Kolokwium 2

Zakres tematyczny

- Spójność, silna spójność grafów skierowanych.

Spójność (słaba spójność) występuje gdy graf pochodny (nieskierowany) jest spójny, tj. z każdego wierzchołka można dotrzeć do dowolnego innego wierzchołka. Silna spójność występuje, gdy podoba własność jest w grafie skierowanym.

Zbiór rozspajający - zbiór krawędzi, których usunięcie powoduje rozspójnienie grafu.

Minimalny zbiór rozspajający: żaden jego podzbiór własny nie jest rozspajający.

Spójność krawędziowa - najmniejsza moc zbioru rozspajającego.

- Cykle, drogi Hamiltona w grafach skierowanych. Twierdzenia Nasha-Williamsa, Meyniela.

Tw. Nasha-Williamsa: Jeśli dla każdego wierzchołka $w \in V$ spełnione jest: $d^+(w) \geq \frac{n}{2}, d^-(w) \geq \frac{n}{2}$ (n to liczba wierzchołków), to G jest hamiltonowski (posiada cykl Hamiltona).

Tw. Meyniela: Jeśli G jest silnie spójny, to jeśli dla każdych $v, w \in V$ niezależnych spełnione jest $d(v) + d(w) \geq 2n - 1$ ($d = d^+ + d^-$, n - liczba wierzchołków), to graf jest hamiltonowski (posiada cykl Hamiltona).

- Turnieje. Cykle, drogi Hamiltona w turniejach - twierdzenia Redei, Camiona.

Turniej - graf skierowany gdzie pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami istnieje dokładnie jeden łuk. Turniej o n wierzchołkach ma $n \cdot (n-1)/2$ łuków.

Tw. Redei: Jeśli G to turniej, to G posiada **drogę** Hamiltona.

Tw. Camiona: Jeśli G jest turniejem oraz jest silnie spójny, to G jest hamiltonowski (posiada **cykl** Hamiltona).

- Drzewa - kod Prufera (prosty, odwrotny). Cykle fundamentalne - operacja różnicy symetrycznej. Rozkład cyklu prostego na różnicę symetryczną cykli fundamentalnych.

Warunki równoważne dla drzew:

1. Graf G jest drzewem.
2. Graf G nie zawiera cykli elementarnych i ma $n-1$ krawędzi.
3. Graf G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
4. Graf G jest spójny i każda krawędź jest mostem (usunięcie jej rozspójnia graf).
5. Dowolne dwa wierzchołki grafu G są połączone dokładnie jedną drogą.
6. Graf G nie zawiera cykli elementarnych, ale dołączenie dowolnej nowej krawędzi do G tworzy dokładnie jeden taki cykl.

Wzór na liczbę wszystkich drzew: $n^{(n-2)}$.

- Spójność krawędziowa, wierzchołkowa - twierdzenia Mengera.
    - Zbiór rozspajający $\lambda(G)$ - minimalny zbiór krawędzi, których usunięcie powoduje rozspójnienie grafu.

  Twierdzenie (Mengera w wersji krawędziowej): Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym v i w.
    - Zbiór rozdzielający $\chi(G), \kappa(G)$ - minimalny zbiór wierzchołków, których usunięcie powoduje rozspójnienie grafu.

  Twierdzenie (Mengera w wersji wierzchołkowej): Maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki niesąsiednie v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym v i w.
  Jeżeli w G minimalny stopień wierzchołka wynosi x, to $\lambda(G) \leq x$.
- Sieci; funkcja przepływu. Przepływ maksymalny. Znajdowanie przepływu maksymalnego algorytmem ścieżek powiększających. Przekroje sieci; wyznaczanie przepływu maksymalnego i minimalnego przekroju - zastosowanie twierdzenia Forda-Fulkersona do dowodu, że przepływ jest maksymalny.

Sieć - graf skierowany $G=(V,E)$ ze stowarzyszonymi funkcjami F (funkcja przepływu, *flux*) oraz C (funkcja przepustowości, *capacity*), gdzie dla każdej krawędzi $e \in E$ jest $0 \leq F(e) \leq C(e)$, dla każdego $v \in V$, gdzie $v \neq s, t$ spełniona jest zależność, że suma przepływu na łukach wchodzących jest równa sumie przepływu na łukach wychodzących.

$$\sum(\text{co wpływa do } t) - \sum(\text{co wypływa z } t) = W(F)$$

$$\sum(\text{co wypływa z } s) - \sum(\text{co wpływa do } s) = W(F)$$

- Skojarzenie w grafie - wyznaczanie skojarzeń maksymalnej mocy algorytmem opartym na tw. Berge'a. W grafach dwudzielnych: skojarzenia maksymalnej mocy; minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie – wyznaczanie odpowiednich zbiorów krawędzi/wierzchołków. Tw. Königa.

- W prostych przypadkach wyznaczanie parametrów ν, ρ, α, τ oraz wyznaczanie odpowiednich zbiorów wierzchołków/krawędzi związanych z tymi parametrami.
  - ν - skojarzenie maksymalnej liczności - liczba krawędzi w grafie bez wspolnych wierzcholkow
  - ρ - minimalna liczba krawędzi pokrywających - krawędzi stykających się ze wszystkimi wierzchołkami
  - α - maksymalna liczba wierzchołków niezależnych (bez wspólnych krawędzi)
  - τ - minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie.

  $\nu + \rho = \alpha + \tau = n$ (liczba wierzcholkow)

  Lemat Gallaia:
  - $v(G) \leq \tau(G)$,
  - $\alpha(G) \leq \rho(G)$

  Twierdzenie Koniga:

  Jeżeli graf jest dwudzielny, to $\nu(G) = \tau(G)$.

Zad 01

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

M jest macierzą sąsiedztwa wierzchołków grafu skierowanego K.
a] Czy K jest turniejem?
Czy w K są spełnione założenia:
b] twierdzenia Nasha-Williamsa?
c] twierdzenia Meyniela?
Uzasadnij i przytocz te twierdzenia.
d] Czy graf K ma cykl Hamiltona?

a) **Turniej** według definicji to graf skierowany w którym pomiędzy każdą parą wierzchołków jest dokładnie jeden łuk. Każdy z wierzchołków grafie K (reprezentowany jako wiersz/kolumna w macierzy) powinien mieć 6 sąsiadów, czyli suma elementów wiersza i kolumny powinna być równa $n-1$. Graf K nie jest turniejem.

Twierdzenie Nasha-Williamsa: Jeżeli D jest grafem skierowanym bez pętli, w którym $d^+(v) \geq \frac{n}{2}$ oraz $d^-(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka v, to graf D ma cykl Hamiltona.

b) Graf K nie spełnia założeń twierdzenia Nasha-Williamsa, ponieważ istnieją wierzchołki posiadające mniej niż 4 wchodzące lub wychodzące łuki.

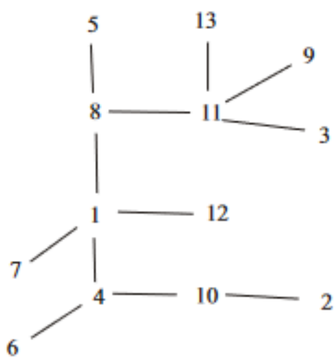
Twierdzenie Meyniela: Jeśli D jest **silnie spójnym** grafem skierowanym bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach i dla dowolnej pary wierzchołków niezależnych zachodzi warunek $d(v) + d(w) \geq$

$2n-1$, to graf D ma cykl Hamiltona.

c) Graf jest silnie spójny, ponieważ nie istnieje para wierzchołków dla której nie istniała by droga od jednego do drugiego. Należy teraz przeanalizować sumy stopni wszystkich par wierzchołków niezależnych. Stopnie są następujące: $d(1)=4, d(2)=4, d(3)=5, d(4)=6, d(5)=4, d(6)=5, d(7)=3$. Wierzchołki 1 i 3 są niezależne (nie istnieje droga z 1 do 3 ani z 3 do 1), natomiast $d(1)+d(3)<13$. Zatem graf K nie spełnia założeń twierdzenia Meyniela.

d) Graf K jest hamiltonowski. Przykład cyklu Hamiltona: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 1$.

Zad 02



a] Wyznacz kod Prüfera drzewa T.

b] Zbuduj drzewo o kodzie Prüfera (10, 11, 8, 4, 1, 11, 4, 1, 1, 8, 11).

Wyznaczanie kodu Prüfera

Algorytm wyznaczania kodu Prüfera na podstawie opisu drzewa. Z danego drzewa o zbiorze wierzchołków opisanym jako $\{1, 2, ..., n\}$ prowadzi do kodu Prüfera stanowiącego n-2 wyrazowy ciąg liczb ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$.

1. Jeśli w drzewie jest więcej niż jedna krawędź, szukamy w drzewie wierzchołka stopnia jeden o jak najniższym numerze ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ nazwijmy go v. Znajdujemy jedynego sąsiada tego wierzchołka, nazwijmy go w.
2. Do ciągu wyjściowego dopisujemy w, usuwamy krawędź $\{v, w\}$
3. Jeśli w drzewie została więcej niż jedna krawędź to przejść ponownie do punktu pierwszego. W przeciwnym wypadku, zapisany dotychczas ciąg jest ciągiem wyjściowym.

```
from sympy.combinatorics.prufer import Prufer
tab = [[1,4], [1,7], [1,8], [1,12], [2,10], [3,11], [4,6], [4,10], [5,8], [8,11], [9,11], [11,1
tab2 = [[i-1, j-1] for i,j in tab]
p = Prufer(tab2).prufer_repr
print([i+1 for i in p])
# Wynik: [10, 11, 8, 4, 1, 11, 4, 1, 1, 8, 11]
```

Wyznaczanie drzewa z kodu Prüfera

Algorytm wyznaczania opisu grafu na podstawie kodu Prüfera. Z danego kodu Prüfera stanowiącego n-2 wyrazowy ciąg liczb $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ prowadzi do opisu drzewa o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, ..., n\}$ z kodem Prüfera $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$.

1. Tworzymy dwie listy $L_1 = (a1, a2, ..., a_{n-2}), L_2 = \{1, 2, ..., n\}$. Drzewo zaczynamy tworzyć od grafu o wierzchołkach $1, 2, ..., n$ i wyłącznie trywialnych składowych (pusty zbiór krawędzi). Wyznaczmy sobie liczbę $c = 1$.
2. Wyznaczamy w L_2 najmniejszą wartość, która nie występuje w liście L_1 - nazwijmy ją i. Dodajemy do drzewa krawędź $\{i, a_c\}$. Z listy L_1, usuwamy a_c. Z listy L_2, usuwamy element i.
3. Jeśli L_1 jest niepuste to definiujemy `c:=c+1` i wracamy do punktu 2. W przeciwnym wypadku L_2 zawiera jeszcze dwa elementy, nazwijmy je l_1 i l_2. Do zbioru krawędzi drzewa dodajemy krawędź $\{l_1, l_2\}$ i kończymy działanie algorytmu.

```
from sympy.combinatorics.prufer import Prufer
tab = [10, 11, 8, 4, 1, 11, 4, 1, 1, 8, 11]
tab2 = [i-1 for i in tab]
p = Prufer(tab2).tree_repr
print([[i+1, j+1] for i,j in p])
# Wynik: [[2, 10], [3, 11], [5, 8], [4, 6], [1, 7], [9, 11], [4, 10], [1, 4], [1, 12], [1, 8],
```

Zad 03

W grafie pełnym K_n (Określ, jaka jest wartość n) :
(4a) Wyznacz drzewo rozpinające T o kodzie Prüfera (4, 4, 5, 3, 3).
(4b) Czy cykl (3, 7, 5, 4, 3) jest cyklem fundamentalnym tego grafu względem drzewa T ? Uzasadnij.
Czy cykl (3, 5, 4, 3) jest fundamentalny względem T? Uzasadnij.
(4c) Przedstaw cykl c = (4, 3, 2, 1, 5, 4) jako różnicę symetryczną cykli fundamentalnych.

n jest równe 7 (ponieważ kod Prufera ma n-2 = 5 elementów).

a) Drzewo:

```
  1   6
  |   |
2-4-5-3-7
```

b) Cykl fundamentalny grafu względem drzewa T powstaje poprzez połączenie dwóch gałęzi drzewa T dodatkową krawędzią i wzięcie najmniejszego cyklu opartego o tę krawędź. Cykl (3, 7, 5, 4, 3) wymagałby dodania dwóch krawędzi do drzewa T, zatem nie jest on cyklem fundamentalnym. Cykl 3, 5, 4, 3 wymaga dodania do drzewa tylko jednej krawędzi (3, 4), i jest on najmniejszy możliwy, zatem jest on cyklem fundamentalnym.

c) Konstrukcja - rozkładam cykl c na listę krawędzi i sprawdzam, których z tych krawędzi nie ma w drzewie T. Następnie na ich podstawie i na podstawie drzewa T tworzę cykle fundamentalne: $c_{1,2} \otimes c_{1,5} \otimes c_{2,3} \otimes c_{3,4}$. Można sprawdzić, krawędzie cyklu c będą się powtarzały w cyklach fundamentalnych nieparzystą liczbę razy, natomiast wszystkie pozostałe - parzystą; zatem różnica symetryczna cykli fundamentalnych stworzy szukany cykl.

Zad 04

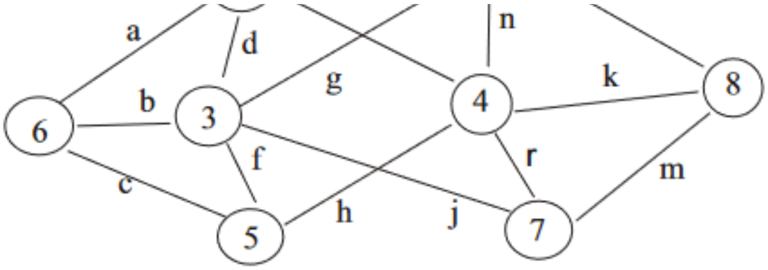
Rozpatrzmy graf dwudzielny G = K 100,97. Niech T będzie drzewem rozpinającym grafu G. Niech y oznacza liczbę wszystkich cykli fundamentalnych grafu G (względem drzewa T). Podaj jak najwęższy przedział, w jakim mieści się liczba y. Uzasadnij.

Graf dwudzielny $K_{n,m}$ zawiera $n \cdot m$ krawędzi. Drzewo o $n + m$ wierzchołkach zawiera $n + m - 1$ krawędzi (każdy kolejny wierzchołek dodaje jedną krawędź). Zatem po utworzeniu drzewa rozpinającego dla $K_{n,m}$ mamy $n \cdot m - n - m + 1$ brakujących krawędzi, tj. cięciw. Dodanie każdej z tych krawędzi do drzewa rozpinającego tworzy cykl fundamentalny. Zatem $y = n \cdot m - n - m + 1 = 100 \cdot 97 - 100 - 97 + 1 = 9504.$

Zad 05

1. Ile wynosi w G maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych między wierzchołkami 6 i 8?
2. Ile wynosi w G maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych między wierzchołkami 6 i 8?
3. Stosując odpowiednią wersję tw. Mengera, wyznacz minimalną moc zbioru rozspajającego (rozdzielającego) wierzchołki 6 i 8 oraz wskaż taki zbiór krawędzi (wierzchołków) o minimalnej mocy.
4. Ile wynosi spójność krawędziowa (wierzchołkowa) tego grafu? Uzasadnij.
5. Czy w tym grafie istnieją zbiory rozspajające (rozdzielające) minimalne, ale nie o minimalnej mocy?

G



1. Trzy drogi.
2. Dwie drogi - należy przejść przez 3 lub 4 by dostać się z 6 do 8.

- Zbiór rozspajający - minimalny zbiór krawędzi, których usunięcie powoduje rozspójnienie grafu.
  Twierdzenie (Mengera w wersji krawędziowej): Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym v i w.
- Zbiór rozdzielający - minimalny zbiór wierzchołków, których usunięcie powoduje rozspójnienie grafu.
  Twierdzenie (Mengera w wersji wierzchołkowej): Maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki niesąsiednie v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym v i w.

Spójnością wierzchołkową $\kappa(G)$ grafu spójnego G (dla $n \geq 2$) nazywamy najmniejszą moc jego zbioru rozdzielającego.

Graf jest k-spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona co najmniej k drogami krawędziowo rozłącznymi.

Graf o co najmniej k+1 wierzchołkach jest k-spójny (wierzchołkowo) wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona co najmniej k drogami wierzchołkowo rozłącznymi.

3. Minimalna moc zbioru rozspajającego to 3, minimalna moc zbioru rozdzielającego to 2.
4. Spójność krawędziowa to 3 (nie istnieje para wierzchołków, pomiędzy którymi byłyby mniej niż trzy drogi rozłączne krawędziowo), spójność wierzchołkowa to 2 (nie istnieje para wierzchołków, pomiędzy którymi byłoby mniej niż 2 drogi rozłączne wierzchołkowo).
5. Wierzchołkowa: $(1, 3, 5)$, krawędziowa: (c, g, j, h).

Zad 06

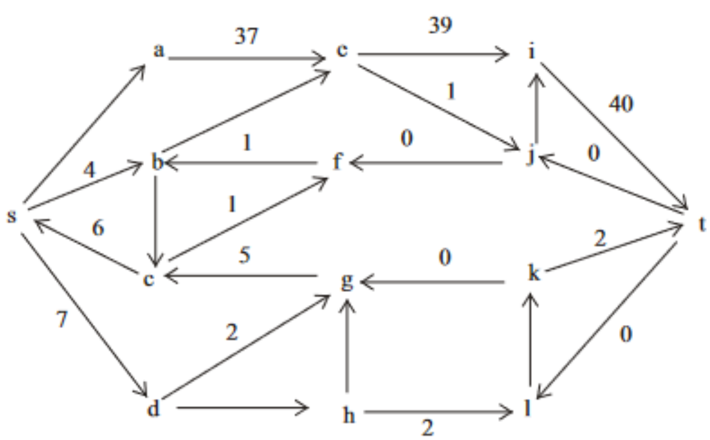
W sieci S1 s jest źródłem, t jest ujściem; przepustowość każdego łuku wynosi 40.
Nad łukami zaznaczono wartości pewnej funkcji. Nie dla wszystkich łuków te wartości są podane.

1) Uzupełnij wartości funkcji (dla siedmiu łuków, dla których wartość nie jest podana) w taki sposób

1) Uzupełnij wartości funkcji (dla siedmiu łuków, dla których wartość nie jest podana) w taki sposób, by otrzymać funkcję przepływu ze źródła s do ujścia t. Otrzymasz pewien przepływ F.
(Na rysunku wpisz te wartości nad łukami.)
2) Wyznacz przekrój P_U sieci odpowiadający zbiorowi wierzchołków U = {s, a ,b, g, h}.
(Wypisz i zaznacz na schemacie łuki wchodzące w skład przekroju P_U.)
3) Wyznacz przepustowość przekroju P_U.
4) Wyznacz wartość przepływu F przez przekrój P_U.

5) Konstruując ciąg ścieżek powiększających (wystartuj, oczywiście, z przepływu F), wyznacz przepływ maksymalny w sieci S1.
(Ścieżki zaznacz na kolejnych rysunkach oraz wypisz je pod rysunkiem, odpowiadającym danej ścieżce. Oblicz również wartość przepływu, jaki otrzymujesz w każdym kroku algorytmu.)
6) Udowodnij, że w efekcie procedury otrzymany został przepływ maksymalny.
(Zaznacz na rysunku wartości końcowego przepływu maksymalnego.)
7) Wyznacz przekrój o minimalnej przepustowości.

S1



1. $(s, a) : 37, (b, e) : 3, (d, h) : 5, (l, k) : 2, (h, g) : 3$
2. Przekrój P_U dla $U = \{s, a, b, g, h\}$ składa się z łuków **wychodzących** z wierzchołków U do zbioru $V \setminus U$. W tym wypadku będą to łuki $(h, l), (g, c), (a, e), (b, c), (b, e), (s, d)$.
3. Przepustowość przekroju P_U to suma przepustowości wszystkich łuków należących do P_U. Ponieważ $|P_U| = 5$, to $C(P_U) = 6 \cdot 40 = 240$.
4. Przepływ $F(P_U)$ jest równy $2 + 5 + 37 + 2 + 7 + 3 = 56$.
5. Korzystając z twierdzenia Forda-Fulkersona wiemy, że maksymalna wartość przepływu jest równa przepustowości minimalnego przekroju. Wynik 80.
6. Wszystkie łuki wchodzące do t są nasycone.
7. Łuki od zbioru wszystkich wierzchołków bez t.

Zad 07

W sieci S2 = ((V, A), c), (s jest źródłem, t jest ujściem), przepustowości łuków c (x,y) zaznaczono przy łukach liczbami podkreślonymi.
Początkowa funkcja przepływu F ma wartość 0 dla każdego łuku (x,y).

(1) Czy ścieżka p1 = (s, b, e, g, t) jest ścieżką powiększającą przepływ F ? Uzasadnij.

(2) Wyznacz przepustowość przekroju P_u odpowiadającego zbiorowi wierzchołków U = {s, b, g, d }.

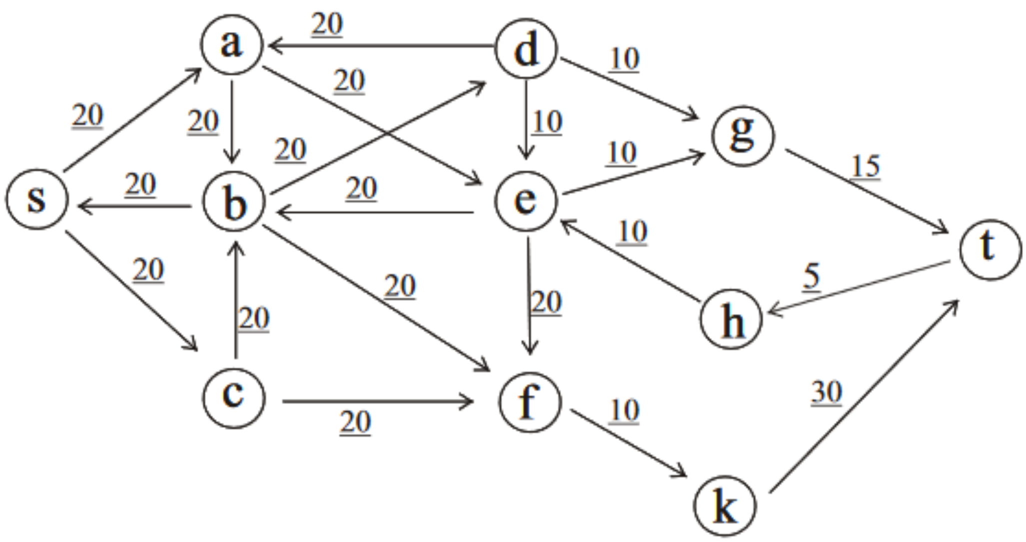
(3) Budując ciąg ścieżek powiększających, wyznacz przepływ maksymalny ze źródła s do ujścia t . Wypisz tworzone po kolei ścieżki i zaznacz je na schematach sieci. Na każdym kroku algorytmu oblicz wartość W(MF) uzyskanego przepływu MF.

(4) Zaznacz na schemacie sieci uzyskany końcowy przepływ maksymalny.

(5) Wskaż przekrój sieci między źródłem s a ujściem t, mający minimalną przepustowość. Uzasadnij, że jest to przekrój o minimalnej przepustowości.

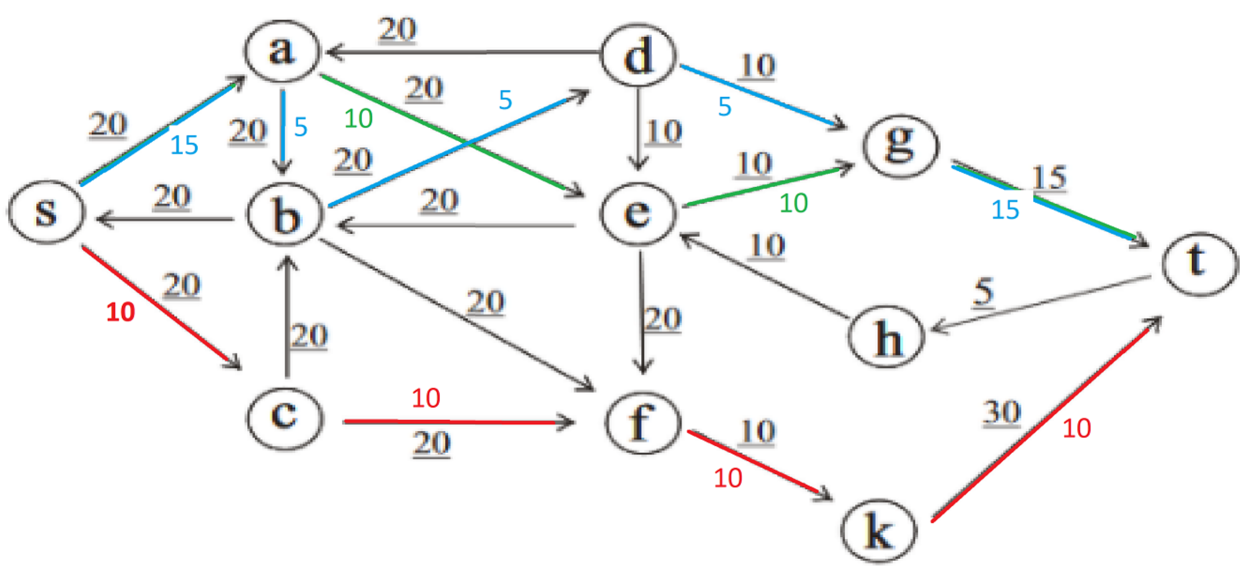
(6) Uzasadnij fakt, że wyznaczony końcowy przepływ MF jest rzeczywiście przepływem maksymalnym.

S2



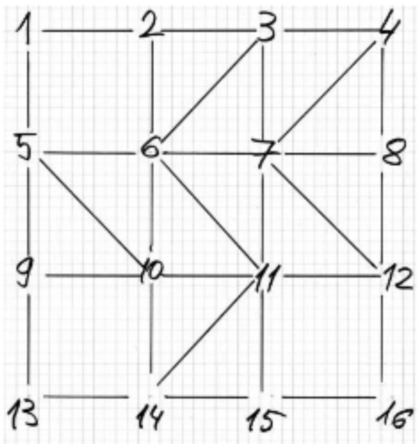
1. Wartość funkcji przepływu z s do b jest zero - nie jest.
2. Wychodzi nam 6 krawędzi: $(s, a), (s, c), (d, a), (d, e), (g, t), (b, f)$. Razem: 105.
3. Rysunek:

S2



4. Całkowity przepływ: 25.
5. Wszystko bez t, k.
6. Wszystkie drogi są albo wychodzące maksymalne, albo wchodzące zerowe.

Zad 08



Wyznacz kilka skojarzeń maksymalnej mocy w podanym grafie,

stosując algorytm oparty na tw. Berge'a.

Zacznij algorytm od niewielkiego skojarzenia początkowego (np. skojarzenia mocy 3).

Twierdzenie Berge'a (Lemat Berge'a) - M jest skojarzeniem maksymalnej mocy wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje droga powiększająca względem M.

Skojarzenie w grafie - podzbiór krawędzi grafu (oznaczany $M \subset E$) o tej własności, że każdy wierzchołek jest końcem co najwyżej jednej krawędzi.

Droga przemienna - droga prosta o krawędziach na przmian ze skojarzenia M oraz nie ze skojarzenia (z $E \setminus M$).

Definicja: wierzchołki nasycone względem M - wierzchołki incydentne z krawędziami z M.

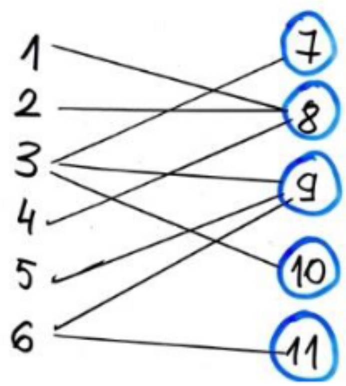
Droga powiększająca względem M:

1. nie ma cyklu,
2. jest przemienna (na zmianę nasycony i nienasycony wierzchołek),
3. ma nienasycone końce.

Algorytm oparty na tw. Berge'a najpierw tworzy drogę przemienną przez wszystkie krawędzie M (zaczynając i kończąc na krawędziach spoza M), po czym zamienia nasycenie krawędzi.

Zad 09

$G = (V_1 \cup V_2, E)$ – graf dwudzielny



Wyznacz w G:
1) skojarzenie maksymalnej mocy;
2) minimalną liczbę wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie; wskaż odpowiedni zbiór wierzchołków;
3) maksymalną liczbę wierzchołków niezależnych; wskaż odpowiedni zbiór wierzchołków;
4) minimalną liczbę krawędzi pokrywających wszystkie wierzchołki; wskaż odpowiedni zbiór krawędzi.
5) Na podstawie wyników z **1) – 4)** przekonaj się, jak spełnione są równości i nierówności występujące w twierdzeniu Gallaia i w tw. Königa.

Skojarzenie maksymalne - największa wartość $\nu(G)$.

- ν - skojarzenie maksymalnej liczności - liczba krawędzi w grafie bez wspolnych wierzcholkow
- ρ - minimalna liczba krawędzi pokrywających - krawędzi stykających się ze wszystkimi wierzchołkami
- α - maksymalna liczba wierzchołków niezależnych (bez wspólnych krawędzi)
- τ - minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie.

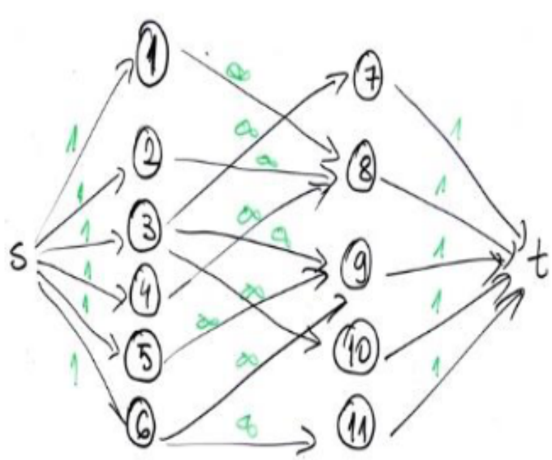
$\nu + \rho = \alpha + \tau = n$ (liczba wierzcholkow)

Lemat Gallaia:

- $v(G) \leq \tau(G)$,
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$

Twierdzenie Koniga:
Jeżeli graf jest dwudzielny, to $\nu(G) = \tau(G)$.

Zad 10



W tej sieci zielonymi liczbami oznaczone są przepustowości łuków.

Łuki z wierzchołków 1, 2, 3, 4, 5, 6 do wierzchołków

7, 8, 9, 10, 11 mają bardzo dużą przepustowość np. = 100.

Łuki ze źródła s do wierzchołków 1, 2, 3, 4, 5, 6 mają przepustowość 1.

Łuki z wierzchołków 7, 8, 9, 10, 11 do ujścia t mają przepustowość 1.

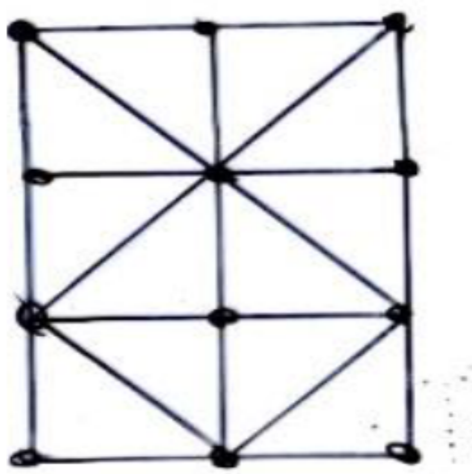
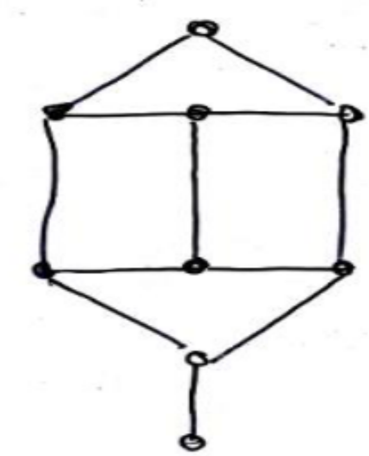
Dla każdego łuku wartość przepływu początkowego wynosi 0.

Skonstruuj przepływ maksymalny w tej sieci.

Zauważ, w jaki sposób uzyskany przepływ maksymalny wyznacza skojarzenie maksymalnej mocy w grafie dwudzielnym G z poprzedniego zadania.

Zad 11

Wyznacz wartości υ, ρ, α, τ dla poniższych dwóch grafów. Przekonaj się, jak spełnione są równości i nierówności występujące w twierdzeniu Gallaia.

- ν - skojarzenie maksymalnej liczności - liczba krawędzi w grafie bez wspolnych wierzcholkow
- ρ - minimalna liczba krawędzi pokrywających - krawędzi stykających się ze wszystkimi wierzchołkami
- α - maksymalna liczba wierzchołków niezależnych (bez wspólnych krawędzi)
- τ - minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie.

$\nu + \rho = \alpha + \tau = n$ (liczba wierzcholkow)

Lemat Gallaia:

- $v(G) \leq \tau(G)$,
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$

Twierdzenie Koniga:
Jeżeli graf jest dwudzielny, to $\nu(G) = \tau(G)$.