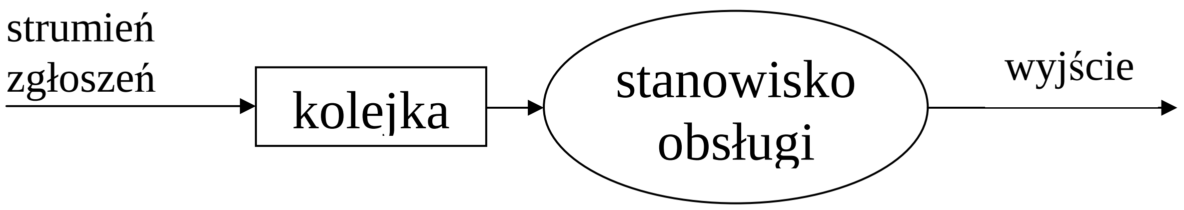
Systemy masowej obsługi

Najprostszy system obsługi



Zdarzenia

- pojawienie się zadania (zgłoszenia, klienta)
- zakończenie obsługi zadania

Fazy przebywania zadania w systemie

- oczekiwanie w kolejce na obsługę
- obsługa

Charakterystyki funkcjonowania systemu

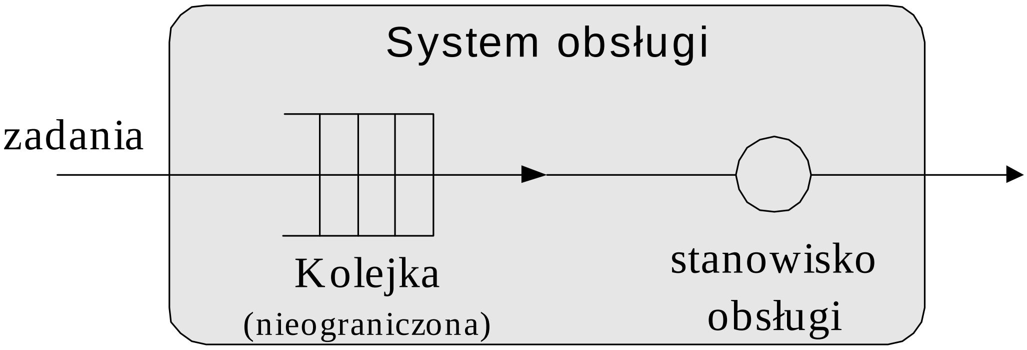
- L_q – średnia liczba zadań w kolejce
- W_q – średni czas oczekiwania na obsługę w kolejce
- L_s – średnia liczba zadań w systemie obsługi
- W_s – średni czas przepływu zadania (przebywania w systemie obsługi)
- U – średnie obciążenie stanowiska (stanowisk) obsługi

Dotyczą długookresowej oceny zachowania systemu i są definiowane jako wielkości uśrednione albo w czasie (L_q, L_s, U), albo względem liczby zadań (W_q, W_s)

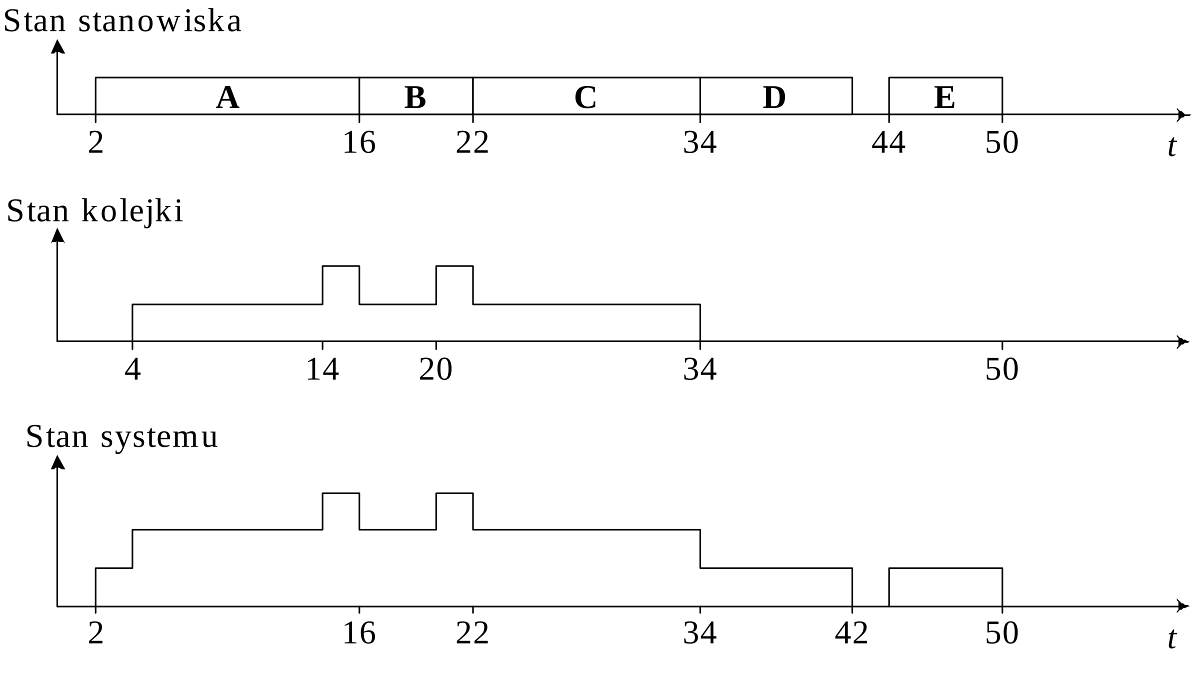
Sposoby wyznaczania tych charakterystyk:

- *obserwacja zachowania rzeczywistego systemu*
- na podstawie symulacji systemu
- wykorzystanie teorii masowej obsługi (wzory analityczne)

Przykład 1 – długość kolejki nieograniczona



zadanie	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
termin pojawienia się	2	4	14	20	44
czas obsługi	14	6	12	8	6

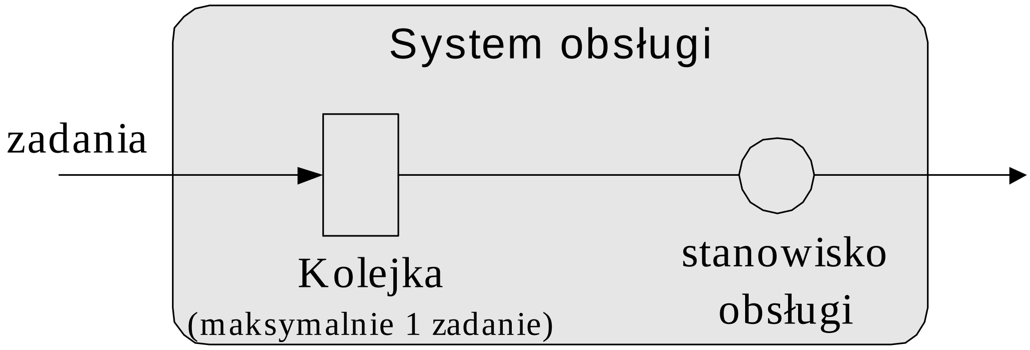


Charakterystyki (okres obserwacji T=50)

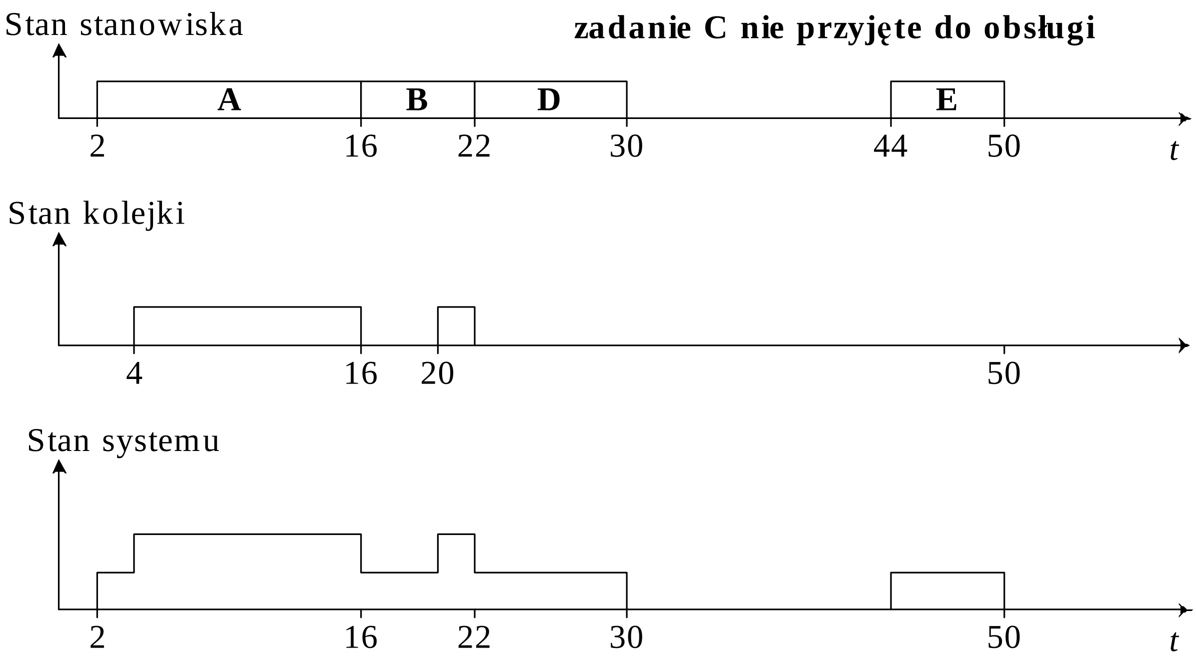
$$L_q = \frac{34}{50}, \quad W_q = \frac{34}{5} = 6\tfrac{4}{5}, \quad L_s = \frac{80}{50} = 1\tfrac{3}{5}, \quad W_s = \frac{80}{5} = 16, \quad U = \frac{46}{50}$$

średnia liczba zgłoszeń na jednostkę czasu – $\lambda = \frac{5}{50}$

Przykład 2 – maksymalnie jedno zadanie w kolejce



zadanie	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
termin pojawienia się	2	4	14	20	44
czas obsługi	14	6	12	8	6



Charakterystyki (okres obserwacji T=50)

$$L_q = \frac{14}{50}, \quad W_q = \frac{14}{4} = 3\tfrac{1}{2}, \quad L_s = \frac{48}{50}, \quad W_s = \frac{48}{4} = 12, \quad U = \frac{34}{50}$$

średnia liczba zadań przyjętych do obsługi na jedn. czasu – $\lambda^e = \frac{4}{50}$

Prawo Little'a

$$\boxed{L_q = \lambda^e \cdot W_q \qquad L_s = \lambda^e \cdot W_s}$$

λ^e – efektywna intensywność zgłoszeń
(liczba zadań **przyjętych** do systemu *na jednostkę czasu*)

W ogólnym przypadku

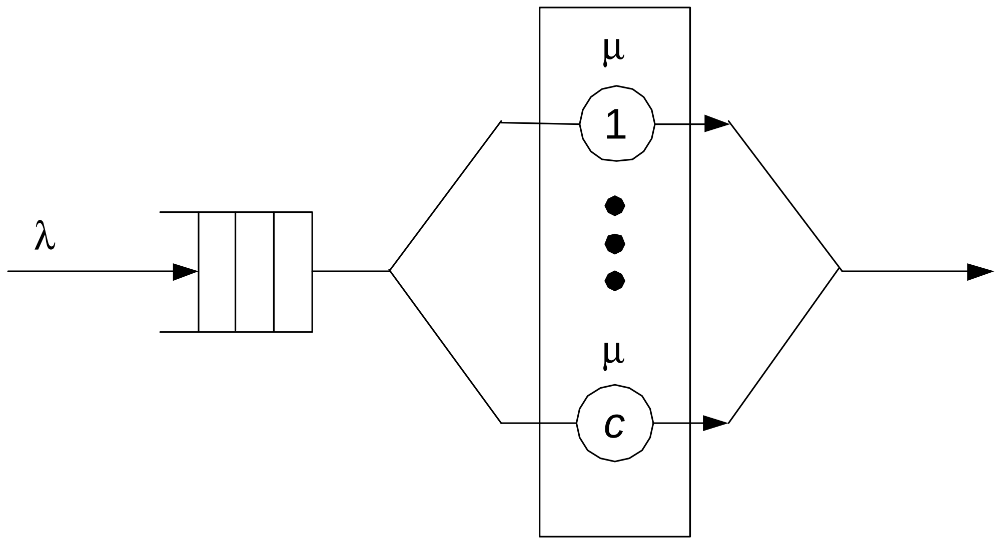
$\lambda^e = \lambda \cdot \beta$

gdzie

λ – intensywność napływających zgłoszeń

$0 < \beta \leq 1$

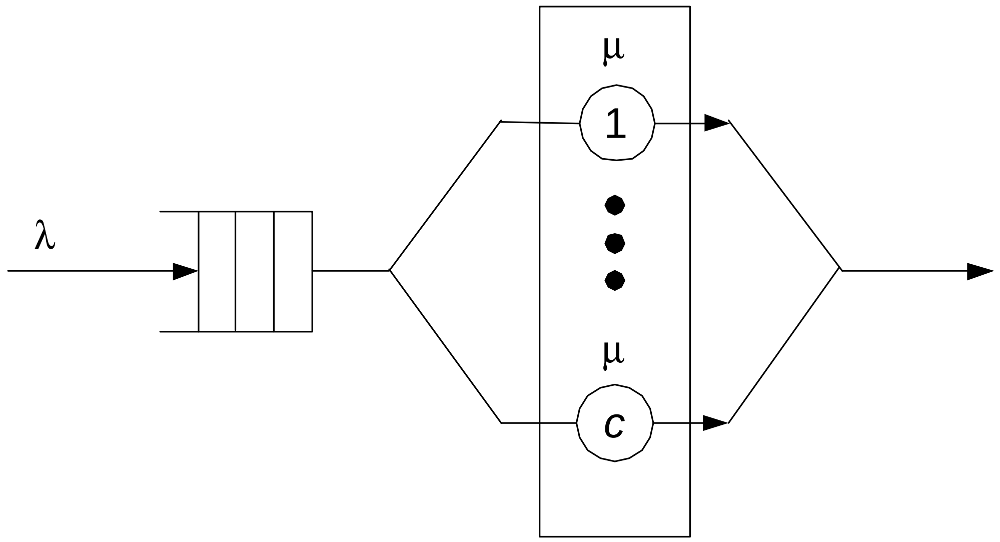
Losowe modele kolejek



Jednostopniowy system masowej obsługi jest charakteryzowany przez następujące parametry:

- rozkład przedziałów czasu pomiędzy chwilami zgłoszeń (wartość oczekiwana – $1/\lambda$)
- rozkład czasów obsługi na stanowiskach (wartość oczekiwana – $1/\mu$)
- liczba równoległych stanowisk obsługi – *c*
- dyscyplina obsługi (np. FIFO)
- pojemność systemu *N* – maksymalna liczba zadań w systemie

System ($M|M|c$)
Markowski model kolejki



- proces zgłoszeń losowy zgodny z rozkładem Poissona (przedziały czasu między kolejnymi zgłoszeniami – rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $1/\lambda$)
- czasy obsługi na stanowiskach losowe zgodne z rozkładem wykładniczym – wartość oczekiwana dla pojedynczego stanowiska $1/\mu$
- liczba równoległych, jednakowych stanowisk obsługi – c

Związki między rozkładem Poissona i rozkładem wykładniczym

Rozpatrzmy proces losowego pojawiania się zdarzeń (np. zgłoszeń obsługi) spełniający następujące założenia:

- prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia w przedziale czasu (t, $t+\Delta t$) zależy tylko od długości tego przedziału Δt (*brak pamięci*)
- prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia w dowolnie małym odcinku czasu większe od zera
- zdarzenia nie występują jednocześnie.

Wówczas

- prawdopodobieństwo zajścia n zdarzeń w przedziale czasu t ma rozkład Poissona

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

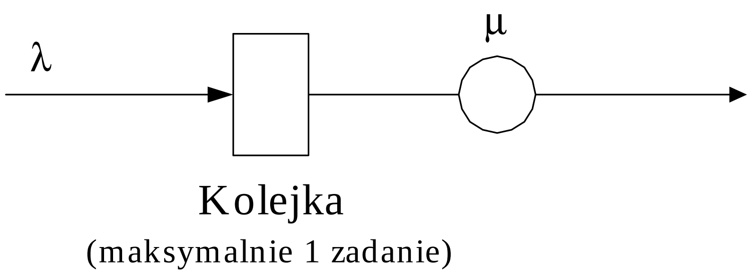
  gdzie λ – średnia intensywność zdarzeń na jednostkę czasu (wartość oczekiwana rozkładu Poissona jest równa λt)

- odstęp czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami ma rozkład wykładniczy o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

  i wartości oczekiwanej równej $1/\lambda$

System ($M|M|1$) N=2



Analiza

Zgodnie z rozkładem Poissona dla dostatecznie małej wartości Δt

- prawdopodobieństwo, że w czasie Δt nie pojawi się żadne zgłoszenie wynosi $p_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} \approx 1-\lambda\Delta t$
- prawdopodobieństwo pojawienia się jednego zgłoszenia w okresie Δt wynosi $1 - e^{-\lambda\Delta t} \approx \lambda\Delta t$

Podobnie w przypadku obsługi zgłoszeń

- prawdopodobieństwo, że obsługa żadnego zgłoszenia nie zostanie zakończona w przedziale Δt wynosi $e^{-\mu\Delta t} \approx 1-\mu\Delta t$
- prawdopodobieństwo zakończenia obsługi jednego zgłoszenia w czasie Δt wynosi $1 - e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t$

System $(M|M|1)$ $N=2$ – równania stanu

Niech $\pi_n(t)$ oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili t
w systemie obsługi znajduje się n zadań

Wówczas

$$\pi_0(t+\Delta t) \approx \pi_0(t)(1-\lambda\Delta t) + \pi_1(t)(\mu\Delta t)$$

$$\pi_1(t+\Delta t) \approx \pi_0(t)(\lambda\Delta t) + \pi_1(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + \pi_2(t)(\mu\Delta t)$$

$$\pi_2(t+\Delta t) \approx \pi_1(t)(\lambda\Delta t) + \pi_2(t)(1-\mu\Delta t)$$

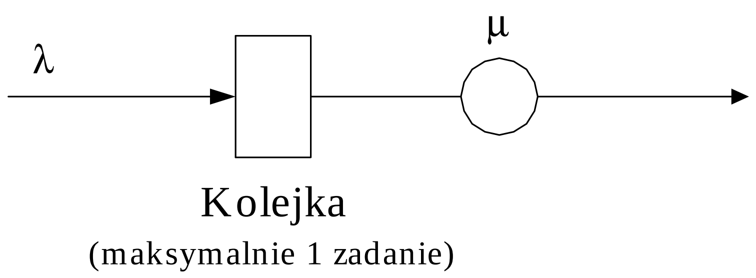
W granicy przy $\Delta t\to 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_0'(t) &= -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t) \\ \pi_1'(t) &= \lambda\pi_0(t) - (\lambda+\mu)\pi_1(t) + \mu\pi_2(t) \\ \pi_2'(t) &= \lambda\pi_1(t) - \mu\pi_2(t) \end{aligned}}$$

Gdy $t\to\infty$ następuje stabilizacja prawdopodobieństw

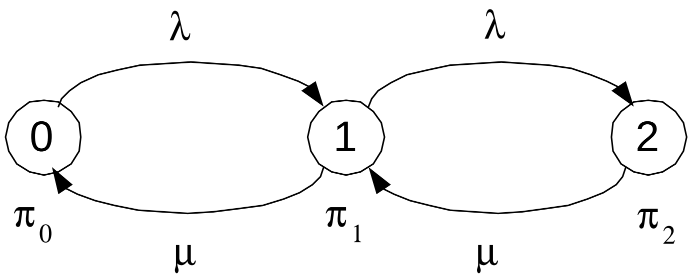
Wówczas $\pi_k'(t)\to 0$ oraz $\pi_k(t)\to\pi_k$ (przypadek stacjonarny)

System ($M|M|1$) N=2



Analiza dla przypadku stacjonarnego

- **graf przejść między stanami**



- **równania stanu**

$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$ (1)

$\lambda\pi_1 + \mu\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2$ (2)

$\mu\pi_2 = \lambda\pi_1$ (3)

uzupełniające równanie

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ (4)

System ($M|M|1$) N=2
Analiza dla przypadku stacjonarnego c.d.

- **prawdopodobieństwa poszczególnych stanów**

  przyjmując oznaczenie $\rho = \lambda/\mu$

  mamy na podstawie (1)-(4)

  $\pi_1 = \rho\pi_0$,

  $\pi_2 = \rho\pi_1 = \rho^2\pi_0$

  $$\pi_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2}$$

- **charakterystyki**

  $L_q = 0\cdot\pi_0 + 0\cdot\pi_1 + 1\cdot\pi_2 = \pi_2$

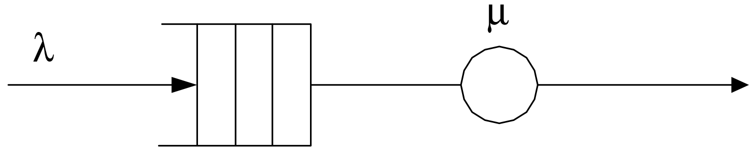
  $W_q = L_q / \lambda^e$ przy czym $\lambda^e = \lambda(\pi_0 + \pi_1)$

  $L_s = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot\pi_1 + 2\cdot\pi_2 = \pi_1 + 2\pi_2$

  $W_s = L_s / \lambda^e$

  $U = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot\pi_1 + 1\cdot\pi_2 = \pi_1 + \pi_2$

System (*M*|*M*|1) *N*=∞



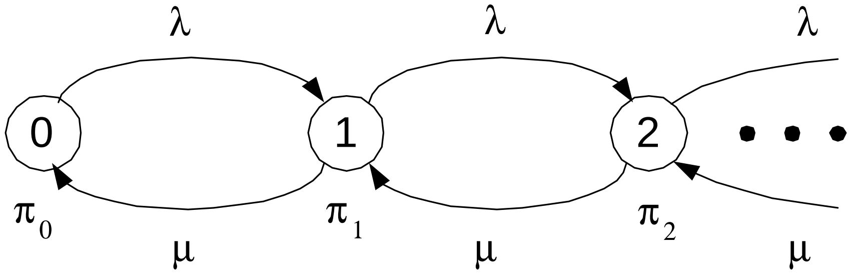
Kolejka
(nieograniczona)

Analiza dla stanu stacjonarnego

- **warunek stacjonarności**

  $\rho < 1$ gdzie $\rho = \lambda/\mu$

- **graf przejść między stanami**



- **równania stanu**

  $\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$

  $\lambda\pi_1 + \mu\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2$

  $\lambda\pi_2 + \mu\pi_2 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_3$

  ....

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$$

System ($M|M|1$) $N=\infty$
Analiza dla przypadku stacjonarnego c.d.

- **prawdopodobieństwa poszczególnych stanów**

$\pi_1 = \rho\pi_0$

$\pi_2 = \rho\pi_1 = \rho^2\pi_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\pi_k = \rho^k\pi_0 \text{ dla } k\geq 1}$

………………………..

- **prawdopodobieństwo π_0**

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\pi_0 = \pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = 1$$

gdy $\rho < 1$, to $\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = \frac{1}{1-\rho}$ zatem $\boxed{\pi_0 = 1-\rho}$

- **charakterystyki**

$$L_s = \sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty}k\rho^k\pi_0 = \rho\pi_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^{k-1}\right) = \rho\pi_0\frac{d\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k}{d\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$L_q = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k - \sum_{k=1}^{\infty}\pi_k = L_s - (1-\pi_0) = L_s - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$U = \sum_{k=1}^{\infty}\pi_k = 1-\pi_0 = \rho$$

System ($M|M|c$) $N=\infty$

Warunek stacjonarności

$$\boxed{\rho < 1 \quad \text{gdzie} \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu}}$$

Charakterystyki

	$N = \infty,\ c = 1$	$N = \infty,\ c$ – dowolne
L_q	$\dfrac{\rho^2}{1-\rho}$	$\dfrac{\rho(c\rho)^c \pi_0}{c!(1-\rho)^2}$
W_q	$\dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$	$\dfrac{L_q}{\lambda}$
L_s	$\dfrac{\rho}{1-\rho}$	$L_q + c\rho$
W_s	$\dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$	$\dfrac{L_s}{\lambda}$
U	ρ	ρ
π_0	$1-\rho$	$\left[\dfrac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^n}{n!}\right]^{-1}$