Wykład 7

Minory .

Definicja 7.1 *Minor stopnia k macierzy A o m wierszach i n kolumnach, tak że* $k \leq min(m, n)$ *to wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k powstałej z macierzy A przez skreślenie (m-k) wierszy i (n-k) kolumn. Minorami stopnia k=1 są komórki macierzy.*

Twierdzenie 7.2 .
Rząd macierzy jest równy stopniowi największego niezerowego minora.

Twierdzenie 7.3 *Niech* $A \in K_n^n$ *będzie kwadratową macierzą stopnia n. Wówczas równoważne są warunki:*
1) Macierz A jest odwracalna.
2) $rz(A) = n$.
3) $Det(A) \neq 0$

Przestrzenie euklidesowe

Struktura przestrzeni liniowej mimo 8 aksjomatów + 9 aksjomatów ciała jest zbyt uboga by wprowadzać na niej geometrię. Dla tego nad ciałem liczb rzeczywistych wprowadzamy dodatkowe działanie zwane iloczynem skalarnym.

Definicja 7.4 *Iloczynem skalarnym (standardowym) w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy funkcję* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *określoną wzorem: Dla wektorów* $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *i* $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *wzorem na iloczyn skalarny jest:*
$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \cdot \beta^T = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

Przestrzeń liniową $\mathbb{R}^n$ *z określonym w niej iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią euklidesową i oznaczamy symbolem* E^n.

Twierdzenie 7.5 *Dla wszystkich* $v, v', w \in \mathbb{R}^n$ *i* $t \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*
1. (symetryczność) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
2. (liniowość na pierwszej współrzędnej)
$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ *i* $\langle tv, w \rangle = t\langle v, w \rangle$
3. (dodatnia określoność) $\langle v, v \rangle > 0$ *dla* $v \neq 0$.

Zwróćmy uwagę, że z uwagi na symetryczność, liniowość iloczynu skalarnego na pierwszej współrzędnej implikuje liniowość na drugiej współrzędnej:
2'. $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ i $\langle v, tw \rangle = t\langle v, w \rangle$.

Definicja 7.6 *Długość (normę) wektora* $v \in \mathbb{R}^n$ *definiujemy jako liczbę*
$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Twierdzenie 7.7 *Własności normy:*
0) $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$
1) (nierówność Cauchy'ego-Schwarza) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$
2) (nierówność Minkowskiego) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\||$
3) $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$

Dowód. 0). $\|tv\| = \sqrt{\langle tv, tv\rangle} = \sqrt{t^2\langle v, v\rangle} = |t|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |t| \cdot \|v\|$.

1) łatwo sprawdzić (1), gdy v, w są liniowo zależne wówczas w (1) mamy nawet =. Załóżmy więc, że v, w są liniowo niezależne. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(t) = \|v - tw\|^2.$$

Zauważmy, że skoro v, w są liniowo niezależne, funkcja f przyjmuje zawsze wartości dodatnie. Korzystając z liniowości iloczynu skalarnego na obu współrzędnych dostajemy

$$f(t) = \langle v - tw, v - tw\rangle = \langle v - tw, v\rangle + \langle v - tw, -tw\rangle =$$

$$\langle v, v\rangle + \langle -tw, v\rangle + \langle v, -tw\rangle + \langle -tw, -tw\rangle =$$

$$\|v\|^2 - 2t\langle v, w\rangle + t^2\|w\|^2 > 0$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Równanie $f(t) = 0$ jest więc równaniem kwadratowym o niewiadomej t, bez rozwiązań rzeczywistych. Dlatego wyróżnik tego równania jest ujemny.

$$\Delta = 4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$$

Stąd natychmiast dostajemy nierówność Schwarza.

2) Korzystając z (1) dostajemy

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle \leq$$

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

3) wynika z (2).

Czasem wygodniej jest na elementy $\mathbb{R}^n$ patrzeć jak na punkty zaś wektory określać jako: $\overrightarrow{p, q} = q - p$. Chcemy by po przesunięciu punktu p o wektor $\overrightarrow{p, q}$ otrzymać punkt q czyli $p + \overrightarrow{p, q} = p$.

Definicja 7.8 *W przestrzeni euklidesowej definiujemy odległość* $d(v, w)$ *między punktami (wektorami)* $v, w \in E^n$ *wzorem*

$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Z nierówności Minkowskiego otrzymujemy łatwo nierówność trójkąta :

$$d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$$

dla wszystkich $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Na mocy nierówności Schwarza, dla wszystkich niezerowych wektorów $v, w \in E^n$ mamy

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Dlatego możemy zdefiniować kąt (nieskierowany) między wektorami.

Definicja 7.9 *Cosinusem kąta między niezerowymi wektorami v, w nazywamy jedyną liczbę $\alpha \in [0, \pi]$ taką, że*

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

W dalszym ciągu będziemy zajmować się przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$. Podobnie jak w przypadku przestrzeni E^n przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 7.10 *Równoległościanem $W \in \mathbb{E}^n$ rozpiętym na wektorach $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ i zaczepionym w punkcie A nazywamy zbiór*
$W = \{A + \sum_{i=1}^{t} r_i\alpha_i \mid \forall_i\ 0 \leq r_i \leq 1\}$.

Definicja 7.11 *Objętością t wymiarową równoległościanu rozpiętego na wektorach $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ nazywamy liczbę* $\sqrt{det \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \langle w_1, w_2\rangle & \cdots & \langle w_1, w_t\rangle \\ \langle w_2, w_1\rangle & \langle w_2, w_2\rangle & \cdots & \langle w_2, w_t\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_t, w_1\rangle & \langle w_t, w_2\rangle & \cdots & \langle w_t, w_t\rangle \end{bmatrix}}$

zwaną wyznacznikiem Grama.

Przykład 7.12 *Badamy trójkąt o wierzchołkach: $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 4)$ i $C = (-2, 2, -1)$.*

a) Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) Znajdź kąt między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$,

c) Oblicz pole tego trójkąta.

ad a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 4, 4) - (1, 2, 3) = (2, 2, 1)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle(2, 2, 1), (2, 2, 1)\rangle} = \sqrt{4 + 4 + 1)\rangle} = 3.$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 2, -1) - (1, 2, 3) = (-3, 0, -4)$
$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\langle(-3, 0, -4), (-3, 0, -4)\rangle} = \sqrt{9 + 0 + 16)\rangle} = 5.$
ad b) $\cos(\angle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\langle(2,2,1),(-3,0,-4)\rangle}{\|(2,2,1)\| \cdot \|(-3,0,-4)\|} = \frac{-6+0-4}{3 \cdot 5} = \frac{-2}{3}$

ad c) Pole $S = \frac{1}{2}\sqrt{det \begin{bmatrix} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle \end{bmatrix}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{det \begin{bmatrix} \langle (2,2,1),(2,2,1) \rangle & \langle (2,2,1),(-3,0,-4) \rangle \\ \langle (-3,0,-4),(2,2,1) \rangle & \langle (-3,0,-4),(-3,0,-4) \rangle \end{bmatrix}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{det \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{225-100} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$