ZADANIA POWTÓRZENIOWE PRZED DRUGIM KOLOKWIUM
Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ I

1. Obliczyć pochodne funkcji
(a) $y = \frac{2}{3x-1}$, (b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x+1}$, (c) $f(x) = \sin(5x-1)$,
(d) $f(x) = (3x^2-7)e^{-x^2+2x+1}$, (e) $f(x) = e^{-x^2} \cdot \ln x$, (f) $f(x) = \ln^3 x - e^{-x}$,
(g) $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$, (h) $f(x) = \ln\left(e^{1/x} - x\right)$.

2. (a) Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \ln(1-3x)$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.
(b) Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = e^{2x-1} + 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{1}{2}$.
(c) Znaleźć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (3\pi - 4x)\sin x$ w punkcie $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
(d) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = \frac{\ln(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ oraz równanie prostej stycznej do tej krzywej w punkcie $(4, 0)$.
(e) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = \frac{\ln(2x+1)}{x-1}$ oraz napisać równanie prostej do niej stycznej i przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

3. Korzystając z reguły de l'Hôpitala obliczyć
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+e^{2x}-1}{2x}$, (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-e^{-x}}{x^2}$, (c) $\lim_{x\to-\infty} x\ln\left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)$,
(d) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{\ln\cos(3\pi x)}$, (e) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, (f) $\lim_{x\to 0^+} x^x$, .

4. (a) Znaleźć asymptotę prawostronną ukośną funkcji $f(x) = \frac{e^{-3x}+4x^2}{2x-1}$.
(b) Wyznaczyć lewostronną asymptotę ukośną funkcji $f(x) = 2x - e^{3x}$.
(c) Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \frac{e^x}{4-x^2}$. (d) Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
(e) Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. (f) Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = xe^{1-2x}$.

5. Wyznaczyć asymptotę pionową i ekstrema funkcji $f(x) = \frac{e^{2x}}{3x+1}$.

6. Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji
(a) $f(x) = \frac{e^{-4x}}{x^2-3}$, (b) $f(x) = (x^2-x-1)e^{-x}$, (c) $f(x) = xe^{-x^3}$, (d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

7. Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji oraz jej punkty przegięcia
(a) $f(x) = e^{-x^2}$, (b) $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}$, (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

8. (a) Wyznaczyć przedziały, w których funkcja $f(x) = (x^2+x+2)e^{-x}$ jest wypukła.
(b) Wyznaczyć przedziały, w których funkcja $f(x) = \ln(1+x^2)$ jest wklęsła.

ODPOWIEDZI:

1. (a) $\frac{-6}{(3x-1)^2}$ (b) $\frac{1}{6\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}x+1}\right)^2}$ (c) $5\cos(5x-1)$ (d) $(-6x^3+6x^2+20x-14)e^{-x^2+2x+1}$ (e) $-2xe^{-x^2}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x^2}$ (f) $\frac{3}{x}\ln^2 x + e^{-x}$ (g) $e^{\sqrt{\sin x}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (h) $\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}-1}{e^{1/x}-x}$

2. (a) $y = -3x$ (b) $y = 2x+2$ (c) $y = -4x+3\pi$ (d) $D = (0, 9)$, $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ (e) $D = (-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$, $y = -2x$

3. (a) $\frac{5}{2}$ (b) ∞ (c) 1 (d) $-\frac{2}{9\pi^2}$ (e) e (f) 1

4. (a) $y = 2x+1$ (b) $y = 2x$ (c) $y = 0$ to asymptota pozioma lewostronna, $x = 2, x = -2$ to asymptoty pionowe obustronne (d) $x = 0$ to asymptota pionowa prawostronna (e) $y = 0$ to asymptota pozioma prawostronna, $x = 0$ to asymptota pionowa prawostronna (f) $y = 0$ to asymptota pozioma prawostronna

5. $x = -\frac{1}{3}$ to asymptota pionowa obustronna, $f_{min}(\frac{1}{6}) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{e}$

6. (a) $D = R \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $f'(x) = \frac{(-4x^2-2x+12)e^{-4x}}{(x^2-3)^2}$, $f_{min}(-2) = e^8$, $f_{max}(\frac{3}{2}) = -\frac{4}{3}e^{-6}$, rośnie w przedziałach $(-2, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$, maleje w przedziałach $(-\infty, -2), (\frac{3}{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$
(b) $D = R$, $f'(x) = e^{-x}(-x^2+3x)$, $f_{min}(0) = -1$, $f_{max}(3) = \frac{5}{e^3}$, rośnie dla $x \in (0, 3)$, maleje w przedziałach $(-\infty, 0), (3, \infty)$
(c) $D = R$, $f'(x) = e^{-x^3}(1-3x^3)$, $f_{max}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}}$, rośnie dla $x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$, maleje dla $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \infty\right)$
(d) $D = (0, \infty)$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $f_{max}(e) = \frac{1}{e}$, rośnie dla $x \in (0, e)$, maleje dla $x \in (e, \infty)$

7. (a) $D = R$, $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$, wypukła w przedziałach $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty\right)$, wklęsła w przedziale $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, punkty przegięcia: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$
(b) $D = R \setminus \{1, 2\}$, $f''(x) = \frac{(x^2-3x+2)(6x^2-18x+14)}{(x^2-3x+2)^4}$, wypukła w przedziałach $(-\infty, 1), (2, \infty)$, wklęsła w przedziale $(1, 2)$, brak punktów przegięcia (c) $D = (0, \infty)$, $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$, wypukła w przedziale $\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$, wklęsła w przedziale $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, punkt przegięcia: $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

8. (a) $f''(x) = e^{-x}(x^2-3x+2)$, $(-\infty, 1), (2, \infty)$ (b) $f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$, $(-\infty, -1), (1, \infty)$