Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej

i Zarządzania

OPTYMALIZACJA SYSTEMÓW TRANSMISJI DANYCH

dr inż. Janusz DUDCZYK

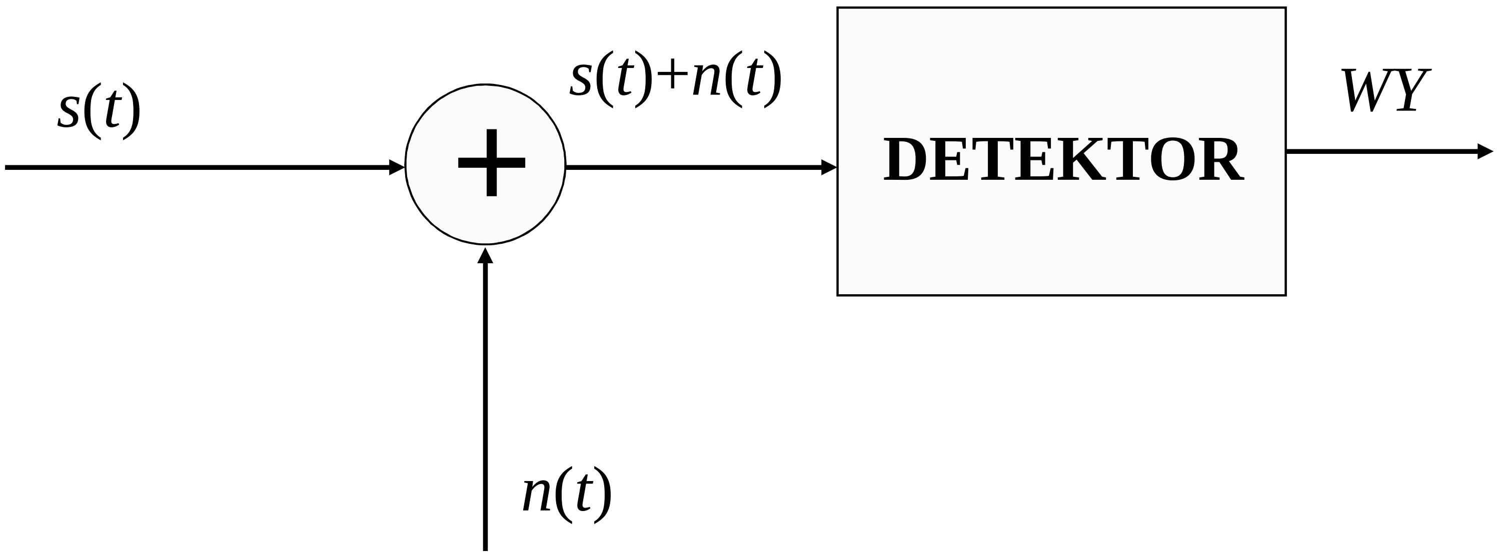
ZAGADNIENIA

- Statystyczny model odbioru sygnałów;
- Optymalna detekcja sygnału;
- Detekcja sygnału całkowicie znanego;
- Odbiornik z filtrem dopasowanym;
- Odbiornik korelacyjny.

Statystyczny model odbioru sygnałów

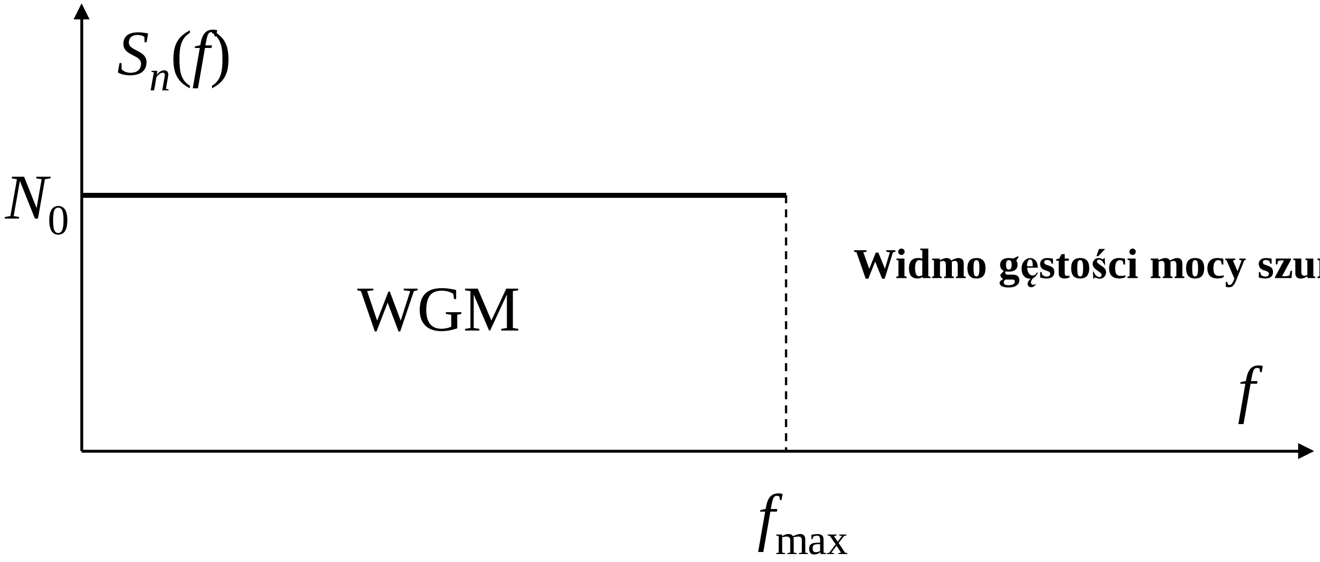
- Procedura wykrywania (detekcji) sygnału użytecznego w obecności szumu addytywnego;
- Problem estymacji parametrów sygnału użytecznego.

Statystyczny model odbioru sygnałów



$n(t)$ – zakłócenia addytywne, których spektrum określone jest widmową gęstością mocy.

Statystyczny model odbioru sygnałów

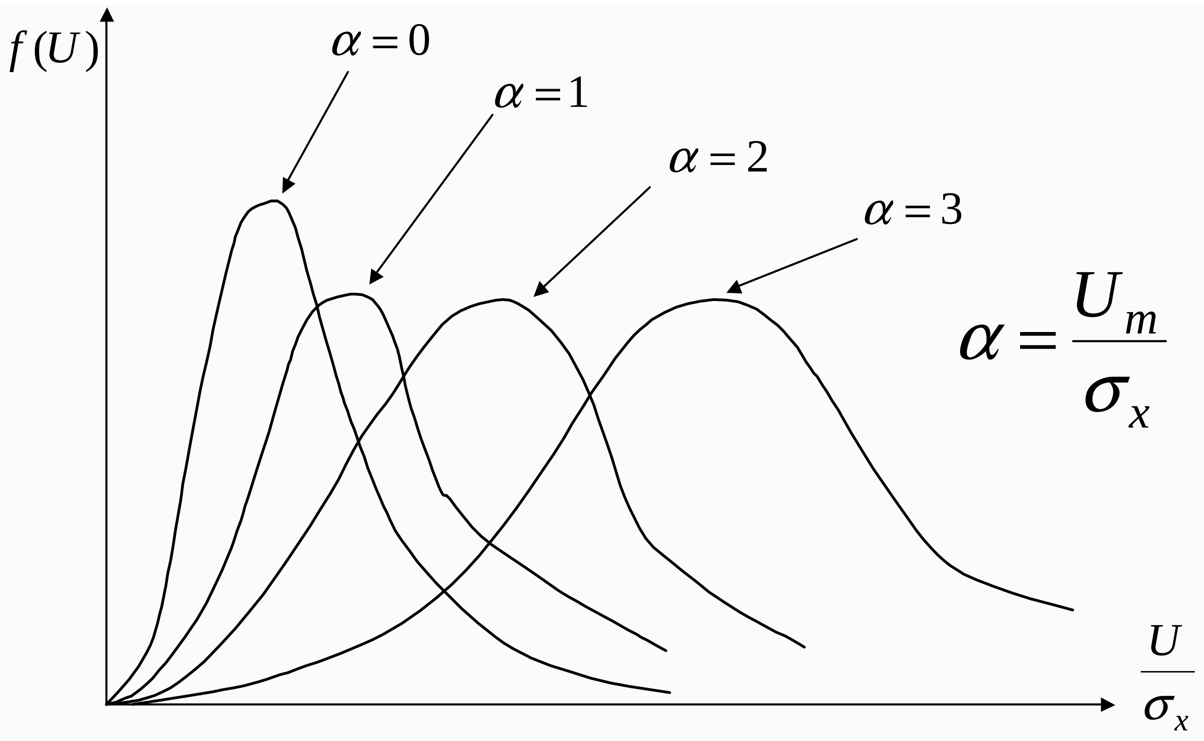


Widmo gęstości mocy szumu białego.

ROZKŁAD SZUMU → **ROZKŁAD NORMALNY**

Centralne Twierdzenie Graniczne „CTG”

Ze wzrostem stosunku sygnału do szumu, rozkład Rice’a staje się coraz bardziej symetryczny i dąży do rozkładu normalnego. Praktycznie dla , $\alpha = 3$ rozkład Rice’a można aproksymować rozkładem normalnym.

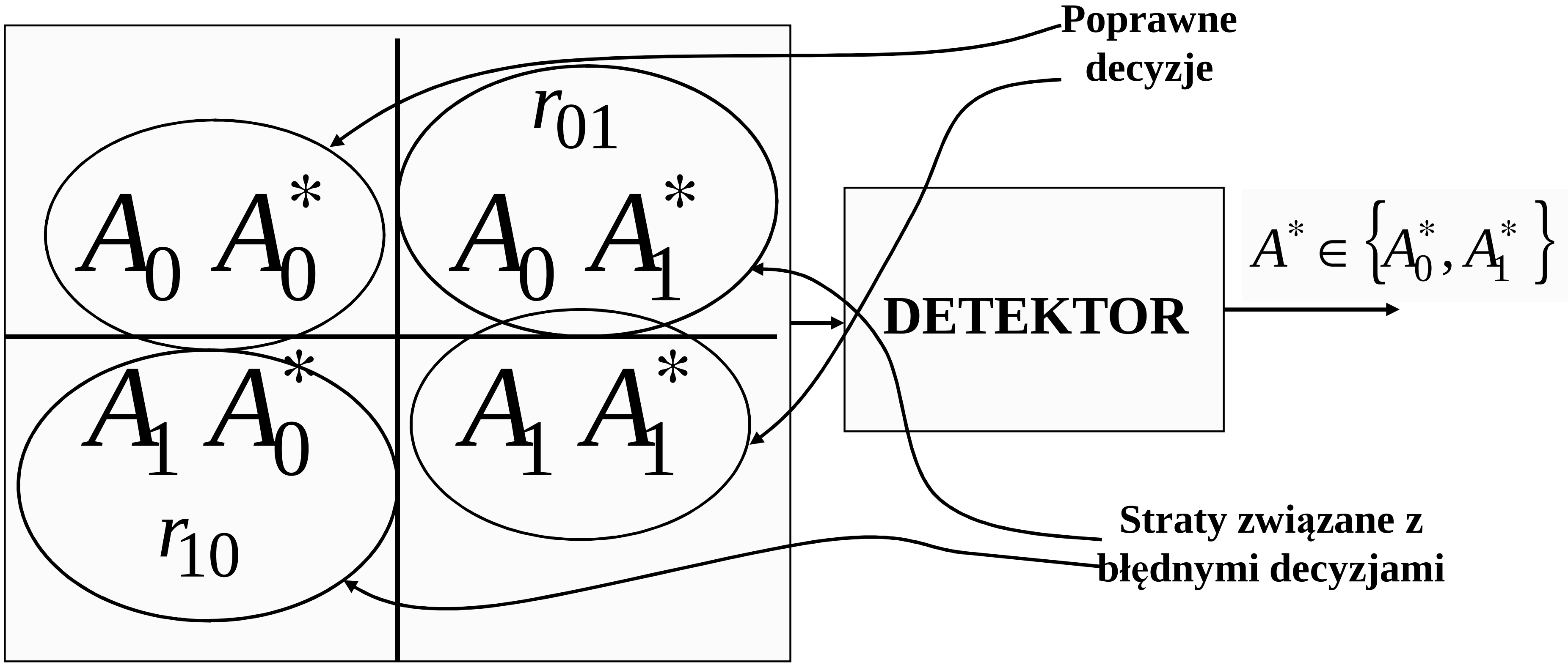


$$\alpha = \frac{U_m}{\sigma_x}$$

Stosunek

sygnału do szumu

Optymalna detekcja sygnału



$x(t) = n(t)$ $\qquad A_0$ – brak sygnału

$x(t) = s(t) + n(t)$ $\qquad A_1$ – sygnał wystąpił

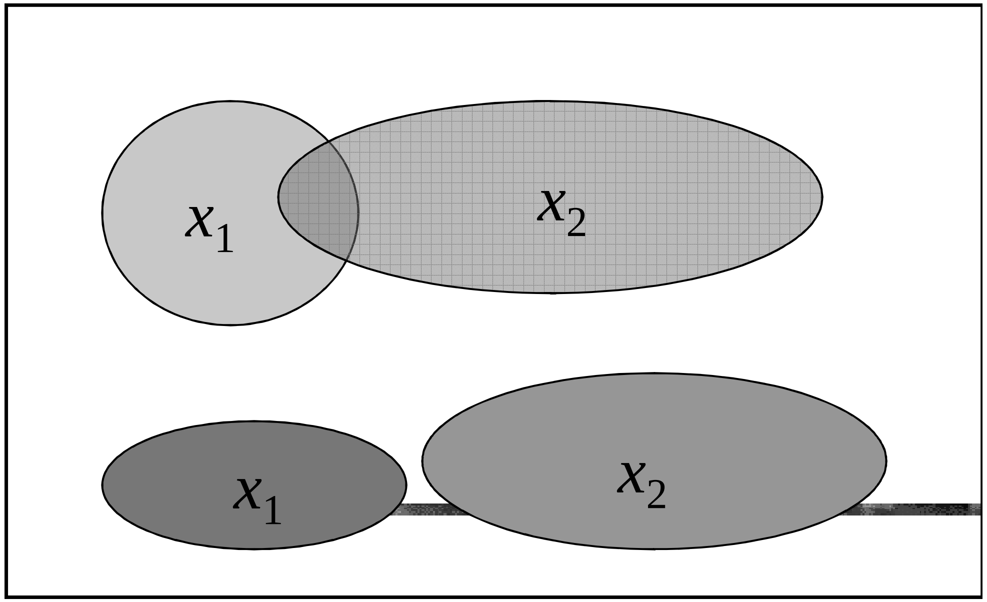
Optymalna detekcja sygnału

Graficzna interpretacja podziału obszarów decyzyjnych:

$$x(t) \rightarrow \underline{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad ;\Delta t = \frac{1}{2 f_{\max}} \qquad \underline{\mathrm{x}} \in \mathrm{X}$$

$$\mathrm{X} = x_1 \cap x_2 = \phi$$

$$\mathrm{X} = \underset{\uparrow\, A_1^*}{x_1} \cup \underset{\uparrow\, A_0^*}{x_2}$$



Optymalna detekcja sygnału

strata $r = r_{10} \cdot \mathrm{P}(A_1 A_0^*) + r_{01} \cdot \mathrm{P}(A_0 A_1^*)$

„fałszywy spokój”

sygnał przepuszczony

„fałszywy alarm”

detekcja nieobecności

$A_0 \; A_0^*$	r_{01} $A_0 \; A_1^*$
$A_1 \; A_0^*$ r_{10}	$A_1 \; A_1^*$

Optymalna detekcja sygnału

Należy wyznaczyć funkcję decyzyjną, która zapewni najmniejsze P_{fs} lub P_{fa}.

$$\bar{r} = r_{10} \cdot \underbrace{P(A_0^* / A_1)}_{P_{fs}} \cdot P(A_1) + r_{01} \cdot \underbrace{P(A_1^* / A_0)}_{P_{fa}} \cdot P(A_0)$$

średnia strata

prawdopodobieństwa a'priori

$$r_{10} \cdot P_{fs} \cdot P(A_1) + r_{01} \cdot P_{fa} \cdot P(A_0) = \min$$

możliwość korygowania

Optymalna detekcja sygnału

Kryterium optymalizacji funkcji decyzyjnej:

- Kryterium idealnego obserwatora „I-O” (r_{10}=$r_{01)}$;
- Kryterium Neymana-Pearsona „N-P”
  (w przypadku nieznanych prawdopodobieństw apriori).

Optymalna detekcja sygnału

- **Kryterium „I-O”**

$$\mathrm{P}_{fs} \cdot \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}_{fa} \cdot \mathrm{P}(A_0) = \min$$

$$\mathrm{P}(A_0) + \mathrm{P}(A_1) = 1$$

$$\underbrace{\mathrm{P}(A_0^* / A_1)}_{\mathrm{P}_{fs}} + \underbrace{\mathrm{P}(A_1^* / A_1)}_{\mathrm{P}_D} = 1$$

$$(1 - \mathrm{P}_D) \cdot \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}_{fa} \cdot \mathrm{P}(A_0) = \min$$

$$(1 - \mathrm{P}_D) \cdot \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}_{fa} \cdot (1 - \mathrm{P}(A_1)) = \min$$

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}_D \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}_{fa} \cdot \frac{(1 - \mathrm{P}(A_1))}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)} \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \min$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\left[\mathrm{P}_D - \lambda_0 \mathrm{P}_{fa}\right] = \min$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\left[\mathrm{P}_D - \lambda_0 \mathrm{P}_{fa}\right] = \min$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{P}_D - \lambda_0 \mathrm{P}_{fa} \to \max$$

$$\boxed{\mathrm{P}_D \uparrow - \underbrace{\lambda_0\ \mathrm{P}_{fa}}_{\text{const}} \to \max}$$

Optymalna detekcja sygnału

Optymalna reguła decyzyjna detekcji sygnału

$$\mathrm{P}_D - \lambda_0 \mathrm{P}_{fa} \rightarrow \max$$

$x(t) \rightarrow \underline{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ postać sygnału wejściowego

Funkcja gęstości p-stwa wielkości $\underline{\mathrm{x}}$ stanowi $W(\underline{\mathrm{x}})$.

$W_0(\underline{\mathrm{x}})$ gdy $\underline{\mathrm{x}} = n$

$W_1(\underline{\mathrm{x}})$ gdy $\underline{\mathrm{x}} = n + s$

$$\mathrm{P}_D = \int_{x_1} W_1(\underline{\mathrm{x}}) d\underline{\mathrm{x}} \qquad \mathrm{P}_{fa} = \int_{x_1} W_0(\underline{\mathrm{x}}) d\underline{\mathrm{x}}$$

Optymalna detekcja sygnału

Optymalna reguła decyzyjna detekcji sygnału

$$\int_{X_1} \left[W_1(\underline{x}) - \lambda_0 W_0(\underline{x})\right] d\underline{x} \to \max$$

$$W_1(\underline{x}) - \lambda_0 W_0(\underline{x}) \geq 0$$

$$\frac{W_1(\underline{x})}{W_0(\underline{x})} \geq \lambda_0$$

$$A_1^*$$

$$\lambda(\underline{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{W_1(\underline{x})}{W_0(\underline{x})}$$ stosunek wiarygodności

Optymalna detekcja sygnału

Optymalna reguła decyzyjna detekcji sygnału ma postać:

$$\text{dla } \lambda(\underline{x}) \geq \lambda_0 \text{ decyzja } A_1^*$$

sygnał użyteczny występuje

$$\text{dla } \lambda(\underline{x}) < \lambda_0 \text{ decyzja } A_0^*$$

brak sygnału

Optymalna detekcja sygnału

Kryterium „I-O”

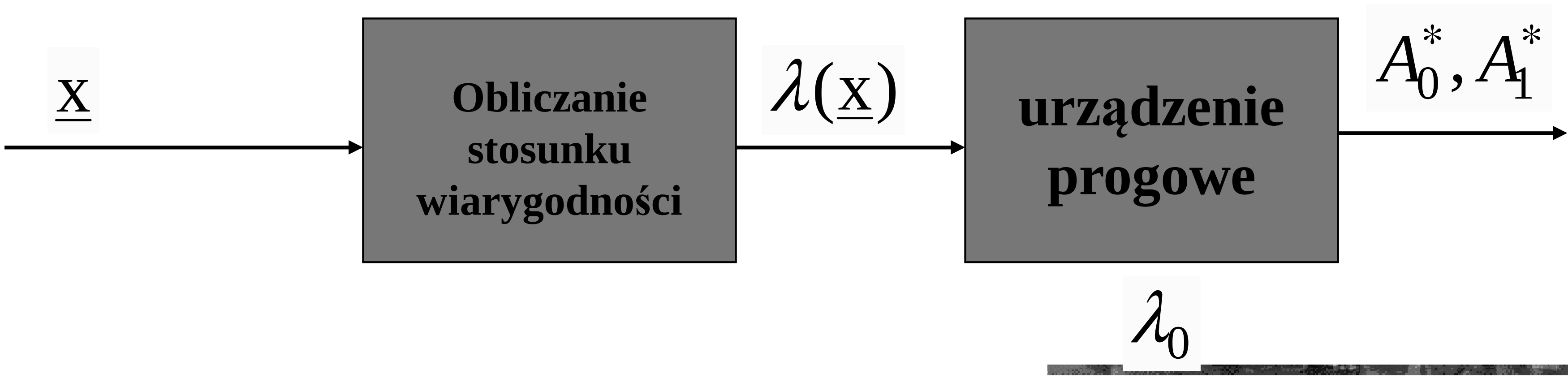
λ_0 - wartość progowa wyrażona zależnością:

$$\lambda_0 = \frac{\mathrm{P}(A_0)}{\mathrm{P}(A_1)} = \frac{1 - \mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(A_1)}$$

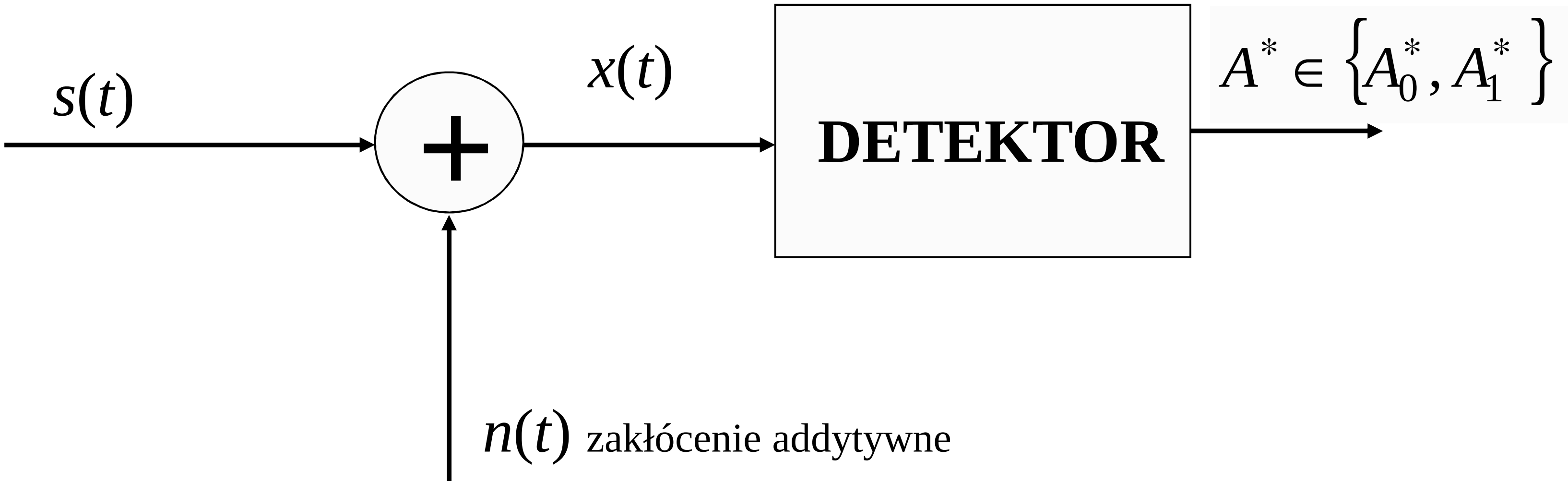
Optymalna detekcja sygnału

Kryterium „N-P”

λ_0 - wybierana wg. p-stwa fałszywego alarmu P_{fa}



Wykrywanie sygnału całkowicie znanego



- Określenie stosunku wiarygodności $\lambda(\underline{x})$
- Porównanie stosunku wiarygodności z progiem λ_0

Wykrywanie sygnału całkowicie znanego

- Określenie stosunku wiarygodności $\lambda(\underline{x})$

$$\lambda(\underline{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{W_1(\underline{x})}{W_0(\underline{x})}$$ stosunek wiarygodności

$$W_1(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{m} W_1(x_i) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \cdot e^{-\frac{(x_i - s_i)}{2\sigma_z^2}}$$

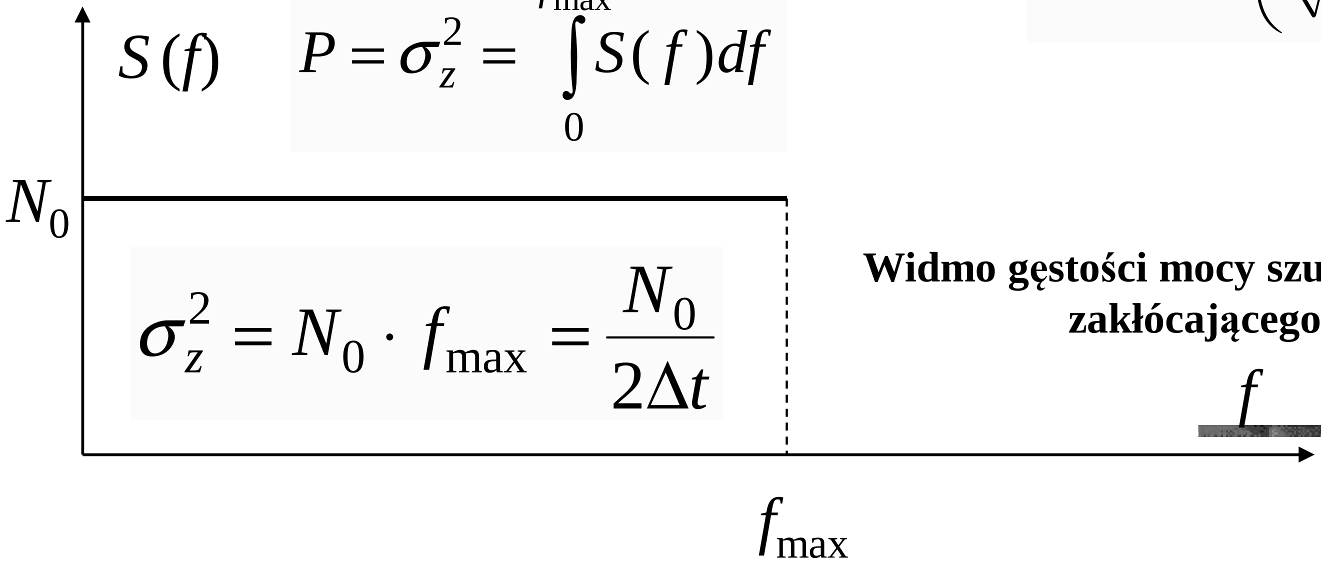
$$W_0(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{m} W_0(x_i) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma_z^2}}$$

Wykrywanie sygnału całkowicie znanego

$$W_1(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \right)^m \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{2\sigma_z^2}} \cdot e^{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i s_i}{\sigma_z^2}} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$W_0(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \right)^m \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$P = \sigma_z^2 = \int_0^{f_{\max}} S(f)\,df$$



$$\sigma_z^2 = N_0 \cdot f_{\max} = \frac{N_0}{2\Delta t}$$

Widmo gęstości mocy szumu białego zakłócającego

Wykrywanie sygnału całkowicie znanego

$$\lambda(\underline{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^2}{2\sigma_z^2}} \cdot e^{\frac{1}{\sigma_z^2}\sum_{i=1}^{m} x_i s_i} = e^{-\frac{1}{N_0}\cdot\sum_{i=1}^{m} s_i^2 \Delta t} \cdot e^{\frac{2}{N_0}\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i\, s_i\, \Delta t} \xrightarrow[f_{\max}\to\infty]{\Delta t\to 0} e^{-\frac{E_s}{N_0}} \cdot e^{\frac{2}{N_0} Z(T)}$$

$$W_1(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z}\right)^m \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^2}{2\sigma_z^2}} \cdot e^{\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i s_i}{\sigma_z^2}} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$\sigma_z^2 = N_0 \cdot f_{\max} = \frac{N_0}{2\Delta t}$$

$$W_0(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z}\right)^m \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^2}{2\sigma_z^2}}$$

Wykrywanie sygnału całkowicie znanego

$$\lambda(\underline{x}) = e^{-\frac{E_s}{N_0}} \cdot e^{\frac{2}{N_0} Z(T)}$$

Energia sygnału użytecznego

Całka korelacyjna

***T* – czas obserwacji**

$$\sum_{i=1}^{m} s_i^2 \Delta t \quad \underset{f_{\max}\to\infty}{\overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}} \quad \int_0^T S^2(t)dt = E_s$$

Energia sygnału

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\, s_i\, \Delta t \quad \underset{f_{\max}\to\infty}{\overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}} \quad \int_0^T x(t)s(t)dt = Z(T)$$

Całka korelacyjna

Wykrywanie sygnału całkowicie znanego

- Porównanie stosunku wiarygodności z progiem λ_0

$$\lambda(\underline{x}) = e^{-\frac{E_s}{N_0}} \cdot e^{\frac{2}{N_0} Z(T)} \gtrless \lambda_0 \Leftrightarrow \ln \lambda(\underline{x}) \gtrless \lambda_0$$

$$-\frac{E_s}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z(T) \gtrless \ln \lambda_0$$

Zawiera informację o sygnale wejściowym *x*(*t*)

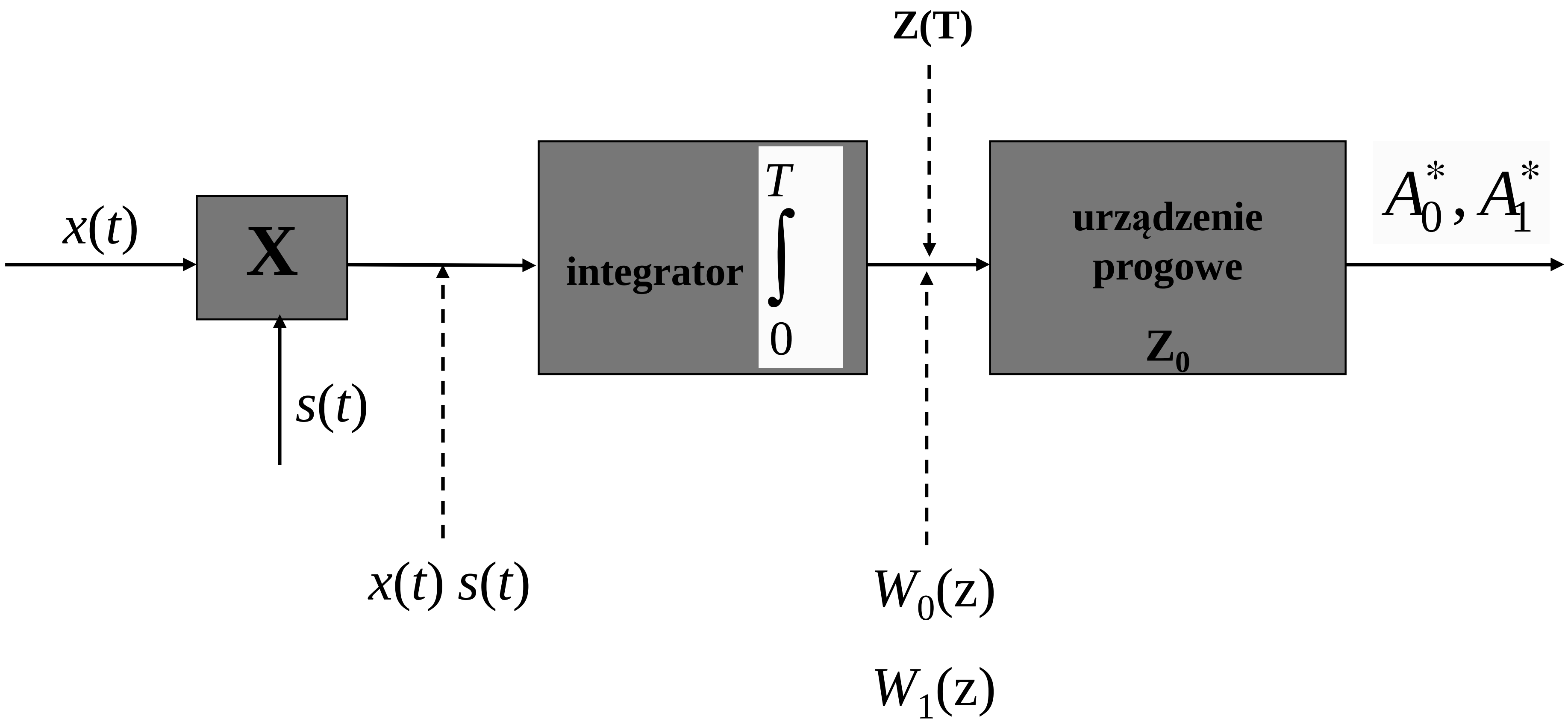
$$Z(T) \geq Z_0 \rightarrow A_1^*$$

$$Z(T) < Z_0 \rightarrow A_0^*$$

Kryterium wykrywania sygnałów

$$Z_0 = \left(\ln \lambda_0 + \frac{E_s}{N_0} \right) \cdot \frac{N_0}{2}$$

Odbiornik korelacyjny



Odbiornik korelacyjny P_D, P_{fa}, q

- błąd pierwszego rodzaju

$$P_{fs} = P(A_0^* / A_1) = \int_{-\infty}^{Z_0} W_1(z)dz$$

$$P_{fs} = 1 - P_D$$

- błąd drugiego rodzaju

$$P_{fa} = P(A_1^* / A_0) = \int_{Z_0}^{\infty} W_0(z)dz$$

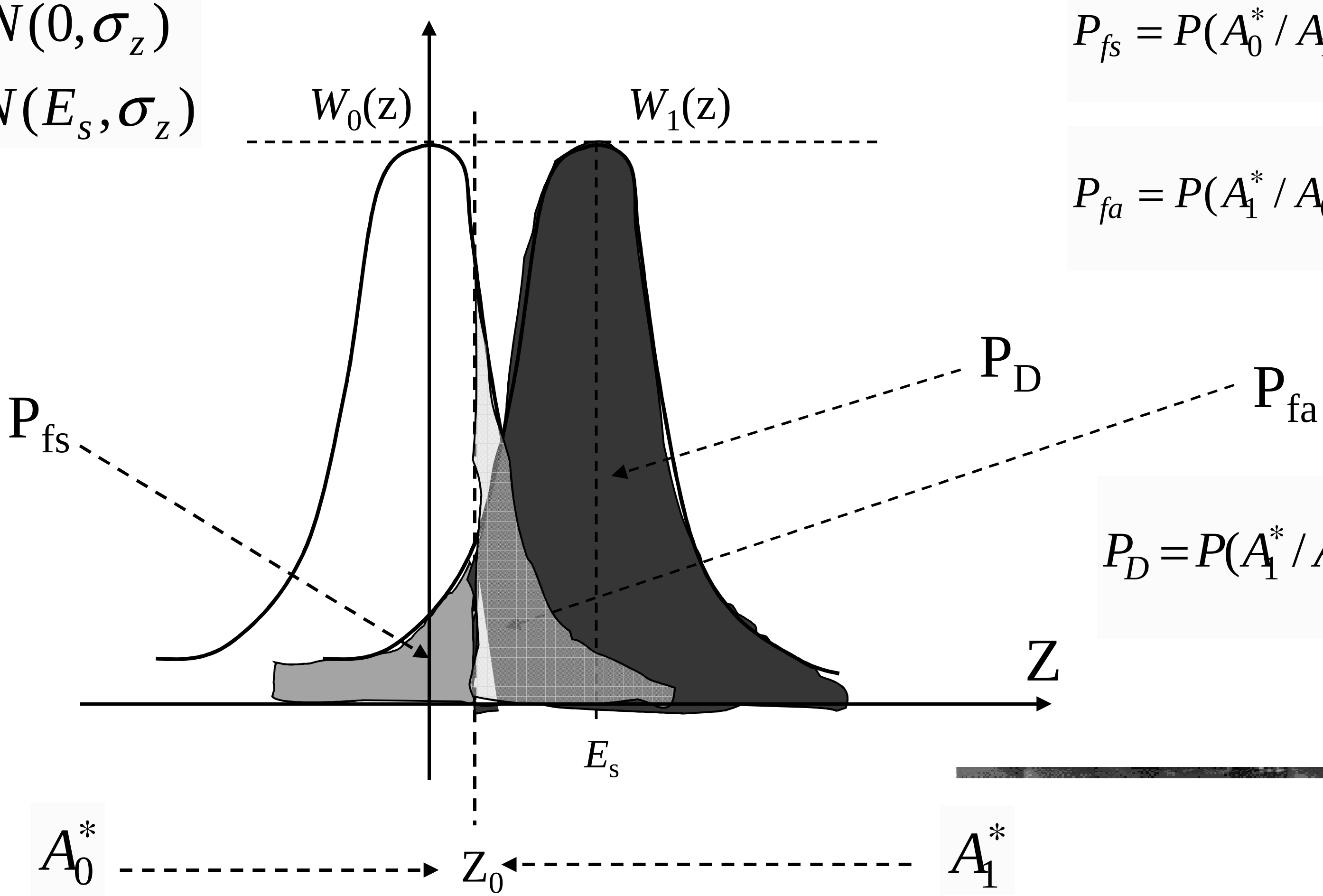
$$P_D = P(A_1^* / A_1) = \int_{Z_0}^{\infty} W_1(z)dz$$

Gęstość prawdopodobieństwa całki korelacyjnej

Rozkład prawdopodobieństwa

$$W_0(z) \approx N(0, \sigma_z)$$

$$W_1(z) \approx N(E_s, \sigma_z)$$



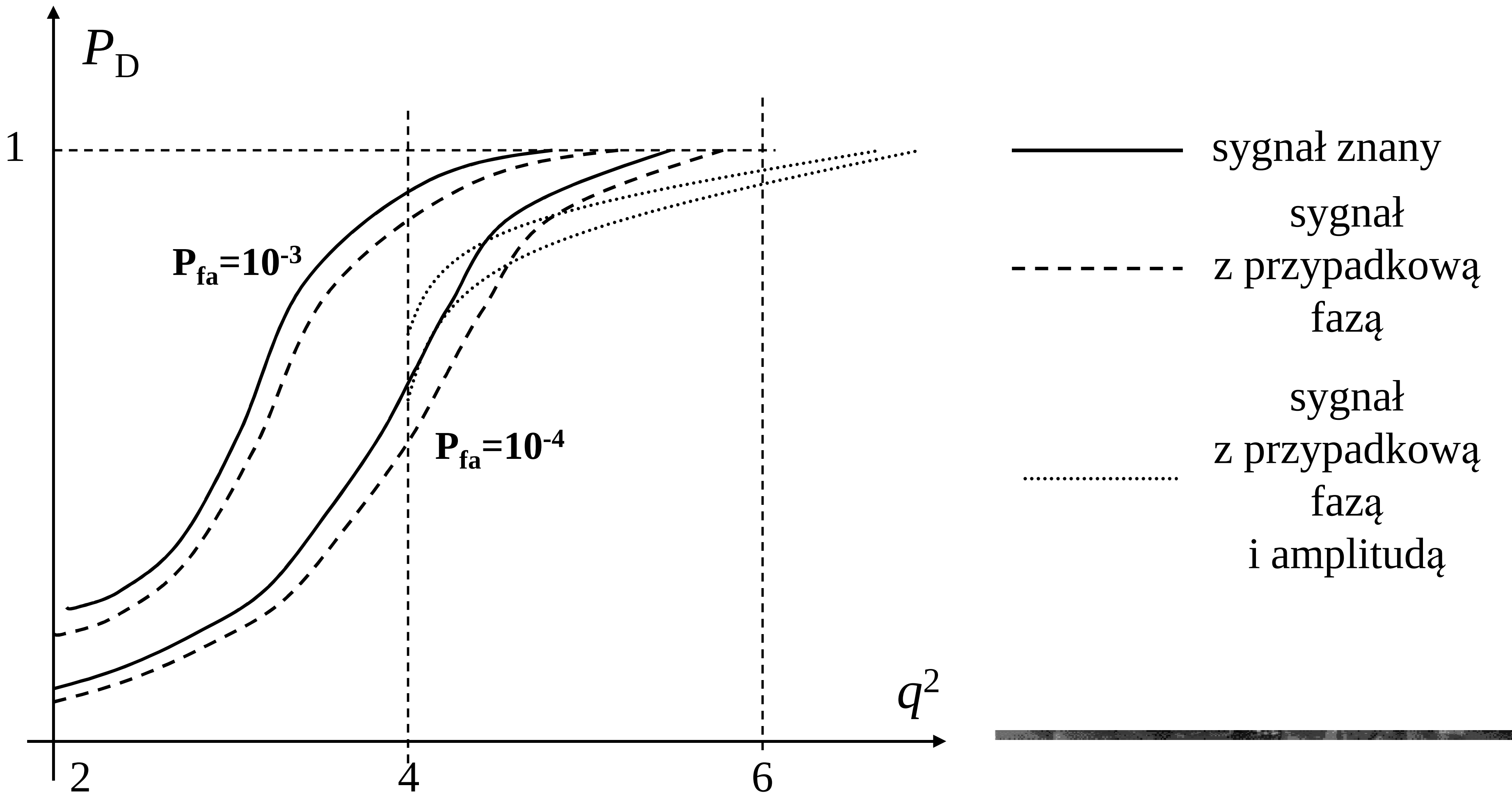
$$P_{fs} = P(A_0^* / A_1) = \int_{-\infty}^{Z_0} W_1(z)dz$$

$$P_{fa} = P(A_1^* / A_0) = \int_{Z_0}^{\infty} W_0(z)dz$$

$$P_D = P(A_1^* / A_1) = \int_{Z_0}^{\infty} W_1(z)dz$$

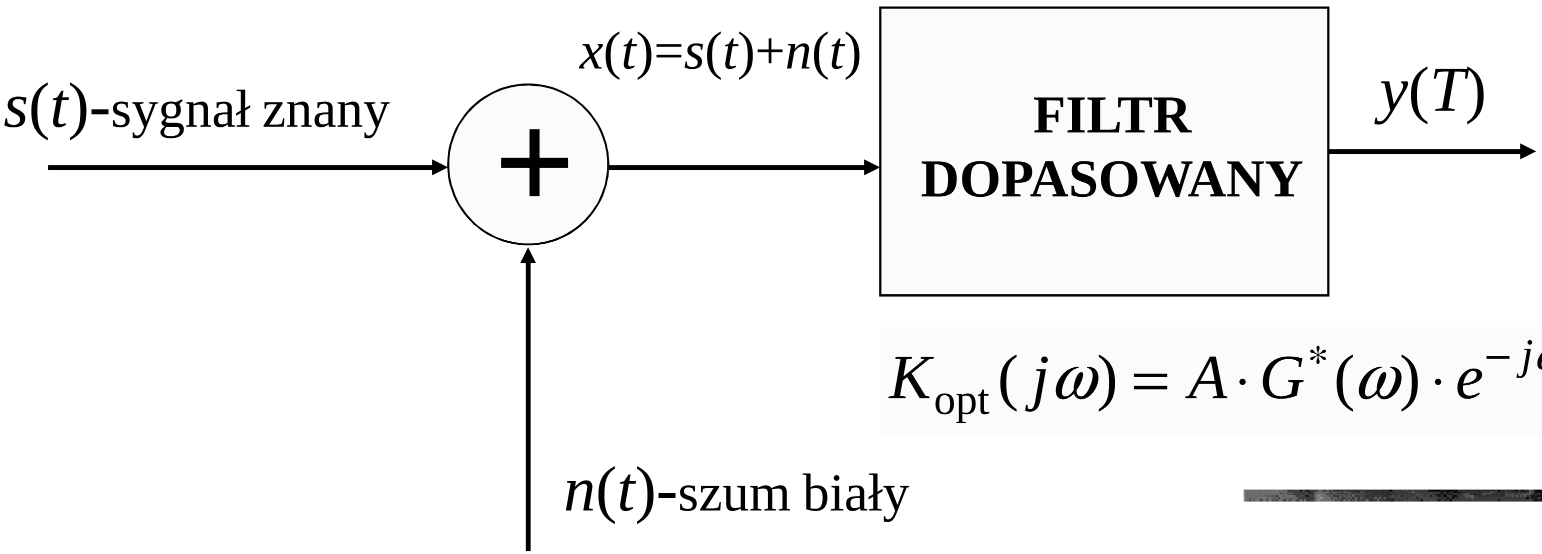
Charakterystyki wykrywania sygnału całkowicie znanego

$$P_D, P_{fa}, q$$



Odbiornik z filtrem dopasowanym

Na podstawie sygnału odebranego, który jest sumą sygnału użytecznego i szumu, należy w „sposób optymalny” wydobyć nadaną wiadomość. Optymalność należy rozumieć w sensie określonego z góry kryterium.



$$K_{\mathrm{opt}}(j\omega) = A \cdot G^{*}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

Odbiornik z filtrem dopasowanym

Tłumienie składowych widma szumów połączone z kompensacją faz początkowych składowych widma sygnału powoduje, że filtr optymalny zapewnia największy stosunek sygnału do szumu spośród wszystkich innych filtrów.

Sygnał na wyjściu filtru optymalnego jest splotem funkcji opisującej sygnał wejściowy i odpowiedź impulsową.

$$S_{\mathrm{wyj}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t-\tau) \cdot h(\tau)\, d\tau$$

Odbiornik z filtrem dopasowanym

Dla filtru dopasowanego do sygnału odpowiedź impulsowa filtru optymalnego wynosi:

$$h_{\mathrm{opt}}(t) = A \cdot S(t_0 - t)$$

Stosunek sygnał/szum na wyjściu filtru optymalnego jest proporcjonalny do energii sygnału i odwrotnie proporcjonalny do widmowej gęstości mocy szumów. Nie zależy od kształtu sygnału, ani rodzaju modulacji.

$$q_{\mathrm{wyj}} = \frac{S_{\mathrm{wyj}}(t_0)}{\sigma_{n\,\mathrm{wyj}}} = \frac{A \cdot E}{A \cdot \sqrt{NE}} = \sqrt{\frac{E}{N}} = \sqrt{\frac{2E}{N_o}}$$

DZIĘKUJĘ
ZA UWAGĘ