Algebra, WIT 2018/2019

Egzamin A, 8:00-10:15, 24 lutego 2019 r.

....	....	....	....
Imię	Nazwisko	Indeks	Grupa

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ spełniające równania

i) $z^2 = -8 - 6i$,

ii) $2w - iw = 5$.

Rozwiązanie 1. i) niech $z = p + qi$, wtedy $z^2 = p^2 - q^2 + 2pqi$. Daje to układ równań

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = -8 \\ 2pq = -6 \\ p^2 + q^2 = 10 \end{cases}$$

(ostatnie równanie bierze się z równości $|z|^2 = |w|$). Dodając do siebie pierwsze i trzecie równanie otrzymujemy $p^2 = 1$, zatem $p = \pm 1$, co uwzględniając drugie daje $q = \mp 3$. Zatem $z = \pm(1 - 3i)$.

ii)

$$w = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 2 + i.$$

Inna metoda: niech $w = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$2w - iw = 2(a + bi) - i(a + bi) = (2a + b) + i(-a + 2b) = 5,$$

co daje układ równań

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + 2b = 0 \end{cases}$$

z jednoznacznym rozwiązaniem $a = 2,\ b = 1$.

Zadanie 2. Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej

$$z = \left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)^{15}.$$

Rozwiązanie 2. Ze wzoru de Moivre'a mamy

$$z = \left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)^{15} = \left(\cos\left(15\cdot\frac{5\pi}{9}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{5\pi}{9}\right)\right) = \left(\cos\frac{25\pi}{3} + i\sin\frac{25\pi}{3}\right) =$$

$$= \left(\cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Zatem

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie 3. Podaj rozwiązanie ogólne układu równań liniowych, sprowadzając jego macierz do postaci schodkowej zredukowanej i wyrażając zmienne związane przez parametry.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 12x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + x_2 - 12x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 12x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

Rozwiązanie 3. Tworzymy macierz układu i sprowadzamy ją przekształceniami elementarnymi do postaci schodkowej zredukowanej.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 12 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -12 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -12 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 8 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2+2w_1 \\ w_3+w_1 \\ w_4-w_1}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 12 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 12 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1+2w_4 \\ w_2+3w_4 \\ w_3/5}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2-4w_3 \\ w_3 \leftrightarrow w_4}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1-3w_3 \\ w_2-w_3}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Co daje rozwiązanie ogólne

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 - 4 \\ x_2 = 4x_3 - 2 \\ x_4 = 5 \end{cases}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli to możliwe, oblicz AA, AB, BA, A^{-1}, B^{-1}.

Rozwiązanie 4. Możliwe do obliczenie są

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

bo

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2-w_1 \\ w_3-w_1}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1-3w_3 \\ w_2 \leftrightarrow w_3}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Zadanie 5. Stosując metodę Cramera oblicz zmienną x_3.

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + x_4 = 1 \\ 12x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie 5.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 & 1 \\ 3 & 6 & 12 & 1 \\ 12 & 10 & 20 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{k_3-2k_2}{=} \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 12 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 12 & 10 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_3-2w_1}{=}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\det A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 12 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{k_1-k_2}{=}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 8$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{8}{2} = 4.$$

Zadanie 6. Odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest zadane wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2 - 6x_3, 3x_1 - 7x_2 + 12x_3).$$

i) znajdź bazy i wymiary przestrzeni $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$,

ii) znajdź macierz $M(f)_{st}^{st}$.

Rozwiązanie 6. i)

$$\ker f\colon \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

Układ równań rozwiązujemy sprowadzając jego macierz do postaci schodkowej zredukowanej operacjami elementarnymi na wierszach.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -6 \\ 3 & -7 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2+w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2/2]{w_3+2w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1+w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jądro $\ker f$ opisane jest układem równań jednorodnych z rozwiązaniem ogólnym postaci

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

$$(3x_3, 3x_3, x_3) = x_3(3, 3, 1),$$

skąd

$$\ker f = \operatorname{lin}((3,3,1)), \quad \dim\ker f = 1.$$

Baza $\ker f$ to $(3,3,1)$.
Ponieważ

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2 - 6x_3, 3x_1 - 7x_2 + 12x_3) =$$

$$x_1(1,-1,3) + x_2(-1,3,-7) + x_3(0,-6-,12),$$

to

$$\operatorname{im} f = \operatorname{lin}((1,-1,3),(-1,3,-7),(0,-6,-12)).$$

Szukamy bazy przestrzeni rozpiętej wpisując wektory poziomo w wiersze macierzy, którą sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej (lub schodkowej) operacjami elementarnymi na wierszach.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[-w_3/6]{w_2+w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1+w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\operatorname{im} f = \operatorname{lin}((1,0,1),(0,1,-2)), \quad \dim\operatorname{im} f = 2.$$

Baza $\operatorname{im} f$ to $(1,0,1),(0,1,-2)$.

ii)

$$M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -6 \\ 3 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7. Odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest zadane macierzą

$$M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

i) znajdź bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu f,

ii) znajdź macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A}$ jest bazą z punktu i).

Rozwiązanie 7. i) Szukamy wielomianu charakterystycznego

$$w(x) = \det\begin{bmatrix} 1-x & 4 & -4 \\ -2 & -5-x & 2 \\ 0 & 0 & -3-x \end{bmatrix} = (-1)^{3+3}(-x-3)\det\begin{bmatrix} 1-x & 4 \\ -2 & -5-x \end{bmatrix} =$$

$$= -(x+3)((1-x)(-5-x)+8) = -(x+3)(x^2+4x+3) = -(x+1)(x+3)^2.$$

Zatem wartości własne to $x = -1$ oraz $x = -3$. Przestrzenie własne opisane są jednorodnymi układami równań z macierzami jak poniżej.

$$V_{(-1)}\colon \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z rozwiązaniem ogólnym

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

skąd

$$V_{(-1)} = \mathrm{lin}((-2,1,0)).$$

$$V_{(-3)}: \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

z rozwiązaniem ogólnym

$$\{x_3 = x_1 + x_2\ , \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

skąd

$$V_{(-3)} = \mathrm{lin}((1,0,1),(0,1,1)).$$

Baza złożona z wektorów własnych to

$$\mathcal{A} = ((-2,1,0),(1,0,1),(0,1,1)).$$

ii)

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. Oblicz pole trójkąta ABC o wierzchołkach w $A = (1,1,1)$, $B = (3,2,3)$, $C = (2,-1,1)$.

Rozwiązanie 8.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,2),$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,-2,0).$$

Pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ jest równe

$$\sqrt{\det \begin{bmatrix} \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle \\ \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\rangle \end{bmatrix}} = \sqrt{\det \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}} = 3\sqrt{5}.$$

Pole trójkąta jest równe połowie pola tego równoległoboku, skąd

$$P_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Inny sposób: pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ jest równe długości wektora $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = (4,2,-5).$$

Zatem

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\|(4,2,-5)\| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$