Zadanie 1. Wykaż, że następujące wyrażenia są tautologiami:

i) $[(p \to q) \to p] \to p$,

ii) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$,

iii) $[(p \to q) \wedge p] \to q$,

iv) $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$.

Zadanie 2. Sprawdź czy następujące wyrażenia są tautologiami:

i) $[(p \vee q) \to r] \to [(p \to r) \vee (q \to r)]$,

ii) $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (t \to u)] \to [(p \wedge r \wedge t) \to (q \wedge s \wedge t)]$,

iii) $\{[(p \wedge q) \to r] \wedge [(p \wedge q) \to \neg r]\} \to (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Odp.

i) jest tautologią,

ii) jest tautologią,

iii) nie jest, $\rho(p) = \rho(q) = 0,\ \rho(r) = 1$.

Zadanie 3. Znajdź zaprzeczenia zdań

i) $(\neg p \wedge q) \to (p \vee r)$,

ii) $(p \to q) \leftrightarrow (p \vee q)$.

tak, aby negacja nie stała przed żadnym nawiasem.
Odp.

i) $(\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg r)$,

ii) $[(p \to q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)] \vee [(p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)]$.

Zadanie 4. Niech p, q, r będą zdaniami. Zapisz przy pomocy spójników logicznych zdanie, które będzie prawdziwe dokładnie wtedy, gdy

i) dokładnie jedno wśród zdań p, q, r jest prawdziwe,

ii) dokładnie dwa wśród zdań p, q, r są prawdziwe.

Uogólnij powyższy wynik na n zdań $p_1, \ldots, p_n$, z których dokładnie k ma być prawdziwych.
Odp.

i) $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$,

ii) $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

Zadanie 5. Znajdź zaprzeczenia zdań

i) $\exists_{M>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \ |a_n| < M$,

ii) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{m \in \mathbb{N}} \ (n < m) \to (a_n < a_m)$,

iii) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \ (n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$,

iv) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in \mathbb{R}} \ (|x - x_0| < \delta) \to (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Co mówią warunki i),ii),iii) o ciągu a_n a co mówi warunek iv) o funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
Odp.

i) $\forall_{M>0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \ |a_n| \geq M$, ciąg a_n jest ograniczony,

ii) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} \ (n < m) \wedge (a_n \geq a_m)$, ciąg a_n jest ściśle rosnący,

iii) $\exists_{\varepsilon>0} \forall_{N \in \mathbb{N}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \ (n > N) \wedge (|a_n - a| \geq \varepsilon)$, granica ciągu jest równa a,

iv) $\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x \in \mathbb{R}} \ (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$, funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

Zadanie 6. Które z następujących zdań są prawdziwe:

i) jeśli Jana stać na bułkę to z faktu, że z Jana nie stać na bułkę wynika, że Jan może iść do kina,

ii) jeśli z faktu, że wszyscy studenci zaliczą algebrę wynika, że wszyscy studenci zaliczą analizę, i nie wszyscy studenci zaliczą analizę, to wszyscy studenci zaliczą rok,

Odp. pierwsze prawdziwe, drugie fałszywe.

Zadanie 7. Udowodnić twierdzenie: jeśli $p_1 \to q_1, \ldots, p_n \to q_n$ oraz $p_1 \vee \ldots \vee p_n$ i $\neg(q_i \wedge q_j)$ dla $i \neq j$, to prawdziwe są wynikania $q_1 \to p_1, \ldots, q_n \to p_n$.
Odp. przypuśćmy, że istnieje wartościowanie $\rho \colon ZZ \to \{0, 1\}$ takie, że

$$[\![p_1 \to q_1]\!]_\rho = \ldots = [\![p_n \to q_n]\!]_\rho = 1 \quad (1)$$

$$[\![p_1 \vee \ldots \vee p_n]\!]_\rho = 1 \quad (2)$$

$$[\![\neg(q_i \wedge q_j)]\!]_\rho = 1 \text{ dla } i \neq j \quad (3)$$

oraz, na przykład, $[\![q_1 \to p_1]\!]_\rho = 0$. Stąd $\rho(q_1) = 1$, $\rho(p_1) = 0$. Z pierwszego warunku oraz z (3) wynika, że

$$\rho(q_2) = \ldots = \rho(q_n) = 0. \tag{4}$$

Z warunków (4) oraz (1) wynika, że

$$\rho(p_2) = \ldots = \rho(p_n) = 0.$$

Jest to w sprzeczności z (2).

Zadanie 8. Używając funkcji zdaniowych $x = y, x \leq y, x < y$ oraz operacji arytmetycznych $+, -, \cdot$ (bez symboli liczb $0, 1, 2, \ldots$) zapisz następujące funkcje zdaniowe (przyjmujemy, że x, y przyjmują wartości w zbiorze liczb naturalnych):

i) x jest równy 0,

ii) x jest równy 1,

iii) x dzieli y

iv) x jest liczbą parzystą,

v) x jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych,

vi) x jest liczbą pierwszą,

vii) x jest największym dzielnikiem y i z,

viii) liczby x i y mają takie same dzielniki.

Odp.

i) $x + x = 0$,

ii) $x \cdot x = 1$,

iii) $\exists z\ y = xz$,

iv) $\exists y\ x = y + y$,

v) $\exists y \exists z\ x = y \cdot y + z \cdot z$,

vi) $\neg(x \cdot x = 1) \land \forall y \forall z\ (x = yz) \to (x = y) \lor (x = z)$,

vii) $(x|y) \land (x|z) \land \forall w\ (w|y) \land (w|z) \to (w|x)$ (gdzie $x|y$ jest zapisane jak w pkt. iii)),

viii) $\forall z\ (z|x) \leftrightarrow (z|y)$.

Zadanie 9. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ x^2 - x = y$,

ii) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{N}}\ x^2 - x = y$,

iii) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 - x = y$,

iv) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{C}}\ x^2 - x = y$,

v) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ x^2 - x = y$,

Odp.

i) prawdziwe, $y = x^2 - x$,

ii) fałszywe, dla $x = \frac{1}{2}$ nie istnieje $t \in \mathbb{N}$ taki, że $y = -\frac{1}{4}$,

iii) fałszywe, dla $y = -2$ nie istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $x^2 - x + 2 = 0$, bo $\Delta < 0$,

iv) prawdziwe, $y = \frac{1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$,

v) prawdziwe, np. $x = 3, y = 6$.

Zadanie 10. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ x^2 + y > 1$,

ii) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 + y > 1$,

iii) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\ x^2 + y > 1$,

iv) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{N}}\ x^2 + y > 1$,

v) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 + y > 1$.

Odp.

i) prawdziwe, np. $y = 2$,

ii) prawdziwe, np. dla $y \geq 0$ weź $x = 2$, dla $y < 0$ weź $x = y - 1$,

iii) nieprawdziwe, dla dowolnego $x \in R$ weźmy $y = 1 - x^2$ i wtedy $x^2 + y \leq 1$,

iv) prawdziwe, np. $x = 2$,

v) prawdziwe, np. $y = 2$.

Zadanie 11. Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem a $V \subset \mathbb{K}^n$ pewnym podzbiorem.

i) za pomocą kwantyfikatorów, spójników zdaniowych, symboli $\mathbb{K}, V$, zmiennych oznaczających wektory i stałe oraz symboli $+$ (dodawanie wektorów) oraz $\cdot$ (mnożenie przez skalar) zapisz warunek „V jest podprzestrzenią”,

ii) jak wyżej, zapisz zaprzeczenie tego warunku,

iii) jak wyżej, zapisz warunek „jeśl V jest podprzestrzenią, to $\mathbf{0} \in V$”,

iv) zapisz zaprzeczenie tego warunku oraz zapisz warunek równoważny powyższemu warunkowi używając prawa transpozycji,

v) podaj przykład zbioru $V \subset \mathbb{K}^n$, do którego należy $\mathbf{0}$, a który nie jest podprzestrzenią.

Odp.

i) $[\forall_{v\in V}\forall_{w\in V}(v+w\in V)] \wedge [\forall_{v\in V}\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}(\alpha v\in V)]$,

ii) $[\exists_{v\in V}\exists_{w\in V}(v+w\notin V)] \vee [\exists_{v\in V}\exists_{\alpha\in\mathbb{K}}(\alpha v\notin V)]$,

iii) niech $P(V)\leftrightarrow \{[\forall_{v\in V}\forall_{w\in V}(v+w\in V)] \wedge [\forall_{v\in V}\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}(\alpha v\in V)]\}$, wtedy odpowiedź to $P(V)\rightarrow(\mathbf{0}\in V)$,

iv) zaprzeczenie $P(V)\wedge(\mathbf{0}\notin V)$, warunek równoważny $(\mathbf{0}\notin V)\rightarrow\neg P(V)$,

v) $V = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n\colon x_1x_2=0\}$. Wtedy V nie jest podprzestrzenią bo $v=(1,0,0,\ldots,0)\in V$, $w=(0,1,0,\ldots,0)\in V$ oraz $v+w=(1,1,0,\ldots,0)\notin V$. Dodatkowo $\mathbf{0}\in V$.

Zadanie 12. Sprawdź czy formuły

$$[(p\rightarrow q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$$

oraz

$$[(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r]\leftrightarrow[p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)]$$

są tautologiami.

Odp. Pierwsza nie jest tautologią ($\rho(p)=\rho(q)=\rho(r)=0$), druga jest.

Zadanie 13. Czy zachodzą następujące konsekwencje?

i) $p\wedge q\rightarrow\neg r, p\models r\rightarrow\neg q$, (tak)

ii) $p\rightarrow q, p\rightarrow(q\rightarrow r)\models p\rightarrow r$, (tak)

iii) $p \to (q \to r), p \to q \models q \to r$, (nie)

iv) $(p \to q) \to r, \neg p \models r$, (tak)

v) $(p \to q) \to r, \neg r \models p$, (tak)

vi) $p \to q, r \to \neg q \models r \to \neg p$. (tak)

Zadanie 14. Sprowadź formuły do postaci koniunkcyjnej normalnej

i) $(p \to q) \to r$,

ii) $p \leftrightarrow q$,

iii) $\neg(r \to (p \leftrightarrow q))$.

Odp.

i) $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$,

ii) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$,

iii) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r$.

Zadanie 15. Sprowadź formuły do postaci koniunkcyjnej normalnej

i) $(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2)$,

ii) $(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2) \vee (x_3 \wedge y_3)$,

iii) $(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2) \vee \ldots \vee (x_n \wedge y_n)$.

Odp.

i) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee y_2)$,

ii) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee y_3) \wedge (x_1 \vee y_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee y_2 \vee y_3) \wedge (y_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (y_1 \vee x_2 \vee y_3) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee x_3) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3)$,

iii) $\bigwedge_{q_i \in \{x_i, y_i\}} q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n$.