Wstęp do inteligencji komputerowej – zajęcia nr 9
Systemy rozmyte cz. 1.

Jarosław Stańczak
WSISiZ

Zbiory rozmyte, liczby rozmyte, logika rozmyta:

- podstawy i zastosowania w sztucznej inteligencji
- sterowanie rozmyte
- przykład zastosowania.

Logika wielowartościowa

Klasyczna logika dwuwartościowa nie zawsze może być wykorzystana do wnioskowania w świecie informacji niepewnej, niepełnej i niedookreślonej. Bardzo często pewne pojęcia, opisujące świat, fakty, zdarzenia, relacje również nie są ostre. Oznacza to, że do opisu realnego świata potrzebne są metody wnioskowania oparte na bardziej złożonym obrazie świata, w którym fakty mogą być prawdziwe lub fałszywe do pewnego stopnia lub też nie zachodzi prawo wyłączonego środka ($p \vee \neg p$). Tego typu właściwości mogą mieć logiki wielowartościowe, a logika rozmyta jest jedną z nich, dodatkowo przejście od prawdy do fałszu jest płynne od 0 do 1 ze wszystkimi możliwymi stanami pośrednimi.

Logika rozmyta a zbiory rozmyte

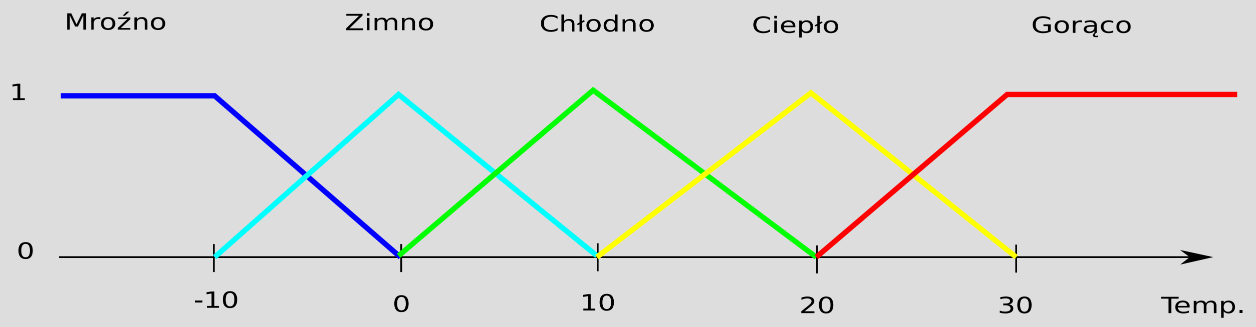
Logika rozmyta bazuje na pojęciu **zbioru rozmytego,** wprowadzonego przez Lotfiego Zadeha. W klasycznej definicji zbioru **funkcja charakterystyczna** ($\varphi_A(x)$) jego elementów ma wartość 0, gdy element do niego nie należy, i 1, gdy należy. Dla zbioru rozmytego ta funkcja charakterystyczna zastępowana jest tzw. **funkcją przynależności** ($\mu_A(x)$), która jest płynna i elementy mogą do takiego zbioru należeć z wartością funkcji przynależności od 0 do 1. Takie podejście daje możliwość opisu zjawisk o nieprecyzyjnie określonych granicach.

Logika rozmyta a zbiory rozmyte

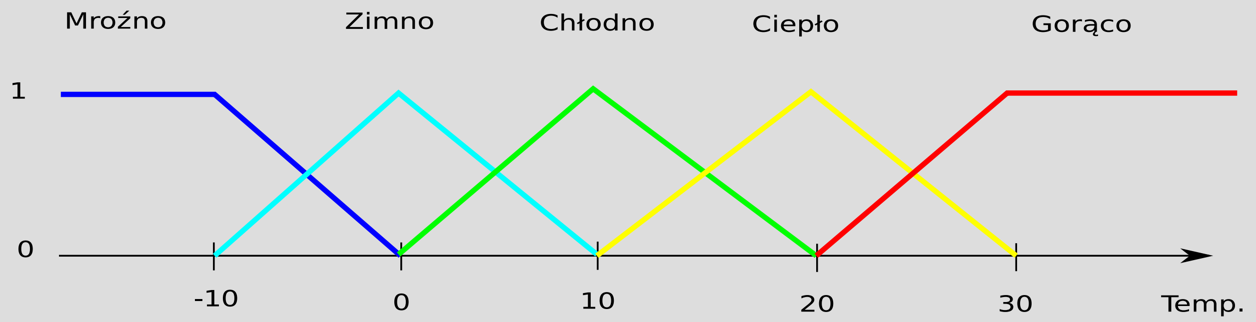
Podobnie w logice rozmytej - fakty nie muszą być jednoznacznie określane jako prawdziwe lub fałszywe, lecz może im być przypisywana dowolna wartość z przedziału $\langle 0,1 \rangle$. Oznacza to to, że ten sam fakt jest jednocześnie prawdziwy i fałszywy w pewnym stopniu.

Przykłady zbiorów rozmytych

Przykład przynależności zakresów temperatur do zbiorów rozmytych:
„Mroźno”, „Zimno”, „Chłodno”, „Ciepło” i „Gorąco”.



Przykłady zbiorów rozmytych



Pojęcie „temperatura” staje się tu tzw. zmienną lingwistyczną, która przyjmuje wartości: „mroźno”, „zimno”, „chłodno”, „ciepło”, „gorąco”. Wartości tej zmiennej są zbiorami rozmytymi, opisanymi przedstawionymi na rysunku funkcjami przynależności.
Opis ten jest dość subiektywny i mógłby się zasadniczo różnić, gdyby go dokonał mieszkaniec tropików lub mieszkaniec Arktyki.

Definicja zbioru rozmytego typu 1

Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni $\mathbf{X}$ nazywamy zbiór par

$$A=\{(x, \mu_A(\mathrm{x})); x \in \mathbf{X}\}$$

w którym:

$$\mu_A\colon \mathbf{X} \to \langle 0, 1 \rangle$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A, przyporządkowującą każdemu elementowi $x \in \mathbf{X}$ jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.

Funkcje przynależności do zbioru rozmytego

Nie ma narzuconego kształtu tych funkcji, a jedynie ogólne właściwości: 0 – brak przynależności, 1 – pełna przynależność i możliwość przyjmowania dowolnych wartości między 0 a 1.

Funkcja przynależności musi jednakże spełniać następujące warunki: **monotoniczności –** im bardziej dany element "pasuje" do zbioru, tym większą wartość przyporządkowuje mu funkcja przynależności, i **symetrii** – elementy w równym stopniu spełniające kryteria przynależności do zbioru rozmytego muszą mieć takie same wartości funkcji przynależności.

Funkcje przynależności do zbioru rozmytego

Najczęściej stosuje się kształt trójkątny, trapezoidalny, czasem prostokątny (brak rozmycia) lub tzw. singletony rozmyte, czyli „słupki” o wysokości równej wartości przynależności.
W wyborze postaci funkcji przynależności duże znaczenie ma tu prostota, łatwość zapisu i przeprowadzania obliczeń. Oczywiście funkcje przynależności do zbioru rozmytego mogą się składać również z fragmentów innych krzywych (np. paraboli), krzywej Gaussa, itp.
Zazwyczaj wartości funkcji przynależności dla danego elementu, gdy należy do wielu zbiorów rozmytych, sumują się do 1, ale nie jest to warunek konieczny.

Funkcje przynależności do zbiorów: klasycznego i rozmytego

Wariant dla zbioru klasycznego:

$$\underset{x \in X}{\forall} \mu_A(x) = \begin{cases} 1 \ dla \ x \in A \\ 0 \ dla \ x \notin A \end{cases}$$

Wariant dla zbioru rozmytego:

$$\underset{x \in X}{\forall} \mu_A(x) = \begin{cases} (0,1\rangle \ dla \ x \in A \\ 0 \ dla \ x \notin A \end{cases}$$

Przynależność elementu *x* do zbioru

Definicja przynależności elementu do zbioru rozmytego wynika bezpośrednio z definicji funkcji przynależności:

$$x \in A \Leftrightarrow \mu_A(x) > 0$$

Operacje na zbiorach rozmytych

Na zbiorach rozmytych można przeprowadzać operacje analogiczne do zbiorów klasycznych: $\cap$ (iloczyn), $\cup$ (suma), ' (dopełnienie zbioru, bywają tu różne oznaczenia: –, $\neg$, $\overline{}$).

Najczęściej operacje te są definiowane przez działania na funkcji przynależności do zbioru $\mu_A(x)$. Dodatkowo wprowadza się tu pojęcia *s*-normy i *t*-normy, które są uogólnieniami odpowiednio sumy i iloczynu zbiorów.

Operacje na zbiorach rozmytych iloczyn zbiorów (*t*-norma)

różne wersje

Operator	Wzór
minimum	$\mu_{A\cap B}(x)=MIN(\mu_A(x),\mu_B(x))$
iloczyn	$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)*\mu_B(x)$
iloczyn Hamachera	$\mu_{A\cap B}(x)=\frac{\mu_A(x)*\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)*\mu_B(x)}$
iloczyn Einsteina	$\mu_{A\cap B}(x)=\frac{\mu_A(x)*\mu_B(x)}{2-(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)*\mu_B(x))}$
iloczyn drastyczny	$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases} MIN(\mu_A(x),\mu_B(x))\ dla\ MAX(\mu_A(x),\mu_B(x))=1 \\ 0 \text{ dla pozostałych} \end{cases}$
ograniczona różnica	$\mu_{A\cap B}(x)=MAX(0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1)$

Operacje na zbiorach rozmytych suma zbiorów (s-norma)

różne wersje

Operator	Wzór
maximum	$\mu_{A\cup B}(x)=MAX(\mu_A(x),\mu_B(x))$
suma	$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)*\mu_B(x)$
suma Hamachera	$\mu_{A\cup B}(x)=\dfrac{\mu_A(x)+\mu_B(x)-2*\mu_A(x)*\mu_B(x)}{1-\mu_A(x)*\mu_B(x)}$
suma Einsteina	$\mu_{A\cup B}(x)=\dfrac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{1+\mu_A(x)*\mu_B(x)}$
suma drastyczna	$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases} MAX(\mu_A(x),\mu_B(x)) \ dla \ MIN(\mu_A(x),\mu_B(x))=0 \\ 1 \ \text{dla pozostałych} \end{cases}$
ograniczona suma	$\mu_{A\cup B}(x)=MIN(1,\mu_A(x)+\mu_B(x))$

Operacje na zbiorach rozmytych
suma i różnica - ćwiczenie

Element *x* należy do zbiorów rozmytych A i B. Obliczyć wartości funkcji przynależności tego elementu do zbiorów $A \cap B$ oraz $A \cup B$ używając różnych definicji operatorów sumy i iloczynu zbiorów.

$$\mu_A(x) = 0,5 \qquad \mu_B(x) = 0,4$$

Operacje na zbiorach rozmytych negacja

dwie wersje, równoważne dla zbiorów o ograniczonym nośniku

Negację w zbiorach rozmytych można uzyskać, stosując wzór:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

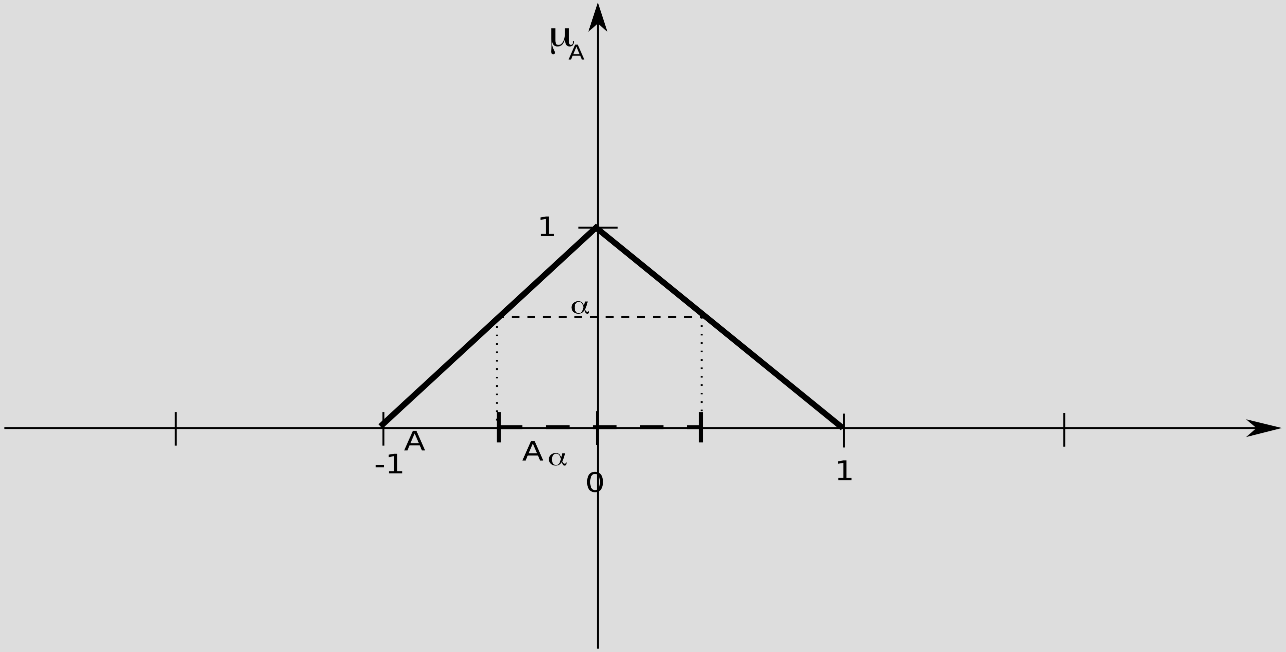
lub też jeśli nośnik zbioru jest ograniczony (np. A={1, 2, 3, ... , K}) to:

$$\mu_{\neg A}(x) = \mu_A(K - x)$$

Operacje na zbiorach rozmytych
α-cięcie

α-cięcie (α-przekrój) zbioru rozmytego A:

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X}\mathbf{:}\ \mu_A(x)) > \alpha\}$$



Operacje na zbiorach rozmytych zawieranie i równość zbiorów

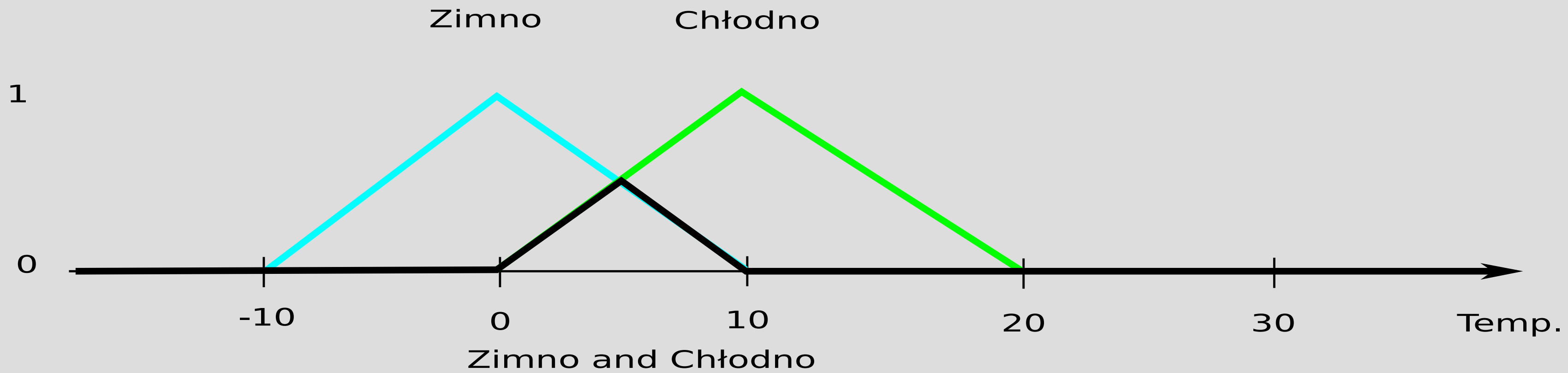
Zawieranie zbiorów rozmytych można zdefiniować następująco:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$$

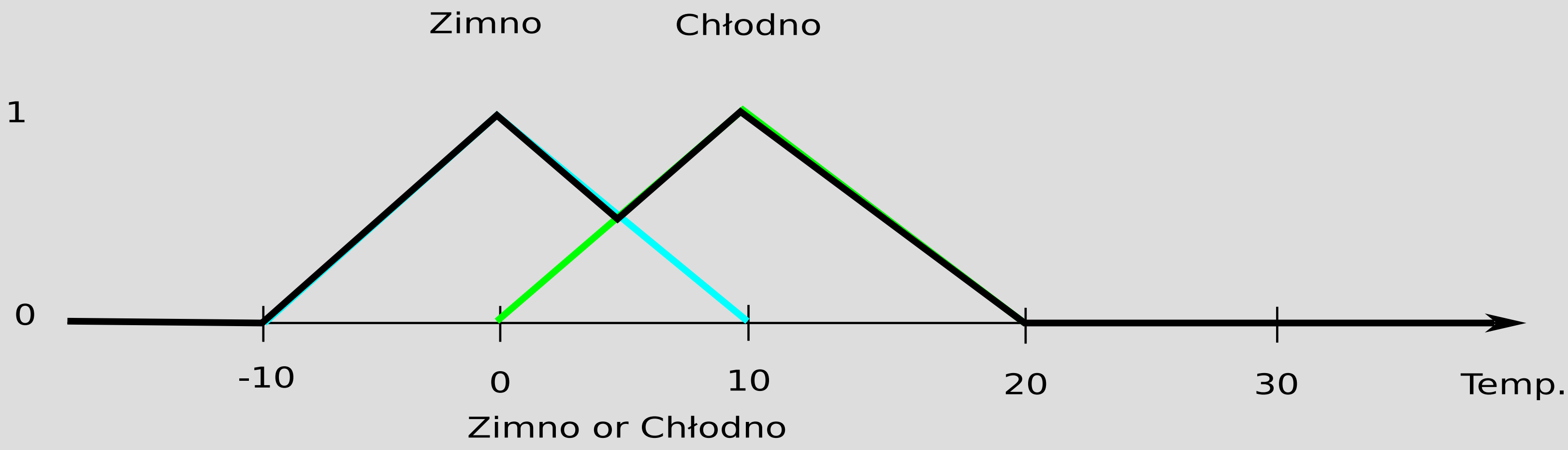
Równość zbiorów rozmytych można zaś zapisać jako:

$$A = B \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

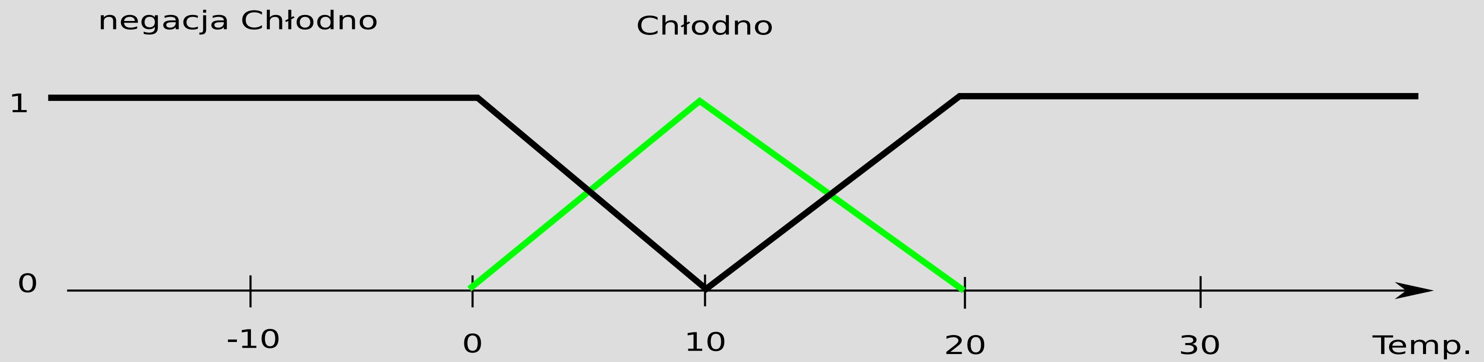
Operacje na zbiorach rozmytych przykład działania *t*-normy MIN



Operacje na zbiorach rozmytych przykład działania *s*-normy MAX

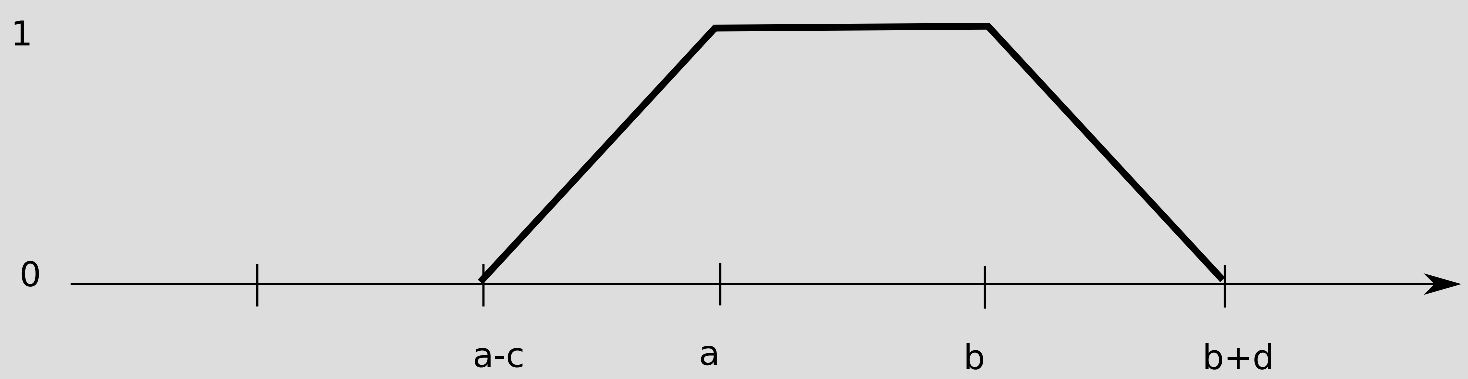


Operacje na zbiorach rozmytych przykład działania dopełnienia (negacji) zbioru rozmytego



Liczby rozmyte

Rozszerzając nieco pojęcie zbioru rozmytego, można wprowadzić pojęcie liczb rozmytych, czyli reprezentujących je zbiorów rozmytych, zapisanych jako czwórki liczb (a,b,c,d), określających funkcję przynależności do takiej liczby. W opisie takim mieści się też liczba rozmyta będąca singletonem rozmytym (a,a,0,0).



Liczby rozmyte i działania na nich

- dodawanie

$$\mu_{A+B}(z) = \underset{x+y=z}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

- odejmowanie

$$\mu_{A-B}(z) = \underset{x-y=z}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

- mnożenie

$$\mu_{A*B}(z) = \underset{x*y=z}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

- dzielenie

$$\mu_{A/B}(z) = \underset{x/y=z,\, y\neq 0}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

- liczba przeciwna

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$$

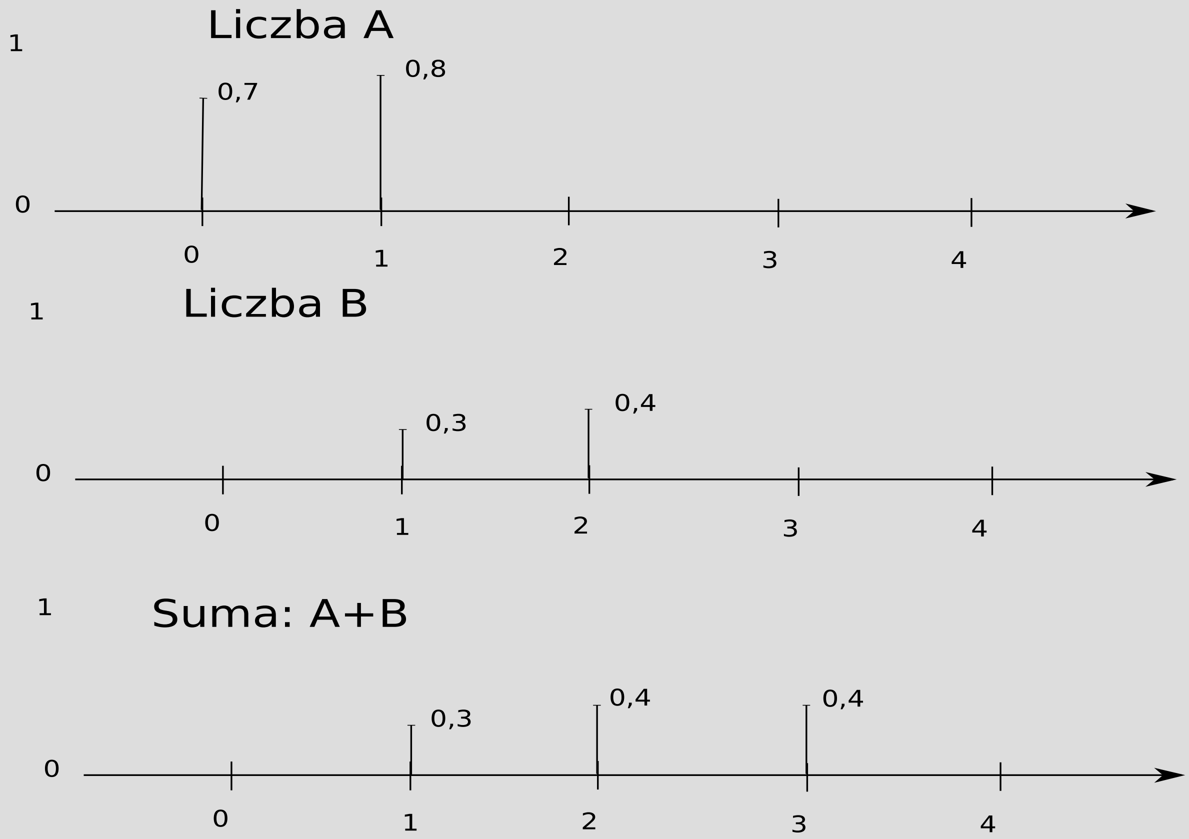
- liczba odwrotna

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(1/x),\ x \neq 0$$

Liczby rozmyte i działania na nich

przykład dodawania

$$\mu_{A+B}(z) = \underset{x+y=z}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$



Liczby rozmyte i działania na nich

przykład dodawania

$$\mu_{A+B}(z) = \underset{x+y=z}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

A=0,7/0+0,8/1; B=0,3/1+0,4/2; $\wedge$ - operacja MIN(...)

1) x+y=1: (0+1) $\mu_{A+B}(1)=MAX(0,7 \wedge 0,3)=0,3$

2) x+y=2: (0+2,1+1) $\mu_{A+B}(2)=MAX(0,7 \wedge 0,4; 0,8 \wedge 0,3)=MAX(0,4; 0,3)=0,4$

3) x+y=3: (1+2) $\mu_{A+B}(3)=MAX(0,8 \wedge 0,4)=0,4$

A+B=0,3/1+0,4/2+0,4/3

Liczby rozmyte i działania na nich

przykład dodawania

$$\mu_{A+B}(z) = \underset{x+y=z}{MAX}\left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)$$

A=0,7/0+0,8/1; B=0,3/1+0,4/2; $\wedge$ - operacja MIN(...)

1) x+y=1: (0+1) $\mu_{A+B}(1)=MAX(0,7 \wedge 0,3)=0,3$

2) x+y=2: (0+2,1+1) $\mu_{A+B}(2)=MAX(0,7 \wedge 0,4;\ 0,8 \wedge 0,3)=MAX(0,4;\ 0,3)=0,4$

3) x+y=3: (1+2) $\mu_{A+B}(3)=MAX(0,8 \wedge 0,4)=0,4$

A+B=0,3/1+0,4/2+0,4/3

Ćwiczenie na zajęciach – proszę policzyć różnicę, iloczyn i iloraz liczb rozmytych A i B.

Zasada rozszerzania

Zasada rozszerzania umożliwia dość łatwe rozszerzanie w zasadzie dowolnych operacji matematycznych na zbiory i liczby rozmyte.

Jeśli f jest pewnym nierozmytym i wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem przestrzeni **X** w przestrzeń **Y**, $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ i A jest zbiorem rozmytym $A \subseteq \mathbf{X}$ to zbiór rozmyty B indukowany przez to odwzorowanie ma postać

$B=f(A)=\{(y, \mu_B(y)) \mid y=f(x), x \in X\}$

gdzie

$$\mu_B(y)=\begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{gdy} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{gdy} \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Zasada rozszerzania

A w przypadku gdy **X** jest iloczynem kartezjańskim zbiorów X1×X2×...Xn w których są zdefiniowane $A_1 \subseteq \mathbf{X_1}$, $A_2 \subseteq \mathbf{X_2}$, ..., $A_n \subseteq \mathbf{X_n}$,to wtedy:

$$\mu_B(y)=\begin{cases} \sup\limits_{x_1,\ldots,x_n \in f^{-1}(y)} min\{\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n)\} & \text{gdy} \quad f^{-1}(y)\neq\emptyset \\ 0 \quad \text{gdy} \quad f^{-1}(y)=\emptyset \end{cases}$$

I tak matematycznie można zapisać to, co wykonywaliśmy licząc sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb rozmytych (czyli zbiorów rozmytych) A i B.

Defuzyfikacja zbiorów rozmytych

Używane w wielu zastosowaniach (np. sterownikach rozmytych) zbiory, liczby lub reguły rozmyte muszą w końcu zostać użyte do interakcji z rzeczywistym, nierozmytym obiektem.

Jak to zrobić?

Odpowiedzią jest defuzyfikacja, czyli „wyostrzenie” - zmiana wartości rozmytej w najlepiej odpowiadającą jej wartość nierozmytą. Istnieją różne metody przeprowadzania tej operacji.

Defuzyfikacja zbiorów rozmytych metoda „środka ciężkości”

Metoda „środka ciężkości” jest chyba najpowszechniej stosowaną, choć nie jedyną, metodą defuzyfikacji. Można ją zapisać w wersji dyskretnej postaci następującego wzoru:

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i * \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)}$$

Jej nazwa wywodzi się z podobieństwa do fizycznego wzoru na obliczanie środka ciężkości ciała (w tym wypadku w przestrzeni dwuwymiarowej). W przypadku ciągłym wzór przedstawia się następująco:

$$a=\frac{\int_{x=x_p}^{x_k} x * \mu_A(x)\,dx}{\int_{x=x_p}^{x_k} \mu_A(x)\,dx}$$

Defuzyfikacja zbiorów rozmytych metoda maksimum

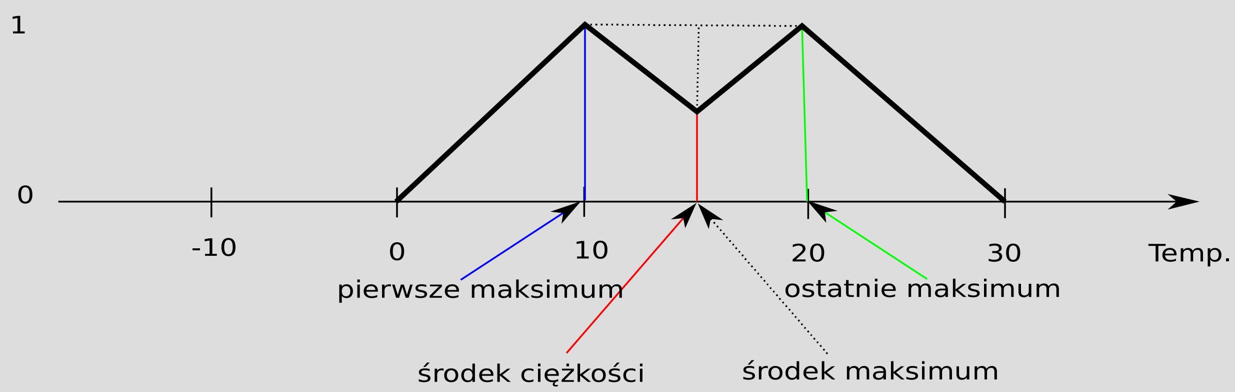
Metoda maksimum (największej wartości funkcji przynależności) jest znacznie prostsza od poprzedniej:

$$a = \sup_{x \in D} \mu(x)$$

Jednakże istnieją różne jej warianty, które mają znaczenie, gdy funkcja przynależności ma więcej niż jedno maksimum:

- metoda pierwszego maksimum
- metoda środka maksimum (środek odległości między maksimami pierwszym i ostatnim)
- metoda ostatniego maksimum.

Defuzyfikacja zbiorów rozmytych metodami maksimum i „środka ciężkości”

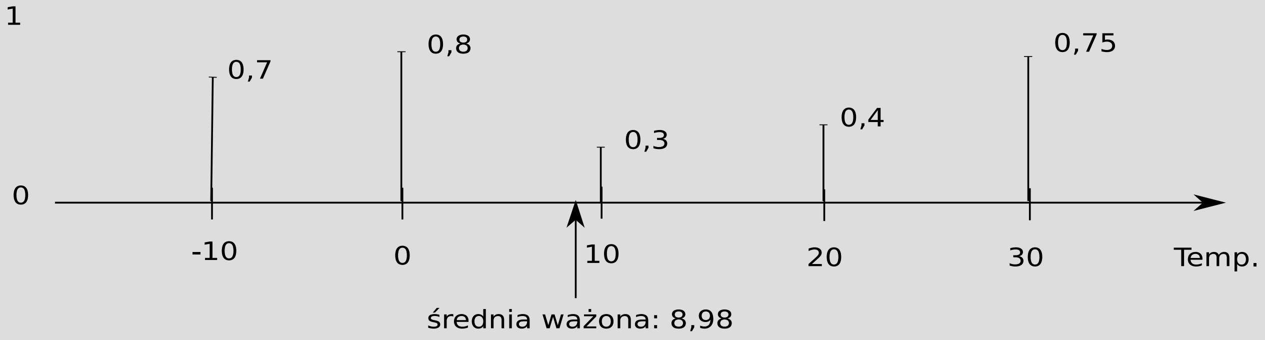


Defuzyfikacja zbiorów rozmytych metoda średnich ważonych

Metoda średnich ważonych przypomina nieco metodę „środka ciężkości” w wariancie dyskretnym (zbiór rozmyty składa się z tzw. singletonów rozmytych), gdyż ma zastosowanie właściwie tylko dla takiego przypadku; wagami są np. stopnie aktywacji reguł (jeśli wynik pochodzi z wnioskowania rozmytego):

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n} c*x_i*\mu_C}{\sum_{i=1}^{n} \mu_C}$$

Defuzyfikacja zbiorów rozmytych metoda średnich ważonych



Wnioskowanie rozmyte

Zbiory i liczby rozmyte stały się podstawą do tworzenia reguł rozmytych, które mogą być wykorzystywane do wnioskowania np. w systemach ekspertowych, sterowania i podejmowania decyzji. Okazuje się, że taki sposób przetwarzania informacji daje nowe, ciekawe możliwości, których pozbawione były analogiczne systemy bez rozmytości.

Wnioskowanie w logice rozmytej przeprowadzane jest zazwyczaj z wykorzystaniem dobrze znanych z logiki klasycznej (i wspominanych na jednym z poprzednich wykładów) reguł **modus ponens** i **modus tollens**, która prowadzi do powstania reguł decyzyjnych o postaci "jeśli ... wtedy..." (ang. if... then...). Wartości logiczne takich reguł mogą zawierać się w zakresie $\langle 0, 1 \rangle$, czyli zawsze są prawdziwe lub fałszywe tylko w jakimś stopniu. Przesłanki i konkluzje reguł opisują przynależność zmiennych decyzyjnych do określonych zbiorów rozmytych.

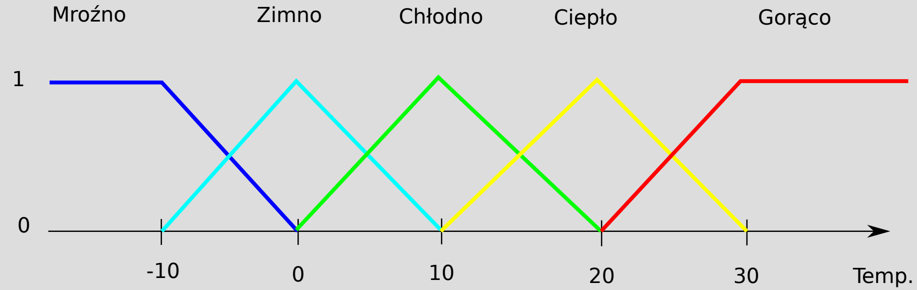
Wnioskowanie rozmyte

Przykładowa reguła może wyglądać następująco:

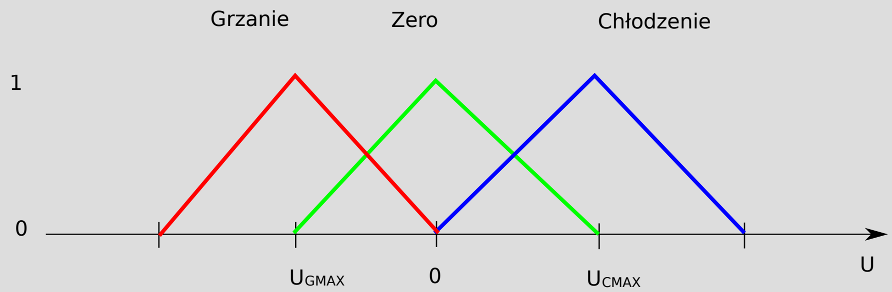
IF *x* is A AND *y* is B THEN *z* is C

Oczywiście A, B i C to zbiory rozmyte, *x* i *y* to zmienne „tradycyjne” – nierozmyte, *z* – jest zmienną rozmytą tzw. zmienną lingwistyczną. Aby reguła „odpaliła”, *x* i *y* muszą mieć niezerowe wartości funkcji przynależności. AND jest *t*-normą (np. przedstawianą wcześniej funkcją MIN), dzięki której otrzymamy **wagę reguły** *c* jako wynik działania *t*-normy na otrzymane wartości funkcji przynależności $\mu_A(x)$ i $\mu_B(y)$. Jeśli w danym momencie aktywnych jest więcej reguł, to one również są brane pod uwagę, a ich konkluzje są „sumowane” z wagami ich reguł *c* (najczęściej wynikowy zbiór rozmyty jest „przycinany” do wartości *c*) przy użyciu *s*-normy (np. funkcji MAX). Aby otrzymać konkretną, nierozmytą wartość wyjścia, otrzymane zbiory poddaje się defuzyfikacji.

Wnioskowanie rozmyte
przykład: sterowanie ogrzewaniem



Przedstawiany wcześniej zestaw zbiorów przesłanek reguł określających temperaturę



Zbiory określające możliwe sterowanie w konkluzji

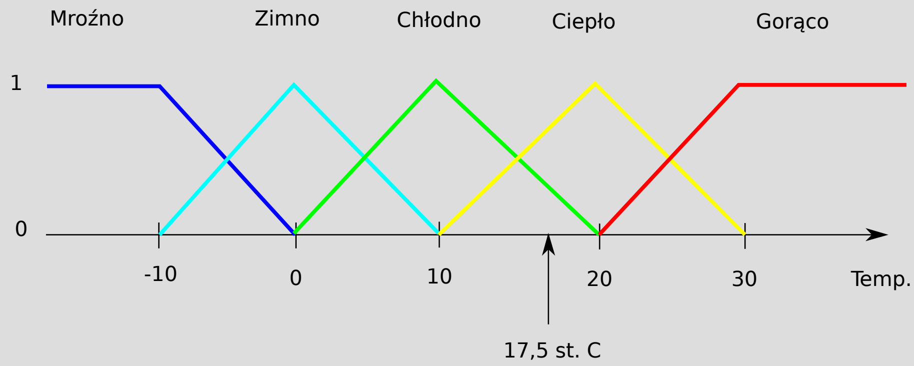
Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

R1: IF t is Mroźno THEN u is Grzanie
R2: IF t is Zimno THEN u is Grzanie
R3: IF t is Chłodno THEN u is Grzanie
R4: IF t is Ciepło THEN u is Zero
R5: IF t is Gorąco THEN u is Chłodzenie

Wnioskowanie rozmyte
przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

Załóżmy, że t=17,5 st. C



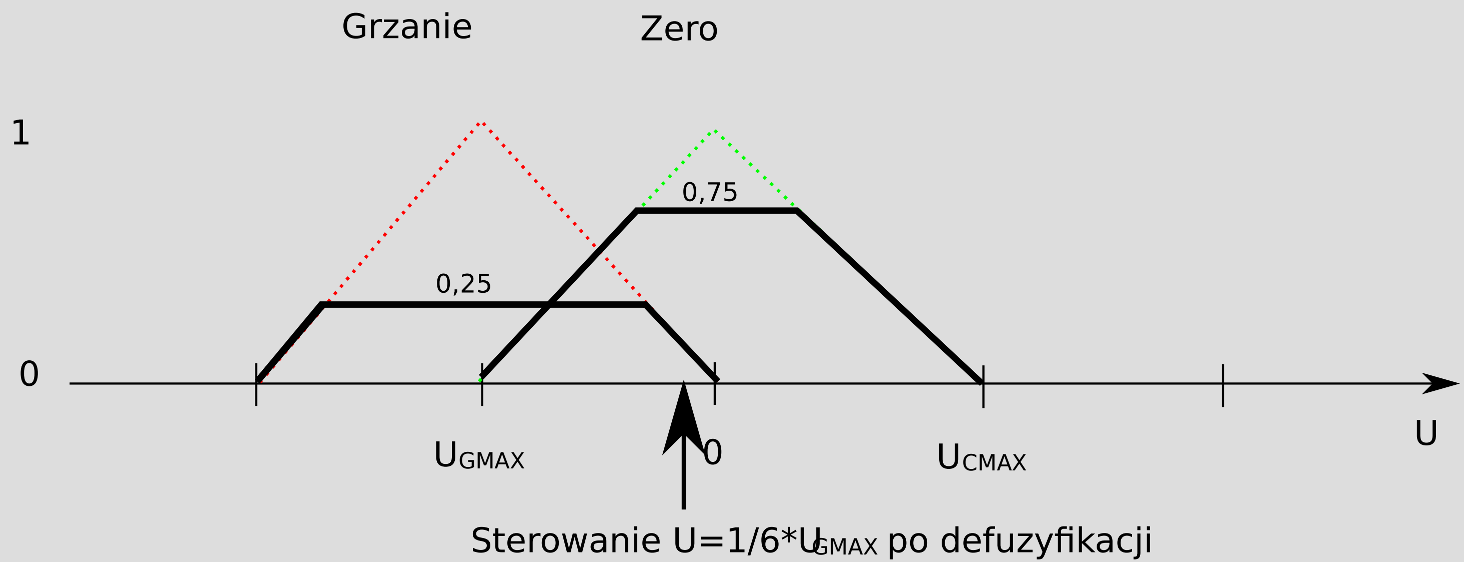
R1: IF t is Mroźno THEN u is Grzanie
R2: IF t is Zimno THEN u is Grzanie
R3: IF t is Chłodno THEN u is Grzanie
R4: IF t is Ciepło THEN u is Zero
R5: IF t is Gorąco THEN u is Chłodzenie

Aktywne są reguły R3 i R4 z odpowiednio
$\mu_{Chłodno}(t)=0{,}25$ i $\mu_{Ciepło}(t)=0{,}75$

Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

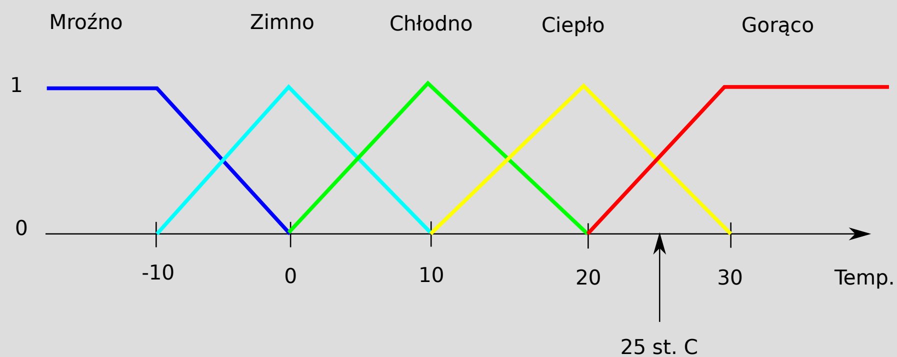
Otrzymujemy następujący zestaw konkluzji i po defuzyfikacji (metodą „środka ciężkości”) wynikające z niego sterowanie:



Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

Załóżmy, że t=25 st. C



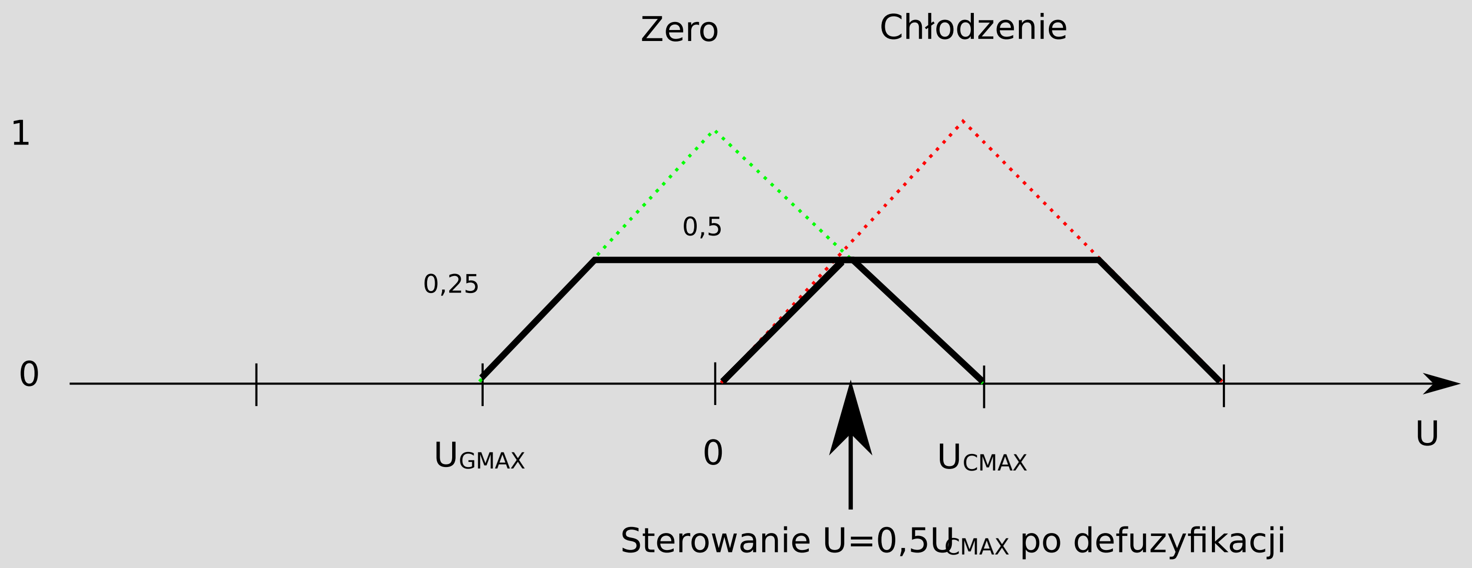
R1: IF t is Mroźno THEN u is Grzanie
R2: IF t is Zimno THEN u is Grzanie
R3: IF t is Chłodno THEN u is Grzanie
R4: IF t is Ciepło THEN u is Zero
R5: IF t is Gorąco THEN u is Chłodzenie

Teraz aktywne są reguły R4 i R5 z odpowiednio
$\mu_{\text{Ciepło}}(t)=0,5$ i $\mu_{\text{Gorąco}}(t)=0,5$

Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

Otrzymujemy następujący zestaw konkluzji i po defuzyfikacji (metodą „środka ciężkości”) wynikające z niego sterowanie:



Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

W wielu przypadkach stosuje się pewne „modyfikatory" reguł, mające regulować ich siłę. Są to dodatkowe określenia, takie jak: „silne", „bardzo", „mniej więcej", itp. Można im przyporządkować pewne funkcje modyfikujące działanie reguł, przez zmodyfikowanie funkcji przynależności do zbiorów rozmytych. I tak:

- „silnie", „silne" lub „bardzo" może oznaczać wzmocnienie pewnej cechy przez np. podniesienie funkcji przynależności do kwadratu – A'="silne" A, gdzie $\mu_{A'}(x) = \mu^2_A(x)$;
- „mniej więcej", „około" to zmniejszenie natężenia pewnej cechy np. przez pierwiastek - $\mu_{A'}(x) = \mu^{1/2}_A(x)$;

Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

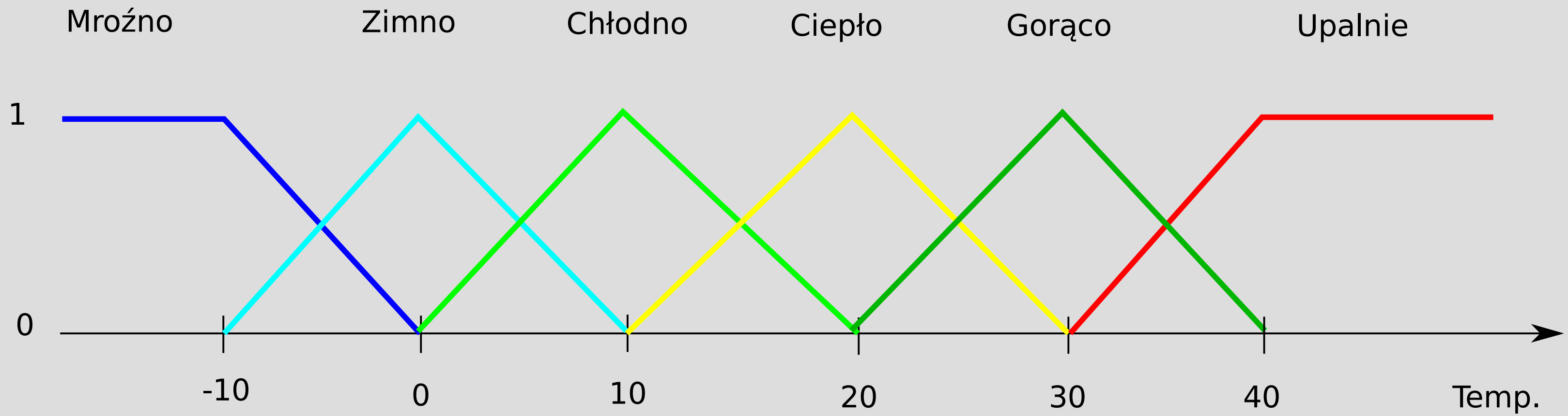
W takiej sytuacji zbiór reguł mógłby wyglądać następująco:

R1: IF t is Mroźno THEN u is „silne” Grzanie
R2: IF t is Zimno THEN u is Grzanie
R3: IF t is Chłodno THEN u is „mniej więcej” Grzanie
R4: IF t is Ciepło THEN u is Zero
R5: IF t is Gorąco THEN u is Chłodzenie
R6: IF t is Upalnie THEN u is „silne” Chłodzenie

Wnioskowanie rozmyte

przykład: sterowanie ogrzewaniem - prosty zestaw reguł

Dla zbiorów rozmytych określających temperatury:



i sterowania: