Wykład 5

Stwierdzenie 5.1 *Niech*
$e_1 = (1,0,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0),\ \cdots,\ e_n = (0,0,0,...,0,1)$
będzie bazą standardową przestrzeni R^n. Niech $f : R^n \to R^s$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym warunki:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{s,1}),\\ f(e_2) &= (a_{1,2}, a_{2,2}, ..., a_{s,2}),\\ &\vdots\\ f(e_n) &= (a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{s,n}). \end{aligned}$$

Wówczas $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n,\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n,\ ...,\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + ... + a_{s,n}x_n)$.

Zapis ten nazywamy wzorem analitycznym przekształcenia f.

Definicja 5.2 *Niech $f : R^n \to R^s$ będzie określone wzorem* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n,\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n,\ ...,\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + ... + a_{s,n}x_n)$. *Macierzą f w bazach standardowych nazywamy*

$$M(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie 5.3 *Niech*
$e_1 = (1,0,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0),\ \cdots,\ e_n = (0,0,0,...,0,1)$
będzie bazą standardową przestrzeni R^n. Wówczas

$$M(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}$$

jest macierzą przekształcenia $f : R^n \to R^s$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{s,1}),\\ f(e_2) &= (a_{1,2}, a_{2,2}, ..., a_{s,2}),\\ &\vdots\\ f(e_n) &= (a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{s,n}). \end{aligned}$$

Czyli obrazy kolejnych wektorów bazy standardowej są kolejnymi kolumnami macierzy przekształcenia.

Definicja 5.4 *Niech układ $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem K zaś $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)$ będzie bazą przestrzeni W nad tym samym ciałem K. Wówczas macierzą przekształcenia $f \in L(V, W)$w tych bazach* *nazywamy macierz* $M(f)^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}$*, gdy dla każdego wektora bazy* $f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{s} a_{i,j}\beta_i$.

Definicja 5.5 *Macierzą jednostkową nazywamy macierz przekształcenia identyczności czyli taką macierz kwadratową, która ma na przekątnej jedynki a w pozostałych miejscach zera.*

Definicja 5.6 *Macierzą transponowaną do macierzy* M *nazywamy taką macierz* M^T*, w której wiersze i kolumny są zamienione rolami. To znaczy*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{s,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{s,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}$$

Algorytm 1 Niech $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\ldots,t}$ będzie zbiorem wektorów z przestrzeni R^n zaś $\{\beta_i\}_{i=1,2,\ldots,t}$ Będzie zbiorem wektorów z przestrzeni R^s . Szukamy przekształcenia liniowego $f : R^n \to R^s$ spełniającego warunek $\forall_{i\in I}\ f(\alpha_i) = \beta_i$.

1) Budujemy macierz $M = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_t & \beta_t \end{array}\right]$

2) Sprowadzamy macierz M do postaci schodkowej zredukowanej M' przy pomocy operacji elementarnych i wykreślamy wiersze zerowe.

3) Jeżeli schodek wypadł po prawej stronie kreski to STOP takie przekształcenie nie istnieje.

4) Jeżeli z lewej strony kreski otrzymaliśmy macierz jednostkową to STOP kolejne wiersze opisują obrazy wektorów bazy standardowej zaś macierz po prawej stronie kreski jest równa $M(f)^T$.

5) (w pozostałych przypadkach) Uzupełniamy wiersze macierzy z lewej strony kreski do bazy R^n, wpisujemy z prawej strony dowolne wektory i GO TO 2).

Przykład 5.7 *Szukamy wzoru analitycznego i macierzy w bazie standardowej przekształcenia* $\phi : R^2 \to R^2$,

które jest rzutem na prostą $Lin\{(1,-3)\}$ *wzdłuż prostej* $Lin\{(2,-5)\}$.

Z definicji rzutu
$\phi(1,-3) = (1,-3)$
$\phi(2,-5) = (0,0)$

Budujemy macierz
$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *i operacjami elementarnymi sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy: $\phi(1,0) = (-5,15)$, $\phi(0,1) = (-2,6)$
$M(\phi) = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$, $\phi(x,y) = (-5x - 2y,\ 15x + 6y)$.

Definicja 5.8 *Niech A i B będą macierzami nad ciałem K, gdzie A ma n kolumn i t wierszy zaś B ma s kolumn i n wierszy. Niech $f \in L(K^n, K^t)$ i $g \in L(K^s, K^n)$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że $M(f) = A$ i $M(g) = B$ (w bazach standardowych). Iloczynem macierzy nazywamy macierz $A \cdot B = M(f \circ g)$. Czyli $M(f) \cdot M(g) = M(f \circ g)$.*

Uwaga Jeżeli liczba kolumn macierzy A jest różna od liczby wierszy macierzy B to iloczyn $A \cdot B$ nie istnieje.

Definicja 5.9
Macierzą jednostkową nazywamy taką macierz kwadratową, która ma na przekątnej jedynki a w pozostałych miejscach zera. Oznaczamy ją symbolem I lub I_n.
Macierz kwadratową $A \in K^n_n$ nazywamy odwracalną gdy istnieje taka macierz $B \in K^n_n$, że $AB = BA = I$.

Twierdzenie 5.10 *Własności mnożenia macierzy:*
1) łączność: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2) $\forall_{r \in K} \quad r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$
3) $\forall_{r_1, r_2 \in K} \quad (r_1 A_1 + r_2 A_2) \cdot B = r_1 A_1 \cdot B + r_2 A_2 \cdot B$
4) $\forall_{r_1, r_2 \in K} \quad A \cdot (r_1 B_1 + r_2 B_2) = r_1 A \cdot B_1 + r_2 A \cdot B_2$
5) Jeżeli I jest macierzą jednostkową to $\forall_A \quad A \cdot I = A$ *i* $A = I \cdot A$

Definicja 5.11 *Jedynkami macierzowymi nazywamy macierze $e_{i,j}$, które mają jedynkę w i-tym wierszu i j-tej kolumnie a pozostałe współczynniki zerowe.*

Twierdzenie 5.12 *Zbiór $\{e_{i,j}\}_{1 \le i \le t,\ 1 \le j \le n}$ jest bazą przestrzeni K^n_t.*

Wzory mnożenia
1) $e_{i,j} e_{k,l} = \begin{cases} \theta & j \neq k \\ e_{i,l} & j = k \end{cases}$.

2) Dla $[a_1\ a_2\ ...\ a_n] \in K^n$ i $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in K_n$

$$[a_1\ a_2\ ...\ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n]$$

3) Dla $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \in K_t^n$ i $B = [k_1\ k_2\ ...\ k_s] \in K_n^s$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \cdot [k_1\ k_2\ ...\ k_s] = \begin{bmatrix} w_1k_1 & w_1k_2 & \cdots & w_1k_s \\ w_2k_1 & w_2k_2 & \cdots & w_2k_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_tk_1 & w_tk_2 & \cdots & w_tk_s \end{bmatrix}$$

Co a rozpisaniu na elementy daje:
Jeżeli $A = [a_{i,j}] \in K_t^n$, $B = [b_{p,q}] \in K_n^s$ i $AB = [c_{u,w}] \in K_t^s$,
to $c_{u,w} = \sum_{j=1}^{n} a_{u,j}b_{j,w}$.

Wyznacznik macierzy

Niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w siebie. Wprowadzimy funkcję zwaną wyznacznikiem, która mierzy jak f zmienia objętości brył.

Definicja 5.13 *Permutacją zbioru A nazywamy każde różnowartościowe i "na" przekształcenie $f : A \to A$. Jeśli $A = \{1, 2, ..., n\}$ To zbiór wszystkich permutacji A oznaczamy symbolem S_n.*

Stwierdzenie 5.14 $|S_n| = n!$.

Ponieważ w S_n mamy łączne działanie składania przekształceń (zwane dalej iloczynem), przekształcenie inedtycznościowe i przekształcenia odwrotne więc S_n z działaniem składania nazywamy **grupą permutacji**.

Definicja 5.15 *Permutację $\tau \in S_n$ nazywamy transpozycją i oznaczamy $\tau = (a, b)$, gdy $a \neq b$ i τ jest określona wzorem:*
$\tau(a) = b$, $\tau(b) = a$ oraz $\tau(j) = j$, gdy $j \neq a$ i $j \neq b$.

Twierdzenie 5.16 *Każda permutacja $\tau \in S_n$ jest iloczynem transpozycji.*

Definicja 5.17 *Permutację nazywamy parzystą jeśli jest iloczynem parzystej liczby transpozycji i nieparzystą gdy jest iloczynem nieparzystej liczby transpozycji.*

Znakiem permutacji τ nazywamy liczbę $(-1)^{\tau} = \begin{cases} 1 & , \tau \text{ jest parzysta} \\ -1 & , \tau \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$

Twierdzenie 5.18 *Każda permutacja jest parzysta albo nieparzysta.*

Definicja 5.19 Wyznacznikiem *nazywamy funkcję $Det : K_n^n \to K$ określoną wzorem: jeżeli $A = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} e_{i,j}$ to*
$Det(A) = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\tau} a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} ... a_{n,\tau(n)}$.

Liczenie wyznacznika w prostych przypadkach .
Macierze rozmiaru ≤ 3. (metoda Sarrusa.)

$Det[a_{1,1}] = a_{1,1}$.

$$Det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

$$Det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} -$$
$$- a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}.$$

Wyznaczników macierzy stopnia >3 nie da się liczyć metodą Sarrusa.

Twierdzenie 5.20 *Jeżeli macierz $A = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} e_{i,j}$ jest górną lub dolną trójkątną to wyznacznik jej jest iloczynem elementów na przekątnej*
$Det(A) = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$.

Wniosek 5.21 *Jeżeli macierz $A = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} e_{i,j}$ jest w postaci schodkowej to jej wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej $Det(A) = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$.*

Wyznacznik a operacje elementarne

Twierdzenie 5.22 (Cauchy'ego) *Wyznacznik iloczynu macierzy jest iloczynem wyznaczników. $Det(AB) = Det(A)Det(B)$.*

Definicja 5.23 *Macierzą elementarną nazywamy macierz kwadratową $E_{i,j}(r) = I + re_{i,j} \in K_n^n$, gdzie $i \neq j$ oraz I jest macierzą jednostkową. To znaczy macierz mającą jedynki na przekątnej, r w miejscu i,j a w pozostałych miejscach zera.*

Twierdzenie 5.24 *Niech $A \in K_n^s$, $B \in K_t^n$ i $E_{i,j}(r) \in K_n^n$ będą macierzami. Wówczas:*

1) $E_{i,j}(r)A$ powstaje z macierzy A przez dodanie do wiersza i-tego r razy wiersz j-ty.

2) $BE_{i,j}(r)$ powstaje z macierzy B przez dodanie do j-tej kolumny r razy kolumnę i-tą.

Twierdzenie 5.25 *.*

1) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez dodanie do pewnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę to $Det(A) = Det(B)$.

1') Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez dodanie do pewnej kolumny innej kolumny pomnożonego przez liczbę to $Det(A) = Det(B)$.

2) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez pomnożenie pewnego wiersza przez liczbę t to $Det(A) = t \cdot Det(B)$.

2') Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez pomnożenie pewnej kolumny przez liczbę t to $Det(A) = t \cdot Det(B)$.

3) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez zamianę dwóch wierszy to $Det(A) = -Det(B)$.

3) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez zamianę dwóch kolumn to $Det(A) = -Det(B)$.

Twierdzenie 5.26 (rozwinięcie Laplace'a)
Niech $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}e_{i,j} \in K_n^n$ będzie macierzą kwadratową. Symbolem $A_{i,j}$ oznaczamy macierz powstałą z A przez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Ustalamy liczbę $t \in \{1, 2, ..., n\}$. Wówczas:

1) $Det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{t+j} a_{t,j} Det(A_{t,j})$.

2) $Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+t} a_{i,t} Det(A_{i,t})$.

Dowód:

krok 1) Przypuśćmy, że w ostatnim wierszu jedynym niezerowym elementem jest $a_{n,n} = 1$, (n-ty wiersz macierzy A jest wektorem e_n).

Wtedy $Det(A) = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\tau} a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} ... a_{n,\tau(n)} =$
$= \sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^{\tau} \left(a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} ... a_{n-1,\tau(n-1)}\right) a_{n,n} = Det(A_{n,n}) a_{n,n} = Det(A_{n,n})$
$\left(Det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_{n,j} Det(A_{n,j})\right)$.

krok 2) Przypuśćmy, że w ostatnim wierszu jedynym niezerowym elementem jest $a_{n,t} = 1$, n-ty wiersz macierzy A jest wektorem e_t.

Oznaczmy $A = [k_1\, k_2 \ldots k_t \ldots k_n]$ i $B = [k_1\, k_2 \ldots k_{t-1}\, k_{t+1} \ldots k_n\, k_t]$. Macierz B powstaje z A przez zamianę kolumn cyklem $\tau = (k_t\, k_{t+1} \ldots k_n)$ długości n-t+1. $(B = [k_{\tau(1)}\, k_{\tau(2)} \ldots k_{\tau(t)} \ldots k_{\tau(n)}])$. Zatem $(-1)^{\tau} = (-1)^{n-t}$ i $Det(A) = (-1)^{n-t} Det(B)$. Ponadto $\forall_j A_{n,t} = B_{n,n}$ więc tak jak w kroku 1) $Det(A) = (-1)^{n-t} Det(B) = (-1)^{n+t} Det(B_{n,n}) = (-1)^{n+t} Det(A_{n,t})$ oraz $\left(Det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_{n,j} Det(A_{n,j})\right)$.

krok 3) Rozwinięcie względem n-tego wiersza. Zapiszmy n-ty wiersz $w_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}e_j$ Oznaczmy symbolem $A^{(j)}$ macierz powstałą z A przez zastąpienie n-tego wiersza wektorem e_j. Wtedy $A^{(j)}_{n,j} = A_{n,j}$ I ze względu na liniowość wyznacznika względem n-tego wiersza $Det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}Det(A)^{(j)})$ $= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}a_{n,j}Det(A^{(j)}_{n,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}a_{n,j}Det(A_{n,j})$.

krok 4) Rozwinięcie względem t-tego wiersza.

Oznaczmy $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_t \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{t-1} \\ k_{t+1} \\ \dots \\ k_n \\ k_t \end{bmatrix}$. Macierz B powstaje z A przez zamianę wierszy cyklem $\tau = (k_t\, k_{t+1} \dots k_n)$ długości $n - t + 1$.
Zatem $(-1)^{\tau} = (-1)^{n-t}$ i $Det(A) = (-1)^{n-t}Det(B)$. Ponadto $\forall_j A_{t,j} = B_{n,j}$ i $b_{n,j} = a_{t,j}$ więc tak jak w kroku 3
$Det(A) = (-1)^{n-t}Det(B) = (-1)^{n-t}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}b_{n,j}Det(B_{n,j})$
$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{t+j}a_{t,j}Det(A_{t,j})$.

krok 5) Rozwinięcie względem t-tej kolumny.
Niech

$\square$

Algorytm liczenia wyznacznika

Dana macierz kwadratowa A.

1) Stosując operacje elementarne typu dodanie do pewnego wiersza wielokrotności innego lub dodanie do pewnej kolumny wielokrotności innej kolumny doprowadzamy macierz A do postaci w której w wybranej kolumnie (wierszu) jest tylko jeden element $\neq 0$.

2) Zgodnie z metodą Laplace'a rozwijamy względem tej kolumny (wiersza).

3) Jeżeli otrzymana macierz ma wymiar > 1 Go To 1).

Przykład 5.27

$$\begin{array}{cccc} & -2I & & -2I \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}1 \begin{vmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Wzór Cramera na rozwiązania układu równań

Dany układ równań $\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2+ & \cdots & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$

o macierzy kwadratowej $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$

Jeżeli $Det(A) \neq 0$ to rozwiązaniem jest ciąg

$$x_1 = \frac{Det(A_1)}{Det(A)},\ x_2 = \frac{Det(A_2)}{Det(A)},\ ...\ x_n = \frac{Det(A_n)}{Det(A)},$$

gdzie macierz A_i powstaje z macierzy A przez zastąpienie i - tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Własności wyznacznika wynikające bezpośrednio z własności permutacji

Twierdzenie 5.28 *Niech $A \in K_n^n$ będzie macierzą.*
1) $S_n = \{\sigma \mid \sigma^{-1} \in S_n\}$. $S_n^{-1} = S_n$.
1') $Det(A) = Det(A^T)$.
2) Dla dowolnej permutacji τ $S_n = \{\tau\sigma \mid \sigma \in S_n\}$. $S_n = \tau S_n$.
2') Jeżeli macierz A' powstała z A przez przestawienie kolumn permutacją τ to $Det(A) = (-1)^\tau Det(A')$.
2") Jeżeli macierz A'' powstała z A przez przestawienie wierszy permutacją τ to $Det(A) = (-1)^\tau Det(A'')$.
3) Jeżeli macierz A ma dwie jednakowe kolumny to $Det(A) = 0$.
3') Jeżeli macierz A ma dwa jednakowe wiersze to $Det(A) = 0$.

Twierdzenie 5.29 *Wyznacznik jest funkcją liniową względem dowolnie wybranej kolumny. Dokładniej - Jeżeli $A' = [k_1\ k_2\ ...\ k_i'\ ...\ k_n]$, $A'' = [k_1\ k_2\ ...\ k_i''\ ...\ k_n]$ i $A = [k_1\ k_2\ ...\ ak_i' + bk_i''\ ...\ k_n]$ to $Det(A) = aDet(A') + bDet(A'')$.*

Wniosek 5.30 *Wyznacznik jest funkcją liniową względem dowolnie wybranego wiersza.*

Minory .

Definicja 5.31 *Minor stopnia k macierzy A o m wierszach i n kolumnach, tak że* $k \leq min(m, n)$ *to wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k powstałej z macierzy A przez skreślenie (m-k) wierszy i (n-k) kolumn. Minorami stopnia k=1 są komórki macierzy.*

Definicja 5.32 .
Rząd macierzy jest równy stopniowi największego niezerowego minora.

Twierdzenie 5.33 *Niech* $A \in K_n^n$ *będzie kwadratową macierzą stopnia n. Wówczas równoważne są warunki:*
1) Macierz A jest odwracalna.
2) $rz(A) = n$.
3) $Det(A) \neq 0$