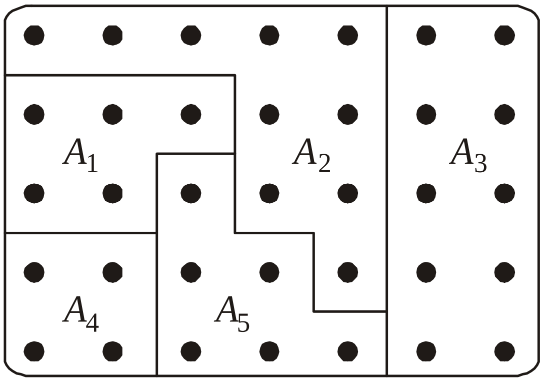
PODZIAŁ ZBIORU NA BLOKI

Podziałem zbioru *n*-elementowego *X* na *k* bloków nazywamy każdą rodzinę zbiorów,



$$\pi = \{ A_1, ..., A_k \} ,$$

dla której zachodzi

$A_1 \cup ... \cup A_k = X$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $1 \le i < j \le k$ oraz $A_i \ne \varnothing$, $1 \le i \le k$

$A_1, ..., A_k$ - bloki podziału π

$\Pi_k(X)$ - zbiór wszystkich podziałów zbioru X na k bloków

$\Pi(X)$ - zbiór wszystkich podziałów zbioru X

$$\Pi(X) = \Pi_1(X) \cup ... \cup \Pi_n(X)$$

Przykład zbioru podziałów na zadaną liczbę bloków

$X = \{ a, b, c, d \}$ $k = 3$

$\Pi_3(X)$:

$\pi^1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c, d\} \}$ $\pi^2 = \{ \{a\}, \{b, \mathrm{c}\}, \{d\} \}$

$\pi^3 = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\} \}$ $\pi^4 = \{ \{a, c\}, \{b\}, \{d\} \}$

$\pi^5 = \{ \{a\}, \{b, d\}, \{c\} \}$ $\pi^6 = \{ \{a, d\}, \{b\}, \{c\} \}$

Ile jest podziałów zbioru *n*-elementowego na *k* bloków?

Przykład c.d.

$X = \{ a, b, c, d \}$, $|X| = 4$, $k = 3$

$\Pi_3(X) = \{ \pi^1, \pi^2, ..., \pi^6 \}$ $|\Pi_3(X)| = 6$

LICZBY STIRLINGA (drugiego rodzaju)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = |\Pi_k(X)|, \quad \text{dla } |X| = n$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad \text{dla } k > n. \quad \text{Dodatkowo przyjmujemy, że } \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$$

Wyznaczanie liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1, \quad \text{dla } n \geq 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{i dodatkowo} \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \text{dla } n > 0$$

<u>Twierdzenie</u>

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad \text{dla } 0 < k < n$$

<u>Dowód</u>

Rozważmy zbiór wszystkich podziałów zbioru $X = \{ 1, 2, ..., n \}$ na k bloków. Dla dowolnego podziału $\pi \in \Pi_k(X)$ zachodzi jeden z dwóch rozłącznych przypadków:

- zawiera blok jednoelementowy $\{n\}$ albo
- n jest elementem bloku co najmniej dwuelementowego.

Liczba podziałów w $\Pi_k(X)$, dla których zachodzi przypadek pierwszy, jest równa liczbie podziałów zbioru $n-1$ elementowego na $k-1$ bloków, czyli wynosi ${n-1 \brace k-1}$.

Liczba podziałów, dla których zachodzi przypadek drugi, jest równa $k{n-1 \brace k}$, ponieważ podziały te otrzymujemy z podziałów zbioru

$\{1, 2, ..., n-1\}$ na k bloków poprzez dodawanie elementu n kolejno do każdego z bloków takiego podziału.

Oba przypadki są rozłączne, a zatem $|\Pi_k(X)| = {n-1 \brace k-1} + k{n-1 \brace k}$.

■

Ile jest wszystkich podziałów zbioru *n*-elementowego?

$B_n = |\Pi(X)|$ dla $|X| = n$; $\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} {n \brace k}$; $\quad B_n$ - **liczba Bella**

Tablica liczb Stirlinga drugiego rodzaju i liczb Bella:

	B_n	${n \brace k}$											
		$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$n = 0$	**1**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	**1**	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	**2**	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	**5**	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	
4	**15**	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0	
5	**52**	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0	
6	**203**	0	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0	
7	**877**	0	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0	
8	**4140**	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0	
9	**21147**	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0	
10	**115975**	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	
...	...												...

GENEROWANIE PODZIAŁÓW ZBIORU

Jeśli mamy podział $\pi = \{ A_1, ..., A_k \}$ na k bloków

dla zbioru $\{ 1, ..., n-1 \}$,

to możemy utworzyć $k+1$ podziałów zbioru $X = \{ 1, ..., n \}$:

$\{ A_1 \cup \{n\},\quad A_2,\quad ...,\quad A_k \}$

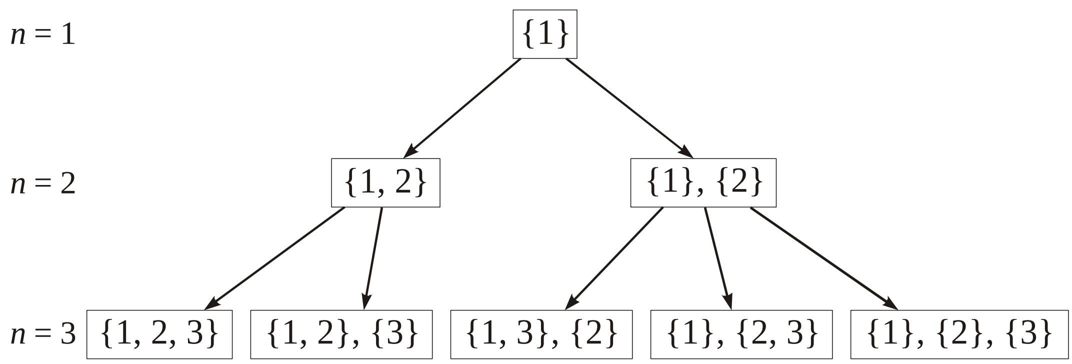
$\{ A_1,\quad A_2 \cup \{n\},\quad ...,\quad A_k \}$

. . .

$\{ A_1,\quad A_2,\quad ...,\quad A_k \cup \{n\} \}$

$\{ A_1,\quad A_2,\quad ...,\quad A_k,\quad \{n\} \}$

Przykład generowania podziałów zbioru {1, 2, 3}



Tożsamości dla liczb Stirlinga i Bella

dla $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi $m^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot m^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot m^{\overline{k}}$

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot B_i$$

ZWIĄZEK PODZIAŁU ZBIORU NA BLOKI
Z RELACJĄ RÓWNOWAŻNOŚCI

Każdemu podziałowi $\pi \in \Pi(X)$ można jednoznacznie przyporządkować relację równoważności $E(\pi)$ w zbiorze X, definiując ją jako

$$E(\pi) = \bigcup_{A \in \pi} A \times A$$

tzn. dwa elementy $x, y \in X$ są w relacji $E(\pi)$, czyli $(x, y) \in E(\pi)$, wtedy i tylko wtedy, gdy x i y należą do tego samego bloku podziału.

Przykład relacji definiowanej podziałem

X = { a, b, c, d , e} , $\pi^5 = \{ \{a\}, \{b, d\}, \{c, e\} \}$

$$E(\pi^5) = \{ \underset{\{a\}\times\{a\}}{(a, a)}, \underbrace{(b, b), (b, d), (d, b), (d, d)}_{\{b, d\}\times\{b, d\}}, \underbrace{(c, c), (c, e), (e, c), (e, e)}_{\{c, e\}\times\{c, e\}} \}$$

tablica relacji:

	a	b	c	d	e
a	1				
b		1		1	
c			1		1
d		1		1	
e			1		1

	a	b	d	c	e
a	1				
b		1	1		
d		1	1		
c				1	1
e				1	1

Każdej relacji równoważności E w zbiorze X można jednoznacznie przyporządkować podział zbioru X na bloki, definiując go jako

$$X|E = \{ x|E : x \in X \} ,$$

gdzie pojedynczy blok $x|E = \{ y \in X : xEy \}$ nazywany jest ***klasą abstrakcji*** elementu x

Przykład podziału zbioru na klasy abstrakcji

$X = \mathbb{N}$, $xEy \Leftrightarrow x + y$ jest liczbą parzystą

podział $\mathbb{N}|E = \{ 0|E, 1|E \}$

$0|E = \{ y \in \mathbb{N} : y$ jest parzysta $\}$, $1|E = \{ y \in \mathbb{N} : y$ jest nieparzysta $\}$

Przykład podziału zbioru na klasy abstrakcji

tablica relacji E na zbiorze $X = \{$ a, b, c, d , e$\}$:

	a	b	c	d	e
a	1		1		
b		1		1	1
c	1		1		
d		1		1	1
e		1		1	1

podział $X|E = \{ a|E, b|E \}$, gdzię $a|E = \{ a, c \}$, $b|E = \{ b, d, e \}$

Ile jest wszystkich relacji równoważności na zbiorze *n*-element.?

Twierdzenie

Liczba wszystkich relacji równoważności w zbiorze X, dla $|X| = n$, jest równa liczbie Bella B_n.

Dowód

Istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem relacji równoważności na danym zbiorze a zbiorem wszystkich podziałów danego zbioru $\Pi(X)$.

■

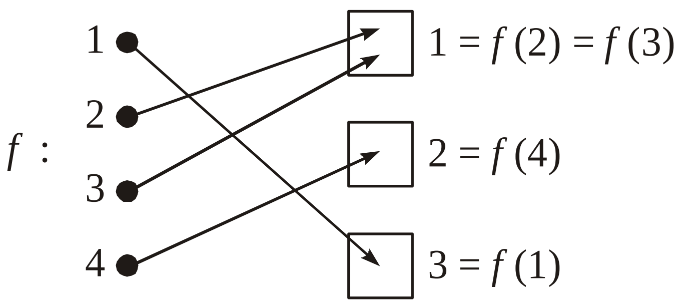
ZLICZANIE SURJEKCJI

Ile jest funkcji ze zbioru *X* <u>na</u> zbiór *Y* ?

$$|\,\mathrm{Sur}(X, Y)\,| = ?$$

Przyjmijmy oznaczenie:

$s_{n,m} = |\,\mathrm{Sur}(X, Y)\,|$ - liczba funkcji z X **na** Y, dla $|X| = n$, $|Y| = m$



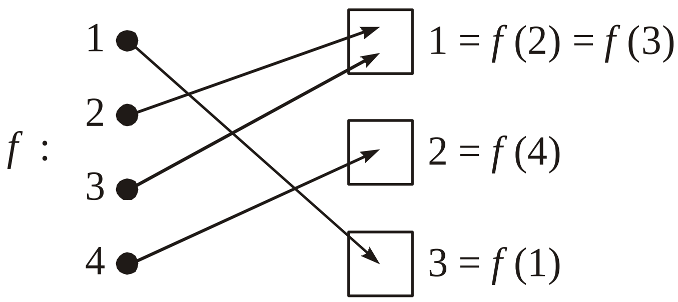
- każdej funkcji $f \in \mathrm{Sur}(X, Y)$ można przyporządkować podział zbioru X na m bloków, definiując go jako

$$N(f) = \{\, f^{-1}(\{y\}) : y \in Y \,\} \qquad \text{(tzw. jądro funkcji)}$$

- każdemu podziałowi $\pi \in \Pi_k(X)$ odpowiada dokładnie ***m*!** funkcji $f \in \mathrm{Sur}(X, Y)$, dla których $N(f) = \pi$. Każda z tych surjekcji przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie blokom podziału π elementy zbioru Y

$$s_{n,m} = m! \cdot \left\{ {n \atop m} \right\} = |\,\mathrm{Sur}(X, Y)\,| , \quad \text{dla} \quad |\,X\,| = n,\ |\,Y\,| = m$$

Przykład



$n = 4$, $m = 3$, $\Pi_3(X) \ni \pi = N(f) = \{\ \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\ \}$

PODZIAŁ LICZBY

$n, k \in \{ 1, 2, ... \}$

Na ile sposobów można zapisać liczbę *n*

w postaci sumy *k* składników: $\boldsymbol{n = a_1 + ... + a_k}$ **,**

gdzie $\boldsymbol{a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k > 0}$ **?**

Każdy taki ciąg składników $a_1, ..., a_k$ nazywamy ***podziałem liczby n na k składników***

$P(n, k)$ - liczba podziałów liczby n na k składników

$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k)$ - liczba wszystkich podziałów liczby n

Przyjmujemy dodatkowo, że $P(0, 0) = P(0) = 1$

Przykład zbioru podziałów liczby 6

$n = 6$	6	$P(6,1) = 1$
	5 1	$P(6,2) = 3$
	4 2	$P(6,3) = 3$
	4 1 1	$P(6,4) = 2$
	3 3	$P(6,5) = 1$
	3 2 1	$P(6,6) = 1$
	3 1 1 1	
	2 2 2	$P(6) = 11$
	2 2 1 1	
	2 1 1 1 1	
	1 1 1 1 1 1	

Diagram Ferrersa

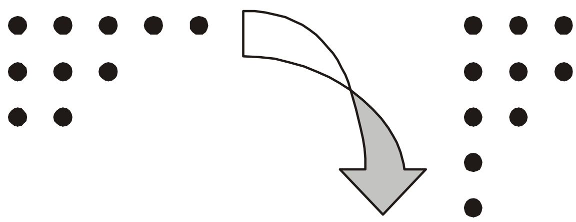
Dla podziału $n = a_1 + ... + a_k$ tworzymy diagram o k wierszach, który zawiera a_i punktów w i-tym wierszu

Przykład diagramu dla podziału liczby 10

10 = 5 + 3 + 2

● ● ● ● ●
● ● ●
● ●

Podział sprzężony powstaje po tzw. transpozycji diagramu Ferrersa



Przykład podziałów sprzężonych

10 = 5 + 3 + 2	• • • • • • • • • •	i	10 = 3 + 3 + 2 + 1 + 1	• • • • • • • • • •

$P^k(n)$ - liczba podziałów liczby n o największym składniku równym k

Twierdzenie

Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie takich podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k : $P(n, k) = P^k(n)$, dla $k \leq n$

Dowód

Każdy podział liczby n na k składników po transpozycji wyznacza dokładnie jeden, sprzężony z nim, podział liczby n, w którym największy składnik równy jest k. Transpozycja tego podziału sprzężonego wskazuje jednoznacznie na wyjściowy podział. Zatem istnieje bijekcja pomiędzy tymi dwoma zbiorami podziałów.

■

Twierdzenie

Dla $n \geq k > 0$ zachodzi $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$

Dowód

Rozważmy zbiór wszystkich podziałów liczby n na k składników. Podzielmy go na dwa rozłączne podzbiory:

- podziałów, które nie zawierają żadnego składnika równego 1
- podziałów, które zawierają co najmniej jeden składnik równy 1.

Każdemu podziałowi $a_1 + ... + a_k$ z pierwszego podzbioru można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować podział
$(a_1 - 1) + ... + (a_k - 1) = n - k$.
Zatem liczba podziałów w pierwszym podzbiorze wynosi $P(n - k, k)$, bo tyle jest podziałów liczby $n - k$ na k składników.
Każdemu podziałowi $a_1 + ... + a_{k-1} + 1$ z drugiego podzbioru można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować podział
$a_1 + ... + a_{k-1} = n - 1$.
Zatem liczba podziałów w drugim podzbiorze wynosi $P(n - 1, k - 1)$, bo tyle jest podziałów liczby $n - 1$ na $k - 1$ składników.
Oba podzbiory są rozłączne, a zatem wszystkich podziałów liczby n na k składników jest $P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$.

■

Tablica liczby podziałów liczby na składniki:

	$P(n)$	$P(n, k)$													
		k = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n = 0	**1**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	**1**	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	**2**	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	**3**	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	**5**	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	**7**	0	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
6	**11**	0	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	
7	**15**	0	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	
8	**22**	0	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0	0	0	
9	**30**	0	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0	0	0	
10	**42**	0	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	0	0	
11	**56**	0	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1	0	
12	**77**	0	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1	
...	...														...

Twierdzenie

Dla $n \geq k > 0$ zachodzi $P(n, k) = \sum_{i=0}^{k} P(n-k, i)$

Dowód

Rozbijmy zbiór wszystkich podziałów liczby n na k składników na $k + 1$ bloków: $B_0, B_1, ..., B_k$, gdzie B_i ($i = 0, 1, ..., k$) oznacza zbiór takich podziałów liczby n, które zawierają $k - i$ składników równych 1.

Każdemu podziałowi $a_1 + a_2 +... + a_i + 1 + ... +1$ ze zbioru B_i, można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować podział $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) +... + (a_i - 1) = n - k$.

Zatem liczba podziałów w zbiorze B_i wynosi $P(n - k, i)$, bo tyle jest podziałów liczby $n - k$ na i składników.

Sumując wszystkie $P(n - k, i)$ po $i = 0, 1, ..., k$ dostajemy liczność zbioru wszystkich podziałów liczby n na k składników.

■

$P_k(n)$ - liczba podziałów liczby n na składniki nie większe od k

($n = a_1 + ... + a_j$ i $a_i \leq k$ dla $i = 1, 2, ..., j$)

Twierdzenie

Dla $n \geq k > 0$ zachodzi $P_k(n) = \sum_{i=1}^{k} P(n, i)$

Dowód

Zauważmy, że $P_k(n) = \sum_{i=1}^{k} P^i(n)$, a wcześniej wykazano, że $P^i(n) = P(n, i)$.

■