

4.1. Okazuje się, że rozkład prawdopodobieństwa uzyskania ocen z RPS (X) i MD (Y) przez tego samego studenta w pewnej szkole przedstawia się następująco.

| | | X | | |
|-----|-----|------|-----|-----|
| | | 4 | 4,5 | 5 |
| Y | 4,5 | a | 0,1 | 0,1 |
| | 5 | $2a$ | 0,2 | 0,3 |

- Wyznacz wartość stałej a , by powyższa tabelka rzeczywiście określała rozkład prawdopodobieństwa.
- Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y .
- Znajdź postać dystrybuanty zmiennej losowej (X, Y) . Oblicz wartość $F(4,5; 4,5)$.
- Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są niezależne. Wyznacz kowariancję tych zmiennych oraz ich współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$. Podaj interpretację otrzymanej wartości $\rho(X, Y)$.

4.2. Inny raport podaje, że w sąsiedniej szkole rozkład prawdopodobieństwa uzyskania ocen z RPS (R) i MD (M) przez tego samego studenta przedstawia się jak niżej.

| | | R | | |
|-----|-----|------|------|------|
| | | 4 | 4,5 | 5 |
| Y | 4 | 1/32 | 1/32 | 1/16 |
| | 4,5 | 3/32 | 3/32 | 3/16 |
| | 5 | 1/8 | 1/8 | 1/4 |

- Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych R i M .
- Sprawdź, czy zmienne losowe R i M są niezależne. Wyznacz kowariancję tych zmiennych oraz ich współczynnik korelacji $\rho(R, M)$.
- Podaj interpretację otrzymanej wartości $\rho(R, M)$.

4.3. Gorączka analiz probabilistycznych ogarnęła wszystkie dziekanaty! Co ciekawe, w jeszcze innej szkole rozkład prawdopodobieństwa uzyskania ocen z Filozofii Bytu (F) i Wychowania Fizycznego (W) przez tego samego studenta przedstawia się następująco.

| | | F | | | |
|-----|---|------|------|------|------|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 |
| W | 2 | 0 | 0,01 | 0,1 | 0,2 |
| | 3 | 0,01 | 0,05 | 0,03 | 0,1 |
| | 4 | 0,1 | 0,03 | 0,05 | 0,01 |
| | 5 | 0,2 | 0,1 | 0,01 | 0 |

- Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych F i W .
- Sprawdź, czy zmienne losowe F i W są niezależne. Wyznacz kowariancję tych zmiennych oraz ich współczynnik korelacji $\rho(F, W)$. Podaj interpretację otrzymanej wartości $\rho(F, W)$.

4.4. Z talii 52 kart wylosowano 1 kartę. Niech zmienna losowa A opisuje liczbę wylosowanych asów, a K — liczbę kierów. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej (A, K) . Czy te zmienne są niezależne? Oblicz ich współczynnik korelacji.

4.5. Sławek jest studentem informatyki. Otrzymuje stypendium naukowe w wysokości 500 zł miesięcznie. Dodatkowo zarabia na zleceniach; w miesiącu wykonuje średnio 10 stron internetowych i udziela przeciętnie 20 godzin korepetycji, z odchyleniami standardowymi równymi odpowiednio 3 i 4. Za stronę otrzymuje 50 zł, a za godzinę korepetycji pobiera 30 zł. Współczynnik korelacji między liczbą wykonanych witrzyn i liczbą godzin dydaktycznych wynosi 0,6. Oblicz oczekiwany miesięczny dochód i jego odchylenie standardowe.

4.6. Pewna piekarnia wytwarza dwa rodzaje specjalnego pieczywa. Chleba „Janosik” sprzedaje dziennie średnio 100 sztuk (z odchyleniem standardowym 10), a bułki „Pokusa” — przeciętnie 90 sztuk (z wariancją 49). Współczynnik korelacji między liczbą zagrabionych Janosików a nieodpartych Pokus wynosi 0,3. Oblicz oczekiwany dzienny dochód z tytułu sprzedanych ww. specjalów, jeśli wiadomo, że pierwszy produkt kosztuje 2,99 zł, a drugi — 3,49 zł. Ponadto, wyznacz odchylenie standardowe dochodu.

4.7. Prawdopodobieństwo, że w czasie t jedna żarówka przestanie świecić jest równe 0,2. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że w czasie t spośród 150 przestanie świecić od 20 do 35 sztuk. Zakładamy, że żarówki przepalają się niezależnie od siebie.

4.8. Przyjmuje się, że 1% populacji choruje na schizofrenię. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 1000 osób będzie więcej niż 12 cierpiących na to zaburzenie.

4.9. (PG) Agencja turystyczna „Latający Holender” dysponuje bogatą ofertą i sprzedaje wycieczki niemal na cały świat. W ubiegłym roku 10% spośród klientów tej agencji wybrało się do Ameryki Południowej, 5% na Hawaje, 20% do krajów Dalekiego Wschodu, a pozostali w rejon Morza Śródziemnego. Według szacunków agencji, w tym roku uda się

jej sprzedać około 1000 wycieczek. Zakładając, że preferencje klientów nie zmieniają się, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że agencji uda się sprzedać od 40 do 70 wycieczek na Hawaje?

4.10. Prawdopodobieństwo znalezienia wybrakowanego towaru wynosi p . Kontrola sprawdza liczbę braków spośród n losowo wybranych sztuk towaru. Wyznacz wzór ogólny na rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej.

- (a) Jeśli $p = 0,1$, a $n = 10$, jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola nie napotka więcej niż 1 braku?
- (b) Jeśli $p = 0,1$, a $n = 1000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z CTG), że kontrola napotka od 50 do 100 braków.
- (c) Jeśli p wynosi zaledwie 0,001, a $n = 5000$, oszacuj prawdopodobieństwo (z tw. Poissona), że kontrola napotka co najmniej dwa braki.

4.11. (PG) Dziennikarze pewnej gazety twierdzą, że wielu posłów z pewnej partii obawia się, iż gdyby rozpisano przedterminowe wybory, mogliby nie znaleźć się ponownie w parlamencie, a tym samym utraciliby immunitet. Dziennikarze bowiem dotarli do materiałów, z których wynika, iż prawdopodobieństwo tego, iż losowo wybrany poseł z tej partii ma czyste sumienie, wynosi zaledwie 0,2. Zakładając, że posłowie stanowią reprezentatywną próbkę członków swojego ugrupowania, oblicz prawdopodobieństwo, że w liczącej 5000 członków partii znajdziemy choć 1200 rzeczywiście uczciwych obywateli.

4.12★ Pewien zacny i aż nadto znany z zapału do pracy swej profesor przeprowadza egzamin ustny z RPS. Dostał jednakowoż od dziekana pozwolenie na przepytanie jednego dnia tylko (sic!) 50 osób. Wie on z doświadczenia, iż z powodu różnych (niezrozumiałych) okoliczności tylko 80% studentów przybywa na wyznaczony termin sprawdzianu. Ile maksymalnie osób powinien zaprosić, by mógł mieć 99% pewności, iż żaden uczeń nie zostanie odprawiony z „pustą kartą egzaminacyjną”?

4.13★ Dana jest następująca funkcja.

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } x \in [0, 2], y \in [0, 1], \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Znajdź stałą $c \in \mathbb{R}$ taką, żeby f była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .
- (b) Znajdź rozkłady brzegowe tej zmiennej losowej.
- (c) Podaj wartość jej dystrybucyjności w punkcie $(1; 0,5)$ oraz $(1; 2)$. Oblicz $P(X \in [1; 1,5], Y \in [0,25; 0,75])$ oraz $P(X \leq 1)$.
- (d) Sprawdź, czy te zmienne losowe są niezależne. Wyznacz kowariancję $\text{Cov}(X, Y)$ oraz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.

4.14★ Dana jest następująca funkcja.

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{dla } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Znajdź stałą $k \in \mathbb{R}$ taką, żeby f była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .
- (b) Podaj wartość jej dystrybucyjności w punkcie $(2; 0,75)$.
- (c) Sprawdź, czy te zmienne losowe są niezależne. Wyznacz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.

4.15★ Dana jest funkcja:

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-ax - ay) & \text{dla } x > 0 \text{ i } y > 0, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases} \quad (3)$$

- (a) Znajdź stałą $a \in \mathbb{R}$ taką, żeby f była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .
- (b) Sprawdź, czy te zmienne losowe są niezależne.
- (c) Wyznacz dystrybucyjność.
- (d) Wyznacz kowariancję $\text{Cov}(X, Y)$ oraz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.

4.16★ Dana jest następująca funkcja.

$$f(x, y) = \begin{cases} kx & \text{dla } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases} \quad (4)$$

- (a) Znajdź stałą $k \in \mathbb{R}$ taką, żeby f była gęstością pewnej dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .
- (b) Podaj wartość jej dystrybucyjności w punkcie $(0,25; 0,5)$.
- (c) Sprawdź, czy te zmienne losowe są niezależne. Wyznacz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.