użyciu klucza "szyfr".

$$m = 5, k = \text{"szyfr"} = (18, 25, 24, 5, 17)$$

PT	k	i	y	p	t	o	g	r	a	f	i	a
s	10	17	24	15	19	14	8	17	0	5	8	0
k	18	25	24	5	17	18	25	24	5	17	18	25
y	2	18	22	20	10	6	5	15	5	22	0	25
CT	C	Q	W	U	K	G	F	P	F	W	A	Z

tekst zaszyfrowany: CQWUKGFPFWAZ

Wstęp do kryptologii

Piotr

Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie  
Shannona

Rodzaje  
bezpieczeństwa

Kodowanie  
alfabetu

Szyfr  
przesuwający

Rozszerzony  
Algorytm  
Euklidesa

Szyfr afrykański

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

# Szyfr Vigenere'a - własności

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr afimiczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Własności szyfru przesuwającego:

- jest szyfrem polialfabetycznym;
- przestrzeń klucza:  $\#K = 26^m$  (np. dla  $m = 5$  przestrzeń klucza większa niż  $1,1 \cdot 10^7$ ); I
- jeśli klucz ma długość tekstu jawnego (np. jest innym tekstem z danego języka) nazywany jest **szyfrem z kluczem bieżącym**;
- jeśli dodatkowo klucz jest losowym ciągiem liter oraz został użyty jednokrotnie jest bezwarunkowo bezpieczny i nazywany **szyfrem z kluczem jednokrotnym**;
- w przeciwnym przypadku istnieją metody kryptoanalizy pozwalające złamać szyfr Vigenere'a w czasie krótszym niż przeszukiwanie przestrzeni klucza.

# Szyfr Vigenere'a - przykład

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

Przykład: Zaszyfruj a potem odszyfruj słowo "kryptografia" przy użyciu klucza "szyfr".

$$m = 5, k = \text{"szyfr"} = (18, 25, 24, 5, 17)$$

PT	k	t	y	p	t	o	g	r	a	f	i	s
x	10	17	24	15	19	14	6	17	0	5	8	0
k	18	25	24	5	17	19	25	24	5	17	19	25
y	2	18	22	20	10	6	5	15	5	22	0	25
CT	C	G	W	U	K	G	F	P	F	W	A	Z

tekst zaszyfrowany: CQWUKGFPFWAZ



# Szyfr Hilla, cz. 1

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

$P = (\mathbb{Z}_{26})^m$  - skończony zbiór tekstów jawnych;

$C = (\mathbb{Z}_{26})^m$  - skończony zbiór tekstów zaszyfrowanych;

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mm} \end{bmatrix}$$

- macierz o wymiarze  $m \times m$

■ szyfrowanie:

$$y = e_K(x) = (x \cdot K) \bmod 26;$$

■ deszyfrowanie:

$$x = e_{K^{-1}}(y) = (y \cdot K^{-1}) \bmod 26;$$

gdzie:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in P$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in C$ ,

$K^{-1}$  - macierz odwrotana modulo 26 do macierzy  $K$ , tzn:

$$\gcd(\det K, 26) = 1$$

# Szyfr Hilla, cz. 2

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Plan wykładu

Twierdzenie Shannona

Rodzaje bezpieczeństwa

Kodowanie alfabetu

Szyfr przesuwający

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

Szyfr affineczny

Szyfr Vigenere'a

Szyfr Hilla

## ■ szyfrowanie:

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mm} \end{bmatrix} \text{ mod } 26;$$

## ■ deszyfrowanie:

$$x = (y_1, y_2, \dots, y_m) \cdot \begin{bmatrix} k_{11}^{-1} & k_{12}^{-1} & \dots & k_{1m}^{-1} \\ k_{21}^{-1} & k_{22}^{-1} & \dots & k_{2m}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1}^{-1} & k_{m2}^{-1} & \dots & k_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \text{ mod } 26;$$

gdzie:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in P$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in C$ .



# Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

## Potęgowanie modularne

Potęgowanie modularne polega na obliczeniu:

$$x = a^t \bmod n$$

gdzie:  $t, n \in \mathbb{N}$ ,  $a, x \in \mathbb{Z}_n$

## Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Niech  $t = (t_{k-1}, \dots, t_1, t_0)_2$ , gdzie  $t_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$  będzie rozwinięciem dwójkowym liczby  $t$ :

$$\sum_{i=0}^{k-1} t_i \cdot 2^{k-1-i} = 2^{k-1} \cdot t_{k-1} + \dots + 2^1 \cdot t_1 + 2^0 \cdot t_0$$

Wówczas:

$$a^t \bmod n = [(a^{t_{k-1}2^{k-1}} \bmod n) \cdot \dots \cdot (a^{t_12^1} \bmod n) \cdot (a^{t_02^0} \bmod n)] \bmod n$$

# Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

## Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

- 1 Inicjalizacja:  $i \leftarrow 0$ ,  $x_0 \leftarrow 1$ ,  $a_0 \leftarrow a$ .
- 2 Wyznacz:  $i \leftarrow i + 1$ .
- 3 Jeśli  $t_{i-1} = 1$  wtedy  $x_i \leftarrow (x_{i-1} \cdot a_{i-1}) \bmod n$ , w przeciwnym przypadku  $x_i \leftarrow x_{i-1}$ .
- 4 Jeśli  $i = k$ , zwróć  $x_i$ , stop.
- 5 Wyznacz  $a_i \leftarrow (a_{i-1} \cdot a_{i-1} \bmod n)$  i idź do pkt. 2.

Przykład: Oblicz  $2^{25} \bmod 9 = 2$ .  
 $a = 2$ ;  $t = 25 = (11001)_2$ ;  $n = 9$

$i$	$x_i$	$a_i$	$t_i$
0	1	2	1
1	2	4	0
2	2	7	0
3	2	4	1
4	8	7	1
5	2	4	-

# Plan wykładu

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

### Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Generator grupy mnożnikowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- 1 Algorytm szybkiego potęgowania modularnego.
- 2 Generator grupy mnożnikowej.
- 3 Logarytm dyskretny.
- 4 Algorytm Diffie-Hellman'a.
- 5 Idea kryptosystemów asymetrycznych

# Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm  
szybkiego  
potęgowania  
modularnego

Generator grupy  
mnożenia

Algorytm  
dyskretny

Protokół  
Diffie-Hellman'a

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

## Potęgowanie modularne

Potęgowanie modularne polega na obliczeniu:

$$x = a^t \bmod n$$

gdzie:  $t, n \in \mathbb{N}$ ,  $a, x \in \mathbb{Z}_n$

## Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Niech  $t = (t_{k-1}, \dots, t_1, t_0)_2$ , gdzie  $t_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$  będzie rozwinięciem dwójkowym liczby  $t$ :

$$t = 2^{k-1} \cdot t_{k-1} + \dots + 2^1 \cdot t_1 + 2^0 \cdot t_0$$

Wówczas:

$$a^t \bmod n = [(a^{t_{k-1}2^{k-1}} \bmod n) \cdot \dots \cdot (a^{t_12^1} \bmod n) \cdot (a^{t_02^0} \bmod n)] \bmod n$$

# Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm  
szybkiego  
potęgowania  
modularnego

Generator grupy  
mnożkowej

Algorytm  
dyskretny

Protokół  
Diffie-Hellman'a

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

## Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

- 1 Inicjalizacja:  $i \leftarrow 0$ ,  $x_0 \leftarrow 1$ ,  $a_0 \leftarrow a$ .
- 2 Wyznacz:  $i \leftarrow i + 1$ .
- 3 Jeśli  $t_{i-1} = 1$  wtedy  $x_i \leftarrow (x_{i-1} \cdot a_{i-1}) \bmod n$ , w przeciwnym  
przypadku  $x_i \leftarrow x_{i-1}$ .
- 4 Jeśli  $i = k$ , zwróć  $x_i$ , stop.
- 5 Wyznacz  $a_i \leftarrow (a_{i-1} \cdot a_{i-1}) \bmod n$  i idź do pkt. 2.

Przykład: Oblicz  $2^{25} \bmod 9 = ?$   
 $a = 2$ ;  $t = 25 = (11001)_2$ ;  $n = 9$

$i$	$x_i$	$a_i$	$t_i$
0	1	2	1
1	2	4	0
2	2	7	0
3	2	4	1
4	8	7	1
5	2	4	-

# Generator grupy mnożkowej

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Niech  $Z_p^* = \{x : x \in Z_p, \gcd(x, p) = 1\}$  będzie zbiorem elementów odwracalnych modulo liczba pierwsza  $p$ .

## Generator

Liczbe  $\alpha \in Z_p^*$  nazywamy **generatorem  $Z_p^*$  (pierwiastkiem pierwotnym modulo  $p$ )** wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\bigwedge_{y \in Z_p^*} \bigvee_{x \in Z_p^*} y = \alpha^x \bmod p$$

Można więc powiedzieć, że  $\alpha$  jest generatorem  $Z_p^*$ , jeśli kolejne potęgi  $\alpha$  modulo  $p$  generują wszystkie elementy zbioru  $Z_p^*$ .

Í

# Generator grupy mnożkowej

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm  
szybkiego  
potęgowania  
modularnego

Generator grupy  
mnożkowej

Algorytm  
dyskretny

Protokół  
Diffie-Hellman'a

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Niech  $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$  będzie rozkładem liczby  $p - 1$  na czynniki pierwsze.

## Twierdzenie

$\alpha$  jest generatorem  $Z_p^*$   $\Leftrightarrow \bigwedge_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \alpha^{\frac{p-1}{p_i}} \bmod p \neq 1$

Algorytm wyznaczania generatora  $Z_p^*$ :

- 1 Rozłóż liczbę  $p - 1$  na czynniki pierwsze:

$$p - 1 = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}.$$

- 2 Wybierz losowo liczbę  $\alpha \in Z_p^*$ .

- 3 Dla  $i$  od 1 do  $k$  wykonuj:

- 1 Oblicz  $b \leftarrow \alpha^{\frac{p-1}{p_i}} \bmod p$ .

- 2 Jeśli  $b = 1$  idź do kroku 2.

- 4 Zakończ algorytm z odpowiedzią  $\alpha$ .

# Generator grupy mnożkowej

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułowego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Przykład:

Sprawdź, czy  $\alpha = 2$  jest generatorem  $Z_7^*$ .

$$p - 1 = 6 = 2 \cdot 3; p_1 = 2, p_2 = 3.$$

$i$	$p_i$	$\alpha^{\frac{p-1}{p_i}} \bmod p$	wynik
1	2	$2^{\frac{6}{2}} \bmod 7 = 2^3 \bmod 7 = 1$	F

Przykład:

Sprawdź, czy  $\alpha = 3$  jest generatorem  $Z_7^*$ .

$$p - 1 = 6 = 2 \cdot 3; p_1 = 2, p_2 = 3.$$

$i$	$p_i$	$\alpha^{\frac{p-1}{p_i}} \bmod p$	wynik
1	2	$3^{\frac{6}{2}} \bmod 7 = 3^3 \bmod 7 = 6 \neq 1$	T
2	3	$3^{\frac{6}{3}} \bmod 7 = 3^2 \bmod 7 = 2 \neq 1$	T

# Logarytm dyskretny

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Niech  $Z_p^* = \{x : x \in Z_p, \gcd(x, p) = 1\}$  będzie zbiorem elementów odwracalnych modulo liczba pierwsza  $p$ .

Niech  $\alpha$  będzie generatorem  $Z_p^*$  oraz  $\beta \in Z_p^*$ .

## Definicja logarytmu dyskretnego

**Logarytmem dyskretnym** z  $\beta$  przy podstawie  $\alpha$ , oznaczanym  $\log_{\alpha}\beta$ , jest unikatowa liczba całkowita  $x \in Z_p^*$ , taka że  $\beta = \alpha^x \bmod p$ .

Przykład:

Niech  $\alpha = 5$  będzie generatorem  $Z_{97}^*$  oraz  $\beta = 35$ .

Logarytm dyskretny  $\log_5 35 = 32$ , ponieważ  $35 = 5^{32} \bmod 97$ .

# Problem logarytmu dyskretnego

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm  
szybkiego  
potęgowania  
modularnego

Generator grupy  
mialplikatywnej

Logarytm  
dyskretny

Protokół  
Diffie-Hellman'a

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą.

## Problem logarytmu dyskretnego - DLP

Dla danego generatora  $\alpha$  grupy  $Z_p^*$  oraz elementu  $\beta \in Z_p^*$  znaleźć:

$$x = \log_{\alpha} \beta$$

takie, że  $\beta = \alpha^x \bmod p$ .

Przykład: Obliczyć  $\log_5 18$  w  $Z_{23}^*$

Znaleźć  $x \in \{0, 1, \dots, 22\}$  takie, że  $5^x \bmod 23 = 18$ .

W tym celu obliczmy:

$$5^1 \bmod 23 = 5,$$

$$5^2 \bmod 23 = 2,$$

$$5^3 \bmod 23 = 10, \dots, 5^{12} \bmod 23 = 18$$

Stąd  $x = 12$

# Protokół Diffie-Hellman'a - New Directions in Cryptography, 1976

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

## Protokół uzgadniania kluczy Diffie-Hellman'a

protokół kryptograficzny, w wyniku wykonania którego dwie strony otrzymują taką samą liczbę, przy czym otrzymanie tej liczby na podstawie treści wymienionych wiadomości między stronami jest praktycznie niemożliwe. Liczba ta może być używana jako klucz do szyfrowania komunikacji.

- 1 Bezpieczeństwo oparte na trudności obliczania logarytmów dyskretnych w ciałach skończonych.
- 2 Wykorzystywany do dystrybucji kluczy (uzgadniania klucza).



# Protokół Diffie-Hellman'a - New Directions in Cryptography, 1976

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

## Protokół uzgadniania kluczy Diffie-Hellman'a

protokół kryptograficzny, w wyniku wykonania którego dwie strony otrzymują taką samą liczbę, przy czym otrzymanie tej liczby na podstawie treści wymienionych wiadomości między stronami jest praktycznie niemożliwe. Liczba ta może być używana jako klucz do szyfrowania komunikacji.

- 1 Bezpieczeństwo oparte na trudności obliczania logarytmów dyskretnych w ciałach skończonych.
- 2 Wykorzystywany do dystrybucji kluczy (uzgadniania klucza).



# Algorytm Diffie-Hellman'a

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

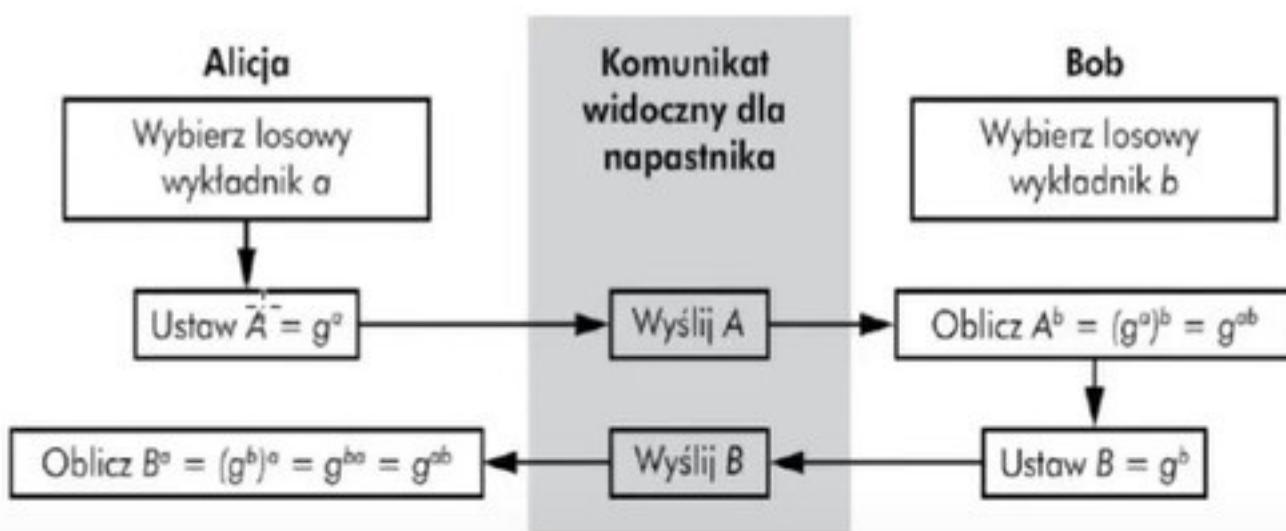
Generator grupy mnożkowej

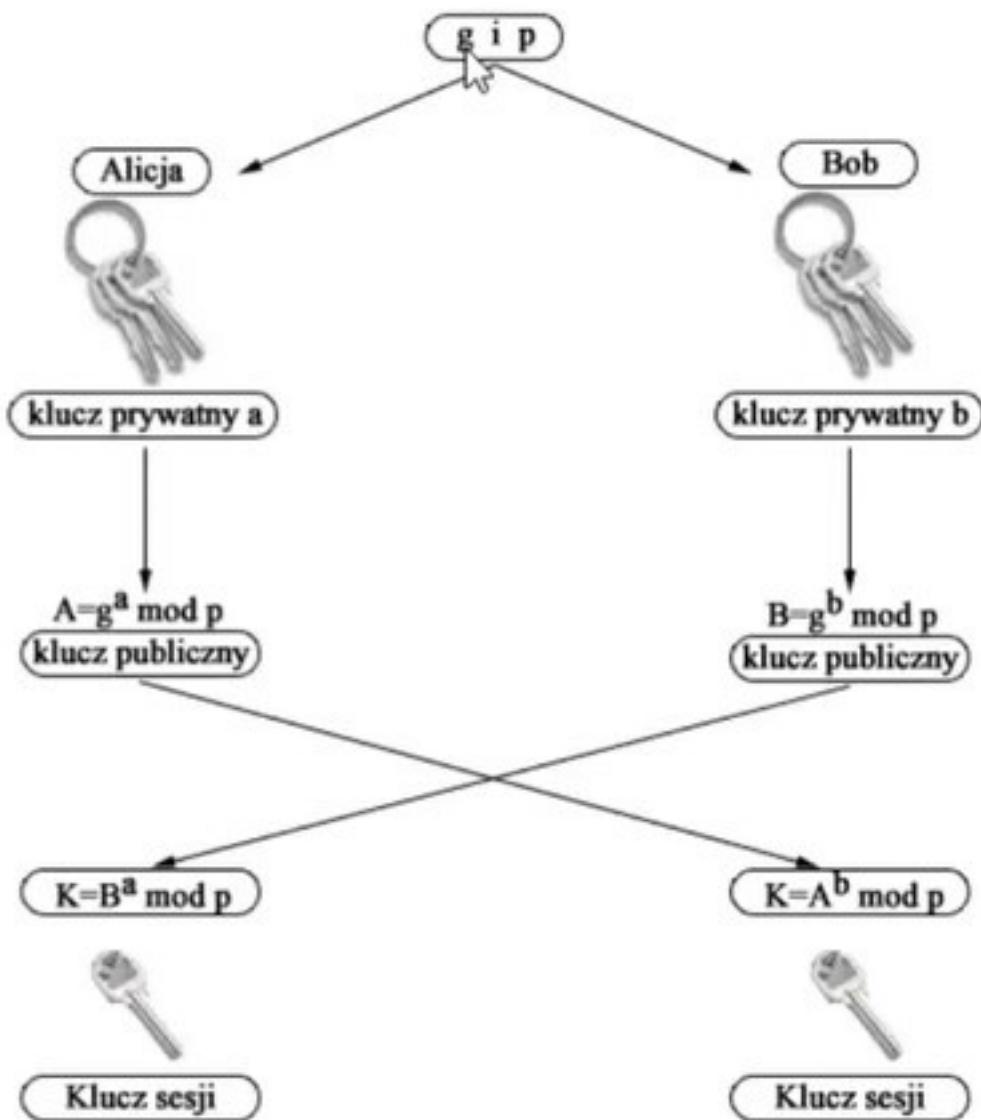
Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- Alicja i Bob uzgadniają dużą liczbę pierwszą  $p$  oraz generator  $g$  grupy mnożkowej  $Z_p^*$ .
- Liczby te mogą być opublikowane wcześniej lub uzgodnione przez sieć.
- Ich tajność nie jest istotna dla bezpieczeństwa protokołu.





# Algorytm Diffie-Hellman'a

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- 1 Alicja wybiera losowo dużą liczbę całkowitą  $1 < a < p - 1$  i oblicza:

$$A = g^a \bmod p$$

- 2 Bob wybiera losowo dużą liczbę całkowitą  $1 < b < p - 1$  i oblicza:

$$B = g^b \bmod p$$

- 3 Alicja wysyła  $A$  do Boba, Bob wysyła  $B$  do Alicji

- 4 Alicja oblicza:  $k_A = B^a \bmod p$

- 5 Bob oblicza:  $k_B = A^b \bmod p$

$$k = k_A = k_B = g^{ab} \bmod p$$

# Atak Man-in-the-Middle na algorytm D-H

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

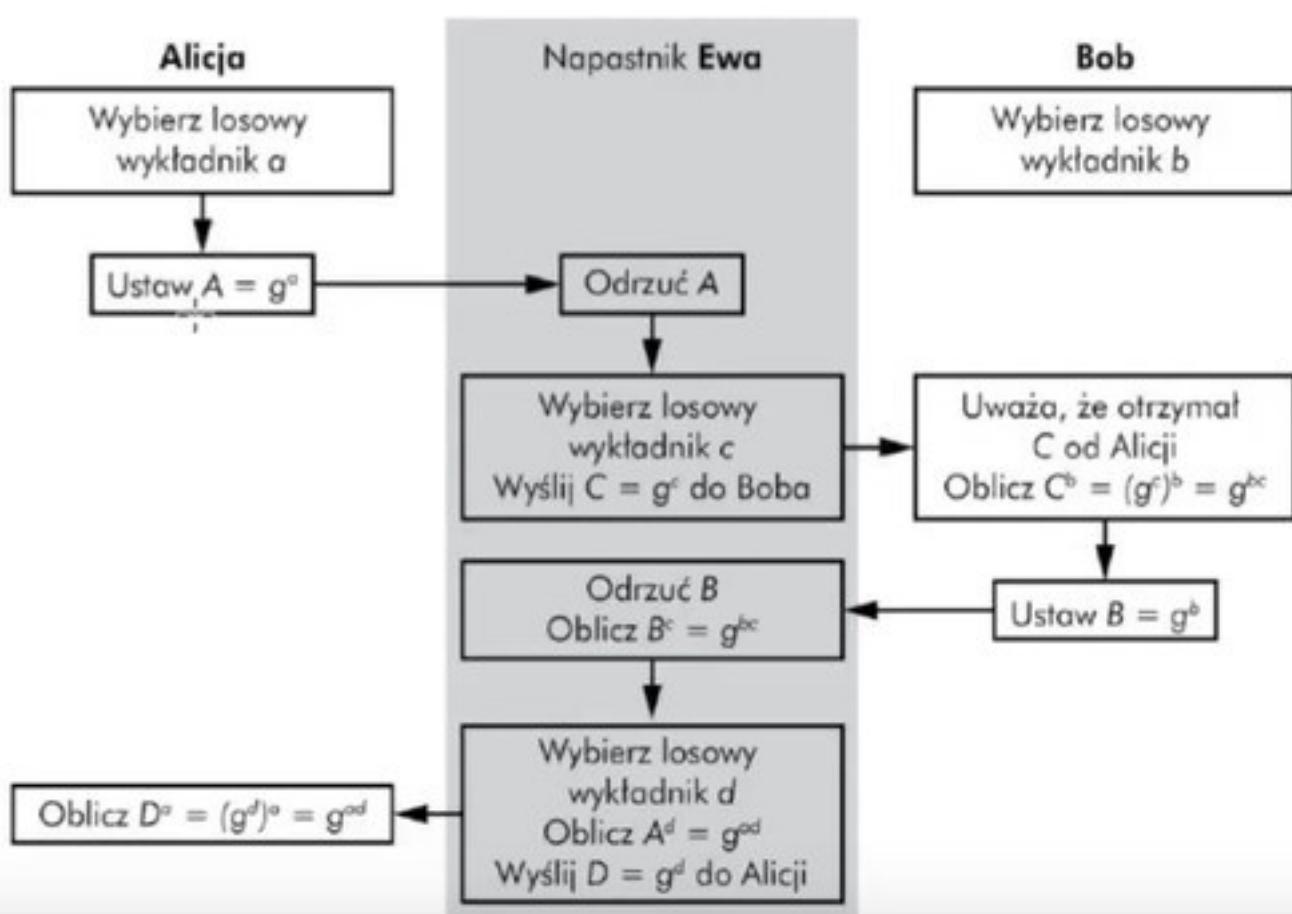
Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych



# Algorytm Diffie-Hellman'a - bezpieczeństwo, cz. 1

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm  
szybkiego  
potęgowania  
modularnego

Generator grupy  
mnożkowej

Algorytm  
dyskretny

Protokół  
Diffie-Hellman'a

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

## Problem Diffiego-Hellmana

Dla:

- danej liczby pierwszej  $p$ ,
- generatora  $g$  grupy  $\mathbb{Z}_p^*$ ,
- elementów  $g^a \bmod p$  oraz  $g^b \bmod p$ ,

znaleźć liczbę całkowitą  $g^{ab} \bmod p$ .

# Algorytm Diffie-Hellman'a - bezpieczeństwo, cz. 2



## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Generator grupy mnożnikowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- Podsłuchujący zna tylko  $p$ ,  $g$ ,  $A = g^a \text{ mod } p$ ,  $B = g^b \text{ mod } p$ .
- Aby znaleźć  $k$  musi wyznaczyć  $a$  i  $b$  obliczając logarytmy dyskretne:

$$a = \log_g A$$

$$b = \log_g B$$

- Warunki bezpieczeństwa:
  - 1  $p$  i  $(p - 1)/2$  - liczby pierwsze długości min. 2048 bity ,
  - 2  $g$  - pierwiastek pierwotny modulo  $p$ .

# Rozszerzony algorytm Diffie-Hellman'a, cz. 1

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Alicja, Bob i Karol ustalają:

- dużą liczbę pierwszą  $p$  taką, że liczba  $(p - 1)/2$  też jest pierwszą,
- generator  $g$  grupy mnożkowej  $Z_p^*$ .

- 1 Alicja wybiera losowo dużą liczbę całkowitą  $a$  i oblicza:

$$A = g^a \bmod p$$

- 2 Bob wybiera losowo dużą liczbę całkowitą  $b$  i oblicza:

$$B = g^b \bmod p$$

- 3 Karol wybiera losowo dużą liczbę całkowitą  $c$  i oblicza:

$$C = g^c \bmod p$$

- 4 Alicja wysyła  $A$  do Boba, Bob wysyła  $B$  do Karola, Karol wysyła  $C$  do Alicji.

# Rozszerzony algorytm Diffie-Hellman'a, cz. 2

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- 1 Alicia oblicza:  $A' = C^a \text{ mod } p,$
- 2 Bob oblicza:  $B' = A^b \text{ mod } p,$
- 3 Karol oblicza:  $C' = B^c \text{ mod } p,$
- 4 Alicia wysyła  $A'$  do Boba, Bob wysyła  $B'$  do Karola, Karol wysyła  $C'$  do Alicji,
- 5 Alicia oblicza  $k_A = C'^a \text{ mod } p = g^{abc} \text{ mod } p,$
- 6 Bob oblicza  $k_B = A'^b \text{ mod } p = g^{abc} \text{ mod } p,$
- 7 Karol oblicza  $k_C = B'^c \text{ mod } p = g^{abc} \text{ mod } p,$

Klucz tajny wynosi:

$$k = k_A = k_B = k_C = g^{abc} \text{ mod } p$$

# Algorytm Diffie-Hellman'a - bezpieczeństwo, cz. 1

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

## Problem Diffiego-Hellmana

Dla:

- danej liczby pierwszej  $p$ ,
- generatora  $g$  grupy  $\mathbb{Z}_p^*$ ,
- elementów  $g^a \bmod p$  oraz  $g^b \bmod p$ ,

znaleźć liczbę całkowitą  $g^{ab} \bmod p$ .

# Idea kryptosystemów asymetrycznych, cz.1

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

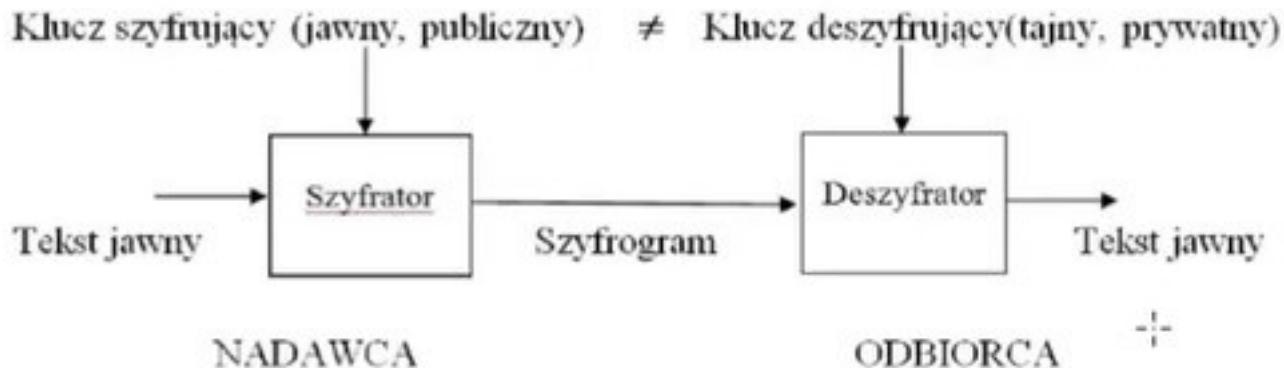
Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych



Strony	Klucze publiczne	Klucze prywatne
A	$e_A$	$d_A$
B	$e_B$	$d_B$

## Idea kryptosystemów asymetrycznych, cz.2

### WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellman'a

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Realizacja usługi poufności - szyfrowanie wiadomości przez Alicję:

- 1 Alicja pobiera klucz publiczny Boba  $e_B$ .
- 2 Alicja szyfruje wiadomość  $M$  kluczem publicznym Boba  $e_B$ :

$$C = ENC_{e_B}(M)$$

- 3 Alicja wysyła do Boba szyfrogram  $C$ .

Realizacja usługi poufności - deszyfrowanie szyfrogramu przez Boba:

- 1 Bob otrzymuje od Alicji szyfrogram  $C$ .
- 2 Deszyfruje go swoim kluczem prywatnym  $d_B$ :

$$M = DEC_{d_B}(C).$$

Przeciwnik nie może zdeszyfrować wiadomości ponieważ nie zna klucza prywatnego  $d_B$  (nie może go wyliczyć na podstawie znajomości klucza publicznego  $e_B$ ).

Realizacja usługi uwierzytelnienia - generacja podpisu cyfrowego przez Alicję:

- 1 Alicja chce podpisać wiadomość  $M$  podpisem cyfrowym.
- 2 Alicja generuje podpis cyfrowy  $S$  za pomocą swojego klucza prywatnego  $d_A$ :

$$S = SIG_{d_A}(M).$$

- 3 Alicja wysyła do Boba podpis cyfrowy  $S$  oraz wiadomość  $M$ .

# Idea kryptosystemów asymetrycznych, cz.4

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

Generator grupy mnożkowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Realizacja usługi uwierzytelnienia - weryfikacja podpisu cyfrowego przez Boba:

- 1 Bob otrzymuje od Alicji podpis cyfrowy  $S$  oraz wiadomość  $M$ .
- 2 Bob weryfkuje podpis cyfrowy kluczem publicznym Alicji  $e_A$ :

$$M' = \text{VER}_{e_A}(S).$$

- 3 Jeżeli wyznaczona wiadomość  $M'$  jest identyczna z wiadomością otrzymaną  $M$  to tożsamość Alicji została poprawnie zweryfikowana, w przeciwnym przypadku tożsamość Alicji nie została poprawnie zweryfikowana.

# Uwierzytelniony algorytm D-H

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

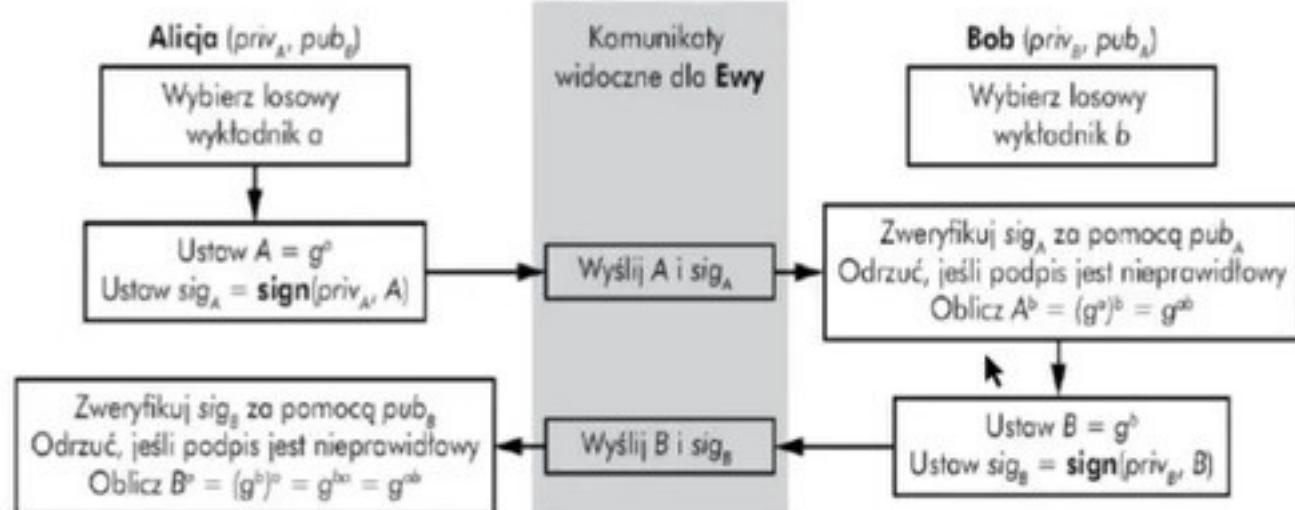
Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Generator grupy mnożkowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych



# Protokół Menezes-Qu-Vanstone - MQV

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

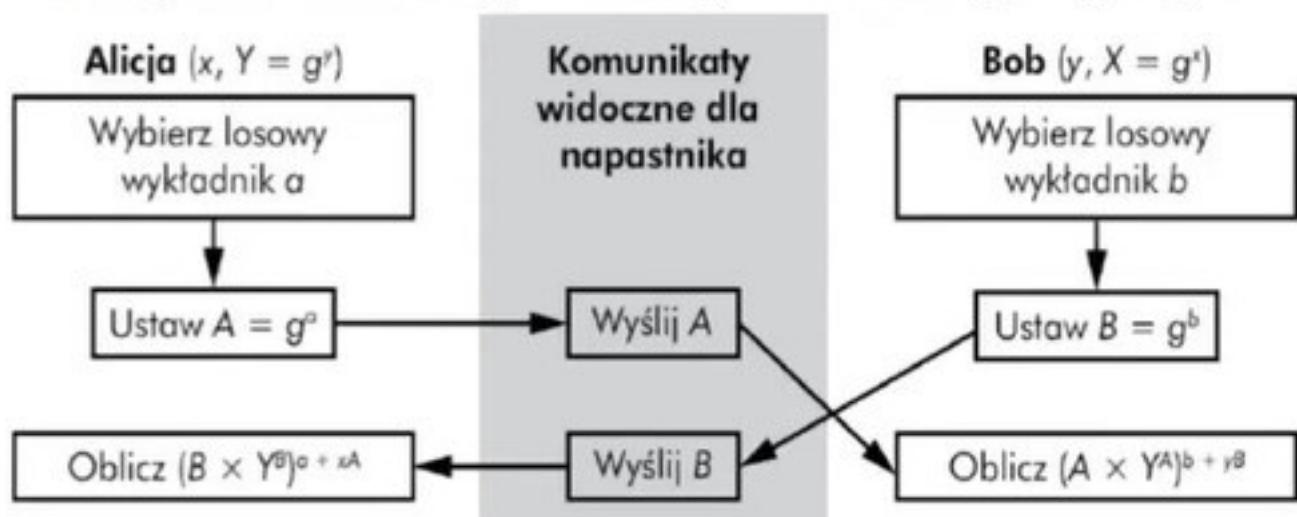
Generator grupy mnożnikowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- Zaprojektowany w 1998 i zatwierdzony przez NSA do ochrony najbardziej krytycznych zasobów;
- Bardziej bezpieczny niż uwierzytelniony algorytm D-H;
- Używa działań z długoterminowymi kluczami symetrycznymi.



# Uwierzytelniony algorytm D-H

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

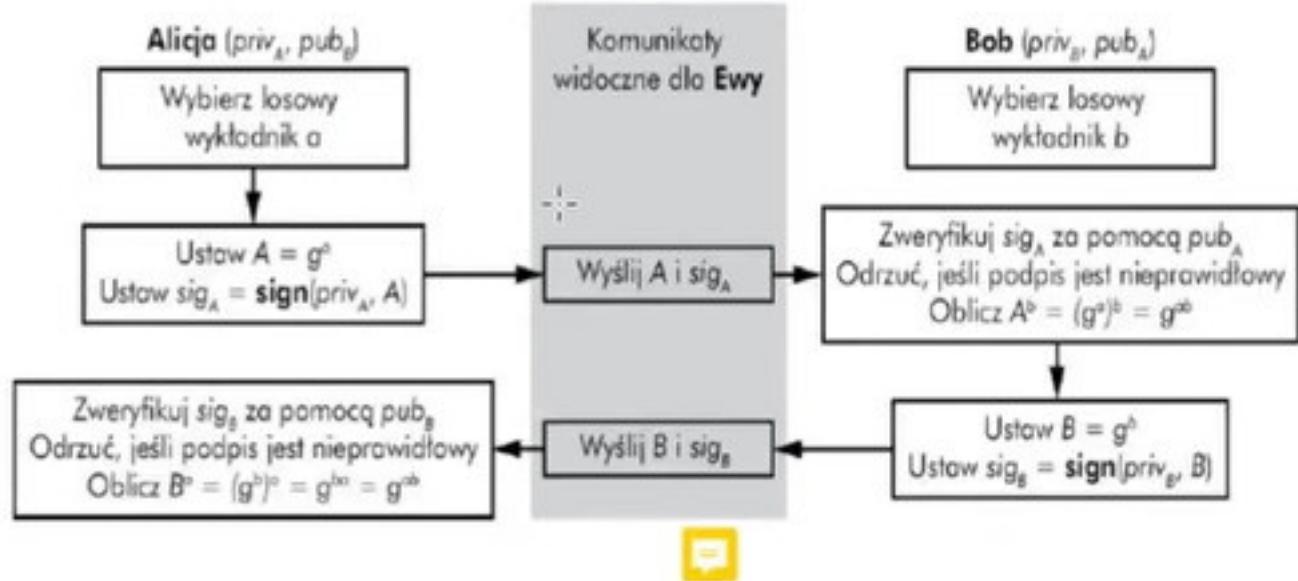
Algorytm szybkiego potęgowania modularnego

Generator grupy mnożkowej

Logarytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych



# Protokół Menezes-Qu-Vanstone - MQV

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Algorytm szybkiego potęgowania modułarnego

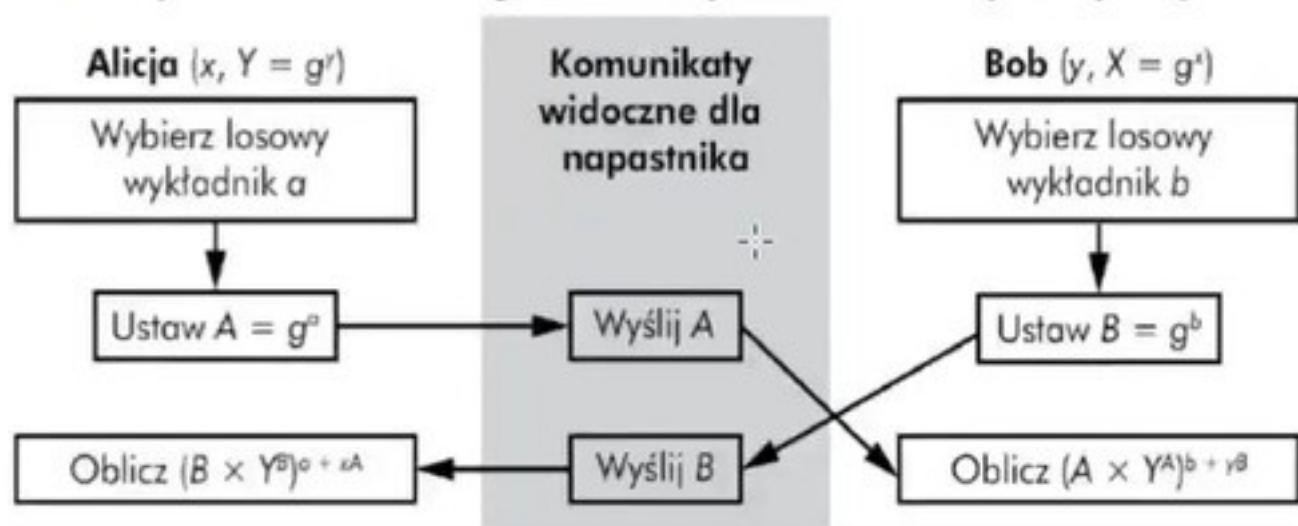
Generator grupy mnożkowej

Algorytm dyskretny

Protokół Diffie-Hellmana

Idea kryptosystemów asymetrycznych

- Zaprojektowany w 1998 i zatwierdzony przez NSA do ochrony najbardziej krytycznych zasobów;
- Bardziej bezpieczny niż uwierzyteliony algorytm D-H;
- Używa działań z długoterminowymi kluczami symetrycznymi.



# Plan wykładu

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr hab. Piotr Mycielski

### Wprowadzenie

Idea  
Kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpisy cyfrowe -  
schemat ogólny

Kryptosystem RSA

Kryptosystem ElGamala, 1985 r.

### 1 Idea kryptosystemów asymetrycznych

### 2 Podpis cyfrowy

### 3 Kryptosystem RSA:

- Generacja kluczy RSA.
- Szyfrowanie/deszyfrowanie RSA.
- Podpis cyfrowy RSA.

### 4 Kryptosystem ElGamala:

- Generacja kluczy ElGamala.
- Szyfrowanie/deszyfrowanie ElGamala.
- Podpis cyfrowy ElGamala.

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

# Kryptografia asymetryczna kryptografia klucza publicznego

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.



## 1 Idea kryptosystemów asymetrycznych

## 2 Podpis cyfrowy

## 3 Kryptosystem RSA:

- Generacja kluczy RSA.
- Szyfrowanie/deszyfrowanie RSA.
- Podpis cyfrowy RSA.

## 4 Kryptosystem ElGamala:

- Generacja kluczy ElGamala.
- Szyfrowanie/deszyfrowanie ElGamala.
- Podpis cyfrowy ElGamala.

# Idea kryptosystemów asymetrycznych, cz.1

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

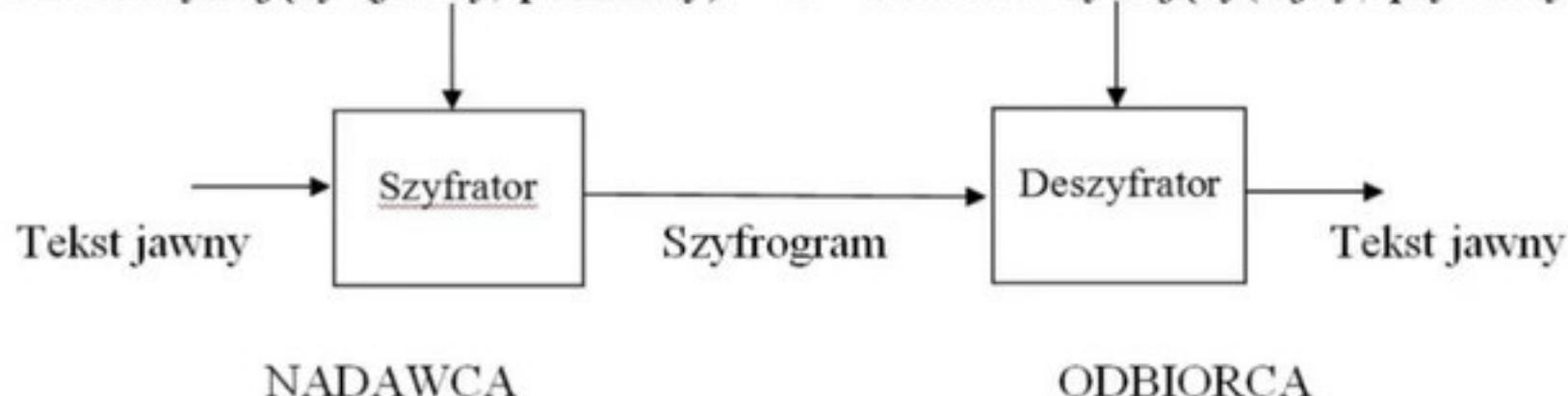
Idea kryptosystemów asymetrycznych

Podpis cyfrowy - schemat ogólny

Kryptosystem RSA

Kryptosystem ElGamala, 1985 r.

Klucz szyfrujący (jawny, publiczny)  $\neq$  Klucz deszyfrujący (tajny, prywatny)



Strony	Klucze publiczne	Klucze prywatne
A	$e_A$	$d_A$
B	$e_B$	$d_B$

## Realizacja usługi poufności - szyfrowanie wiadomości przez Alicję:

- 1 Alicja pobiera klucz publiczny Boba  $e_B$ .
- 2 Alicja szyfruje wiadomość  $M$  kluczem publicznym Boba  $e_B$ :

$$C = \text{ENC}_{e_B}(M)$$

- 3 Alicja wysyła do Boba szyfrogram  $C$ .

## Realizacja usługi poufności - deszyfrowanie szyfrogramu przez Boba:

- 1 Bob otrzymuje od Alicji szyfrogram  $C$ .
- 2 Deszyfruje go swoim kluczem prywatnym  $d_B$ :

$$M = \text{DEC}_{d_B}(C).$$

Przeciwnik nie może zdeszyfrować wiadomości ponieważ nie wie, nie zna klucza prywatnego  $d_B$  (nie może go wyliczyć na podstawie znajomości klucza publicznego  $e_B$ ).

## Realizacja usługi uwierzytelnienia - generacja podpisu cyfrowego przez Alicję:

- 1 Alicja chce podpisać wiadomość  $M$  podpisem cyfrowym.
- 2 Alicja generuje podpis cyfrowy  $S$  za pomocą swojego klucza prywatnego  $d_A$ :

$$S = \text{SIG}_{d_A}(M).$$

- 3 Alicja wysyła do Boba podpis cyfrowy  $S^I$  oraz wiadomość  $M$ .

<b>Podpis ręczny</b>	<b>Podpis cyfrowy</b>
<b>Cechy wspólne</b>	
	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Przypisany jednej osobie</li><li>2. Niemożliwy do podrobienia</li><li>3. Uniemożliwiający wyparcie się go przez autora</li><li>4. Łatwy do weryfikacji przez osobę niezależną</li><li>5. Łatwy do wygenerowania</li></ol>
<b>Różnice</b>	
<ol style="list-style-type: none"><li>6. Związany nieroziłącznie z dokumentem</li><li>7. Taki sam dla wszystkich dokumentów</li><li>8. Tylko na ostatniej stronie dokumentu</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>6. Może być składowany i transmitowany niezależnie od dokumentu</li><li>7. Jest funkcją dokumentu</li><li>8. Obejmuje cały dokument</li></ol>

## Realizacja usługi uwierzytelnienia - generacja podpisu cyfrowego przez Alicję:

- 1 Alicja chce podpisać wiadomość  $M$  podpisem cyfrowym.
- 2 Alicja generuje podpis cyfrowy  $S$  za pomocą swojego klucza prywatnego  $d_A$ :

$$S = \text{SIG}_{d_A}(M).$$

- 3 Alicja wysyła do Boba podpis cyfrowy  $S$  oraz wiadomość  $M$ .

# Realizacja usługi uwierzytelnienia - weryfikacja podpisu cyfrowego przez Boba:

- 1 Bob otrzymuje od Alicji podpis cyfrowy  $S$  oraz wiadomość  $M$ .
- 2 Bob weryfkuje podpis cyfrowy kluczem publicznym Alicji  $e_A$ :

$$M' = \text{VER}_{e_A}(S).$$

- 3 Jeżeli wyznaczona wiadomość  $M'$  jest identyczna z wiadomością otrzymaną  $M$  to tożsamość Alicji została poprawnie zweryfikowana, w przeciwnym przypadku tożsamość Alicji nie została poprawnie zweryfikowana.

# Podpis cyfrowy

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

## Podpis cyfrowy

protokół kryptograficzny realizujący następujące usługi  
kryptograficzne:

- 1 uwierzytelnienie,
- 2 integralność danych,
- 3 niezaprzeczalność.

Podpis ręczny	Podpis cyfrowy
<b>Cechy wspólne</b>	
<ul style="list-style-type: none"><li>1. Przypisany jednej osobie</li><li>2. Niemożliwy do podrobienia</li><li>3. Uniemożliwiający wyparcie się go przez autora</li><li>4. Latwy do weryfikacji przez osobę niezależną</li><li>5. Łatwy do wygenerowania</li></ul>	
<b>Różnice</b>	
<ul style="list-style-type: none"><li>6. Związany nieroziącznie z dokumentem</li><li>7. Taki sam dla wszystkich dokumentów</li><li>8. Tylko na ostatniej stronie dokumentu</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>6. Może być składowany i transmitowany niezależnie od dokumentu</li><li>7. Jest funkcją dokumentu</li><li>8. Obejmuje cały dokument</li></ul>

## Kryptosystem RSA

Jeden z pierwszych i obecnie najpopularniejszy, asymetryczny algorytm kryptograficzny, zaprojektowany w 1977 przez Rona Rivesta, Adi Shamira oraz Leonarda Adlemana. Jego nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk jego twórców.



<b>Podpis ręczny</b>	<b>Podpis cyfrowy</b>
<b>Cechy wspólne</b>	
	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Przypisany jednej osobie</li><li>2. Niemożliwy do podrobienia</li><li>3. Uniemożliwiający wyparcie się go przez autora</li><li>4. Łatwy do weryfikacji przez osobę niezależną</li><li>5. Łatwy do wygenerowania</li></ol>
<b>Różnice</b>	
<ol style="list-style-type: none"><li>6. Związany nieroziłącznie z dokumentem</li><li>7. Taki sam dla wszystkich dokumentów</li><li>8. Tylko na ostatniej stronie dokumentu</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>6. Może być składowany i transmitowany niezależnie od dokumentu</li><li>7. Jest funkcją dokumentu</li><li>8. Obejmuje cały dokument</li></ol>

# Kryptosystem RSA

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r

## Kryptosystem RSA

Jeden z pierwszych i obecnie najpopularniejszy, asymetryczny algorytm kryptograficzny, zaprojektowany w 1977 przez Rona Rivesta, Adi Shamira oraz Leonarda Adlemana. Jego nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk jego twórców.

## Kryptosystem RSA

Jeden z pierwszych i obecnie najpopularniejszy, asymetryczny algorytm kryptograficzny, zaprojektowany w 1977 przez Rona Rivesta, Adi Shamira oraz Leonarda Adlemana. Jego nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk jego twórców.

### ■ Zastosowanie:

- 1 zapewnienie poufności
- 2 zapewnienie uwierzytelnienia

### ■ Bezpieczeństwo

kryptosystemu oparte jest na trudności faktoryzacji dużych liczb złożonych.



# Kryptosystem RSA - generacja kluczy RSA

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

- 1 Wygenerować losowo dwie duże, różne liczby pierwsze  $p$  i  $q$ .
- 2 Obliczyć  $n = pq$  oraz  $\phi = (p - 1)(q - 1)$ .
- 3 Wybrać losowo liczbę całkowitą  $e$ ,  $1 < e < \phi$ , taką że  $\gcd(e, \phi) = 1$ .
- 4 Korzystając z rozszerzonego algorytmu Euclidesa wyznaczyć liczbę  $d = e^{-1} \bmod \phi$  ( $d$  jest odwrotnością multiplikatywną  $e$  modulo  $\phi$ ).
- 5 Wyznaczone klucze:
  - $k_1 = (e, n)$  - klucz publiczny,
  - $k_2 = (d, n)$  - klucz prywatny.
- 6 Liczby  $p, q, \phi$  są kasowane.

# Kryptosystem RSA - generacja kluczy RSA

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

Przykład: Generacja kluczy przez Alicję:

- Alicja:
  - 1 wybiera dwie liczby pierwsze:  $p = 13$  oraz  $q = 17$ ,
  - 2 oblicza:  $n = pq = 13 \cdot 17 = 221$  oraz  
 $\phi = (p - 1)(q - 1) = 12 \cdot 16 = 192$ ,
  - 3 wybiera:  $e = 151$ ,
  - 4 korzystając z rozszerzonego algorytmu Euklidesa oblicza  
 $d = e^{-1} \bmod \phi = 151^{-1} \bmod 192 = 103$ .
- Kluczem publicznym Alicji jest para:  $k_1 \stackrel{\text{I}}{=} (e, n) = (151, 221)$ ,
- Kluczem prywatnym Alicji jest para:  $k_2 = (d, n) = (103, 221)$ ,

# Kryptosystem RSA - etap poufnej wymiany informacji



WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

Niech:

- $k_1 = (e, n)$  - klucz publiczny,
- $k_2 = (d, n)$  - klucz prywatny,
- $x \in Z_n$  - liczba będąca wiadomością do zaszyfrowania,

1 Szyfrowanie:

$$y = E_{k_1}(x) = x^e \bmod n$$

2 Deszyfrowanie:

$$x = D_{k_2}(y) = y^d \bmod n$$

# Kryptosystem RSA - dowód poprawności



Należy wykazać, że:

$$D_{k_2}(E_{k_1}(m)) = m$$

- $m = c^d \bmod n = (m^e)^d \bmod n = m^{ed} \bmod n,$
- ponieważ  $ed \bmod \phi = 1$ , to  $ed \equiv 1 \bmod \phi$  z której wynika  $\phi|(ed - 1)$ ,
- istnieje liczba całkowita  $k$  taka, że  $ed - 1 = k \cdot \phi$ ,
- dostajemy  $ed = k \cdot \phi + 1$ ,
- $m = m^{ed} \bmod n = m^{k \cdot \phi + 1} \bmod n = m \cdot (m^\phi)^k \bmod n = m \cdot (1)^k \bmod n = m$

## Problem RSA

Dla danych:

- dodatniej liczby całkowitej  $n = p \cdot q$ , będącej iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych  $p$  i  $q$ ,
- dodatniej liczby całkowitej  $e$  takiej, że  $\gcd(e, (p-1)(q-1)) = 1$ ,
- liczby całkowitej  $c$ .

znaleźć liczbę całkowitą  $m$  taką, że  $m^e \pmod{n} = c$ .

Inaczej mówiąc, problem RSA polega na:

- odtworzeniu tekstu jawnego  $m$  na podstawie odpowiadającego mu szyfrogramu  $c$ , przy założeniu znajomości klucza publicznego  $k_1 = (e, n)$  właściwego odbiorcy wiadomości i nie znajomości klucza publicznego  $k_2 = (d, n)$  właściwego odbiorcy wiadomości.

## Szyfrownie RSA w praktyce:

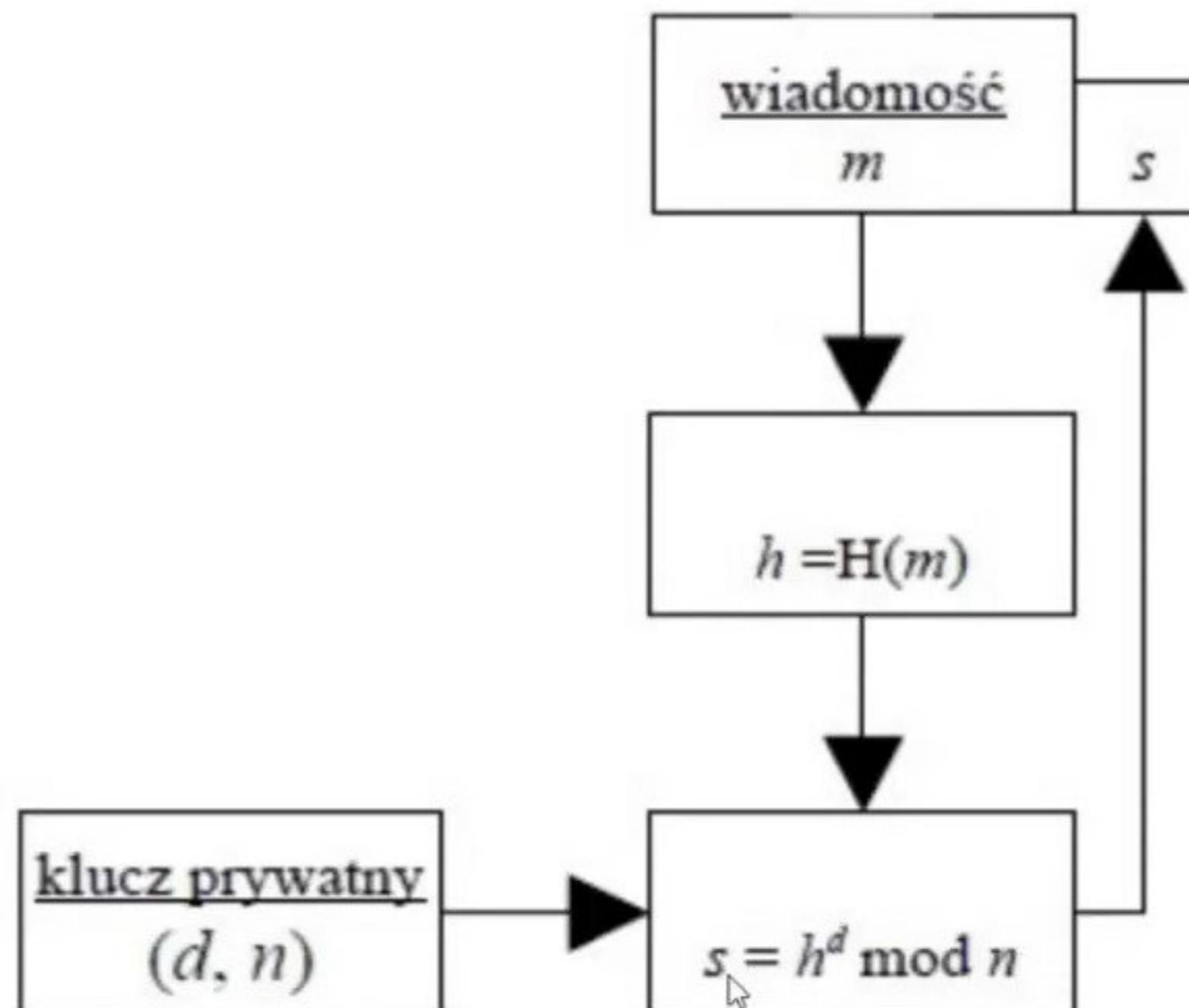
- długość modułu  $n$ : min. 2048 bity,
- wybieranie liczb pierwszych  $p$  i  $q$ :
  - rozkład  $n = pq$  na czynniki pierwsze był obliczeniowo niewykonalny,
  - liczby  $p$  i  $q$  powinny mieć w przybliżeniu taką samą długość w bitach, np. jeśli jest stosowany 2048-bitowy moduł  $n$ , to  $p$  i  $q$  powinny mieć w przybliżeniu po 1024 bitów,
  - liczby  $p$  i  $q$  powinny być mocnymi liczbami pierwszymi

### Definicja

Liczby pierwsze  $p$  i  $q$  nazywamy **mocnymi liczbami pierwszymi**, gdy:

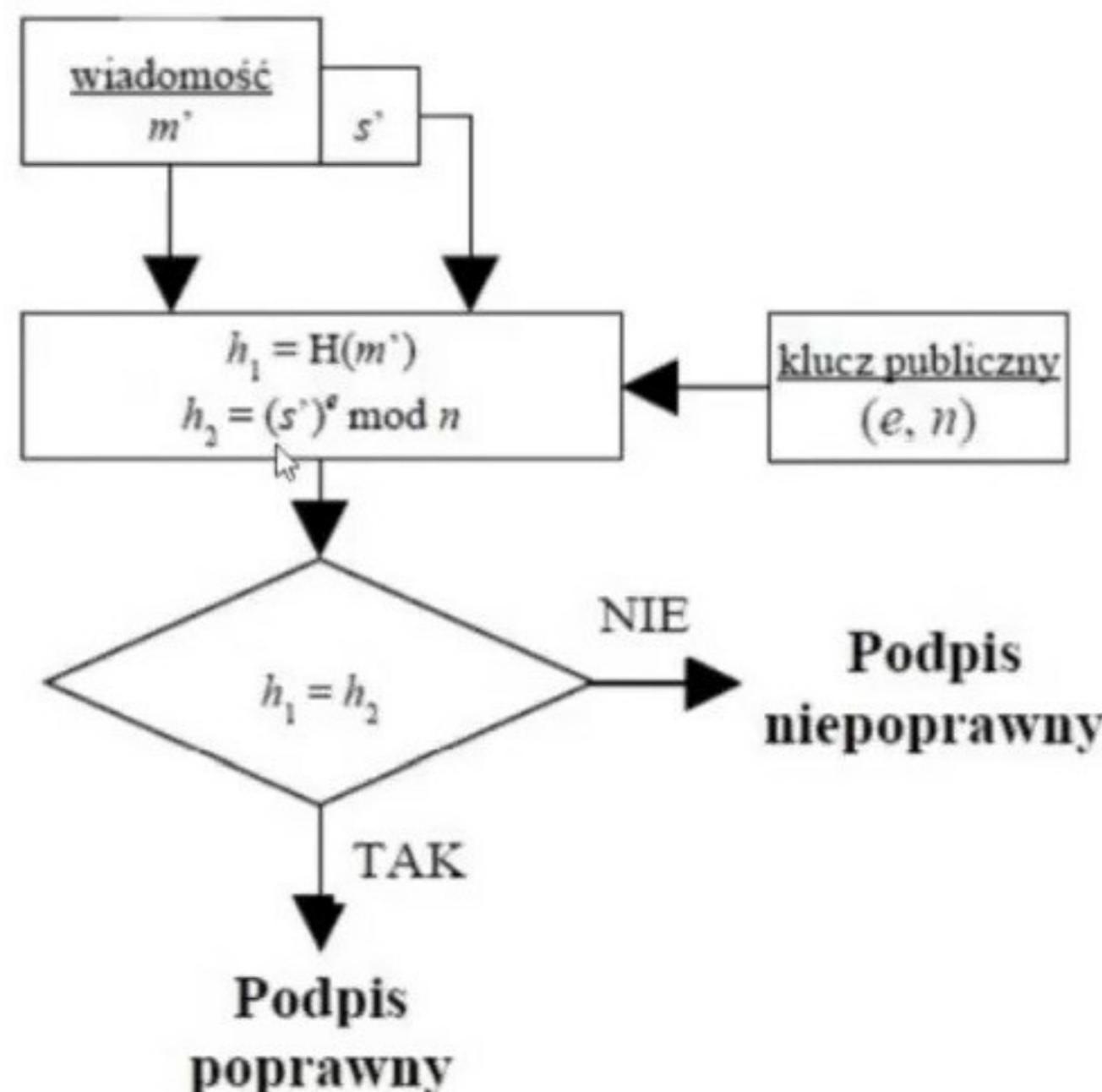
- największy wspólny dzielnik liczb  $p-1$  i  $q-1$  powinien być mały,
- liczby  $p-1$  i  $q-1$  powinny mieć duże czynniki pierwsze,
- liczby  $(p-1)/2$  i  $(q-1)/2$  powinny być pierwszymi.

Niech dana będzie wiadomość  $m$ , klucz prywatny  $k_2 = (d, n)$  oraz funkcja skrótu  $H$ .



- 1 Wyznaczenie skrótu wiadomości  $h = H(m)$ .
- 2 Obliczenie  $s = h^d \text{ mod } n$ .
- 3 Podpisem wiadomości  $m$  jest  $s$

# Strona B odbiera wiadomość $m'$ wraz z podpisem $s'$



- 1 Wyznaczenie skrótu wiadomości  $h_1 = H(m')$ .
- 2 Obliczenie  $h_2 = (s')^e \text{ mod } n$ .
- 3 Sprawdzenie, czy  $h_1 = h_2$  (warunek podpisu).
- 4 Jeśli  $h_1 = h_2$  podpis poprawny, w p.p podpis niepoprawny.

**1** Generacja podpisu cyfrowego Alicji:

- $m$  będzie wiadomością, której skrót wynosi  $h = H(m) = 25$ .
- $k_2 = (d, n) = (103, 221)$  - klucz prywatny Alicji.
- Alicja wyznacza podpis cyfrowy:

$$s = h^d \bmod n = 25^{103} \bmod 221 = 168$$

**2** Weryfikacja podpisu przez Boba:

- pobiera klucz publiczny Alicji  $k_1 = (e, n) = (151, 221)$ ,
- otrzymuje wiadomość  $m'$  wraz z podpisem  $s' = 168$ .
- wyznacza skrót z otrzymanej wiadomości  $m'$  przy użyciu f.  
skrótu:  $h_1 = H(m') = 25$ .
- oblicza skrót przy użyciu klucza publicznego Alicji:

$$h_2 = (s')^e \bmod n = 168^{151} \bmod 221 = 25$$

I

- ponieważ  $h_1 = h_2 = 25$  - podpis prawidłowy.

# Podpis cyfrowy RSA - generacja podpisu

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

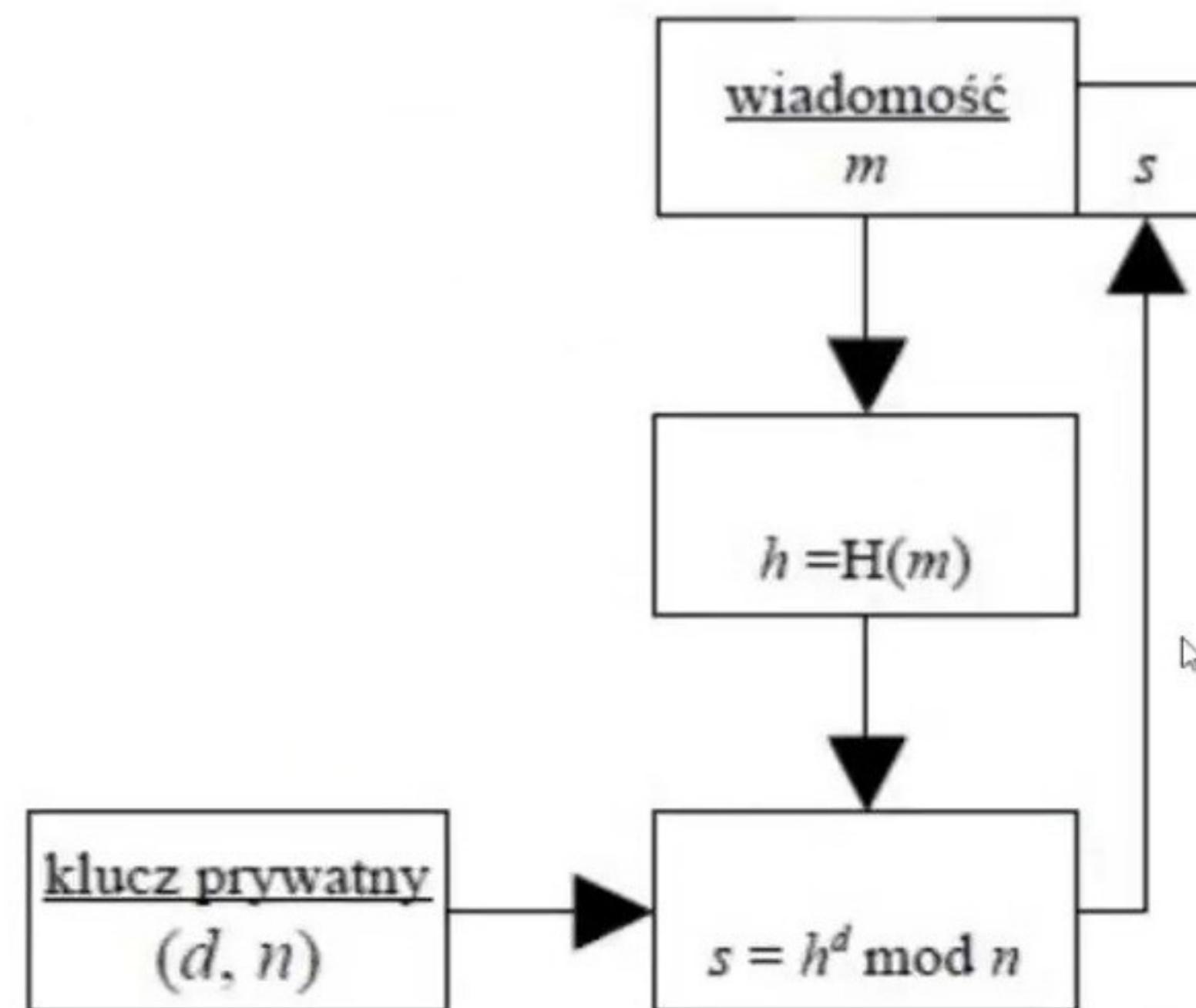
Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

Niech dana będzie wiadomość  $m$ , klucz prywatny  $k_2 = (d, n)$  oraz funkcja skrótu  $H$ .



# Kryptosystem RSA - warunki bezpieczeństwa

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

## Szyfrowanie RSA w praktyce:

- długość modułu  $n$ : min. 2048 bity,
- wybieranie liczb pierwszych  $p$  i  $q$ :
  - rozkład  $n = pq$  na czynniki pierwsze był obliczeniowo niewykonalny,
  - liczby  $p$  i  $q$  powinny mieć w przybliżeniu taką samą długość w bitach, np. jeśli jest stosowany 2048-bitowy moduł  $n$ , to  $p$  i  $q$  powinny mieć w przybliżeniu po 1024 bitów,
  - liczby  $p$  i  $q$  powinny być mocnymi liczbami pierwszymi

## Definicja

Liczby pierwsze  $p$  i  $q$  nazywamy **mocnymi liczbami pierwszymi**, gdy:

- największy wspólny dzielnik liczb  $p-1$  i  $q-1$  powinien być mały,
- liczby  $p-1$  i  $q-1$  powinny mieć duże czynniki pierwsze,
- liczby  $(p-1)/2$  i  $(q-1)/2$  powinny być pierwszymi.

# Kryptosystem ElGamala

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

## Kryptosystem ElGamala

Jeden z najważniejszych (obok RSA) kryptosystemów asymetrycznych. Zaprojektowany w 1985 przez Egipcjanina Tahera ElGamala.

- Zastosowanie:
  - 1 zapewnienie poufności
  - 2 zapewnienie uwierzytelnienia
- Bezpieczeństwo kryptosystemu oparte jest na trudności obliczania logarytmów dyskretnych w ciele liczb całkowitych modulo duża liczba pierwsza.
- Każdorazowe szyfrowanie wykorzystuje losowo wygenerowaną liczbę (ten sam tekst jawny daje inny kryptogram).
- Szyfrogramy są dwukrotnie dłuższe niż tekst jawne.



# Kryptosystem ElGamala - generacja kluczy

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

- 1 Wygenerować losowo taką dużą liczbę pierwszą  $p$  taką, aby obliczenie logarytmów dyskretnych modulo  $p$  było praktycznie niewykonalne.
- 2 Wybrać generator  $\alpha$  dla  $Z_p^*$ .
- 3 Wybrać losowo liczbę  $1 < t < p - 1$  i obliczyć  $\beta = \alpha^t \bmod p$ .
- 4 Klucz  $k_1 = (p, \alpha, \beta)$  jest kluczem publicznym, klucz  $k_2 = (p, t)$  jest kluczem prywatnym.

# Kryptosystem ElGamala - etap poufnej wymiany informacji



- 1 Szyfrowanie - strona B szyfruje wiadomość przy użyciu klucza publicznego  $k_1$  strony A.

Niech:

- $P = x \in Z_p$  - liczba będąca wiadomością do zaszyfrowania
- $k_1 = (p, \alpha, \beta)$  - klucz publiczny strony A,
- $1 < r < p - 1$  - randomizer

$$C = (y_1, y_2) = E_{k_1}(r, x) = (\alpha^r \bmod p, x \cdot \beta^r \bmod p)$$

- 2 Deszyfrowanie - strona A deszyfruje otrzymaną wiadomość przy użyciu swojego klucza prywatnego  $k_2$ .

Niech:

- $C = (y_1, y_2)$ , gdzie  $y_1, y_2 \in Z_p$  - liczby będące kryptogramem do zdeszyfrowania,
- $k_2 = (p, t)$  - klucz prywatny strony A.

$$P = x = D_{k_2}(y_1, y_2) = y_2 \cdot (y_1^t)^{-1} \bmod p = y_2 \cdot y_1^{p-1-t} \bmod p$$

# Kryptosystem ElGamala - dowód poprawności

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

Należy wykazać, że:

$$x = D_{k_2}(E_{k_1}(x)) \quad \blacktriangleright$$



$$y_2 \cdot (y_1^t)^{-1} \bmod p = x \cdot \beta^r \cdot (\alpha^{rt})^{-1} \bmod p = x \cdot \alpha^{rt} \cdot (\alpha^{rt})^{-1} \bmod p = x$$

# Kryptosystem ElGamala - etap poufnej wymiany informacji

## WSTĘP DO KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea kryptosystemów asymetrycznych

Podpis cyfrowy - schemat ogólny

Kryptosystem RSA

Kryptosystem ElGamala, 1985 r.

Przykład:

Niech:  $x = 20$ ,  $r = 10$ .

- Bob przy użyciu klucza  $k_1 = (p, \alpha, \beta) = (101, 2, 100)$  oblicza:

$$(y_1, y_2) = (\alpha^r \bmod p, x \cdot \beta^r \bmod p) =$$

$$(2^{10} \bmod 101, 20 \cdot 100^{10} \bmod 101) = (14, 20)$$

- Alicja przy użycia klucza  $k_2 = (p, t) = (101, 50)$  oblicza:

$$x = y_2 \cdot y_1^{p-1-t} \bmod p =$$

$$20 \cdot 14^{101-1-50} \bmod 101 = 20 \cdot 14^{50} \bmod 101 = 20$$

# Kryptosystem ElGamala - bezpieczeństwo

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

## Problem ElGamala

Dla danych:

- liczby pierwszej  $p$ ,
- generatora  $\alpha$  grupy  $Z_p^*$ ,
- elementu  $\beta \in Z_p^*$ ,

znać liczbę całkowitą  $x$ ,  $0 \leq x \leq p - 2$  taką, że  $\alpha^x \equiv \beta \pmod{p}$ .

Inaczej mówiąc, bezpieczeństwo algorytmu ElGamala opiera się na:

- trudności obliczenia tajnej wartości  $t$  niezbędnej do odszyfrowania wiadomości z powszechnie znanej wartości  $\beta = \alpha^t \pmod{p}$ ,

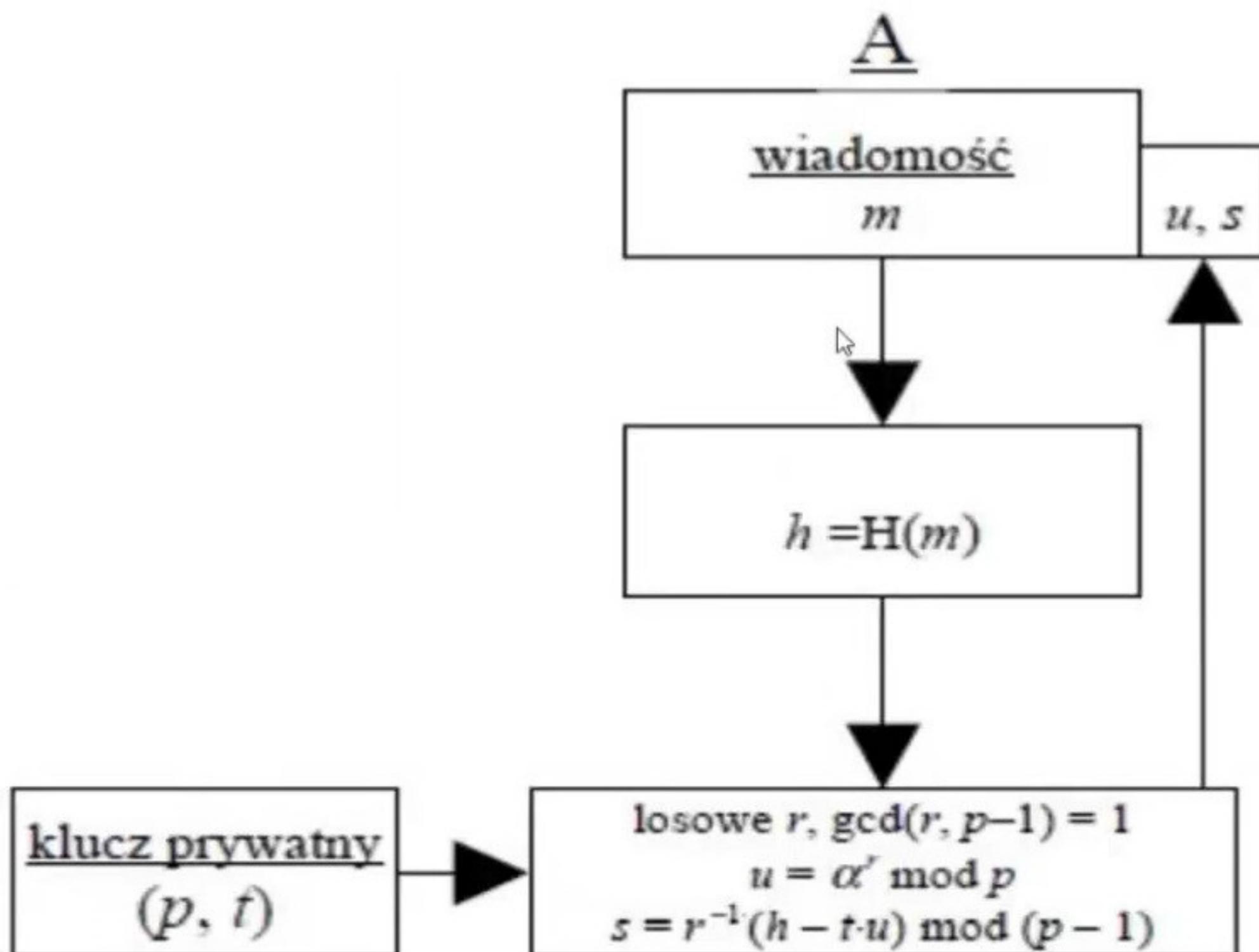
[Wprowadzenie](#)[Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych](#)[Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny](#)[Kryptosystem  
RSA](#)[Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.](#)

Biorąc pod uwagę ostatnie osiągnięcia w dziedzinie rozwiązywania problemu logarytmu dyskretnego w  $Z_p^*$  moduł  $p$  powinien być liczbą min. 2048 bitów.



# Podpis cyfrowy ElGamala - generacja podpisu

Dane wejściowe: wiadomość  $m$ , klucz prywatny strony A:  $k_2 = (p, t)$  oraz funkcja skrótu  $H$ .  
Dane wyjściowe: podpis  $(u, s)$ .



# Podpis cyfrowy ElGamala - generacja podpisu

WSTĘP DO  
KRYPTOLOGII

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych

Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny

Kryptosystem  
RSA

Kryptosystem  
ElGamala, 1985 r.

Dane wejściowe: wiadomość  $m$ , klucz prywatny strony A:  $k_2 = (p, t)$  oraz f. skrótu  $H$ .

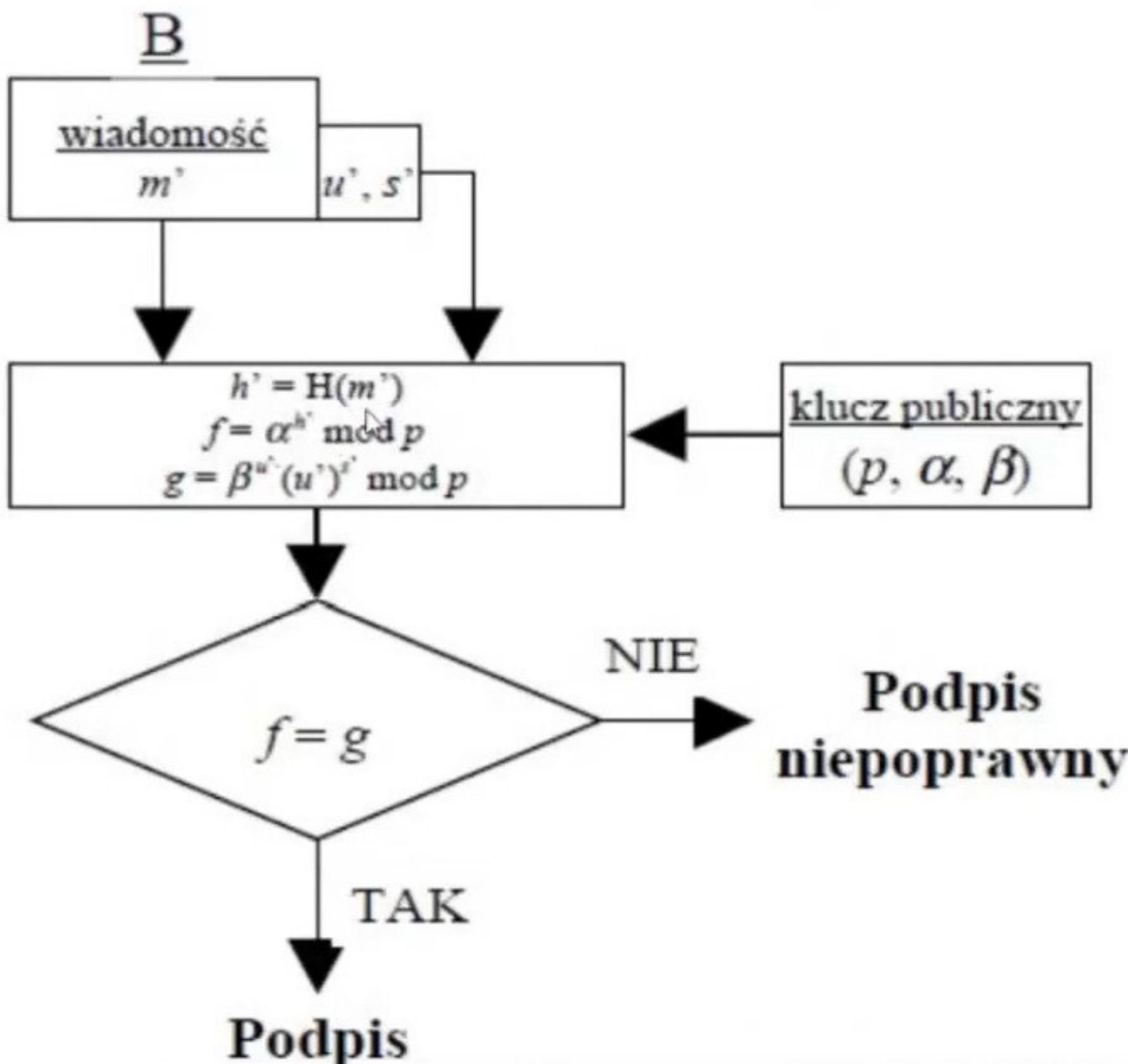
Dane wyjściowe: podpis  $(u, s)$ .

- 1 Wyznaczenie skrótu z wiadomości  $h = H(m)$ .
- 2 Wybieranie losowo liczbę  $r$  taką, że  $1 < r < p - 1$  oraz  $\gcd(r, p - 1) = 1$ .
- 3 Obliczenie  $u = \alpha^r \bmod p$ .
- 4 Obliczenie  $r^{-1} \bmod (p - 1)$ .
- 5 Obliczenie  $s = r^{-1} \cdot (h - t \cdot u) \bmod (p - 1)$ .
- 6 Podpisem wiadomości  $m$  jest para liczb  $(u, s)$ .
- 7 Wysyłanie do B wiadomości  $m$  wraz z podpisem  $(u, s)$ .

# Podpis cyfrowy ElGamala - weryfikacja podpisu

Dane wejściowe:

- klucz publiczny strony A:  $k_1 = (p, \alpha, \beta)$ ,
- wiadomość:  $m' = m$ , podpis:  $(u', s') = (u, s)$



[Wprowadzenie](#)[Idea  
kryptosystemów  
asymetrycznych](#)[Podpis cyfrowy -  
schemat ogólny](#)[Kyptosystem  
RSA](#)[Kyptosystem  
ElGamala, 1985 r.](#)

## Dane wejściowe:

- klucz publiczny strony A:  $k_1 = (p, \alpha, \beta)$ ,
  - wiadomość:  $m' = m$ , podpis:  $(u', s') = (u, s)$
- 1 Odebranie wiadomości  $m'$  wraz z podpisem  $(u', s')$
  - 2 Wyznaczenie skrótu wiadomości  $h' = H(m')$ .
  - 3 Obliczenie  $f = (\alpha)^{h'} \bmod p$ .
  - 4 Obliczenie  $g = (\beta)^{u'} \cdot (u')^{s'} \bmod p$ .
  - 5 Sprawdzenie, czy  $f = g$  (warunek weryfikacji podpisu).
  - 6 Jeśli  $f = g$  podpis poprawny, w p.p. podpis niepoprawny.

## Weryfikacja podpisu - strona B

- posiada klucz publiczny strony A:  $k_1 = (p, \alpha, \beta) = (101, 2, 100)$ ,
- otrzymała wiadomość  $m'$  wraz z podpisem  $(u', s') = (98, 80)$ .
- wyznacza skrót z otrzymanej wiadomości  $m'$  przy użyciu f.  
skrótu:  $h' = H(m') = 20$ .
- oblicza wartość funkcji  $f$  i  $g$  przy użyciu klucza publicznego  
strony A:

Wstęp do  
kryptologii

Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia  
symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

# Kryptografia symetryczna

## Szyfry blokowe

Piotr Mroczkowski



# Plan wykładu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- 1 Kryptografia symetryczna**
- 2 Szyfry blokowe**
  - Konstrukcje
  - Parametry
- 3 DES**
- 4 AES**
- 5 Tryby pracy szyfrów blokowych**



# Kryptografia symetryczna

Wstęp do  
kryptologii

Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia  
symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

## Algorytm symetryczny

algorytm kryptograficzny, który do szyfrowania/deszyfrowania tekstu jawnego/tajnego wykorzystuje ten sam klucz, który musi być tajny.

Klasyfikacja algorytmów symetrycznych:

- algorytmy strumieniowe,
- algorytmy blokowe.

# Szyfry blokowe

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

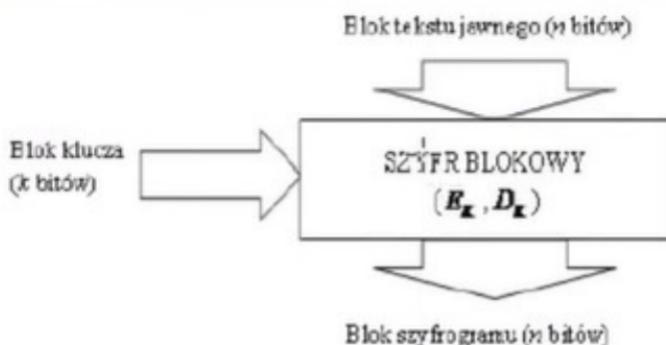
Tryby pracy

## Szyfr blokowy

funkcja odwzorowująca:

- $n$ -bitowy blok tekstu jawnego w  $n$ -bitowy blok tekstu tajnego:  
 $E_K : Z_2^n \rightarrow Z_2^n$ ,
- $n$ -bitowy blok tekstu tajnego w  $n$ -bitowy blok tekstu jawnego:  
 $D_K : Z_2^n \rightarrow Z_2^n$ ,

przy użyciu  $k$ -bitowego tajnego klucza  $K$ .



# Koncepcja Shannona - 1949r.

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

## Koncepcja Shannona

Współczesne szyfry blokowe, projektowane na podstawie koncepcji Shannona, wykorzystują dwa podstawowe przekształcenia:

- 1 konfuzję bitów;
- 2 dyfuzję bitów.



Realizowane są przez następujące transformacje:

- podstawiania bitów – równoległe zastosowanie skrzynek podstawieniowych, zwanych również S-boxami – zapewnia nieliniowość przekształcenia;
- rozpraszania bitów – zastosowanie skrzynek permutacyjnych, zwanych również P-boxami – zapewnia dobre właściwości kryptograficzne przekształcenia, takie jak: lawinowość, zupełność, ścisłe kryterium lawinowe, dyfuzyjność.

# Szyfry blokowe

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

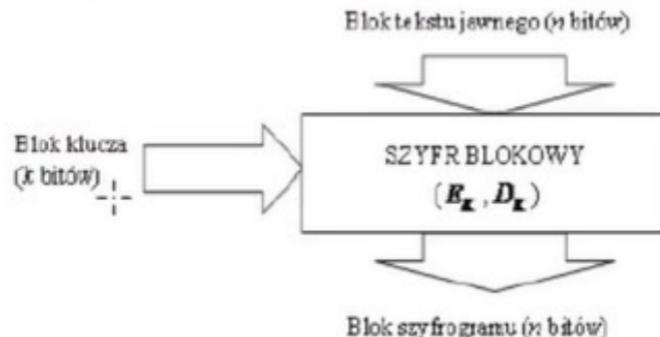
Tryby pracy

## Szyfr blokowy

funkcja odwzorowująca:

- $n$ -bitowy blok tekstu jawnego w  $n$ -bitowy blok tekstu tajnego:  
 $E_K : Z_2^n \rightarrow Z_2^n$ ,
- $n$ -bitowy blok tekstu tajnego w  $n$ -bitowy blok tekstu jawnego:  
 $D_K : Z_2^n \rightarrow Z_2^n$ ,

przy użyciu  $k$ -bitowego tajnego klucza  $K$ .



# Koncepcja Shannona - 1949r.

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

## Koncepcja Shannona

Współczesne szyfry blokowe, projektowane na podstawie koncepcji Shannona, wykorzystują dwa podstawowe przekształcenia:

- 1 konfuzję bitów;
- 2 dyfuzję bitów.

Realizowane są przez następujące transformacje:

- podstawiania bitów – równoległe zastosowanie skrzynek podstawieniowych, zwanych również S-boxami – zapewnia nieliniowość przekształcenia;
- rozpraszania bitów – zastosowanie skrzynek permutacyjnych, zwanych również P-boxami – zapewnia dobre właściwości kryptograficzne przekształcenia, takie jak: lawinowość, zupełność, ścisłe kryterium lawinowe, dyfuzyjność.

# Szyfry blokowe - architektura



Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Współczesne szyfry blokowe najczęściej projektowane są w jednej z architektur

- 1** sieci Feistela;
- 2** sieci podstawieniowo-przedstawieniowej SPN.

# Konstrukcje szyfrów blokowych - sieć Feistela

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

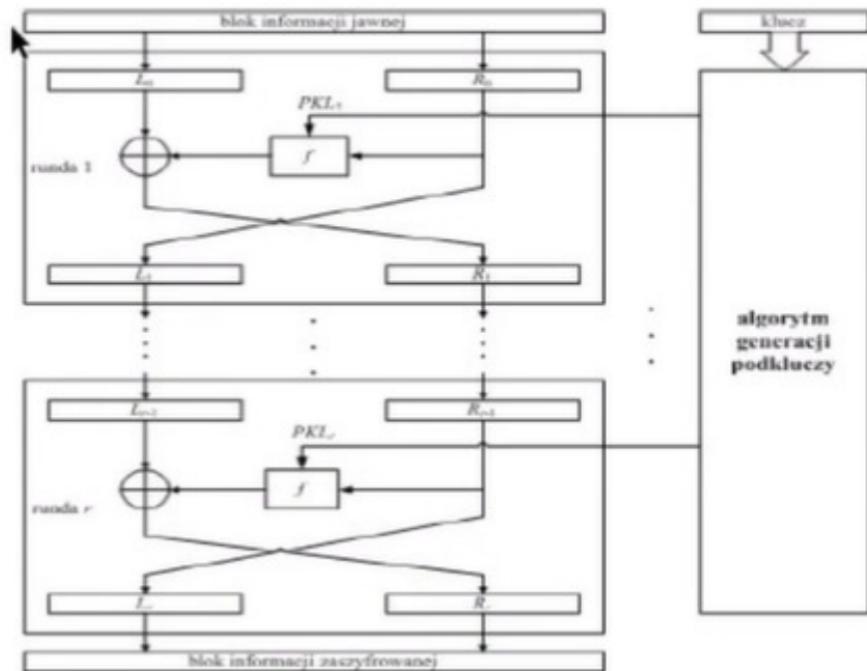
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# Data Encryption Standard - DES

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

## Data Encryption Standard - DES

symetryczny szyfr blokowy będący standardem szyfrowania blokowego w latach 1977 - 2001.

- 1 Lucifer - szyfr zaprojektowany przez firmę IBM na początku lat 70 XX wieku jako protoplasta algorytmu DES,
- 2 zmodyfikowany przez NSA i przyjęty w 1976 roku jako standard syfrowana DES:
  - zmniejszenie długości klucza ze 128 bitów do 56 bitów;
  - wymiana skrzynek podstawieniowych.

# DES - charakterystyka szyfru

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

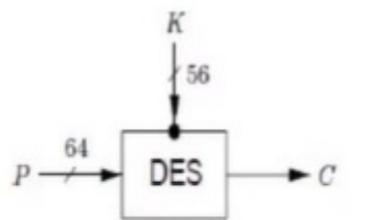
Kryptografia symetryczna

DES

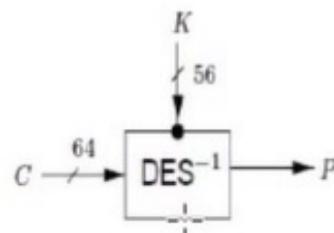
AES

Tryby pracy

- szyfr blokowy oparty na sieci Feistela,
- długość bloku danych wejściowych/wyjściowych - 64 bity,
- długość klucza - 64 bity, z których efektywnych jest 56 bitów, 8 bitów (8, 16, ..., 64) stanowią bity parzystości,
- liczba rund 16.



plaintext  $P$   
ciphertext  $C$   
key  $K$



# DES - schemat blokowy

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

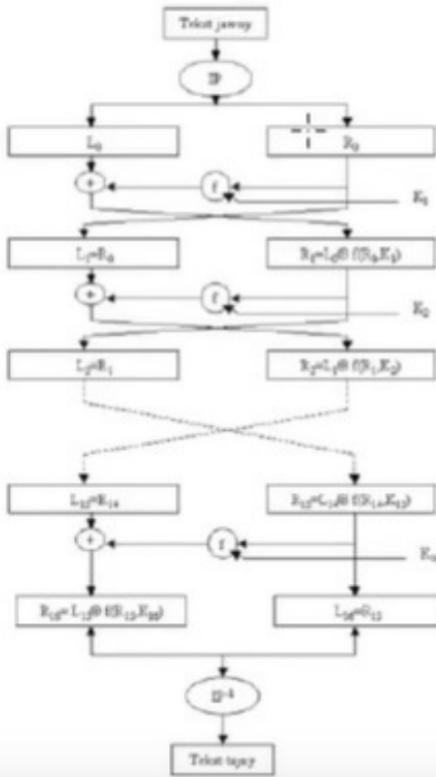
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



■  $IP$  - permutacja początkowa:

IP							
58	50	42	34	26	18	10	2
60	52	44	36	28	20	12	4
62	54	46	38	30	22	14	6
64	56	48	40	32	24	16	8
57	49	41	33	25	17	9	1
59	51	43	35	27	19	11	3
61	53	45	37	29	21	13	5
63	55	47	39	31	23	15	7

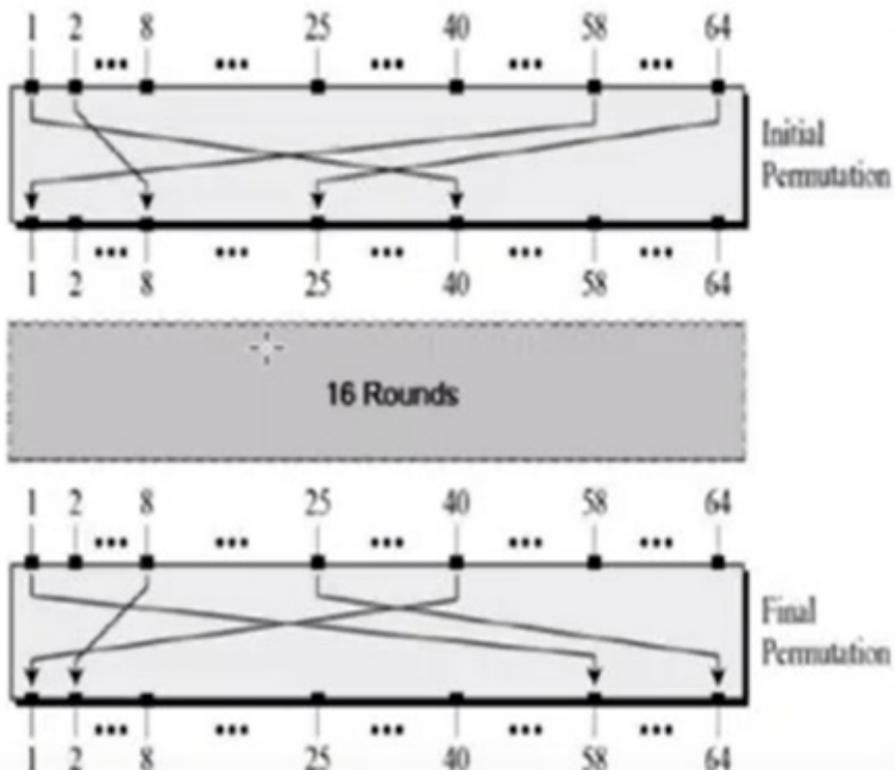
$$L_0, R_0 = IP(P)$$

- 16 rund łączących dane wejściowe z kluczem;  
■  $IP^{-1}$  - permutacja końcowa:

IP <sup>-1</sup>							
40	8	48	16	56	24	64	32
39	7	47	15	55	23	63	31
38	6	46	14	54	22	62	30
37	5	45	13	53	21	61	29
36	4	44	12	52	20	60	28
35	3	43	11	51	19	59	27
34	2	42	10	50	18	58	26
33	1	41	9	49	17	57	25

$$C = IP^{-1}(R_{16}, L_{16})$$

# DES - permutacja początkowa i końcowa



# DES - runda podstawowa

Wstęp do kryptologii

Piotr Menczelowski

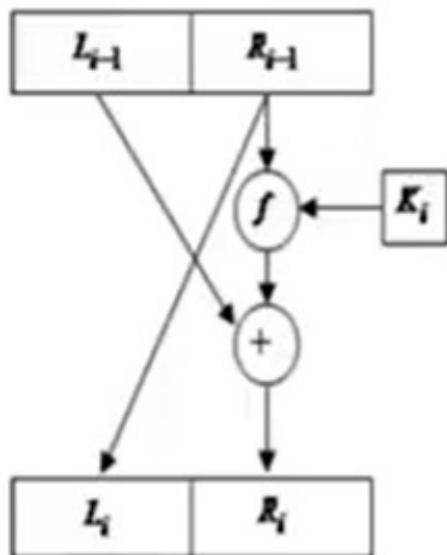
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



+

Dla  $1 \leq i \leq 16$ :  
 $L_i = R_{i-1},$   
 $R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i),$

# DES - funkcja szyfrująca $f$

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

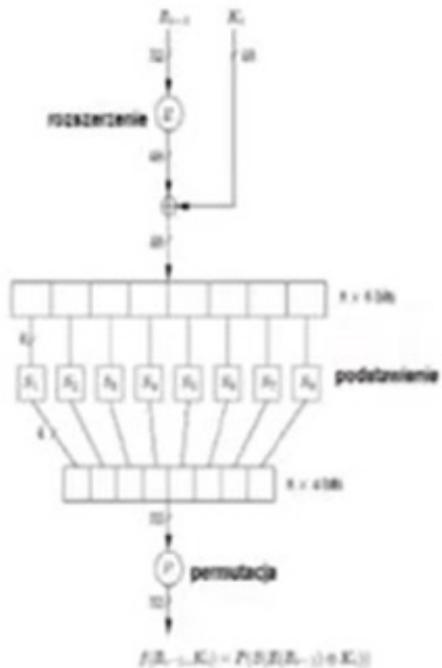
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



$$\begin{aligned}f(R_{i-1}, K_i) &= \\P(S(E(R_{i-1}) \oplus K_i))\end{aligned}$$

■  $E$  - permutacja rozszerzenia:

32	1	2	3	4	5	4	5	6	7	8	9
8	9	10	11	12	13	12	13	14	15	16	17
16	17	18	19	20	21	20	21	22	23	24	25
24	25	26	27	28	29	28	29	30	31	32	1

■  $S$  - warstwa podstawieniowa:

4 wejściowe bity							
1	2	3	4	5	6	7	8
0000 0001 0010 0011 0000 0001 0011 1000 1001 1000 1001 1000 1001 1000 1001 1000	0000 0001 0010 0011 0000 0001 0011 1111 1101 1100 1101 1100 1101 1100 1101 1100	01 110 1011 1010 1100 2101 2111 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101	01 110 1011 1010 1100 2101 2111 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101	101 000 1111 1100 1101 1011 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111	101 000 1111 1100 1101 1011 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111	11 011 1000 1101 0111 1010 0011 1101 0101 0011 1010 0101 0011 1101 0101 0011 1101 0101	11 011 1000 1101 0111 1010 0011 1101 0101 0011 1010 0101 0011 1101 0101 0011 1101 0101
9	10	11	12	13	14	15	16
0000 0001 0010 0011 0000 0001 0011 1000 1001 1000 1001 1000 1001 1000 1001 1000	0000 0001 0010 0011 0000 0001 0011 1111 1101 1100 1101 1100 1101 1100 1101 1100	01 110 1011 1010 1100 2101 2111 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101	01 110 1011 1010 1100 2101 2111 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101 0201 0101	101 000 1111 1100 1101 1011 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111	101 000 1111 1100 1101 1011 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111 1001 1000 1111	11 011 1000 1101 0111 1010 0011 1101 0101 0011 1010 0101 0011 1101 0101 0011 1101 0101	11 011 1000 1101 0111 1010 0011 1101 0101 0011 1010 0101 0011 1101 0101 0011 1101 0101

■  $P$  - warstwa przestawieniowa:

16	7	20	21	29	12	28	17	1	15	23	26	5	18	31	10
2	8	24	14	32	27	3	9	19	13	30	6	22	11	4	25

# DES - Skrzynka podstawieniowa

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Typy pracy



$S_3$		4 wewnętrzne bity															
		0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
zew- nętrz- ne bity	00	0010	1100	0100	0001	0111	1010	1011	0110	1000	0101	0011	1111	1101	0000	1110	1001
	01	1110	1011	0010	1100	0100	0111	1101	0001	0101	0000	1111	1010	0011	1001	1000	0110
	10	0100	0010	0001	1011	1010	1101	0111	1000	1111	1001	1100	0101	0110	0011	0000	1110
	11	1011	1000	1100	0111	0001	1110	0010	1101	0110	1111	0000	1001	1010	0100	0101	0011

# DES - generacja podkluczy

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

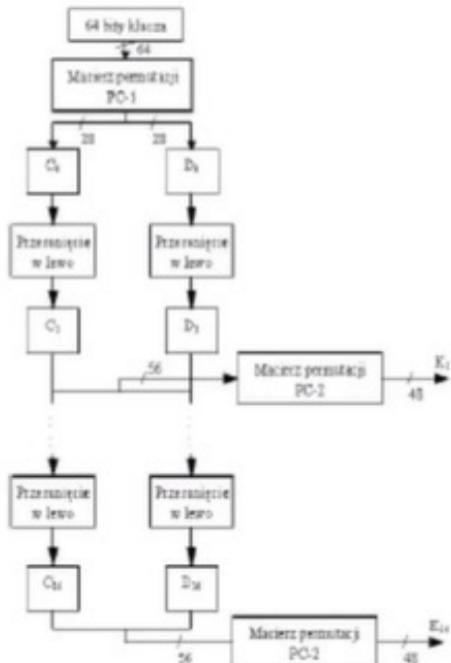
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



## ■ PC-1 - permutacja klucza:

57	49	41	33	25	17	9	1	58	50	42	34	26	18
10	2	59	51	43	35	27	19	11	3	60	52	44	36
63	55	47	39	31	23	15	7	62	54	46	38	30	22
14	6	61	53	45	37	29	21	13	5	28	20	12	4

## ■ LS - przesunięcie w lewo:

Cykl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Liczba przesunięć	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1

## ■ PC-2 - permutacja wyboru:

14	17	11	24	1	5	3	28	15	6	21	10				
23	19	12	4	26	8	16	7	27	20	13	24				
41	52	31	37	47	55	30	40	51	45	33	48				
44	49	39	56	34	53	46	42	50	36	29	32				

# DES - deszyfrowanie

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

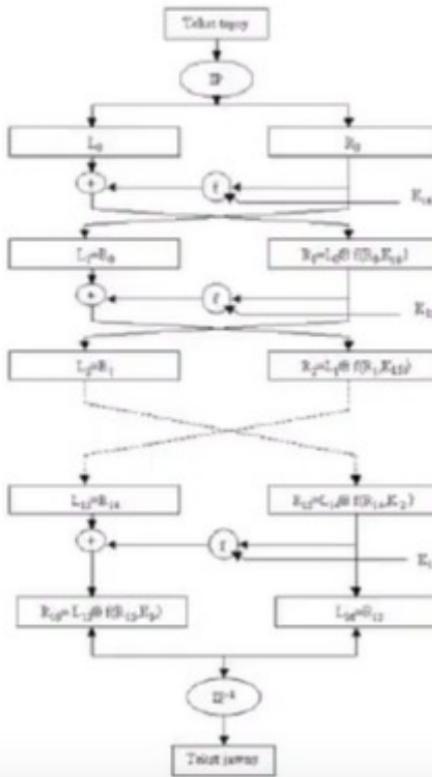
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



- Deszyfrowanie DES odbywa się przy użyciu tego samego algorytmu co szyfrowanie.
- Podklucze podawane są w odwrotnej kolejności.

# DES - kryptoanaliza

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- 1** Atak brutalny - polega na wyczerpującym przeszukiwaniu klucza -  $2^{58}$  wywołań DES.
- 2** Kryptoanaliza różnicowa ( Eli Biham id Adi Shamir,1991) - polega na porównywaniu dwóch szyfrogramów, które powstały w wyniku zaszyfrowania dwóch, różniących się w pewien szczególny sposób, tekstów jawnych przy użyciu tego samego klucza -  $2^{47}$  wybranych tekstów jawnych.
- 3** Kryptoanaliza liniowa (Mitsuru Matsui, 1993) - polega na aproksymacji szyfru za pomocą liniowej funkcji boolowskiej. Na podstawie tej aproksymacji, przy znajomości par tekst jawnego - szyfrogram, możliwe jest znalezienie bitów klucza -  $2^{43}$  znanych tekstów jawnych.

# 3DES

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

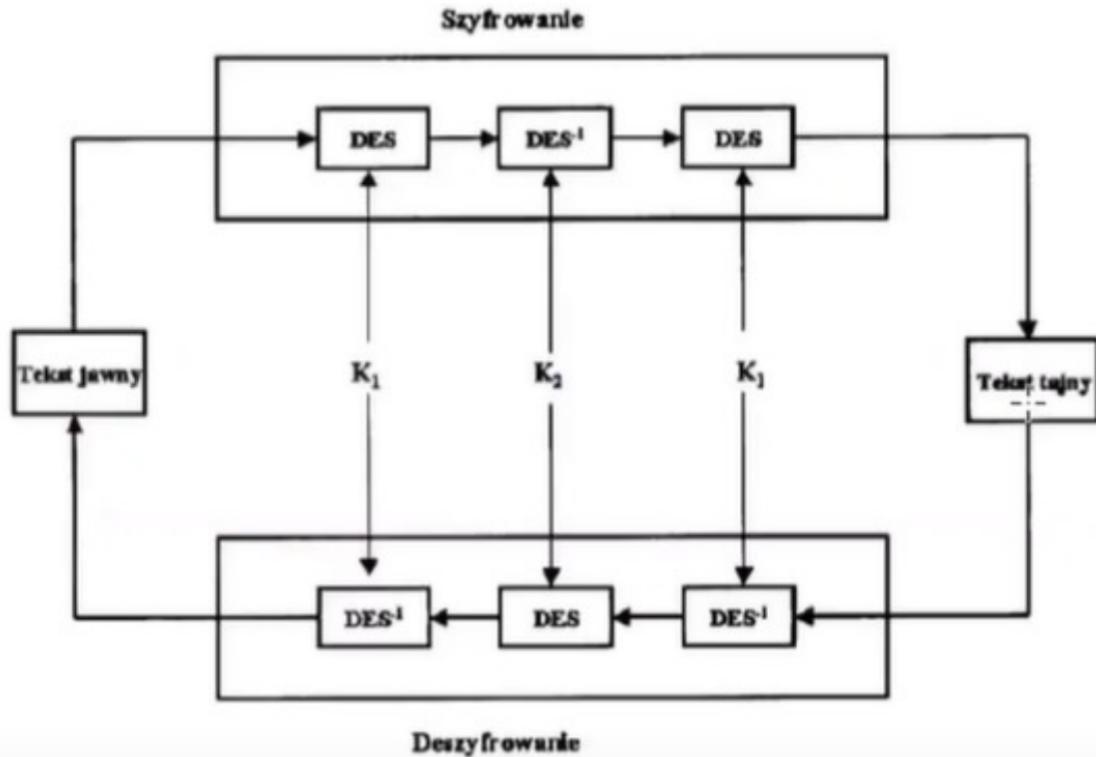
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# Konstrukcje szyfrów blokowych - sieć SPN

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

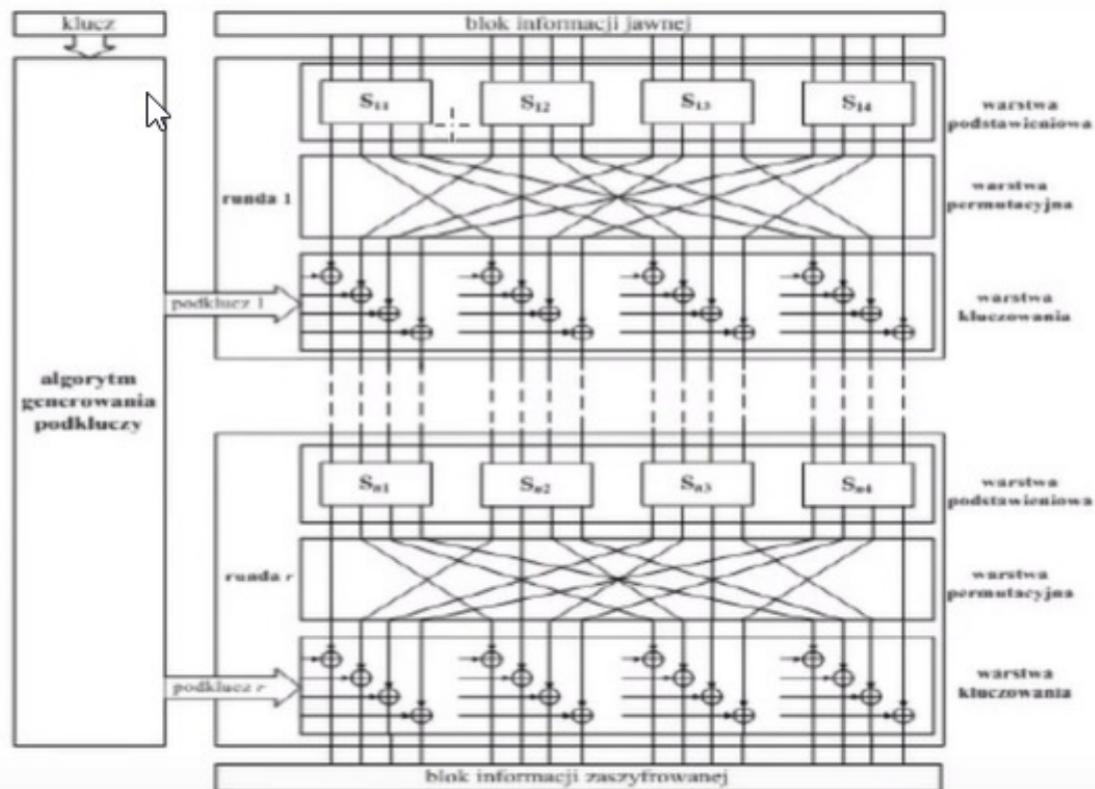
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# Advanced Encryption Standard - AES

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

## Advanced Encryption Standard - AES

symetryczny szyfr blokowy przyjęty przez NIST jako standard FIPS-197 w wyniku konkursu ogłoszonego w roku 1997.

- 1 Rijndael - szyfr zaprojektowany przez Vincenta Rijmena i Joana Daemena w 1997r. jako protoplasta algorytmu AES,
- 2 października 2000r. wybrany przez NIST jako nowy standard blokowego szyfrowania symetrycznego.



# AES - charakterystyka szyfru

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- szyfr blokowy oparty na sieci SPN,
- długość bloku danych wejściowych/wyjściowych - 128 bity,
- długość klucza - 128, 192, 256 bitów,
- liczba rund:

Ilość wykonywanych rund Nr	długość klucza [bit]		
	128	192	256
długość danych [bit]	10	12	14
128	10	12	14
192	12	12	14
256	14	14	14

# AES - specyfikacja szyfru

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

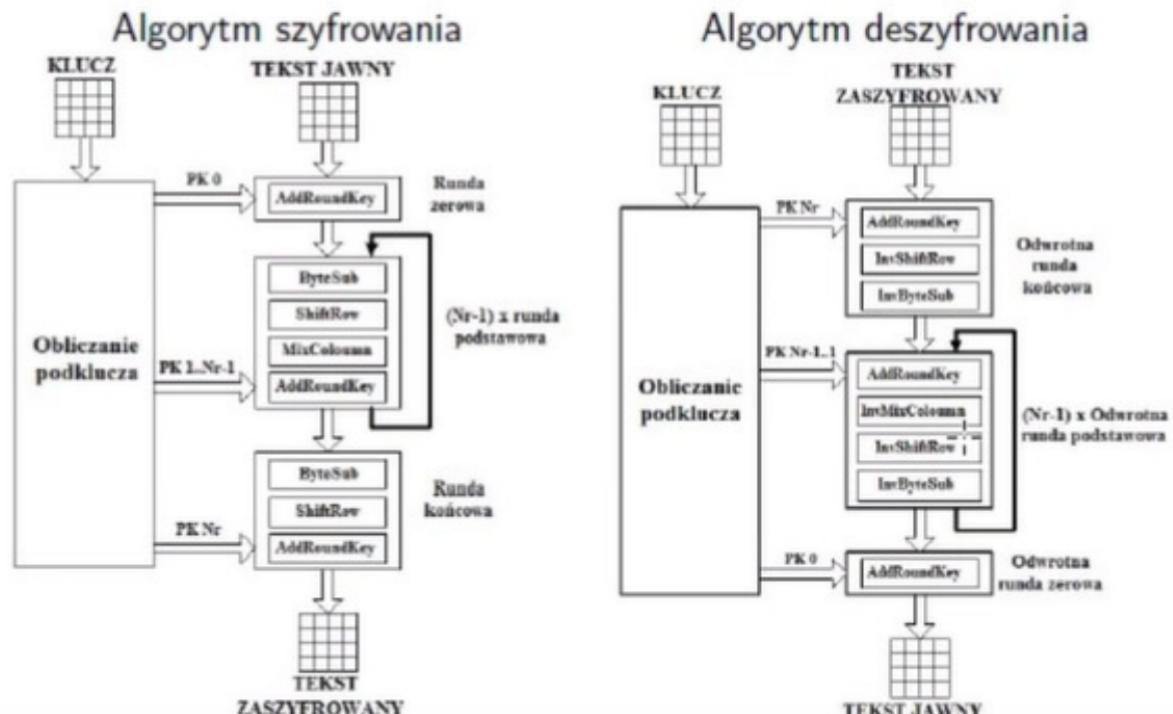
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# AES - dane wejściowe/wyjściowy

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- Tablica stanu: 128 bitowy (16 bajtów) blok tekstu jawnego:  
 $a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}, a_{0,0}, a_{0,0}, \dots, a_{2,3}, a_{3,3}$  przekształcany jest na tablicę stanu algorytmu:

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$
$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$

- Tablica klucza: 128 bitowy (16 bajtów) blok klucza:  
 $k_{0,0}, k_{1,0}, k_{2,0}, k_{3,0}, k_{0,0}, k_{0,0}, \dots, k_{23}, k_{33}$  przekształcany jest na tablicę klucza algorytmu:

$k_{0,0}$	$k_{0,1}$	$k_{0,2}$	$k_{0,3}$
$k_{1,0}$	$k_{1,1}$	$k_{1,2}$	$k_{1,3}$
$k_{2,0}$	$k_{2,1}$	$k_{2,2}$	$k_{2,3}$
$k_{3,0}$	$k_{3,1}$	$k_{3,2}$	$k_{3,3}$

- Wyściowa tablica stanu:

$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	$b_{0,2}$	$b_{0,3}$
$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$
$b_{2,0}$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$
$b_{3,0}$	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	$b_{3,3}$

przekształcana jest w 128 bitowy (16 bajtów) tekst zaszyfrowany:  $b_{0,0}, b_{1,0}, b_{2,0}, b_{3,0}, b_{0,0}, b_{0,0}, \dots, b_{2,3}, b_{3,3}$ .

# AES - podstawowa runda szyfrowania

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



## ■ Warstwa nieliniowa - $\text{ByteSub}(\text{State})$



### Transformacja $\text{ByteSub}(\text{State})$

- 1 składa się z 16 identycznych skrzynek podstawieniowych o rozmiarze  $8 \times 8$ ;
- 2 działa niezależnie na każdy bajt stanu;
- 3 przekształcenie skrzynki podstawieniowej składa się z:
  - wyznaczenia elementu odwrotnego w  $GF(2^8)$
  - zastosowania przekształcenia aficznego.

# AES - Skrzynka podstawieniowa

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	
0	43	7e	77	7b	62	6b	6f	65	30	01	67	2b	fe	d7	ab	76
1	ca	09	7d	5a	59	47	fd	ad	d4	a2	a5	9c	a4	72	c0	
2	b7	fd	b3	26	3d	3f	27	cc	24	a5	a5	f1	71	d8	31	15
3	04	c7	23	c3	18	96	05	9e	07	12	90	e2	eb	27	02	75
4	09	82	2e	1a	1b	4e	5a	a0	52	3b	d6	b2	23	a3	2f	84
5	53	d1	09	ed	20	fc	b1	5b	6a	cb	bc	35	4a	4c	58	cd
6	00	ef	aa	fb	43	4d	33	85	43	29	02	7e	50	3c	67	48
7	51	a3	40	87	92	9d	3b	75	0e	b6	da	21	10	28	23	62
8	c0	0c	13	ec	5f	97	44	17	c4	a7	7e	3d	64	5d	19	73
9	60	81	48	dc	22	2a	90	86	60	ee	b9	14	de	9e	0b	4b
a	w0	32	5a	ca	49	06	24	5c	04	d3	ac	42	91	95	a4	7b
b	a7	c8	37	6d	8d	d5	4a	a9	6c	5d	64	ea	65	7a	ae	08
c	ba	78	25	2e	1c	a6	b4	c6	e8	dd	74	17	4b	bd	8b	8a
d	70	3e	b9	66	49	03	26	0e	61	35	57	b9	81	c1	1d	9a
e	w1	f8	98	11	09	d9	8e	94	9b	1e	87	e9	ce	55	28	df
f	8c	a1	89	0d	bf	e6	42	68	41	99	2d	0f	b0	54	bb	16

- Odwrotność w  $GF(2^8)$
- Przekształcenie afiniczne w  $GF(2^8)$ :

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# AES - podstawowa runda szyfrowania

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



- Warstwa dodawania klucza - *AddRoundKey(State, RoundKey)*

$a_{00}$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{03}$		$k_{00}$	$k_{01}$	$k_{02}$	$k_{03}$		$b_{00}$	$b_{01}$	$b_{02}$	$b_{03}$
$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\oplus$	$k_{10}$	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	=	$b_{10}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$
$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$		$k_{20}$	$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{23}$		$b_{20}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$
$a_{30}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$		$k_{30}$	$k_{31}$	$k_{32}$	$k_{33}$		$b_{30}$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$

# AES - Algorytm generowania podkluczy

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

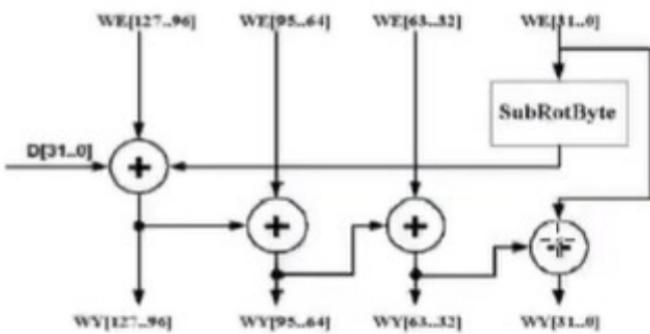
Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Algorytm generowania podkluczy służy do generacji podkluczy dla poszczególnych rund algorytmu szyfrowania/deszyfrowania z klucza głównego.



gdzie:

- D - stała rundy,
- SubRotByte - funkcja zwracająca słowo w którym bajty są cyklicznie przesunięte w lewo o jedną pozycję, a następnie każdy bajt jest poddany operacji zawartych w S-skrzynce.

# Tryby pracy szyfrów blokowych

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

W przypadku, gdy długość wiadomości jest inna niż długość pojedynczego bloku, konieczne staje się użycie szyfru blokowego w jednym z trybów pracy .

- ECB (ang. electronic codebook) – tryb elektronicznej książki kodowej,
- CBC (ang. cipher chaining block) – tryb wiązania bloków zaszyfrowanych,
- CFB (ang. cipher feedback mode) – tryb sprzężenia zwrotnego szyfrogramu,
- OFB (ang. output feedback mode) – tryb sprzężenia zwrotnego wyjściowego,
- CTR (ang. counter mode) – tryb licznikowy.

Ww. tryby pracy szyfrów blokowych zostały opisane w NIST SP 800-38A (grudzień 2001).

# Tryby pracy szyfrów blokowych - założenia

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- Algorytmem wykorzystywanym w przedstawionych konstrukcjach trybów pracy szyfrów blokowych jest jeden z algorytmów zaakceptowanych przez NIST (np. AES opublikowany w FIPS 197).
- Algorytmy szyfrów blokowych i specyfikacje trybów pracy są publicznie znane, a więc bezpieczeństwo prezentowanych trybów opiera się na tajności klucza (zgodnie z zasadą Kerhoffsa).
- Każdy tryb pracy szyfru blokowego składa się z dwóch procesów: szyfrowania i deszyfrowania.
- Algorytm, wchodzący w skład danego trybu pracy, składa się z dwóch funkcji: szyfrującej -  $E_K$  oraz deszyfrującej -  $D_K$ ,

# Tryb ECB

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

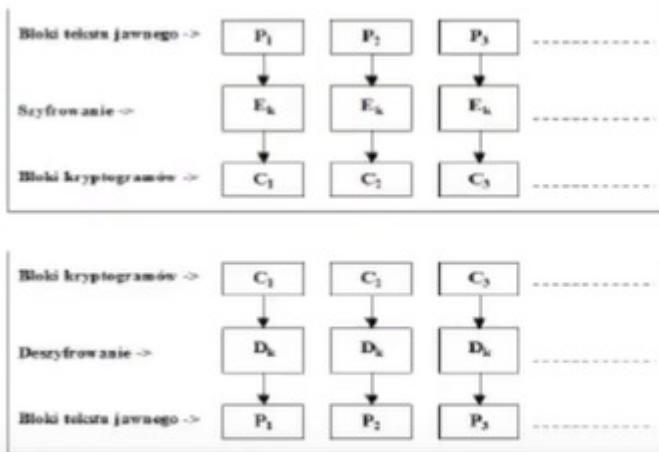
DES

AES

Tryby pracy

Tryb elektronicznej książki kodowej ECB (ang. electronic codebook):

- zapewnia poufność informacji,
- przekształca niezależnie każdy z bloków wiadomości jawnej/zaszyfrowanej.



- szyfrowanie ECB:  
 $C_j = E_K(P_j), j = 1 \dots n$
- deszyfrowanie ECB:  
 $P_j = D_K(C_j), j = 1 \dots n$

# Tryb ECB - własności

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- + Bloki informacji są szyfrowane/deszyfrowane niezależnie od innych bloków:
  - możliwość zrównoleglenia obliczeń,
  - możliwość deszyfrowania tylko części szyfrogramu bez konieczności deszyfrowania całego szyfrogramu.
- Identyczne bloki tekstu jawnego (szyfrowane tym samym kluczem) dają identyczne szyfrogramy.
- + Brak propagacji błędów w danym bloku szyfrogramu na kolejne bloki szyfrogramu - jeden lub więcej błędnych bitów w jednym bloku szyfrogramu nie ma wpływu na deszyfrowanie pozostałych bloków.

# Tryb ECB - przykład

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

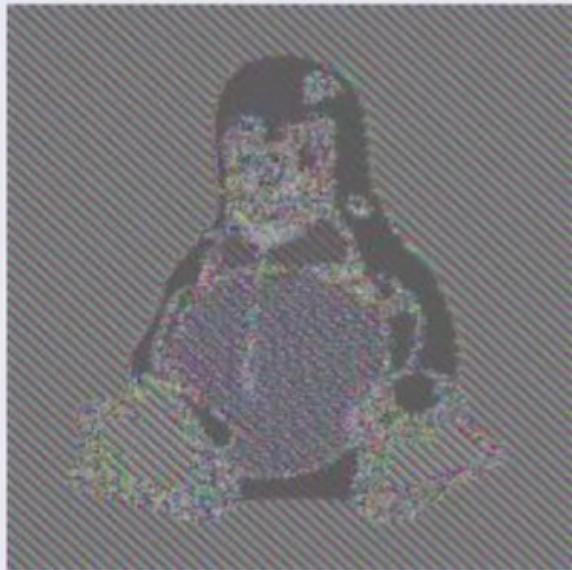
Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

## Tryb ECB - przykład



# Tryb CBC

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

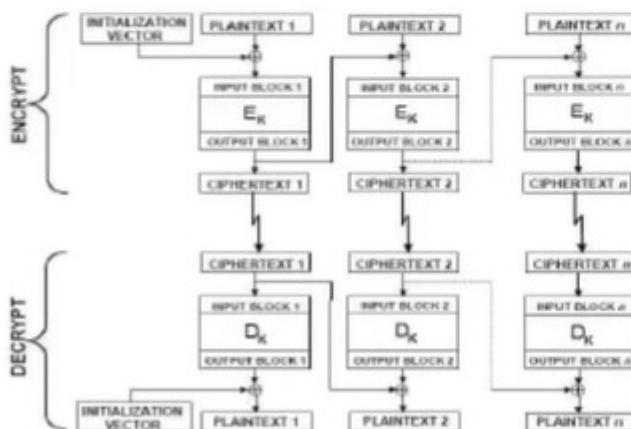
DES

AES

Tryby pracy

Tryb wiązania bloków zaszyfrowanych (ang. cipher block chaining) wiąże blok tekstu jawnego z poprzednim blokiem tekstu zaszyfrowanego.

I



- szyfrowanie CBC:  
$$C_1 = E_K(P_1 \oplus IV);$$
  
$$C_j = E_K(P_j \oplus C_{j-1}) \text{ dla } j = 2 \dots n;$$
- deszyfrowanie CBC:  
$$P_1 = D_K(C_1) \oplus IV;$$
  
$$P_j = D_K(C_j) \oplus C_{j-1} \text{ dla } j = 2 \dots n.$$

# Tryb CBC - własności

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- Tryb CBC wymaga wektora inicjującego IV do powiązania z pierwszym blokiem tekstu jawnego:
  - IV nie musi być tajny,
  - musi być nieprzewidywalny (losowy),
  - musi być zapewniona integralność wektora IV.
- Zmiana IV powoduje zmianę szyfrogramu.
- Mechanizm wiązania powoduje, że szyfrogram  $C_j$  zależy od  $P_j$  i wszystkich poprzedzających go bloków tekstu jawnego.
- Propagacja błędów:
  - błąd w tekście jawnym powielany na wszystkie kolejne bloki,
  - błąd w kryptogramie powielany na następny blok kryptogramu.
- CBC jest samosynchronizujący, tzn. jeżeli w bloku  $C_j$  występuje błąd ale nie występuje w  $C_{j+1}$  to  $C_{j+2}$  zostanie prawidłowo zdeszyfrowany do  $P_{j+2}$ .

# Tryb CFB

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Tryb sprzężenia zwrotnego szyfrogramu (ang. cipher feedback mode) zapewnia poufność informacji:

- sprzężenie zwrotne: segment tekstu zaszyfrowanego wchodzi na blok wejściowy funkcji szyfrującej,
- wyjście funkcji szyfrującej xorowane z blokiem tekstu jawnego tworząc szyfrogram.

Tryb CFB wymaga wektora inicjującego IV:

- nie musi być tajny,
- musi być nieprzewidywalny i unikalny.

# Tryb CFB - schemat

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

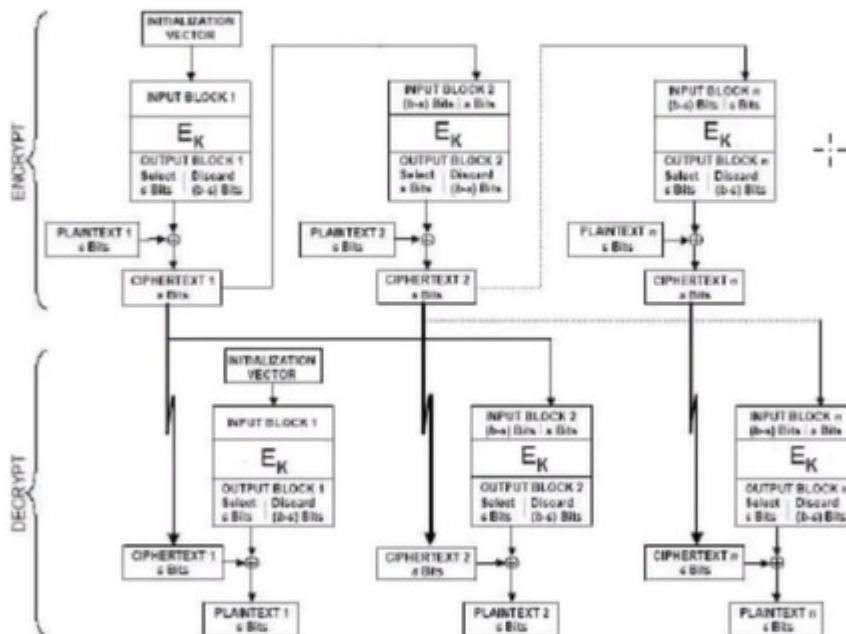
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# Tryb CFB

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Tryb CBC jest zdefiniowany następująco:

- szyfrowanie CFB:

$$\begin{aligned} I_1 &= IV \\ I_j &= LSB_{b-s}(I_{j-1}) | C_{j-1}^{\#} \quad \text{dla } j = 2 \dots n; \\ O_j &= E_K(I_j) \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n; \\ C_j^{\#} &= P_j^{\#} \oplus MSB_s(O_j) \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n; \end{aligned} \tag{1}$$

- deszyfrowanie CFB:

$$\begin{aligned} I_1 &= IV; \\ I_j &= LSB_{b-s}(I_{j-1}) | C_{j-1}^{\#} \quad \text{dla } j = 2 \dots n; \\ O_j &= E_K(I_j) \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n; \\ P_j^{\#} &= C_j^{\#} \oplus MSB_s(O_j) \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n. \end{aligned} \tag{2}$$

# Tryb CFB - własności

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- Tryb CFB wymaga wektora inicjującego IV.
- Zmiana IV powiduje zmianę szyfrogramu.
- Szyfrowanie i deszyfrowanie przy użyciu funkcji szyfrującej.
- Mechanizm wiązania powoduje, że szyfrogram  $C_j$  zależy od  $P_j$  i wszystkich poprzedzających go bloków tekstu jawnego.
- Propagacja błędów:
  - błąd w tekście jawnym powielany na wszystkie kolejne bloki,
  - błąd w kryptogramie powielany do następnych  $\lceil \frac{b}{s} \rceil$  bloków kryptogramu.
- Jest trybem samosynchronizującym - powrót po błędzie w kryptogramie do normalnej pracy wymaga  $\lceil \frac{b}{s} \rceil$  bloków kryptogramu.

# Tryb OFB

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Tryb sprzężenia zwrotnego wyjściowego (ang. output feedback mode) zapewnia poufność informacji:

- sprzężenie zwrotne: blok wyjściowy funkcji szyfrującej wchodzi na kolejny blok wejściowy funkcji szyfrującej,
- wyjście funkcji szyfrującej xorowane z blokiem tekstu jawnego tworząc szyfrogram.

Tryb OFB wymaga wektora inicjującego IV:



- nie musi być tajny,
- musi być unikalny dla każdego wykonania się trybu przy ustalonym kluczu.
- musi być nieprzewidywalny (losowy).

# Tryb OFB - schemat

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

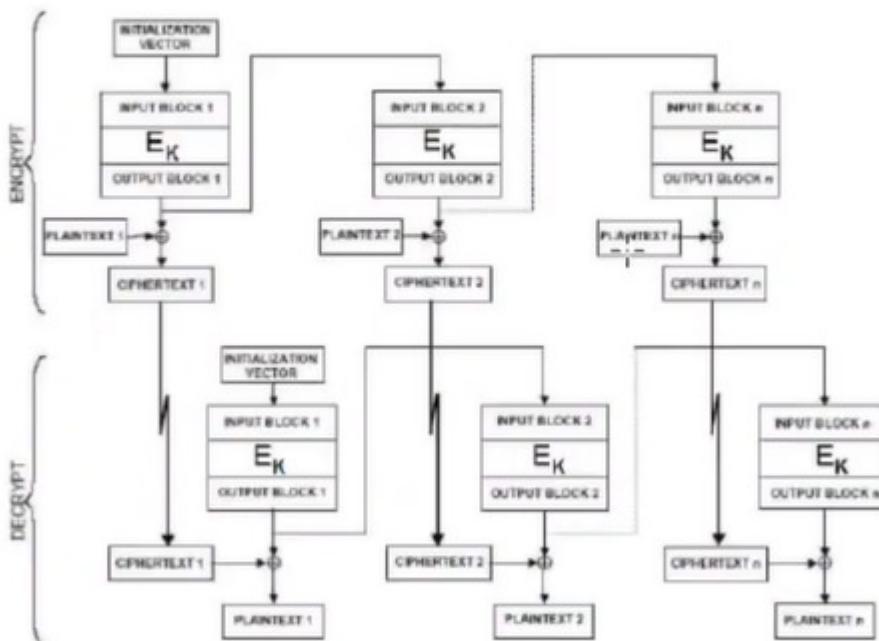
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# Tryb OFB

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Tryb OFB jest zdefiniowany następująco:

- szyfrowanie OFB:

$$\begin{aligned} I_1 &= IV; \\ I_j &= O_{j-1} \quad \text{dla } j = 2 \dots n; \\ O_j &= E_K(I_j) \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n; \\ C_j &= P_j \oplus O_j \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n - 1; \\ C_n^* &= P_n^* \oplus MSB_u(O_n); \end{aligned} \quad \text{---} \quad (3)$$

- deszyfrowanie OFB:

$$\begin{aligned} I_1 &= IV; \\ I_j &= O_{j-1} \quad \text{dla } j = 2 \dots n; \\ O_j &= E_K(I_j) \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n; \\ P_j &= C_j \oplus O_j \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots n - 1; \\ P_n^* &= C_n^* \oplus MSB_u(O_n). \end{aligned} \quad (4)$$

# Tryb OFB - własności

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

- Tryb CFB wymaga wektora inicjującego IV.
- Zmiana IV powiduje zmianę szyfrogramu.
- Szyfrowanie i deszyfrowanie przy użyciu funkcji szyfrującej.
- Mechanizm wiązania: strumień klucza jest niezależny od tekstu jawnego.  
[
- Propagacja błędów:
  - błąd w tekście jawnym nie powielany na kolejne bloki,
  - błąd w kryptogramie nie powielany na następne bloki kryptogramów,
- Wymaga synchronizacji po utracie bitów szyfrogramu.

# Tryb CTR

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Tryb licznikowy (ang. counter mode) zapewnia poufność informacji:

- funkcja szyfrująca zostaje zastosowana do zbioru bloków wejściowych, zwanych licznikami, tworząc w ten sposób sekwencję bloków wyjściowych,
- bloki wyjściowe funkcji szyfrującej xorowane z blokami tekstu jawnego.

Tryb CTR wymaga sekwencji liczników  $T_1, T_2, \dots, T_n$ :

- liczni dla wszystkich wiadomości, szyfrowanych przy użyciu tego samego klucza muszą być różne.

# Tryb CTR - schemat

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

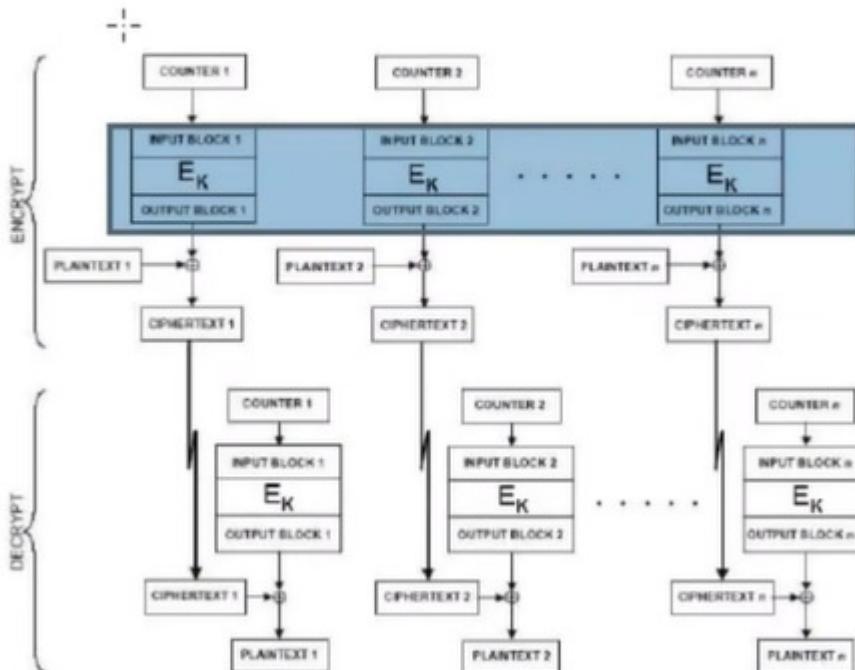
Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



# Tryb CTR

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy

Tryb CTR jest zdefiniowany następująco:

- szyfrowanie CTR:

$$\begin{aligned} O_j &= E_K(T_j) && \text{dla } j = 1, 2, \dots, n; \\ C_j &= P_j \oplus O_j && \text{dla } j = 1, 2, \dots, n-1; \\ C_n^* &= P_n^* \oplus MSB_u(O_n) \end{aligned} \quad (5)$$

- deszyfrowanie CTR:

$$\begin{aligned} O_j &= E_K(T_j) && \text{dla } j = 1, 2, \dots, n; \\ P_j &= C_j \oplus O_j && \text{dla } j = 1, 2, \dots, n-1; \\ P_n^* &= C_n^* \oplus MSB_u(O_n). \end{aligned} \quad (6)$$

# Tryby pracy - przykład

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

DES

AES

Tryby pracy



Original



Encrypted using ECB mode



Modes other than ECB result in pseudo-randomness

Wstęp do  
kryptologii

Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje  
funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## II Kryptograficzne funkcje skrótu

Piotr Mroczkowski

# Plan wykładu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

- 1 Wprowadzenie**
  - definicja
  - zastosowanie
- 2 Podstawowe konstrukcje funkcji skrótu**
  - Struktura Merkle-Damgarda (1989r.)
  - Struktura Davies-Mayer'a
  - struktura 'Sponge'
- 3 Bezpieczeństwo funkcji skrótu**
- 4 Rodzina funkcji skrótu SHA**
- 5 Rodzina funkcji skrótu Grøstl**
- 6 Rodzina funkcji skrótu SHA-3**

# Funkcje skrótu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcja funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

FUNKCJE SKRÓTU ODGRYWAJĄ BAROZO WAŻNĄ ROLĘ W KRYPTOGRAFI. WIELE OSÓB NAWET NIE ZDAJE SOBIE SPRAWY JAK CZĘSTO WYKORZYSTUJE FUNKCJE SKRÓTU: Np. PODCZAS KORZYSTANIA Z INTERNETU, CZY TEŻ PODCZAS UŻYVANIA KART PŁATNICZYCH.



## Definicja

Funkcja skrótu – funkcja, która przekształca dowolnej długości ciąg bitowy w wektor bitowy o określonej, stałej długości.

$$h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^n$$

## Zastosowanie:

- Integralność
- Usługi certyfikacyjne
- Uwierzytelenie
- Przechowywanie haseł
- Aktualizacja oprogramowania

# Ataki ogólne na funkcje skrótu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bезпека

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## Znajdowanie przeciwbrazu

Znaleźć wiadomość  $m$  znając tylko jej skrót  $h(m)$ .

## Znajdowanie drugich przeciwbrazów

Znając wiadomość  $m_1$  oraz jej skrót  $h(m_1)$  znaleźć inną wiadomość  $m_2$  znając jej skrót  $h(m_2)$ .

## Atak brutalny

mając dany skrót wiadomości  $h(m)$  atakujący chce znaleźć wiadomość  $m$ .

- złożoność obliczeniowa  $O(2^n)$
- metoda nieefektywna

# Ataki ogólne na funkcje skrótu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## Znajdowanie kolizji

Znaleźć dwie różne wiadomości:  $m_1$  i  $m_2$ , takie, że  $h(m_1) = h(m_2)$ .

## Atak urodzinowy

Atakujący chce uzyskać dwie różne wiadomości dające ten sam skrót.

- złożoność obliczeniowa  $O(2^{n/2})$

Atak urodzinowy wykorzystuje tzw. paradoks dnia urodzin:<sup>I</sup>

## Pytanie

Jaka jest minimalna liczba osób w sali, aby prawdopodobieństwo tego, iż co najmniej dwie z nich mają ten sam dzień urodzin, było większe niż 0,5?

# Ataki ogólne na funkcje skrótu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak



Paradoks urodzin jest typowym problemem statystycznym.

- 1** Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że dana osoba urodziła się konkretnego dnia (np. 1 stycznia)?
  - Odpowiedź wynosi:  $\frac{1}{365}$ .
- 2** Ile osób musi znaleźć się w sali, aby prawdopodobieństwo tego, że znajdzie się tam osoba urodzona konkretnego dnia (np. 1 stycznia), było większe niż 0,5?

# Konstrukcja Merkle-Damgard'a

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

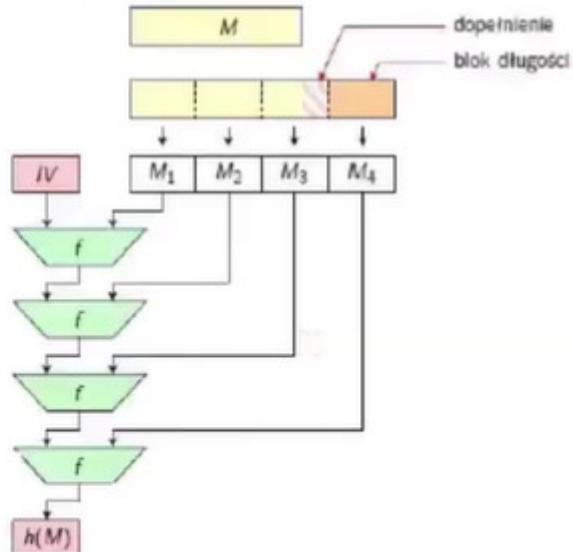
Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

Jak zaprojektować funkcję, która może przyjmować dane dowolnej długości?

Użyć wielokrotnie funkcji kompresji:  $f : \{0, 1\}^{n+k} \rightarrow \{0, 1\}^n$



- Dopełnić wiadomość i dodać blok długości
- Podzielić na bloki rozmiaru  $k$
- $h_i := f(h_{i-1}, M_i)$

# Konstrukcja Davies-Mayera

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

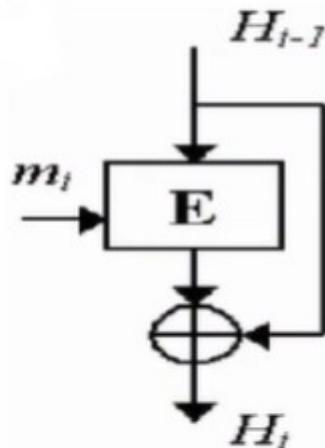
SHA-3

Keccak

## Funkcje skrótu oparte na szyfrach blokowych

I

- wykorzystują strukturę szyfrów blokowych
- gotowe rozwiązania, redukcja kosztów, bezpieczeństwo
- zbyt wolne



# Dedykowane funkcje skrótu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

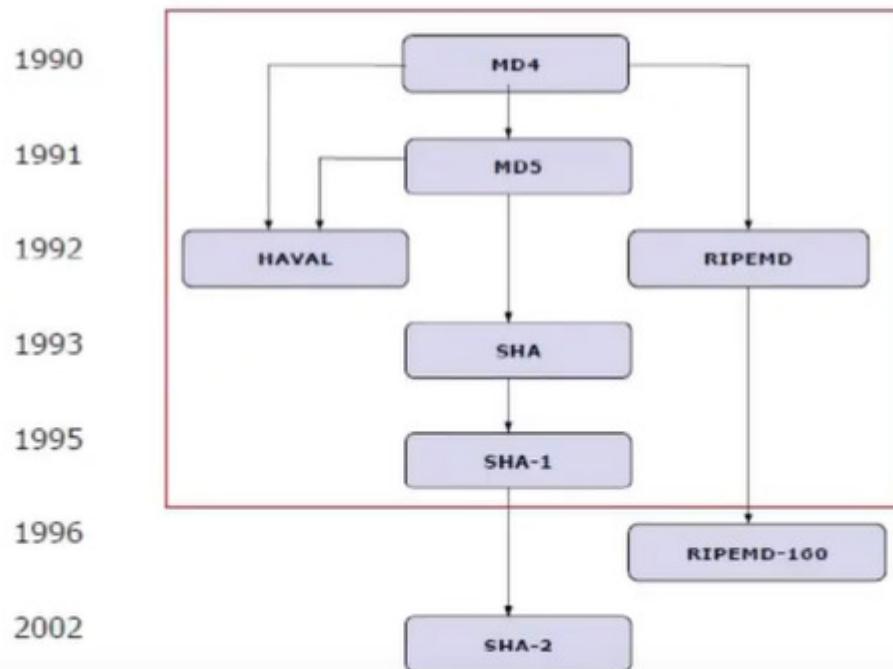
Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## Rodzina MD/SHA



# Dedykowane funkcje skrótu

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## Rodzina funkcji SHA

- SHA-0 - 1993r.
- SHA-1 - 1995r.
- SHA-2 - 2001r. - (SHA-224, SHA-256, SHA-384, SHA-512)
- SHA-3 - 2012r.

Algorytm	Rozmiar skrótu (bity)	Rozmiar stanu (bity)	Rozmiar bloku (bity)	Maks. rozmiar danych (bity)	Rozmiar słowa (bity)	Liczba kroków	Operacje	Znalezione kolizje
SHA-0	160	160	512	$2^{64} - 1$	32	80	+, and, or, xor, rot	Tak
SHA-1								Tak ( $2^{51}$ )
SHA-2	SHA-256/224	256/224	256	512	$2^{24} - 1$	32	64	+, and, or, xor, shr, rdt
	SHA-512/384	512/384	512	1024	$2^{128} - 1$	64	80	

# Przykład funkcji skrótu - SHA-1

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

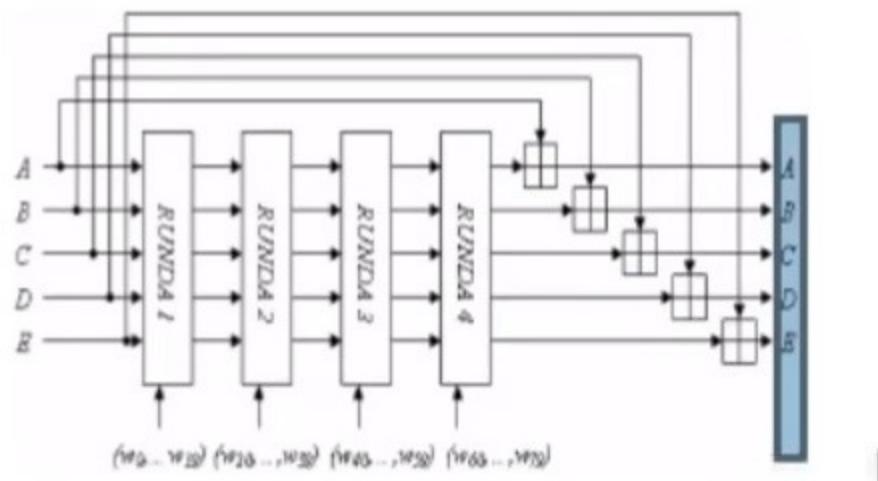
Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## Schemat funkcji SHA-1



- Używa 5 zmiennych 32 bitowych: A, B, C, D, E
- Skrót jest generowany po czterech 20-krokowych rundach
- Każda runda używa pewnej funkcji boolowskiej i stałej
- Blok wiadomości  $w_i, i = 0 \dots 15$  (16 słów 32-bitowych) zostaje przekształcony do bloku rozszerzonego  $w_i, i = 0 \dots 79$  (80 słów 32-bitowych):  
$$w_i = (w_{i-3} \oplus w_{i-8} \oplus w_{i-14} \oplus w_{i-16}) << 1, i = 16 \dots 79$$
  
$$w_i = (w_{i-3} \oplus w_{i-8} \oplus w_{i-14} \oplus w_{i-16}), \quad i = 16 \dots 79 \text{ (SHA-0)}$$

# Przykład funkcji skrótu - SHA-1

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

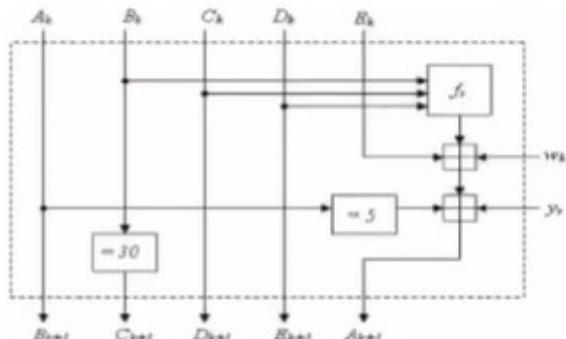
Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

## Krok bloku kompensującego



$f_1(x, y, z) = xy \vee \sim(x)z$	$y_1 = 0x5A827999$
$f_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$	$y_2 = 0x6ED9EBA1$
$f_3(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$	$y_3 = 0x8F1BBCDC$
$f_4(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$	$y_4 = 0xCA62C1D6$

- trzy zmienne kopowane są z wejścia na wyjście
- jedna zmienna modyfikowana jest za pomocą przesunięcia bitowego w lewo
- ostatnia zmienna modyfikowana jest za pomocą: funkcji boolowskiej  $f_r$ , podbloku wiadomości  $w_k$ , stałej  $y_r$  oraz przesunięcia bitowego

## Założenia:

- 1** Długość skrótu: 224, 256, 384, 512 bitów
- 2** Odporność na ataki:
  - znajdowania pierwszych i drugich przeciwbrazów,
  - znajdowania kolizji,
  - znajdowania multikolizji,
  - rozszerzania długości,
- 3** Łatwość implementacji.

# Grøstl

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcja nowego skrótu

SHA-3

Kontak

Grøstl - zbiór funkcji skrótu o długości skrótu od 1 bajtu do 64 bajty.  
Dlaczego?



■ autorzy:



■ bazuje na algorytmie Rijndael  
■ intuicja

# Rodzina funkcji Keccak

Wstęp do kryptologii

Piotr  
Mrozowski

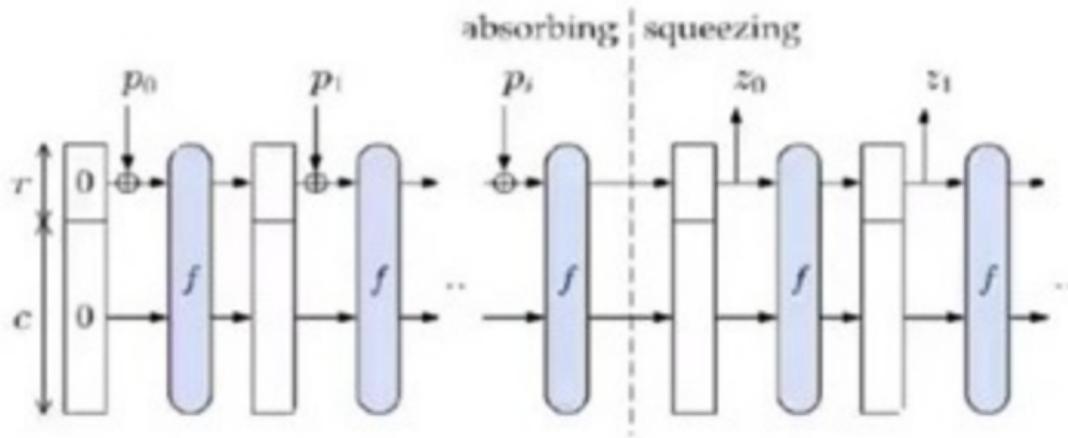
Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcja  
funkcji skrótu

SHA-3

Keccak



- Dwa parametry:  $r$  (bitrate),  $c$  (capacity).
- Rozmiar (w bitach)  $r + c = 1600$
- Parametry  $r$  i  $c$  różne dla różnych wariantów zaproponowanych jako kandydaci na SHA-3.
- Im większe  $r$  tym szybsza funkcja, ale mniejszy poziom deklarowanego bezpieczeństwa.

I

# Permutacja Keccak-f[1600]

Wstęp do  
kryptologii

Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje  
funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

- Permutacja Keccak-f[1600] składa się z 24 rund.
- Każda z rund składa się z pieciu kroków:  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $\chi$  oraz  $\tau$ .
- Rundy różnią się tylko stałymi rundowymi używanymi w ostatnim kroku  $\tau$ .

# Krok $\theta$

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

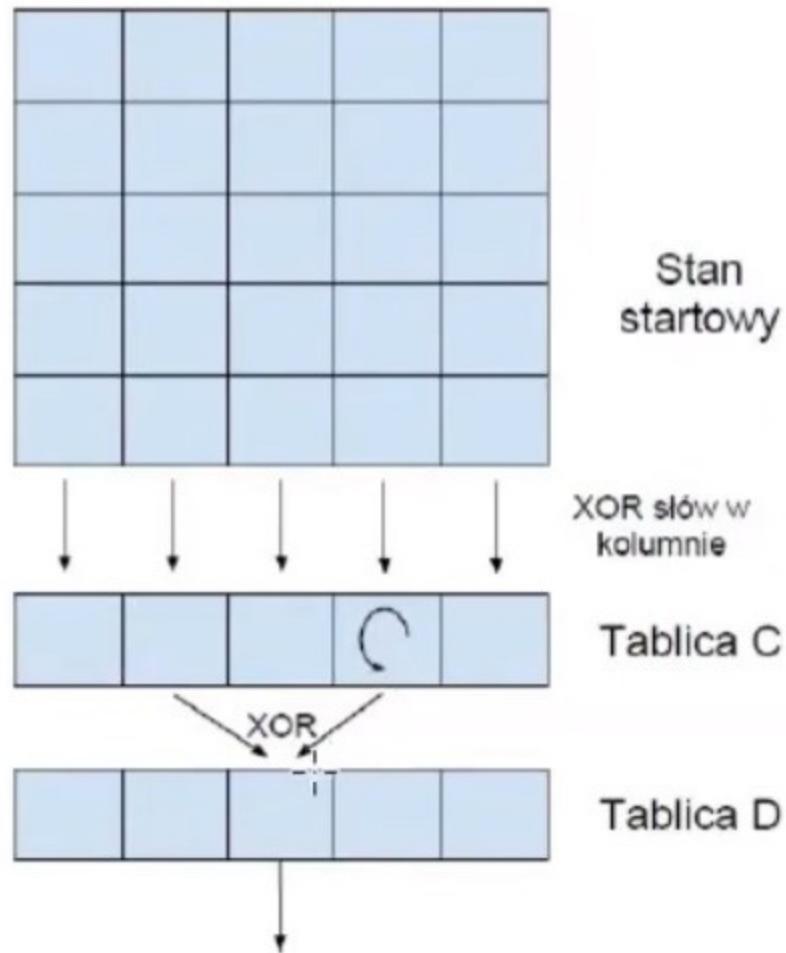
Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak



Dane słowo z tablicy D xorowane ze słowami odpowiedniej kolumny stanu startowego.

# Krok $\rho$

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bезпідозрінство

Konstrukcja funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

↻	↻	↻	↻	↻
↻	↻	↻	↻	↻
↻	↻	↻	↻	↻
↻	↻	↻	↻	↻
↻	↻	↻	↻	↻

I

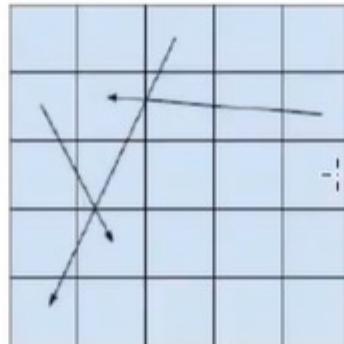
- Każde 64-bitowe słowo jest rotowane o pewną z góry ustaloną wartość.

# Krok $\pi$

Wstęp do  
kryptologii

Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie  
Bezpieczeństwo  
Konstrukcja  
funkcji skrótu  
SHA-3  
**Keccak**



- Zamiana między całymi słowami wg wzoru:

$$x' = y$$

$$y' = 2x + 3y \pmod{5}$$

# Krok $\chi$

Wstęp do kryptologii

Piotr  
Mroczkowski

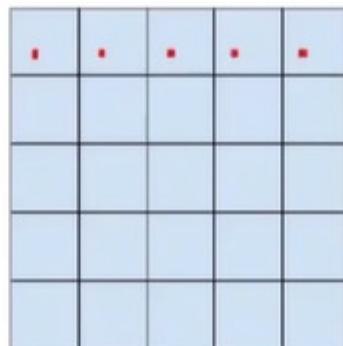
Wprowadzenie

Bезпівнство

Konstrukcje  
funkcji skrótu

SHA-3

Keccak



I

- Zestaw 5 bitów poddawane są nieliniowej operacji.
- Krok  $\chi$  można traktować jako warstwę 320 Sboxów, gdzie każdy z Sboxów działa na swoim zestawie 5 bitów.

# Krok $\chi$ - szczegóły

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

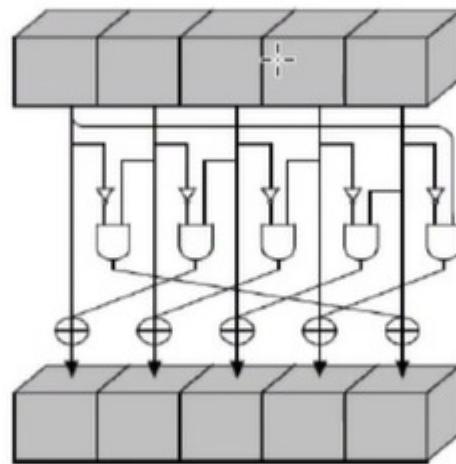
Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak



- $OUT_i = IN_i \oplus (IN_{i+1} \cdot \overline{IN}_{i+2})$

# Krok $\tau$

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

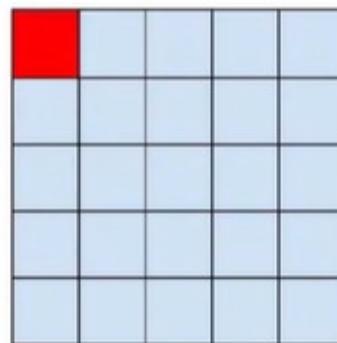
Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak



- Stała rundowa (64-bitowy wektor) xorowany jest ze słowem [0,0].

# Kryptoanaliza Keccaka

Wstęp do kryptologii

Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Bezpieczeństwo

Konstrukcje funkcji skrótu

SHA-3

Keccak

Rodzaj ataku	Liczba rund	Kryptoanaliza	Złożoność	Kto i kiedy
przeciwobraz	2	różnicowa	praktyczna	Naya-Plasencia, Rock, Meier (2011)
przeciwobraz	2	via SAT solver	praktyczna	Morawiecki, Srebrny (2010)
przeciwobraz	8	algebraiczna	$2^{511.5}$	Bernstein (2010)
przeciwobraz	4	rotacyjna	$2^{506}$	Morawiecki, Srebrny, Pieprzyk (2012)
kolizja	4	różnicowa i algebraiczna	praktyczna	Dinur, Dunkelman, Shamir (2012)

- Dodatkowo kilka innych prac analizującą permutację Keccak-f[1600], budowanie tzw. rozróżniaczy.

**Wstęp do  
kryptologii**

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia  
symetryczna

Symetryczne  
techniki  
kryptograficzne

Twierdzenie  
Shannona

Szyfry  
strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

# Symetryczne techniki kryptograficzne

## Szyfry strumieniowe

dr inż. Piotr Mroczkowski

# Plan wykładu

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

- 1 Twierdzenie Shannona**
- 2 Szyfry strumieniowe**
- 3 Generatory liczb pseudolosowych**
- 4 Liniowy rejestr przesuwający ze sprzężeniem zwrotnym**
- 5 Projekt eSTREAM**
- 6 Szyfr strumieniowy Trivium**

# Kryptografia symetryczna

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

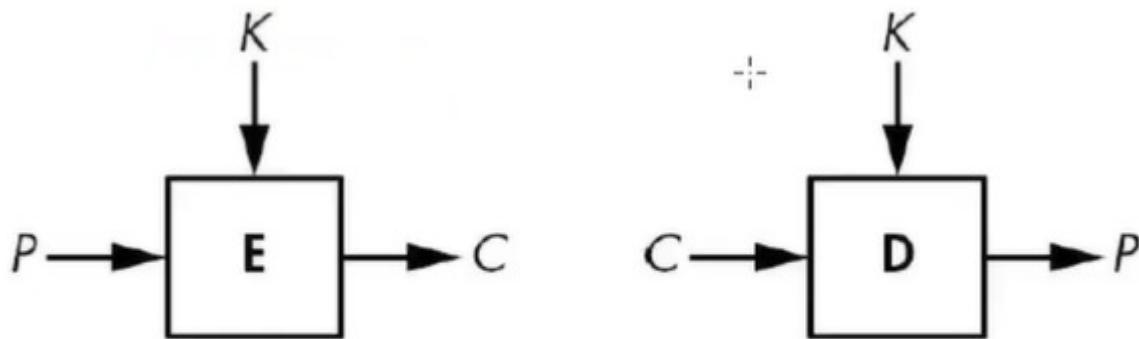
RC4

eSTREAM

Trivium

## Algorytm symetryczny

algorytm kryptograficzny, który do szyfrowania tekstu jawnego oraz deszyfrowania tekstu zaszyfrowanego wykorzystuje ten sam **tajny klucz**.



# Kryptografia symetryczna

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

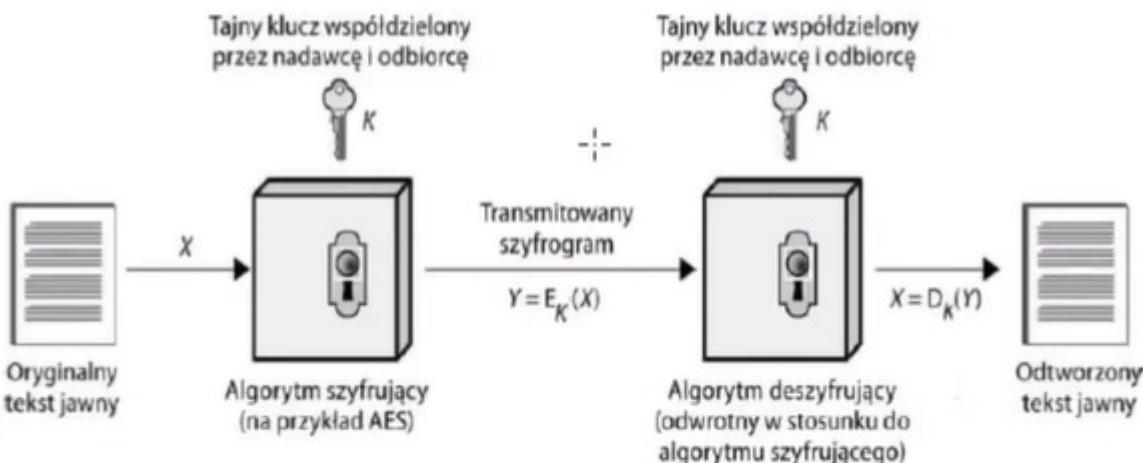
LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

Uproszczony model szyfrowania/deszyfrowania symetrycznego:



# Kryptografia symetryczna

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannon'a

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

Warunki konieczne bezpieczeństwa symetrycznych technik kryptograficznych:

- 1 Algorytm szyfrujący musi być na tyle silny, aby kryptoanalityk dysponującym zestawem szyfrogramów (szyfrogramów i odpowiadających im tekstów jawnych) nie był w stanie odtworzyć tekstu jawnego bez znajomości użytego klucza.
- 2 Nadawca i odbiorca muszą otrzymać kopie klucza (kluczy) w sposób bezpieczny.
- 3 Nadawca i odbiorca muszą w sposób bezpieczny używać i przechowywać klucz symetryczny.

# Symetryczne techniki kryptograficzne

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

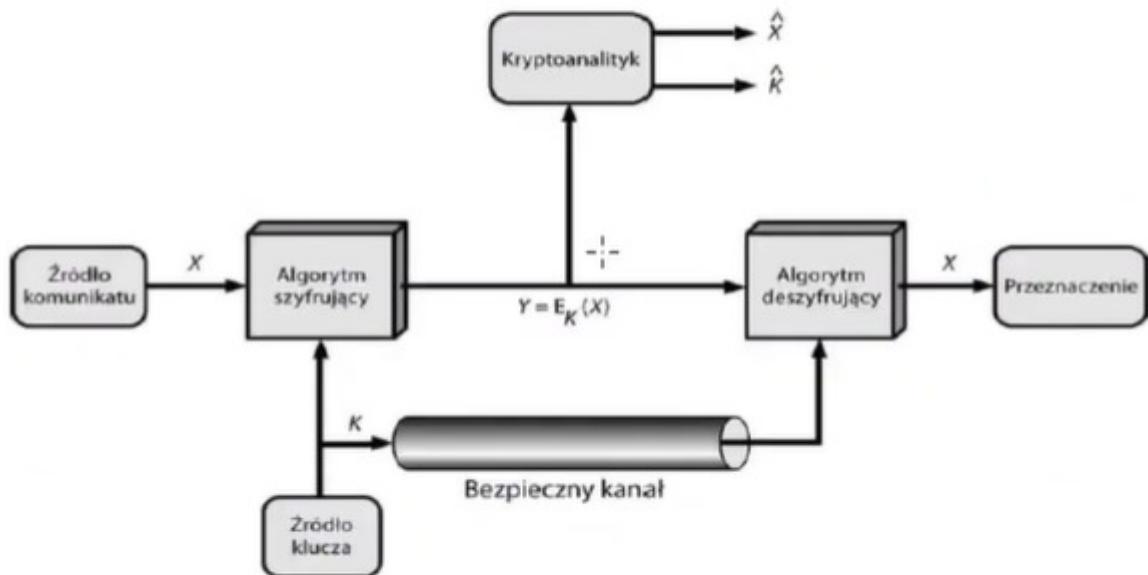
LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

Model szyfrowania/deszyfrowania symetrycznego:



Podstawowym problemem bezpieczeństwa szyfrowania symetrycznego jest generacja, dystrybucja i przechowywanie klucza (kluczy) w sposób bezpieczny.

# Twierdzenie Shannona (1949 r.)

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry stronieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## Doskonała tajność

znajomość szyfrogramu nie daje żadnych informacji o tekście jawnym.

## Twierdzenie Shannona

Kryptosystem  $(P, C, K, E, D)$ , dla którego  $|P| = |C| = |K|$ , posiada doskonałą tajność wtedy i tylko wtedy, gdy każdy klucz występuje z jednakowym prawdopodobieństwem (losowy) oraz dla każdego  $x \in P$  i  $y \in C$  istnieje jedyny klucz  $k \in K$  taki, że  $e_k(x) = y$ .

Twierdzenie Shannona dowodzi, że kryptosystem z losowym kluczem jednokrotnym posiada doskonałą tajność.



Claude Elwood Shannon (1916-2001)

# Symetryczne techniki kryptograficzne

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

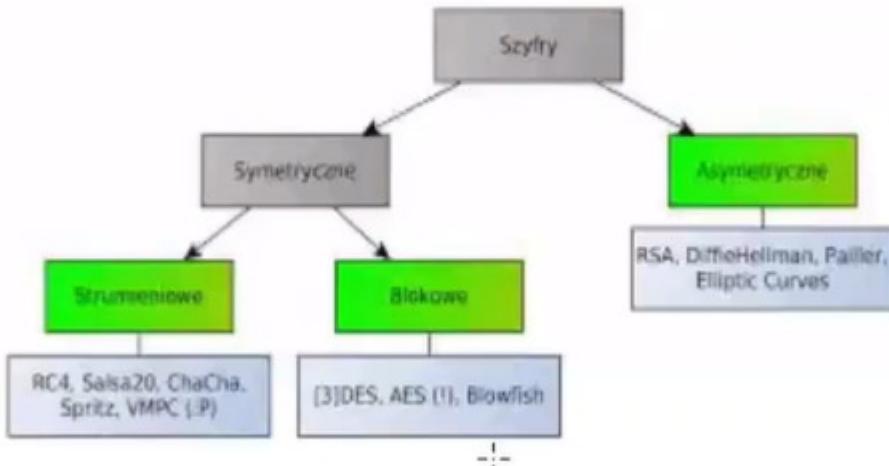
LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

Podział szyfrów symetrycznych:



# Symetryczne techniki kryptograficzne - szyfr strumieniowy

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

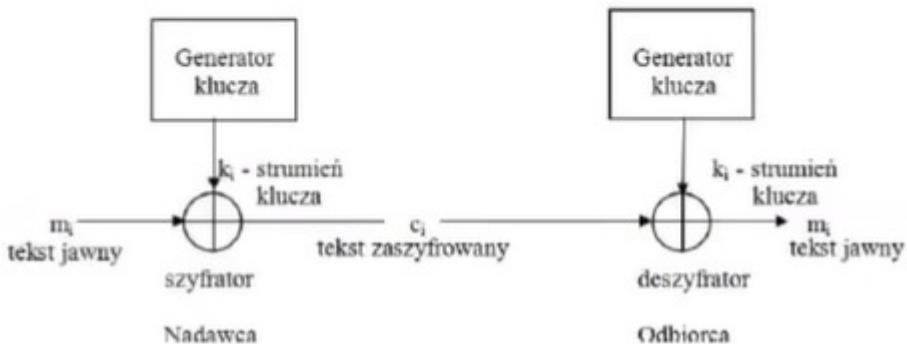
LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium



## Szyfr strumieniowy

algorytm, w którym argumentami funkcji przekształcającej są pojedyncze bity:

- szyfrowanie:  $c_i = p_i \oplus k_i$
- deszyfrowanie:  $p_i = c_i \oplus k_i$       I

gdzie:  $p_i$  - ciąg bitów tekstu jawnego;

$k_i$  - ciąg bitów klucza;

$c_i$  - ciąg bitów tekstu zaszyfrowanego;

# Strumieniowe techniki kryptograficzne - generowanie liczb losowych i pseudolosowych

## Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannon'a

Szyfry strumieniowe

LFSR

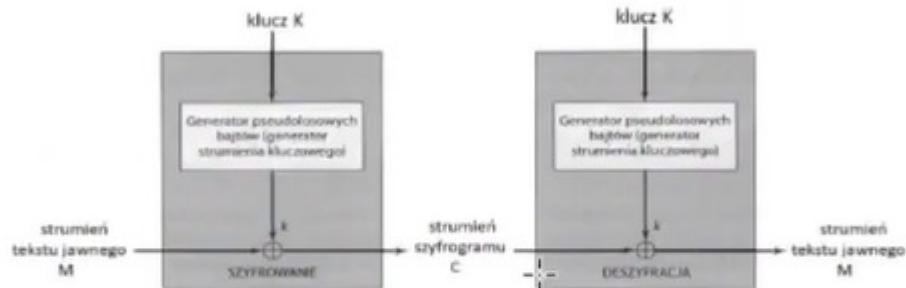
LFSR

RC4

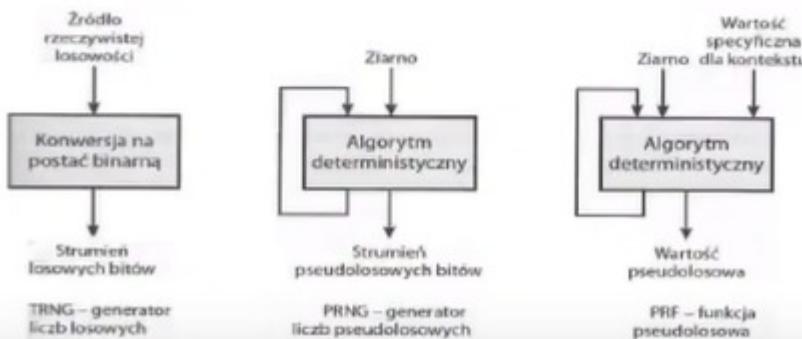
eSTREAM

Trivium

## Funkcjonowanie szyfru strumieniowego:



## Generatory liczb losowych i pseudolosowych:



# Strumieniowe techniki kryptograficzne - generowanie liczb losowych i pseudolosowych

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## 1 Cechy projektowe szyfru strumieniowego:

- Sekwencja szyfrująca powinna charakteryzować się długim okresem.
- Strumień kluczujący powinien mieć charakter losowy.
- Postać generowanego strumienia uwarunkowana jest przez klucz - im dłuższy klucz, tym mniejsze szanse powodzenia ataków siłowych (analogicznie do szyfrów blokowych).

## 2 Bezpieczna długość klucza co najmniej 128 bitów.

# Strumieniowe techniki kryptograficzne - jak działa szyfr strumieniowy

Wstęp do  
kryptologii

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia  
symetryczna

Symetryczne  
techniki  
kryptograficzne

Twierdzenie  
Shannona

Szyfry  
strumieniowe

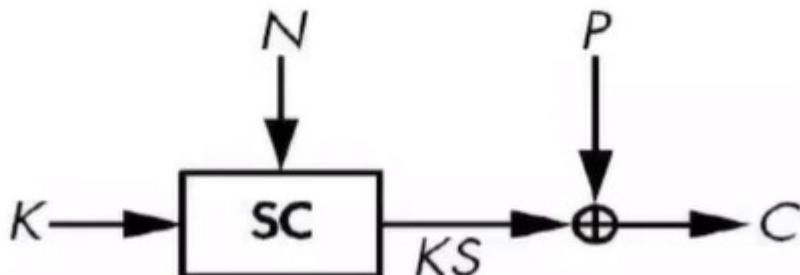
LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium



- 1** Dane wejściowe szyfru strumieniowego:
  - klucz - 128 lub 256 bitów,
  - wartość jednorazowa - 64 - 128 bitów (nie musi być wartością tajną, lecz powinna być niepowtarzalna dla każdego klucza).
- 2** Dane wyjściowe - strumień klucza  $KS = SC(K, N)$ .
- 3** Szyfrowanie  $C = P \oplus KS$ .
- 4** Deszyfrowanie  $P = C \oplus KS$ .
- 5** Podział ze względu na budowę:
  - szyfry strumieniowe stanowe (stateful stream ciphers),
  - szyfry strumieniowe oparte na liczniku (counter-based stream ciphers).

# Strumieniowe techniki kryptograficzne - stanowe szyfry strumieniowe

Wstęp do  
kryptologii

dr inż. Piotr  
Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia  
symetryczna

Symetryczne  
techniki  
kryptograficzne

Twierdzenie  
Shannona

Szyfry  
strumieniowe

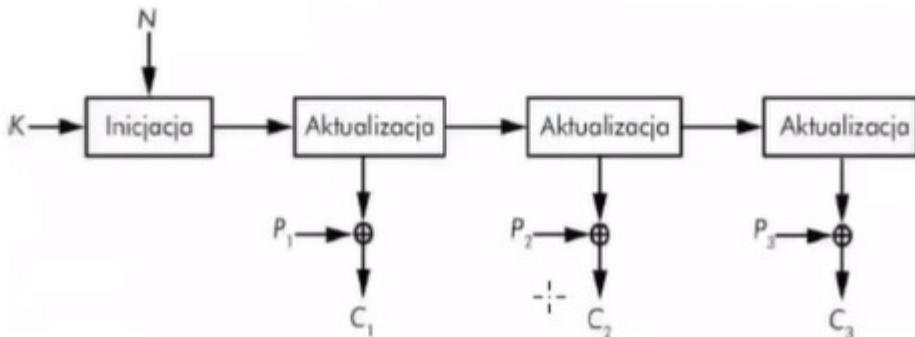
LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium



- 1 Stanowe szyfry strumieniowe mają tajny stan wewnętrzny, który ewoluje podczas generowania strumienia klucza.
- 2 Szyfr inicjalizuje stan z klucza i wartości jednorazowej, a następnie wywołuje funkcję aktualizacji, aby zaktualizować wartość stanu.
- 3 tworzony jest jeden lub więcej bitów strumienia klucza ze stanu.
- 4 Przykład: szyfry oparte na LFSR, NFSR, RC4, Salsa20.

# Strumieniowe techniki kryptograficzne - szyfry strumieniowe oparte na liczniku

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannon'a

Szyfry strumieniowe

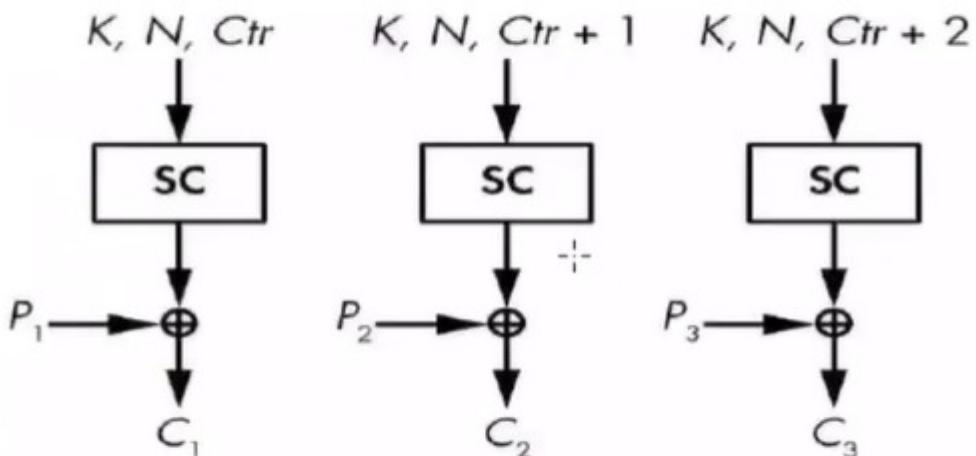
LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium



- 1 Szyfry strumieniowe oparte na liczniku tworzą fragmenty strumienia klucza z klucza, wartości jednorazowej oraz wartości licznika.

# Szyfry strumieniowe - podział szyfrów

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

Szyfry strumieniowe dzielą się na:

- synchroniczne,
- asynchroniczne (samosynchronizujące).

# Synchroniczne szyfry strumieniowe

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## Synchroniczny szyfr strumieniowy

szyfr strumieniowy, w którym strumień klucza generowany jest niezależnie od strumienia tekstu jawnego oraz szyfrogramu.

Synchroniczny szyfr strumieniowy można opisać równaniami:

$$\sigma_{i+1} = f(\sigma_i, k)$$

$$z_i = g(\sigma_i, k)$$

$$c_i = h(z_i, m_i)$$

gdzie:

- 1  $\sigma_0$  - jest stanem początkowym (może być określone na podstawie  $k$ );
- 2  $f$  - jest funkcją następnego stanu;
- 3  $g$  - jest funkcją tworzącą strumień klucza  $z_i$ ;
- 4  $h$  - jest funkcją danych wyjściowych, która składa strumień klucza z tekstem jawnym  $m_i$ , tworząc szyfrogram.

# Model synchronicznego szyfru strumieniowego - deszyfrowanie

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

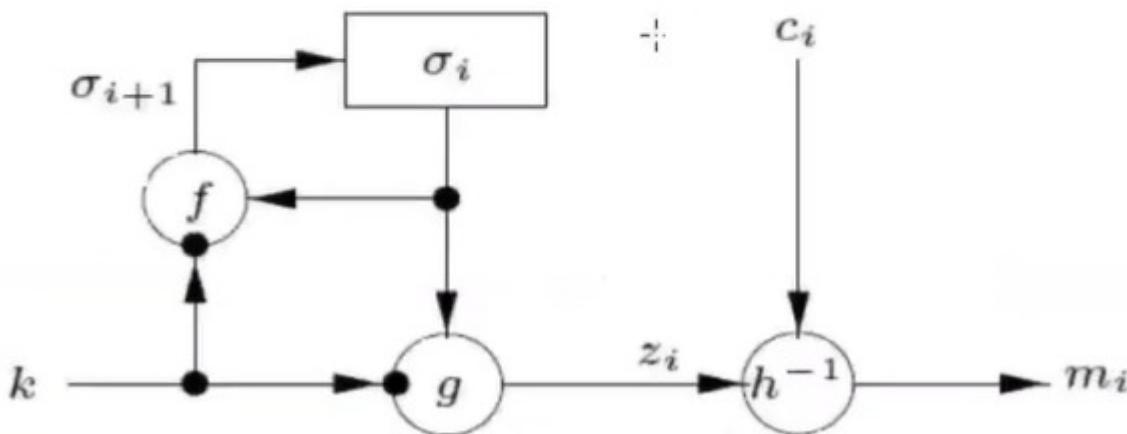
LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## Decryption



# Synchroniczne szyfry strumieniowe - własności

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

Własności synchronicznego szyfru strumieniowego:

## I wymaga synchronizacji

- nadawca i odbiorca muszą stosować ten sam klucz i operować tym samym kluczem na tej samej pozycji (stanie),
- jeśli synchronizacja zostanie utracona proces deszyfrowania nie powiedzie się,
- synchronizację można przywrócić stosując dodatkowe metody resynchronizacyjne,

# Model asynchronicznego szyfru strumieniowego - szyfrowanie

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

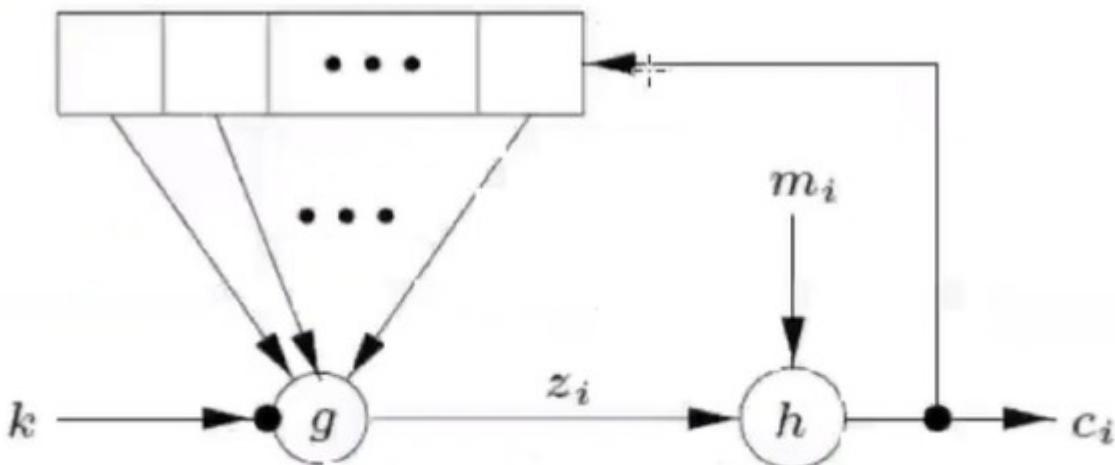
LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## Encryption



# Samosynchronizujące szyfry strumieniowe - własności

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannon'a

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

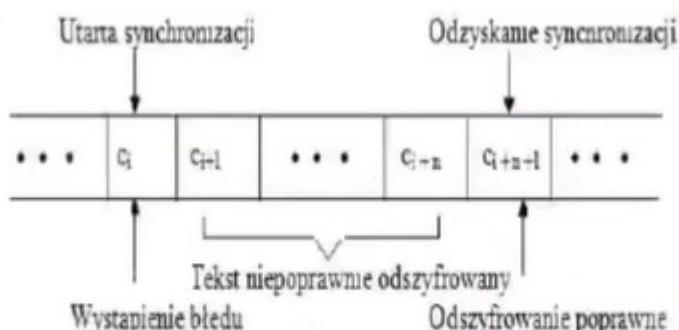
eSTREAM

Trivium

Własności asynchronicznego szyfru strumieniowego:

## 1 samosynchronizacja.

- jeśli podczas transmisji jakiś zaszyfrowany znak zostanie zgubiony lub wstawiony, to powstały błąd podlega propagacji przez  $n$  następnych znaków,
- po odebraniu  $n$  poprawnie zaszyfrowanych znaków synchronizacja zostanie ponownie osiągnięta.



# Samosynchronizujące szyfry strumieniowe - własności

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Tworzenie kluczy

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RCA

eSTREAM

Trivium

## 1 ograniczona propagacja błędów:

- niech  $t$  oznacza liczbę poprzednich cyfr szyfrogramu od których zależy stan samosynchronizującego szyfru strumieniowego,
- jeśli jedna cyfra szyfrogramu zostanie zmodyfikowana (usunięta/wstawiona) podczas transmisji, to maksymalnie  $t$  kolejnych cyfr szyfrogramu zostanie nieprawidłowo zdeszyfrowana,

## 2 ataki aktywne:

- każda modyfikacja cyfr szyfrogramu przez aktywnego adwersarza spowoduje nieprawidłowe odszyfrowania kilku innych cyfr szyfrogramu,
- jest znacznie trudniej (w porównaniu z szyframi synchronicznymi) wykryć wstawienie, usunięcie lub powtórzenie cyfr szyfrogramu przez aktywnego adwersarza,
- pokazuje to, konieczność stosowania mechanizmów uwierzytelnienia źródła danych oraz ich integralności.

# Liniowy rejestr przesuwający ze sprzężeniem zwrotnym - LFSR

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry zasłonięte

LFSR

LFSR

RC4

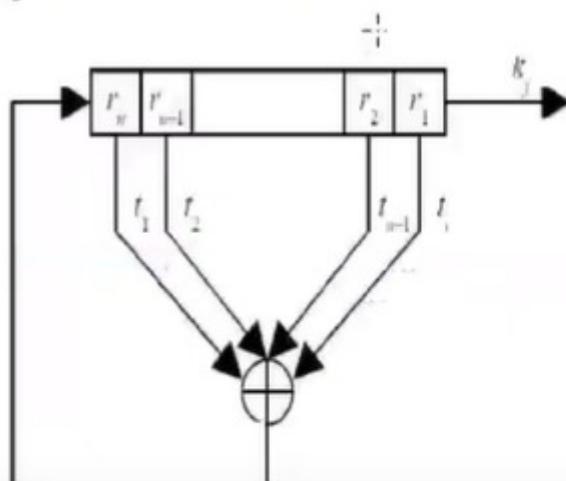
«STREAM

Trivium

Nowy stan rejestru  $R' = (r'_n, r'_{n-1}, \dots, r'_1)$  jest obliczany ze wzoru:

$$r'_i = r_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$r'_n = \sum_{i=1}^n t_i \cdot r_{n+1-i} \bmod 2 = t_1 r_n \oplus t_2 r_{n-1} \oplus t_n r_1$$



# Liniowy rejestr przesuwający ze sprzężeniem zwrotnym - LFSR

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannon'a

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## Liniowy rejestr przesuwający ze sprzężeniem zwrotnym - LFSR

Liniowy rejestr przesuwający ze sprzężeniem zwrotnym o długości  $n$  ( $n$  stanach) składa się z:

- 1 rejestru przesuwającego:  $R = (r_n, r_{n-1}, \dots, r_1)$ ,
- 2 rejestrów sprzężeń:  $T = (t_n, t_{n-1}, \dots, t_1)$ ,

gdzie:  $r_i, t_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Podczas jednego taktu pracy LFSR następuje:

- wyliczenie na podstawie  $R$  i  $T$  nowego bitu;
- przesunięcie w prawo o jedną pozycję rejestru  $R$  - bit który znajdował się na pozycji  $r_1$  jest usuwany z rejestru stając się kolejnym bitem ciągu generowanego przez LFSR;
- wprowadzenie nowego bitu do rejestru  $R$  na pozycję  $r_n$ .

# Liniowy rejestr przesuwający ze sprzężeniem zwrotnym - LFSR

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

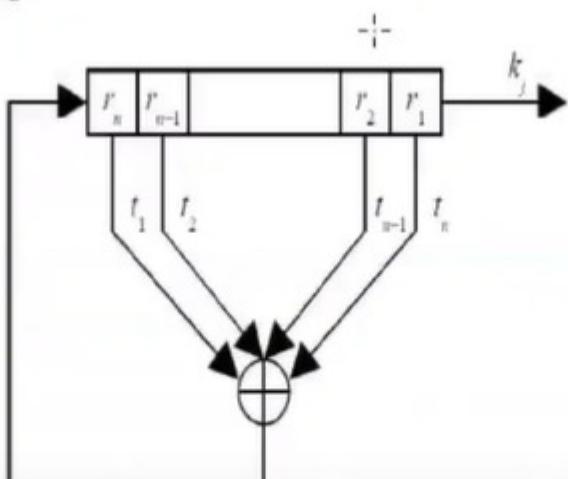
eSTREAM

Trivium

Nowy stan rejestru  $R' = (r'_n, r'_{n-1}, \dots, r'_1)$  jest obliczany ze wzoru:

$$r'_i = r_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$r'_n = \sum_{i=1}^n t_i \cdot r_{n+1-i} \bmod 2 = t_1 r_n \oplus t_2 r_{n-1} \oplus \dots \oplus t_n r_1$$



# eSTREAM - portfolio

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

LFSR

LFSR

RC4

eSTREAM

Trivium

## ■ portfolio kwiecień 2008;

Profile 1 (SW)	Profile 2 (HW)
HC-128	F-FCSR v2
Rabbit	Grain v1
Salsa20	MICKEY v2
SOSEMANUK	Trivium

## ■ portfolio wrzesień 2008

Profile 1 (SW)	Profile 2 (HW)
HC-128	Grain v1
Rabbit	MICKEY v2
Salsa20/12	Trivium
SOSEMANUK	

# Trivium - inicjalizacja

Wstęp do kryptologii

dr inż. Piotr Mroczkowski

Wprowadzenie

Kryptografia symetryczna

Symetryczne techniki kryptograficzne

Twierdzenie Shannona

Szyfry strumieniowe

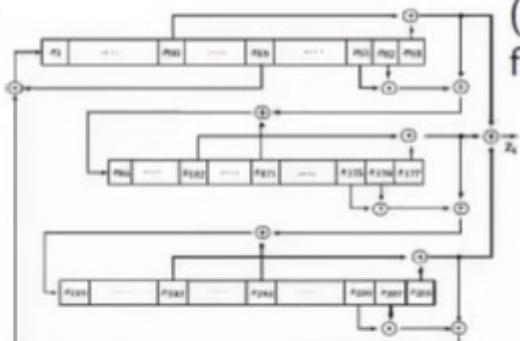
LFSR

LFSR

RCA

eSTREAM

Trivium


$$(s_1, \dots, s_{93}) \leftarrow (K_1, \dots, K_{80}, 0, \dots, 0)$$
$$(s_{94}, \dots, s_{177}) \leftarrow (IV_1, \dots, IV_{80}, 0, \dots, 0)$$
$$(s_{178}, \dots, s_{288}) \leftarrow (0, \dots, 0, 1, 1, 1)$$

for i = 1 to 1152

$$t_1 \leftarrow s_{66} + s_{93} + s_{91} \cdot s_{92} + s_{171}$$
$$t_2 \leftarrow s_{162} + s_{177} + s_{175} \cdot s_{176} + s_{264}$$
$$t_3 \leftarrow s_{243} + s_{288} + s_{286} \cdot s_{287} + s_{69}$$
$$(s_1, s_2, \dots, s_{93}) \leftarrow (t_3, s_1, \dots, s_{92})$$
$$(s_{94}, s_{95}, \dots, s_{177}) \leftarrow (t_1, s_{94}, \dots, s_{176})$$
$$(s_{178}, s_{179}, \dots, s_{288}) \leftarrow (t_2, s_{178}, \dots, s_{287})$$

] end for