Wykład 1

Definicja 1.1 *Ciałem nazywamy strukturę algebraiczną (algebrę)* $\mathbf{K} = \{K; 0, 1, +, \cdot\}$, *w której: K jest zbiorem z wyróżnionymi dwoma różnymi elementami 0 i 1, oraz dwoma działaniami + i · zwanymi dodawaniem i mnożeniem. Działania te przyporządkowują parze elementów zbioru K jeden element zwany wynikiem działania. W ciele działania spełniają następujące warunki zwane aksjomatami ciała:*

Dla każdych $a, b, c \in K$

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*łączność dodawania*
2) $a + b = b + a$	*przemienność dodawania*
3) $0 + a = a + 0 = a$	*0 jest elementem neutralnym dodawania*
4) $\forall_{a \in K}\ \exists_{p \in K}\ a + p = 0$	*istnienie elementu przeciwnego*
5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	*łączność mnożenia*
6) $a \cdot b = b \cdot a$	*przemienność mnożenia*
7) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	*1 jest elementem neutralnym mnożenia*
8) $\forall_{a \in K, a \neq 0}\ \exists_{q \in K}\ a \cdot q = 1$	*istnienie elementu odwrotnego*
9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	*rozdzielność mnożenia względem dodawania*

Uwaga. Element przeciwny do a oznaczamy symbolem $-a$ zaś odwrotny symbolem a^{-1}.

Przykład 1.2 *Ciałami są:*

a) Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ *z naturalnymi działaniami + i ·.*

b) Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ *z naturalnymi działaniami + i ·.*

c) Funkcje wymierne $\mathbb{R}(x)$ *z naturalnymi działaniami tzn. określonymi wzorami:*

$(f + g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) + g(x)$

$(f \cdot g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) \cdot g(x)$.

Ciałami nie są:

a) Liczby naturalne $\mathbb{N}$ *z naturalnymi działaniami + i ·.*

b) Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ *z naturalnymi działaniami + i ·.*

c) Funkcje wymierne $\mathbb{R}(x)$ *z naturalnymi działaniem + i składaniem* $\circ$.

Definicja 1.3 *Układem równań liniowych n zmiennych nad ciałem K nazywamy układ w postaci:*

$$L: \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + \cdots + a_{s,n}x_n = b_s \end{cases},$$

gdzie $a_{i,j}$ *i* b_j *są liczbami z ciała K. Liczby* b_j *nazywamy wyrazami wolnymi.*

Układ w którym wszystkie wyrazy wolne są równe 0 nazywamy jednorodnym.

Rozwiązaniem układu L nazywamy każdy n-elementowy ciąg $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in K^n$ *liczb z ciała K, który po podstawieniu do równań da równości. To znaczy* $\forall_{1 \le i \le s} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_j = b_i$.

Definicja 1.4 *Macierz to sposób zapisu liczb lub danych w postaci prostokąta. Linie poziome macierzy nazywamy wierszami zaś pionowe kolumnami. Każdemu miejscu macierzy przyporządkowujemy parę liczb (współrzędnych) - numer wiersza i numer kolumny.*

Definicja 1.5 *Macierzą układu równań L nazywamy macierz*

$$M(L) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix} = [a_{i,j}]_{i=1,\ j=1}^{s \quad n}$$

Macierzą uzupełnioną układu równań L nazywamy macierz

$$M(L)^U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} & b_s \end{array}\right] = [a_{i,j}|b_i]_{i=1,\ j=1}^{s \quad n}$$

Definicja 1.6 *Niech* $M = [a_{i,j}]_{i=1,\ j=1}^{t \quad n}$ *będzie macierzą o t wierszach i n kolumnach o współczynnikach z ciała K.*

Schodkiem macierzy M nazywamy takie miejsce macierzy w którym stoi liczba niezerowa zaś z lewej strony i poniżej są same 0. Formalnie: miejsce (i,j) jest schodkiem gdy:

$a_{i,j} \neq 0$ *i*

$p \geq i \ \wedge \ q < j \Rightarrow a_{p,q} = 0$ *oraz* $p > i \ \wedge \ q \leq j \Rightarrow a_{p,q} = 0$.

Macierz jest w postaci schodkowej gdy w każdym niezerowym wierszu jest schodek i wszystkie zerowe wiersze są poniżej niezerowych.

Macierz jest w postaci schodkowej zredukowanej gdy jest w postaci schodkowej i każda kolumna zawierająca schodek ma jedną 1 i pozostałe współczynniki zerowe.

Definicja 1.7 *Niech L będzie układem równań, którego macierz jest w postaci schodkowej zredukowanej. Zmienne odpowiadające kolumnom zawierającym schodki nazywamy zmiennymi związanymi zaś pozostałe zmienne parametrami.*

Twierdzenie 1.8 *Jeżeli $M(L)^U$ macierz uzupełniona układu równań L jest w postaci schodkowej zredukowanej to:*

i) układ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy gdy schodek wypada w kolumnie z prawej strony kreski zwanej kolumną wyrazów wolnych.

ii) Jeżeli układ jest niesprzeczny to każde rozwiązanie otrzymujemy podstawiając dowolne liczby za parametry (zmienne nie leżące na schodkach).

Definicja 1.9 *Niech $W = (w_1, w_2, ..., w_n)$ będzie ciągiem. Następujące przekształcenia ciągu W nazywamy operacjami elementarnymi:*

Typ 1) Do j-tego wyrazu ciągu dodajemy inny pomnożony przez liczbę.

Typ 2) j-ty wyrazu ciągu mnożymy przez niezerową liczbę.

Typ 3) Zamieniamy miejscami dwa wyrazy ciągu.

Twierdzenie 1.10 *Operacje elementarne są odwracalne.*

Twierdzenie 1.11 *Stosując operacje elementarne na równaniach nie zmieniamy zbioru rozwiązań.*

Stwierdzenie 1.12 *Zamianę kolejności dwóch wyrazów ciągu można uzyskać stosując pozostałe operacje elementarne.*

Twierdzenie 1.13 *Stosując operacje elementarne typu 1 na wierszach, każdą macierz można doprowadzić do postaci schodkowej. Stosując dodatkowo jedną operacje typu 2 na wierszach, każdą macierz można doprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej.*

Przykład 1.14 *Sprowadź macierz następującego układu równań do postaci schodkowej zredukowanej i napisz rozwiązanie ogólne tego układu stosując w opisie parametry i zmienne związane.*

$$\text{Niech } L = \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Macierzą uzupełnioną tego układu jest: $M(L)^U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right]$

Odejmujemy od drugiego wiersza podwojony pierwszy i od trzeciego pierwszy,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Teraz po odjęciu od trzeciego wiersza drugiego otrzymujemy macierz w postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aby uzyskać postać schodkową zredukowaną dzielimy drugi wiersz przez 2 i następnie odejmujemy od pierwszego.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 5 & 0 & 5 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Schodki występują w pierwszej i trzeciej kolumnie więc zmiennymi związanymi będą x_1 i x_3 zaś parametrami zmienne x_2 i x_4.

Teraz wracamy do układu równań i wyliczamy zmienne związane:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = \frac{7}{2} \\ x_3 - 2x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - 5x_2 - 5x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2x_4 \end{cases}$$

Definicja 1.15 *Układ równań liniowych L jest jednorodny gdy wszystkie wyrazy wolne są $=0$.*

Twierdzenie 1.16 *Ciąg $\theta = (0,0,...,0) \in K^n$ jest rozwiązaniem układu równań liniowych L wtedy i tylko wtedy gdy układ L jest jednorodny.*

Definicja 1.17 *Ciałem liczb zespolonych nazywamy zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par liczb rzeczywistych oznaczanych jako: $\mathbb{C} = \{\ a+bi|\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ z działaniami:*

$(a+bi) \overset{df}{+} (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$(a+bi) \overset{df}{\cdot} (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Definicja 1.18 *Niech $z = a+bi$ będzie liczbą zespoloną.*

Częścią rzeczywistą z nazywamy liczbę $Re(z) = a$.

Częścią urojoną z nazywamy liczbę $Im(z) = b$.

Modułem liczby z nazywamy odległość z od 0 czyli liczbę $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Argumentem niezerowej liczby z nazywamy kąt między osią rzeczywistą a wektorem $\overrightarrow{0z}$. Postacią trygonometryczną jest zapis $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r = |z|$ i $\varphi = Arg(z)$ jest argumentem liczby z.

Sprzężeniem liczby $z = a+bi$ nazywamy liczbę $\overline{z} = a - bi$.

Algorytm szukania pierwiastków stopnia 2 :

$x^2 = a+bi$

$x = p+qi$

$p^2 - q^2 + 2pqi = a+bi$

I rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2pq = b \\ p^2 - q^2 = a \\ p^2 + q^2 = |x|^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Otrzymujemy następujące rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}}\, i \\ \\ x_2 = -x_1 \end{cases}.$$