Algebra

Wykład 1 - Rozwiązywanie układów równań liniowych

Oskar Kędzierski

6 października 2019

Kontakt

email: O.Kedzierski@wit.edu.pl,

Literatura

i) T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory.*, GiS, 2002.

ii) T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania.*, GiS, 2008.

iii) T. Koźniewski, *Wykłady z Algebry Liniowej I*, Uniwersytet Warszawski, 2008.

iv) J. Rutkowski, *Algebra liniowa w zadaniach.*, PWN 2018.

v) *Algebra liniowa z geometrią analityczną*, Ważniak, `https://goo.gl/8RdpXo`

Oznaczenia

Przez $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać zbiór liczb rzeczywistych. Przykładowe liczby rzeczywiste to $-1, 0, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 3, \pi$.
Przez $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać zbiór $n-$elementowych ciągów liczb rzeczywistych. Na przykład, $(1, -2, 4) \in \mathbb{R}^3$.
Wyrażenie $\forall_{x \in X}\ p(x)$ oznacza "dla każdego elementu x ze zbioru X zachodzi $p(x)$".
Wyrażenie $\exists_{x \in X}\ q(x)$ oznacza "istnieje element x ze zbioru X taki, że zachodzi $q(x)$".

Ciało

Definicja

Ciałem nazywamy zbiór $\mathbb{K}$ wyposażony w dwa działania na parach elementów z $\mathbb{K}$, oznaczane przez $+$ (dodawanie) i $\cdot$ (mnożenie), które spełniają następujące warunki:

i) $\forall_{a,b,c\in\mathbb{K}}\ (a+b)+c = a+(b+c)$ oraz $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ (łączność dodawania i mnożenia),

ii) $\forall_{a,b\in\mathbb{K}}\ a+b=b+a$ oraz $a\cdot b = b\cdot a$ (przemienność dodawania i mnożenia),

iii) istnieje $0\in\mathbb{K}$ takie, że $\forall_{a\in\mathbb{K}}\ a+0=a$ oraz istnieje $1\in\mathbb{K}$ (różne od 0) takie, że $\forall_{a\in\mathbb{K}}\ a\cdot 1 = a$ (istnienie elementów neutralnych względem dodawania i mnożenia),

iv) $\forall_{a\in\mathbb{K}}\exists_{-a\in\mathbb{K}} a+(-a)=0$ oraz $\forall_{a\in\mathbb{K},a\neq 0}\exists_{a^{-1}\in\mathbb{K}}\ a\cdot a^{-1}=1$ (istnienie elementów odwrotnych względem dodawania i mnożenia),

v) $\forall_{a,b,c\in\mathbb{K}}\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Proste własności

W dowolnym ciele $\mathbb{K}$ zero i jedynka sa wyznaczone jednoznacznie. Przypuśćmy, że mamy dwa zera $0, 0' \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$0 = 0 + 0' = 0',$$

z aksjomatu *iii*). Analogicznie dowodzimy dla mnożenia.
Elementy $-a$ oraz a^{-1} są wyznaczone jednoznacznie. Przypuśćmy, że dla $a \in \mathbb{K}$ istnieją $a', a'' \in \mathbb{K}$ takie, że $a + a' = a + a'' = 0$. Do obu stron równania $a + a' = 0$ dodajmy a'' z lewej strony. Stąd $a' = a''$. Podobnie dla mnożenia.
Wykażemy, że $0 \cdot a = 0$. Weźmy $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Po dodaniu do obu stron równania $-(a \cdot 0)$ otrzymujemy, że

$$0 = 0 \cdot a.$$

Przykłady ciał

Ciałami są:

i) ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$,

ii) ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych z naturalnymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$.

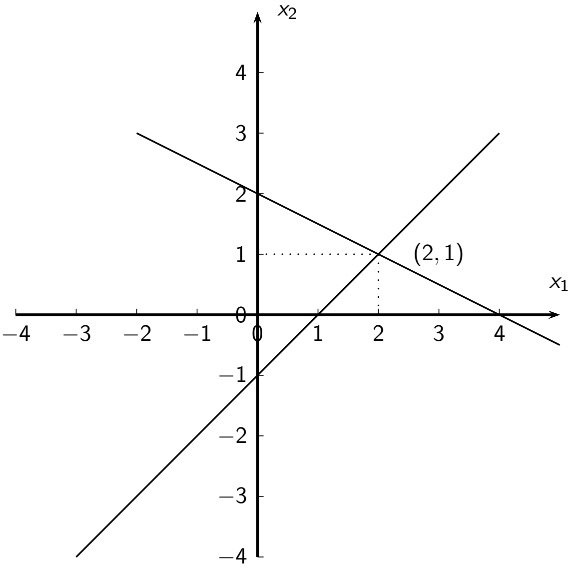
Ciałami nie są:

i) zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych z naturalnymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$,

ii) zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych z naturalnymi działaniami dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$,

iii) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ z działaniami określonymi wzorami $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ oraz $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

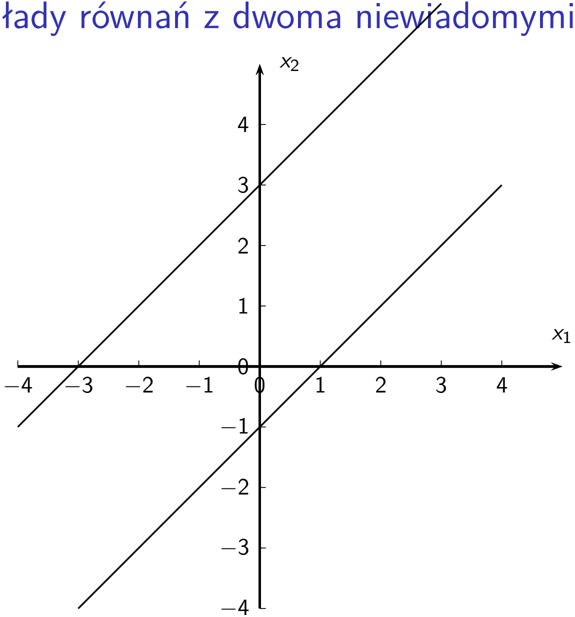
Układy równań z dwoma niewiadomymi



$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

jedno rozwiązanie $(2, 1)$

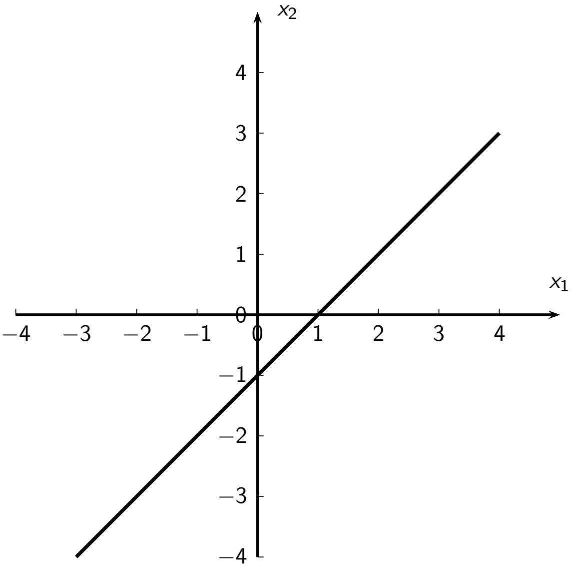
Układy równań z dwoma niewiadomymi



$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

brak rozwiązań

Układy równań z dwoma niewiadomymi



$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x_2 + 1, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}$

Równanie liniowe w ciele $\mathbb{K}$

Równanie liniowe to równanie postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ gdzie}$$

$$x_1, \ldots, x_n \text{ to niewiadome,}$$

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \text{ to współczynniki,}$$

$$b \in \mathbb{K} \text{ to wyraz wolny.}$$

Układ równań liniowych w ciele $\mathbb{K}$

Układem m równań linowych z n zmiennymi $x_1, \ldots, x_n$ w ciele $\mathbb{K}$ nazywamy układ postaci

$$L : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

ze współczynnikami $a_{ij} \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ oraz wyrazami wolnymi $b_i \in \mathbb{K}$ dla $i = 1, \ldots, m$.
Jeśli $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ układ nazywamy **jednorodnym.**

Rozwiązanie układu równań liniowych

Dowolny n-elementowy ciąg $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ spełniający wszystkie równania układu L, to jest

$$\forall_{i=1,\ldots,m} \; a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{i(n-1)}c_{n-1} + a_{in}c_n = b_i,$$

nazywamy **rozwiązaniem** układu L. Na przykład, ciąg $(0, \ldots, 0)$ jest rozwiązaniem jednorodnego układu równań.

Układ, który nie posiada rozwiązań nazywamy **sprzecznym.**

Dwa układy równań nazywamy **równoważnymi** jeśli posiadają te same zbiory rozwiązań.

Działania na równaniach liniowych

Równanie $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ w ciele $\mathbb{K}$ można **pomnożyć** przez element $c \in \mathbb{K}, c \neq 0$ i otrzymać równanie postaci $ca_1x_1 + ca_2x_2 + \ldots + ca_nx_n = cb$.

Dwa równania linowe
$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,\ \ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_nx_n = b'$ można **dodać** i otrzymać równanie
$(a_1 + a'_1)x_1 + (a_2 + a'_2)x_2 + \ldots + (a_n + a'_n)x_n = b + b'$.

Operacje elementarne

Twierdzenie

Następujące działania, nazywane **operacjami elementarnymi**, *nie zmieniają zbioru rozwiązań układu liniowego w ciele* $\mathbb{K}$ *(to znaczy, prowadzą do równoważnego układu równań)*

i) *zamiana miejsc dwóch równań,*

ii) *pomnożenie równania przez element ciała* $\mathbb{K}$, *różny od* 0,

iii) *dodanie jednego równania do innego.*

Dowód.

Powyższe działania są odwracalne.

Macierze

Macierzą A o **współczynnikach** a_{ij} w ciele $\mathbb{K}$ nazywamy prostokątną tablicę m wierszy i n kolumn, to jest

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Piszemy $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$. Zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach ze współczynnikami w ciele $\mathbb{K}$ oznaczamy $M(m \times n; \mathbb{K})$.

Macierz układu równań liniowych

Każdemu układowi równań liniowych

$$L : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

przyporządkowujemy **macierz układu** L

$$M(L) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

oraz **macierz uzupełnioną układu** L

$$M(L)^U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Elementarne operacje na macierzach

Operacją elementarną na macierzy A o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ nazywamy

i) zamianę miejsc dwóch wierszy macierzy A,

ii) pomnożenie wszystkich współczynników w wierszu macierzy A przez element $c \in \mathbb{K}, c \neq 0$,

iii) dodanie jednego wiersza macierzy A do drugiego.

Elementarne operacje na macierzy uzupełnionej układu L odpowiadają operacjom elementarnym na równaniach, zatem prowadzą do macierzy innego układu, który jest równoważny układowi L.

Postać schodkowa i schodkowa zredukowana macierzy

Definicja

Schodkiem macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy taki niezerowy element tej macierzy $a_{kl} \neq 0$, że na lewo i poniżej elementu a_{kl} w macierzy A znajdują sie same zera, to jest $a_{ij} = 0$ dla $i \geq k$ oraz $j \leq l$ oprócz $i = k, j = l$.

Macierz A znajduje sie w **postaci schodkowej**, gdy w każdym niezerowym wierszu znajduje się schodek a wiersze zerowe są poniżej niezerowych.

Macierz A znajduje sie w **postaci schodkowej zredukowanej**, gdy znajduje sie w postaci schodkowej oraz każdy schodek jest jedynym niezerowym elementem kolumny równym 1.

Przykłady

Poniższa macierz jest w postaci schodkowej ale nie schodkowej zredukowanej (schodki zaznaczone są kółkami):

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Poniższa macierz jest w postaci schodkowej zredukowanej:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Metoda eliminacji Gaussa

Twierdzenie

Stosując operacje elementarne na dowolnej macierzy można sprowadzić ją do postaci schodkowej.

Dowód.

Indukcją na liczbę na liczbę kolumn (czyli n) wykażemy, że każdą macierz można sprowadzić do postaci schodkowej. Niech

$A = [a_{ij}] \in M(m \times 1; \mathbb{K})$. Jeśli $A \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, np. $a_{11} \neq 0$, to

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \xrightarrow[w_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} w_1]{w_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} w_1 \; \cdots} \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa cd.

Dowód.

Niech $A = [a_{ij}] \in M(m \times n; \mathbb{K})$ oraz $n > 1$. Niech $k \in \mathbb{N}$ oznacza numer pierwszej niezerowej kolumny, po zmianie kolejności wierszy można założyć, że $a_{1k} \neq 0$. Wtedy

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & a_{m(k+1)} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2 - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} w_1 \\ \vdots \\ w_m - \frac{a_{mk}}{a_{1k}} w_1}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2(k+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m(k+1)} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]$$

dla pewnych $b_{ij} \in \mathbb{K}$.

Metoda eliminacji Gaussa cd.

Dowód.

Z założenia indukcyjnego macierz z prawego dolnego rogu, tj.

$$\begin{bmatrix} b_{2(k+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m(k+1)} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

można sprowadzić operacjami elementarnymi do postaci schodkowej. Te same operacje na macierzy

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2(k+1)} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m(k+1)} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]$$

doprowadzą ją do postaci schodkowej.

Metoda eliminacji Gaussa cd.

Twierdzenie

Stosując operacje elementarne na dowolnej macierzy można sprowadzić ją do postaci schodkowej zredukowanej.

Dowód.

Załóżmy, że macierz $A = [a_{ij}] \in M(m \times n; \mathbb{K})$ została sprowadzona operacjami elementarnymi do postaci schodkowej ze schodkami w kolumnach $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{m'j_{m'}}$, gdzie $j_1 < j_2 < \ldots < j_{m'}$ oraz $m' \leq m$, tj. wiersze $m'+1, m'+2, \ldots, m$ są zerowe.

$$\begin{bmatrix}
0 & a_{1j_1} & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & a_{2j_2} & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{3j_3} & \cdots & * & * & * & \ldots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m'j_{m'}} & * & \ldots & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa cd.

Dowód.

Następujące operacje elementarne na macierzy A sprowadzą ją do postaci schodkowej zredukowanej

$$w_k - \frac{a_{kj_i}}{a_{ij_i}} w_i \text{ for } i = 2, \ldots, m', k = 1, \ldots, i-1,$$
$$w_i / a_{ij_i} \text{ for } i = 1, \ldots, m'.$$

W skrócie, w każdej z kolumn $j_1, j_2, \ldots, j_{m'}$ używamy schodka aby wyzerować wyrazy powyżej niego a potem dzielimy aby schodek był równy 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{1j_1} & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2j_2} & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3j_3} & \cdots & * & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m'j_{m'}} & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1/a_{1j_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2j_2} & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3j_3} & \cdots & * & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m'j_{m'}} & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - \frac{a_{1j_2}}{a_{2j_2}} w_2}$$

Metoda eliminacji Gaussa cd.

Dowód.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2j_2} & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3j_3} & \cdots & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m'j_{m'}} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2/a_{2j_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3j_3} & \cdots & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m'j_{m'}} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_1 - \frac{a_{1j_3}}{a_{3j_3}} w_3 \\ w_2 - \frac{a_{2j_3}}{a_{3j_3}} w_3}]{} .$$

$$\cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & \cdots & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań

Twierdzenie

Niech macierz A będzie macierzą $M(L)^U$ (tj. macierzą uzupełnioną układu równań liniowych L) sprowadzoną do postaci schodkowej zredukowanej. Jeśli w A schodek występuje w ostatniej kolumnie wyrazów wolnych to układ L jest **sprzeczny**. *W przeciwnym razie zmienne odpowiadające schodkom A (zmienne* **związane** *lub* **zależne***) wyrażają sie przez pozostałe zmienne, to jest* **parametry** *(lub* **zmienne niezależne***). Parametry mogą przyjmować dowolne wartości z ciała $\mathbb{K}$.* **Rozwiązanie ogólne** *to wyrażenie zmiennych związanych przez parametry.*

Przykład

W ciele liczb rzeczywistych rozpatrzmy układ

$$L:\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Macierz uzupełniona tego układu to

$$M(L)^U = \left[\begin{array}{cccr|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Wykonując operację elementarną $w_2 - 2w_1$ (odejmujemy pomnożony przez 2 wiersz pierwszy od drugiego), otrzymujemy macierz w postaci zredukowanej

$$\left[\begin{array}{crcr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

Wykonując operację elementarną $w_1 - w_2$ (odejmujemy wiersz drugi od pierwszego), otrzymujemy macierz schodkową zredukowaną.

Przykład cd.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ① & -2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & ① & 3 & -4 \end{array}\right]$$

W ostatniej kolumnie nie ma schodka, zatem układ posiada rozwiązania. Zmienne związane x_1, x_3 odpowiadają kolumnom ze schodkami a pozostałe zmienne x_2, x_4 to parametry.

W rozwiązaniu ogólnym zmienne związane wyrażają sie przez parametry $\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 4x_4 + 6 \\ x_3 = \quad\quad - 3x_4 - 4 \end{cases}, \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

Każde rozwiązanie układu L jest postaci

$$(2x_2 + 4x_4 + 6, x_2, -3x_4 - 4, x_4), \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Przykład cd.

Stosujemy zapis

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 4x_4 + 6 \\ x_3 = - 3x_4 - 4 \end{cases}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

Przykład cd.

W ciele liczb rzeczywistych rozpatrzmy układ

$$L : \begin{cases} x_1 & & & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Macierz uzupełniona tego układu to

$$M(L)^U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

. Po operacji elementarnej

$$M(L)^U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

otrzymujemy macierz w postaci schodkowej zredukowanej.W rozwiązaniu ogólnym zmienne związane wyrażają sie przez parametry $\begin{cases} x_1 & = & & x_4 & + & 2 \\ x_3 & = & - & 3x_4 & - & 4 \end{cases}$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

Przykład cd.

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 2 \\ x_3 = -3x_4 - 4 \end{cases}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

Dowolne rozwiązanie układu jest postaci

$$(x_4+2, x_2, -3x_4-4, x_4) = x_2(0,1,0,0) + x_4(1,0,-3,1) + (2,0,-4,0)$$

dla pewnych $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Jednoznaczność postaci schodkowej zredukowanej

Stwierdzenie

Niech $A \in M(m \times n; \mathbb{R})$ będzie macierzą. Jeśli macierze $B, C \in M(m \times n; \mathbb{R})$ w postaci schodkowej **zredukowanej** powstały z macierzy A przez ciąg operacji elementarnych na wierszach macierzy A, to $B = C$.

Dowód.

Niech j będzie numerem pierwszej kolumny od prawej różnej dla macierzy B i C. Niech

$$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k < j,$$

będą numerami kolumn, mniejszymi od j, zawierającymi schodki w B oraz C. Niech B' oraz C' będą odpowiednio podmacierzami macierzy B oraz C składającymi się z kolumn $j_1, \ldots, j_k, j$. Niech U_B, U_C będą układami równań liniowych, których macierze uzupełnione, to odpowiednio B' oraz C'. Z założenia, układy U_B oraz U_C są równoważne.

Jednoznaczność postaci schodkowej zredukowanej cd.

Dowód.

$$B' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1j} \\ 0 & 1 & & \vdots & b_{2j} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{kj} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{(k+1)j} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{mj} \end{array}\right], \qquad C' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1j} \\ 0 & 1 & & \vdots & c_{2j} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{kj} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{(k+1)j} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{mj} \end{array}\right]$$

Jeśli $b_{(k+1)j} = 0$, to $b_{ij} = 0$ dla $i \geq k+1$, a jeśli $c_{(k+1)j} = 0$, to $c_{ij} = 0$ dla $i \geq k+1$. Jeśli $b_{(k+1)j} = 0, c_{(k+1)j} \neq 0$ lub $b_{(k+1)j} \neq 0, c_{(k+1)j} = 0$, to jeden z układów U_B, U_C jest sprzeczny a drugi niesprzeczny, co prowadzi do sprzeczności. Kolumna $j-$ta nie zawiera schodka ani w B, ani w C (ten schodek znajdowałby się w $(k+1)$-ym wierszu, a wtedy j-ta kolumna byłaby taka sama w B oraz C), zatem nie zachodzi $b_{(k+1)j} \neq 0, c_{(k+1)j} \neq 0$. W pozostałym przypadku $b_{(k+1)j} = 0, c_{(k+1)j} = 0$ układ U_B ma jednoznaczne rozwiązanie $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj})$, a układ U_C ma jednoznaczne rozwiązanie $(c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{kj})$, co ponownie prowadzi do sprzeczności.

Jednoznaczność postaci schodkowej zredukowanej cd.

Uwaga

Postać schodkowa nie jest jednoznaczna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać schodkowa **zredukowana** macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ciało liczb zespolonych

Na zbiorze par liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^2$ wprowadzamy działania dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z powyższymi działaniami to ciało $\mathbb{C}$, nazywane ciałem **liczb zespolonych**.

Ciało liczb zespolonych cd.

Elementem neutralnym względem dodawania jest $(0,0)$, bo $(a,b)+(0,0)=(a,b)$.
Elementem odwrotnym względem dodawania do (a,b) jest $(-a,-b)$, bo $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.
Elementem neutralnym względem mnożenia jest $(1,0)$, bo $(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$.
Elementem odwrotnym względem mnożenia do (a,b) jest $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$, bo $(a,b)\cdot(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0)$, dla $(a,b)\neq(0,0)$.

Zauważmy, że $(a,0)+(c,0)=(a+c,0)$ oraz $(a,0)\cdot(c,0)=(ac,0)$ zatem działania na pierwszej współrzędnej odpowiadają naturalnym działaniom na zbiorze liczb rzeczywistych.
Wprowadźmy oznaczenie $(a,b)=a+bi$, gdzie $i=(0,1)$. Wtedy $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.

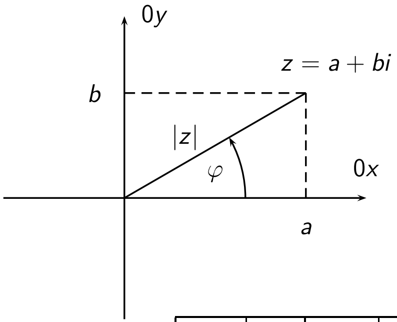
Oznaczenia

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$ będzie liczbą zespoloną.

Definicja

Częścią rzeczywistą liczby z nazywamy $\mathrm{Re}(z) = a$. Częścią urojoną liczby z nazywamy $\mathrm{Im}(z) = b$. Modułem liczby z nazywamy odległość pary (a, b) od $0 = (0, 0)$ czyli $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumentem liczby z nazywamy kąt $\mathrm{Arg}(z)$ pomiędzy osią $0x$ a odcinkiem łączącym 0 z liczbą z. Liczbą sprzężoną do z nazywamy $\overline{z} = a - bi$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej



$\varphi = \mathrm{Arg}(z)$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$

$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej

Niech $z = a + bi$. Szukamy $w = c + di$ takiego, że $w^2 = z$.

$$w^2 = (c + di)(c + di) = (c^2 - d^2) + (2cd)i = a + bi.$$

Daje to układ równań:

$$\begin{cases} a & = & c^2 - d^2 \\ b & = & 2cd \end{cases},$$

który posiada dwa rozwiązania:

$$w = \pm \left(\frac{b}{\sqrt{2(|z| - a)}} + i\sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \right).$$

Geometryczna interpretacja mnożenia liczb zespolonych

Jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oraz $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, to

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Zadanie: wykorzystaj powyższy fakt i wzór z poprzedniej strony aby wykazać, że

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$