

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

5

Podstawy

**FIZYKI**

WNICTWO NAUKOWE PWN

## Wybrane właściwości fizyczne (wartości zaokrąglone)

**Powietrze** (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m <sup>3</sup>
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepeli właściwych $c_p/c_v$	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebiecia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

### Woda

gęstość	1000 kg/m <sup>3</sup>
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ( $\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

### Ziemia

masa	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6,37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s <sup>2</sup>
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu sputnika na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22}$ A · m <sup>2</sup>
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

### Odległości od Ziemi

do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwowlanego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

### Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
$10^{24}$	jotta	Y	$10^{-1}$	decy	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centy	c
$10^{18}$	eksa	E	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	mikro	μ
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	piko	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	kilo	k	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hekto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deka	d	$10^{-24}$	jokto	y

Podstawy

---

**FIZYKI**

**5**

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

Podstawy **5**

---

**FIZYKI**

Z języka angielskiego tłumaczyli

**Adam Babiński, Rafał Bożek**



W A R S Z A W A 2003

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E PWN

Dane oryginału:

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker

FUNDAMENTALS OF PHYSICS, PART 5

John Wiley & Sons, Inc.

Authorized translation from English language edition published By John Wiley & Sons, Inc.

Copyright © 2001 by John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Przekład z języka angielskiego **Adam Babiński** (rozdziały 39–42)

**Rafał Bożek** (rozdziały 43–45)

Redaktor naukowy **Mirosław Łukaszewski**

Redaktor **Anna Bogdanienko**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Tytuł dotowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu

Copyright © for the Polish edition

by Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Warszawa 2003

Wydawnictwo Naukowe PWN SA

00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10

tel. (0-prefiks-22) 69-54-321

faks: (0-prefiks-22) 69-54-031

e-mail: pwn@pwn.com.pl

<http://www.pwn.pl>

ISBN 83-01-13994-3 t. 5

ISBN 83-01-13997-8 t. 1–5

Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Wydanie pierwsze

Arkuszy drukarskich 34,5

Druk ukończono w sierpniu 2003 r.

Skład i łamanie: ArtGraph, Warszawa

Druk i oprawa: Toruńskie Zakłady Graficzne „Zapolex” Sp. z o.o.

# SPIS ZAWARTOŚCI WSZYSTKICH TOMÓW

## TOM 1

- Rozdział 1. Pomiar
- Rozdział 2. Ruch prostoliniowy
- Rozdział 3. Wektory
- Rozdział 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5. Siła i ruch I
- Rozdział 6. Siła i ruch II
- Rozdział 7. Energia kinetyczna i praca
- Rozdział 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- Rozdział 9. Układy cząstek
- Rozdział 10. Zderzenia
- Rozdział 11. Obroty
- Rozdział 12. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

## TOM 2

- Rozdział 13. Równowaga i sprężystość
- Rozdział 14. Gravitacja
- Rozdział 15. Płyny
- Rozdział 16. Organia
- Rozdział 17. Fale I
- Rozdział 18. Fale II
- Rozdział 19. Temperatura, ciepło  
i pierwsza zasada termodynamiki
- Rozdział 20. Kinetyczna teoria gazów
- Rozdział 21. Entropia i druga zasada termodynamiki

## TOM 3

- Rozdział 22. Ładunek elektryczny
- Rozdział 23. Pole elektryczne
- Rozdział 24. Prawo Gaussa

- Rozdział 25. Potencjał elektryczny
- Rozdział 26. Pojemność elektryczna
- Rozdział 27. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- Rozdział 28. Obwody elektryczne
- Rozdział 29. Pole magnetyczne
- Rozdział 30. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- Rozdział 31. Indukcja i indukcyjność
- Rozdział 32. Magnetyzm materii; równanie Maxwella
- Rozdział 33. Organia elektromagnetyczne i prąd zmienny

## TOM 4

- Rozdział 34. Fale elektromagnetyczne
- Rozdział 35. Obrazy
- Rozdział 36. Interferencja
- Rozdział 37. Dyfrakcja
- Rozdział 38. Teoria względności

## TOM 5

- Rozdział 39. Fotony i fale materii
- Rozdział 40. Jeszcze o falach materii
- Rozdział 41. Wszystko o atomach
- Rozdział 42. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- Rozdział 43. Fizyka jądrowa
- Rozdział 44. Energia jądrowa
- Rozdział 45. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

### Dodatki

- Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych
- Skorowidz

# SPIS TABEL

- 40.1. Poziomy energetyczne 50
- 40.2. Liczby kwantowe atomu wodoru 54
- 40.3. Liczby kwantowe stanów atomu wodoru o liczbie kwantowej  $n = 2$  58
- 41.1. Stany elektronowe atomu 70
- 41.2. Konfiguracja i energia stanu podstawowego 82
- 42.1. Niektóre właściwości elektryczne dwóch materiałów 105
- 42.2. Właściwości półprzewodników domieszkowanych 118
- 43.1. Niektóre właściwości wybranych nuklidów 137
- 43.2. Porównanie dwóch emiterów cząstek  $\alpha$  149
- 44.1. Energia wyzwalana przez 1 kg materii 170
- 44.2. Wyniki obliczeń rozszczepienia dla czterech nuklidów 175
- 45.1. Cząstki i antycząstki uczestniczące w zdarzeniu przedstawionym na rysunku 45.3 204
- 45.2. Leptony 207
- 45.3. Osiem barionów o spinie  $\frac{1}{2}$  212
- 45.4. Dziewięć mezonów o spinie 0 212

# SPIS TREŚCI

Przedmowa

## ROZDZIAŁ 39

Fotony i fale materii 1

Czy cząstka taka jak elektron może być falą?

39.1. Nowy kierunek 2

39.2. Foton, kwant światła 2

39.3. Zjawisko fotoelektryczne 4

39.4. Fotony mają pęd 8

39.5. Światło jako fala prawdopodobieństwa 12

39.6. Elektrony i fale materii 14

39.7. Równanie Schrödingera 18

39.8. Zasada nieoznaczoności Heisenberga 21

39.9. Zjawisko tunelowe 22

Podsumowanie 25

Pytania 26

Zadania 27

## ROZDZIAŁ 40

Jeszcze o falach materii 33

Jak zagonić do zagrody elektron?

40.1. Budowa atomu 34

40.2. Fale w linie a fale materii 34

40.3. Energia elektronu w pułapce 35

40.4. Funkcje falowe elektronu w pułapce 40

40.5. Elektron w skończonej studni 44

40.6. Inne pułapki elektronów 46

40.7. Dwu- i trójwymiarowe pułapki elektronów 48

40.8. Atom wodoru 50

Podsumowanie 59

Pytania 61

Zadania 62

## ROZDZIAŁ 41

Wszystko o atomach 66

Dlaczego światło lasera jest wyjątkowe?

41.1. Atomy i świat wokół nas 67

41.2. Niektóre właściwości atomów 67

41.3. Spin elektronu 70

41.4. Momenty pędu i momenty magnetyczne 71

41.5. Doświadczenie Sterna-Gerlacha 73

41.6. Rezonans magnetyczny 77

41.7. Zakaz Pauliego 78

41.8. Wiele elektronów w pułapkach prostokątnych 79

41.9. Budowa układu okresowego 82

41.10. Promieniowanie rentgenowskie  
i numerowanie pierwiastków 85

41.11. Lasery i światło laserowe 90

41.12. Jak działa laser 91

Podsumowanie 95

Pytania 96

Zadania 97

## ROZDZIAŁ 42

Przewodnictwo elektryczne ciał stałych 103

Dlaczego w fabryce Intela trzeba nosić „kombinezony  
astronautów”?

42.1. Ciała stałe 104

42.2. Właściwości elektryczne ciał stałych 104

42.3. Poziomy energetyczne w krysztale 105

42.4. Izolatory 106

42.5. Metale 107

42.6. Półprzewodniki 114

42.7. Półprzewodniki domieszkowane 116

42.8. Złącze p-n 119

42.9. Złącze prostujące 121

42.10. Dioda świecąca (LED) 123

42.11. Tranzystor 125

Podsumowanie 128

Pytania 129

Zadania 130

## ROZDZIAŁ 43

Fizyka jądrowa 134

Jakiego i w jaki sposób niektóre jądra się rozpadają?

43.1. Odkrycie jądra 135

43.2. Niektóre właściwości jąder 137

43.3. Rozpad promieniotwórczy 144

43.4. Rozpad  $\alpha$  147

43.5. Rozpad  $\beta$  150

43.6. Datowanie na podstawie rozpadu promieniotwórczego 153

43.7. Pomiary dawki promieniowania 154

43.8. Modele jądrowe 156

Podsumowanie 159

Pytania 160

Zadania 161

## ROZDZIAŁ 44

Energia jądrowa 169

Jak fizyka kryje się za obrazem, który przeraził świat po II wojnie światowej?

44.1. Atom i jego jądro 170

44.2. Rozszczepienie jądra: podstawy procesu 171

44.3. Model rozszczepienia jądra 174

44.4. Reaktor jądrowy 176

44.5. Naturalny reaktor jądrowy 181

44.6. Synteza termojądrowa: podstawy procesu 183

44.7. Synteza termojądrowa we wnętrzu Słońca i innych gwiazd 185

44.8. Kontrolowana synteza termojądrowa 188

Podsumowanie 191

Pytania 192

Zadania 193

## ROZDZIAŁ 45

Kwarki, leptony i Wielki Wybuch 198

Jak można było sfotografować młody Wszechświat?

45.1. Fizyka naprawdę współczesna 199

45.2. Cząstki, cząstki, cząstki 199

45.3. Interludium 203

45.4. Leptony 207

45.5. Hadrony 209

45.6. Jeszcze jedno prawo zachowania 211

45.7. Ścieżka ośmiokrotna 212

45.8. Model kwarkowy 213

45.9. Oddziaływanie podstawowe i cząstki pośredniczące 216

45.10. Chwila refleksji 219

45.11. Wszechświat się rozszerza 219

45.12. Promieniowanie reliktywe 221

45.13. Ciemna materia 221

45.14. Wielki Wybuch 222

45.15. Zakończenie 224

Podsumowanie 225

Pytania 225

Zadania 226

## DODATKI

A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) A1

B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne A3

C. Niektóre dane astronomiczne A5

D. Współczynniki zamiany jednostek A7

E. Wzory matematyczne A11

F. Właściwości pierwiastków A14

G. Układ okresowy pierwiastków A17

Odpowiedzi do sprawdzianów  
oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych B1

## Skorowidz

# PRZEDMOWA

Obecne, szóste wydanie *Podstaw fizyki* jest znacznie zmienione — pod względem układu treści i organizacji materiału — w stosunku do bardzo popularnego wydania piątego, zachowuje jednak wiele elementów klasycznego podręcznika Davida Hallidaya i Roberta Resnicka. Niemal wszystkie zmiany wynikają z sugestii wykładowców i studentów korzystających z wydania piątego oraz recenzentów maszynopisu wydania szóstego, a także z wyników badań nad procesem nauczania. Czytelnicy mogą nadsyłać swoje sugestie, poprawki oraz uwagi — pozytywne i negatywne — do wydawnictwa John Wiley and Sons (<http://www.wiley.com/college/hrw>) lub do Jearla Walkera (adres pocztowy: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA; faks: (USA) (216) 687-2424; adres elektroniczny: [physics@wiley.com](mailto:physics@wiley.com)). Nie uda nam się pewnie odpowiedzieć na każdy list, ale wszystkie zachowamy i uważnie przeczytamy.

## Zmiany w organizacji materiału

► **Bardziej przejrzysty układ tekstu.** Poprzednie wydania oryginału były drukowane w dwóch szpaltach, co wielu studentów i wykładowców uważało za układ tekstu zbyt zagęszczony i prowadzący do rozproszenia uwagi czytelnika.

► **Potoczyste przedstawienie materiału.** Wszystkim podręcznikom zarzuca się zwykle, że zawierają zbyt wiele materiału. W odpowiedzi na takie uwagi krytyczne szóste wydanie podręcznika zostało skrócone na dwa sposoby:

1. Materiał dotyczący szczególnej teorii względności i fizyki kwantowej został usunięty z rozdziałów początkowych i umieszczony w dalszych rozdziałach, poświęconych fizyce współczesnej.

2. W książce pozostawiono tylko najważniejsze przykłady, a pozostałe — bardziej wyspecjalizowane — przesunięto do towarzyszącego podręcznikowi *Zbioru za-*

*dań uzupełniających*, który jest opisany w dalszej części przedmowy.

► **Zapis wektorów.** Wektory są obecnie zapisywane jako symbol ze strzałką nad literą (np.  $\vec{F}$ ), a nie za pomocą czcionki półgrubej (jak **F**).

► **Użycie jednostek metrycznych.** W podręczniku stosowane są niemal wyłącznie jednostki metryczne. Jedynym wyjątkiem jest rozdział 1, w którym przedstawione są różne układy jednostek.

► **Układ i kolejność zadań.** Zebrane w podręczniku zadania, przeznaczone do rozwiązywania w ramach pracy domowej, są podzielone na grupy odnoszące się do kolejnych paragrafów tekstu głównego, a w ramach tych grup są ułożone w kolejności wzrastającej trudności. Wiele zadań z wydania piątego przesunięto jednak do *Zbioru zadań uzupełniających*, przy czym nie porządkowano ich ani pod względem trudności, ani tematyki w ramach rozdziału (łączna liczba zadań w podręczniku i w *Zbiorze zadań uzupełniających* jest większa od liczby zadań w wydaniu piątym).

► **Rozwiązywanie zadań.** Rozwiązywanie części zadań o numerach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej. W tym przypadku na końcu treści zadania umieszczona jest ikonka informująca studenta i wykładowcę, gdzie może w razie potrzeby znaleźć rozwiązanie. Informacja o znaczeniu poszczególnych ikonek jest zawarta na początku każdego zestawu zadań domowych. Ma ona postać:

 Rozwiązywanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

 Rozwiązywanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

Materiały te są opisane w dalszej części przedmowy.

# Zmiany natury dydaktycznej

► **Rozumowanie a proste ćwiczenia.** Głównym celem podręcznika jest nauczenie studenta rozumowania — od podstawowych zasad do rozwiązymania zagadnienia — przez stawianie go wobec kolejnych wyzwań. W związku z tym w większości zadań nacisk położony jest właśnie na umiejętność rozumowania. Niemniej jednak niektóre zadania są prostymi ćwiczeniami, wymagającymi jedynie podstawienia danych do wzoru.

► **Stwierdzenia kluczowe.** Rozwiązyania wszystkich 360 przykładów w podręczniku i *Zbiorze zadań uzupełniających* zostały zredagowane od nowa, tak by zaczynały się od jednego lub więcej stwierdzeń kluczowych dla rozwiązymania zadania (oznaczonych w tekście rozwiązań za pomocą ikonki klucza — ), wykorzystujących podstawowe prawa wprowadzone w głównym toku artykułu.

► **Obszerniejsze rozwiązyania przykładów.** Rozwiązyania większości przykładów (czyli zadań rozwiązywanych w podręczniku) są teraz bardziej szczegółowe niż w poprzednim wydaniu, gdyż postępują krok po kroku od podanych na początku rozwiązymania stwierdzeń kluczowych aż do końcowej odpowiedzi, przy czym często przytoczone są obszerne fragmenty rozumowania przedstawionego w tekście głównym.

► **Zadania z zastosowań fizyki.** W wielu miejscach — w treści przykładów lub zadań domowych — przedstawione są zagadnienia z zakresu zastosowań fizyki, oparte na opublikowanych wynikach badań; porównaj np. przykład 11.6, zadanie 64 z rozdziału 4 i zadanie 56 z rozdziału 10. Przykładem zadań domowych tworzących serię zadań na ten sam temat są zadania 4, 32 i 48 z rozdziału 6.

## Zmiany w treści podręcznika

► **Rozdział 5 o sile i ruchu** zawiera teraz bardziej szczegółowe omówienie siły ciężkości, ciężaru i siły normalnej.

► **Rozdział 7 o energii kinetycznej i pracy** zaczyna się od bardzo ogólnych uwag na temat energii. Następnie definiuje się energię kinetyczną i pracę oraz omawia się związek między nimi w taki sposób, by bardziej niż w

wydaniu piątym nawiązać do drugiej zasady dynamiki Newtona, nie tracąc jednak spójności tych definicji z pojęciami termodynamicznymi.

► **Rozdział 8 o zachowaniu energii** nie zawiera silnie krytykowanej definicji pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą — zastąpiono ją omówieniem zmian energii pod wpływem siły niezachowawczej (użyte sformułowania nie uniemożliwiają jednak wykładowcy wprowadzenia pojęcia pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą).

► **Rozdział 10 o zderzeniach** zawiera teraz najpierw omówienie ogólnego przypadku zderzeń niesprzędystycznych w jednym wymiarze, a dopiero później przypadku szczególnego zderzeń sprzedystycznych w jednym wymiarze.

► **Rozdziały 16, 17 i 18 o ruchu harmonicznym i falach** zostały napisane na nowo, tak by ułatwić studentom przyswojenie sobie tych trudnych zagadnień.

► **Rozdział 21 o entropii** zawiera obecnie omówienie silnika Carnota jako idealnego silnika cieplnego o największej sprawności.

## Elementy towarzyszące tekstowi głównemu podręcznika

► **Ciekawostki.** Każdy rozdział zaczyna się od opisu ciekawego zjawiska lub doświadczenia, które zostaje później szczegółowo wyjaśnione w którymś miejscu tego rozdziału. Ma to za zadanie zachęcenie czytelnika do uważanego przeczytania całego rozdziału.

► **Sprawdziany** pojawiają się w miejscach, w których czytelnik powinien przerwać na chwilę lekturę i spróbować odpowiedzieć na pytanie: „czy potrafisz — wykorzystując informacje zawarte w przeczytanym właśnie paragrafie lub przykładzie — dać sobie radę z tym krótkim zadaniem, nie wymagającym obliczeń, lecz tylko chwili namysłu?” Jeśli nie, to należy jeszcze raz przestudiować ten materiał przed dalszą lekturą; porównaj np. sprawdzian 3 w rozdziale 5 oraz sprawdzian 1 w rozdziale 6. **Odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów podane są na końcu książki.**

► **Przykłady**, czyli zadania rozwiązywane w podręczniku, mają pomóc czytelnikowi w utrwaleniu pojęć wprowadzonych w głównym tekście oraz w stopniowym opano-

waniu umiejętności rozwiązywania zadań. Ich rozwiązania wychodzą od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązywania danego zadania, oznaczonych w tekście rozwiązania za pomocą ikonki klucza (☞), a następnie prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► Fragmenty zatytuowane *Sztuka rozwiązywania zadań* zawierają porady praktyczne, ułatwiające początkiemu studentowi fizyki nabycie umiejętności rozwiązywania typowych zadań i uniknięcie często spotykanych błędów.

► Na końcu tekstu głównego każdego rozdziału znajduje się *Podsumowanie*, w którym zebrane są podstawowe pojęcia i prawa wprowadzone w tym rozdziale. Lektura tego podsumowania nie może oczywiście zastąpić starannego przeczytania całego tekstu rozdziału.

► *Pytania* są podobne do sprawdzianów — uzyskanie odpowiedzi na postawione pytania nie wymaga wykonywania obliczeń, lecz dobrego zrozumienia omówionego materiału i niezbyt skomplikowanego rozumowania, czasem prostych obliczeń w pamięci. **Odpowiedzi na pytania o numerach nieparzystych podane są na końcu książki.**

► *Zadania* są zebrane w grupy dotyczące kolejnych paragrafów, a w ramach takiej grupy są ustawione z grubsza w kolejności wzrastającej trudności. **Odpowiedzi do zadań o numerach nieparzystych podane są na końcu książki.** Rozwiązania części zadań o numerach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej (informacja o oznaczeniu zadań, których rozwiązania można znaleźć w różnych materiałach, jest podana na początku każdego zestawu zadań domowych). Zadania trudniejsze oznaczono gwiazdką.

► W niektórych rozdziałach na samym końcu zestawu zadań występują *zadania dodatkowe*. Nie są one przypisane do konkretnych paragrafów i dotyczą nierzaz zagadnień z zastosowań fizyki.

## Zbiór zadań uzupełniających

Podręcznikowi będzie towarzyszył *Zbiór zadań uzupełniających*. Zbiór ten będzie zawierał inny zestaw pytań i zadań domowych oraz więcej przykładów. Oto jego cechy:

► *Przykłady uzupełniające* są częściowo przeniesione z podręcznika głównego, częściowo całkiem nowe. Wszystkie zaczynają się od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązywania zadania (oznaczonych ikonką ☞) i prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► *Pytania* są trzech rodzajów:

1. *pytania typu sprawdzianów*, jak w głównej części podręcznika;

2. *pytania porządkujące*, wymagające zebrania równań potrzebnych w określonej sytuacji, mające charakter rozgrzewki przed jednym z dalszych zadań;

3. *pytania do dyskusji*, przywrócone z wydań czwartego i wcześniejszych na żądanie Czytelników.

► *Zadania* uzupełniają zestawy zadań przytoczone w głównej części książki; niektóre zostały przesunięte do zbioru z podręcznika głównego. Ich kolejność nie jest związana ani z ich trudnością, ani z kolejnością paragrafów czy pojęć w danym rozdziale. Niektóre nowe zadania dotyczą zagadnień z zakresu zastosowań fizyki. W niektórych rozdziałach końcowe zadania tworzą *zestawy zadań* dotyczących podobnych zagadnień. W innych rozdziałach na końcu podano *zadania z rozwiązaniami*.

## Wersje podręcznika

Szóste wydanie *Podstaw fizyki* w angielskiej wersji językowej jest dostępne w kilku wersjach, tak by zaspokoić różne potrzeby wykładowców i studentów. Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1–38 (ISBN 0-471-32000-5). Wydanie rozszerzone zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie 45 rozdziałów (ISBN 0-471-33236-4). Każde z tych wydań jest dostępne w postaci jednego tomu w twardej oprawie lub w następujących częściach:

► **tom 1 — rozdziały 1–21 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, 0-471-33235-6;**

► **tom 2 — rozdziały 22–45 (elektryczność i magnetyzm oraz fizyka współczesna), oprawa twarda, 0-471-36037-6;**

► **część 1 — rozdziały 1–12, oprawa miękka, 0-471-33234-8;**

► część 2 — rozdziały 13–21, oprawa miękka,  
0-471-36041-4;

► część 3 — rozdziały 22–33, oprawa miękka,  
0-471-36040-6;

► część 4 — rozdziały 34–38, oprawa miękka,  
0-471-36039-2;

► część 5 — rozdziały 39–45, oprawa miękka,  
0-471-36038-4.

Wydanie polskie powstało na podstawie tych pięciu części podręcznika.

## Materiały dodatkowe

Szóstemu wydaniu *Podstaw fizyki* towarzyszy w oryginałce obszerny zestaw starannie przygotowanych materiałów uzupełniających, mających za zadanie ułatwić wykładowcom i studentom korzystanie z podręcznika.

### Materiały dla wykładowców

► **Instructor's Manual** (*Poradnik wykładowcy*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy). Poradnik ten zawiera wyjaśnienia najważniejszych zagadnień z każdego rozdziału, pokazy doświadczeń, projekty doświadczalne i komputerowe, opis filmów i kaset wideo, odpowiedzi do wszystkich pytań, zadań i sprawdzianów oraz przewodnik do zadań z poprzednich wydań podręcznika.

► **Instructor's Solutions Manual** (*Zbiór rozwiązań dla wykładowcy*, autor: James Whitenton, Southern Polytechnic University). W zbiorze tym podano szczegółowe rozwiązania wszystkich zadań zebranych na końcu poszczególnych rozdziałów oraz w *Zbiorze zadań uzupełniających*. Ten zbiór mogą otrzymać tylko wykładowcy.

► **Test Bank** (*Bank testów*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy) zawierający ponad 2200 pytań testowych wielokrotnego wyboru. Są one także dostępne w komputerowym banku testów (patrz niżej).

► **Instructor's Resource CD** (CD z materiałami dla wykładowcy). Jest to CD-ROM zawierający:

- pełny tekst *Zbioru rozwiązań dla wykładowcy* w postaci plików LATEX-owych oraz w formacie PDF,

- komputerowy bank testów, w wersjach dla komputerów IBM oraz Macintosh, z możliwością edycji tekstu, tak by wykładowca miał pełną swobodę tworzenia zestawów pytań testowych,
- wszystkie rysunki z podręcznika (poza fotografiemi), przygotowane do przedstawienia na wykładzie oraz wydrukowania.

► **Przejrocza (transparencje)**. Ponad 200 kolorowych ilustracji z podręcznika w postaci folii do rzutnika przeroczy.

► **On-line Course Management** (Interaktywne zarządzanie zajęciami).

- Programy interaktywne WebAssign, CAPA oraz Web-Test, umożliwiające wykładowcom wyznaczanie oraz ocenianie zadań i testów za pośrednictwem Internetu.
- Wykładowcy mogą również uzyskać dostęp do materiałów edukacyjnych w systemie WebCT. Jest to obszerne oprogramowanie internetowe, umożliwiające organizowanie zajęć internetowych zawierających sesje dyskusyjne, tablice ogłoszeń, testy, ocenę postępów studentów itp. Dalsze informacje można uzyskać u przedstawicieli firmy Wiley.

### Materiały dla studentów

► **A Student Companion** (*Poradnik studenta*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy). Poradnik dla studentów składający się z tradycyjnych materiałów drukowanych oraz studenckiej strony internetowej, stanowiących łącznie bogate środowisko interaktywne do nauki i zdobywania dodatkowych informacji. Na studenckiej stronie internetowej dostępne są quizy, symulacje, wskazówki do zadań domowych, oprogramowanie interaktywne *Interactive LearningWare* (patrz niżej) oraz odnośniki do innych stron internetowych, zawierających materiały edukacyjne z fizyki.

► **Student Solutions Manual** (*Zbiór rozwiązań dla studenta*, autorzy: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy i Edward Derringh, Wentworth Institute). Zbiór szczegółowych rozwiązań 30% zadań zebranych w końcowych częściach rozdziałów podręcznika.

► **Interactive LearningWare**. Jest to oprogramowanie umożliwiające studentowi rozwiązanie 200 zadań z podręcznika. Odbywa się to interaktywnie, tzn. w kolejnych

krokach student udziela odpowiedzi, a w przypadku odpowiedzi niepoprawnych uzyskuje pomoc w postaci informacji o typowych błędach. Zadania, które można rozwiązać tym sposobem, są oznaczone ikonką .

► **CD-Physics, 3.0.** CD-ROM stanowiący elektroniczną wersję szóstego wydania *Podstaw fizyki*. Zawiera pełny tekst rozszerzonego wydania podręcznika, *Poradnik studenta, Zbiór rozwiązań dla studenta*, oprogramowanie Interactive LearningWare i liczne symulacje, przy czym wszystkie te materiały zawierają wiele wzajemnych odnośników.

► **Take Note!** (Zapisz to!). Notatnik w twardej oprawie umożliwiający studentom robienie notatek bezpośrednio .

na dużych, czarno-białych wydrukach rysunków z podręcznika. Zawiera wszystkie ilustracje z zestawu przezroczystego. Użycie tego notatnika oszczędza studentowi wiele czasu zużywanego normalnie na przerysowywanie rysunków na wykładzie.

► **Physics Web Site**, strona internetowa podręcznika, dostępna pod adresem <http://www.wiley.com/college/hrw>, starannie zaprojektowana z myślą o użytkownikach szóstego wydania *Podstaw fizyki*, zapewniająca studentom pomoc w studiowaniu fizyki oraz udostępniająca im wiele materiałów dodatkowych. Zawiera także rozwiązania wielu zadań z podręcznika, oznaczonych ikonką .

## PODZIĘKOWANIA

Na końcowy kształt podręcznika miało wpływ wiele osób poza samymi jego autorami. J. Richard Christman z U.S. Coast Guard Academy po raz kolejny napisał dla nas wiele doskonałych materiałów uzupełniających. Trudno przecenić jego znajomość tej książki oraz wagę licznych porad dla studentów i wykładowców. James Tanner z Georgia Institute of Technology oraz Gary Lewis z Kennesaw State College umożliwiли nam użycie innowacyjnego oprogramowania związanego z zadaniami w podręczniku. James Whitenton z Southern Polytechnic State University i Jerry Shi z Pasadena City College podjęli i wykonali herkulesowe zadanie przygotowania rozwiązań wszystkich zadań z podręcznika. John Merrill z Brigham Young University i Edward Derringh z Wentworth Institute of Technology bardzo nam pomogli przy wcześniejszych wydaniach tej książki, za co im składamy podziękowanie. Dziękujemy także George'owi W. Huckle'owi z Oxnard (California) i Frankowi G. Jacobsowi z Evanston (Illinois) za sprawdzenie odpowiedzi do przedstawionych w podręczniku zadań.

W wydawnictwie John Wiley mieliśmy wielkie szczęście pracować nad książką z naszym głównym redaktorem Cliffem Millsem. Cliff koordynował i wspierał nasze działania oraz dostarczał nam wszelkiej niezbędnej pomocy. Gdy potem Cliffowi powierzono w wydawnictwie inne zadania, do szczęśliwego końca pracy doprowadził nas jego utalentowany następca, Stuart Johnson.

Ellen Ford koordynowała wstępne prace redakcyjne oraz próby druku wielobarwnego. Sue Lyons z działu marketingu była niezmordowana w pracy nad sukcesem tego wydania. Joan Kalkut stworzyła znakomity zestaw materiałów pomocniczych. Thomas Hempstead doskonale zarządził procesem recenzji maszynopisu podręcznika oraz licznymi pracami administracyjnymi.

Lucille Buonocore, kierownik produkcji książki, i Monique Calello, redaktor ds. produkcji, znakomicie po-radziły sobie z dopasowaniem do siebie różnych elementów podręcznika i pomogły doprowadzić z sukcesem do końca złożony proces produkcji książki, za co im serdecznie dziękujemy. Dziękujemy również Maddy Lesure za projekt graficzny książki, Helen Walden za redakcję tekstu, Edwardowi Starrowi i Annie Melhorn za kierowanie przygotowaniem rysunków, Georgii Kamvosoulis Mederer, Katrinie Avery i Lilian Brady za korektę składu, a także wszystkim pozostałym członkom zespołu produkcyjnego.

Hilary Newman oraz jej zespół zajmujący się wyborem fotografii do podręcznika z zapałem wyszukiwali ciekawe i niezwykłe zdjęcia, znakomicie uwidaczniające prawa fizyki. Mamy również wielki dług wdzięczności wobec nieżyjącego już Johna Balbalisa, którego talent graficzny i zrozumienie fizyki można odnaleźć w każdym z rysunków.

Szczególne podziękowania jesteśmy winni Edwardowi Millmanowi za pomoc w nadaniu tekstowi pod-

ręcznika jego ostatecznej postaci. Przeczytał on z nami cały podręcznik, każde jego słowo, zadając nam wiele pytań kierowanych z punktu widzenia korzystającego z książki studenta. Wiele z tych pytań i zasugerowanych przez niego zmian przyczyniło się wydatnie do zwiększenia jasności wykładu.

Szczególnie wielki dług wdzięczności mamy wobec wielu studentów korzystających z poprzednich wydań *Podstaw fizyki*, którzy zadali sobie trud podzielenia się z nami swoimi uwagami. Studenci są dla nas niezwykle ważni, gdyż to oni są ostatecznymi „konsumentami” pod-

ręcznika. Dzieląc się z nami swoimi uwagami, pomagają nam stale doskonalić oferowaną przez nas książkę, dzięki czemu pieniądze wydane na jej zakup można uważać za coraz lepszą inwestycję. Nadal zachęcamy użytkowników tej książki do informowania nas o swoich uwagach i refleksjach przy jej lekturze, co powinno nam pomóc w dalszym ulepszaniu podręcznika w następnych latach.

Na zakończenie chcemy podkreślić, że dysponowaliśmy znakomitym zespołem opiniodawców, i pragniemy wyrazić wdzięczność i podziękowanie każdemu z nich. Oto oni:

Edward Adelson  
*Ohio State University*

Mark Arnett  
*Kirkwood Community College*

Arun Bansil  
*Northeastern University*

J. Richard Christman  
*U.S. Coast Guard Academy*

Robert N. Davie, Jr.  
*St. Petersburg Junior College*

Cheryl K. Dellai  
*Glendale Community College*

Eric R. Dietz  
*California State University at Chico*

N. John DiNardo  
*Drexel University*

Harold B. Hart  
*Western Illinois University*

Rebecca Hartzler  
*Edmonds Community College*

Joey Huston  
*Michigan State University*

Shawn Jackson  
*University of Tulsa*

Hector Jimenez  
*University of Puerto Rico*

Sudhakar B. Joshi  
*York University*

Leonard M. Kahn  
*University of Rhode Island*

Yiuchi Kubota  
*Cornell University*

Priscilla Laws  
*Dickinson College*

Edbeto Leal  
*Polytechnic University of Puerto Rico*

Dale Long  
*Virginia Tech*

Andreas Mandelis  
*University of Toronto*

Paul Marquard  
*Caspar College*

James Napolitano  
*Rensselaer Polytechnic Institute*

Des Penny  
*Southern Utah University*

Joe Redish  
*University of Maryland*

Timothy M. Ritter  
*University of North Carolina at Pembroke*

Gerardo A. Rodriguez  
*Skidmore College*

John Rosendahl  
*University of California at Irvine*

Michael Schatz  
*Georgia Institute of Technology*

Michael G. Strauss  
*University of Oklahoma*

Dan Styer  
*Oberlin College*

Marshall Thomsen  
*Eastern Michigan University*

Fred F. Tomblin  
*New Jersey Institute of Technology*

B.R. Weinberger  
*Trinity College*

William M. Whelan  
*Ryerson Polytechnic University*

William Zimmerman, Jr.  
*University of Minnesota.*

### Opiniodawcami wydań piątego i wcześniejszych byli:

Maris A. Abolins  
*Michigan State University*

Barbara Andereck  
*Ohio Wesleyan University*

Albert Bartlett  
*University of Colorado*

Michael E. Browne  
*University of Idaho*

Timothy J. Burns  
*Leeward Community College*

Joseph Bushi  
*Manhattan College*

Philip A. Casabella <i>Rensselaer Polytechnic Institute</i>	John Hubisz <i>North Carolina State University</i>	Michael O'Shea <i>Kansas State University</i>
Randall Caton <i>Christopher Newport College</i>	Joey Huston <i>Michigan State University</i>	Patrick Papin <i>San Diego State University</i>
J. Richard Christman <i>U.S. Coast Guard Academy</i>	Darrell Huwe <i>Ohio University</i>	George Parker <i>North Carolina State University</i>
Roger Clapp <i>University of South Florida</i>	Claude Kacser <i>University of Maryland</i>	Robert Pelcovits <i>Brown University</i>
W.R. Conkie <i>Queen's University</i>	Leonard Kleinman <i>University of Texas at Austin</i>	Oren P. Quist <i>South Dakota State University</i>
Peter Crooker <i>University of Hawaii at Manoa</i>	Earl Koller <i>Stevens Institute of Technology</i>	Jonathan Reichart <i>SUNY-Buffalo</i>
William P. Crummett <i>Montana College of Mineral Science and Technology</i>	Arthur Z. Kovacs <i>Rochester Institute of Technology</i>	Manuel Schwartz <i>University of Louisville</i>
Eugene Dunnam <i>University of Florida</i>	Kenneth Krane <i>Oregon State University</i>	Darrell Seeley <i>Milwaukee School of Engineering</i>
Robert Endorf <i>University of Cincinnati</i>	Sol Krasner <i>University of Illinois at Chicago</i>	Bruce Arne Sherwood <i>Carnegie Mellon University</i>
F. Paul Esposito <i>University of Cincinnati</i>	Peter Loly <i>University of Manitoba</i>	John Spangler <i>St. Norbert College</i>
Jerry Finkelstein <i>San Jose State University</i>	Robert R. Marchini <i>Memphis State University</i>	Ross L. Spencer <i>Brigham Young University</i>
Alexander Firestone <i>Iowa State University</i>	David Markovitz <i>University of Connecticut</i>	Harold Stokes <i>Brigham Young University</i>
Alexander Gardner <i>Howard University</i>	Howard C. McAllister <i>University of Hawaii at Manoa</i>	Jay D. Strieb <i>Villanova University</i>
Andrew L. Gardner <i>Brigham Young University</i>	W. Scott McCullough <i>Oklahoma State University</i>	David Toot <i>Alfred University</i>
John Gieniec <i>Central Missouri State University</i>	James H. McGuire <i>Tulane University</i>	J.S. Turner <i>University of Texas at Austin</i>
John B. Gruber <i>San Jose State University</i>	David M. McKinstry <i>Eastern Washington University</i>	T.S. Venkataraman <i>Drexel University</i>
Ann Hanks <i>American River College</i>	Joe P. Meyer <i>Georgia Institute of Technology</i>	Gianfranco Vidali <i>Syracuse University</i>
Samuel Harris <i>Purdue University</i>	Roy Middleton <i>University of Pennsylvania</i>	Fred Wang <i>Prairie View A &amp; M</i>
Emily Haught <i>Georgia Institute of Technology</i>	Irvin A. Miller <i>Drexel University</i>	Robert C. Webb <i>Texas A &amp; M University</i>
Laurent Hodges <i>Iowa State University</i>	Eugene Mosca <i>United States Naval Academy</i>	George Williams <i>University of Utah</i>
		David Wolfe <i>University of New Mexico.</i>

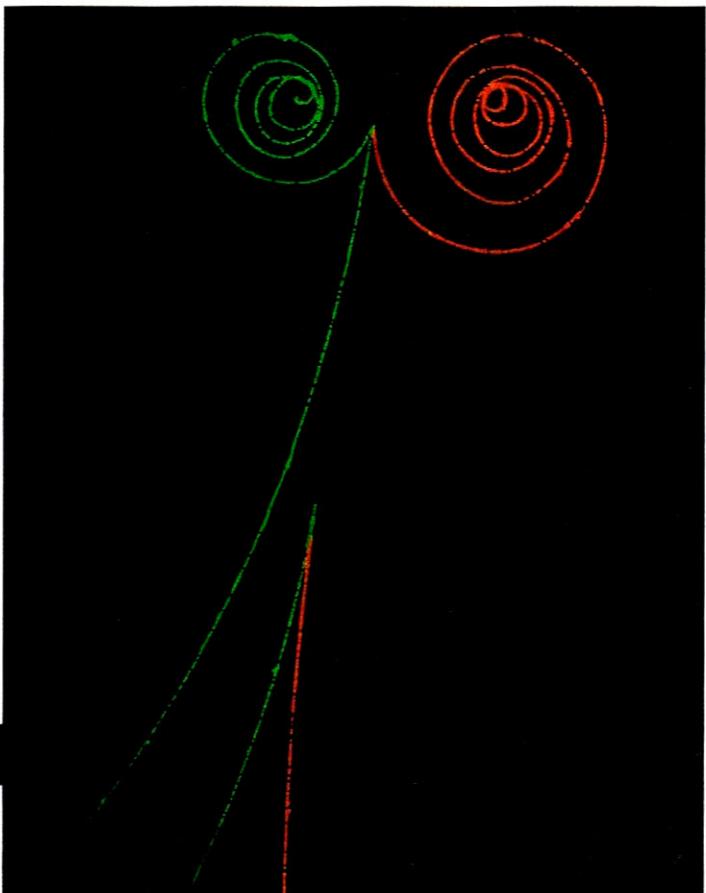
# 39 Fotony i fale materii

Drobniutkie pęcherzyki gazu widoczne na tym zdjęciu z komory pęcherzykowej ujawniają torły, po których poruszały się elektryny (ślad zielony) i pozytony (ślad czerwony). Kwant (foton)  $\gamma$  (wpadający od góry i nie pozostawiający śladu) uwolnił elektron z jednego z atomów wodoru wypełniających komorę, a następnie przekształcił się w parę elektron–pozyton.

Inny foton  $\gamma$  wziął udział w kolejnym procesie kreacji pary poniżej. Ślady te (zakrzywione na skutek działania pola magnetycznego) jasno pokazują, że elektryny i pozytony są cząstkami poruszającymi się po wąskich torach. A jednak cząstki te można także traktować jak fale.

**Czy cząstka może być falą?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 39.1. Nowy kierunek

Dyskusja teorii względności Einsteina zaprowadziła nas w świat daleki od codziennych doświadczeń — świat obiektów poruszających się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Wśród innych niespodzianek teoria Einsteina przewiduje, że szybkość, z jaką chodzi zegar, zależy od względnej prędkości, z jaką ten zegar porusza się względem obserwatora. Im szybszy jest ten ruch, tym wolniej chodzi zegar. To, a także inne przewidywania tej teorii przeszły pomyślnie wszystkie przeprowadzone do tej pory testy doświadczalne, a teoria względności pozwoliła na głębsze i bardziej zadowalające spojrzenie na naturę przestrzeni i czasu.

Teraz zaczniemy badać inny świat istniejący poza codziennym doświadczeniem — świat subatomowy. Napotkamy nowe niespodzianki, które choć czasem wydają się dziwaczne, to jednak pozwoliły fizykom krok po kroku dogłębniej zrozumieć rzeczywistość.

**Fizyka kwantowa**, jak nazywa się nasz nowy temat, odpowiada na szereg pytań, takich jak: Dlaczego świecą gwiazdy? Dlaczego wśród pierwiastków chemicznych istnieje porządek tak widoczny w układzie okresowym? Jak działają tranzystory i inne mikroukładły elektroniczne? Dlaczego miedź przewodzi prąd elektryczny, a szkło nie? Fizyka kwantowa jest podstawą całej chemii, w tym także biochemii. Musimy ją zrozumieć, jeśli chcemy pojąć istotę samego życia.

Niektóre z przewidywań fizyki kwantowej wydają się dziwne nawet dla fizyków i filozofów studujących jej podstawy. A jednak doświadczenie po doświadczeniu dowodzi poprawności tej teorii, a wiele z nich odkrywa jeszcze dziwniejsze jej aspekty. Świat kwantowy jest lunaparkiem pełnym atrakcji, które wstrząsną światem zdrowego rozsądku, w jakim żyłeś od dzieciństwa. Zwiedzanie kwantowego parku zaczniemy od spojrzenia na foton.

## 39.2. Foton, kwant światła

**Fizyka kwantowa** (znana też jako *mechanika kwantowa* lub *teoria kwantów*) w większości dotyczy świata mikroskopowego. Jest mnóstwo wielkości, które istnieją tylko w pewnych minimalnych (*elementarnych*) porcjach lub jako całkowite wielokrotności tych porcji. Mówią się o nich, że są *skwantowane*. Elementarna porcja, która jest związana z taką wielkością, zwana jest jej **kwantem**.

W pewnym sensie pieniądze są także skwantowane. Istnieje mianowicie moneta o najwyższym nominale 1 grosza (1 grosz = 0,01 złotego), nominały zaś wszystkich innych monet i banknotów są naturalnymi wielokrotnościami tej najmniejszej wartości. Innymi słowy kwantem pieniędzy jest 0,01 złotego, a każda ich większa ilość ma postać  $n(0,01 \text{ gr})$ , gdzie  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą. Nie można zatem nikomu wręczyć 0,755 złotego = 75,5 groszy.

W roku 1905 Einstein wysunął hipotezę, że promieniowanie elektromagnetyczne (lub po prostu *światło*) jest skwantowane i istnieje w elementarnych porcjach (kwantach), które nazywamy teraz **fotonami**. Postułat Einsteina powinien cię zdziwić, ponieważ kilka ostatnich rozdziałów poświęciliśmy dyskusji klasycznego obrazu światła jako fali sinusoidalnej. Długość  $\lambda$ , częstotliwość  $v$  i prędkość  $c$  takiej fali są związane relacją

$$v = \frac{c}{\lambda}. \quad (39.1)$$

Co więcej, w rozdziale 34 mówiliśmy o klasycznej fali świetlnej jako o kombinacji wzajemnie powiązanych pól elektrycznych i magnetycznych, z których każde drga z częstością  $\nu$ . W jaki sposób ta fala drgających pól może składać się z elementarnej porcji jakiejś wielkości — kwantu światelnego? Czym jest foton?

Pojęcie kwantu światła, fotonu, okazuje się o wiele bardziej subtelne i tajemnicze, niż wyobrażało to sobie Einstein. W istocie jest ono ciągle bardzo słabo zrozumiałe. W tej książce będziemy omawiać tylko niektóre podstawowe aspekty pojęcia fotonu, idąc przy tym śladem postulatu Einsteina.

Zgodnie z tym postulatem kwant fali świetlnej o częstości  $\nu$  ma energię

$$E = h\nu \quad (\text{energia fotonu}). \quad (39.2)$$

W tym związkku  $h$  jest stałą **Plancka**, której wartość wynosi

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}. \quad (39.3)$$

Najmniejsza energia, jaką może mieć światło o częstości  $\nu$ , jest równa energii pojedynczego fotonu  $h\nu$ . Jeśli fala niesie więcej energii, to ta energia musi być całkowitą wielokrotnością  $h\nu$ , dokładnie tak samo jak pieniądze z poprzedniego przykładu muszą być całkowitą wielokrotnością 1 grosza. Światło nie może mieć energii  $0,6h\nu$  lub  $75,5h\nu$ .

Einstein zaproponował dalej, że proces pochłaniania (absorpcji) lub emisji światła przez pewne ciało (materię) zachodzi w atomach, z których zbudowane jest to ciało. Kiedy światło o częstości  $\nu$  jest pochłaniane przez atom, energia pojedynczego fotonu  $h\nu$  jest przekazywana ze światła do atomu. W takim *akcie absorpcji* foton znika, a o atomie mówimy, że go pochłania. Kiedy światło o częstości  $\nu$  jest emitowane przez atom, energia  $h\nu$  przekazywana jest z tego atomu światłu. W takim *akcie emisji* foton nagle się pojawia, a o atomie mówimy, że go wyemitował. Tak więc możemy mieć do czynienia z absorpcją lub emisją fotonu przez atomy tworzące dane ciało.

W przypadku ciał składających się z wielu atomów może wystąpić wiele aktów absorpcji (jak w okularach przeciwsłonecznych) lub emisji fotonów (jak w lampach). Jednak każdy taki akt absorpcji lub emisji w dalszym ciągu polega na przekazie energii pojedynczego fotonu światła.

Omawiając w poprzednich rozdziałach przykłady absorpcji czy emisji światła, mieliśmy do czynienia z tak dużą ilością światła, że fizyka kwantowa nie była nam potrzebna. Do ich wyjaśnienia wystarczała fizyka klasyczna. Jednak technika końca dwudziestego wieku stała się na tyle zaawansowana, że umożliwiła przeprowadzanie doświadczeń z pojedynczymi fotonami. Wiele z tych eksperymentów znalazło praktyczne zastosowanie. Fizyka kwantowa stała się odtąd częścią standardowej praktyki inżynierskiej, szczególnie w inżynierii optycznej.

**SPRAWDZIAN 1:** Uszereguj następujące rodzaje promieniowania zgodnie z energiami tworzących je fotonów, zaczynając od energii największej:

- a) żółte światło z lampy sodowej,
- b) foton promieniowania  $\gamma$  emitowany przez jądro promieniotwórcze,
- c) fala radiowa emitowana przez antenę komercyjnej stacji radiowej,
- d) wiązka mikrofal emitowana przez radar kontroli ruchu lotniczego.

## Przykład 39.1

Lampa sodowa umieszczona jest w środku dużej sfery pochłaniającej całość padającego na nią światła. Lampa emituje energię z mocą 100 W. Założmy, że emitowane jest wyłącznie światło o długości fali 590 nm. Z jaką szybkością fotony pochłaniane są przez sferę?

### ROZWIĄZANIE:

Zakładamy, że całe światło emitowane przez lampa dociera do sfery (i jest przez nią pochłaniane).

Światło jest emitowane i pochłaniane w postaci fotonów. Szybkość  $R$ , z jaką fotony są pochłaniane przez sferę, jest równa szybkości  $R_{\text{emisji}}$ , z jaką fotony są emitowane przez lampa. Szybkość ta jest równa

$$R_{\text{emisji}} = \frac{\text{szybkość emisji energii}}{\text{energia emitowanego fotonu}} = \frac{P_{\text{emisji}}}{E}.$$

Mamy zatem z równania (39.2) ( $E = hv$ ),

$$R = R_{\text{emisji}} = \frac{P_{\text{emisji}}}{hv}.$$

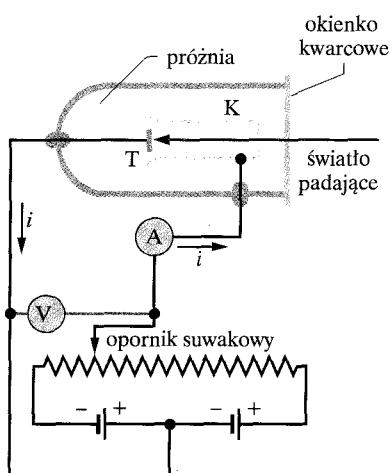
Korzystając z równania (39.1) ( $v = c/\lambda$ ), zastępujemy częstotliwość  $v$  długością fali  $\lambda$ , a następnie podstawiamy wartości liczbowe. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} R &= \frac{P_{\text{emisji}}\lambda}{hc} \\ &= \frac{(100 \text{ W})(590 \cdot 10^{-9} \text{ m})}{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})} \\ &= 2,97 \cdot 10^{20} \text{ fotonów/s.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 39.3. Zjawisko fotoelektryczne

Wiązka światła o wystarczająco krótkiej fali skierowana na czystą powierzchnię metalu powoduje uwolnienie elektronów z tej powierzchni (światło *wybija* elektrony z powierzchni). To **zjawisko fotoelektryczne** wykorzystywane jest w wielu urządzeniach, m.in. w kamerach telewizyjnych, kamerach video i noktowizorach. Na poparcie swojej koncepcji fotonu Einstein użył jej do wyjaśnienia tego zjawiska. Zjawiska fotoelektrycznego po prostu nie da się zrozumieć bez fizyki kwantowej.

Przeanalizujmy dwa podstawowe doświadczenia fotoelektryczne, wykonywane w układzie przedstawionym na rysunku 39.1. Światło o częstotliwości  $v$  jest w nim kierowane na tarczę T, z której wybija elektrony. Pomiędzy tarczą T a kolektorem K utrzymywana jest różnica potencjałów  $V$ , powodująca gromadzenie elektronów przez kolektor. Zebrane elektrony, nazywane **fotoelektronami**, tworzą **prąd fotoelektryczny**  $i$ , który mierzony jest galwanometrem A.



Rys. 39.1. Aparatura używana do badania zjawiska fotoelektrycznego. Padająca wiązka światła oświetla elektrodę T, uwalniając z niej elektrony, które następnie zbierane są przez kolektor K. Elektrony poruszają się w obwodzie w kierunku przeciwnym do kierunku przepływu prądu zaznaczonego strzałką. Baterie i opornik suwakowy służą do tworzenia i zmiany różnicy potencjałów pomiędzy elektrodą T a kolektorem K.

### Pierwsze doświadczenie fotoelektryczne

Ustalmy różnicę potencjałów  $V$ , przesuwając suwak opornika pokazanego na rysunku 39.1 tak, żeby kolektor K miał odrobinę mniejszy potencjał niż tarcza T. Taka różnica potencjałów będzie spowalniać elektrony wybite z tarczy. Następnie zmieniamy napięcie  $V$  aż do momentu, gdy prąd fotoelektryczny obserwowany na galwanometrze A przestaje płynąć. Napięcie odpowiadające tej sytuacji nazywamy **potencjałem hamującym**  $V_{\text{stop}}$ . Przy napięciu  $V = V_{\text{stop}}$  elektrony o największej energii zostają zatrzymane tuż przed osiągnięciem kolektora. Energia kinetyczna  $E_{\text{k max}}$  tych najszybszych elektronów jest wtedy równa

$$E_{\text{k max}} = eV_{\text{stop}}, \quad (39.4)$$

przy czym  $e$  jest ładunkiem elementarnym.

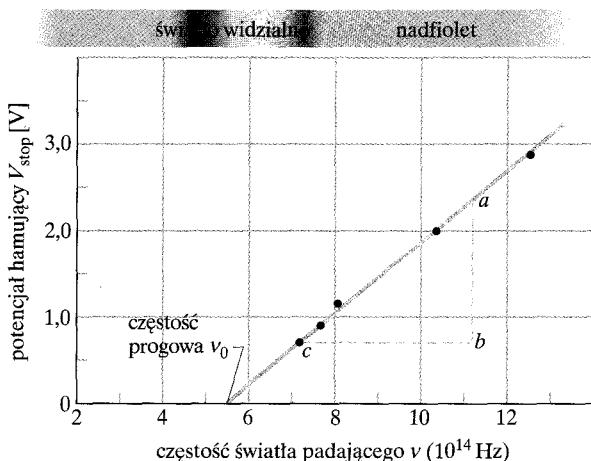
Pomiary pokazują, że dla światła o danej częstotliwości energia  $E_{k\max}$  nie zależy od natężenia światła. Bez względu na to, czy nasze źródło jest oślepiająco jasne, czy też jarzy się tak słabo, że trudno je wykryć (czy też ma jakiekolwiek pośrednie natężenie), maksymalna energia kinetyczna wybitych elektronów zawsze ma tę samą wartość.

Ta obserwacja doświadczalna pozostaje zagadką dla fizyki klasycznej. Klasycznie rzeczą ujmując, światło padające na tarczę jest sinusoidalnie zmienną falą elektromagnetyczną. Elektron w tarczy powinien drgać pod wpływem sinusoidalnie zmiennej siły wywieranej przez pole elektryczne fali padającej. Jeśli amplituda tych drgań jest dostatecznie duża, elektron powinien wyrwać się z powierzchni tarczy, a więc zostać z niej uwolniony. Zatem jeśli zwiększąlibyśmy amplitudę fali i jej drgającego pola elektrycznego, elektron wybijany z powierzchni tarczy powinien otrzymać bardziej energetyczne pchnięcie. *Jednak nic takiego się nie dzieje*. Dla danej częstotliwości światła zarówno wiązka intensywnego światła, jak i słabiutki promień dostarczają wybijanym elektronom dokładnie tyle samo energii.

Jeśli natomiast pomyślimy o fotonach, to poprawny wynik pojawia się w sposób naturalny. W tym wypadku energia, jaka może być przekazana przez padającą falę elektronowi w tarczy, jest energią pojedynczego fotonu. Zwiększając natężenie światła, zwiększymy liczbę fotonów w wiązce. Jednak energia fotonu, dana równaniem (39.2), pozostaje przy tym niezmienna, ponieważ nie ulega zmianie częstotliwość światła. Tak więc energia zamieniona na energię kinetyczną elektronu także pozostaje niezmienna.

## Drugie doświadczenie fotoelektryczne

Zmieniamy teraz częstotliwość  $\nu$  padającego światła i mierzymy odpowiedni potencjał hamujący  $V_{stop}$ . Na rysunku 39.2 przedstawiono zależność  $V_{stop}$  od częstotliwości  $\nu$ . Zauważ, że zjawisko fotoelektryczne nie występuje, jeśli częstotliwość światła jest niższa od pewnej częstotliwości progowej  $\nu_0$  lub, co jest równoważne, jeśli długość fali świetlnej jest większa niż odpowiednia progowa długość fali  $\lambda_0 = c/\nu_0$ . Jest tak bez względu na to, jak intensywne jest światło padające na tarczę.



Rys. 39.2. Zależność potencjału hamującego  $V_{stop}$  od częstotliwości  $\nu$  światła padającego na elektrodę wykonaną z sodu w układzie doświadczalnym z rysunku 39.1 (dane opublikowane przez R.A. Millikana w 1916 r.).

Stanowi to kolejną zagadkę dla fizyki klasycznej. Wyobrażając sobie światło jako falę elektromagnetyczną, moglibyśmy się spodziewać następującej obserwacji. Bez względu na to, jak niska byłaby częstotliwość padającego światła, elektrony mogłyby być przez to światło wyzwalane zawsze wtedy, gdy dostarczylibyśmy im wystarczająco dużo energii. To zaś można byłoby osiągnąć, wykorzystując dostatecznie intensywne źródło światła. *Jednak nic takiego nie następuje.* W przypadku światła o częstotliwości niższej niż częstotłość progowa  $v_0$  zjawisko fotoelektryczne nie zachodzi, bez względu na to, jak intensywne jest źródło światła.

Istnienia częstotliwości progowej powinniśmy się jednak spodziewać, jeśli energia jest przekazywana w postaci fotonów. Elektrony utrzymywane są wewnątrz tarczy siłami elektrycznymi. (Gdyby tak nie było, to pod wpływem grawitacji wszystkie by z niej wypadły). Do uwolnienia się z jej powierzchni wystarczy elektronowi pewna minimalna energia  $\Phi$ . Energia  $\Phi$  jest charakterystyczna dla materiału, z którego wykonana jest tarcza, i nazywana jest **pracą wyjścia** dla tego materiału. Jeśli energia  $h\nu$  przekazana przez foton elektronowi przewyższa tę pracę wyjścia ( $h\nu > \Phi$ ), to elektron zostaje uwolniony z tarczy. Jeśli przekazana energia jest mniejsza niż praca wyjścia (a więc  $h\nu < \Phi$ ), elektron nie może zostać uwolniony. To właśnie pokazuje rysunek 39.2.

### Równanie Einsteina

Einstein podsumował wyniki powyższych doświadczeń fotoelektrycznych w równaniu

$$h\nu = E_{k\max} + \Phi \quad (\text{równanie Einsteina}). \quad (39.5)$$

Wysyła ono zasadę zachowania energii w przypadku pochłonięcia pojedynczego fotonu przez tarczę o pracy wyjścia  $\Phi$ . Energia  $h\nu$  równa energii fotonu przekazywana jest pojedynczemu elektronowi w materiale, z którego wykonana jest tarcza. Aby elektron mógł wyrwać się z tarczy, musi otrzymać energię co najmniej równą energii  $\Phi$ . Cała dodatkowa energia ( $h\nu - \Phi$ ), jaką elektron otrzymuje od fotonu, pojawi się jako jego energia kinetyczna  $E_k$ . W najbardziej korzystnych warunkach elektron może wyrwać się z powierzchni tarczy bez zmniejszenia tej energii. Pojawi się zatem poza tarczą z maksymalną możliwą energią kinetyczną  $E_{k\max}$ .

Przepiszmy równanie (39.5), podstawiając wartość  $E_{k\max}$  z równania (39.4). Po krótkich przekształceniach otrzymamy

$$V_{\text{stop}} = \left( \frac{h}{e} \right) v - \frac{\Phi}{e}. \quad (39.6)$$

Stosunki  $h/e$  i  $\Phi/e$  są stałymi, tak więc powinniśmy się spodziewać, że wykres zależności potencjału hamującego  $V_{\text{stop}}$  od częstotliwości  $v$  będzie linią prostą, tak jak na rysunku 39.2. Co więcej, nachylenie tej prostej powinno być równe  $h/e$ . Aby to sprawdzić, zmierzymy długości odcinków  $ab$  i  $bc$  na rysunku 39.2 i napiszemy

$$\begin{aligned} \frac{h}{e} &= \frac{ab}{bc} = \frac{2,35 \text{ V} - 0,72 \text{ V}}{(11,2 \cdot 10^{14} - 7,2 \cdot 10^{14}) \text{ Hz}} \\ &= 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}. \end{aligned}$$

Mnożąc ten wynik przez wartość ładunku elementarnego  $e$ , znajdujemy

$$h = (4,1 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

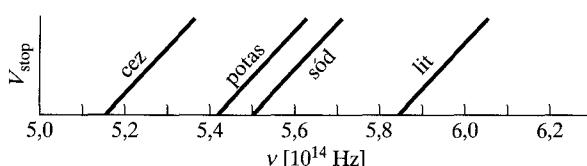
co zgadza się z wartościami zmierzonymi w innych doświadczeniach.

*Na marginesie:* Wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego z pewnością wymaga zastosowania fizyki kwantowej. Przez wiele lat wyjaśnienie Einsteina było także nieodpartym argumentem za istnieniem fotonów. Jednak w roku 1969 znaleziono alternatywne wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego, które angażowało fizykę kwantową, nie wykorzystując jednak pojęcia fotonu. Światło jest w istocie skwantowane, ale wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego zaproponowane przez Einsteina nie jest najlepszym na to argumentem.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono zależności napięcia hamującego od częstotliwości padającego światła (jak na rysunku 39.2) dla tarcz wykonanych z cezu, potasu, sodu i litu. Odpowiednie wykresy są prostymi równoległymi.

a) Uszereguj materiały, z których wykonane są tarcze, według ich prac wyjścia, zaczynając od największej.

b) Uszereguj wykresy według odpowiadających im wartości  $h$ , zaczynając od największej.



## Przykład 39.2

Folia wykonana z potasu znajduje się w odległości  $r = 3,5 \text{ m}$  od izotropowego źródła światła, emittującego energię z mocą  $P = 1,5 \text{ W}$ . Praca wyjścia dla potasu wynosi  $2,2 \text{ eV}$ . Przypuśćmy, że energia jest przekazywana przez padające światło w sposób ciągły (tak jakby fizyka klasyczna brała górę nad fizyką kwantową). Jak długo folia musiałaby pochłaniać energię, aby możliwe było wybitie z niej pojedynczego elektronu? Założymy, że folia pochłania całość energii padającego na nią światła i że elektron, który ma być uwolniony z folii, przejmuje energię pochloniętą przez okrągły kawałek folii o promieniu  $5,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ , a więc o rozmiarze typowego atomu.

### ROZWIĄZANIE:

1. Czas  $\Delta t$  potrzebny na pochłonięcie przez omawiany kawałek folii energii  $\Delta E$  zależy od mocy  $P_{\text{abs}}$ , z jaką pochłaniana jest ta energia:

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{\text{abs}}}.$$

2. Minimalna energia  $\Delta E$ , jaką elektron musi uzyskać od światła, aby opuścić powierzchnię folii, równa jest pracy wyjścia  $\Phi$  dla potasu. Tak więc

$$\Delta t = \frac{\Phi}{P_{\text{abs}}}.$$

3. Ponieważ rozważany kawałek folii całkowicie pochłania światło, to moc  $P_{\text{abs}}$ , z jaką pochłaniana jest energia, jest równa mocy  $P_f$ , z jaką dociera ona do folii:

$$\Delta t = \frac{\Phi}{P_f}.$$

4. Korzystając z równania (34.23), możemy powiązać moc, z jaką energia pada na folię  $P_f$ , z natężeniem  $I$  światła na powierzchni folii i powierzchnią  $S$  omawianego jej kawałka:

$$P_f = IS.$$

Zatem

$$\Delta t = \frac{\Phi}{IS}.$$

5. Ponieważ źródło światła jest izotropowe, więc natężenie światła  $I$  w odległości  $r$  od źródła zależy od mocy  $P_{\text{emit}}$ , z jaką źródło emituje energię zgodnie z równaniem (34.27)

$$I = \frac{P_{\text{emit}}}{4\pi r^2}.$$

Tak więc ostatecznie

$$\Delta t = \frac{4\pi r^2 \Phi}{P_{\text{emit}} S}.$$

Powierzchnia  $S$ , z której zbierana jest energia, wynosi  $\pi(5,0 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2 = 7,85 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$ , a praca wyjścia  $\Phi$  jest równa

$2,2 \text{ eV} = 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Podstawiając te oraz pozostałe dane, znajdujemy

$$\Delta t = \frac{4\pi(3,5 \text{ m})^2(3,5 \cdot 10^{-19} \text{ J})}{(1,5 \text{ W})(7,85 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2)} \\ = 4580 \text{ s} \approx 1,3 \text{ h.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc zgodnie z fizyką klasyczną po włączeniu źródła

światła musielibyśmy czekać ponad godzinę, zanim z powierzchni folii uwolniony zostałby fotoelektron. Prawdziwy czas jest krótszy niż  $10^{-9} \text{ s}$ . Najwyraźniej elektron nie pochłania stopniowo energii światła padającego na kawałek folii, w którym się on znajduje. Zamiast tego albo nie pochłania żadnej energii, albo momentalnie pobiera kwant energii, pochłaniając foton z padającej na folię wiązki światła.

### Przykład 39.3

Korzystając z rysunku 39.2, znajdź pracę wyjścia  $\Phi$  dla sodu.

#### ROZWIĄZANIE:

Pracę wyjścia  $\Phi$  można wyznaczyć, znając częstotliwość progową  $v_0$  (która można odczytać na rysunku). Rozumowanie jest następujące: Dla częstotliwości progowej energia kinetyczna  $E_{\text{kmax}}$  w równaniu (39.5) równa jest zeru. Zatem cała energia  $h\nu$  przekazana przez foton elektronowi jest wykorzystywana na jego wybitie

z materiału. Energia ta jest równa pracy wyjścia  $\Phi$ . Podstawiając  $v = v_0$  do równania (39.5), otrzymujemy

$$h\nu_0 = 0 + \Phi = \Phi.$$

Na rysunku 39.2 wykres napięcia przecina oś częstotliwości w punkcie odpowiadającym częstotliwości progowej  $v_0 = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . Zatem

$$\Phi = h\nu_0 = (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) \\ = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,3 \text{ eV.} \quad (\text{odpowiedź})$$

### 39.4. Fotony mają pęd

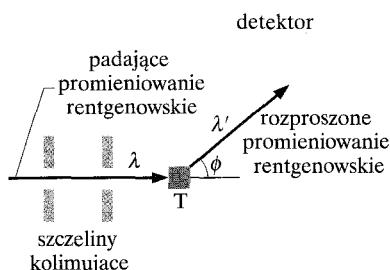
W 1916 r. Einstein rozszerzył swoją koncepcję kwantów światła (fotonów), postulując, że kwant światła ma pęd. Pęd fotonu o energii  $h\nu$  wynosi

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{pęd fotonu}). \quad (39.7)$$

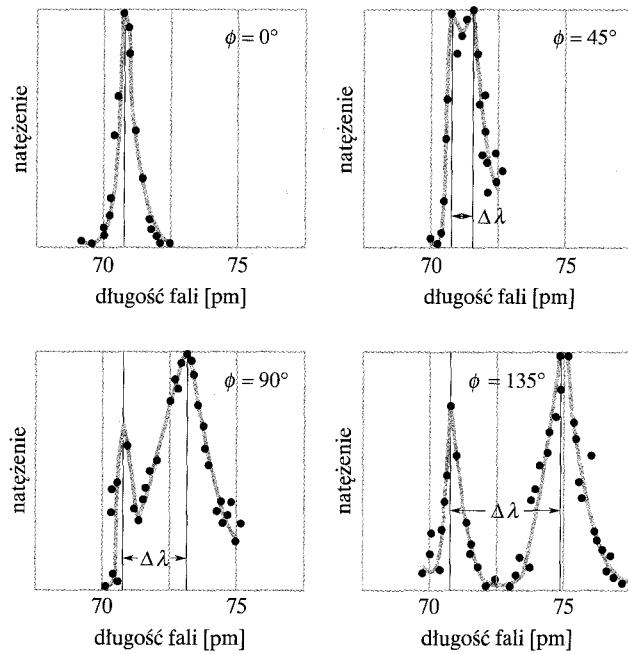
Korzystając z równania (39.1), wyraźliśmy w powyższym wzorze częstotliwość fotonu  $\nu$  przez długość  $\lambda$  odpowiadającą mu fali świetlnej ( $\nu = c/\lambda$ ). Zatem gdy foton oddziałuje z materią, energia i pęd przekazywane są tak, jakby zderzenie fotonu i materii zaszło w klasycznym sensie (jak w rozdziale 10).

W 1923 r. Arthur Compton z Washington University w St. Louis przeprowadził doświadczenie, które potwierdziło pogląd, że przy udziale fotonów przekazywane są zarówno pęd, jak i energia. W jego eksperymencie wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali  $\lambda$  była kierowana na grafitową tarczę, tak jak to pokazano na rysunku 39.3. Promieniowanie rentgenowskie jest rodzajem promieniowania elektromagnetycznego o wysokiej częstotliwości, a więc małej długości fali. Compton zmierzył długość fali i natężenie promieniowania rozproszonego w różnych kierunkach względem kierunku wiązki padającej.

Na rysunku 39.4 pokazano wyniki tego doświadczenia. Mimo że promieniowanie padające na tarczę jest monochromatyczne ( $\lambda = 71,1 \text{ pm}$ ), to widać, że wiązka rozprosiona zawiera cały zakres długości fal z dwiema wyraźnymi liniemi. Jedno maksimum pojawia się dla długości fali wiązki padającej  $\lambda$ , drugie dla dłuższej fali  $\lambda'$ . Różnica pomiędzy tymi długościami  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  nazywana jest **przesunięciem comptonowskim**. Wartość przesunięcia comptonows-



Rys. 39.3. Schemat aparatury Comptona. Wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali  $\lambda = 71,1 \text{ pm}$  pada na grafitową tarczę T. Rozproszone promieniowanie rentgenowskie jest obserwowane pod różnymi kątami względem wiązki padającej. Natężenie wiązki rozproszonej oraz jej długość fali mierzone są przez detektor



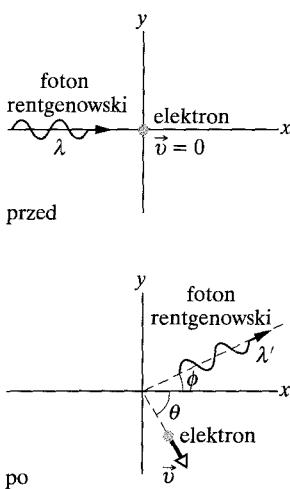
Rys. 39.4. Wyniki doświadczenia Comptona dla czterech wartości kąta rozpraszania  $\phi$ . Zauważ, że przesunięcie comptonowskie  $\Delta\lambda$  zwiększa się wraz ze wzrostem kąta rozpraszania

skiego zależy od kąta, pod jakim obserwuje się rozproszone promieniowanie rentgenowskie.

Wyniki pokazane na rysunku 39.4 stanowią kolejną zagadkę dla fizyki klasycznej. W klasycznym podejściu promieniowanie rentgenowskie padające na grafitową tarczę jest sinusoidalną falą elektromagnetyczną. Pod wpływem drgającego pola elektrycznego tej fali elektron w tarczy powinien także drgać sinusoidalnie. Co więcej, elektron ten powinien drgać z taką samą częstotliwością jak padająca fala, a także powinien wysyłać falę *o takiej samej częstotliwości*, tak jakby był małą anteną. Zatem promieniowanie rentgenowskie rozproszone przez ten elektron powinno mieć tę samą częstotliwość i tę samą długość fali co promieniowanie w wiązce padającej. Tak się jednak nie dzieje.

Compton zinterpretował rozpraszanie promieniowania rentgenowskiego jako wynik przekazu energii i pędu pomiędzy padającą wiązką promieniowania a słabo związanej elektronami w grafitowej tarczy. Przekaz ten odbywa się za pośrednictwem fotonów. Rozpatrzmy najpierw pojęciowo, a potem także ilościowo, jak ta kwantowa interpretacja umożliwia zrozumienie wyników Comptona.

Przymijmy, że w oddziaływaniu pomiędzy padającą wiązką promieniowania rentgenowskiego a nieruchomo elektronem bierze udział pojedynczy foton (o energii  $E = h\nu$ ). W ogólnym przypadku kierunek ruchu fotonu rentgenowskiego się zmienia (foton zostaje rozproszony), elektron zaś zostanie odrzucony, co oznacza, że uzyska pewną energię kinetyczną. W tym izolowanym oddziaływaniu energia zostaje zachowana. Tak więc energia rozproszonego fotonu ( $E' = h\nu'$ ) musi być mniejsza niż energia fotonu padającego. Rozproszone promieniowanie rentgenowskie musi mieć zatem niższą częstotliwość  $\nu'$ , a więc długość fali  $\lambda'$  będzie większa niż długość fali wiązki padającej, dokładnie tak jak wskazują pokazane na rysunku 39.4 wyniki doświadczenia Comptona.



Rys. 39.5. Foton promieniowania rentgenowskiego o długości fali  $\lambda$  oddziałuje z nieruchomym elektronem. Zostaje on rozproszony pod kątem  $\phi$  i jego długość fali  $\lambda'$  się zwiększyła. Elektron porusza się po zderzeniu z prędkością  $v$  pod kątem  $\theta$

Do ilościowej analizy tych wyników zastosujemy najpierw zasadę zachowania energii. Na rysunku 39.5 pokazane jest „zderzenie” fotonu rentgenowskiego z początkowo nieruchomym swobodnym elektronem znajdującym się w tarczy. W wyniku tego zderzenia foton rentgenowski o długości fali  $\lambda'$  porusza się pod kątem  $\phi$ , elektron zaś — pod kątem  $\theta$ . Z zasady zachowania energii wynika, że

$$h\nu = h\nu' + E_k,$$

gdzie  $h\nu$  jest energią fotonu padającego,  $h\nu'$  jest energią fotonu rozproszonego,  $E_k$  zaś jest energią kinetyczną odrzuconego elektronu. Elektron może zostać odrzucony z prędkością porównywalną z prędkością światła. Aby znaleźć jego energię kinetyczną, musimy zatem skorzystać z wyrażenia relatywistycznego (równanie (38.49)):

$$E_k = mc^2(\gamma - 1),$$

gdzie  $m$  jest masą elektronu,  $\gamma$  zaś — współczynnikiem Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Zasada zachowania energii przybiera zatem postać

$$h\nu = h\nu' + mc^2(\gamma - 1).$$

Podstawiając zamiast częstotliwości  $\nu$  i  $\nu'$  odpowiednio wyrażenia  $c/\lambda$  i  $c/\lambda'$ , otrzymamy nowe równanie

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1). \quad (39.8)$$

Następnie do zderzenia fotonu rentgenowskiego z elektronem, pokazanego na rysunku 39.5, zastosujemy zasadę zachowania pędu. Z równania (39.7) wynika, że pęd padającego fotonu równy jest  $h/\lambda$ , a pęd fotonu po rozproszeniu wynosi  $h/\lambda'$ . Z równania (38.38) wynika, że pęd odrzuconego elektronu równy jest  $\gamma mv$ . Ponieważ problem jest dwuwymiarowy, z zasady zachowania pędu wzdłuż osi  $x$  i  $y$  wynikają następujące równania:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \phi + \gamma mv \cos \theta \quad (\text{oś } x) \quad (39.9)$$

oraz

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \phi + \gamma mv \sin \theta \quad (\text{oś } y). \quad (39.10)$$

Naszym celem jest znalezienie przesunięcia comptonowskiego  $\Delta\lambda (= \lambda' - \lambda)$  rozproszonego promieniowania rentgenowskiego. Spośród pięciu zmiennych opisujących zderzenie ( $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $v$ ,  $\phi$  i  $\theta$ ), występujących w równaniach (39.8), (39.9) i (39.10), można wyeliminować te, które odnoszą się tylko do odrzuconego elektronu, a więc  $v$  oraz  $\theta$ . Po pewnych (nieco skomplikowanych) przekształceniach można otrzymać wzór na zależność przesunięcia comptonowskiego od kąta rozproszenia  $\phi$ :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi) \quad (\text{przesunięcie comptonowskie}). \quad (39.11)$$

Równanie (39.11) potwierdza doświadczalne wyniki Comptona.

Wielkość  $h/mc$  w równaniu (39.11) jest stałą zwaną **comptonowską długą fali**. Jej wartość zależy od masy  $m$  cząstki, na której rozprasza się promienio-

wanie rentgenowskie. W rozważanym przypadku cząstką tą jest słabo związyany elektron. Zatem aby znaleźć comptonowską długość fali dla rozproszenia komptonowskiego na elektronie, do równania (39.11) należy wstawić masę elektronu  $m$ .

## Komentarz

Pojawienie się w widmie rozproszonego promieniowania rentgenowskiego linii odpowiadającej długości fali  $\lambda$  ( $= 71,1 \text{ pm}$ ) promieniowania padającego (rys. 39.4) wymaga w dalszym ciągu wyjaśnienia. Nie jest ona efektem oddziaływania między promieniowaniem rentgenowskim a bardzo słabo związanymi elektronami w tarczy. Jest ona wynikiem oddziaływania między tym promieniowaniem a elektronami silnie związanymi w atomach węgla, z których zbudowana jest tarcza. Efektywnie każde z tych zderzeń zachodzi pomiędzy fotonem rentgenowskim wiązki padającej a całym atomem węgla. Jeśli do równania (39.11) wstawimy masę  $m$  atomu węgla (która jest w przybliżeniu 22 000 razy większa niż masa elektronu), to zobaczymy, że wartość  $\Delta\lambda$  staje się 22 000 razy mniejsza niż przesunięcie komptonowskie w przypadku zderzeń z elektronami, a więc jest niemierzalnie mała. Zatem promieniowanie rentgenowskie rozproszone w takich zderzeniach ma tę samą długość fali co promieniowanie padające.

## Przykład 39.4

Promieniowanie rentgenowskie o długości fali  $\lambda = 22 \text{ pm}$  (energia fotonu = 56 keV) jest rozpraszane na grafitowej tarczy. Promieniowanie rozproszone obserwowane jest pod kątem  $85^\circ$  w stosunku do wiązki padającej.

a) Jakie jest przesunięcie komptonowskie dla wiązki rozproszonej?

### ROZWIĄZANIE:

○ Przesunięcie komptonowskie to zmiana długości fali promieniowania rentgenowskiego rozproszonego na słabo związanego elektronach tarczy. Zgodnie z równaniem (39.11), przesunięcie to zależy od kąta, pod jakim obserwuje się rozproszone promieniowanie rentgenowskie. Podstawiając do równania (39.11) wartości tego kąta ( $85^\circ$ ) i masy elektronu ( $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ), gdyż rozpraszanie zachodzi na elektronach, otrzymujemy

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\phi) = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(1 - \cos 85^\circ)}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})} = 2,21 \cdot 10^{-12} \text{ m} \approx 2,2 \text{ pm.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaki ułamek początkowej energii fotonu zostaje przekazany elektronowi w rozważanym akcie rozproszenia?

### ROZWIĄZANIE:

○ Względna strata energii fotonów rozpraszających się na elektronach wynosi

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\text{strata energii}}{\text{energia początkowa}} = \frac{E - E'}{E}.$$

Wyrazimy energię początkową  $E$  i energię fotonów promieniowania rentgenowskiego po rozproszeniu  $E'$  za pomocą częstotliwości ( $E = h\nu$ , patrz równanie (39.2)). Następnie, korzystając z równania (39.1) ( $\nu = c/\lambda$ ), wyrazimy te częstotliwości przez długości fali. Znajdujemy

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu - h\nu'}{h\nu} = \frac{c/\lambda - c/\lambda'}{c/\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}. \quad (39.12)$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2,21 \text{ pm}}{22 \text{ pm} + 2,21 \text{ pm}} = 0,091, \quad \text{czyli} \quad \frac{\Delta E}{E} = 9,1\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

Mimo że przesunięcie komptonowskie jest niezależne od długości fali padającego promieniowania rentgenowskiego (patrz równanie (39.11)), to względna strata energii tego promieniowania zależy od długości fali  $\lambda$  i rośnie wraz ze zmniejszaniem się długości fali, tak jak to pokazuje równanie (39.12).

**SPRAWDZIAN 3:** Porównaj rozpraszanie komptonowskie obserwowane pod pewnym kątem dla promieniowania rentgenowskiego ( $\lambda \approx 20 \text{ pm}$ ) i światła widzialnego ( $\lambda \approx 500 \text{ nm}$ ). W którym przypadku większe jest: a) przesunięcie komptonowskie, b) względna zmiana długości fali, c) względna zmiana energii fotonu, d) energia przekazana elektronowi?

## 39.5. Światło jako fala prawdopodobieństwa

Największą zagadką fizyki jest pytanie, w jaki sposób światło w podejściu klasycznym może być falą (rozciągającą się na pewien obszar), podczas gdy w fizyce kwantowej jest ono emitowane i pochłaniane w postaci fotonów (powstających i znikających w pewnych punktach). W sercu tej tajemnicy leży doświadczenie Younga omawiane w paragrafie 36.4. Przedyskutujmy trzy wersje tego doświadczenia.

### Wersja standardowa

Na rysunku 39.6 przedstawiony jest szkic oryginalnego doświadczenia, jakie Thomas Young przeprowadził w 1801 r. (por. również rysunek 36.6). Na ekranie B, w którym znajdują się dwie wąskie równoległe szczeliny, pada światło. Fale świetlne przechodzące przez szczeliny uginają się na skutek dyfrakcji, a następnie nakładają się na siebie na ekranie C i tworzą prążki interferencyjne. Mały detektor fotonów D umieszczony w płaszczyźnie ekranu C sygnalizuje absorpcję każdego fotonu głośnym trzaskiem.

Ustawmy w pewnym punkcie na płaszczyźnie ekranu C malutki detektor fotonów D. Niech będzie to układ fotoelektryczny, reagujący trzaskiem na pochłanianie fotonów. Stwierdzilibśmy, że detektor ten wytwarza serię przypadkowo pojawiających się trzasków. Każdy z nich oznajmia przekazanie energii z fali świetlnej na ekran, będące wynikiem pochłonięcia fotonu.

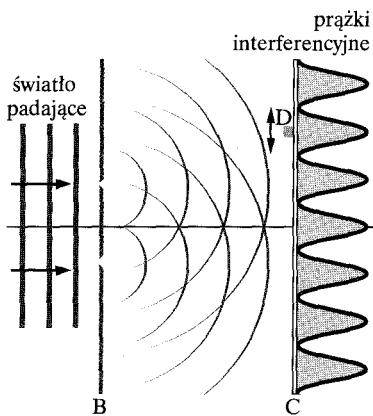
Gdybyśmy bardzo wolno przesuwali nasz detektor w górę lub w dół, tak jak to pokazuje czarna strzałka na rysunku 39.6, zauważlibyśmy, że częstość trzasków zwiększa się i zmniejsza, przechodząc na przemian przez maksima i minima odpowiadające dokładnie maksymom i minimom jasności prążków interferencyjnych.

Sednem tego myślowego doświadczenia jest następujące stwierdzenie. Nie potrafimy przewidzieć, kiedy w pewnym konkretnym punkcie na ekranie C zostanie wykryty foton. Fotony wykrywane są w pojedynczych punktach w przypadkowych momentach. Umiemy jednak przewidzieć, że względne prawdopodobieństwo wykrycia fotonów w pewnym konkretnym punkcie w określonym przedziale czasowym jest proporcjonalne do natężenia światła w tym punkcie.

W paragrafie 34.4 zobaczyliśmy, że natężenie  $I$  fali świetlnej w dowolnym punkcie jest proporcjonalne do kwadratu  $E_m$ , amplitudy wektora oscylującego pola elektrycznego tej fali w danym punkcie. Zatem:

► Prawdopodobieństwo (przypadające na jednostkowy przedział czasu), że w pewnej małej objętości wokół danego punktu w fali świetlnej zostanie wykryty foton, jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy wektora pola elektrycznego tej fali w danym punkcie.

Uzyskaliśmy w ten sposób probabilistyczny opis fali świetlnej, a więc inny obraz światła. Jest to nie tylko fala elektromagnetyczna, ale także **fala praw-**



Rys. 39.6. Na przesłonę B, w której znajdują się dwie równoległe szczeliny, kierowane jest światło. Wiązki wychodzące z tych szczelin uginają się na skutek dyfrakcji. Dwie ugięte wiązki nakładają się na siebie na ekranie C i tworzą prążki interferencyjne. Mały detektor fotonów D umieszczony w płaszczyźnie ekranu C sygnalizuje absorpcję każdego fotonu głośnym trzaskiem.

**dopodobieństwa.** A więc z każdym punktem fali świetlnej możemy powiązać liczbowe prawdopodobieństwo (przypadające na przedział czasu), że w pewnej małej objętości dookoła tego punktu można wykryć foton.

### **Wersja jednofotonowa**

Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami zostało po raz pierwszy przeprowadzone w wersji jednofotonowej przez G.I. Taylora w 1909 r. Później było ono wielokrotnie powtarzane. Od wersji standardowej różni się tym, że źródło światła zastosowane w tym przypadku jest niezwykle słabe. Emiteme ono w przypadkowych chwilach tylko jeden foton na raz. W zadziwiający sposób prążki interferencyjne nadal powstają na ekranie C, jeśli doświadczenie trwa dostatecznie długo (kilka miesięcy w przypadku wczesnego doświadczenia Taylora).

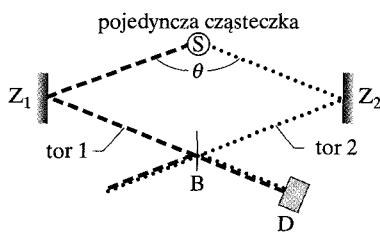
Jak wyjaśnić tę jednofotonową wersję doświadczenia Younga? Zanim zaczniemy rozważać jego wyniki, nieodparta wydaje się pokusa zadania takich pytań, jak: Jeśli fotony przemierzają układ eksperymentalny pojedynczo, to przez którą z dwóch szczelin na ekranie B przechodzi dany foton? A skąd w ogóle dany foton „wie” o istnieniu drugiej szczeliny, co otwiera możliwość interferencji? Czy foton potrafi w jakiś sposób przejść przez obydwie szczeliny, a następnie interferować sam ze sobą?

Pamiętajmy, że o fotonie potrafimy się dowiedzieć tylko wtedy, gdy oddziaływałe on z materią. Nie mamy żadnego sposobu wykrycia fotonów bez oddziaływanego z materią — detektorem lub ekranem. Tak więc z doświadczenia przedstawionego na rysunku 39.6 potrafimy się tylko dowiedzieć, że fotony powstają w źródle światła i znikają na ekranie. Nie potrafimy powiedzieć, czym jest lub co robi foton pomiędzy źródłem a ekranem. Jednak, ponieważ ostatecznie na ekranie powstaje obraz interferencyjny, możemy spekulować, że każdy foton wędruje od źródła do ekranu jako fala wypełniająca przestrzeń pomiędzy tymi obiektami. Następnie zaś znika w akcie absorpcji, tracąc energię i pęd w pewnym punkcie na ekranie.

*Nie umiemy* przewidzieć, gdzie dla konkretnego fotonu powstającego w źródle nastąpi ten przekaz (gdzie zostanie on wykryty). Jednak *umiemy* określić prawdopodobieństwo, że przekaz nastąpi w pewnym dowolnym punkcie na ekranie. Przekazy te będą miały tendencję do pojawiania się (a zatem fotony będą częściej pochłaniane) w rejonie jasnych prążków obrazu interferencyjnego powstającego na ekranie. Przekazy te będą miały tendencję do *nie* pojawiania się (a zatem fotony raczej *nie* będą pochłaniane) w rejonie ciemnych prążków tego obrazu interferencyjnego. Tak więc możemy powiedzieć, że fala wędrująca ze źródła na ekran jest *falą prawdopodobieństwa*, wytwarzającą na ekranie obraz „prążków prawdopodobieństwa”.

### **Szerokątowa wersja jednofotonowa**

W przeszłości fizycy starali się wyjaśnić doświadczenie Younga w wersji jednofotonowej, używając pojęcia małych paczek klasycznych fal świetlnych, które byłyby pojedynczo wysyłane w kierunku szczelin. Definiowali oni te małe paczki



Rys. 39.7. Światło będące wynikiem pojedynczego aktu emisji w źródle S rozchodzące się wzduż dwóch dróg, tworzących ze sobą duży kąt, pada na płytę światłodzielającą B i interferuje ze sobą w detektorze D (Ming Lai i Jean-Claude Diels, *Journal of the Optical Society of America B*, **9**, 2290–2294, grudzień 1992)

jako fotony. Nowoczesne doświadczenia obaliły jednak to wyjaśnienie i tę definicję. Na rysunku 39.7 pokazano schemat jednego z tych doświadczeń, o którym donieśli w roku 1992 Ming Lai i Jean-Claude Diels z University of New Mexico. Źródło S zawiera cząsteczki emitujące fotony w dobrze oddzielonych momentach. Zwierciadła  $Z_1$  i  $Z_2$  kierują te fotony wzduż dwóch różnych dróg 1 i 2, różniących się o kąt  $\theta$ , bliski  $180^\circ$ . Układ ten różni się od układu w standardowym doświadczeniu Younga, w którym kąt pomiędzy drogami światła docierającego do obu szczelin jest bardzo mały.

Światło poruszające się wzduż dróg 1 i 2 po odbiciu od zwierciadeł  $Z_1$  i  $Z_2$  spotyka się na płytce światłodzielającej B. (Płytki światłodzieliące są elementem optycznym, który przepuszcza część padającego na nią światła, resztę zaś odbija). Po prawej stronie płytki światłodzielającej na rysunku 39.7 światło poruszające się wzduż drogi 2 i odbite przez B dodaje się do światła poruszającego się wzduż drogi 1 i przepuszczanego przez B. Oba te promienie świetlne interferują ze sobą, docierając do detektora D (fotopowielacza z licznikiem fotonów).

Na wyjściu z detektora pojawia się szereg przypadkowo rozłożonych w czasie elektronicznych impulsów, z których każdy odpowiada pojedynczemu wykrytemu fotonowi. W doświadczeniu płytka światłodzielająca porusza się powoli w poziomie (w omawianym eksperymencie nie więcej niż około 50 mikrometrów), sygnał z detektora zaś zapisywany jest na rejestratorze. Przesuwanie płytka światłodzielającej zmienia długości dróg 1 i 2. Wprowadza to przesunięcie fazowe pomiędzy promieniami światła docierającymi do detektora D. W sygnale wyjściowym z detektora pojawiają się maksima i minima interferencyjne.

Przytoczone doświadczenie trudno zrozumieć, posługując się obrazem klasycznym. Na przykład, jeśli cząsteczka w źródle emiteme pojedynczy foton, to czy będzie on poruszał się wzduż drogi 1, czy 2 na rysunku 39.7 (czy wzduż innej dowolnej drogi)? W jaki sposób może się on poruszać jednocześnie w obu kierunkach? Aby odpowiedzieć na to pytanie, zakładamy, że gdy cząsteczka emiteme foton, we wszystkich kierunkach rozchodzi się fala prawdopodobieństwa. W doświadczeniu wybiera się spośród tych kierunków dwa niemalże przeciwe do siebie.

Jak widać, wszystkie trzy wersje doświadczenia Younga potrafimy zinterpretować, jeśli założymy, że (1) światło jest generowane w źródle w postaci fotonów, (2) światło jest pochłaniane w detektorze w postaci fotonów i (3) światło porusza się pomiędzy źródłem i detektorem jako fala prawdopodobieństwa.

## 39.6. Elektrony i fale materii

W 1924 r. francuski fizyk Louis de Broglie odwołał się w następujący sposób do zagadnienia symetrii: Promień świetlny jest falą, ale energię i pęd przekazuje on materii tylko punktowo, w postaci fotonów. Czemu wiązka cząstek nie miałaby mieć takich samych własności? Czyli, dlaczego w takim przypadku nie myśleć o poruszającym się elektronie — lub każdej innej cząstce — jako o **fali materii**, która przekazuje punktowo innej materii energię i pęd?

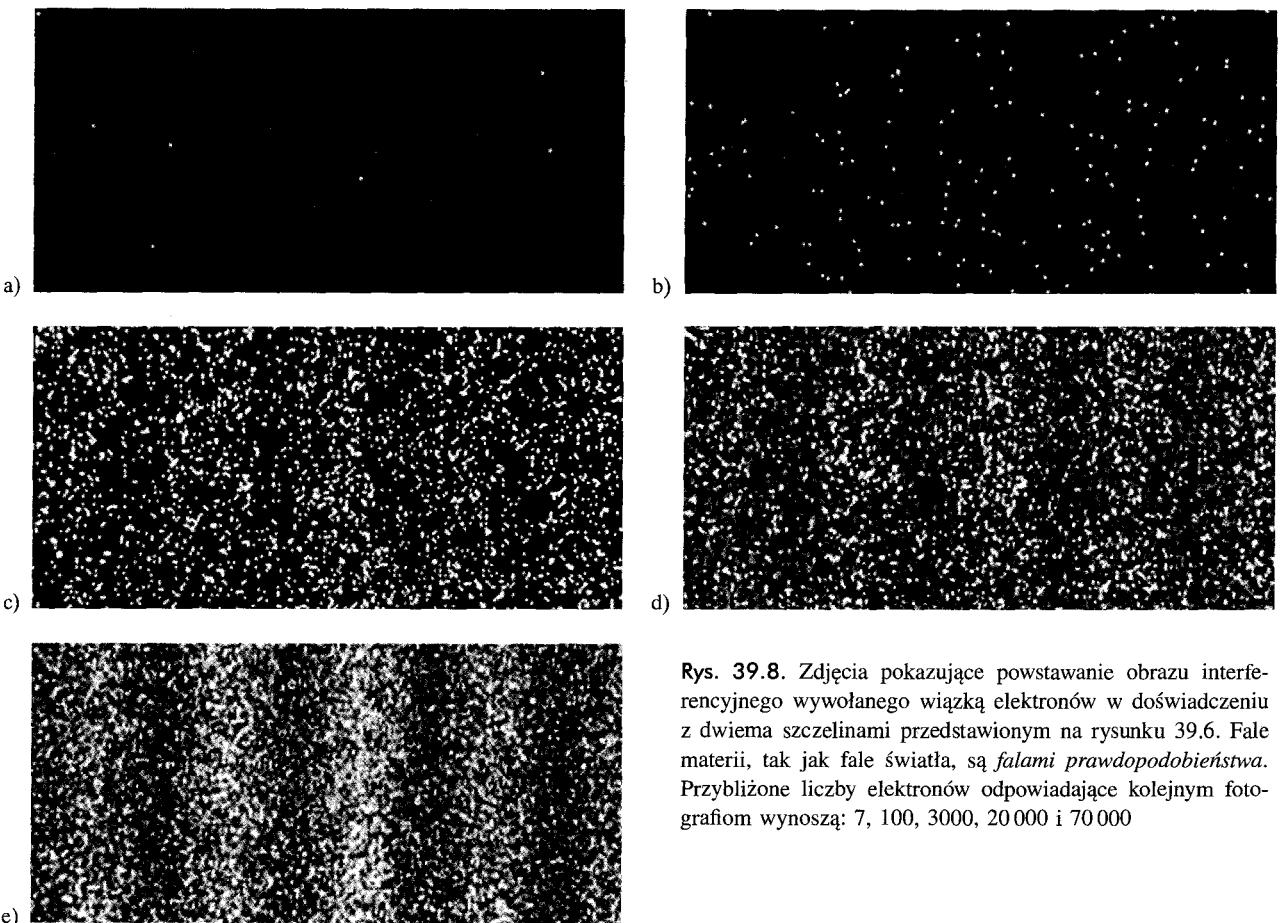
De Broglie zasugerował w szczególności, że równanie (39.7) ( $p = h/\lambda$ ) można by stosować nie tylko do fotonów, ale także do elektronów. W paragra-

fie 39.4 używaliśmy tego równania do przypisania fotonowi światła o długości fali  $\lambda$  — pędu  $p$ . Teraz wykorzystamy to równanie, w formie

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{długość fali de Broglie'a}), \quad (39.13)$$

do przypisania cząstce o pędzie  $p$  — długości fali  $\lambda$ . Długość fali obliczona z równania (39.13) jest nazywana **długością fali de Broglie'a** poruszającej się cząstki. Istnienie fal materii przewidziane przez de Broglie'a po raz pierwszy zweryfikowali doświadczalnie w 1927 r. C.J. Davisson i L.H. Germer z Bell Telephone Laboratories oraz George P. Thomson z University of Aberdeen w Szkocji.

Na rysunku 39.8 pokazano fotograficzny dowód istnienia fal materii uzyskany w bardziej współczesnym doświadczeniu. W eksperymencie tym obraz interferencyjny powstawał wtedy, gdy przez układ z dwiema szczelinami przepuszczano elektrony *jeden po drugim*. Wykorzystany układ doświadczalny był taki jak te, których używaliśmy poprzednio do demonstracji interferencji optycznej. Wyjątkiem jest ekran, który w omawianym doświadczeniu podobny był do zwykłego ekranu telewizyjnego. Uderzenie elektronu w ten ekran wywoływało powstanie świetlnego błysku, którego położenie było zapisywane.

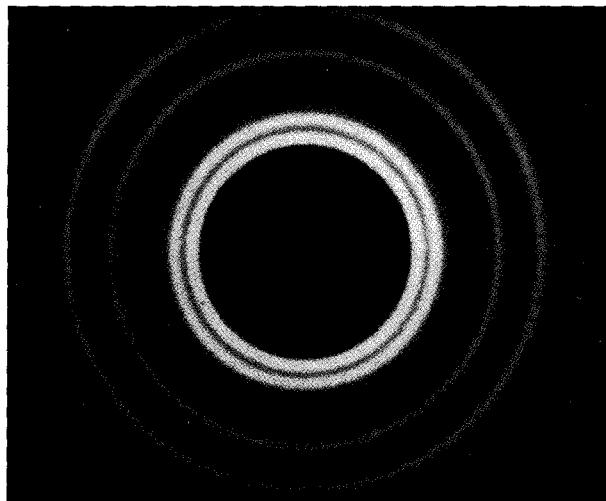
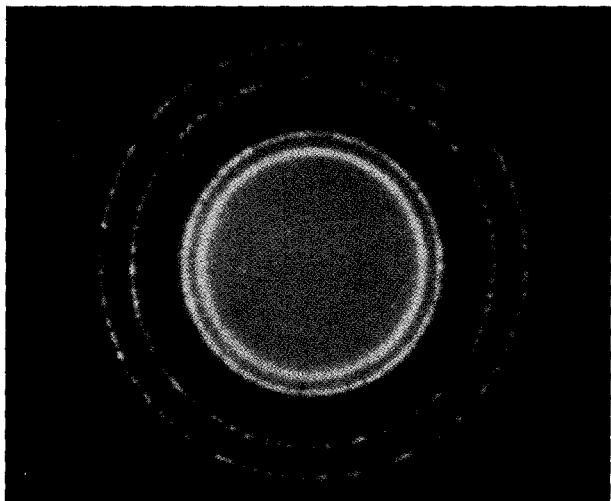
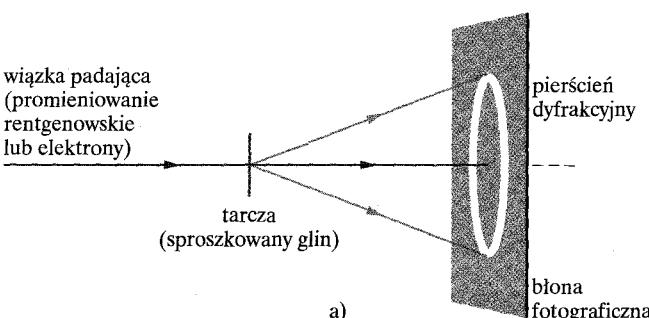


Rys. 39.8. Zdjęcia pokazujące powstawanie obrazu interferencyjnego wywołanego wiązką elektronów w doświadczeniu z dwiema szczelinami przedstawionym na rysunku 39.6. Fale materii, tak jak fale światła, są *falam prawdopodobieństwa*. Przybliżone liczby elektronów odpowiadające kolejnym fotografiom wynoszą: 7, 100, 3000, 20 000 i 70 000

Pierwszych kilka elektronów (dwa góre zdjęcia) nie ujawniało niczego interesującego i pozorne uderzało w przypadkowe punkty ekranu. Jednak gdy przez układ przeszło wiele tysięcy elektronów, na ekranie pojawił się pewien obraz. Jasne prążki ujawniły się w miejscach, gdzie na ekran padło wiele elektronów, ciemne zaś tam, gdzie na ekran padło niewiele elektronów. Obraz ten odpowiada dokładnie temu, czego spodziewaliśmy się w przypadku interferencji fal. Tak więc *każdy* elektron przebył układ doświadczalny jako fala materii — część, która poruszała się przez jedną szczelinę, interferowała z częścią, która poruszała się przez drugą szczelinę. Zatem w wyniku interferencji elektron dociera do różnych punktów ekranu z różnym prawdopodobieństwem. Te miejsca, w których pojawiło się wiele elektronów, są odpowiednikiem jasnych prążków w interferencji optycznej, natomiast miejsca, w których pojawiło się mało elektronów — ciemnych prążków.

Podobne zjawiska interferencji zaobserwowano dla protonów, neutronów i różnych atomów. W 1994 r. stwierdzono interferencję cząsteczek jodu  $I_2$ , które są nie tylko 500 000 razy cięższe od elektronów, ale także daleko bardziej złożone. W 1999 r. zaobserwowano ją dla jeszcze bardziej skomplikowanych cząsteczek — fulerenów  $C_{60}$  i  $C_{70}$ . (Fulereny są cząsteczkami o kształcie piłki futbolowej zbudowanymi z atomów węgla: 60 w  $C_{60}$  i 70 w  $C_{70}$ ). Najwyraźniej takie małe

Rys. 39.9. a) Układ doświadczalny wykorzystywany do prezentacji falowego charakteru padającej wiązki metodami dyfrakcyjnymi. Obrazy dyfrakcyjne otrzymane dla b) wiązki promieniowania rentgenowskiego i c) wiązki elektronów (fali materii). Zwróć uwagę, że zasadnicza geometria obu obrazów jest identyczna



obiekty, jak elektryny, protony, atomy i cząsteczki poruszają się jako fale materii. Jednak badając obiekty większe i bardziej złożone, musimy dojść do momentu, w którym rozważanie ich falowej natury przestaje być uzasadnione. W tym momencie dostajemy się z powrotem do naszego znajomego niekwantowego świata, rządzonego przez prawa fizyki poznane w poprzednich rozdziałach tej książki. Krótko mówiąc, elektron jest falą materii i może interferować sam ze sobą, ale kot nie jest falą materii i nie może interferować sam ze sobą (co za ulga dla kotów).

Falowa natura cząstek i atomów jest obecnie przyjmowana za rzeczą naturalną w wielu dziedzinach nauki i techniki. Na przykład dyfrakcja elektronów i neutronów wykorzystywana jest do badania struktury atomowej ciał stałych i cieczy, a dyfrakcję elektronów można zastosować do badania budowy atomowej powierzchni ciał stałych.

Na rysunku 39.9a pokazano układ, który można wykorzystać do demonstracji rozpraszanego na kryształach zarówno promieniowania rentgenowskiego, jak i elektronów. Wiązka jednego bądź drugiego rodzaju kierowana jest na tarczę zawierającą drobny pył kryształków glinu. Długość fali promieniowania rentgenowskiego wynosi  $\lambda$ . Elektronom dostarcza się tyle energii, aby ich długość fali de Broglie'a miała tę samą wartość  $\lambda$ . Rozpraszanego promieniowania rentgenowskiego lub elektronów na krysztale powoduje powstanie na klatek fotograficznej obrazu interferencyjnego przybierającego postać szeregu pierścieni. Na rysunku 39.9b przedstawiono obraz powstały w wyniku rozpraszanego promieniowania rentgenowskiego, podczas gdy na rysunku 39.9c pokazany jest obraz powstający na skutek rozpraszanego elektronów. Obrazy są takie same. Zarówno promieniowanie rentgenowskie, jak i elektryny są falami.

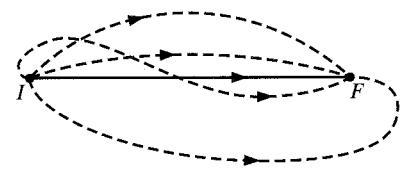
## Fale i cząstki

Rysunki 39.8 i 39.9 stanowią przekonujący dowód na *falową* naturę materii, ale istnieje co najmniej tyle samo doświadczeń sugerujących *korpuskularną* naturę materii. Spójrzmy na ślady utworzone przez elektryny i pokazane na zdjęciu otwierającym ten rozdział. Z pewnością ślady te, które są sznurem pęcherzyków gazu powstałych w ciekłym wodorze, silnie sugerują przejście cząstki. A gdzie tu jest miejsce na falę?

Dla uproszczenia wyłączmy pole magnetyczne, tak aby wyprostować sznury pęcherzyków. Każdy pęcherzyk możemy uważać za punkt detekcji elektronu. Fale materii poruszające się pomiędzy takimi punktami detekcji, jak  $I$  i  $F$  na rysunku 39.10, będą miały do wyboru wszystkie możliwe tory, z których kilka pokazano na rysunku.

W ogólnym przypadku dla każdego toru łączącego punkty  $I$  i  $F$  (poza torem prostoliniowym) będzie istniał taki tor sąsiedni, że fale materii poruszające się po tych torach wygaszą się nawzajem na skutek interferencji. Tak jednak nie będzie

**Rys. 39.10.** Kilka z wielu torów, które łączą dwa punkty detekcji cząstek  $I$  i  $F$ . Konstruktywnie interferują tylko fale materii podążające drogami bliskimi odcinka łączącego te punkty. W przypadku innych dróg fale podążające sąsiednimi torami interferują destruktynie. Tak więc fala materii pozostawi prosty ślad



dla toru prostoliniowego łączącego punkty  $I$  i  $F$ . W takim przypadku fale materii podążające wszystkimi sąsiednimi torami wzmacniają falę podążającą tym prostym torem. O pęcherzykach tworzących ślad w komorze można myśleć jako o szeregu punktów detekcji, w których fala materii doznaje konstruktywnej interferencji.

### Przykład 39.5

Jaka jest długość fali de Broglie'a dla elektronu o energii kinetycznej 120 eV?

#### ROZWIĄZANIE:

 1. Długość fali de Broglie'a  $\lambda$  dla elektronu możemy znaleźć z równania (39.13) ( $\lambda = h/p$ ), jeśli najpierw określmy jego pęd  $p$ .

 2. Pęd  $p$  można wyznaczyć ze znanej energii kinetycznej elektronu  $E_k$ . Energia ta jest znacznie mniejsza niż energia spoczynkowa elektronu (0,511 MeV z tabeli 38.3). Wystarczy więc zastosować klasyczne wzory na pęd  $p = mv$  i energię kinetyczną  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ .

Eliminując z powyższych dwóch równań prędkość, otrzymujemy

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mE_k} \\ &= \sqrt{((2)(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(120 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} \\ &= 5,91 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Zatem z równania (39.13) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{5,91 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \\ &= 1,12 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 112 \text{ pm}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Jest to wielkość rzędu rozmiarów typowego atomu. Jeśli zwiększymy energię kinetyczną, to ta długość fali stanie się jeszcze mniejsza.

 **SPRAWDZIAN 4:** Elektron i proton mogą mieć taką samą a) energię kinetyczną, b) pęd lub c) prędkość. Dla której cząstki fala de Broglie'a będzie krótsza w każdym z tych przypadków?

## 39.7. Równanie Schrödingera

Prostą falę biegnącą dowolnego rodzaju, czy to falę w strunie, czy falę dźwiękową, czy też falę światła można opisać za pomocą pewnej wielkości zmieniającej się w charakterystyczny dla fali sposób. Na przykład dla fali świetlnej wielkością tą jest natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}(x, y, z, t)$  tej fali. Obserwowana wartość tego natężenia w dowolnym punkcie zależy od położenia tego punktu i czasu, w którym dokonywana jest ta obserwacja.

Jakiej zmiennej wielkości powinno się używać do opisu fali materii? Powinniśmy się spodziewać, że ta wielkość, którą nazywamy **funkcją falową**  $\Psi(x, y, z, t)$ , jest bardziej skomplikowana niż odpowiednia wielkość dla fali świetlnej, a to dlatego, że fala materii poza energią i pędem przenosi masę i (często) ładunek elektryczny. Okazuje się, że funkcja  $\Psi$  (wielka litera greckiego alfabetu psi) jest zwykle funkcją zespoloną, a więc zawsze możemy zapisać jej wartość w postaci  $a + ib$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi, a  $i^2 = -1$ .

We wszystkich sytuacjach, z jakimi się tu spotkamy, zmienne przestrzenne i czas można rozseparować i zapisać funkcję  $\Psi$  w postaci

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad (39.14)$$

gdzie  $\omega (= 2\pi\nu)$  jest częstością kołową fali materii. Zauważ, że funkcja  $\psi$  (mała grecka litera psi) reprezentuje tylko zależność od zmiennych przestrzennych części zależnej od czasu funkcji falowej  $\Psi$ . My prawie wyłącznie będziemy się zajmo-

wać funkcją  $\psi$ . W tym miejscu można zadać dwa pytania: co należy rozumieć przez pojęcie funkcji falowej i jak ją znaleźć?

*Co to jest funkcja falowa?* Musi mieć ona związek z faktem, że fala materii, tak jak fala światła, jest falą prawdopodobieństwa. Przypuśćmy, że fala materii dociera do małego detektora cząstek. Wtedy prawdopodobieństwo, że cząstka zostanie wykryta w określonym przedziale czasu, jest proporcjonalne do  $|\psi|^2$ , gdzie  $|\psi|$  jest wartością bezwzględną funkcji falowej w miejscu, gdzie znajduje się detektor. Mimo że  $\psi$  jest zwykle wielkością zespoloną, to  $|\psi|^2$  jest zawsze zarówno rzeczywiste, jak i dodatnie. Zatem to wielkość  $|\psi|^2$ , którą nazywamy **gęstością prawdopodobieństwa**, a nie sama funkcja ma znaczenie *fizyczne*. Mówiąc w uproszczeniu, to znaczenie jest następujące:

► Prawdopodobieństwo (przypadające na jednostkę czasu) wykrycia cząstki w malej objętości wokół danego punktu w fali materii jest proporcjonalne do wartości  $|\psi|^2$  w tym punkcie.

Ponieważ funkcja  $\psi$  jest zwykle zespolona, kwadrat jej wartości bezwzględnej znajdujemy, mnożąc  $\psi$  przez  $\psi^*$  — wielkość zespoloną sprzężoną z  $\psi$ . (Aby znaleźć  $\psi^*$ , zamieniamy liczbę urojoną i na  $-i$  gdziekolwiek się tylko pojawi w wartości  $\psi$ ).

*Jak znajdujemy funkcję falową?* Fale dźwiękowe i fale w strunach opisywane są równaniami mechaniki newtonowskiej. Fale świetlne opisywane są równaniami Maxwella. Fale materii spełniają **równanie Schrödingera**, wprowadzone w 1926 r. przez austriackiego fizyka Erwina Schrödingera.

Wiele rozpatrywanych tu sytuacji będzie dotyczyć cząstki poruszającej się w kierunku  $x$  w obszarze, w którym działające siły powodują, że ma ona energię potencjalną<sup>1</sup>  $U(x)$ . W takim szczególnym przypadku równanie Schrödingera redukuje się do postaci

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U(x)]\psi = 0 \quad (\text{równanie Schrödingera dla ruchu jednowymiarowego}), \quad (39.15)$$

przy czym  $E$  jest całkowitą energią mechaniczną (energia potencjalna plus energia kinetyczna) poruszającej się cząstki. (W tym nierelatywistycznym równaniu nie rozważamy energii spoczynkowej cząstki). Równania Schrödingera nie można wyprowadzić z bardziej podstawowych zasad. Równanie Schrödingera jest podstawową zasadą.

Jeśli energia potencjalna  $U(x)$  występująca w równaniu (39.15) jest równa zeru, to równanie Schrödingera opisuje **cząstkę swobodną** — a więc poruszającą się cząstkę, na którą nie działa żadna siła wypadkowa. Całkowita energia cząstki w takim przypadku jest energią kinetyczną, a więc energia  $E$  pojawiająca się w równaniu (39.15) wynosi  $\frac{1}{2}mv^2$ . Równanie Schrödingera przybiera zatem następującą postać:

<sup>1</sup>Dla wygody w tym fragmencie książki będzie używany symbol  $U$  na oznaczenie energii potencjalnej.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( \frac{mv^2}{2} \right) \psi = 0,$$

co możemy przepisać jako

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left( 2\pi \frac{p}{h} \right)^2 \psi = 0.$$

Aby otrzymać powyższe równanie, zamieniliśmy  $mv$  na pęd  $p$ .

Korzystając z równania (39.13), możemy rozpoznać stosunek  $p/h$  jako  $1/\lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest długością fali de Broglie'a poruszającej się cząstki. Wielkość  $2\pi/\lambda$  to *liczba falowa*  $k$ , zdefiniowana wzorem (17.5). Po takim podstawieniu powyższe równanie przybiera postać

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(równanie Schrödingera} \\ \text{dla cząstki swobodnej.)} \end{array} \quad (39.16)$$

Najogólniejszym rozwiązańem równania (39.16) jest funkcja

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad (39.17)$$

w której  $A$  i  $B$  są dowolnymi stałymi. Podstawiając funkcję  $\psi$  i jej drugą pochodną do równania (39.16) i zauważając, że w wyniku dostajemy tożsamość, możemy pokazać, iż funkcja o podanej postaci rzeczywiście spełnia to równanie.

Wiąząc równania (39.14) i (39.17) stwierdzamy, że zależna od czasu funkcja falowa  $\Psi$  cząstki swobodnej poruszającej się w kierunku  $x$  ma postać

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \psi(x) e^{-i\omega t} = (A e^{ikx} + B e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \\ &= A e^{i(kx-\omega t)} + B e^{-i(kx+\omega t)}. \end{aligned} \quad (39.18)$$

### Jak wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa $|\psi|^2$

W paragrafie 17.5 zobaczyliśmy, że dowolna funkcja  $F$  o postaci  $F(kx \pm \omega t)$  reprezentuje falę biegącą. Stosuje się to do funkcji wykładniczych, jak te w równaniu (39.18), jak również do funkcji sinusoidalnych, jakich używaliśmy do opisywania fal w strunie. W istocie obie te reprezentacje funkcji są ze sobą powiązane:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{oraz} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

gdzie  $\theta$  jest dowolnym kątem.

Tak więc pierwszy wyraz po prawej stronie równania (39.18) reprezentuje falę biegącą w kierunku rosnących wartości  $x$ , a drugi — falę biegącą w kierunku ujemnych wartości  $x$ . Założyliśmy jednak, że swobodna cząstka, którą rozważamy, porusza się tylko w kierunku rosnących wartości  $x$ . Aby zredukować ogólne rozwiązanie równania (39.18) do rozważanego przypadku, wybierzemy w równaniach (39.18) i (39.17) stałą  $B$  równą zeru. Jednocześnie stałą  $A$  nazywiemy  $\psi_0$ . Równanie (39.17) przybiera wówczas postać

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ikx}. \quad (39.19)$$

Aby otrzymać gęstość prawdopodobieństwa, obliczamy kwadrat wartości bezwzględnej  $\psi(x)$ . Otrzymujemy

$$|\psi|^2 = |\psi_0 e^{ikx}|^2 = (\psi_0^2) |e^{ikx}|^2.$$

Ponieważ

$$|e^{ikx}|^2 = (e^{ikx})(e^{ikx})^* = e^{ikx}e^{-ikx} = e^{ikx-ikx} = e^0 = 1,$$

otrzymujemy

$$|\psi|^2 = (\psi_0^2)(1)^2 = \psi_0^2 \quad (\text{stała}).$$

Na rysunku 39.11 pokazano zależność gęstości prawdopodobieństwa  $|\psi|^2$  od  $x$  dla cząstki swobodnej. Jest to prosta równoległa do osi  $x$  rozciągająca się od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Widzimy, że gęstość prawdopodobieństwa  $|\psi|^2$  jest taka sama dla wszystkich wartości  $x$ , co oznacza, że cząstka z jednakowym prawdopodobieństwem może być *gdziekolwiek* wzdłuż osi  $x$ . Nie istnieje żadna wyróżniająca cecha, pozwalająca przewidzieć najbardziej prawdopodobne położenie cząstki. Tak więc wszystkie położenia są jednakowo prawdopodobne.

Co to oznacza, zobaczymy w następnym paragrafie.

## 39.8. Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Nasza niezdolność do przewidzenia położenia cząstki swobodnej, jak to pokazano na rysunku 39.11, jest pierwszym przykładem ilustrującym **zasadę nieoznaczoności**, zaproponowaną w 1927 r. przez niemieckiego fizyka Wernera Heisenberga. Stwierda ona, że położeniu  $\vec{r}$  i pędowi  $\vec{p}$  cząstki nie można równocześnie przypisać wartości pomiarowych z nieograniczoną dokładnością.

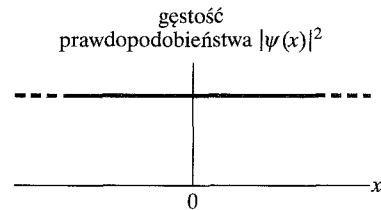
Dla składowych położenia  $\vec{r}$  i pędu  $\vec{p}$  zasada Heisenberga podaje następujące ograniczenia wyrażone za pomocą  $\hbar = h/2\pi$  (zwanego „*h-kreślone*”):

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar \quad (\text{zasada nieoznaczoności Heisenberga}). \quad (39.20) \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar\end{aligned}$$

Na przykład  $\Delta x$  i  $\Delta p_x$  w powyższych nierównościach odpowiadają nieodłącznym niepewnościami pomiaru składowych położenia  $\vec{r}$  i pędu  $\vec{p}$  wzdłuż osi  $x$ . Nawet jeśli użylibyśmy najlepszych instrumentów pomiarowych, jakie kiedykolwiek zapewni nam technika, każdy iloczyn niepewności pomiarowej położenia i pędu w równaniu (39.20) będzie większy niż  $\hbar$ . Nigdy nie będzie mniejszy.

Cząstka, dla której gęstość prawdopodobieństwa przedstawiona została na rysunku 39.11, jest cząstką swobodną, a więc nie działa na nią żadna siła. Zatem jej pęd  $\vec{p}$  musi być stały. Zakładaliśmy, nie mówiąc tego wprost, że możemy wyznaczyć pęd  $\vec{p}$  z nieskończoną dokładnością, czyli w równaniu (39.20)  $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 0$ . Założenie to wymaga zatem, aby  $\Delta x \rightarrow \infty$ ,  $\Delta y \rightarrow \infty$  i  $\Delta z \rightarrow \infty$ . Z takimi nieskończonymi dużymi niepewnościami położenie cząstek jest zupełnie nieokreślone, jak to pokazano na rysunku 39.11.

Nie myśl, że cząstka w rzeczywistości ma dobrze zdefiniowane położenie, które z jakiegoś powodu jest przed nami ukryte. Jeśli jej pęd można określić z nieograniczoną dokładnością, słowa „położenie cząstki” po prostu tracą jakiekolwiek znaczenie. Cząstkę z rysunku 39.11 można z jednakowym prawdopodobieństwem znaleźć gdziekolwiek wzdłuż osi  $x$ .



Rys. 39.11. Wykres gęstości prawdopodobieństwa  $|\psi|^2$  dla cząstki swobodnej poruszającej się w dodatnim kierunku osi  $x$ . Ponieważ gęstość  $|\psi|^2$  ma taką samą stałą wartość dla wszystkich wartości  $x$ , więc cząstkę można wykryć z jednakowym prawdopodobieństwem we wszystkich punktach wzdłuż jej toru

## Przykład 39.6

Przypuśćmy, że prędkość elektronu poruszającego się wzdłuż osi  $x$  została zmierzona z dokładnością 0,5% jako  $2,05 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . Jaka jest minimalna niepewność (wyznaczona przez zasadę nieoznaczoności teorii kwantowej), z jaką można jednocześnie zmieścić położenie elektronu wzdłuż osi  $x$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Minimalna niepewność dozwolona przez teorię kwantową dana jest przez zasadę nieoznaczoności Heisenberga z równania (39.20). Wystarczy rozważyć jedynie składowe wzdłuż osi  $x$ , gdyż mamy do czynienia z ruchem tylko wzdłuż tej osi i poszukujemy niepewności  $\Delta x$  położenia wzdłuż tej osi. Ponieważ poszukujemy minimalnej dozwolonej niepewności, w części równania (39.20) dotyczącej osi  $x$  skorzystamy z równości zamiast z nierówności i piszemy

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar.$$

Aby obliczyć niepewność pędu  $\Delta p_x$ , musimy najpierw obliczyć składową pędu  $p_x$ . Ponieważ prędkość elektronu  $v_x$  jest dużo mniejsza niż prędkość światła  $c$ , więc pęd  $p_x$  możemy wyznaczyć

korzystając z wyrażenia klasycznego (a nie relatywistycznego). Znajdujemy

$$p_x = mv_x = (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(2,05 \cdot 10^6 \text{ m/s}) \\ = 1,87 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Niepewność prędkości wynosi 0,5% wartości zmierzanej. Ponieważ pęd  $p_x$  jest wprost proporcjonalny do prędkości, więc niepewność pędu  $\Delta p_x$  musi być równa 0,5% wartości pędu:

$$\Delta p_x = (0,005)p_x \\ = (0,005) \cdot (1,87 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \\ = 9,35 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Tak więc z zasady nieoznaczoności wynika

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})/2\pi}{9,35 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} \\ = 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ m} \approx 11 \text{ nm}, \quad (\text{odpowiedź})$$

co stanowi około 100 średnic atomu. Biorąc pod uwagę dokładność, z jaką została wyznaczona prędkość elektronu, nie da się wyznaczyć położenia elektronu z większą dokładnością niż 11 nm.

## 39.9. Zjawisko tunelowe

Przypuśćmy, że raz po raz wprawiamy w ruch ziarnko grochu, zmuszając je do poruszania się po powierzchni stołu, na którym gdzieś na jego drodze położono książkę. Byłybyś szczerze zdziwiony, widząc, że ziarnko to zamiast odbić się od książki, znajdzie się po jej drugiej stronie. Nie spodziewaj się takiego zachowania po ziarnach grochu. Jednak bardzo podobne zjawisko, nazywane **zjawiskiem tunelowym (tunelowaniem przez barierę)** zachodzi w przypadku elektronów i innych cząstek o małych masach.

Na rysunku 39.12a pokazany jest elektron o energii całkowitej  $E$  poruszający się równolegle do osi  $x$ . W wyniku działających sił jego energia potencjalna jest równa zeru wszędzie poza obszarem  $0 < x < L$ , gdzie energia potencjalna elektronu ma stałą wartość  $U_0$ . Obszar ten nazywamy **barierą energii potencjalnej** (lub też w skrócie **barierą potencjału**) o wysokości  $U_0$  i szerokości  $L$ .

Ponieważ  $E < U_0$ , więc w podejściu klasycznym elektron zbliżający się do bariery z lewej strony zostałaby odbity, a następnie poruszałby się z powrotem w kierunku, z którego przybył. Jednak w fizyce kwantowej elektron jest falą materii i istnieje skończone prawdopodobieństwo, że „przecieknie” on przez barierę i pojawi się po drugiej stronie. Oznacza to, że istnieje skończone prawdopodobieństwo, że elektron pojawi się z dala od bariery, poruszając się w prawo.

Funkcję falową  $\psi(x)$  opisującą elektron można znaleźć, rozwiązując równanie Schrödingera (39.15) osobno dla trzech obszarów z rysunku 39.12a: 1) po lewej stronie bariery, 2) wewnętrz bariery, 3) po prawej stronie bariery. Dowolne stałe, które pojawiają się w tych rozwiązaniach, mogą zostać tak dobrane, żeby wartości

funkcji falowej  $\psi(x)$  i jej pochodnej względem położenia  $x$  łączyły się gładko (bez skoków i załamań) w punktach  $x = 0$  i  $x = L$ . Podnosząc do kwadratu wartość bezwzględną funkcji  $\psi(x)$ , otrzymamy gęstość prawdopodobieństwa.

Na rysunku 39.12b pokazany jest wynik takiego postępowania. Oszylująca krzywa po lewej stronie bariery (dla  $x < 0$ ) jest kombinacją liniową fal materii: padającej i odbitej (ta druga ma mniejszą amplitudę niż ta pierwsza). Oszylacje występują, ponieważ te dwie fale, rozchodzące się w przeciwnych kierunkach interferują ze sobą, wytwarzając falę stojącą.

Wewnątrz bariery (dla  $0 < x < L$ ) gęstość prawdopodobieństwa zmniejsza się wykładniczo ze zmianą  $x$ . Jednak jeśli tylko szerokość bariery  $L$  jest mała, gęstość ta nie znika całkowicie w punkcie  $x = L$ .

Po prawej stronie bariery z rysunku 39.12 (dla  $x > L$ ) wykres gęstości prawdopodobieństwa opisuje falę o małej, ale stałej amplitudzie, która przeszła przez barierę. Zatem elektron może być w tym obszarze wykryty, ale ze stosunkowo małym prawdopodobieństwem. (Porównaj tę część wykresu z zachowaniem cząstki swobodnej na rysunku 39.11).

Padającej fali materii i barierze z rysunku 39.12a można przypisać *współczynnik przejścia*  $T$ . Współczynnik ten mówi o prawdopodobieństwie, z jakim zbliżający się elektron przejdzie przez barierę, a więc o prawdopodobieństwie zajścia tunelowania. Na przykład, jeśli  $T = 0,02$ , to z każdego 1000 elektronów padających na barierę (średnio) 20 przejdzie przez nią, a 980 się od niej odbije.

**Współczynnik przejścia (transmisji)  $T$**  jest równy w przybliżeniu:

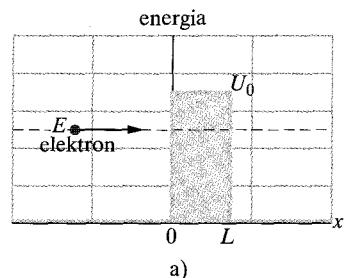
$$T \approx e^{-2kL}, \quad (39.21)$$

gdzie

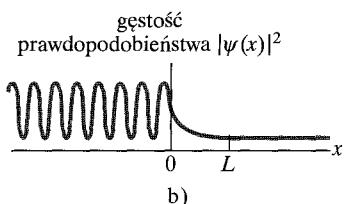
$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_0 - E)}{h^2}}. \quad (39.22)$$

Ze względu na wykładniczą postać równania (39.21) wartość współczynnika przejścia  $T$  jest bardzo czuła na trzy zmienne, od których zależy: masę cząstki  $m$ , szerokość bariery  $L$  i różnicę energii  $U_0 - E$ .

Tunelowanie znalazło wiele zastosowań w technice. Jednym z nich jest dioda tunelowa, w której przepływ elektronów (tunelujących przez barierę istniejącą w tym układzie) może być gwałtownie włączany lub wyłączany dzięki zmianom wysokości bariery potencjału. Zmiany takie mogą się odbywać bardzo szybko (w ciągu 5 ps). Dioda tunelowa nadaje się zatem do zastosowań wymagających szybkiego działania. W 1973 r. trzem badaczom zjawiska tunelowego została przyznana Nagroda Nobla. Dostali ją wówczas: Leo Esaki (tunelowanie w półprzewodnikach), Ivar Giaever (tunelowanie w nadprzewodnikach) oraz Brian Josephson (łącze Josephsona, szybki przełącznik kwantowy, którego działanie oparte jest na tunelowaniu). W 1986 r. Nagrodą Nobla uhonorowani zostali Gerd Binnig i Heinrich Rohrer. Otrzymali ją za swój wkład w opracowanie innego użytecznego urządzenia, którego działanie opiera się na zjawisku tunelowania, a mianowicie skaningowego mikroskopu tunelowego.



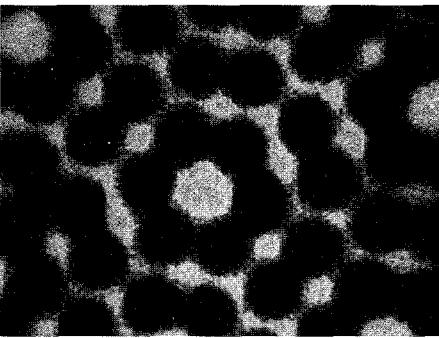
a)



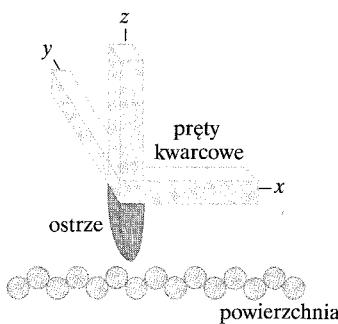
b)

Rys. 39.12. a) Wykres energii dla bariery potencjału o wysokości  $U_0$  i szerokości  $L$ . Elektron o energii całkowitej  $E$  zbliża się do bariery z lewej strony. b) Gęstość prawdopodobieństwa  $|\psi|^2$  fali materii reprezentującą elektron pokazuje przenikanie elektronu przez barierę. Krzywa po lewej stronie bariery reprezentuje stojącą falę materii, będącą wynikiem superpozycji fal padającej i odbitej

**SPRAWDZIAN 5:** Czy długość fali, która przeszła przez barierę potencjału w układzie z rysunku 39.12b, będzie większa, mniejsza, czy taka sama jak długość fali padającej na nią?



Rys. 39.13. Obraz sieci atomów krzemu uzyskany przy użyciu skaningowego mikroskopu tunelowego



Rys. 39.14. Zasada działania skaningowego mikroskopu tunelowego (STM). Trzy kwarcowe pręty służą do przesuwania przewodzącego ostrza nad badaną powierzchnią i do utrzymywania stałej odległości pomiędzy tym ostrzem a powierzchnią. Ostrze porusza się w góre i w dół zgodnie z konturem powierzchni, zapis jego ruchów zaś tworzy mapę, taką jak ta na rysunku 39.13

## Skaningowy mikroskop tunelowy (STM)

Skaningowy mikroskop tunelowy, którego działanie oparte jest na zjawisku tunelowym, umożliwia otrzymywanie szczegółowych map powierzchni z ujawnionymi na nich szczegółami w skali atomowej z dokładnością znacznie większą niż możliwa do uzyskania w mikroskopii optycznej lub elektronowej. Na rysunku 39.13 pokazano przykłady pojedynczych atomów znajdujących się na badanej powierzchni.

Na rysunku 39.14 pokazano zasadę działania skaningowego mikroskopu tunelowego. W pobliżu badanej powierzchni umieszcza się cienkie metaliczne ostrze zamontowane na trzech wzajemnie prostopadłych kwarcowych prętach. Pomiędzy ostrzem a powierzchnią zostaje przyłożona mała różnica potencjałów, wynosząca około 10 mV.

Krystaliczny kwarc ma interesującą właściwość nazywaną *piezoelektrycznością*. Kiedy do próbki z krystalicznego kwarcu przykłada się napięcie, wymiary tej próbki nieco się zmieniają. Właściwość ta wykorzystywana jest do zmiany długości każdego z trzech prętów z rysunku 39.14 w sposób ciągły i o niewielkie wartości. W efekcie ostrze może poruszać się tam i z powrotem nad powierzchnią (w kierunkach  $x$  i  $y$ ), a także może być obniżane i podnoszone w stosunku do powierzchni (w kierunku  $z$ ).

Przestrzeń pomiędzy powierzchnią i ostrzem stanowi barierę energii potencjalnej, tak jak ta na rysunku 39.12a. Jeśli ostrze jest wystarczająco blisko powierzchni, to elektrony z próbki mogą tunelować przez tę barierę, przepływając z powierzchni do ostrza i dając wkład do prądu tunelowego.

W czasie pracy mikroskopu elektronicznego układ sprzężenia zwrotnego dopasowuje pionowe położenie ostrza tak, aby prąd tunelowy pozostawał stały podczas przesuwania się ostrza po powierzchni. Oznacza to, że odległość między ostrzem a powierzchnią także pozostaje stała. Na wyjściu z urządzenia pojawia się (tak jak na rysunku 39.13) obraz wideo odwzorowujący położenie ostrza, a tym samym pokazujący kontur powierzchni w zależności od położenia ostrza w płaszczyźnie  $xy$ .

Skaningowe mikroskopy tunelowe są dostępne w handlu i używa się ich w laboratoriach na całym świecie.

## Przykład 39.7

Przypuśćmy, że elektron z rysunku 39.12a o energii całkowitej  $E = 5,1 \text{ eV}$  zbliża się do bariery o wysokości  $U_0 = 6,8 \text{ eV}$  i szerokości  $L = 750 \text{ pm}$ .

a) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że elektron pokona barierę i pojawi się (będzie wykrywalny) po jej drugiej stronie?

**ROZWIĄZANIE:**

Prawdopodobieństwo, którego szukamy, jest współczynnikiem przejścia  $T$  danym równaniem (39.21) ( $T \approx e^{-2kL}$ ), przy czym  $k$  wynosi

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_0 - E)}{h^2}}.$$

Licznik ułamka pod pierwiastkiem to

$$8\pi^2(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(6,8 \text{ eV} - 5,1 \text{ eV}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}) \\ = 1,956 \cdot 10^{-47} \text{ J} \cdot \text{kg}.$$

Zatem

$$k = \sqrt{\frac{1,956 \cdot 10^{-47} \text{ J} \cdot \text{kg}}{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}} = 6,67 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}.$$

Bezwymiarowa wielkość  $2kL$  równa jest zatem

$$2kL = 2(6,67 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}) \cdot (750 \cdot 10^{-12} \text{ m}) = 10,0$$

i z równania (39.21) otrzymujemy wartość współczynnika przejścia

$$T \approx e^{-2kL} = e^{-10,0} = 45 \cdot 10^{-6}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc z każdego miliona elektronów padających na barierę przedostanie się przez nią około 45.

b) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że proton o takiej samej energii całkowitej równej 5,1 eV przejdzie przez barierę i pojawi się (będzie wykrywalny) po jej drugiej stronie?

## ROZWIĄZANIE:

Współczynnik (a więc prawdopodobieństwo) przejścia  $T$  zależy od masy cząstki. W istocie, ponieważ masa  $m$  we wzorze

definiującym  $T$  występuje w wykładniku, więc prawdopodobieństwo przejścia jest bardzo czułe na masę cząstki. Tym razem jej masą jest masa protonu ( $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg), która jest dużo większa niż masa elektronu rozważana w punkcie (a). Zamieniając w dokonanych poprzednio obliczeniach masę elektronu na masę protonu, a następnie kontynuując rozwiązywanie problemu, stwierdzimy, że  $T \approx 10^{-186}$ . Tak więc prawdopodobieństwo przejścia protonu nie jest dokładnie równe零, ale jest od zera niewiele większe. Dla jeszcze cięższych cząstek o takiej samej energii całkowitej równej 5,1 eV prawdopodobieństwo przejścia wykładniczo maleje.

## Podsumowanie

**Kwenty światła — fotony** Fala elektromagnetyczna (światło) jest skwantowana, a jej kwenty nazываемy *fotonami*. Energia  $E$  i pęd  $p$  fotonów światła o częstotliwości  $\nu$  i długości fali  $\lambda$  wynoszą odpowiednio

$$E = h\nu \quad (\text{energia fotonu}) \quad (39.2)$$

oraz

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{pęd fotonu}). \quad (39.7)$$

**Zjawisko fotoelektryczne** Gdy światło o wystarczająco dużej częstotliwości pada na czystą powierzchnię metalu, z jego powierzchni uwalniane są elektrony. Jest to wynik oddziaływanego fotonów z elektronami we wnętrzu metalu. Zachodzi związek

$$h\nu = E_{\text{kmax}} + \Phi, \quad (39.5)$$

gdzie  $h\nu$  jest energią fotonu,  $E_{\text{kmax}}$  — energią kinetyczną najszyszych elektronów opuszczających powierzchnię tarczy, a  $\Phi$  — pracę wyjścia dla materiału, z którego jest ona wykonana, co odpowiada minimalnej energii, jaką musi mieć elektron, aby opuścić powierzchnię tarczy. Jeśli energia fotonu  $h\nu$  jest mniejsza niż praca wyjścia  $\Phi$ , zjawisko fotoelektryczne nie zachodzi.

**Przesunięcie comptonowskie** Kiedy promieniowanie rentgenowskie ulega rozproszeniu na słabo związanych elektronach tarczy, część promieniowania rozproszonego ma większą długość fali niż promieniowanie padające. **Przesunięcie comptonowskie** (zmianę długości fali) można wyrazić jako

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \quad (\text{przesunięcie comptonowskie}), \quad (39.11)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem, pod jakim rozprasza się promieniowanie rentgenowskie.

**Fala światła a fotony** Gdy światło oddziałuje z materią, energia i pęd przekazywane są za pomocą fotonów. Jednak podczas biegu światła falę światłową interpretujemy jako **fał prawdopodobieństwa**. Przypadające na jednostkę czasu prawdopodobieństwo wykrycia fotonu jest proporcjonalne do  $E_m^2$ , przy czym  $E_m$

jest amplitudą drgań pola elektrycznego fali światłowej w punkcie, w którym umieszczały detektor.

**Fala materii** Poruszającą się cząstkę, taką jak elektron czy proton, można opisać jako **fał materii**. Długość tej fali (zwana **długością fali de Broglie'a**) wynosi  $\lambda = h/p$ , gdzie  $p$  jest pędem poruszającej się cząstki.

**Funkcja falowa** Fala materii opisywana jest przez funkcję falową  $\psi(x, y, z, t)$ , którą można podzielić na część przestrenną  $\psi(x, y, z)$  i czynnik zależny od czasu  $e^{-i\omega t}$ . W przypadku cząstki o masie  $m$  poruszającej się w kierunku  $x$  ze stałą energią całkowitą  $E$  w obszarze, gdzie jej energia potencjalna jest równa  $U(x)$ , odpowiednią funkcję falową  $\psi(x, y, z)$  można znaleźć, rozwiązując równanie Schrödingera bez czasu

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U(x)]\psi = 0. \quad (39.15)$$

Fala materii, tak jak fala światła, jest falą prawdopodobieństwa w takim sensie, że jeśli wstawimy w nią detektor cząstek, to prawdopodobieństwo, że w ciągu określonego przedziału czasu detektor zarejestruje cząstkę, jest proporcjonalne do  $|\psi|^2$  — wielkości nazywanej **gęstością prawdopodobieństwa**.

W przypadku cząstki swobodnej, a więc cząstki, dla której  $U(x) = 0$ , poruszającej się w kierunku  $x$ , gęstość prawdopodobieństwa ma stałą wartość wzduż całej osi  $x$ .

**Zasada nieoznaczoności Heisenberga** Probabilistyczna natura fizyki kwantowej nakłada na określanie położenia i pędu cząstki ważne ograniczenie. Nie jest mianowicie możliwe jednoczesne zmierzenie położenia  $\vec{r}$  i pędu  $\vec{p}$  cząstki z nieograniczoną dokładnością. Nieoznaczoności składowych tych wielkości dane są nierównościami:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar. \end{aligned} \quad (39.20)$$

**Zjawisko tunelowe** Zgodnie z prawami fizyki klasycznej cząstka padająca na barierę potencjału odbije się od niej, jeśli wysokość tej bariery jest większa niż energia kinetyczna tej cząstki. Jednak według fizyki kwantowej istnieje skończone prawdopodobieństwo, że cząstka ta przejdzie przez taką barierę. Prawdopodobieństwo, że cząstka o masie  $m$  i energii  $E$  przejdzie przez barierę o wyso-

kości  $U_0$  i szerokości  $L$  równe jest współczynnikowi przejścia  $T$ :

$$T \approx e^{-2kL}, \quad (39.21)$$

gdzie

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_0 - E)}{h^2}}. \quad (39.22)$$

## Pytania

1. Porównaj fale elektromagnetyczne generowane w kuchence mikrofalowej i w aparacie rentgenowskim u Twojego dentysty. W którym przypadku promieniowanie ma a) większą długość fali, b) większączęstość i (c) większą energię fotonów?

2. Które z poniższych stwierdzeń dotyczących zjawiska fotoelektrycznego są prawdziwe, a które nie?

- a) Im większa jest częstość padającego światła, tym większy jest potencjał hamujący.
- b) Im większe jest natężenie padającego światła, tym większa jest częstość progowa zjawiska fotoelektrycznego.
- c) Im większa jest praca wyjścia dla materiału tarczy, tym większy jest potencjał hamujący.
- d) Im większa jest praca wyjścia dla materiału tarczy, tym większa jest częstość progowa zjawiska fotoelektrycznego.
- e) Im większa jest częstość padającego światła, tym większa jest maksymalna energia kinetyczna uwolnionych elektronów.
- f) Im większa jest energia fotonów, tym mniejszy jest potencjał hamujący.

3. Korzystając z rysunku do sprawdzianu 2, określ, czy dla danej częstotliwości padającego światła maksymalna energia kinetyczna uwolnionych elektronów jest większa w przypadku tarczy wykonanej z sodu, czy z potasu?

4. W jaki sposób w zjawisku fotoelektrycznym (dla danej tarczy i danej częstotliwości padającego światła) zależą od natężenia wiązki padającego światła następujące wielkości:

- a) maksymalna energia kinetyczna elektronów,
- b) maksymalne natężenie prądu fotoelektrycznego,
- c) potencjał hamujący,
- d) częstość progowa?

5. Jeśli izolowaną płytę metalową oświetla się promieniowaniem nadfioletowym, z płytki tej emitowane są przez pewien czas elektrony. Dlaczego ta emisja w końcu zanika?

6. Metalowa płytka oświetlona jest światłem o pewnej częstotliwości. Który z wymienionych czynników wpływa na to, czy elektrony są z niej uwalniane, czy też nie: a) natężenie światła, b) czas naświetlania, c) przewodność cieplna płytki, d) pole powierzchni płytka, e) materiał, z jakiego wykonana jest płytka?

7. W doświadczeniu, w którym badano przesunięcie komptonowskie, foton promieniowania rentgenowskiego jest rozpraszany

w kierunku na wprost (pod kątem  $\phi = 0$ ) na rysunku 39.3. Ile wynosi energia uzyskana przez elektron w trakcie takiego oddziaływania?

8. Zgodnie z równaniem (39.11) przesunięcie komptonowskie jest jednakowe dla promieniowania rentgenowskiego i dla światła widzialnego. Dlaczego zatem przesunięcie komptonowskie można łatwo zmierzyć dla promieniowania rentgenowskiego, a nie dla światła widzialnego?

9. Foton  $A$  ma dwa razy większą energię niż foton  $B$ . a) Czy pęd fotonu  $A$  jest mniejszy, równy, czy większy niż pęd fotonu  $B$ ? b) Czy długość fali związanej z fotonem  $A$  jest większa, taka sama, czy mniejsza niż długość fali związanej z fotonem  $B$ ?

10. Foton  $A$  emitowany został przez nadfioletową lampa do opalania, a foton  $B$  przez telewizyjnego pilota. Któremu z nich odpowiada większa a) długość fali, b) energia, c) częstotliwość, d) pęd?

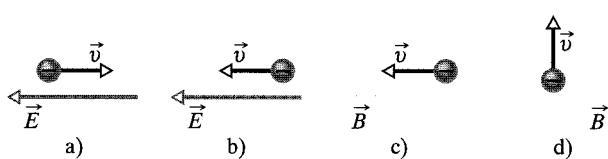
11. Dane pokazane na rysunku 39.4 uzyskano w doświadczeniu polegającym na skierowaniu wiązki promieniowania rentgenowskiego na grafitową tarczę. Jak bardzo zmieniłyby się wyniki tego eksperymentu, gdyby tarcza wykonana była z siarki, a nie z grafitu?

12. Elektron i proton mają jednakową energię kinetyczną. Dla której cząstki fala de Broglie'a ma większą długość fali?

13. a) Jak zmieni się długość fali de Broglie'a, jeśli podwoisz energię kinetyczną nierelatywistycznej cząstki? b) Co się stanie, jeśli dwa razy zwiększy się prędkość cząstek?

14. Założymy, że następujące nierelatywistyczne cząstki mają jednakową energię: elektron, cząstka  $\alpha$ , neutron. Uszereguj je zgodnie z malejącą długością fali de Broglie'a.

15. Na rysunku 39.15 pokazano cztery sytuacje, w których elektron porusza się: a) w kierunku przeciwnym do pola elektrycznego, b) zgodnie z kierunkiem pola elektrycznego, c) zgodnie



Rys. 39.15. Zadanie 15

z kierunkiem pola magnetycznego, d) prostopadle do pola magnetycznego. Określ w każdej z wymienionych sytuacji, czy długość fali de Broglie'a tego elektronu rośnie, maleje, czy też pozostaje nie zmieniona?

16. Proton i deuteron, o energii kinetycznej 3 MeV każdy, zbliżają się do bariery energii potencjalnej, której wysokość jest równa  $U_0 = 10$  MeV. Która z rozważanych cząstek ma większe szanse na przejście przez barierę? (Deuteron ma dwa razy większą masę niż proton).

17. Co ma większy wpływ na współczynnik przejścia  $T$  elektronów przez barierę energii potencjalnej: a) zwiększenie wysokości bariery  $U_0$  o 1% czy b) zmniejszenie energii kinetycznej  $E$  padającego elektronu o 1%?

18. Dlaczego minima gęstości prawdopodobieństwa  $|\psi|^2$  po lewej stronie rysunku 39.12b mają wartość większą od zera?

19. Przypuśćmy, że bariera energii potencjalnej na rysunku 39.12a ma nieskończoną wysokość. a) Jakiej wartości współczynnika przejścia przez tę barierę należałyby się spodziewać dla elektronu zbliżającego się do niej? b) Czy równanie (39.21) przewiduje ten wynik?

20. W tabeli podane są względne wartości parametrów trzech doświadczeń, w których badano tunelowanie przez barierę z rysunku 39.12. Uszereguj te doświadczenia zgodnie z prawdopodobieństwem tunelowania elektronu przez barierę, zaczynając od największych.

	Energia elektronu	Wysokość bariery	Szerokość bariery
a)	$E$	$5E$	$L$
b)	$E$	$17E$	$L/2$
c)	$E$	$2E$	$2L$

## Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 39.2 Foton, kwant światła

1. Wyraź stałą Plancka  $h$  w jednostkach elektronowolt razy femtosekunda.

2. Światło monochromatyczne (a więc światło o jednej długości fali) ma być pochłonięte przez arkusz kliszy fotograficznej i w ten sposób na tej kliszy zapisane. Absorpcja fotonu nastąpi, jeśli energia fotonu będzie większa lub równa 0,6 eV, tzn. energii dysocjacji cząsteczki AgBr w kliszy. Jaką maksymalną długość fali światła można zapisać na tej kliszy? Do jakiego obszaru widma elektromagnetycznego należy ta długość fali?

3. Pokaż, że w przypadku światła o długości fali  $\lambda$  wyrażonej w nanometrach energia fotonu  $h\nu$  wyrażona w elektronowoltach wynosi  $1240/\lambda$ .

4. Maksimum natężenia żółtego światła z lampy sodowej oświetlającej autostradę przypada dla długości fali 589 nm. Ile wynosi energia fotonu światła o takiej długości fali?

5. Z jaką szybkością Słońce emiteme foton? Przyjmij dla uproszczenia, że Słońce emiteme (z mocą  $3,9 \cdot 10^{26}$  W) wyłącznie falę o długości 550 nm.

6. Laser helowo-neonowy emituje czerwone światło o długości fali  $\lambda = 633$  nm w wiązce o średnicy 3,5 mm i mocy 5,0 mW. Detektor wstawiony w tę wiązkę całkowicie ją pochłania. Z jaką szybkością foton pochłaniane są przez jednostkową powierzchnię detektora?

7. Emisyjna linia widmowa to promieniowanie elektromagnetyczne emitowane w dostatecznie wąskim zakresie widmowym, by ją traktować jak pojedynczą długość fali. Jedna z takich ważnych w astronomii linii emisyjnych ma długość fali równą 21 cm. Ile wynosi energia fotonu promieniowania elektromagnetycznego o tej długości fali?

8. Z jaką prędkością musiałby się poruszać elektron, aby jego energia kinetyczna była równa energii fotonu światła lampy sodowej o długości fali 590 nm?

9. Długość jednego metra została niegdyś zdefiniowana jako 1 650 763,73 długości fali pomarańczowego światła emitowanego przez źródło zawierające atomy kryptonu-86. Ile wynosi energia fotonu takiego światła?

10. W idealnych warunkach oko ludzkie potrafi zareagować na światło o długości fali 550 nm padające na siatkówkę z szybkością zaledwie 100 fotonów na sekundę. Z jaką szybkością siatkówka pochłania wtedy energię?

11. Specjalny rodzaj żarówek emiteme światło monochromatyczne o długości fali 630 nm. Energia elektryczna jest do niej dostarczana z mocą 60 W, a wydajność zamiany energii elektrycznej na energię światła wynosi dla tej żarówki 93%. Ile fotonów emitowanych jest przez żarówkę w czasie jej życia (730 godzin)?

- 12.** Wiązka opuszczająca laser argonowy o mocy 1,5 W ( $\lambda = 515$  nm) ma średnicę  $d$  równą 3,0 mm. Wiązka jest zogniskowana przez układ soczewek o efektywnej ogniskowej  $f$  równej 2,5 mm. Zogniskowana wiązka pada na całkowicie pochłaniający ekran i tworzy na nim obraz dyfrakcyjny, w którym centralny krążek ma promień wynoszący  $1,22f\lambda/d$ . Można pokazać, że 84% padającej energii trafia w obszar tego krążka. Z jaką szybkością fotony pochłaniane są przez ekran w centralnym krążku tego obrazu dyfrakcyjnego?
- 13.** Lampa nadfioletowa emisuje światło o długości fali 400 nm z mocą 400 W. Lampa na podczerwień emisuje światło o długości fali 700 nm także z mocą 400 W. a) Która lampa emisuje fotony z większą szybkością i b) ile ta szybkość wynosi?
- 14.** Satelita na orbicieokołoziemskiej jest wyposażony w panel z fotoogniwami o powierzchni  $2,60 \text{ m}^2$ , skierowany prostopadle do kierunku padania promieni słonecznych. Natężenie światła padającego na panel wynosi  $1,39 \text{ kW/m}^2$ . a) Z jaką szybkością energia słoneczna dostarczana jest do panelu? b) Z jaką szybkością fotony słoneczne są pochłaniane przez panel? Założyć, że promieniowanie słoneczne jest monochromatyczne, a jego długość fali równa jest 550 nm, oraz że całe promieniowanie słoneczne padające na panel jest pochłaniane. c) Jak długo trwałoby pochłonięcie przez panel jednego „mola” fotонów?
- 15.** Lampa sodowa o mocy 100 W ( $\lambda = 589$  nm) wypromieniuje energię równomiernie we wszystkich kierunkach. a) Z jaką szybkością są przez tę lampa emitowane fotony? b) W jakiej odległości od lampy całkowicie pochłaniający ekran będzie pochłaniał fotony z szybkością 1 foton/ $(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ ? c) Ile wynosi strumień fotónów (wyrażony w fotonach na jednostkę powierzchni na jednostkę czasu) padający na mały ekran umieszczony 2 m od lampy?
- ### 39.3 Zjawisko fotoelektryczne
- 16.** a) Najmniejsza energia potrzebna do wyemitowania elektronu z metalicznego sodu wynosi 2,28 eV. Czy pod wpływem czerwonego światła o długości fali  $\lambda = 680$  nm zajdzie dla sodu zjawisko fotoelektryczne? b) Ile wynosi graniczna długość fali dla emisji fotoelektrycznej? Jaka barwa światła odpowiada progowej długości fali?
- 17.** Chcesz wybrać materiał do budowy fotokomórki, która ma działać dzięki zjawisku fotoelektrycznemu pod wpływem światła widzialnego. Które z wymienionych pierwiastków nadają się do tego celu (w nawiasach podano prace wyjścia): tantal (4,2 eV), wolfram (4,5 eV), glin (4,2 eV), bar (2,5 eV), lit (2,3 eV)?
- 18.** Prace wyjścia dla potasu i cezu to odpowiednio 2,25 eV i 2,14 eV. a) Czy pod wpływem światła o długości fali 565 nm padającego na te metale zajdzie zjawisko fotoelektryczne? b) A gdyby światło miało długość fali 518 nm?
- 19.** Światło padające na powierzchnię sodu wywołuje zjawisko fotoelektryczne. Potencjał hamujący dla wybitych elektronów wynosi 5,0 V, a praca wyjścia dla sodu równa jest 2,2 eV. Jaka jest długość fali padającego światła?
- 20.** Znajdź maksymalną energię kinetyczną elektronów wyemitowanych z pewnego materiału, dla którego praca wyjścia wynosi 2,3 eV, a częstotliwość padającego promieniowania równa jest  $3,0 \cdot 10^{15}$  Hz.
- 21.** Praca wyjścia dla wolframu wynosi 4,50 eV. Oblicz prędkość najszybszych elektronów wyemitowanych z powierzchni wolframu pod wpływem jej oświetlenia światłem o energii fotonu równej 5,80 eV.
- 22.** a) Ile wynosi potencjał hamujący dla elektronów wyemitowanych z powierzchni metalu, dla którego praca wyjścia jest równa 1,8 eV, jeśli została ona oświetlona światłem o długości fali 400 nm? b) Ile wynosi maksymalna prędkość wyemitowanych elektronów?
- 23.** Światło o długości fali 200 nm oświetla powierzchnię glinu. Do wybijania elektronu z glinu potrzebna jest energia 4,20 eV. Ile wynosi energia kinetyczna a) najszybszego i b) najwolniejszego wybitego elektronu? c) Ile wynosi w tej sytuacji potencjał hamujący? d) Ile wynosi progowa długość fali dla glinu?
- 24.** Długość fali związana z częstotliwością progową dla srebra wynosi 325 nm. Oblicz maksymalną energię kinetyczną elektronów wybitych z powierzchni srebra przez światło nadfioletowe o długości fali 254 nm.
- 25.** Światło słoneczne wybijające elektrony z zewnętrznej powierzchni satelity może go w wyniku zjawiska fotoelektrycznego naładować elektrycznie. Trzeba to wziąć pod uwagę przy jego projektowaniu, tak aby zminimalizować ten efekt. Przypuśćmy, że satelita pokryty jest platyną, metalem o bardzo dużej pracy wyjścia ( $\Phi = 5,32$  eV). Oblicz największą długość fali padającego światła słonecznego, która jest w stanie wybić elektron z platyny.
- 26.** W doświadczeniu fotoelektrycznym z użyciem powierzchni sodu zmierzono potencjał hamujący równy 1,85 V dla długości fali 300 nm i 0,82 V dla długości fali 400 nm. Korzystając z tych danych, oblicz a) wartość stałej Plancka, b) pracę wyjścia  $\Phi$  dla sodu i c) progową długość fali  $\lambda_0$  dla sodu.
- 27.** Potencjał hamujący dla elektronów emitowanych z powierzchni oświetlonej światłem o długości fali 491 nm wynosi 0,71 V. Kiedy zmieniono długość fali padającego światła, potencjał hamujący wyniósł 1,43 V. a) Ile wynosi nowa długość fali światła? b) Ile wynosi praca wyjścia z tej powierzchni?
- 28.** Około 1916 r. R. A. Millikan zmierzył w swoich doświadczeniach następujące wartości potencjału hamującego dla litu:
- | Długość fali [nm]      | 433,9 | 404,7 | 365,0 | 312,5 | 253,5 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Potencjał hamujący [V] | 0,55  | 0,73  | 1,09  | 1,67  | 2,57  |

Wykorzystaj powyższe dane do narysowania wykresu takiego jak na rysunku 39.2 (przedstawiającym wyniki otrzymane dla sodu), a następnie wyznacz z tego wykresu a) stałą Plancka i b) pracę wyjścia dla litu.

29. Przypuśćmy, że względna wydajność powierzchni cezu (o pracy wyjścia 1,8 eV) wynosi  $1 \cdot 10^{-16}$ , a więc że przeciętnie wybitny zostaje jeden elektron na  $10^{16}$  fotonów, które osiągną tę powierzchnię. Jakie byłoby natężenie prądu elektronów wyemitowanych z takiej powierzchni, gdyby została ona oświetlona światłem o długości fali 600 nm z lasera o mocy 2 mW i wszystkie wyemitowane elektrony wzięłyby udział w przepływie ładunku?

30. Promieniowanie rentgenowskie o długości fali 71 pm jest kierowane na złotą folię i wybija z atomów złota silnie związane elektrony. Uwolnione elektrony poruszają się następnie po torach kołowych o promieniu  $r$  w obszarze jednorodnego pola magnetycznego  $\vec{B}$ , gdzie  $B_r = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}$ . Oblicz a) maksymalną energię kinetyczną tych elektronów i b) pracę wykonaną przy ich wybiciu z atomów złota.

#### 39.4 Fotony mają pęd

31. Światło o długości fali 2,4 pm kierowane jest na tarczę zawierającą swobodne elektrony. a) Oblicz długość fali światła rozproszonego pod kątem  $30^\circ$  względem kierunku wiązki padającej. b) Rozwiąż ten problem dla kąta  $120^\circ$ .

32. a) Ile wynosi pęd fotonu, którego energia równa jest energii spoczynkowej elektronu? Ile wynosi b) długość fali i c) częstotliwość odpowiadającego mu promieniowania?

33. Długość fali promieniowania rentgenowskiego w pewnej wiązce wynosi 35,0 pm. a) Jaka jest odpowiadająca jej częstotliwość? Oblicz odpowiednią b) energię i c) pęd fotonu.

34. Promieniowanie rentgenowskie o długości fali 0,010 nm zostaje skierowane na tarczę zawierającą słabo związane elektrony. W przypadku rozpraszania comptonowskiego na jednym z takich elektronów pod kątem  $180^\circ$ , oblicz: a) przesunięcie comptonowskie, b) zmianę energii fotonu, c) energię kinetyczną odrzuconego elektronu i określ d) kierunek ruchu elektronu po rozproszeniu?

35. Na podstawie mechaniki relatywistycznej przeanalizuj zderzenie fotonu i swobodnego elektronu. Pokaż, że niemożliwe jest przekazanie swobodnemu elektronowi całej energii fotonu (a więc że foton nie może zniknąć).

36. Promieniowanie  $\gamma$  o energii fotonu 0,511 MeV kierowane jest na tarczę wykonaną z glinu i rozpraszane przez słabo związane w niej elektrony pod różnymi kątami. a) Ile wynosi długość fali padającego promieniowania  $\gamma$ ? b) Ile wynosi długość fali promieniowania  $\gamma$  rozproszonego pod kątem  $90^\circ$  względem wiązki padającej? c) Ile wynosi energia fotonu dla promieniowania rozproszonego w tym kierunku?

37. Oblicz comptonowską długość fali dla a) elektronu i b) protonu. Ile wynosi energia fotonu promieniowania elektromagnetycznego o długości fali równej comptonowskiej długości fali c) elektronu i d) protonu?

38. Ile wynosi maksymalne przesunięcie comptonowskie w zderzeniu fotonu i swobodnego protonu?

39. Jaki procentowy wzrost długości fali prowadzi do 75% utraty energii fotonu w zderzeniu fotonu i swobodnego elektronu?

40. Oblicz procentową zmianę energii fotonu podczas zderzenia takiego, jak pokazane na rysunku 39.5, dla  $\phi = 90^\circ$  i dla promieniowania w zakresie: a) mikrofal,  $\lambda = 3,0 \text{ cm}$ , b) światła widzialnego,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , c) promieniowania rentgenowskiego,  $\lambda = 25 \text{ pm}$ , d) promieniowania  $\gamma$  o energii fotonu 1,0 MeV. e) Co można powiedzieć o łatwości wykrywania przesunięcia comptonowskiego w tych różnych zakresach widma elektromagnetycznego, biorąc pod uwagę wyłącznie stratę energii w pojedynczym zderzeniu fotonu z elektronem?

41. Elektron o masie  $m$  i prędkości  $v$  „zderza się” z fotonem promieniowania  $\gamma$  o energii początkowej  $h\nu_0$  w laboratoryjnym układzie odniesienia. Foton rozprasza się w kierunku ruchu elektronu. Sprawdź, że energia rozproszonego fotonu w laboratoryjnym układzie odniesienia wynosi

$$E = h\nu_0 \left( 1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2} \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \right)^{-1}.$$

42. Pokaż, że  $\Delta E/E$  — względna strata energii fotonu w zderzeniu z cząstką o masie  $m$  dana jest wzorem

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu'}{mc^2} (1 - \cos \phi),$$

gdzie  $E$  jest energią padającego fotonu,  $\nu'$  — częstotliwością fotonu rozproszonego,  $\phi$  zaś jest zdefiniowane tak jak na rysunku 39.5.

43. Rozważ zderzenie fotonu promieniowania rentgenowskiego o energii początkowej 50,0 keV i spoczywającego elektronu, w którym foton rozpraszany jest do tyłu, a elektron odrzucany jest do przodu. a) Ile wynosi energia rozproszonego fotonu? b) Ile wynosi energia kinetyczna elektronu?

44. Jakie będzie: a) przesunięcie comptonowskie, b) względne przesunięcie comptonowskie i c) zmiana energii fotonu światła o długości fali 590 nm rozpraszającego się na swobodnym elektronie pozostającym początkowo w spoczynku, jeśli rozpraszanie to zachodzi pod kątem  $90^\circ$  do kierunku padającej wiązki? d) Oblicz te same wielkości dla promieniowania rentgenowskiego, którego fotony mają energię 50,0 keV.

45. Ile wynosi maksymalna energia kinetyczna elektronów wybitnych z cienkiej miedzianej folii na skutek rozpraszania comptonowskiego padającej na nią wiązki promieniowania rentgenowskiego o energii 17,5 keV?

**46.** Wyprowadź wzór na przesunięcie comptonowskie (równanie (39.11)), korzystając z równań (39.8), (39.9) i (39.10) i eliminując z nich  $v$  i  $\theta$ .

**47.** Pod jakim kątem musiałby być rozpraszony na swobodnym elektronie foton o energii 200 keV, aby utracić 10% swojej energii?

**48.** Pokaż, że kiedy foton o energii  $E$  rozpraszany jest na swobodnym elektronie, znajdującym się w spoczynku, maksymalna energia kinetyczna odrzuconego elektronu wynosi

$$E_{k\max} = \frac{E^2}{E + mc^2/2}.$$

## 39.6 Elektryny i fale materii

**49.** Używając klasycznych wyrażeń na pęd i energię kinetyczną pokaż, że wyrażoną w nanometrach długość fali de Broglie'a elektronu można zapisać w postaci  $\lambda = 1,226/\sqrt{E_k}$ , gdzie  $E_k$  jest energią kinetyczną elektronu wyrażoną w elektronowoltach.

**50.** Pocisk o masie 40 g porusza się z prędkością 1000 m/s. Mimo że pocisk ten jest niewątpliwie za duży, aby traktować go jako falę materii, oblicz, jaką długość fali de Broglie'a przewiduje w takim przypadku równanie (39.13).

**51.** Elektryny w zwykłym odbiorniku telewizyjnym przyspieszane są przez różnicę potencjałów wynoszącą 25,0 kV. Ile wynosi długość fali de Broglie'a dla takich elektronów (efekty relatywistyczne są do zaniedbania).?

**52.** Oblicz długość fali de Broglie'a dla: a) elektronu o energii 1 keV, b) fotonu o energii 1 keV i c) neutronu o energii 1 keV.

**53.** Długość fali żółtej linii widmowej emitowanej z lampy sodowej wynosi 590 nm. Jaką energię kinetyczną musiałby mieć elektron, aby jego fala de Broglie'a miała taką samą długość?

**54.** Założmy, że długość fali de Broglie'a protonu wynosi 100 fm. a) Ile wynosi prędkość tego protonu i b) jaką różnicę potencjałów musiałby być przyspieszany, aby osiągnąć taką prędkość?

**55.** Średnia energia kinetyczna neutronów pozostających w równowadze termodynamicznej z materią wynosi  $(3/2)kT$ , gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna,  $T$  zaś (które można przyjąć równe 300 K) jest temperaturą otoczenia tych neutronów. a) Ile wynosi średnia energia kinetyczna takiego neutronu? b) Ile wynosi odpowiadająca jej długość fali de Broglie'a?

**56.** Długość fali zarówno elektronu, jak i fotonu wynosi 0,20 nm. Oblicz ich a) pedy i b) energie.

**57.** a) Energia fotonu i energia kinetyczna elektronu są równe 1 eV. Ile wynoszą ich długości fali? b) Powtórz rachunek dla energii 1 GeV.

**58.** Rozważ balon napełniony gazowym helem pozostający w temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym. Oblicz a) średnią długość fali de Broglie'a atomów helu i b) średnią odległość pomiędzy atomami w powyższych warunkach. Średnia energia kinetyczna atomu jest równa  $(3/2)kT$ , gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna. c) Czy atomy w tych warunkach można traktować jak cząstki?

**59.** Jednokrotnie zjonizowane atomy sodu przyspieszane są przez różnicę potencjałów 300 V. a) Jaki pęd nadawany jest tym jonom? b) Ile wynosi ich długość fali de Broglie'a?

**60.** a) Długość fali zarówno elektronu, jak i fotonu wynosi 1,0 nm. Ile wynosi energia fotonu i energia kinetyczna elektronu? b) Powtórz rachunek dla długości fali 1,0 fm.

**61.** W dużym akceleratorze elektronów w Stanford University wytwarzana jest wiązka elektronów o energii kinetycznej 50 GeV. Elektryny o takiej energii mają małe długości fali i nadają się do badania szczegółów struktury jądra atomowego. Dokonuje się tego, badając rozpraszanie tych elektronów. Ile wynosi długość fali de Broglie'a elektronu o energii 50 GeV? Jaki jest stosunek tej długości fali do promienia średniej wielkości jądra, wynoszącego 5,0 fm? (Dla elektronów o takiej energii relatywistyczny związek energii i pędu można zapisać w postaci  $p = E/c$ . Relację tę używaną w przypadku świata można zastosować wtedy, kiedy energia kinetyczna cząstki jest znacznie większa niż jej energia spoczynkowa, a tak jest w rozważanym przypadku).

**62.** Jądro atomowe zostało odkryte przez Ernesta Rutherforda w 1911 r. Zinterpretował on poprawnie pewne doświadczenia, w których wiązka cząstek  $\alpha$  rozpraszana była na metalowej folii zawierającej atomy złota. a) Ile wynosiłaby ich długość fali de Broglie'a, gdyby cząstki  $\alpha$  miały energię kinetyczną 7,5 MeV? b) Czy falowa natura padających cząstek  $\alpha$  powinna była być wzięta pod uwagę w interpretacji tych doświadczeń? Masa cząstek  $\alpha$  wynosi 4,0 u (atomowych jednostek masy), a odległość ich największego zbliżenia do jądra wynosiła w tych doświadczeniach około 30 fm. (Postulat falowej natury materii pojawił się po ponad dziesięciu latach od wykonania po raz pierwszy tych kluczowych doświadczeń).

**63.** Nierelatywistyczna cząstka porusza się trzy razy szybciej niż elektron. Stosunek długości fali de Broglie'a tej cząstki do długości fali elektronu wynosi  $1,813 \cdot 10^{-4}$ . Zidentyfikuj tę cząstkę, znajdująca jej masę.

**64.** Największa osiągalna zdolność rozdzielcza mikroskopu ograniczona jest wyłącznie przez długość zastosowanej fali. Oznacza to, że najmniejszy wymiar, który można rozróżnić, jest równy w przybliżeniu tej długości fali. Przypuśćmy, że chcemy „zajrzeć” do środka atomu. Zakładając, że atom ma średnicę 100 pm, oznacza to, że musimy umieć odróżnić szczegóły o wymiarze powiedzmy 10 pm. a) Jaka minimalna energia elektronów jest potrzebna, jeśli chcemy użyć mikroskopu elektronowego? b) Jaka minimalna energia fotonu jest niezbędna, jeśli chcemy używać

mikroskopu optycznego? c) Który z tych mikroskopów bardziej nam się przyda? Dlaczego?

**65.** Jakie napięcie byłoby potrzebne do przyspieszania elektronów w mikroskopie elektronowym, aby mikroskop ten miał taką samą zdolność rozdzielczą, jaką można uzyskać przy użyciu promieniowania  $\gamma$  o energii 100 keV? (patrz zadanie 64).

### 39.7 Równanie Schrödingera

**66.** a) Niech  $n = a + ib$  będzie liczbą zespoloną, w której  $a$  i  $b$  — liczby rzeczywiste (dodatnie lub ujemne). Pokaż, że iloczyn  $nn^*$  jest zawsze dodatnią liczbą rzeczywistą. b) Niech  $m = c + id$  będzie inną liczbą zespoloną. Pokaż, że  $|nm| = |n||m|$ .

**67.** Pokaż, że wyrażenie (39.17) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (39.16). Podstaw do równania (39.16) funkcję  $\psi(x)$  oraz jej drugą pochodną i sprawdź, czy otrzymałeś tożsamość.

**68.** a) Wyraź funkcję falową  $\psi(x)$  przedstawioną w równaniu (39.19) w postaci  $a + ib$ , gdzie  $a$  i  $b$  są wielkościami rzeczywistymi. (Załącz, że  $\psi_0$  jest rzeczywiste). b) Wypisz postać funkcji falowej  $\Psi(x, t)$  odpowiadającej funkcji  $\psi(x)$ .

**69.** Pokaż, że liczbę falową  $k$  dla nierelatywistycznej cząstki swobodnej o masie  $m$  można zapisać jako:

$$k = \frac{2\pi\sqrt{2mE_k}}{\hbar},$$

gdzie  $E_k$  jest energią kinetyczną cząstki.

**70.** Pokaż, że  $|\psi|^2 = |\Psi|^2$ , przy czym funkcje  $\psi$  i  $\Psi$  są ze sobą powiązane jak w równaniu (39.14), a więc że gęstość prawdopodobieństwa nie zależy od czasu.

**71.** Jeśli w równaniu Schrödingera rządzącym ruchem cząstki (równanie (39.15)) przyjmiemy, że  $U(x) = 0$ , to cząstkę tę opisuje funkcja falowa  $\psi(x)$  określona wzorem (39.19). Załączmy teraz, że w równaniu Schrödingera  $U(x) = U_0 = \text{const}$ . Pokaż, że wzór (39.19) jest nadal rozwiązaniem równania Schrödingera, przy czym liczba falowa

$$k = \frac{2\pi}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}.$$

**72.** Przypuśćmy, że w równaniu (39.17) podstawiliśmy  $A = 0$  i zmieniliśmy stałą  $B$  na  $\psi_0$ . Co opisywałaby otrzymana w taki sposób funkcja falowa? Czy rysunek 39.11 uległby zmianie, a jeśli tak, to w jaki sposób?

**73.** W równaniu (39.18) podstaw  $A = B = \psi_0$ . Równanie opisywać będzie wtedy superpozycję dwóch fal materii o takiej samej amplitudzie, poruszających się w przeciwnych kierunkach. (Przypomnij sobie, że jest to warunek powstania fali stojącej). a) Pokaż, że  $|\Psi(x, t)|^2$  dane jest wtedy równaniem

$$|\Psi(x, t)|^2 = 2\psi_0^2(1 + \cos 2kx).$$

b) Narysuj tę funkcję i pokaż, że opisuje ona kwadrat amplitudy stojącej fali materii. c) Pokaż, że węzły tej fali stojącej znajdują się w punktach  $x$ :

$$x = (2n + 1)\frac{1}{4}\lambda, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

a  $\lambda$  jest długością fali de Broglie'a cząstki, której ta fala jest przypisana. d) Napisz wyrażenie na najbardziej prawdopodobne położenia tej cząstki.

### 39.8 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

**74.** Rysunek 39.11 dotyczy przypadku, w którym z powodu zasady nieoznaczoności Heisenberga nie jest możliwe przypisanie położeniu elektronu współrzędnej  $x$ . a) Czy można przypisać mu współrzędną  $y$  lub  $z$ ? (Wskazówka: Pęd elektronu nie ma składowej  $y$  ani  $z$ ). b) Opisz rozciągłość fali materii we wszystkich trzech kierunkach.

**75.** Wyobraź sobie grę w baseball w innym wszechświecie, w którym stała Plancka wynosi  $0,60 \text{ J} \cdot \text{s}$ . Ile wynosiłaby niepewność położenia ważącej  $0,50 \text{ kg}$  piłki do baseballu poruszającej się z prędkością  $20 \text{ m/s}$  wzdłuż pewnej osi, jeśli niepewność prędkości jest równa  $1,0 \text{ m/s}$ ?

**76.** Niepewność położenia elektronu wynosi  $50 \text{ pm}$ , co jest równe mniej więcej połowie promienia atomu wodoru. Jaka jest najmniejsza niepewność dowolnego jednokrotnego pomiaru pędu tego elektronu?

**77.** Na rysunku 39.11 pokazano przypadek, w którym pęd cząstki  $p_x$  jest ustalony, a więc  $\Delta p_x = 0$ . Zatem z zasady nieoznaczoności (równanie (39.20)) wynika, że położenie  $x$  tej cząstki jest całkowicie nieznane. Z tej samej zasady wynika również, że prawdą jest także stwierdzenie przeciwe, a więc jeśli położenie cząstki jest dokładnie znane ( $\Delta x = 0$ ), to niepewność jego pędu jest nieskończona.

Rozważmy sytuację pośrednią, w której położenie cząstki mierzone jest ze skończoną dokładnością równą  $\lambda/2\pi$ , gdzie  $\lambda$  jest długością fali de Broglie'a dla tej cząstki. Pokaż, że niepewność (jednocześnie mierzonego) pędu jest wtedy równa samemu pędowi, a więc że  $\Delta p_x = p$ . Czy w takich warunkach zaskoczyły Cię wynik pomiaru pędu wynoszący zero? A jeśli zmierzony pęd byłby równy  $0,5p$ ,  $2p$ ,  $12p$ ?

**78.** W rozdziale 40 przekonasz się, że elektrony nie mogą się poruszać w atomach na określonych orbitach, tak jak planety w Układzie Słonecznym. Aby zobaczyć, dlaczego tak jest, spróbujmy „zaobserwować” taki elektron w atomie pod mikroskopem optycznym. Spróbujmy zmierzyć położenie na orbicie z dokładnością powiedzmy  $10 \text{ pm}$  (typowy atom ma promień około  $100 \text{ pm}$ ). Długość fali światła użytego w mikroskopie musi być zatem rzędu  $10 \text{ pm}$ . a) Ile wynosiłaby energia fotonu tego światła? b) Ile energii przekażałby taki foton elektronowi w zderzeniu czołowym? c) Co mówią te wyniki o możliwości „oglądania” elektronu w atomie w dwóch lub więcej punktach na jego orbicie? (Wskazówka: Zewnętrzne elektrony w atomie związane są energiami wynoszącymi zaledwie kilka elektronowoltów).

## 39.9 Zjawisko tunelowe

79. Proton i deuteron (ten drugi o takim samym ładunku jak proton, ale o dwa razy większej masie) padają na barierę energii potencjalnej o szerokości 10 fm i wysokości 10 MeV. Przed zderzeniem z barierą każda z cząstek miała energię kinetyczną 3,0 MeV. a) Ile wynosi współczynnik przejścia dla każdej z cząstek? b) Ile wynoszą ich energie kinetyczne po przejściu przez barierę (przyjmując, że przez nią przeszły)? c) Ile wynoszą odpowiednie energie kinetyczne cząstek, jeśli odbiły się od bariery?

80. Rozważmy barierę energii potencjalnej jak ta na rysunku 39.12a, o wysokości  $U_0 = 6,0 \text{ eV}$  i szerokości  $L = 0,70 \text{ nm}$ . Ile wynosi energia elektronu padającego na tę barierę, jeśli współczynnik przejścia przez nią jest równy dla elektronu 0,001?

81. Rozważmy tunelowanie przez barierę omawiane w przykładzie 39.7. Jaka procentowa zmiana współczynnika przejścia  $T$

zajdzie dla 1,0% zmiany a) wysokości bariery, b) szerokości bariery, c) energii kinetycznej padającego elektronu?

82. a) Przypuśćmy, że wiązka protonów o energii 5,0 eV pada na barierę o wysokości 6,0 eV i szerokości 0,70 nm z szybkością odpowiadającą natężeniu prądu 1000 A. Ile wynosiłby średni czas, po którym nastąpiłoby przejście jednego protonu? b) A ile w przypadku, gdyby wiązka składała się z elektronów, a nie z protonów?

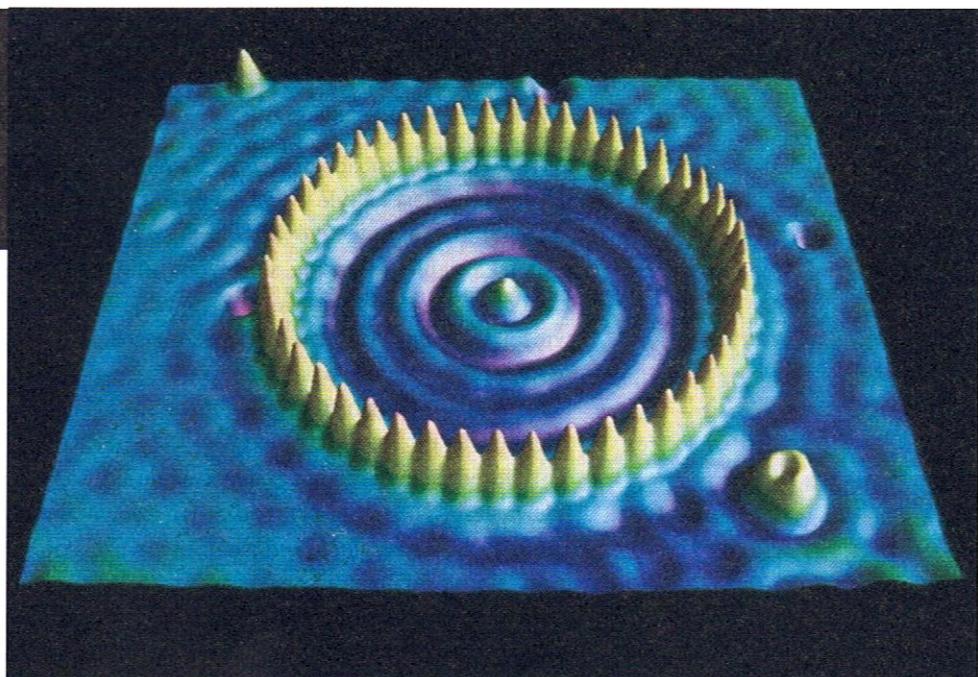
83. Samochód o masie 1500 kg poruszający się z prędkością 20 m/s zbliża się do wzgórza o wysokości 24 m i długości 30 m. Mimo że samochód i wzgórze są wyraźnie zbyt duże, aby je traktować jak fale materii, wyznacz współczynnik przejścia dla samochodu, gdyby mógł przeniknąć przez wzgórze jako fala materii. Potraktuj wzgórze jako barierę grawitacyjnej energii potencjalnej.

# 40 Jeszcze o falach materii

Ten spektakularny obraz komputerowy otrzymano w 1993 r. w IBM Almaden Research Center w Kalifornii. 48 ostrzy tworzących okrąg oznacza położenia pojedynczych atomów żelaza na specjalnie przygotowanej powierzchni miedzi. Okrąg ten, mający średnicę około 14 nm, zwany jest *zagrodą kwantową*.

Jak się udało ustawić te atomy na okręgu i czym są zmarszczki wewnętrz zagrody?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 40.1. Budowa atomu

We wczesnych latach dwudziestego wieku nikt nie wiedział, w jaki sposób ułożone są elektrony w atomie, jak się one poruszają, w jaki sposób atomy emitują lub pochłaniają światło czy nawet dlaczego atomy są trwałe. Bez tej wiedzy nie sposób zrozumieć, jak łączą się ze sobą atomy, tworząc cząsteczki, lub jak się układają, formując ciało stałe. W konsekwencji podstawy chemii, włączając w to biochemię leżącą u podstaw samej natury życia, były w większym lub mniejszym stopniu owiane tajemnicą.

Odpowiedzi na te, a także wiele innych pytań przyniosły dzięki rozwojowi fizyki kwantowej rok 1926. Podstawową przesłanką fizyki kwantowej jest stwierdzenie, że poruszające się elektrony, protony czy też cząstki każdego innego rodzaju najlepiej przedstawić w postaci fal materii. Ruch tych fal rządzony jest przez równanie Schrödingera. Mimo że teorię kwantową stosuje się także do cząstek o większej masie, nie ma sensu jej używać do opisu piłek baseballowych, samochodów, planet i podobnych obiektów. W przypadku takich dużych, wolno poruszających się ciał fizyka klasyczna i fizyka kwantowa dają te same odpowiedzi.

Zanim będziemy mogli zastosować metody fizyki kwantowej do opisu budowy atomu, musimy rozwinąć pewne idee, stosując je w kilku prostszych sytuacjach. „Ćwiczenia” takie mogą wydawać się nieco sztuczne, ale, jak to zobaczymy, zapewnią nam solidne podstawy zrozumienia bardzo realnego zagadnienia, jakie przeanalizujemy w paragrafie 40.8, a więc budowy atomu wodoru.

## 40.2. Fale w linie a fale materii

W rozdziale 17 zobaczyliśmy, że na napiętej linie można utworzyć dwa rodzaje fal. Jeśli lina jest na tyle długa, że można ją traktować jak nieskończoność długą, to możemy na niej utworzyć falę biegącą o dowolnej w zasadzie częstotliwości. Jednak jeśli taka napięta lina ma skończoną długość, na przykład z powodu trwałego zamocowania jej obu końców, to powstać na niej mogą jedynie fale stojące. Co więcej, takie fale stojące mogą mieć wyłącznie dyskretne częstotliwości. Innymi słowy, ograniczenie fali do skończonego obszaru przestrzeni prowadzi do *kwantyzacji* tego ruchu — do istnienia dyskretnych stanów fali, z których każdy ma dokładnie zdefiniowaną częstotliwość.

Obserwację tę można zastosować do fal wszystkich rodzajów, włączając w to fale materii. Jednak w przypadku fal materii zamiast częstotliwości  $\nu$  wygodniej jest rozważać energię  $E$  związaną z nią cząstki. W dalszych rozważaniach skupimy się na fali materii związanej z elektronem, ale otrzymane wyniki stosują się do dowolnej ograniczonej przestrzeni fali materii.

Rozważmy falę materii związaną z elektronem poruszającym się w dodatnim kierunku osi  $x$ , na który nie działa żadna siła wypadkowa — a więc z tak zwaną cząstką swobodną. Energia takiego elektronu może przyjmować każdą rozsądную wartość, tak jak fala biegąca wzdłuż naprężonej liny może mieć dowolną rozsądную częstotliwość.

Rozważmy następnie falę materii związaną z elektronem w atomie, na przykład z elektronem *walencyjnym* (elektronem związanym najsłabiej) w atomie sodu. Elektron taki, utrzymywany wewnątrz atomu przez przyciągającą siłę elektrostatyczną działającą pomiędzy nim a dodatnio naładowanym jądrem, *nie* jest cząstką swobodną. Może on istnieć tylko w pewnych określonych stanach, z których każdy charakteryzuje się dyskretną wartością energii  $E$ . Podobnie dla drgającej naprężonej liny o skończonej długości mamy dyskretne stany i skwantowane częstotliwości. W przypadku fal materii możemy zatem, tak jak dla fal każdego innego rodzaju, podać regułę lokalizacji przestrzennej:

- Lokalizacja fali w przestrzeni prowadzi do kwantyzacji, a więc do powstania dyskretnych stanów o dyskretnych energiach. Zlokalizowana fala może przyjmować jedynie takie energie.

## 40.3. Energia elektronu w pułapce

### Jednowymiarowe pułapki elektronów

Przeanalizujemy teraz falę materii związaną z elektronem pozostającym w pewnym ograniczonym obszarze przestrzeni. Skorzystamy z analogii do fal stojących w linie o skończonej długości, rozciągniętej wzdłuż osi  $x$  i zawieszonej pomiędzy sztywno zamocowanymi uchwytami. Ponieważ uchwyty te są sztywne, więc na końcach liny muszą powstać węzły, tzn. że lina w tych punktach zawsze będzie pozostawać w spoczynku. Wzdłuż liny może powstać więcej węzłów, ale zawsze będą obecne co najmniej te dwa. Pokazano to na rysunku 17.21.

Stanami lub dyskretnymi formami fali stojącej, mogącymi powstawać w wyniku drgań liny, są takie, dla których długość liny  $L$  równa jest całkowitej wielokrotności połowy długości fali. A więc naprężona lina może pozostawać tylko w takich stanach, dla których

$$L = \frac{n\lambda}{2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.1)$$

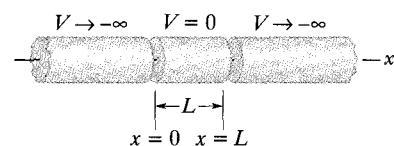
Każda wartość  $n$  identyfikuje pewien stan drgającej liny. W języku fizyki kwantowej możemy tę liczbę całkowitą  $n$  nazywać **liczbą kwantową**.

Poprzeczne wychylenie drgającej liny w jakimś punkcie jej długości  $x$  będzie w przypadku każdego stanu dozwolonego przez równanie (40.1) wynosić

$$y_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (40.2)$$

gdzie liczba kwantowa  $n$  identyfikuje postać drgań, amplituda  $A$  zaś zależy od chwili, w której dokonuje się obserwacji. (Równanie (40.2) jest skróconą wersją równania (17.47)). Widzimy, że dla wszystkich wartości  $n$  i w każdej chwili istnieją punkty (węzły), w których wychylenie jest równe零. Te punkty to  $x = 0$  i  $x = L$ , tak jak już wcześniej zauważyliśmy. Na rysunku 17.20 pokazano zdjęcia takiej naprężonej liny dla  $n = 2, 3$  i  $4$ .

Przejdzmy teraz do fal materii. Pierwszym problemem jest fizyczne ograniczenie położenia elektronu poruszającego się wzdłuż osi  $x$  do pewnego skończonego odcinka tej osi. Na rysunku 40.1 przedstawiono możliwą jednowymiarową



Rys. 40.1. Elementy wyidealizowanej „pułapki” stworzonej, aby lokalizować elektron w środkowym cylindrze. Przyjmujemy, że potencjał dwóch skrajnych cylindrów jest ujemny i ma nieskończonie dużą wartość, a potencjał cylindra środkowego jest równy zero

*pułapkę elektronową*. Składa się ona z dwóch zamkniętych z jednej strony cylindrów o nieskończonej długości, których potencjał elektryczny bliski jest  $-\infty$ , oraz umieszczonego pomiędzy nimi cylindra o długości  $L$  i potencjały elektrycznym równym零. Elektron umieszczony w tym środkowym cylindrze znajdzie się w pułapce.

Pułapka z rysunku 40.1 jest łatwa do analizy, ale niezbyt praktyczna. Pojedyncze elektrony *można* jednak utrzymywać w bardziej skomplikowanych pułapkach w warunkach laboratoryjnych. Zasada działania takich pułapek jest podobna. Na przykład w University of Washington pojedynczy elektron utrzymywany był w pułapce bez przerwy przez miesiące. Umożliwiło to naukowcom przeprowadzenie bardzo precyzyjnych badań jego właściwości.

### Obliczenie skwantowanych energii

Na rysunku 40.2 pokazano wykres energii potencjalnej elektronu w zależności od jego położenia wzdłuż osi  $x$  wyidealizowanej pułapki z rysunku 40.1. Kiedy elektron znajduje się w środkowym cylindrze, jego energia potencjalna  $U$  ( $= -eV$ ) jest równa zero, gdyż potencjał w tym obszarze jest równy zero. Gdyby elektron mógł się wydostać poza ten obszar, to, ponieważ  $V \rightarrow -\infty$ , jego energia potencjalna byłaby nieskończona i dodatnia. Przebieg potencjału pokazany na rysunku 40.2 nazywamy **nieskończonym głęboką studnią potencjału** lub w skrócie *nieskończoną studnią potencjału*. Jest to „studnia”, ponieważ elektron umieszczony w środkowym cylindrze na rysunku 40.1 nie może z niego uciec. Kiedy elektron dociera do jednego z końców cylindra, działa na niego siła w zasadzie o nieskończonym dużej wartości. Siła ta zmienia zwrot prędkości elektronu na przeciwny. W efekcie elektron uwieziony jest w pułapce. Ponieważ elektron może poruszać się tylko wzdłuż jednej osi, pułapkę tę możemy nazywać *jednowymiarową nieskończoną studnią potencjału*.

Dokładnie tak samo jak fala stojąca w napiętej linie, fala materii opisująca zlokalizowany elektron musi mieć węzły dla  $x = 0$  i  $x = L$ . Ponadto, jeśli w równaniu (40.1) będziemy interpretować długość fali  $\lambda$  jako długość fali de Broglie'a związanej z poruszającym się elektronem, to możemy zastosować to równanie do tej fali materii.

Długość fali de Broglie'a  $\lambda$  jest zdefiniowana wzorem (39.13) jako  $\lambda = h/p$ , gdzie  $p$  jest pędem elektronu. Wartość tego pędu  $p$  jest związana z energią kinetyczną elektronu  $E_k$  relacją  $p = \sqrt{2mE_k}$ , gdzie  $m$  jest masą elektronu. W przypadku elektronu poruszającego się w środkowym cylindrze z rysunku 40.1, gdzie  $U = 0$ , jego całkowita (mechaniczna) energia  $E$  równa jest energii kinetycznej. Zatem długość fali de Broglie'a możemy wyrazić jako

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \quad (40.3)$$

Po podstawieniu równania (40.3) do równania (40.1) możemy znaleźć zależność energii  $E$  od liczby  $n$ :

$$E_n = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.4)$$

Liczba całkowita  $n$  jest liczbą kwantową elektronowego stanu kwantowego w pułapce.

Równanie (40.4) mówi nam coś bardzo ważnego. Ponieważ elektron jest zlokalizowany w pułapce, więc może on przyjmować wyłącznie wartości energii dane przez to równanie. Elektron taki *nie może* mieć energii, której wartość jest równa powiedzmy średniej wartości dla  $n = 1$  i  $n = 2$ . Skąd to ograniczenie? Elektron jest falą materii. Gdyby elektron był cząstką, tak jak to opisuje fizyka klasyczna, mógłby, będąc zlokalizowany w pułapce, przyjmować *dowolną* wartość energii.

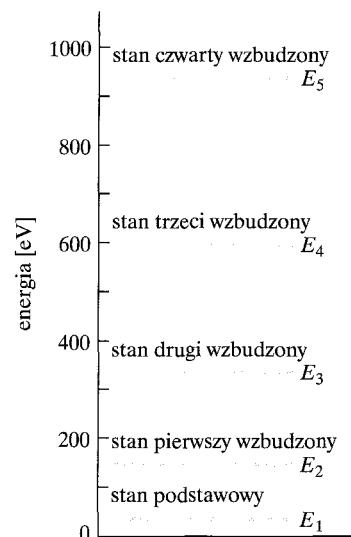
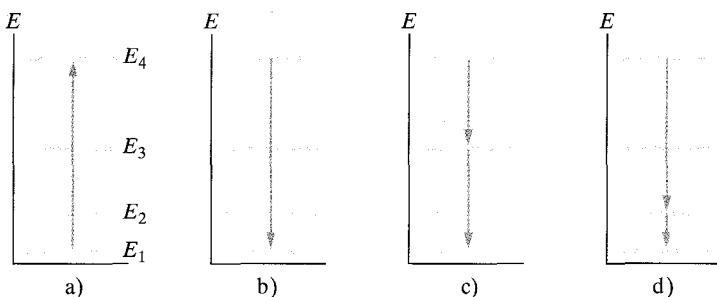
Na rysunku 40.3 przedstawiono pięć najmniejszych wartości energii dozwolonych dla elektronu w nieskończonej studni o szerokości  $L = 100$  pm (a więc o rozmiarze typowego atomu). Wartości te nazywamy *poziomami energetycznymi*. Na rysunku 40.3 przedstawiono je jako poziomy lub szczeble drabinki na *diagramie poziomów energetycznych*. Energia jest odłożona na osi pionowej, osi poziomej nie przypisujemy żadnej wielkości.

Stan kwantowy o najniższej możliwej energii  $E_1$  dozwolonej przez równanie (40.4), którego liczba kwantowa  $n$  wynosi 1, nazywany jest *stanem podstawowym* elektronu. Elektron dąży do zajęcia tego stanu o najniższej energii. Wszystkie stany kwantowe o wyższych energiach (odpowiadające liczbom kwantowym  $n = 2$  lub więcej) zwane są *stanami wzbudzonymi* elektronu. Stan kwantowy o energii  $E_2$ , dla którego  $n = 2$ , nazywany jest *pierwszym stanem wzbudzonym*, ponieważ jest pierwszym ze stanów wzbudzonych, jaki napotykamy, przesuwając się na schemacie poziomów energetycznych ku wyższym energiom. Podobnie stan o energii  $E_3$  nazywamy *drugim stanem wzbudzonym*.

## Zmiany energii

Elektron w pułapce dąży do zajęcia stanu o najniższej dozwolonej energii, a zatem do zajęcia stanu podstawowego. Stan elektronu można zmienić na stan wzbudzony (stan o wyższej energii) tylko przez dostarczenie ze źródła zewnętrznego dodatkowej energii, której wartość odpowiada tej zmianie. Niech  $E_n$  będzie energią początkową elektronu,  $E_w$  zaś będzie większą energią stanu znajdującego się wyżej na diagramie poziomów energetycznych. Energia niezbędna do zmiany stanu takiego elektronu będzie wówczas równa

$$\Delta E = E_w - E_n. \quad (40.5)$$



Rys. 40.3. Kilka dozwolonych energii elektronu zlokalizowanego w nieskończonej studni z rysunku 40.2, danych równaniem (40.4). Szerokość studni  $L = 100$  pm. Wykres taki nazywamy *diagramem poziomów energetycznych*

Rys. 40.4. a) Wzbudzenie uwięzionego elektronu ze stanu podstawowego do trzeciego stanu wzbudzonego. b)-d) Trzy z czterech możliwych sposobów powrotu elektronu ze stanu wzbudzonego do stanu podstawowego. (Jaki sposób nie został pokazany?)

Kiedy elektron otrzyma taką energię, mówimy, że następuje *przejście kwantowe* (przeskok kwantowy) lub że elektron zostaje *wzbudzony* ze stanu o niższej energii do stanu o energii wyższej. Na rysunku 40.4a pokazano takie przejście ze stanu podstawowego (z poziomu o energii  $E_1$ ) do trzeciego stanu wzbudzonego (na poziom o energii  $E_4$ ). Jak widać na rysunku, przejście takie *musi* zachodzić pomiędzy dwoma poziomami energetycznymi, może jednak pomijać po drodze jeden lub więcej poziomów o energiach pośrednich.

Jednym ze sposobów uzyskania przez elektron energii niezbędnej do przejścia na wyższy poziom energetyczny jest pochłonięcie fotonu. Jednak takie pochłonięcie i odpowiednie przejście może nastąpić wyłącznie wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

- Aby zlokalizowany elektron mógł pochłonąć foton, energia tego fotonu  $h\nu$  musi być równa różnicy energii  $\Delta E$  pomiędzy początkowym poziomem energetycznym elektronu a wyższym poziomem energetycznym.

Zatem wzbudzenie elektronu w wyniku absorpcji światła wymaga spełnienia warunku

$$h\nu = \Delta E = E_w - E_n. \quad (40.6)$$

Kiedy elektron osiąga stan wzbudzony, nie pozostaje w nim w nieskończoność, lecz szybko ulega *deeksycytacji*, zmniejszając swoją energię. Na rysunkach 40.4b–40.4d przedstawiono niektóre z możliwych przejść kwantowych z poziomu energetycznego trzeciego stanu wzbudzonego. Elektron taki może osiągnąć stan podstawowy albo dokonując jednego przejścia (rys. 40.4b), albo kilku przejść na poziomy o energiach pośrednich (rys. 40.4c i d).

Jednym ze sposobów, w jaki elektron może zmniejszyć swą energię, jest emisja fotonu ale tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

- Aby zlokalizowany elektron mógł wyemitować foton, energia tego fotonu  $h\nu$  musi być równa różnicy  $\Delta E$  pomiędzy energią początkowego poziomu energetycznego elektronu a energią niższego poziomu końcowego.

Tak więc równanie (40.6) stosuje się zarówno do pochłaniania, jak i do emisji światła przez zlokalizowany elektron. Oznacza to, że pochłaniane lub emitowane światło może przyjmować wyłącznie pewne określone wartości częstości  $\nu$  i długości fali  $\lambda$ .

*Na marginesie:* Równanie (40.6) i naszą dyskusję absorpcji i emisji fotonów można zastosować do fizycznych (rzeczywistych) pułapek elektronowych. Nie nadaje się ona jednak do opisu jednowymiarowych (wyidealizowanych) pułapek elektronowych. Jest to wynik konieczności zachowania momentu pędu w procesie absorpcji lub emisji fotonu. W niniejszej książce pominiemy tę potrzebę i będziemy używać wzoru (40.6) nawet w przypadku pułapek jednowymiarowych.

✓ **SPRAWDZIAN 1:** Uszereguj następujące pary stanów kwantowych elektronu zlokalizowanego w nieskończonej studni potencjału według malejącej różnicy energii pomiędzy tymi stanami: a)  $n = 3$  i  $n = 1$ , b)  $n = 5$  i  $n = 4$ , c)  $n = 4$  i  $n = 3$ .

## Przykład 40.1

Elektron uwięziony jest w jednowymiarowej, nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L = 100 \text{ pm}$ .

a) Ile wynosi najmniejsza możliwa energia tego elektronu?

### ROZWIĄZANIE:

**O** Lokalizacja elektronu (fali materii) w studni prowadzi do kwantyzacji jego energii. Ponieważ studnia jest nieskończona głęboka, więc dozwolone wartości energii dane są równaniem (40.4) ( $E_n = (h^2/8mL^2)n^2$ ), w którym liczba kwantowa  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą. Po podstawieniu do równania (40.4) wartości z przykładu, możemy obliczyć stałą pojawiającą się przed wartością  $n^2$ :

$$\frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(100 \cdot 10^{-12} \text{ m})^2} = 6,031 \cdot 10^{-18} \text{ J}. \quad (40.7)$$

Najmniejsza wartość energii elektronu odpowiada najmniejszej wartości liczby kwantowej, która dla stanu podstawowego elektronu wynosi  $n = 1$ . Zatem równania (40.4) i (40.7) dają nam

$$E_1 = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 = (6,031 \cdot 10^{-18} \text{ J})(1)^2 \\ \approx 6,03 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 37,7 \text{ eV}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile energii należy dostarczyć elektronowi, aby ze stanu podstawowego przeszedł on do drugiego stanu wzbudzonego?

### ROZWIĄZANIE:

*Najpierw uwaga:* Zauważ, że z rysunku 40.3 wynika, że drugi stan wzbudzony odpowiada *trzeciemu* poziomowi energetycznemu, o liczbie kwantowej  $n = 3$ .

**O** 1. Energia niezbędna do przejścia elektronu z poziomu o  $n = 1$  na poziom o  $n = 3$  równa jest zgodnie z równaniem (40.5)

$$\Delta E_{31} = E_3 - E_1. \quad (40.8)$$

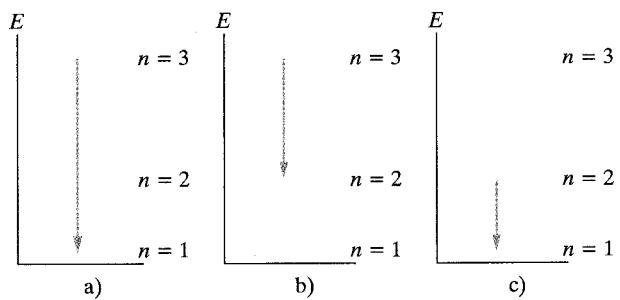
**O** 2. Energie  $E_3$  i  $E_1$  zależą od liczby kwantowej  $n$  tak jak w równaniu (40.4). Tak więc podstawiając to równanie do równania (40.8) i używając równania (40.7), otrzymamy

$$\Delta E_{31} = E_3 - E_1 = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) 3^2 - \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) 1^2 \\ = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) (3^2 - 1^2) = (6,031 \cdot 10^{-18} \text{ J}) (8) \\ = 4,83 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 302 \text{ eV}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jaka powinna być długość fali światła, aby pochłaniający je elektron przeszedł z poziomu energetycznego  $E_1$  na poziom  $E_3$ ?

### ROZWIĄZANIE:

**O** 1. Przekazanie energii światła elektronowi musi zajść na skutek absorpcji fotonu.



Rys. 40.5. Przykład 40.1. Powrót z drugiego stanu wzbudzonego do stanu podstawowego bezpośrednio (a) lub za pośrednictwem pierwszego stanu wzbudzonego (b, c)

**O** 2. Energia tego fotonu musi być równa różnicy  $\Delta E$  pomiędzy energią poziomu początkowego i energią poziomu wyższego, zgodnie z równaniem (40.6) ( $h\nu = \Delta E$ ). W innym przypadku foton *nie może* zostać pochłonięty. Podstawiając zamiast częstotliwości  $v$  stosunek  $c/\lambda$ , możemy przepisać wzór (40.6) w postaci

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}. \quad (40.9)$$

Dla różnicy energii  $\Delta E_{31}$  znalezionej w punkcie (b) otrzymujemy

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E_{31}} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{4,83 \cdot 10^{-17} \text{ J}} \\ = 4,12 \cdot 10^{-9} \text{ m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

d) Światło o jakich długościach fali może wyemitować w trakcie deeksytacji elektron, który znalazł się w drugim stanie wzbudzonym?

### ROZWIĄZANIE:

**O** 1. Elektron zamiast pozostawać w stanie wzbudzonym, będzie dążył do obniżenia swojej energii, aż znajdzie się w stanie podstawowym ( $n = 1$ ).

**O** 2. Elektron zmniejszający swoją energię musi stracić dokładnie tyle energii, aby znaleźć się na niższym poziomie energetycznym.

**O** 3. Jeśli elektron ma utracić energię, emitując przy tym światło, to tracona energia musi być unoszona przez emitowany foton.

Elektron znajdujący się w drugim stanie wzbudzonym (poziom o  $n = 3$ ) może przejść do stanu podstawowego ( $n = 1$ ) albo dokonując przeskoku kwantowego bezpośrednio na poziom podstawowy (rys. 40.5a), albo dzięki dwóm *osobnym* przeskokom za pośrednictwem poziomu o  $n = 2$  (rys. 40.5b i c).

Przejście bezpośrednie będzie miało tę samą energię  $\Delta E_{31}$ , jaką obliczyliśmy w punkcie (c). Zatem długość fali jest taka sama jak długość fali wyznaczona powyżej — jedyną różnicą jest to, że jest to długość fali światła emitowanego, a nie pochłanianego

jak poprzednio. Tak więc elektron może przejść bezpośrednio do stanu podstawowego, emittując światło o długości fali

$$\lambda = 4,12 \cdot 10^{-9} \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Postępując według przepisu podanego w punkcie (b), można pokazać, że różnice energii odpowiadające przejściom pokazanym na rysunkach 40.5b i c wynoszą

$$\Delta E_{32} = 3,016 \cdot 10^{-17} \text{ J} \quad \text{i} \quad \Delta E_{21} = 1,809 \cdot 10^{-17} \text{ J.}$$

Korzystając z równania (40.9), możemy zatem stwierdzić, że długość fali światła emitowanego w pierwszym z tych przeskoków (z  $n = 3$  do  $n = 2$ ) wynosi

$$\lambda = 6,60 \cdot 10^{-9} \text{ m,} \quad (\text{odpowiedź})$$

a długość fali światła emitowanego w drugim przeskoku (z  $n = 2$  do  $n = 1$ ) równa jest:

$$\lambda = 1,10 \cdot 10^{-8} \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 40.4. Funkcje falowe elektronu w pułapce

Rozwiązujejąc równanie Schrödingera dla elektronu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$ , stwierdzimy, że dla  $0 \leq x \leq L$  (funkcja falowa poza tym obszarem równa się zeru) mają one postać

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.10)$$

Amplitudę  $A$  pojawiającą się w tym równaniu obliczymy wkrótce.

Zwrócić uwagę, że funkcje falowe  $\psi_n(x)$  mają taką samą postać jak funkcje  $y_n(x)$  określające wychylenie dla fali stojącej w linie rozciągniętej pomiędzy sztywnymi uchwytnami (patrz równanie (40.2)). Elektron uwięziony pomiędzy nieskończonymi ścianami potencjału w jednowymiarowej studni możemy sobie wyobrażać jako stojącą falę materii.

### Prawdopodobieństwo detekcji

Funkcji falowej  $\psi_n(x)$  nie można wykryć lub bezpośrednio zmierzyć w żaden sposób — nie możemy po prostu zajrzeć do studni, żeby zobaczyć tę falę tak jak można zobaczyć falę w wannie wypełnionej wodą. Możemy jedynie umieścić tam jakiś czujnik i spróbować wykryć elektron, czyli stwierdzić jego obecność w pewnym punkcie  $x$  wewnątrz studni.

Jeśli powtarzalibyśmy taką procedurę detekcji w wielu punktach wewnątrz studni, zobaczylibyśmy, że prawdopodobieństwo wykrycia elektronu zależy od położenia detektora. W istocie prawdopodobieństwo to jest związane z położeniem za pomocą gęstości prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$ . Przypomnij sobie z paragrafu 39.7, iż w ogólności prawdopodobieństwo, że cząstkę można wykryć w pewnej nieskończonie małej objętości dookoła pewnego punktu, jest proporcjonalne do  $|\psi_n^2|$ . W przypadku elektronu uwięzionego w jednowymiarowej studni potencjału interesuje nas tylko wykrywanie elektronu wzdłuż osi  $x$ . Zatem gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  jest tu prawdopodobieństwem przypadającym na jednostkę długości osi  $x$ . (Możemy w tym przypadku pominąć znak wartości bezwzględnej, ponieważ funkcja  $\psi_n(x)$  w równaniu (40.10) ma wartości rzeczywiste, a nie zespolone). Prawdopodobieństwo  $p(x)$  wykrycia elektronu w punkcie  $x$  wewnątrz studni wynosi

$$\left( \begin{array}{l} \text{prawdopodobieństwo } p(x) \text{ wykrycia} \\ \text{elektronu wewnątrz odcinka } dx \\ \text{w otoczeniu punktu } x \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{gęstość prawdopodobieństwa} \\ \psi_n^2(x) \text{ w punkcie } x \end{array} \right) (\text{szerokość } dx)$$

czyli

$$p(x) = \psi_n^2(x)dx. \quad (40.11)$$

Widzimy z równania (40.10), że gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  znalezienia uwięzionego elektronu na odcinku  $0 \leq x \leq L$  (funkcja falowa poza tym obszarem równa się zeru) jest równa

$$\psi_n^2(x) = A^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.12)$$

Na rysunku 40.6 przedstawione są wykresy gęstości prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  dla stanów  $n = 1, 2, 3$  i  $15$  w nieskończonej studni o szerokości  $L$  równej  $100$  pm.

Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w dowolnej skończonej części studni — powiedzmy pomiędzy punktami  $x_1$  i  $x_2$  — musimy scałkować prawdopodobieństwo  $p(x)$  pomiędzy tymi punktami. Tak więc z równań (40.11) i (40.12) wynika

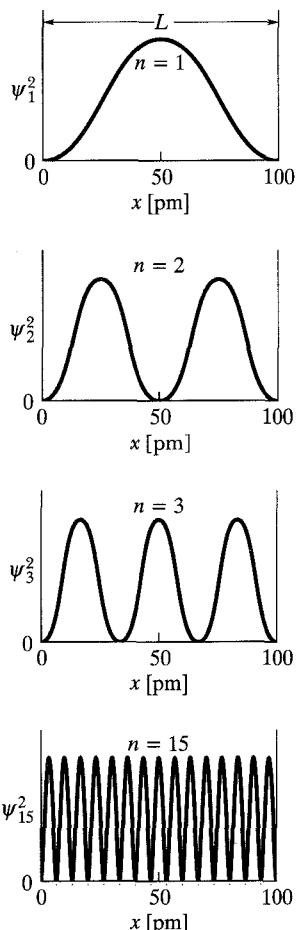
$$\left( \begin{array}{l} \text{prawdopodobieństwo wykrycia} \\ \text{elektronu pomiędzy } x_1 \text{ i } x_2 \end{array} \right) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) = \int_{x_1}^{x_2} A^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx. \quad (40.13)$$

W ujęciu klasycznym spodziewalibyśmy się, że uwięziony elektron będzie wykrywany z jednakowym prawdopodobieństwem w każdej części studni. Z rysunku 40.6 widzimy, że tak nie jest. Na przykład, przyglądając się temu rysunkowi lub równaniu (40.12), zobaczymy, że dla stanu o  $n = 2$  najbardziej prawdopodobne jest wykrycie elektronu w pobliżu  $x = 25$  pm i  $x = 75$  pm. Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w pobliżu  $x = 0$ ,  $x = 50$  pm i  $x = 100$  pm jest natomiast bliskie零.

Przypadek  $n = 15$  na rysunku 40.6 sugeruje, że ze wzrostem liczby kwantowej  $n$  prawdopodobieństwo detekcji elektronu w obszarze studni staje się coraz bardziej jednorodne. Wynik ten jest przykładem ogólnej zasady zwanej **zasadą odpowiedniości (korespondencji)**:

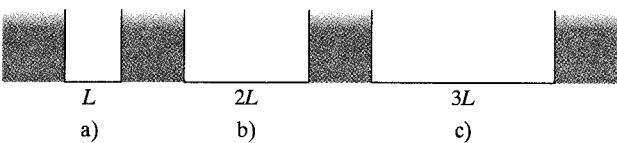
 Dla dostatecznie dużych liczb kwantowych przewidywania fizyki kwantowej przechodzą w sposób ciągły w przewidywania fizyki klasycznej.

Zasada ta, wysunięta po raz pierwszy przez duńskiego fizyka Nielsa Bohra, ma zastosowanie do wszystkich przewidywań teorii kwantowej. Powinna ci ona przypominać podobną regułę dotyczącą teorii względności — mówiącą mianowicie, że w przypadku cząstek poruszających się dostatecznie małymi prędkościami przewidywania szczególnej teorii względności łączą się w sposób ciągły z przewidywaniami fizyki klasycznej.



Rys. 40.6. Gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  dla czterech stanów elektronu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału, których liczby kwantowe równe są  $n = 1, 2, 3, 15$ . Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest największe tam, gdzie największa jest gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$ . Prawdopodobieństwo to jest najmniejsze tam, gdzie gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  jest najmniejsza

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku pokazane są trzy nieskończoności studnie potencjału o szerokościach  $L$ ,  $2L$  i  $3L$ . Każda z nich zawiera elektron znajdujący się w stanie o  $n = 10$ . Uszereguj te studnie według malejącej: a) liczby maksimów gęstości prawdopodobieństwa i b) energii elektronu.



### Normalizacja

Iloczyn  $\psi_n^2(x)dx$  określa prawdopodobieństwo, że elektron w nieskończoności studni można wykryć na odcinku osi  $x$  pomiędzy  $x$  i  $x + dx$ . Wiemy, że taki elektron musi być *gdzieś* wewnątrz nieskończoności studni. Ponieważ prawdopodobieństwo równe 1 odpowiada pewności, musi być spełniony warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)dx = 1 \quad (\text{równanie normalizacyjne}). \quad (40.14)$$

Mimo że całkowanie obejmuje całą oś  $x$ , to tylko obszar od  $x = 0$  do  $x = L$  daje jakiś wkład do prawdopodobieństwa. Graficznie całka z równania (40.14) jest równa polu powierzchni pod wykresem każdej z funkcji pokazanych na rysunku 40.6.

W przykładzie 40.2 zobaczymy, że jeśli do równania (40.14) podstawi się wartość gęstości prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  z równania (40.12), to jest możliwe przypisanie amplitudzie  $A$  z równania (40.12) pewnej określonej wartości, mianowicie  $A = \sqrt{2/L}$ . Taki proces, polegający na skorzystaniu z równania (40.14) w celu obliczenia amplitudy funkcji falowej, nazywany jest **normalizacją funkcji falowej**. Procedura ta ma zastosowanie do *wszystkich* jednowymiarowych funkcji falowych.

### Energia stanu podstawowego

Wstawiając do równania (40.4) wartość  $n = 1$ , definiujemy stan elektronu w nieskończoności studni potencjału o najniższej energii — stan podstawowy. To w tym stanie będzie znajdował się zlokalizowany elektron, chyba że dostarczymy mu energię, aby go przenieść do stanu wzbudzonego.

Można zapytać, dlaczego do możliwych liczb kwantowych  $n$  w równaniu (40.4) nie dołączamy wartości  $n = 0$ ? Podstawienie do równania (40.12) wartości  $n = 0$  prowadziłoby w istocie do stanu podstawowego o zerowej energii. Ale podstawienie do równania (40.12) wartości  $n = 0$  spowodowałoby także zerowanie się  $\psi_n^2$  dla wszystkich wartości  $x$ , co można interpretować jedynie jako brak elektronu w studni. Jednak wiemy, że elektron tam jest, a więc  $n = 0$  nie jest możliwą liczbą kwantową.

Konkluzja, że układy zlokalizowane nie mogą istnieć w stanach o energii zerowej, jest bardzo ważnym wynikiem fizyki kwantowej. Układy zlokalizowane

w stanie podstawowym muszą zawsze mieć pewną minimalną energię, zwaną czasem **energią drgań zerowych**.

Energię stanu podstawowego możemy dowolnie zmniejszać, poszerzając nieskończoną studnię potencjału, a więc zwiększając w równaniu (40.4) wartość  $L$  dla  $n = 1$ . W granicy  $L \rightarrow \infty$  energia stanu podstawowego  $E_1$  dąży do zera. W tej granicy jednak, w nieskończonie szerokiej studni potencjału elektron staje się cząstką swobodną, nieograniczoną w swym ruchu wzdłuż osi  $x$ . A ze względu na to, że energia cząstki swobodnej nie jest skwantowana, może ona przyjmować dowolne wartości, także wartość zero. Jedynie cząstka zlokalizowana musi mieć skończoną energię stanu podstawowego i nigdy nie może pozostawać w spoczynku.

**SPRAWDZIAN 3:** W nieskończonych studniach potencjału o jednakowych szerokościach zlokalizowane są następujące cząstki: a) elektron, b) proton, c) deuterон i d) cząstka  $\alpha$ . Podana kolejność odpowiada ich rosnącej masie. Uszereguj te cząstki zgodnie z malejącą energią stanu podstawowego.

## Przykład 40.2

Oblicz amplitudę  $A$  w równaniu (40.10) dla nieskończonej studni potencjału rozciągającej się od  $x = 0$  do  $x = L$ .

### ROZWIĄZANIE:

Funkcje falowe w równaniu (40.10) muszą spełniać warunek normalizacji z równania (40.14), a więc prawdopodobieństwo znalezienia elektronu gdziekolwiek wzdłuż osi  $x$  musi wynosić 1. Podstawiając równanie (40.10) do równania (40.14) i wyciągając stałą  $A$  przed znak całki otrzymujemy

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1. \quad (40.15)$$

Zmieniliśmy granice całkowania z  $-\infty$  i  $+\infty$  na 0 i  $L$ , ponieważ funkcja falowa jest równa零 poza tymi nowymi granicami (a więc nie ma potrzeby poza nimi całkować).

Całkę (40.15) można uprościć przez zamianę zmiennej  $x$  na bezwymiarową zmienną  $y$ , przy czym

$$y = \frac{n\pi}{L}x. \quad (40.16)$$

Tak więc

$$dx = \frac{L}{n\pi} dy.$$

Zmieniając zmienną całkowania, musimy także zmienić (powtórnie) granice całkowania. Równanie (40.16) mówi, że  $y = 0$ , kiedy  $x = 0$  oraz  $y = n\pi$ , gdy  $x = L$ , tak więc 0 i  $n\pi$  są nowymi granicami całkowania. Po tych wszystkich podstawieniach równanie (40.15) przybiera postać

$$A^2 \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} (\sin^2 y) dy = 1.$$

Wynik całkowania otrzymujemy, korzystając z całki 11 z dodatku E. W rezultacie

$$\frac{A^2 L}{n\pi} \left[ \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right]_0^{n\pi} = 1$$

i dalej

$$\frac{A^2 L}{n\pi} \frac{n\pi}{2} = 1.$$

Tak więc

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (40.17)$$

Wynik ten oznacza, że wymiarem  $A^2$ , a zatem wymiarem  $\psi_n^2(x)$  jest odwrotność długości. Ma to sens, ponieważ gęstość prawdopodobieństwa z równania (40.12) jest prawdopodobieństwem przypadającym na jednostkę długości.

## Przykład 40.3

Elektron w stanie podstawowym jest zlokalizowany w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału z rysunku 40.2 o szerokości  $L = 100$  pm.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że elektron można znaleźć w tej studni w obszarze pomiędzy  $x_1 = 0$  i  $x_2 = L/3$ ?

### ROZWIĄZANIE:

1. Badając jedną trzecią szerokości studni po jej lewej stronie, nie wiemy, czy znajdziemy tam elektron. Możemy jednak obliczyć prawdopodobieństwo wykrycia tego elektronu, korzystając z całki (40.13).

2. Prawdopodobieństwo to w dużym stopniu zależy od stanu, w którym znajduje się elektron, a więc od wartości liczby

kwantowej  $n$ . Ponieważ elektron, o którym mowa w zadaniu, znajduje się w stanie podstawowym, więc do równania (40.13) wstawiamy  $n = 1$ .

Granicami całkowania będą w naszym przypadku położenia  $x_1 = 0$  i  $x_2 = L/3$ , amplituda  $A$  zaś obliczona w przykładzie 40.2 wynosi  $\sqrt{2/L}$ . Widzimy zatem, że

$$\left( \begin{array}{l} \text{prawdopodobieństwo znalezienia} \\ \text{elektronu w jednej trzeciej} \\ \text{szerokości studni po jej lewej stronie} \end{array} \right) = \int_0^{L/3} \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{1\pi}{L}x\right) dx.$$

Moglibyśmy wyznaczyć to prawdopodobieństwo, podstawiając za  $L$  wartość  $100 \cdot 10^{-12}$  m i wykonując obliczenia numeryczne za pomocą kalkulatora lub komputera. Zamiast tego powtórzymy procedurę z przykładu 40.2. Z równania (40.16) otrzymamy nową zmienną całkowania  $y$ ,

$$y = \frac{\pi}{L}x, \quad \text{skąd} \quad dx = \frac{L}{\pi} dy.$$

Z pierwszego z tych równań znajdujemy nowe granice całkowania  $y_1 = 0$  dla  $x_1 = 0$  oraz  $y_2 = \pi/3$  dla  $x_2 = L/3$ . Musimy zatem obliczyć

$$\text{prawdopodobieństwo} = \left( \frac{2}{L} \right) \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi/3} (\sin^2 y) dy.$$

Wynik całkowania otrzymujemy, korzystając z całki 11 z dodatku E. W rezultacie

$$\text{prawdopodobieństwo} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right]_0^{\pi/3} = 0,2.$$

Mamy zatem

$$\left( \begin{array}{l} \text{prawdopodobieństwo} \\ \text{wykrycia elektronu w jednej trzeciej} \\ \text{szerokości studni po jej lewej stronie} \end{array} \right) = 0,2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc powtarzając wielokrotnie próbę wykrycia elektronu w jednej trzeciej szerokości studni po jej lewej stronie, stwierdzimy jego obecność w tym obszarze w 20% przypadków.

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że elektron można wykryć pomiędzy  $x_1 = L/3$  i  $x_2 = 2L/3$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Wiemy już, że prawdopodobieństwo znalezienia elektronu po lewej stronie studni pomiędzy  $x_1 = 0$  i  $x_2 = L/3$  wynosi 0,2.

**O** 1. Ze względu na symetrię problemu prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w jednej trzeciej szerokości studni po jej prawej stronie jest także równe 0,2.

**O** 2. Ponieważ elektron na pewno znajduje się w studni, więc prawdopodobieństwo jego wykrycia w całej studni równe jest 1. Zatem prawdopodobieństwo detekcji elektronu w środkowej jednej trzeciej szerokości studni wynosi:

$$1 - 0,2 - 0,2 = 0,6.$$

(odpowiedź)

## 40.5. Elektron w skończonej studni

Studnia energii potencjalnej o nieskończonej głębokości jest idealizacją. Na rysunku 40.7 pokazano rzeczywistą studnię potencjału, taką, w której energia potencjalna elektronu poza studnią nie jest nieskończona duża, ale ma skończoną dodatnią wartość  $U_0$  zwaną **głębokością studni**. Analogia pomiędzy falami w naprzegonej linie i falami materii w przypadku studni o skończonej głębokości — zawodzi. Nie możemy być dłużej pewni, że węzły fali materii istnieją w punktach  $x = 0$  i  $x = L$ . (Jak zobaczymy, nie jest to prawda).

Aby znaleźć funkcje falowe opisujące stany kwantowe elektronu w skończonej studni z rysunku 40.7, musimy powrócić do równania Schrödingera — podstawowego równania fizyki kwantowej. Z paragrafu 39.7 przypominamy sobie, że w przypadku ruchu w jednym wymiarze używamy równania Schrödingera w postaci równania (39.15):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U(x)]\psi = 0. \quad (40.18)$$

Nie rozwiążemy tego równania dla studni skończonej, ale podamy po prostu wyniki dla konkretnych wartości  $U_0$  i  $L$ . Na rysunku 40.8 wyniki te pokazane są w postaci wykresów gęstości prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  dla studni o głębokości  $U_0 = 450$  eV i szerokości  $L = 100$  pm.

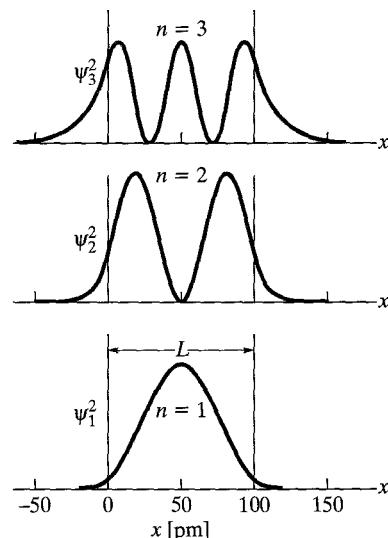
Gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  dla każdego z wykresów na rysunku 40.8 spełnia równanie normalizacyjne (40.14), tak więc wiadomo, że pola pod wszystkimi trzema wykresami gęstości prawdopodobieństwa równe są 1.

Porównując rysunek 40.8 dla skończonej studni z rysunkiem 40.6 dla studni nieskończonej, zauważysz pewną uderzającą różnicę. W przypadku studni skończonej elektronowa fala materii wnika w ściany studni, to znaczy w obszar, w którym mechanika klasyczna zabrania istnienia elektronu. Wnikanie to nie powinno nas zaskoczyć, ponieważ zobaczyliśmy w parafrazie 39.9, że elektron może tunelować przez barierę energii potencjalnej. Wnikanie w ściany studni potencjału o skończonej głębokości jest podobnym zjawiskiem. Z wykresów gęstości prawdopodobieństwa  $\psi_2$  na rysunku 40.8 widać, że im większa jest wartość liczby kwantowej  $n$ , tym silniejsze jest to wnikanie.

Ponieważ fala materii *wnika* do ścian skończonej studni potencjału, więc długość fali  $\lambda$  dla każdego stanu kwantowego jest większa, kiedy elektron jest zlokalizowany w skończonej studni potencjału, niż kiedy jest uwięziony w studni nieskończonej. Z równania (40.3) wynika, że energia  $E$  dla każdego takiego stanu jest mniejsza w studni skończonej niż w studni nieskończonej.

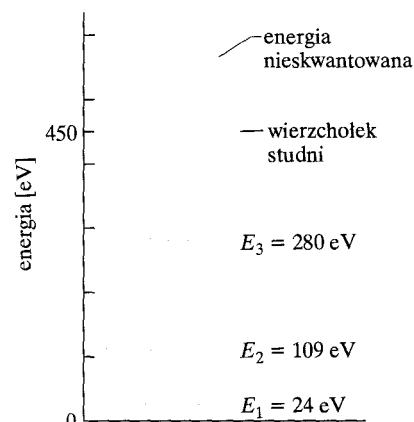
Ten fakt pozwala na przybliżone określenie diagramu poziomów energetycznych dla elektronu uwięzionego w skończonej studni potencjału. Jako przykład możemy rozważyć taki diagram dla skończonej studni z rysunku 40.8 o szerokości  $L = 100$  pm i głębokości  $U_0 = 450$  eV. Diagram poziomów energetycznych dla studni *nieskończonej* o takiej samej szerokości pokazany jest na rysunku 40.3. Najpierw usuwamy część rysunku 40.3 znajdująca się powyżej 450 eV. Następnie obniżamy pozostałe trzy poziomy energetyczne, przesuwając najbardziej poziom o  $n = 3$ , gdyż wnikanie fali w ściany jest dla tego poziomu najsilniejsze. W wyniku otrzymujemy przybliżony diagram poziomów energetycznych dla skończonej studni potencjału. Właściwy diagram pokazany jest na rysunku 40.9.

Na rysunku tym elektron o energii większej niż  $U_0 (= 450$  eV) ma zbyt dużą energię, aby zostać uwięzionym w skończonej studni. Taki elektron nie jest zlokalizowany, jego energia zaś nie jest skwantowana, czyli nie jest ograniczona do pewnych wartości. Aby elektron uwięziony w studni mógł osiągnąć tę *nieskwantowaną* część diagramu poziomów energetycznych, musi on w jakiś sposób otrzymać na tyle dużo energii, aby jego energia mechaniczna była równa 450 eV lub więcej. W taki sposób zlokalizowany elektron stanie się elektronem swobodnym.



Rys. 40.8. Gęstości prawdopodobieństwa  $\psi_n^2(x)$  dla elektronu uwięzionego w skończonej studni potencjału o głębokości  $U_0 = 450$  eV i szerokości  $L = 100$  pm. Jedynymi stanami, w jakich może znaleźć się elektron w tej studni, są stany o liczbach kwantowych  $n = 1, 2$  i  $3$

Rys. 40.9. Diagram poziomów energetycznych odpowiadający gęstościom prawdopodobieństwa z rysunku 40.8. Elektron zlokalizowany w skończonej studni potencjału może przyjmować jedynie energie odpowiadające stanom o liczbach kwantowych  $n = 1, 2$  i  $3$ . Elektron o energii większej niż 450 eV nie jest uwięziony, zatem jego energia nie jest skwantowana



## Przykład 40.4

Załóżmy, że w skończonej studni potencjału o głębokości  $U_0 = 450 \text{ eV}$  i szerokości  $L = 100 \text{ pm}$  został uwięziony pojedynczy elektron w stanie podstawowym.

a) Ile wynosi długość fali światła wystarczającego zaledwie do uwolnienia tego elektronu w wyniku pojedynczego aktu absorpcji fotonu?

### ROZWIĄZANIE:

1. Uwolnienie elektronu ze studni potencjału wymaga dostarczenia mu wystarczająco dużo energii, aby umieścić go w obszarze nieskwantowanych energii z rysunku 40.9. Tak więc elektron musi po absorpcji fotonu mieć energię co najmniej równą  $U_0 (= 450 \text{ eV})$ .

2. Elektron znajduje się w stanie podstawowym o energii  $E_1 = 24 \text{ eV}$ . Zatem do uwolnienia elektronu trzeba dostarczyć mu energię równą co najmniej

$$U_0 - E_1 = 450 \text{ eV} - 24 \text{ eV} = 426 \text{ eV}.$$

Aby elektron uzyskał od światła tyle energii, musi on pochłonąć foton o takiej właśnie energii. Po zamianie częstości  $\nu$  w równaniu (40.6) na  $c/\lambda$  otrzymujemy

$$\frac{hc}{\lambda} = U_0 - E_1,$$

skąd znajdujemy

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{hc}{U_0 - E_1} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{(426 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} \\ &= 2,92 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2,92 \text{ nm}. \quad (\text{odpowiedź})\end{aligned}$$

Zatem pochłonięcie fotonu światła o długości fali  $2,92 \text{ nm}$  wystarczy do uwolnienia elektronu ze studni.

b) Czy elektron znajdujący się początkowo w stanie podstawowym w studni może pochłonąć światło o długości fali  $2,0 \text{ nm}$ ? Jeśli tak, to ile wynosi jego energia po pochłonięciu fotonu?

### ROZWIĄZANIE:

1. W punkcie (a) stwierdziliśmy, że światło o długości fali  $2,92 \text{ nm}$  wystarczy zaledwie do uwolnienia elektronu ze studni potencjału.

2. Rozważamy teraz światło o mniejszej długości fali, równej  $2,0 \text{ nm}$ , a więc o większej energii fotonu ( $h\nu = hc/\lambda$ ).

3. Zatem elektron *może* pochłonąć foton takiego światła. W wyniku przekazu energii elektron nie tylko zostanie uwolniony, ale będzie miał pewną energię kinetyczną. Co więcej, ponieważ elektron nie będzie już uwięziony, jego energia nie będzie skwantowana, a zatem na jego energię kinetyczną nie będą nałożone żadne ograniczenia.

Energia przekazana elektronowi to energia fotonu:

$$\begin{aligned}h\nu &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{2,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \\ &= 9,95 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 622 \text{ eV}.\end{aligned}$$

Z rozwiązania punktu (a) wynika, że energia wystarczająca do uwolnienia elektronu ze studni wynosi  $U_0 - E_1 (= 426 \text{ eV})$ . Pozostała część energii fotonu, równej  $622 \text{ eV}$ , zamienia się na energię kinetyczną. Tak więc energia kinetyczna uwolnionego elektronu równa jest:

$$\begin{aligned}E_k &= h\nu - (U_0 - E_1) \\ &= 622 \text{ eV} - 426 \text{ eV} = 196 \text{ eV}. \quad (\text{odpowiedź})\end{aligned}$$

## 40.6. Inne pułapki elektronów

Omówimy teraz trzy inne typy pułapek elektronowych.

### Nanokryształy

Być może najprostszym sposobem skonstruowania studni energii potencjalnej w warunkach laboratoryjnych jest przygotowanie próbki materiału półprzewodnikowego w formie proszku o małych — nanometrowych — ziarnach o jednorodnych rozmiarach. Każde z takich ziaren — każdy **nanokryształ** — działa jak studnia potencjału dla elektronów w nim uwięzionych.

Równanie (40.4) pokazuje, że energię stanu podstawowego elektronu uwięzionego w nieskończonej studni potencjału możemy zwiększać, zmniejszając szerokość  $L$  tej studni. Tak samo jest dla studni utworzonych przez pojedyncze nanokryształy. Tak więc im mniejszy jest taki nanokryształ, tym wyżej leży najniższy

Rys. 40.10. Dwie próbki sproszkowanego półprzewodnika — selenku kadmu, różniące się tylko rozmiarem ziaren. Każde ziarno jest pułapką elektronową. W próbce znajdującej się w górnej części zdjęcia ziarna są większe i w efekcie mniejsza jest różnica energii pomiędzy poziomami energetycznymi oraz mniejsza progowa energia absorpcji światła. Światło, które nie zostało pochłonięte w próbce, ulegnie rozproszeniu. W rezultacie próbka rozprasza światło o większej długości fali i jest czerwona. Ziarna w próbce dolnej są mniejsze, a więc większa jest różnica energii pomiędzy poziomami energetycznymi. Większa progowa energia absorpcji powoduje, że próbka ma barwę żółtą



poziom, a ponadto tym większy jest odstęp poziomów i w związku z tym większa energia progowa dla fotonów światła, które mogą zostać pochłonięte.

Jeśli proszek nanokryształów oświetlimy światłem słonecznym, to będą one mogły pochłonąć wszystkie fotony o energiach większych niż pewna energia progowa  $E_{\text{prog}} (= h\nu_{\text{prog}})$ . Zatem mogą one pochłaniać światło, którego długość fali jest mniejsza niż pewna progowa długość fali  $\lambda_{\text{prog}}$ , gdzie

$$\lambda_{\text{prog}} = \frac{c}{v_{\text{prog}}} = \frac{ch}{E_{\text{prog}}}. \quad (40.19)$$

Ponieważ światło nie pochłonięte zostanie rozproszone, więc proszek nanokryształów będzie rozpraszał światło o wszystkich długościach fal powyżej  $\lambda_{\text{prog}}$ .

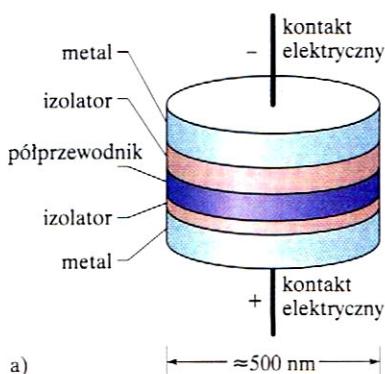
Proszek nanokryształów widzimy w świetle rozproszonym, docierającym do naszego oka. Zmieniając rozmiar nanokryształów, możemy kontrolować długość fali światła rozproszonego przez próbkę, a więc jej barwę.

Na rysunku 40.10 pokazano dwie próbki wykonane z półprzewodnika — selenku kadmu. Na każdą z nich składa się proszek nanokryształów o jednorodnym rozmiarze. Górną próbka rozprasza światło z czerwonej części widma. Próbka dolna różni się od górnej *tylko* rozmiarem nanokryształów, które są w niej mniejsze. Z tego powodu jej energia progowa  $E_{\text{prog}}$  jest większa i, jak to pokazuje równanie (40.19), jej progowa długość fali  $\lambda_{\text{prog}}$  jest mniejsza. Próbka przybiera kolor odpowiadający krótszym falom, w tym przypadku jest żółta. Uderzająca różnica barwy pomiędzy tymi dwiema próbками jest nieodpartym dowodem na kwantyzację energii uwięzionych elektronów i na zależności tych energii od rozmiarów pułapki elektronowej.

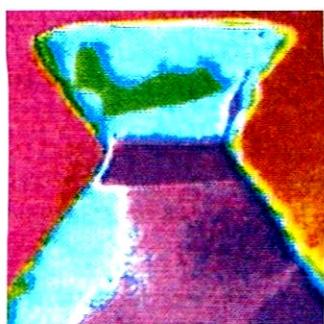
## Kropki kwantowe

Zaawansowane metody służące do produkcji mikroukładów elektronicznych (zwanych popularnie chipami) używanych w komputerach można wykorzystać do konstrukcji pojedynczych studni energii potencjalnej. Studnie takie, budowane atom po atomie, zachowują się pod wieloma względami jak sztuczne atomy. Te **kropki kwantowe**, jak się je zwykle nazywa, znajdują obiecujące zastosowania w optoelektronice i technice komputerowej.

Jedna z metod otrzymywania kropek kwantowych polega na wytworzeniu „kanapki”, w której cienka warstwa materiału półprzewodnikowego, oznaczonego



a)



b)

Rys. 40.11 Kropka kwantowa, czyli „sztuczny atom”. a) Środkowa warstwa materiału półprzewodnikowego stanowi studnię energii potencjalnej, w której lokalizowane są elektrony. Izolująca warstwa poniżej jest na tyle cienka, że umożliwia tunelowanie elektronów. Dzięki temu przez odpowiednie dobranie napięcia przyłożonego do kontaktów można do środkowej studni dodawać lub zabierać z niej elektrony. b) Zdjęcie rzeczywistej kropki kwantowej. Elektrony lokalizowane są w fioletowym obszarze w środku urządzenia.

na rysunku 40.11a kolorem fioletowym, zostaje umieszczona pomiędzy dwiema warstwami izolującymi. Jedna z tych warstw jest dużo cieńsza niż druga. Na obu końcach dodaje się metalowe pokrywki z przewodzącymi doprowadzeniami. Użyte materiały dobiera się tak, aby energia potencjalna elektronu w warstwie środkowej była mniejsza niż w otaczających ją warstwach izolujących. W ten sposób środkowa warstwa struktury działa jak studnia energii potencjalnej. Na rysunku 40.11b przedstawiono fotografię rzeczywistej kropki kwantowej. Studnia, w której mogą być lokalizowane elektrony, została oznaczona fioletowym kolorem.

Dolna (ale nie górną) warstwa izolująca na rysunku 40.11a jest dostatecznie cienka, aby po przyłożeniu do kontaktów odpowiedniej różnicy potencjałów mogły przez nią tunelować elektrony. W taki sposób można zmieniać liczbę elektronów zlokalizowanych w studni. Taki układ rzeczywiście zachowuje się jak sztuczny atom. Można w nim sterować liczbą elektronów, którą zawiera. Kropki kwantowe mogą być umieszczane w dwuwymiarowych matrycach, co może stanowić doskonałą podstawę układów liczących o wielkiej szybkości i dużej pojemności.

### Zagrody kwantowe

Podczas pracy skaningowego mikroskopu tunelowego (opisanego w paragrafie 39.9, rysunek 39.14) jego ostrze działa niewielką siłą na izolowane atomy, które mogą znajdować się na płaskiej powierzchni. Uważnie manipulując ostrzem, można „przeciągać” takie izolowane atomy po powierzchni i umieszczać je w innym położeniu. Tą metodą naukowcy z IBM Almaden Research Center przesuwali atomy żelaza po odpowiednio przygotowanej powierzchni miedzi, ustawiając je na okręgu, który nazwali zagrodą kwantową (ang. *quantum corral*). Wynik doświadczenia pokazany jest na zdjęciu otwierającym ten rozdział. Każdy atom żelaza osadzony jest we wgłębienniu na powierzchni miedzi, które jest jednakowo odległe od trzech sąsiadujących ze sobą atomów miedzi. Zagroda została utworzona w niskiej temperaturze (około 4 K), aby zminimalizować przypadkowe ruchy termiczne atomów żelaza.

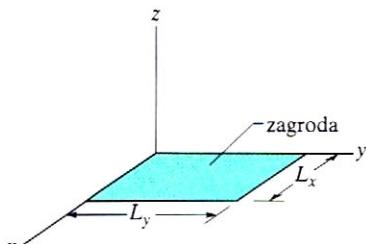
Zmarszczki widoczne wewnętrz zagrody odpowiadają falom materii związany z elektronami, które mogą się poruszać po powierzchni miedzi, ale są w dużym stopniu zlokalizowane w studni potencjału zagrody. Wymiary zmarszczek pozostają w doskonałej zgodności z przewidywaniami teorii kwantów.

## 40.7. Dwu- i trójwymiarowe pułapki elektronów

W następnym paragrafie omówimy atom wodoru będący trójwymiarową skończoną studnią potencjału. Na rozgrzewkę przed tymi rozważaniami rozszerzymy naszą dyskusję skończonych studni potencjału na dwa i trzy wymiary.

### Zagroda prostokątna

Na rysunku 40.12 pokazano prostokątny obszar, do którego może być ograniczony ruch elektronu w dwuwymiarowej wersji rysunku 40.2. Jest to dwuwymiarowa



Rys. 40.12. Zagroda prostokątna – dwuwymiarowa wersja nieskończonej studni potencjału z rysunku 40.2 – o wymiarach  $L_x$  i  $L_y$ .

nieskończona studnia potencjału o wymiarach  $L_x$  i  $L_y$ . Taka studnia nazywana jest *zagrodą prostokątną*. Zagroda taka mogłaby powstać na powierzchni ciała, jeśli w jakiś sposób udałoby się zapobiec ruchowi elektronu wzdłuż osi  $z$ , a tym samym uniemożliwić mu opuszczenie tej powierzchni. Przebieg energii potencjalnej wzdłuż każdego boku takiej zagrody musimy sobie wyobrażać w postaci funkcji o nieskończonych wartościach (jak  $U(x)$  na rysunku 40.2), utrzymującej elektron w jej wnętrzu.

Rozwiązywanie równania Schrödingera pokazuje, że aby elektron był zlokalizowany w prostokątnej zagrodzie z rysunku 40.12, jego fala materii musi pasować osobno do każdego jej wymiaru, dokładnie w taki sam sposób jak fala materii dla uwięzionego elektronu musi pasować do jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału. Oznacza to, że fala ta jest osobno skwantowana wzdłuż  $L_x$  i osobno wzdłuż  $L_y$ . Niech  $n_x$  będzie liczbą kwantową, dla której fala materii odpowiada wymiarowi  $L_x$ ,  $n_y$  zaś — liczbą kwantową, dla której fala odpowiada wymiarowi  $L_y$ . Tak jak w przypadku jednowymiarowej studni potencjału, te liczby kwantowe mogą być tylko dodatnimi liczbami całkowitymi.

Energia elektronu zależy od obu liczb kwantowych. Jest ona sumą energii, jaką miałby elektron, gdyby był zlokalizowany wyłącznie wzdłuż osi  $x$ , oraz energii, jaką miałby w rezultacie lokalizacji wyłącznie wzdłuż osi  $y$ . Z równania (40.4) wynika, że możemy przepisać tę sumę jako

$$E_{nx,ny} = \left( \frac{\hbar^2}{8mL_x^2} \right) n_x^2 + \left( \frac{\hbar^2}{8mL_y^2} \right) n_y^2 = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right). \quad (40.20)$$

Wzbudzenie elektronu w wyniku absorpcji fotonu i jego deekscytacja z emisją fotonu muszą spełniać takie same wymagania jak w przypadku pułapek jednowymiarowych. Jedyną ważną różnicą jest to, że w przypadku zagrody dwuwymiarowej energia dowolnego stanu zależy od dwóch liczb kwantowych ( $n_x$  i  $n_y$ ), a nie tylko od jednej ( $n$ ). W ogólności różne stany (stany o różnych parach liczb  $n_x$  i  $n_y$ ) mają różne energie. Jednak w pewnych sytuacjach różne stany mogą mieć jednakowe energie. Stany takie (oraz ich poziomy energetyczne) nazywamy *zdegenerowanymi*. Stany zdegenerowane nie mogą się pojawić w studni jednowymiarowej.

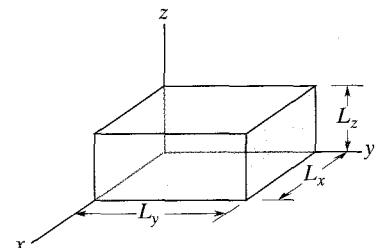
### Pułdo prostokątne

Elektron może zostać także uwięziony w trójwymiarowej nieskończonej studni potencjału — *pudle*. Jeśli takie pudło jest prostokątne, tak jak na rysunku 40.13, to równanie Schrödingera pokazuje, że energię elektronu możemy wyrazić jako

$$E_{nx,ny,nz} = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right). \quad (40.21)$$

W równaniu powyższym  $n_z$  jest trzecią liczbą kwantową, odpowiadającą dopasowaniu fali materii do wymiaru  $L_z$ .

**SPRAWDZIAN 4:** Czy według równania (40.20) podstawowy stan energetyczny elektronu w prostokątnej zagrodzie to:  $E_{0,0}$ ,  $E_{1,0}$ ,  $E_{0,1}$ , czy  $E_{1,1}$ ?



Rys. 40.13. Pułdo prostokątne — trójwymiarowa wersja nieskończonej studni potencjału z rysunku 40.2 — o wymiarach  $L_x$ ,  $L_y$  i  $L_z$

## Przykład 40.5

Elektron został uwięziony w kwadratowej zagrodzie, będącej dwuwymiarową nieskończoną studnią potencjału (rys. 40.12) o wymiarach  $L_x = L_y = L$ .

a) Wyznacz energię najniższych pięciu poziomów energetycznych elektronu w takiej zagrodzie i skonstruj diagram poziomów energetycznych.

### ROZWIĄZANIE:

Jeśli elektron jest uwięziony w dwuwymiarowej prostokątnej studni potencjału, to jego energia zależy od dwóch liczb kwantowych  $n_x$  i  $n_y$ , zgodnie z równaniem (40.20). Studnia jest kwadratowa, a więc można napisać, że  $L_x = L_y = L$ . Tak więc równanie (40.20) upraszcza się:

$$E_{nx,ny} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2). \quad (40.22)$$

Najniższe stany energetyczne odpowiadają małym wartościami liczb kwantowych  $n_x$  i  $n_y$ , mogących przyjmować dodatnie liczby całkowite  $1, 2, \dots, \infty$ . Podstawiając w równaniu (40.22) te liczby za  $n_x$  i  $n_y$ , począwszy od najmniejszej wartości 1, możemy uzyskać wartości energii wypisane w tabeli 40.1. Zobaczmy w niej, że różne pary liczb kwantowych ( $n_x$  i  $n_y$ ) prowadzą do takich samych wartości energii. Na przykład stany  $(1, 2)$  i  $(2, 1)$  mają taką samą energię  $5(h^2/8mL^2)$ . Każda taka para jest związana ze zdegenerowanym poziomem energetycznym. Zauważ także, że

Poziomy energetyczne

$n_x$	$n_y$	Energia*	$n_x$	$n_y$	Energia*
1	3	10	2	4	20
3	1	10	4	2	20
2	2	8	3	3	18
1	2	5	1	4	17
2	1	5	4	1	17
1	1	2	2	3	13
			3	2	13

\*Wyrażona jako wielokrotność  $h^2/8mL^2$

być może nieoczekiwane stany  $(4, 1)$  i  $(1, 4)$  mają niższą energię niż stan  $(3, 3)$ .

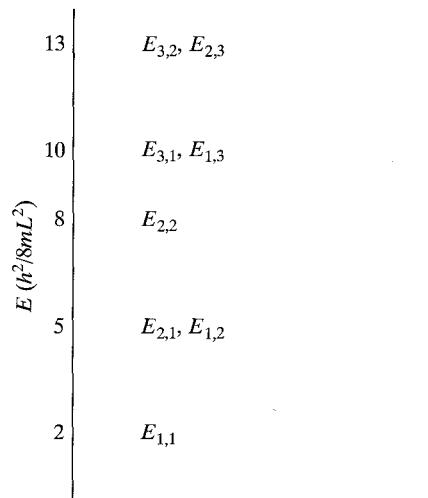
Korzystając z tabeli 40.1 (zwracając uwagę na to, że niektóre poziomy są zdegenerowane), możemy skonstruować diagram poziomów energetycznych przedstawiony na rysunku 40.14.

b) Ile wynosi różnica energii między stanem podstawowym i trzecim stanem wzbudzonym elektronu, wyrażona jako wielokrotność  $h^2/8mL^2$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Z rysunku 40.14 widzimy, że stanem podstawowym jest stan  $(1, 1)$  o energii  $2(h^2/8mL^2)$ . Widzimy także, że trzeci stan wzbudzony (trzeci stan powyżej stanu podstawowego na diagramie poziomów energetycznych) to zdegenerowane stany  $(1, 3)$  i  $(3, 1)$  o energii  $10(h^2/8mL^2)$ . Zatem różnica energii  $\Delta E$  między tymi stanami wynosi

$$\begin{aligned} \Delta E &= 10\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) - 2\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) \\ &= 8\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 40.14. Przykład 40.5. Diagram poziomów energetycznych

## 40.8. Atom wodoru

Przejdziemy teraz od sztucznych i fikcyjnych pułapek elektronowych do pułapek naturalnych, biorąc za przykład najprostszy atom — atom wodoru. Atom ten składa się z pojedynczego elektronu (ładunek  $-e$ ) związanego z jądrem — protonem (ładunek  $+e$ ) przyciągającą siłą elektrostatyczną działającą między nimi. Atom wodoru jak wszystkie atomy jest pułapką elektronów — ogranicza ruch

swojego elektronu do pewnego obszaru przestrzeni. Z reguły lokalizacji przestrzennej wynika, że możemy w takim przypadku spodziewać się, że elektron będzie istniał tylko w jednym z dyskretnych stanów kwantowych, z których każdy ma pewną energię. Chcemy teraz znaleźć te energie i funkcje falowe odpowiadające im stanów.

## Poziomy energetyczne atomu wodoru

W rozdziale 25 podaliśmy równanie (25.43) określające (elektryczną) energię potencjalną układu dwóch naładowanych cząstek o ładunkach równych  $q_1$  i  $q_2$ . Wynosi ona

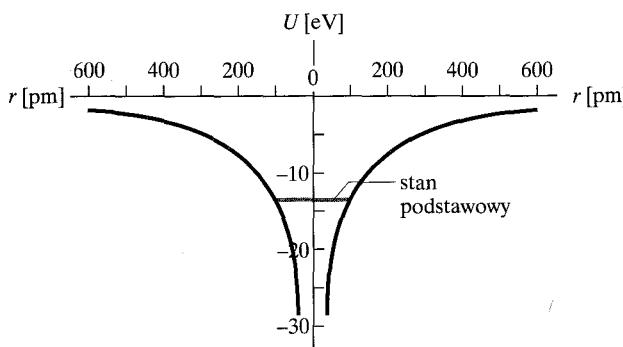
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r},$$

gdzie  $r$  jest odległością pomiędzy tymi cząstками. W przypadku układu dwóch cząstek tworzących atom wodoru możemy zapisać te energie jako

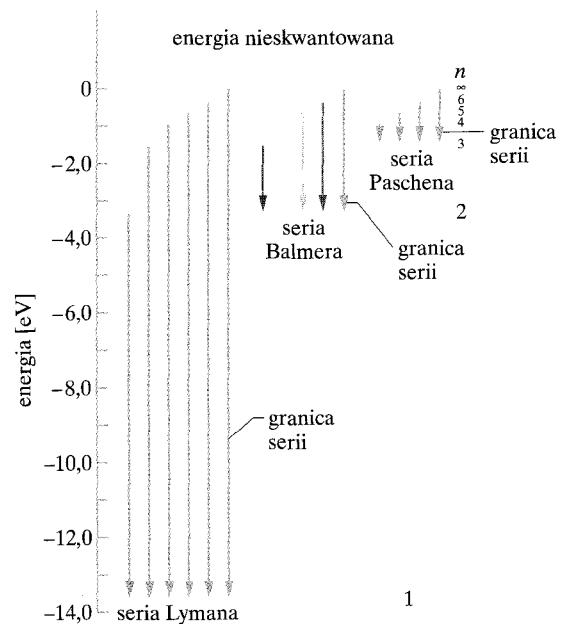
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(e)(-e)}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (40.23)$$

Wykres na rysunku 40.15 pokazuje trójwymiarową studnię potencjału, w której uwięziony jest elektron atomu wodoru. Studnia ta różni się od skończonej studni potencjału z rysunku 40.7 tym, że w przypadku atomu wodoru energia potencjalna  $U$  jest ujemna dla wszystkich wartości odległości  $r$  od jądra. Jest tak dlatego, że (dowolnie) wybraliśmy energię potencjalną tak, aby była równa zeru dla  $r = \infty$ . Tymczasem w przypadku skończonej studni z rysunku 40.7 (również dowolnie) przyjęliśmy, że energia potencjalna była równa zeru wewnątrz studni.

Aby wyznaczyć energie stanów kwantowych atomu wodoru, musimy rozwiązać równanie Schrödingera z energią potencjalną  $U$  określoną równaniem (40.23).



**Rys. 40.15.** Zależność energii potencjalnej  $U$  atomu wodoru od odległości  $r$  pomiędzy elektronem a protonem. Wykres został powtórzony po lewej stronie osi energii, aby lepiej zobrazować sferyczną symetrię trójwymiarowej pułapki, w której jest uwieziony elektron



Rys. 40.16. Kilka poziomów energetycznych atomu wodoru, wynikających z równania (40.24). Przejścia pogrupowane są w serie, z których każda oznaczona jest nazwiskiem badacza.

Jednak ponieważ elektron w atomie wodoru jest uwięziony w studni trójwymiarowej, więc musimy skorzystać w tym celu z trójwymiarowej postaci równania Schrödingera.

Rozwiążanie tego równania pokazuje, że energie stanów elektronu w atomie wodoru są równe

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (40.24)$$

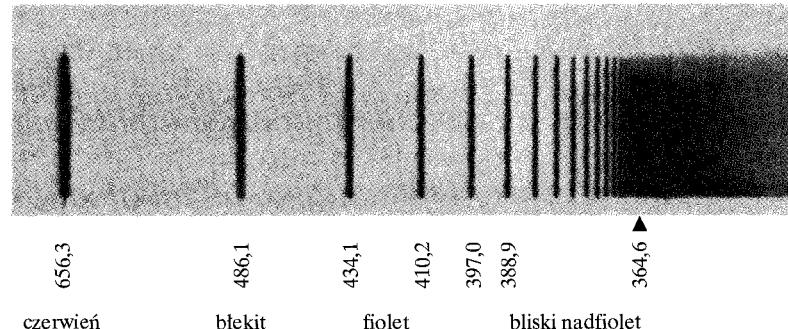
gdzie  $n$  jest liczbą kwantową,  $m$  zaś jest masą elektronu. Stan o najmniejszej energii, dla którego  $n = 1$ , zaznaczony jest na rysunku 40.15. Na rysunku 40.16 przedstawiono poziomy energetyczne stanu podstawowego i pięciu stanów wzbudzonych. Każdy z tych poziomów oznaczony jest odpowiednią liczbą kwantową  $n$ . Na rysunku pokazano też poziom energii dla stanu o największej wartości  $n$ , a więc  $n = \infty$ , dla którego  $E_n = 0$ . Dla każdej większej energii elektron i proton nie są ze sobą związane (atom wodoru nie istnieje), a odpowiadający takiej sytuacji obszar energii na rysunku 40.16 odpowiada nieskwantowanemu obszarowi energii dla skończonej studni potencjału z rysunku 40.9.

Skwantowane wartości energii potencjalnej dane równaniem (40.24) są właściwie energiami atomu wodoru, czyli układu *elektron + proton*. Jednak zwykle możemy przypisać tę energię samemu elektronowi, ponieważ jego masa jest dużo mniejsza niż masa protonu. (W podobny sposób możemy przypisać energię układu *piłka + Ziemia* samej piłce). Tak więc możemy powiedzieć, że gdy elektron jest uwięziony w atomie wodoru, wówczas wartości energii, jakie może przyjmować ten *elektron*, dane są równaniem (40.24).

Tak jak w przypadku elektronów uwięzionych w innych studniach potencjału, elektron w atomie wodoru będzie dążył do osiągnięcia stanu o najniższej energii, a więc stanu podstawowego. Elektron może przejść do stanu o większej energii tylko wtedy, gdy dostarczy mu się energii wymaganej do osiągnięcia tego wyższego poziomu. Jednym ze sposobów uzyskania przez elektron tej energii jest absorpcja fotonu. Jak to przedyskutowaliśmy, absorpcja taka może nastąpić tylko w przypadku, gdy energia fotonu  $h\nu$  jest równa różnicy energii  $\Delta E$  pomiędzy energią początkową elektronu a energią innego stanu określonej wzorem (40.6). Aby zmniejszyć swoją energię, elektron może przejść na niższy poziom energetyczny. Jeśli dokonuje tego, emitując foton, energia tego fotonu  $h\nu$  musi znowu równać się różnicy energii  $\Delta E$ .

Energia fotonu  $h\nu$  musi być równa różnicy  $\Delta E$  pomiędzy energiami dwóch poziomów kwantowych. Z kolei poziomy te mogą przyjmować tylko pewne wartości energii. W rezultacie atom wodoru może emitować i pochłaniać światło tylko o pewnych określonych częstościach  $v$ , a zatem o pewnych określonych długościach fali  $\lambda$ . Ze względu na sposób, w jaki wykrywa się je w spektroskopie, każda z takich długości fali jest często nazywana *linią*. Linie mogą być emisjyne lub absorpcyjne. Zbiór takich linii nazywamy **widmem** atomu wodoru.

Mówimy, że linie widmowe wodoru układają się w *serie* zgodnie z poziomem początkowym lub końcowym przejścia. Na przykład linie emisjyne i absorpcyjne dla wszystkich możliwych przejść na poziom o  $n = 1$  (w przypadku emisji) lub



z poziomu o  $n = 1$  (w przypadku absorpcji) tworzą *serię Lymana*, nazwaną tak od nazwiska jej pierwszego badacza. Tak jak seria Lymana w widmie wodoru jest związana z przejściami na poziom o  $n = 1$ , tak *seria Balmera* wiąże się z przejściami na poziom o  $n = 2$ , a *seria Paschena* z przejściami na poziom o  $n = 3$ .

Niektóre z przejść kwantowych będących źródłem tych trzech serii pokazano na rysunku 40.16. Cztery linie serii Balmera znajdują się w zakresie widzialnym i na rysunku zaznaczone są strzałkami o odpowiadających im kolorach. Najkrótsza z tych strzałek reprezentuje najkrótsze przejście w tej serii, przejście z poziomu o  $n = 3$  na poziom o  $n = 2$ . Tak więc przejście to jest związane z najmniejszą zmianą energii elektronu i odpowiada mu najmniejsza energia emitowanego fotonu z całej serii. Emitowane światło ma czerwoną barwę. Następne przejście w serii, przejście z poziomu o  $n = 4$  na poziom o  $n = 2$  ma większą energię, większa jest zatem energia fotonu i mniejsza długość fali emitowanego światła. Światło ma barwę zieloną. Trzecia, czwarta i piąta strzałka reprezentują przejścia o większych energiach i krótszych falach. W przypadku piątego przejścia emitowane światło leży poza zakresem widzialnym, w nadfioletowej części widma.

*Granica serii* jest linią związaną z przejściem między najwyższym poziomem energetycznym, poziomem o liczbie kwantowej  $n = \infty$ , a wspólnym dla danej serii poziomem dolnym. Tak więc granica serii odpowiada najkrótszej fali w serii. Rysunek 40.17 to fotografia linii emisyjnych serii Balmera wykonana za pomocą spektroskopu (tak jak na rys. 37.22 i 37.23). Granica serii jest zaznaczona małym trójkątem.

## Model Bohra atomu wodoru

W 1913 r. na jakieś 13 lat przed sformułowaniem równania Schrödingera, Niels Bohr zaproponował model budowy atomu wodoru oparty na zręcznej kombinacji fizyki klasycznej i wczesnych pojęć fizyki kwantowej. Jego podstawowe założenie, że atomy istnieją w dyskretnych stanach kwantowych o dobrze zdefiniowanej energii, było śmiały zerwaniem z ideami klasycznymi. Założenie to pozostaje do dziś niezbędną koncepcją nowoczesnej fizyki kwantowej. Korzystając z niego, Bohr zręcznie użył zasad odpowiedniości (patrz paragraf 40.4) nie tylko do wyprawienia wzoru (40.24) na energie stanów kwantowych atomu wodoru, ale także do obliczenia wartości liczbowej efektywnego promienia atomu wodoru (*promienia Bohra*). Mimo swoich sukcesów szczególny model Bohra atomu

Rys. 40.17. Seria Balmera w widmie emisyjnym atomu wodoru. Podczas gdy na rysunku 40.16 pokazano cztery przejścia tej serii, a także granicę serii, na tym rysunku widać około tuzina linii z tej serii. Zwróć uwagę, że odstęp pomiędzy liniami maleje w miarę zbliżania się do granicy serii oznaczonej trójkątem

wodoru, oparty na założeniu, że elektron jest cząstką poruszającą się dookoła jądra po orbitach, tak jak planety poruszają się wokół Słońca, nie był spójny z zasadą nieoznaczoności. Jego miejsce zajął model gęstości prawdopodobieństwa wyprowadzony w pracy Schrödingera. W uznaniu znakomitych osiągnięć, które w dużym stopniu stymulowały postęp nowoczesnej teorii kwantowej, Bohr otrzymał w 1922 r. Nagrodę Nobla z fizyki.

### Liczby kwantowe w atomie wodoru

Mimo że energie stanów atomu wodoru można opisać pojedynczą liczbą kwantową  $n$ , to funkcje falowe opisujące te stany wymagają trzech liczb kwantowych, odpowiadających trzem wymiarom, w których mogą się poruszać elektrony. Te trzy liczby kwantowe, wraz z ich nazwami i wartościami, jakie mogą przyjmować, pokazano w tabeli 40.2.

Liczby kwantowe atomu wodoru

Symbol	Nazwa	Dozwolone wartości
$n$	główna liczba kwantowa	1, 2, 3, ...
$l$	orbitalna liczba kwantowa	0, 1, 2, ..., $n - 1$
$m_l$	magnetyczna liczba kwantowa	$-l, -(l - 1), \dots, +(l - 1), +l$

Każdy zestaw liczb kwantowych ( $n, l, m_l$ ) identyfikuje funkcję falową poszczególnych stanów kwantowych. Liczba kwantowa  $n$ , zwana **główną liczbą kwantową**, pojawia się w równaniu (40.24) opisującym energię stanu. **Orbitalna liczba kwantowa**  $l$  jest miarą wielkości momentu pędu związanego ze stanem kwantowym. **Magnetyczna liczba kwantowa**  $m_l$  jest związana z przestrzenną orientacją wektora orbitalnego momentu pędu. Ograniczenia nałożone na liczby kwantowe w przypadku atomu wodoru, jak to pokazuje tabela 40.2, nie są dowolne, ale wynikają z rozwiązania równania Schrödingera. Zauważ, że w przypadku stanu podstawowego ( $n = 1$ ) ograniczenia te wymagają, aby liczby kwantowe  $l = 0$  i  $m_l = 0$ . Tak więc atom wodoru w swoim stanie podstawowym ma moment pędu równy zeru.

**SPRAWDZIAN 5:** a) Rozważmy stany kwantowe atomu wodoru charakteryzujące się główną liczbą kwantową  $n = 5$ . Ile jest dozwolonych wartości orbitalnej liczby kwantowej  $l$  dla takich stanów? b) Pewne stany kwantowe atomu wodoru charakteryzują się główną liczbą kwantową  $n = 5$  i orbitalną liczbą kwantową  $l = 3$ . Ile jest dozwolonych wartości magnetycznej liczby kwantowej  $m_l$  dla tych stanów?

### Funkcja falowa stanu podstawowego atomu wodoru

Funkcja falowa stanu podstawowego atomu wodoru, otrzymana w wyniku rozwiązania trójwymiarowego równania Schrödingera i normalizacji wyniku, ma następującą postać:

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^{3/2}}} e^{-r/a} \quad (\text{stan podstawowy}). \quad (40.25)$$

W powyższym równaniu  $a$  oznacza **promień Bohra**, pewną stałą o wymiarze *długości*. Stała ta, którą w zasadzie można utożsamiać z efektywnym promieniem atomu wodoru, okazuje się wygodną jednostką długości w innych sytuacjach, dotyczących wymiarów atomowych. Jej wartość to

$$a = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 52,9 \text{ pm}. \quad (40.26)$$

Tak jak w przypadku innych funkcji falowych, również funkcja  $\psi(r)$  z równania (40.25) nie ma samoistnego znaczenia fizycznego. Znaczenie takie ma kwadrat funkcji falowej  $\psi^2(r)$ , który jest gęstością prawdopodobieństwa, czyli prawdopodobieństwem wykrycia elektronu przypadającym na jednostkę objętości. W szczególności  $\psi^2(r)dV$  jest prawdopodobieństwem wykrycia elektronu w dowolnym danym (nieskończonym małym) elemencie objętości  $dV$  odległym o  $r$  od środka atomu:

$$\begin{pmatrix} \text{prawdopodobieństwo wykrycia} \\ \text{elektronu w objętości } dV \\ \text{w odległości } r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{objętościowa gęstość} \\ \text{prawdopodobieństwa} \\ \psi^2(r) \text{ w odległości } r \end{pmatrix} (\text{objętość } dV). \quad (40.27)$$

Ponieważ gęstość prawdopodobieństwa  $\psi^2(r)$  zależy tylko od promienia  $r$ , rozsądnie jest wybrać jako element objętości objętość zawartą pomiędzy koncentrycznymi sferami o promieniach  $r$  i  $r + dr$ . Zatem wybieramy element objętości  $dV$

$$dV = (4\pi r^2)dr, \quad (40.28)$$

w którym  $4\pi r^2$  jest powierzchnią wewnętrznej sfery,  $dr$  zaś jest radialną odlegością pomiędzy obiema sferami. Następnie, zestawiając równania (40.25), (40.27) i (40.28) otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} \text{prawdopodobieństwo wykrycia} \\ \text{elektronu w objętości } dV \\ \text{w odległości } r \end{pmatrix} = \psi^2(r)dV = \frac{4}{a^3}e^{-2r/a}r^2dr. \quad (40.29)$$

Opisywanie prawdopodobieństwa wykrycia elektronu jest prostsze, jeśli zamiast objętościowej gęstości prawdopodobieństwa  $\psi^2(r)$  rozważamy **radialną gęstość prawdopodobieństwa**  $P(r)$ . Radialna gęstość prawdopodobieństwa  $P(r)$  jest taką liniową gęstością prawdopodobieństwa, że:

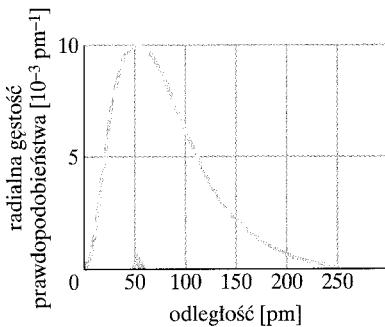
$$\begin{pmatrix} \text{radialna gęstość} \\ \text{prawdopodobieństwa} \\ P(r) \text{ w odległości } r \end{pmatrix} (\text{odległość } dr) = \begin{pmatrix} \text{objętościowa gęstość} \\ \text{prawdopodobieństwa} \\ \psi^2(r) \text{ w odległości } r \end{pmatrix} (\text{objętość } dV),$$

czyli

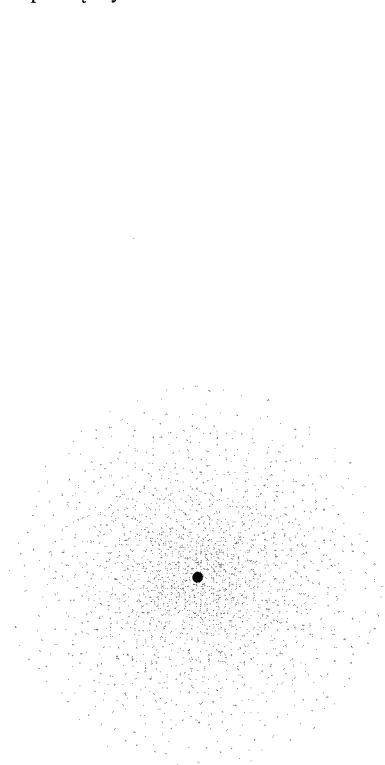
$$P(r)dr = \psi^2(r)dV. \quad (40.30)$$

Podstawiając wartość prawdopodobieństwa  $\psi^2(r)dV$  z równania (40.29), otrzymujemy

$$P(r) = \frac{4}{a^3}r^2e^{-2r/a} \quad (\text{radialna gęstość prawdopodobieństwa, stan podstawowy atomu wodoru}). \quad (40.31)$$



Rys. 40.18. Rozkład radialnej gęstości prawdopodobieństwa  $P(r)$  dla stanu podstawowego atomu wodoru. Trójkąt został umieszczony w odległości jednego promienia Bohra od początku układu współrzędnych. Początek układu współrzędnych oznacza środek atomu



Rys. 40.19. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa  $\psi^2(x)$ , a nie radialnej gęstości prawdopodobieństwa  $P(r)$  dla stanu podstawowego atomu wodoru. Gęstość kropek maleje wykładniczo ze wzrostem odległości od jądra, które jest tu oznaczone czerwonym punktem. Wykresy takie mogą pomóc w wyobrażeniu sobie „chmury elektronowej” atomu

Na rysunku 40.18 przedstawiono wykres funkcji  $P(r)$ . Pole pod wykresem jest równe jedności, a więc

$$\int_0^\infty P(r)dr = 1. \quad (40.32)$$

Równanie powyższe stwierdza po prostu, że w normalnym atomie wodoru elektron musi być gdzieś w przestrzeni otaczającej jądro.

Trójkąt na osi odciętych na rysunku 40.18 wskazuje odległość jednego promienia Bohra od początku układu współrzędnych. Wykres mówi nam, że w stanie podstawowym atomu wodoru elektron można najprawdopodobniej znaleźć w okolicy tej odległości od środka atomu.

Rysunek 40.18 stoi w oczywistej sprzeczności z popularnym poglądem, że elektrony w atomach poruszają się po dobrze określonych orbitach tak jak planety poruszające się wokół Słońca. *Ten popularny obraz, choć dobrze znany, jest nieprawdziwy.* Na rysunku 40.18 pokazano wszystko, czego możemy się kiedykolwiek dowiedzieć o położeniu elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru. Właściwym pytaniem nie jest „Kiedy elektron pojawi się w tym a tym punkcie?”, ale „Jaka jest szansa, że elektron zostanie wykryty w małej objętości wokół tego a tego punktu?” Na rysunku 40.19 przedstawiony jest rozkład gęstości prawdopodobieństwa, ukazujący probabilistyczną naturę funkcji falowej. Wykres taki pomoże ci wyobrazić sobie atom wodoru w stanie podstawowym. Pomyśl o atomie w tym stanie jak o włochatej piłce bez ostro określonych granic i bez śladu orbit.

Początkowo nie jest łatwo wyobrazić sobie cząstki subatomowe w taki probabilistyczny sposób. Trudność leży w naszej naturalnej tendencji do traktowania elektronu jako czegoś w rodzaju małego groszku znajdującego się w pewnych chwilach w pewnych miejscach i podążającego po dobrze określonych orbitach. Elektrony i inne cząstki subatomowe po prostu nie zachowują się w taki sposób.

Energia stanu podstawowego obliczona po podstawieniu do równania (40.24) wartości  $n = 1$  równa jest  $E_1 = -13,6$  eV. Funkcję falową opisaną równaniem (40.25) uzyskamy, rozwiązyując równanie Schrödingera dla tej wartości energii. Właściwie równanie Schrödingera można rozwiązać dla dowolnej wartości energii, a więc powiedzmy  $E = -11,6$  lub  $-14,3$  eV. Mogliby to sugerować, że energie stanów atomu wodoru nie są skwantowane — ale my wiemy, że są.

Zagadka ta została rozwiązana, gdy badacze zrozumieli, że takie rozwiązania równania Schrödingera nie są dopuszczalne fizycznie. W granicy  $r \rightarrow \infty$  rozwiązania takie przyjmują wartości nieskończone. Takie „funkcje falowe” mówią nam, że elektron z większym prawdopodobieństwem będzie przebywał daleko od jądra niż w jego pobliżu, a to nie ma sensu. Takich niepotrzebnych rozwiązań pozbywamy się, nakładając tak zwany **warunek brzegowy**, tzn. zgadzamy się akceptować tylko takie rozwiązania równania Schrödingera, dla których w granicy  $r \rightarrow \infty$  wartość funkcji  $\psi(r) \rightarrow 0$ , tak więc zgadzamy się zajmować tylko elektronami *związanymi*. Rozwiązania równania Schrödingera, na które nałożono takie ograniczenie, tworzą dyskretny zbiór ze skwantowanymi energiami danymi równaniem (40.24).

## Przykład 40.6

a) Rozważmy przejście, którym odpowiadają linie serii Lymana w atomie wodoru. Ile wynosi długość fali linii, dla której fotony mają najmniejszą energię?

### ROZWIĄZANIE:

○ 1. W przypadku każdej serii przejście o najmniejszej energii to przejście pomiędzy wspólnym poziomem dla tej serii i poziomem leżącym bezpośrednio nad nim.

○ 2. W przypadku serii Lymana tym wspólnym poziomem jest poziom  $n = 1$  (rys. 40.16). Tak więc przejście o najmniejszej energii w serii Lymana to przejście z poziomu  $n = 2$  na  $n = 1$ . Z równania (40.24) wynika, że ta różnica energii jest równa

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -13,6 \text{ eV} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 10,2 \text{ eV}.$$

Następnie z równania (40.6) ( $\Delta E = h\nu$ ) z częstotliwością  $\nu$  wyrażoną jako  $c/\lambda$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{(10,2 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} \\ &= 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 122 \text{ nm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Światło o takiej długości fali leży w nadfioletowym zakresie widma.

b) Ile wynosi długość fali odpowiadająca granicy serii Lymana?

### ROZWIĄZANIE:

○ Granica serii odpowiada przejściu pomiędzy wspólnym poziomem danej serii (dla serii Lymana  $n = 1$ ) i poziomem w granicy  $n = \infty$ . Z równania (40.24) wynika, że różnica energii dla tego przejścia wynosi

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{\infty} - E_1 = -13,6 \text{ eV} \left( \frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1^2} \right) \\ &= -(13,6 \text{ eV})(0 - 1) = 13,6 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Odpowiednia długość fali obliczona jak w punkcie (a) wynosi

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{(13,6 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} \\ &= 9,14 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 91,4 \text{ nm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Światło o takiej długości fali należy także do nadfioletowego zakresu widma.

## Przykład 40.7

Pokaż, że radialna gęstość prawdopodobieństwa dla stanu podstawowego atomu wodoru ma maksimum dla  $r = a$ .

### ROZWIĄZANIE:

○ 1. Radialna gęstość prawdopodobieństwa dla stanu podstawowego atomu wodoru dana jest równaniem (40.31),

$$P(r) = \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a}.$$

○ 2. Aby znaleźć maksimum (lub minimum) dowolnej funkcji, musimy ją zróżniczkować i wynik przyrównać do zera. Różniczkując radialną gęstość prawdopodobieństwa  $P(r)$  względem  $r$ , przy

wykorzystaniu pochodnej 7 z dodatku E i reguły różniczkowania iloczynu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{4}{a^3} r^2 \left( \frac{-2}{a} \right) e^{-2r/a} + \frac{4}{a^3} 2r e^{-2r/a} \\ &= \frac{8r}{a^3} e^{-2r/a} - \frac{8r^2}{a^4} e^{-2r/a} \\ &= \frac{8}{a^4} r(a - r) e^{-2r/a}. \end{aligned}$$

Przyrównując prawą stronę do zera, otrzymujemy równanie, którego rozwiązaniem jest  $r = a$ . Innymi słowy  $dP/dr = 0$ , kiedy  $r = a$ . (Zauważ, że  $dP/dr = 0$  także dla  $r = 0$  i  $r = \infty$ . Jednak warunki te odpowiadają minimum radialnej gęstości prawdopodobieństwa  $P(r)$ , jak to widać na rysunku 40.18).

dla której  $p(r) = 0,9$ . Podstawiając tę wartość do wyrażenia na prawdopodobieństwo  $p(r)$ , otrzymujemy

$$0,90 = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

czyli

$$10e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) = 1.$$

Musimy znaleźć wartość  $x$  spełniającą powyższe równanie. Nie da się z tego równania bezpośrednio wyznaczyć wartości  $x$ , ale korzystając z programowalnego kalkulatora lub komputera, otrzymamy  $x = 2,66$ . Oznacza to, że promień sfery, wewnętrznej której elektron może zostać wykryty z prawdopodobieństwem 0,9, równy jest  $2,66a$ . Innymi słowy oznacza to, że przebywa on wewnątrz tej sfery przez 90% czasu. Zaznacz to położenie na poziomej osi na rysunku 40.18 — czy ta odpowiedź jest sensowna?

## Przykład 40.8

Można pokazać, że prawdopodobieństwo  $p(r)$  znalezienia elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru wewnątrz sfery o promieniu  $r$  dane jest wzorem

$$p(r) = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

w którym bezwymiarowa wielkość  $x$  równa jest  $r/a$ . Znajdź promień  $r$ , dla którego prawdopodobieństwo  $p(r) = 0,9$ .

### ROZWIĄZANIE:

○ Nie ma pewności, że elektron zostanie wykryty w jakiejś konkretnej odległości  $r$  od środka atomu wodoru. Jednak dla danej funkcji można obliczyć prawdopodobieństwo wykrycia elektronu gdzieś wewnątrz sfery o promieniu  $r$ . Szukamy promienia sfery,

Liczby kwantowe stanów atomu wodoru o liczbie kwantowej  $n = 2$

$n$	$l$	$m_l$
2	0	0
2	1	+1
2	1	0
2	1	-1

## Stany atomu wodoru o liczbie kwantowej $n = 2$

Zgodnie z warunkami przedstawionymi w tabeli 40.2 istnieją cztery stany atomu wodoru o głównej liczbie kwantowej  $n = 2$ . Ich liczby kwantowe przedstawione są w tabeli 40.3. Rozważmy najpierw stan o liczbach kwantowych  $n = 2$  i  $l = m_l = 0$ . Gęstość prawdopodobieństwa dla tego stanu przedstawiona jest na rysunku 40.20. Zauważ, że rozkład ten, tak jak rozkład dla stanu podstawowego pokazany na rysunku 40.19, ma symetrię sferyczną. A więc w układzie współrzędnych sferycznych, zdefiniowanym na rysunku 40.21, gęstość prawdopodobieństwa zależy tylko od współrzędnej radialnej  $r$  i nie zależy od współrzędnych kątowych  $\theta$  (kąta biegunowego) i  $\phi$  (kąta azymutalnego).

Okazuje się, że funkcje falowe wszystkich stanów kwantowych o  $l = 0$  mają symetrię sferyczną. Jest to rozsądne, gdyż orbitalna liczba kwantowa  $l$  jest miarą momentu pędu związanego z danym stanem. Jeśli  $l = 0$ , to moment pędu jest także równy zeru, co oznacza, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla takiego stanu nie ma wyróżnionej osi symetrii.

Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa  $\psi^2(r)$  dla trzech stanów o liczbach kwantowych  $n = 2$  i  $l = 1$  pokazano na rysunku 40.22. Gęstości prawdopodobieństwa dla stanów  $m_l = +1$  i  $m_l = -1$  są identyczne. Mimo że rozkłady te są symetryczne względem osi  $z$ , to nie mają przy tym symetrii sferycznej. Tak więc gęstości prawdopodobieństwa dla tych trzech stanów są funkcjami zarówno współrzędnej radialnej  $r$ , jak i współrzędnej kątowej  $\theta$ .

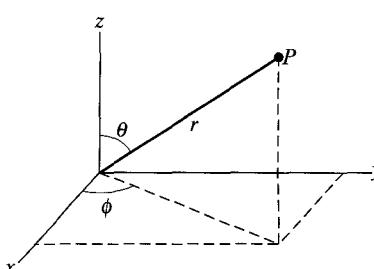
Pojawia się pytanie: co w atomie wodoru powoduje powstanie osi symetrii tak dobrze widocznej na rysunku 40.22? Odpowiedź brzmi: *absolutnie nic*.

Zagadkę tę rozwiązujemy natychmiast, jeśli uświadomimy sobie, że wszystkie trzy stany pokazane na rysunku 40.22 mają jednakową energię. Przypomnijmy sobie, że energia stanu dana równaniem (40.24) zależy wyłącznie od głównej liczby kwantowej  $n$  i jest niezależna od  $l$  i  $m_l$ . W istocie w przypadku izolowanego atomu wodoru nie ma sposobu na doświadczalne rozróżnienie trzech stanów z rysunku 40.22.

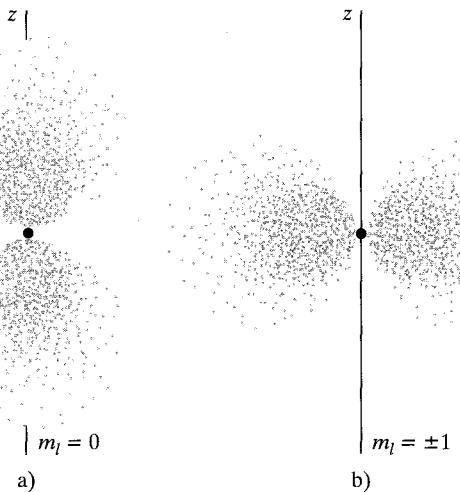
Jeśli dodamy gęstości prawdopodobieństwa dla trzech stanów o  $n = 2$  i  $l = 1$ , to sumaryczna gęstość prawdopodobieństwa będzie miała symetrię sferyczną, a więc nie będzie mieć żadnej wyróżnionej osi. Można zatem myśleć, że elektron spędza jedną trzecią czasu w każdym z trzech stanów z rysunku 40.22. Ważona suma ich trzech niezależnych funkcji falowych definiuje w takim wypadku symetryczną **podpowłokę** o liczbach kwantowych  $n = 2$ ,  $l = 1$ . Poszczególne stany ujawnią swój niezależny byt tylko w przypadku, gdy umieścimy atom wodoru w zewnętrznym polu elektrycznym lub magnetycznym. Wówczas te trzy stany podpowłoki o  $n = 2$ ,  $l = 1$  będą miały różne energie, a kierunek przyłożonego pola określi niezbędną oś symetrii.

Stan o  $n = 2$ ,  $l = 0$ , którego gęstość prawdopodobieństwa pokazana jest na rysunku 40.20, również ma taką samą energię jak każdy z trzech stanów przedstawionych na rysunku 40.22. Wszystkie cztery stany, których liczby kwantowe wypisane są w tabeli 40.3, tworzą **powłokę** o symetrii sferycznej, charakteryzującą się jedną liczbą kwantową  $n$ . Znaczenie powłok i podpowłok stanie się jasne w rozdziale 41, w którym omawiamy atomy z więcej niż jednym elektronem.

Rys. 40.20. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa  $\psi^2(r)$  dla atomu wodoru w stanie o liczbach kwantowych  $n = 2$ ,  $l = 0$  i  $m_l = 0$ . Rozkład ma symetrię sferyczną, a środkiem symetrii jest jądro. Pusty pierścień widoczny na rysunku odpowiada sferze, na której gęstość prawdopodobieństwa  $\psi^2(r) = 0$



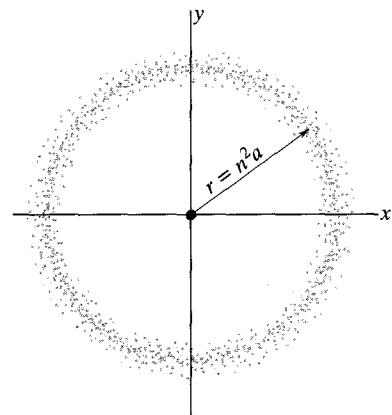
Rys. 40.21. Związek pomiędzy współrzędnymi prostokątnymi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a współrzędnymi sferycznymi  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Współrzędne sferyczne bardziej nadają się do opisu układów o symetrii sferycznej, takich jak atom wodoru



**Rys. 40.22.** Rozkłady gęstości prawdopodobieństwa  $\psi^2(r, \theta)$  dla atomu wodoru w stanach o liczbach kwantowych  $n = 2, l = 1$ . a) Rozkład dla stanu o liczbie kwantowej  $m_l = 0$ . b) Rozkład dla stanów o liczbach kwantowych  $m_l = +1$  i  $m_l = -1$ . Oba rozkłady pokazują, że gęstość prawdopodobieństwa ma symetrię osiową, a osią symetrii jest osią  $z$ .

Aby uzupełnić nasz obraz atomu wodoru, przedstawiamy na rysunku 40.23 rozkład radialnej gęstości prawdopodobieństwa dla stanu atomu wodoru o stosunkowo dużej liczbie kwantowej ( $n = 45$ ) i największej orbitalnej liczbie kwantowej dopuszczanej przez ograniczenia z tabeli 40.2 ( $l = n - 1 = 44$ ). Rozkład gęstości prawdopodobieństwa ma postać pierścienia symetrycznego względem osi  $z$  i leżącego bardzo blisko płaszczyzny  $xy$ . Średni promień tego pierścienia jest równy  $n^2a$ , gdzie  $a$  jest promieniem Bohra. Ten średni promień jest ponad 2000 razy większy niż efektywny promień atomu wodoru w stanie podstawowym.

Rysunek 40.23 sugeruje istnienie orbity elektronu w sensie fizyki klasycznej. Zatem mamy do czynienia z kolejną ilustracją zasady odpowiedniości Bohra. Kiedy liczby kwantowe przybierają duże wartości, przewidywania mechaniki kwantowej gładko przechodzą w przewidywanie fizyki klasycznej. Wyobraź sobie, jak wyglądałby rozkład gęstości prawdopodobieństwa podobny do tego z rysunku 40.23 w przypadku *naprawdę* dużych wartości liczb kwantowych  $n$  i  $l$ , a więc powiedzmy dla  $n = 1000$  i  $l = 999$ .



**Rys. 40.23.** Rozkład radialnej gęstości prawdopodobieństwa  $P(r)$  dla atomu wodoru w stanie kwantowym o stosunkowo dużej głównej liczbie kwantowej  $n = 45$  i orbitalnej liczbie kwantowej  $l = n - 1 = 44$ . Kropki znajdują się w pobliżu płaszczyzny  $xy$ , pierścień kropek sugeruje istnienie klasycznej orbity elektronowej.

## Podsumowanie

**Reguła lokalizacji przestrzennej** Reguła lokalizacji ma zastosowanie do fal wszelkiego typu, w tym fal w linie i fal materii znanych z fizyki kwantowej. Stwierdza ona, że lokalizacja prowadzi do kwantyzacji, a więc do istnienia dyskretnych stanów o dyskretnych energiach.

**Elektron w nieskończonej studni potencjału** Nieskończona studnia potencjału służy do lokalizowania elektronu. Z reguły lokalizacji spodziewamy się, że fala materii wyobrażająca uwięziony elektron może istnieć tylko w pewnych określonych dyskretnych stanach. W przypadku jednowymiarowej nieskończonej studni po-

tencjału energie związane z tymi *stanami kwantowymi* wynoszą

$$E_n = \left( \frac{\hbar^2}{8mL^2} \right) n^2, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (40.4)$$

gdzie  $L$  jest szerokością studni, a  $n$  — **liczbą kwantową**. Jeśli elektron ma zmienić swój stan z jednego na drugi, to jego energia musi się zmienić o  $\Delta E$ :

$$\Delta E = E_w - E_n, \quad (40.5)$$

gdzie  $E_w$  jest energią stanu wyższego,  $E_n$  zaś jest energią stanu niższego. Jeśli zmiana ta dokonuje się w wyniku absorpcji lub emisji fotonu, to energia tego fotonu musi być równa

$$\hbar v = \Delta E = E_w - E_n. \quad (40.6)$$

**Funkcje falowe** związane ze stanami kwantowymi w nieskończonej studni potencjału mają postać

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.10)$$

**Gęstość prawdopodobieństwa**  $\psi_n^2(x)$  dla dozwolonego stanu kwantowego ma następujące znaczenie fizyczne:  $\psi_n^2(x)dx$  jest prawdopodobieństwem wykrycia elektronu w przedziale  $x, x+dx$ . Dla elektronu w nieskończonej studni potencjału gęstości prawdopodobieństwa wynoszą

$$\psi_n^2(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.12)$$

Dla dużych liczb kwantowych  $n$  elektron będzie dążył do zachowania w sposób klasyczny, a więc będzie zajmował wszystkie części studni kwantowej z jednakowym prawdopodobieństwem. Fakt ten prowadzi do **zasady odpowiedniości**: Dla dostatecznie dużych liczb kwantowych przewidywanie fizyki kwantowej przechodzi w sposób ciągły w przewidywania fizyki klasycznej.

**Normalizacja i energia stanu podstawowego** Amplitudę  $A^2$  występującą w równaniu (40.12) można znaleźć z **równania normalizacyjnego**,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)dx = 1, \quad (40.14)$$

które zapewnia, że elektron musi znajdować się *gdzieś* wewnątrz studni, ponieważ prawdopodobieństwo równe 1 odpowiada pewności.

Z równania (40.4) widać, że najmniejszą dozwoloną energię elektronu nie jest zero, ale energia odpowiadająca liczbie kwantowej  $n = 1$ . Ta najniższa energia to **energia stanu podstawowego** elektronu w studni potencjału.

**Elektron w skończonej studni potencjału** Skończona studnia potencjału to taka, w której energia potencjalna elektronu wewnątrz studni jest mniejsza o skończoną wartość  $U_0$  od energii elektronu poza studnią. Funkcja falowa elektronu uwięzionego w takiej studni wnika w jej ściany.

**Dwu- i trójwymiarowe pułapki elektronów** Skwantowane energie elektronu uwięzionego w dwuwymiarowej nieskończonej studni potencjału o postaci prostokątnej zagrody wynoszą

$$E_{nx,ny} = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right), \quad (40.20)$$

gdzie  $n_x$  jest liczbą kwantową, dla której fala materii elektronu odpowiada szerokości studni  $L_x$ ,  $n_y$  zaś jest liczbą kwantową, dla której fala materii elektronu odpowiada szerokości studni  $L_y$ . Podobnie energie elektronu uwięzionego w trójwymiarowej nieskończonej studni potencjału o postaci prostopadłościanu — to

$$E_{nx,ny,nz} = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right). \quad (40.21)$$

W tym przypadku  $n_z$  jest trzecią liczbą kwantową, dla której fala materii odpowiada szerokości studni  $L_z$ .

**Atom wodoru** Energia potencjalna atomu wodoru wynosi:

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (40.23)$$

Energie stanów kwantowych atomu wodoru znajdują się, rozwiązując trójwymiarowe równanie Schrödingera. Wynoszą one

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (40.24)$$

gdzie  $n$  jest **główną liczbą kwantową**. Do pełnego opisu stanów atomu wodoru potrzebne są trzy liczby kwantowe. Ich nazwy i dozwolone wartości przedstawione zostały w tabeli 40.2.

**Radialna gęstość prawdopodobieństwa**  $P(r)$  dla stanu atomu wodoru jest zdefiniowana tak, że  $P(r)dr$  jest prawdopodobieństwem wykrycia elektronu pomiędzy dwiema koncentrycznymi sferami o środkach w jądrze atomu, których promienie wynoszą  $r$  i  $r+dr$ . W przypadku stanu podstawowego atomu wodoru

$$P(r) = \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a}, \quad (40.31)$$

gdzie  $a$ , **promień Bohra**, jest jednostką długości o wartości 52,9 pm. Na rysunku 40.18 pokazano wykres radialnej gęstości prawdopodobieństwa  $P(r)$  dla stanu podstawowego.

Na rysunkach 40.20 i 40.22 pokazano gęstości prawdopodobieństwa (a nie *radialne* gęstości prawdopodobieństwa) dla czterech stanów atomu wodoru o liczbie kwantowej  $n = 2$ . Rozkład przedstawiony na rysunku 40.20 ( $n = 2, l = 0, m_l = 0$ ) ma symetrię sferyczną. Rozkłady z rysunku 40.22 ( $n = 2, l = 1, m_l = 0, +1, -1$ ) są symetryczne względem osi  $z$ , jednak ich suma ma symetrię sferyczną.

Wszystkie cztery stany o liczbie kwantowej  $n = 2$  mają jednakową energię i można je traktować jako **powłokę**, określana jako powłoka  $n = 2$ . Trzy stany z rysunku 40.22 można uważać łącznie za **podpowłokę** o liczbach kwantowych  $n = 2, l = 1$ . Czterech stanów  $n = 2$  nie można rozdzielić doświadczalnie, chyba że atom wodoru umieścimy w polu elektrycznym lub magnetycznym, co pozwoli na ustalenie osi symetrii.

## Pytania

1. Czy po dwukrotnym zwiększeniu szerokości jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału:

- a) energia stanu podstawowego uwięzionego w niej elektronu zmieni się 4, 2,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  razy, czy też zmieni się w inny sposób?
- b) energie stanów wzbudzonych zmieniają się tyle samo razy co energia stanu podstawowego, czy też w inny sposób, zależny od ich liczb kwantowych?

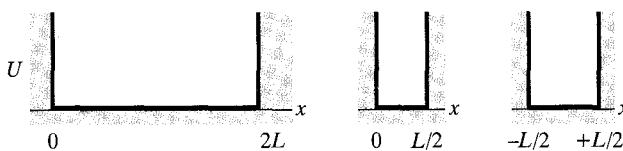
2. Trzy elektrony uwięzione są w trzech jednowymiarowych nieskończonych studniach potencjału o szerokościach: a) 50 pm, b) 200 pm, c) 100 pm. Uszereguj te elektrony zgodnie z energiami ich stanów podstawowych, zaczynając od największej.

3. Czy aby użyć wyidealizowanej pułapki z rysunku 40.1 do uwięzienia pozytonu, należałoby zmienić:

- a) geometrię pułapki,
- b) potencjał elektryczny środkowego cylindra,
- c) potencjały elektryczne dwóch skrajnych cylindrów? (Pozyton ma taką samą masę jak elektron, ale jest dodatnio naładowany).

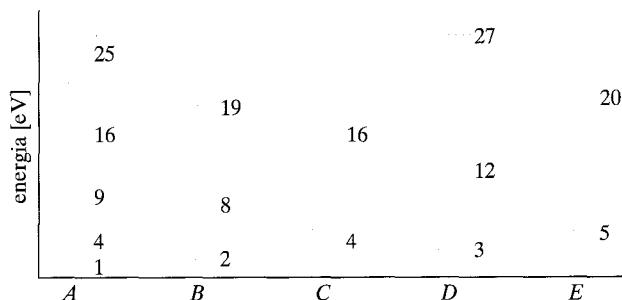
4. Elektron uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału znajduje się w stanie o liczbie kwantowej  $n = 17$ . W ilu punktach jego fala materii ma: a) gęstość równą zeru, b) maksymalną gęstość prawdopodobieństwa?

5. Na rysunku 40.24 przedstawiono trzy nieskończone studnie potencjału ograniczające ruch elektronu wzdłuż osi  $x$ . Wyznacz funkcje falowe  $\psi$  dla stanu podstawowego elektronu uwięzionego w każdej z nich, nie wykonując obliczeń.



Rys. 40.24. Pytanie 5

6. Na rysunku 40.25 przedstawiono najniższe poziomy energetyczne (wartości wyrażone w elektronowoltach) dla pięciu przypadków, w których elektron uwięziony jest w jednowymiarowej



Rys. 40.25. Pytanie 6

nieskończonej studni potencjału. Elektron w studniach  $B, C, D$  i  $E$  znajduje się w stanie podstawowym. Elektron w studni  $A$  wzbudzimy do czwartego stanu wzbudzonego (o energii 25 eV). Elektron ten może następnie powrócić do stanu podstawowego, emitując jeden lub więcej fotonów, odpowiadających jednemu przejściu o dużej energii lub kilku przejściami o energiach małych. Które z tych fotonów mogą zostać pochłonięte przez elektrony znajdujące się (w stanie podstawowym) w pozostałych czterech studniach? Do których stanów zostaną one wzbudzone?

7. Czy energia stanu podstawowego protonu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału jest większa, mniejsza, czy taka sama jak energia elektronu uwięzionego w takiej samej studni?

8. Proton i elektron uwięzione są w jednakowych jednowymiarowych studniach potencjału. Obie cząstki znajdują się w stanie podstawowym. Czy prawdopodobieństwo wykrycia protonu w środku studni jest większe, mniejsze, czy też równe prawdopodobieństwu wykrycia tam elektronu?

9. Chcemy tak zmodyfikować studnię potencjału z rysunku 40.7, aby umożliwić uwięzionemu w niej elektronowi istnienie w więcej niż trzech stanach kwantowych. Czy należy w tym celu: a) poszerzyć, czy zwęzić, b) pogłębić, czy spłycić tę studnię?

10. Skończona studnia potencjału jest na tyle głęboka, że istnieje w niej stan o  $n = 4$ . Ile punktów o a) zerowej gęstości prawdopodobieństwa, b) maksymalnej gęstości prawdopodobieństwa ma fala materii elektronu znajdującego się w tym stanie?

11. Przyglądając się rysunkowi 40.8, uszereguj liczby kwantowe trzech pokazanych tam stanów kwantowych zgodnie z malejącą długością fali de Broglie'a.

12. Elektron uwięziony w skończonej studni potencjału, takiej jak ta z rysunku 40.7, znajduje się w stanie o najniższej energii. Czy jego a) długość fali de Broglie'a, b) pęd i c) energia będą większe, czy mniejsze niż w przypadku, gdyby studnia kwantowa była nieskończona, tak jak na rysunku 40.2?

13. W poniżej tabeli zaproponowano zestawy liczb kwantowych dla pięciu stanów atomu wodoru. Które z nich nie są możliwe?

	$n$	$l$	$m_l$
a)	3	2	0
b)	2	3	1
c)	4	3	-4
d)	5	5	0
e)	5	3	-2

14. W 1996 r. fizycy wytworzyli w warunkach laboratoryjnych atomy antywodoru, korzystając z akceleratora cząstek elementarnych. Atomy takie składają się z pozitonu poruszającego się w polu elektrycznym antyprotonu. Poziton ma taką samą masę jak elektron, ale ładunek przeciwnego znaku. Antyproton ma taką samą masę jak proton, ale ładunek przeciwnego znaku. Czy oczekiwali byście, że widmo antywodoru jest takie samo jak widmo zwykłego wodoru, czy też inne?

15. a) Z diagramu poziomów energetycznych atomu wodoru, przedstawionego na rysunku 40.16, można pokazać, że energia fo-

tonu drugiej linii widmowej serii Lymana jest równa sumie energii fotonów dwóch innych linii. Jakie to linie?

b) Energia fotonu drugiej linii widmowej serii Lymana jest także równa różnicy pomiędzy energiami fotonów dwóch innych linii. Jakie to linie?

16. Atom wodoru znajduje się w trzecim stanie wzbudzonym. Do jakiego stanu (podaj liczbę kwantową  $n$ ) powinien on przejść, aby:

- wyemitować światło o najdłuższej z możliwych długości fal?
- wyemitować światło o najkrótszej z możliwych długości fal?
- pochłonąć światło o najdłuższej z możliwych długości fal?

## Zadania

www Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 40.3 Energia elektronu w pułapce

1. Ile wynosi energia stanu podstawowego: a) elektronu, b) protonu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości 100 pm?

2. Ile razy należy zmienić szerokość nieskończonej studni potencjału, aby energia stanu podstawowego uwięzionego w niej elektronu zmniejszyła się dwa razy?

3. Założmy, że jądro atomowe jest równoważne jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L = 1,4 \cdot 10^{-14}$  m, co jest typowym rozmiarem jądra. Ile wynosiłaby energia stanu podstawowego elektronu uwięzionego w takiej studni potencjału? (Uwaga: Jądra nie zawierają elektronów).

4. Jaka musi być szerokość jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału, żeby energia elektronu w stanie o  $n = 3$  wynosiła 4,7 eV?

5. Ile wynosi energia protonu w stanie podstawowym, jeśli jest on zlokalizowany w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości 100 pm?

6. Energia stanu podstawowego elektronu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału wynosi 2,6 eV. Jak zmieni się ta energia, jeśli szerokość studni zostanie dwukrotnie powiększona?

7. Elektron uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości 250 pm znajduje się w stanie podstawowym. Ile wynosi energia, którą musi pochłonąć ten elektron, aby przejść do stanu o  $n = 4$ ?

8 Elektron jest uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału. Pomiędzy którą parą kolejnych poziomów energetycznych (jeśli taka istnieje) różnica energii jest równa energii elektronu a) w stanie o  $n = 5$  i b) w stanie o  $n = 6$ ?

9. Elektron uwięziony jest w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału. Pokaż, że różnica energii  $\Delta E$  pomiędzy jego stanami kwantowymi o  $n = 1$  i  $n = 2$  równa jest  $(h^2/2mL^2)(n+1)$ , gdzie  $L$  jest szerokością studni.

10. Elektron uwięziony jest w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału. a) Pomiędzy którą parą kolejnych poziomów energetycznych (jeśli taka istnieje) różnica energii będzie trzy razy większa niż różnica energii pomiędzy poziomami o  $n = 3$  i  $n = 4$ ? b) W przypadku której pary sąsiednich poziomów (jeśli taka istnieje) różnica ta będzie dwa razy większa?

11. Elektron uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości 250 pm znajduje się w stanie podstawowym. Oblicz długości czterech najdłuższych fal światła, które może wzbudzić elektron ze stanu podstawowego w procesie absorpcji jednofotonowej.

12. Przypuśćmy, że elektron uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości 250 pm został przeniesiony z pierwszego stanu wzbudzonego do trzeciego stanu wzbudzonego. a) Wyraź w elektronowoltach energię potrzebną do takiego przejścia. Jeśli następnie elektron przejdzie do niższego stanu energetycznego, emittując przy tym światło, to b) jakie mogą być długości fal tego światła? i c) na ile sposobów i jakich może być emitowane to światło? d) Przedstaw na diagramie poziomów energetycznych różne możliwe sposoby, w jakie elektron może utracić energię.

13. Elektron jest uwięziony w wąskiej odpompowanej rurze o długości 3,0 m. Rura ta działa jak jednowymiarowa studnia potencjału. a) Wyraź w elektronowoltach różnicę energii pomiędzy stanem podstawowym i pierwszym stanem wzbudzonym elektronu w tej rurze. b) Dla jakiej liczby kwantowej  $n$  różnica energii pomiędzy kolejnymi poziomami energetycznymi wynosiłaby 1,0 eV,

co jest mierzalne w odróżnieniu od wyniku z punktu (a)? c) Ile wynosiłaby energia elektronu w tym stanie i d) czy należałoby go traktować relatywistycznie?

#### 40.4 Funkcje falowe elektronu w pułapce

14. Elektron uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$  został przeniesiony ze stanu podstawowego do pierwszego stanu wzbudzonego. a) Czy spowoduje to wzrost, spadek, czy pozostanie bez wpływu na prawdopodobieństwo wykrycia elektronu wewnątrz małego przedziału na osi  $x$  znajdującego się a) w środku studni i b) przy jednej ze ścian tej studni?

15. Niech  $\Delta E_{\text{kol}}$  będzie różnicą energii pomiędzy dwoma kolejnymi poziomami energetycznymi elektronu uwięzionego w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału. Niech  $E$  będzie energią jednego z tych poziomów. a) Pokaż, że stosunek  $\Delta E_{\text{kol}}/E$  dla dużych wartości liczby kwantowej  $n$  dąży do wartości  $2/n$ . Czy w granicy  $n \rightarrow \infty$ : b)  $\Delta E_{\text{kol}}$ , c)  $E$ , d)  $\Delta E_{\text{kol}}/E$  dążą do zera? e) Co oznaczają powyższe wyniki w odniesieniu do zasady odpowiedniości?

16. W jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału z rysunku 40.2 uwięziona jest cząstka. Jakie jest prawdopodobieństwo wykrycia tej cząstki pomiędzy a)  $x = 0$  i  $x = 0,25L$ , b)  $x = 0,75L$  i  $x = L$  oraz c)  $x = 0,25L$  i  $x = 0,75L$ , jeśli cząstka ta znajduje się w stanie podstawowym?

17. Elektron uwięziony w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości 100 pm znajduje się w stanie podstawowym. Jakie jest prawdopodobieństwo wykrycia elektronu w przedziale o szerokości  $\Delta x = 5,0$  pm i środku w punkcie a)  $x = 25$  pm, b)  $x = 50$  pm i c)  $x = 90$  pm? (Wskazówka: Przedział  $\Delta x$  jest na tyle wąski, że można przyjąć, iż gęstość prawdopodobieństwa jest w nim stała).

#### 40.5 Elektron w skończonej studni

18. a) Pokaż, że poszczególne wyrazy w równaniu Schrödingera (równanie (40.18)) mają jednakowe wymiary. b) Jaka jest jednostka w układzie SI każdego z tych wyrazów?

19. Elektron w stanie o  $n = 2$  w skończonej studni potencjału z rysunku 40.7 pochłania z zewnętrznego źródła energię 400 eV. Ile wynosi energia kinetyczna tego elektronu po tej absorpcji, jeśli założyć, że elektron przemieścił się do obszaru  $x > L$ ?

20. Na rysunku 40.9 przedstawiono poziomy energetyczne elektronu uwięzionego w skończonej studni potencjału o głębokości 450 eV. Ile wynosi energia kinetyczna elektronu znajdującego się w stanie o  $n = 3$ ?

21. Tak jak to sugeruje rysunek 40.8, gęstość prawdopodobieństwa w obszarze  $x > L$  w skończonej studni potencjału z rysunku 40.7 zanika wykładniczo zgodnie z równaniem

$$\psi^2(x) = Ce^{-2kx},$$

gdzie  $C$  jest stałą. a) Pokaż, że funkcja falowa  $\psi(x)$ , jaką można wyznaczyć z tego równania, jest rozwiązaniem równania Schrödingera w jego jednowymiarowej postaci. b) Jaka musi być wartość  $k$ , aby była to prawda?

22. Tak jak to sugeruje rysunek 40.8, gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w obszarze  $0 < x < L$  w skończonej studni potencjału z rysunku 40.7 jest funkcją sinusoidalną o postaci

$$\psi^2(x) = B \sin^2 kx,$$

gdzie  $B$  jest stałą. a) Pokaż, że funkcja falowa  $\psi(x)$ , jaką można wyznaczyć z tego równania, jest rozwiązaniem równania Schrödingera w jego jednowymiarowej postaci. b) Jaka musi być wartość  $k$ , aby była to prawda?

23. Pokaż, że w obszarze  $x > L$  w skończonej studni potencjału z rysunku 40.7 funkcja  $\psi(x) = De^{2kx}$ , gdzie  $D$  jest stałą, a  $k$  jest dodatnie, jest rozwiązaniem równania Schrödingera w jego jednowymiarowej postaci. Na jakiej podstawie stwierdzamy, że takie rozwiązanie, choć dopuszczalne z punktu widzenia matematyki, nie jest dopuszczalne fizycznie?

#### 40.7 Dwu- i trójwymiarowe pułapki elektronów

24. W prostokątnej zagrodzie z rysunku 40.12, o wymiarach  $L_x = 800$  pm i  $L_y = 1600$  pm, umieszczono elektron. Oblicz w elektronowoltach energię stanu podstawowego tego elektronu.

25. W prostokątnym pudele z rysunku 40.13, o wymiarach  $L_x = 800$  pm,  $L_y = 1600$  pm i  $L_z = 400$  pm, umieszczono elektron. Oblicz w elektronowoltach energię stanu podstawowego tego elektronu.

26. W prostokątnej zagrodzie o wymiarach  $L_x = L$  i  $L_y = 2L$  znajduje się elektron. Jaką wielokrotnością  $h^2/8mL^2$ , gdzie  $m$  jest masą elektronu, jest: a) energia elektronu w stanie podstawowym, b) energia elektronu w pierwszym stanie wzbudzonym, c) energia najniższego stanu zdegenerowanego i d) różnica pomiędzy energią drugiego i trzeciego stanu wzbudzonego?

27. Oblicz częstości światła emitowanego lub pochłanianego przez elektron w przejściach pomiędzy pięcioma najniższymi poziomami energetycznymi w zadaniu 26. Odpowiedź wyraź jako wielokrotność  $h/8mL^2$ .

28. Elektron znajduje się w sześciennym pudle o wymiarach  $L_x = L_y = L_z = L$ . Jaką wielokrotnością  $h^2/8mL^2$ , gdzie  $m$  jest masą elektronu, jest: a) energia stanu podstawowego tego elektronu, b) energia jego drugiego stanu wzbudzonego i c) różnica pomiędzy energiami drugiego i trzeciego stanu wzbudzonego? Ile zdegenerowanych stanów ma energię d) pierwszego stanu wzbudzonego i e) piątego stanu wzbudzonego?

**29.** Wyznacz częstotliwości światła emitowanego lub pochłanianego przez elektron w przejściach pomiędzy pięcioma najniższymi poziomami energetycznymi w zadaniu 28. Odpowiedź wyraź jako wielokrotność  $h/8mL^2$ .

## 40.8 Atom wodoru

**30.** Sprawdź, że stała występująca w równaniu (40.24) jest równa 13,6 eV.

**31.** Atom (ale nie atom wodoru) pochłania foton światła o częstotliwości  $6,2 \cdot 10^{14}$  Hz. O ile zwiększy się energia tego atomu?

**32.** Atom (ale nie atom wodoru) pochłania foton światła o długości fali 375 nm i zaraz potem emitemuje foton światła o długości fali 580 nm. Jaka energia netto została pochłonięta przez atom w tym procesie?

**33.** Oblicz stosunek najmniejszej długości fali serii Balmera do najmniejszej długości fali serii Lymana.

**34.** a) Ile wynosi energia  $E$  elektronu w atomie wodoru, dla którego gęstość prawdopodobieństwa została pokazana na rysunku 40.20? b) Jaka minimalna energia jest potrzebna do wyrwania tego elektronu z atomu?

**35.** Ile wynosi: a) energia, b) pęd i c) długość fali fotonu emitowanego podczas przejścia atomu wodoru ze stanu o  $n = 3$  do stanu o  $n = 1$ ?

**36.** Rozwiąż przykład 40.6 dla serii Balmera atomu wodoru.

**37.** Neutron o energii kinetycznej 6,0 eV zderza się z pozostającym w spoczynku atomem wodoru w stanie podstawowym. Wyjaśnij, dlaczego takie zderzenie musi być sprężyste, czyli energia kinetyczna musi być w takim zderzeniu zachowana. (Wskazówka: Pokaż, że atom wodoru nie może w wyniku takiego zderzenia zostać wzbudzony).

**38.** Dla atomu wodoru w stanie podstawowym oblicz a) gęstość prawdopodobieństwa  $\psi^2(r)$  i b) radialną gęstość prawdopodobieństwa  $P(r)$  dla  $r = a$ , gdzie  $a$  jest promieniem Bohra.

**39.** Oblicz radialną gęstość prawdopodobieństwa  $P(r)$  dla atomu wodoru w stanie podstawowym w punktach: a)  $r = 0$ , b)  $r = a$  i c)  $r = 2a$ , gdzie  $a$  jest promieniem Bohra.

**40.** Atom wodoru został wzbudzony ze stanu podstawowego do stanu o  $n = 4$ . a) Ile energii musiał pochłonąć ten atom? b) Wyznacz różne energie fotonów, które mogą być emitowane, gdy atom wraca do stanu podstawowego, oraz narysuj je na diagramie poziomów energetycznych.

**41.** Jaką pracę należy wykonać, aby rozerwać elektron i proton tworzący atom wodoru, jeśli atom ten znajduje się początkowo w a) stanie podstawowym, b) stanie o  $n = 2$ ?

**42.** Atom wodoru, który znajdował się początkowo w spoczynku w stanie o  $n = 4$  przechodzi do stanu podstawowego, emitemując przy tym światło. Oblicz prędkość odrzuconego atomu wodoru.

**43.** Światło o długości fali 486,1 nm emitowane jest przez atom wodoru. a) Jakie przejście w atomie jest odpowiedzialne za to promieniowanie? b) Do jakiej serii należy ta linia?

**44.** W jakim zakresie długości fali znajdują się linie: a) serii Lymana, b) serii Balmera? (Każdy zakres zaczyna się od linii o największej długości fali, a kończy na granicy serii). c) W jakim zakresie zawarte są częstotliwości tych linii? Wyraź te odpowiedzi w terahercach ( $1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$ ).

**45.** Całkowita energia elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru wynosi  $-13,6 \text{ eV}$ . Ile wynosi a) energia kinetyczna i b) energia potencjalna elektronu znajdującego się w odległości jednego promienia Bohra od jądra atomowego?

**46.** a) Posługując się diagramem z rysunku 40.16, znajdź liczby kwantowe odpowiadające przejściu, dla którego długość fali emitowanego światła wynosi 121,6 nm. b) Do jakiej serii należy to przejście?

**47.** Atom wodoru w stanie, w którym *energia wiązania* (energia potrzebna do usunięcia elektronu) równa jest 0,85 eV przechodzi do pewnego stanu, dla którego *energia wzbudzenia* (różnica pomiędzy energią tego stanu i energią stanu podstawowego) wynosi 10,2 eV. a) Ile wynosi energia fotonu emitowanego w wyniku takiego procesu? b) Zidentyfikuj to przejście, korzystając z diagramu poziomów energetycznych z rysunku 40.16.

**48.** Sprawdź, że długości fali podane na rysunku 40.17 odpowiadają liniom widmowym serii Balmera z zakresu widzialnego.

**49.** Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru, w odległości od jądra większej niż promień Bohra? (Wskazówka: Patrz przykład 40.8). 

**50.** Atom wodoru emituje światło o długości fali 102,6 nm. Jakią są liczby kwantowe stanu początkowego i końcowego tego przejścia?

**51.** Równanie Schrödingera dla stanów atomu wodoru, dla których orbitalna liczba kwantowa  $l$  jest równa zeru, ma postać

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(r)]\psi = 0.$$

Sprawdź, że równanie (40.25), opisujące stan podstawowy atomu wodoru jest rozwiązaniem tego równania.

**52.** Oblicz prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru pomiędzy sferami o promieniach  $a$  i  $2a$ , gdzie  $a$  jest promieniem Bohra. (Wskazówka: Patrz przykład 40.8).

53. Sprawdź, że równanie (40.31) opisujące radialną gęstość prawdopodobieństwa dla stanu podstawowego atomu wodoru jest unormowane, czyli że

$$\int_0^{\infty} P(r) dr = 1.$$

54. a) Ile dopuszczalnych wartości orbitalnej liczby kwantowej  $l$  istnieje dla danej wartości głównej liczby kwantowej  $n$ ? Ile dopuszczalnych wartości magnetycznej liczby kwantowej  $m_l$  istnieje dla danej wartości liczby kwantowej  $l$ ? b) Ile dopuszczalnych wartości magnetycznej liczby kwantowej  $m_l$  istnieje dla danej wartości głównej liczby kwantowej  $n$ ?

55. Oblicz prawdopodobieństwo, że elektron w stanie podstawowym atomu wodoru można znaleźć pomiędzy dwiema sferami o promieniach  $r$  i  $r + \Delta r$ , jeśli a)  $r = 0,5a$  i  $\Delta r = 0,01a$  oraz b)  $r = 1,0a$  i  $\Delta r = 0,01a$ , gdzie  $a$  jest promieniem Bohra. (Wskazówka: Grubość  $\Delta r$  jest dostatecznie mała, aby przyjąć, że radialna gęstość prawdopodobieństwa pomiędzy  $r$  i  $\Delta r$  jest stała).

56. Dla jakiej wartości głównej liczby kwantowej  $n$  efektywny promień atomu wodoru, zdefiniowany na wykresie gęstości prawdopodobieństwa wynosiłby 1,0 mm? Przyjmij, że liczba kwantowa  $l$  przyjmuje swoją maksymalną wartość  $n - 1$ . (Wskazówka: Skorzystaj z rysunku 40.23).

57\*. W przykładzie 40.7 pokazaliśmy, że radialna gęstość prawdopodobieństwa dla stanu podstawowego atomu wodoru osiąga maksimum dla  $r = a$ , gdzie  $a$  jest promieniem Bohra. Pokaż, że średnia wartość  $r$  zdefiniowana jako

$$r_{\text{sr}} = \int P(r) r dr$$

wynosi  $1,5a$ . W powyższym wyrażeniu każda wartość  $r$  jest brana z wagą równą radialnej gęstości prawdopodobieństwa  $P(r)$ , z jakim występuje. Zauważ, że średnia wartość promienia  $r$  jest większa niż promień  $r$ , dla którego  $P(r)$  ma maksimum.

58\*. Funkcja falowa stanu kwantowego elektronu w atomie wodoru, o liczbach kwantowych  $n = 2$ ,  $l = m_l = 0$ , dla którego

rozkład gęstości prawdopodobieństwa pokazano na rysunku 40.20 ma postać

$$\psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} a^{-3/2} \left( 2 - \frac{r}{a} \right) e^{-r/2a},$$

gdzie  $a$  jest promieniem Bohra, indeksami zaś funkcji  $\psi(r)$  są liczby kwantowe  $n, l, m_l$ . a) Narysuj gęstość prawdopodobieństwa  $\psi_{200}^2(r)$  i pokaż, że twój rozkład jest zgodny z wynikiem pokazanym na rysunku 40.20. b) Pokaż analitycznie, że  $\psi_{200}^2(r)$  osiąga maksimum dla  $r = 4a$ . c) Wyznacz radialną gęstość prawdopodobieństwa  $P_{200}(r)$  dla tego stanu. d) Pokaż, że

$$\int_0^{\infty} P_{200}(r) dr = 1,$$

co oznacza, że funkcja falowa  $\psi_{200}(r)$  została unormowana poprawnie.

59. Funkcje falowe dla trzech stanów o liczbach kwantowych  $n = 2$ ,  $l = 1$  i  $m_l = 0, +1$  i  $-1$ , których rozkład gęstości prawdopodobieństwa pokazano na rysunku 40.22, mają następującą postać:

$$\psi_{210}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} a^{-3/2} \left( \frac{r}{a} \right) e^{-r/2a} \cos \theta,$$

$$\psi_{21+1}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} a^{-3/2} \left( \frac{r}{a} \right) e^{-r/2a} \sin \theta e^{i\phi},$$

$$\psi_{21-1}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} a^{-3/2} \left( \frac{r}{a} \right) e^{-r/2a} \sin \theta e^{-i\phi},$$

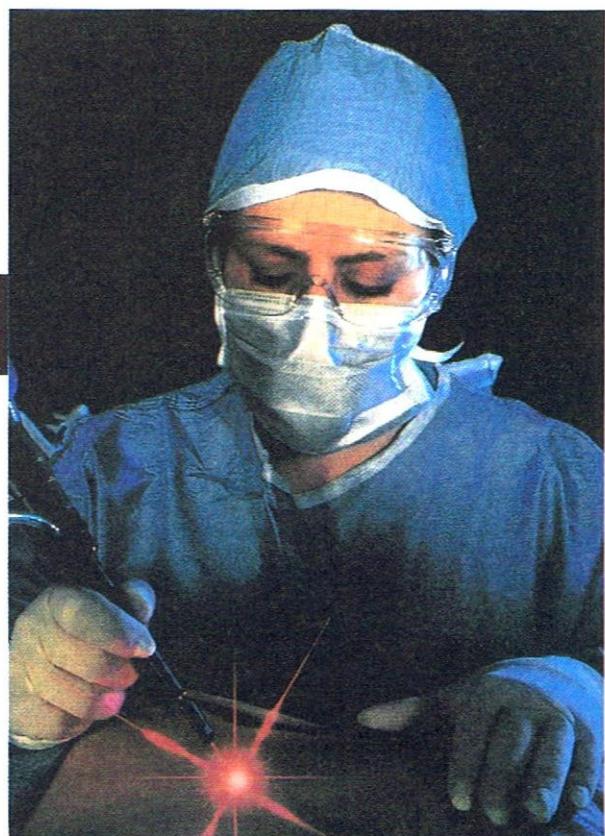
Indeksami funkcji  $\psi(r, \theta, \phi)$  są liczby kwantowe  $n, l, m_l$ , a kąty  $\theta$  i  $\phi$  zostały zdefiniowane na rysunku 40.21. Zauważ, że pierwsza funkcja falowa jest rzeczywista, podczas gdy pozostałe dwie są zespolone. a) Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa dla każdej z powyższych funkcji i pokaż, że w każdym wypadku zgadza się ona z rozkładem pokazanym na rysunku 40.22. b) Dodaj trzy gęstości prawdopodobieństwa otrzymane w punkcie (a) i pokaż, że ich suma ma symetrię sferyczną, a więc zależy tylko od współrzędnej radialnej  $r$ .

# 41 Wszystko o atomach

Lasery już wkrótce po ich wynalezieniu w latach sześćdziesiątych stały się nowymi źródłami światła stosowanymi w laboratoriach. Dzisiaj lasery są wszechobecne i wykorzystywane w tak różnych dziedzinach życia, jak transmisja danych i dźwięku, geodezja, spawanie i skanowanie cen w supermarketach. Fotografia poniżej pokazuje operację przeprowadzaną przy użyciu światła laserowego przesyłanego światłowodami. Światło z lasera, tak jak światło z każdego innego źródła, jest emitowane przez atomy.

**Co zatem szczególnego wyróżnia światło lasera?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 41.1. Atomy i świat wokół nas

We wczesnych latach dwudziestego wieku wielu uznanych naukowców wątpiło w samo istnienie atomów. Dzisiaj jednak każda dobrze poinformowana osoba wierzy, że one istnieją i są elementami, z których zbudowany jest świat materialny. Potrafimy dziś nawet chwytać pojedyncze atomy i je przesuwać. Tak zbudowano zagrodę kwantową pokazaną na stronie otwierającej rozdział 40. Łatwo policzysz 48 atomów żelaza składających się na okrąg pokazany na tym zdjęciu. Rejestrując emitowane światło, potrafimy nawet sfotografować pojedyncze atomy. Na przykład bladoniebieska kropka na rysunku 41.1 to światło emitowane przez pojedynczy jon baru uwięziony w pułapce w University of Washington.

## 41.2. Niektóre właściwości atomów

Moglibyś sądzić, że prawa fizyki atomu dalekie są od naszych codziennych doświadczeń. Pomyśl jednak o tym, jak następujące właściwości atomów — właściwości tak podstawowe, że rzadko przychodzi nam o nich myśleć — wpływają na sposób, w jaki żyjemy.

**Atomy są trwałe.** W zasadzie wszystkie atomy tworzące nasz realny świat istnieją bez zmian od miliardów lat. Jak wyglądałby świat, gdyby atomy ciągle zmieniały swą postać, na przykład co kilka tygodni, a może co parę lat?

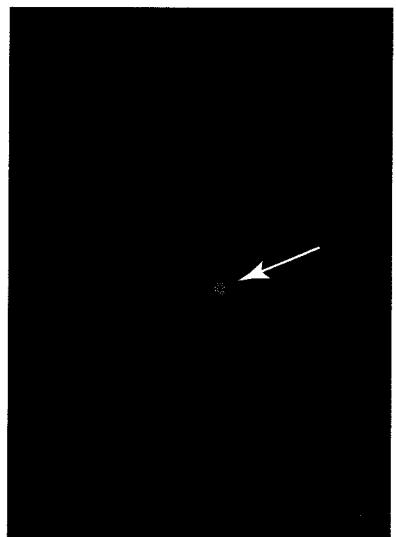
**Atomy łączą się ze sobą.** Lącząc się, tworzą trwałe cząsteczki i ciała stałe. Atom jest praktycznie pusty w środku. Jednak kiedy staniesz na podłodze zrobionej z atomów, nie przelecisz przez nią.

Te podstawowe właściwości atomów można wyjaśnić, korzystając z fizyki kwantowej. To samo dotyczy trzech następnych, mniej oczywistych właściwości, które wymienimy poniżej.

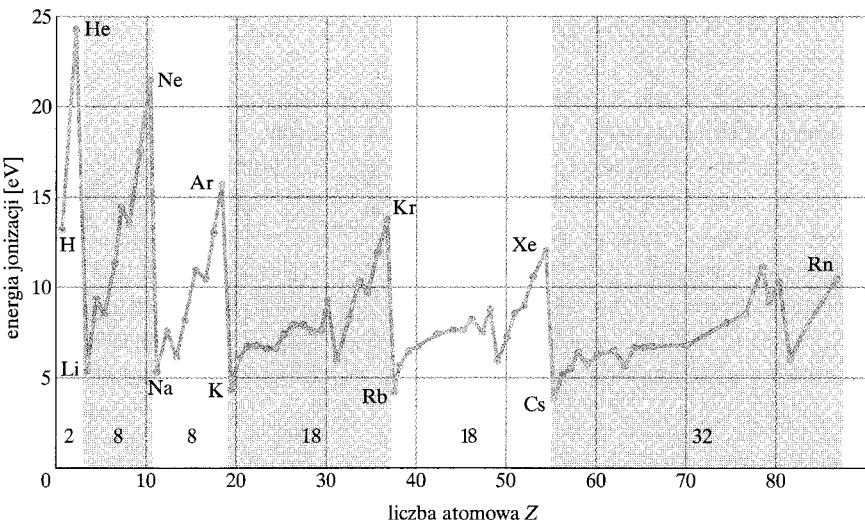
### Porządek wśród atomów

Na rysunku 41.2 jest pokazany przykład pewnej właściwości pierwiastków, która powtarza się w zależności od ich położenia w układzie okresowym (dodatek G). **Energia jonizacji** pierwiastków przedstawiona na tym rysunku to energia potrzebna do usunięcia najsłabiej związanego elektronu z atomu. Na wykresie widać, że energia ta zależy od położenia danego pierwiastka w układzie okresowym. Uderzające podobieństwo właściwości chemicznych i fizycznych pierwiastków z każdej pionowej kolumny układu okresowego jest dostatecznym dowodem, że atomy skonstruowane są zgodnie z systematycznymi zasadami.

Pierwiastki uporządkowane są w układzie okresowym w sześciu poziomach **okresach**. Z wyjątkiem pierwszego, każdy z nich zaczyna się po lewej stronie od bardzo aktywnego chemicznie metalu alkalicznego (lit, sód, potas itd.) i kończy po stronie prawej chemicznie obojętnym gazem szlachetnym (neon, argon, krypton itd.). Fizyka kwantowa wyjaśnia właściwości chemiczne tych pierwiastków.



Rys. 41.1. Zaznaczona strzałką błękitna plamka to światło emitowane przez pojedynczy jon baru utrzymywany przez dłuższy czas w pułapce przez badaczy z University of Washington. Specjalne techniki eksperymentalne zmuszały ten jon do ciągłych przejść pomiędzy dwoma poziomami energetycznymi i do związanego z tym emisji światła. Plamka jest efektem emisji wielu fotонów



Rys. 41.2. Wykres zale o ci energii jonizacji pierwiastków od ich liczby atomowej, ujawniający okresową powtarzalno  tej właściwości dla sześciu okresów układu okresowego. Na wykresie zaznaczono liczby pierwiastków w każdym z tych okresów

Liczbami pierwiastków znajdującymi się w tych sześciu okresach s  :

$$2, 8, 8, 18, 18 \text{ i } 32.$$

Fizyka kwantowa przewiduje te wartości.

### Atomy emitują i poch laniaj  światło

Przekonaliśmy się ju z, że atomy mogą istnieć tylko w dyskretnych stanach kwantowych, z których każdy ma pewną energi . Atom może przej c  z jednego stanu do drugiego, emitując światło (przejście do niższego stanu energetycznego  $E_n$ ) lub poch laniaj c światło (przejście do wyższego stanu energetycznego  $E_w$ ). Jak to ju z było omawiane w paragrafie 40.3, światło jest emitowane lub poch laniane w postaci fotonów o energii

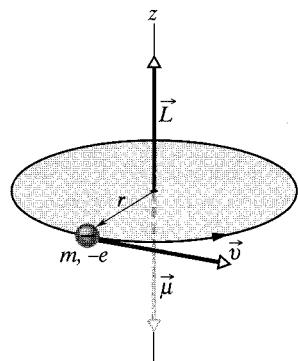
$$h\nu = E_w - E_n. \quad (41.1)$$

Tak więc wyznaczenie częstości światła emitowanego lub poch laniawanego przez atom sprowadza się do wyznaczenia energii stanów kwantowych tego atomu. Fizyka kwantowa pozwala nam — przynajmniej teoretycznie — obliczyć te energie.

### Atomy mają moment pędu i moment magnetyczny

Na rysunku 41.3 pokazano naładowaną ujemnie cz st k , która porusza się po orbicie kołowej dookoła ustalonego centrum. Jak to rozw a ali my w paragrafie 32.4, cz st ka poruszająca się po orbicie ma zarówno moment pędu  $\vec{L}$ , jak i (ponieważ jej tor jest równowa zny male knej pętli z pr adem) magnetyczny moment dipolowy  $\vec{\mu}$ . (Dla uproszczenia opuszczamy indeks orb, którego używaliśmy w rozdziale 32). Jak to pokano na rysunku 41.3, o a wektory  $\vec{L}$  i  $\vec{\mu}$  są prostopadle do płaszczyzny orbity, ale ponieważ ładunek cz st ki jest ujemny, ich zwroty są przeciwną.

Model z rysunku 41.3 jest czysto klasyczny i nie odzwierciedla dokładnie zachowania się elektronu w atomie. W fizyce kwantowej model orbitalny zo 



Rys. 41.3. Klasyczny model przedstawiający cz st k  o masie  $m$  i ładunku  $-e$  poruszającą się z pr edko ci   $v$  po okręgu o promieniu  $r$ . Poruszającą się cz st ka ma moment pędu  $\vec{L}$  równy  $\vec{r} \times \vec{p}$ , gdzie  $\vec{p}$  jest pędem  $m\vec{v}$ . Ruch cz st ki jest równowa zny pętli z pr adem, z którą związany jest moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  skierowany przeciwne do momentu pędu  $\vec{L}$ .

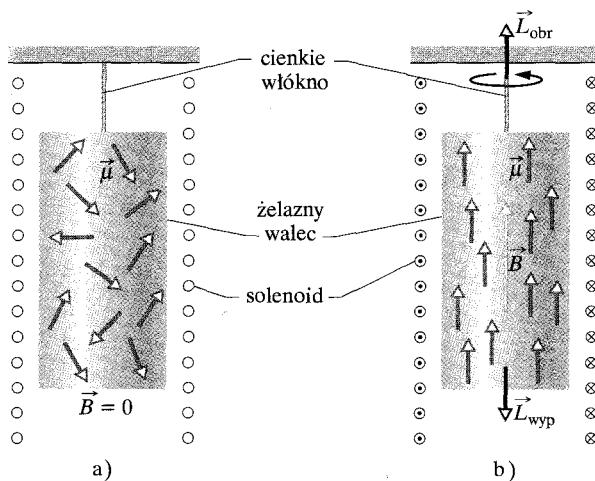
stał zastąpiony modelem gęstości prawdopodobieństwa, który można zobrazować w postaci rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Jednak w fizyce kwantowej pozostało w ogólności prawdą, że z każdym stanem kwantowym elektronu w atomie jest związany moment pędu  $\vec{L}$  i skierowany przeciwnie moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  (mówimy, że te wielkości wektorowe są *sprzężone*).

### Doświadczenie Einsteina–de Haasa

W 1915 r., przed odkryciem fizyki kwantowej, Albert Einstein i holenderski fizyk W.J. de Haas przeprowadzili sprytne doświadczenie, które miało pokazać, że moment pędu i moment magnetyczny pojedynczych atomów są ze sobą sprzężone.

Einstein i de Haas zawiesili na cienkim włóknie żelazny walec, tak jak to przedstawiono na rysunku 41.4a. Dookoła tego walca, nie dotykając go, umieszczono solenoid. Początkowo momenty magnetyczne  $\vec{\mu}$  atomów w walcu skierowane były w przypadkowych kierunkach, tak więc zewnętrzne pole magnetyczne wytwarzane przez te momenty równało się zeru (rys. 41.4a). Kiedy jednak w solenoidzie zaczął płynąć prąd (rys. 41.4b), w jego wnętrzu powstało pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  skierowane równolegle do osi solenoidu. W efekcie momenty magnetyczne atomów w walcu zmieniły orientację i ustawiły się wzdłuż tego pola. Jeśli moment pędu  $\vec{L}$  każdego atomu jest sprzężony z jego momentem magnetycznym  $\vec{\mu}$ , to uporządkowanie atomowych momentów magnetycznych musiało spowodować ustalenie atomowych momentów pędu przeciwnie do kierunku indukcji pola magnetycznego.

Początkowo na walec nie działały żadne zewnętrzne momenty sił, a więc początkowa, zerowa wartość momentu pędu walca nie mogła ulec zmianie. Jednak kiedy włączone zostało pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ , atomowe momenty pędu ustawiły się antyrównolegle do tego pola. W efekcie walec jako całość miał wypadkowy moment pędu  $\vec{L}_{\text{wyp}}$  różny od zera (skierowany na rysunku 41.4b do dołu). Aby zachować zerowy moment pędu, walec zaczął się obracać dookoła swojej osi. W ten sposób wytworzony został moment pędu  $\vec{L}_{\text{obr}}$  skierowany przeciwnie do  $\vec{L}_{\text{wyp}}$  (do góry na rysunku 41.4b).



Rys. 41.4. Układ doświadczalny Einsteina–de Haasa. a) Pole magnetyczne w żelaznym walcu początkowo równe jest zeru, a wektory dipolowych momentów magnetycznych  $\vec{\mu}$  tworzących go atomów skierowane są w sposób przypadkowy. Wektory atomowych orbitalnych momentów pędu (nie pokazane na rysunku) mają zwrot przeciwny do zwrotu momentów magnetycznych, a więc także są ustalone w przypadkowych kierunkach. b) Kiedy zostaje włączone pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  skierowane wzdłuż osi walca, wektory momentów magnetycznych ustawnią się wzdłuż kierunku tego pola, co oznacza, że wektory momentów pędu ustawnią się antyrównolegle do pola o indukcji  $\vec{B}$ . Ponieważ na walec nie działały początkowo żadne zewnętrzne momenty sił, więc jego moment pędu nie może się zmienić, a zatem walec jako całość musi zacząć obracać się tak, jak to pokazano na rysunku

Gdyby nie było włókna, to walec obracałby się tak długo, jak długo byłoby obecne pole magnetyczne. Jednak skręcanie włókna szybko spowoduje wytwarzanie momentu sił, który na chwilę zatrzyma obrót walca, a następnie kiedy włókno zacznie się rozkręcać — jego obrót w przeciwnym kierunku. Później, podczas oscylacji walca wokół jego pierwotnej orientacji, włókno będzie się skręcać i rozkręcać. Walec będzie wykonywał drgania harmoniczne.

Obserwacja obrotu walca potwierdziła, że moment pędów i magnetyczny moment dipolowy atomu są sprzężone i skierowane przeciwnie. Co więcej, doświadczenie to w dramatyczny sposób pokazało, że momenty pędów związane ze stanami kwantowymi atomów mogą wywołać *zauważalny* obrót ciała o makroskopowych rozmiarach.

### 41.3. Spin elektronu

W paragrafie 32.4 wspominaliśmy już, że bez względu na to, czy elektron jest *uwięziony* w atomie, czy też jest *swobodny*, ma własny **spinowy moment pędu**  $\vec{S}$ , często zwany po prostu **spinem**. (Własny znaczy w tym przypadku, że spin  $\vec{S}$  jest nieodłączną cechą elektronu, taką jak jego masa czy też ładunek elektryczny). Wartość spinu jest skwantowana i, jak to przedyskutujemy w następnym paragrafie, zależy od **spinowej liczby kwantowej**  $s$ . Liczba ta w przypadku elektronów (tak jak protonów i neutronów) zawsze jest równa  $\frac{1}{2}$ . Co więcej składowa spinu  $\vec{S}$  zmierzona wzdłuż dowolnej osi jest także skwantowana i zależy od **magnetycznej spinowej liczby kwantowej**  $m_s$ , która może przyjmować tylko wartości  $+\frac{1}{2}$  lub  $-\frac{1}{2}$ .

Istnienie spinu elektronu zaproponowali na podstawie swoich badań widm atomowych dwaj holenderscy studenci George Uhlenbeck i Samuel Goudsmit. Kwantowy opis spinu elektronu zaproponował kilka lat później brytyjski fizyk P.A.M. Dirac. W 1929 r. rozwinał on relatywistyczną teorię kwantów dla elektronu.

Kusząca jest próba wyobrażenia sobie spinu za pomocą klasycznego obrazu elektronu jako maleńkiej kuli, obracającej się wokół swej osi. Jednak ten prosty klasyczny model, tak jak klasyczne modele orbit elektronowych, po prostu nie

Tabela 41.1. Stany elektronowe atomu

Liczba kwantowa	Symbol	Dozwolone wartości	Odpowiada
główna	$n$	1, 2, 3, ...	odległości od jądra
orbitalna	$l$	0, 1, 2, ..., $(n - 1)$	orbitalnemu momentowi pędu
magnetyczna	$m_l$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm l$	orbitalnemu momentowi pędu (składowa wzdłuż osi $z$ )
magnetyczna spinowa	$m_s$	$\pm \frac{1}{2}$	spinowemu momentowi pędu (składowa wzdłuż osi $z$ )

Wszystkie stany o jednakowej głównej liczbie kwantowej  $n$  tworzą **powłokę**.

Powłokę tworzy  $2n^2$  stanów.

Wszystkie stany o jednakowych wartościach liczb kwantowych  $n$  i  $l$  tworzą **podpowłokę**.

Wszystkie stany tworzące podpowłokę mają niemal jednakową energię.

Podpowłokę tworzy  $2(2l + 1)$  stanów.

działa. W fizyce kwantowej najlepiej myśleć o spinowym momencie pędu jako o wewnętrznej właściwości elektronu. Nie da się go po prostu objąść, stosując podejście klasyczne.

Tabela 41.1, będąca rozwinięciem tabeli 40.2, prezentuje cztery liczby kwantowe  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$  i  $m_s$ , które całkowicie określają stan kwantowy elektronu w atomie wodoru. (Liczba kwantowa  $s$  nie jest tu wymieniona, ponieważ dla wszystkich elektronów jest ona równa  $s = \frac{1}{2}$ ). Te same liczby kwantowe określają także dozwolone stany każdego elektronu w atomie wieloelektronowym.

## 41.4. Momenty pędu i momenty magnetyczne

Z każdym stanem kwantowym elektronu w atomie związany jest orbitalny moment pędu i odpowiadający mu orbitalny moment magnetyczny. Każdy elektron, czy to uwięziony w atomie, czy to swobodny, ma też spinowy moment pędu i odpowiadający mu spinowy moment magnetyczny. Najpierw omówimy te wielkości osobno, a następnie razem.

### Orbitalny moment pędu a magnetyzm

Wartość  $L$  orbitalnego momentu pędu  $\vec{L}$  elektronu w atomie jest skwantowana. Oznacza to, że  $L$  może przyjmować tylko pewne wartości. Wartości te są równe

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \quad (41.2)$$

gdzie  $l$  jest orbitalną liczbą kwantową,  $\hbar$  zaś wynosi  $h/2\pi$ . Zgodnie z tabelą 41.1 orbitalna liczba kwantowa  $l$  musi być równa zeru lub dodatniej liczbie całkowitej nie większej niż  $n - 1$ . Dla stanu o głównej liczbie kwantowej  $n = 3$  dozwolone są na przykład tylko wartości  $l = 2$ ,  $l = 1$  i  $l = 0$ .

Tak jak to powiedziano w paragrafie 32.4, z orbitalnym momentem pędu  $\vec{L}$  elektronu w atomie związany jest dipol magnetyczny. Jego orbitalny **dipolowy moment magnetyczny**  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$  wiąże się z momentem pędu równaniem (32.8)

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \vec{L}. \quad (41.3)$$

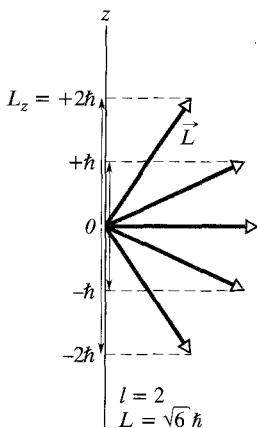
Znak minus w powyższym równaniu oznacza, że moment magnetyczny  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$  jest skierowany antyrównolegle do  $\vec{L}$ . Ponieważ wartość momentu pędu  $L$  jest skwantowana (równanie (41.2)), więc wartość momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$  też musi być skwantowana i wynosi

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{e}{2m} \sqrt{l(l+1)} \hbar. \quad (41.4)$$

Wektorów  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$  ani  $\vec{L}$  nie można w żaden sposób zmierzyć. Można jednak zmierzyć składowe tych dwóch wektorów wzdłuż danej osi. Wyobraźmy sobie, że atom umieszczony został w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . Założmy, że oś  $z$  zgodna jest z kierunkiem linii tego pola. Wtedy możemy zmierzyć składowe wektorów  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$  i  $\vec{L}$  wzdłuż tej osi.

Składowe  $\mu_{\text{orb},z}$  orbitalnego momentu magnetycznego są skwantowane i wynoszą

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \mu_B. \quad (41.5)$$



Rys. 41.5. Dozwolone wartości  $L_z$  dla elektronu w stanie kwantowym o  $l = 2$ . Dla każdego wektora orbitalnego momentu pędu  $\vec{L}$  z tego rysunku istnieje skierowany przeciwnie wektor odpowiadającego mu orbitalnego magnetycznego momentu dipolowego  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$

W równaniu powyższym  $m_l$  jest magnetyczną orbitalną liczbą kwantową z tabeli 41.1, a  $\mu_B$  jest **magnetonem Bohra**,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{4\pi m} = \frac{e\hbar}{2m} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (\text{magneton Bohra}), \quad (41.6)$$

gdzie  $m$  jest masą elektronu.

Składowe  $L_z$  momentu pędu są także skwantowane i wynoszą

$$L_z = m_l \hbar. \quad (41.7)$$

Na rysunku 41.5 przedstawiono pięć skwantowanych składowych  $L_z$  orbitalnego momentu pędu dla elektronu o  $l = 2$ , a także związane z nimi orientacje momentu pędu  $\vec{L}$ . Nie należy jednak brać tego rysunku dosłownie, ponieważ wektora  $\vec{L}$  nie umiemy wykryć w żaden sposób. Zatem rysowanie go tak jak na rysunku 41.5 to wyłącznie wsparcie naszej wyobraźni. Możemy ten obraz rozszerzyć, mówiąc, że wektor  $\vec{L}$  tworzy z osią  $z$  taki kąt  $\theta$ , że

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L}. \quad (41.8)$$

Kąt  $\theta$  nazywamy *półklasycznym kątem* pomiędzy wektorem  $\vec{L}$  a osią  $z$ , ponieważ jest to klasyczna miara wielkości, która zgodnie z teorią kwantową nie może być zmierzona.

### Spinowy moment pędu i spinowy moment magnetyczny

Wartość  $S$  spinowego momentu pędu  $\vec{S}$  dowolnego elektronu, czy to *swobodnego*, czy *zlokalizowanego*, może być tylko jedna:

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right)} \hbar = 0,866 \hbar, \quad (41.9)$$

gdzie  $s (= 1/2)$  jest spinową liczbą kwantową elektronu.

Tak jak to powiedziano w paragrafie 32.4, elektron ma własny magnetyczny moment dipolowy, który jest związany z jego spinowym momentem pędu  $\vec{S}$ . Nie ma przy tym znaczenia, czy ten elektron jest w atomie, czy też jest swobodny. **Spinowy magnetyczny moment dipolowy**  $\vec{\mu}_s$  jest związany ze spinowym momentem pędu relacją

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}. \quad (41.10)$$

Znak minus w tym wzorze oznacza, że wektor  $\vec{\mu}_s$  jest skierowany przeciwnie do wektora  $\vec{S}$ . Ponieważ wartości spinowego momentu pędu są skwantowane (równanie (41.9)), więc wartości spinowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_s$  także będą skwantowane i dane wzorem

$$\mu_s = \frac{e}{m} \sqrt{s(s+1)} \hbar. \quad (41.11)$$

Wektorów  $\vec{S}$  ani  $\vec{\mu}_s$  nie można w żaden sposób zmierzyć. Jednak można zmierzyć ich składowe wzdłuż danej osi, którą nazwiemy osią  $z$ . Składowe  $S_z$  spinowego momentu pędu są skwantowane i wynoszą

$$S_z = m_s \hbar, \quad (41.12)$$

gdzie  $m_s$  jest magnetyczną spinową liczbą kwantową z tabeli 41.1. Liczba ta może przyjmować tylko dwie wartości  $m_s = +\frac{1}{2}$  (mówimy, że spin elektronu jest *skierowany w górę*) i  $m_s = -\frac{1}{2}$  (spin elektronu jest *skierowany w dół*).

Składowe  $\mu_{s,z}$  spinowego momentu magnetycznego są także skwantowane i wynoszą

$$\mu_{s,z} = -2m_s \mu_B. \quad (41.13)$$

Na rysunku 41.6 pokazano dwie skwantowane składowe  $S_z$  spinowego momentu pędu elektronu i odpowiadające im orientacje wektora  $\vec{S}$ . Pokazano także skwantowane składowe  $\mu_{s,z}$  spinowego momentu magnetycznego i odpowiednie kierunki wektora  $\vec{\mu}_s$ .

### Dodawanie orbitalnych i spinowych momentów magnetycznych

W przypadku atomu zawierającego więcej niż jeden elektron definiujemy całkowity moment pędu  $\vec{J}$ , który jest sumą wektorową momentów pędu poszczególnych elektronów — momentów pędu zarówno orbitalnych, jak i spinowych. Liczba elektronów (i liczba protonów) w obojętnym atomie to **liczba atomowa**  $Z$ . Zatem dla obojętnego atomu

$$\vec{J} = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_Z) + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \dots + \vec{S}_Z). \quad (41.14)$$

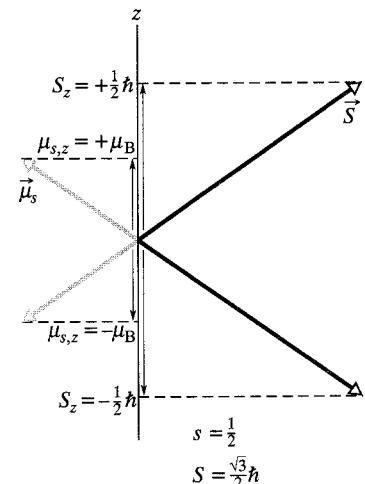
Podobnie całkowity moment magnetyczny atomu wieloelektronowego jest sumą wektorową momentów magnetycznych (zarówno orbitalnych, jak i spinowych) jego poszczególnych elektronów. Jednak ze względu na czynnik 2 w równaniu (41.13) wypadkowy moment magnetyczny atomu nie musi mieć kierunku wektora  $-\vec{J}$ . Zamiast tego tworzy z nim pewien kąt. **Efektywny moment magnetyczny**  $\vec{\mu}_{\text{ef}}$  atomu jest rzutem sumy wektorowej poszczególnych momentów magnetycznych na kierunek  $-\vec{J}$  (rys. 41.7).

Jak zobaczymy w następnym paragrafie, w typowych atomach suma wektorów orbitalnych i spinowych momentów pędu większości elektronów wynosi zero. Zatem wektory  $\vec{J}$  i  $\vec{\mu}_{\text{ef}}$  w tych atomach pochodzą od stosunkowo niewielkiej liczby elektronów, czasami tylko od jednego elektronu walencyjnego.

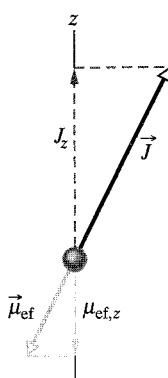
**SPRAWDZIAN 1:** Elektron znajduje się w stanie kwantowym, w którym wartość orbitalnego momentu pędu  $\vec{L}$  wynosi  $2\sqrt{3}\hbar$ . Ile jest dozwolonych rzutów orbitalnego momentu magnetycznego na osią  $z$ ?

### 41.5. Doświadczenie Stern–Gerlacha

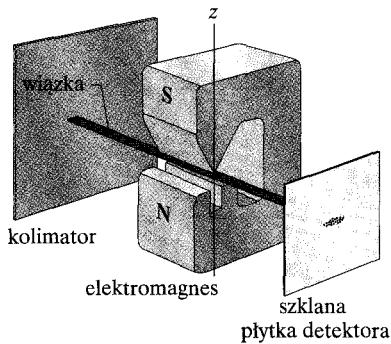
W 1922 r. Otto Stern i Walther Gerlach z Uniwersytetu w Hamburgu w Niemczech pokazali doświadczalnie, że magnetyczny moment dipolowy atomów srebra jest skwantowany. Dziś ich eksperyment nazywany jest doświadczeniem



Rys. 41.6. Dozwolone wartości  $S_z$  i  $\mu_z$  dla elektronu



Rys. 41.7. Klasyczny model pokazujący wektor całkowitego momentu pędu  $\vec{J}$  i wektor efektywnego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_{\text{ef}}$



Rys. 41.8. Układ doświadczalny Sterna i Gerlacha

Sterna–Gerlacha. Wiązka atomów srebra była wytwarzana w piecyku elektrycznym w wyniku odparowywania. Niektóre z atomów tworzących pary srebra przedostawały się przez niewielką szczelinę w tym piecyku do rury próżniowej. Część z tych atomów, które wydostały się z pieca, przechodzi następnie przez kolejną wąską szczelinę, która formuje z nich wąską wiązkę (rys. 41.8). (Mówimy, że taka wiązka jest *skolimowana*, samą szczelinę zaś nazywamy *kolimatorem*). Wiązka przechodzi pomiędzy biegunami elektromagnesu, a następnie pada na szklaną płytke detektora.

Gdy elektromagnes jest wyłączony, srebro na płytce tworzy wąską plamkę. Jednak po włączeniu elektromagnesu plamka srebra rozciąga się w kierunku pionowym. Rozciągnięcie to zachodzi, ponieważ atomy srebra są dipolami magnetycznymi. Kiedy atomy przechodzą przez obszar pionowego pola magnetycznego wytwarzanego przez elektromagnes, działają na nie siły magnetyczne skierowane pionowo, powodując ich odchylenie w górę lub w dół. Tak więc, badając plamkę srebra na płytce, możemy określić, w jaki sposób odchyliły się atomy w polu magnetycznym. Kiedy Stern i Gerlach przeanalizowali kształt plamki srebra na szklanym detektorze, spotkała ich niespodzianka. Jednak zanim powiemy, co ich zaskoczyło i co z tego wynikało dla fizyki kwantowej, zajmijmy się siłami odchylającymi atomy srebra w polu magnetycznym.

### Odchylająca siła magnetyczna działająca na atom srebra

Nie mówiliśmy poprzednio o takim rodzaju siły magnetycznej, która odchyla atomy srebra w doświadczeniu Stern–Gerlacha. *Nie* jest to odchylająca siła magnetyczna, która działa na poruszające się naładowane cząstki, dana wzorem (29.2) ( $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ). Powód jest prosty: atom srebra jest obojętny elektrycznie (jego wypadkowy ładunek  $q$  równy jest 0), zatem ten typ siły magnetycznej nie będzie na taki atom działać.

Siła, której szukamy, działa pomiędzy polem magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  elektromagnesu i dipolem magnetycznym pojedynczego atomu srebra. Aby wprowadzić wyrażenie na tę siłę, zacznijmy od energii potencjalnej  $E_p$  takiego dipola w polu magnetycznym. Równanie (29.38) mówi, że

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (41.15)$$

gdzie  $\vec{\mu}$  jest momentem magnetycznym atomu srebra. Na rysunku 41.8 dodatni kierunek osi  $z$  i kierunek indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$  są skierowane w górę. Zatem równanie (41.5) możemy przepisać, podstawiając rzut atomowego momentu magnetycznego  $\mu_z$  na kierunek indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$ :

$$E_p = -\mu_z B. \quad (41.16)$$

Następnie, korzystając z równania (8.20) ( $F = -dE_p/dx$ ) dla osi  $z$  pokazanej na rysunku 41.8, otrzymamy:

$$F_z = -\frac{dE_p}{dz} = \mu_z \frac{dB}{dz}. \quad (41.17)$$

Tego właśnie szukaliśmy: równania określającego siłę magnetyczną odchylającą tor atomu srebra, który przechodzi przez obszar pola magnetycznego.

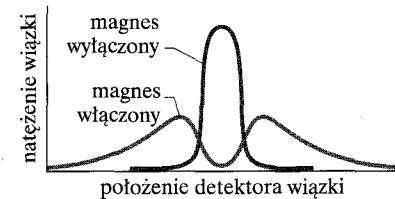
Czynnik  $dB/dz$  w równaniu (41.17) jest gradientem pola magnetycznego wzdłuż osi  $z$ . Jeśli pole magnetyczne nie zmienia się wzdłuż tej osi (jak w jednorodnym polu magnetycznym lub bez pola), to  $dB/dz = 0$  i atom srebra nie jest odchylany w trakcie ruchu pomiędzy biegunami magnesu. W doświadczeniu Stern–Gerlacha bieguny magnesu są tak zaprojektowane, żeby maksymalizować gradient  $dB/dz$  i tym samym w największym możliwym stopniu odchylić atomy srebra przelatujące pomiędzy biegunami magnesu. W ten sposób odchylenie to wpływa na kształt plamki srebra zebranej na szklanej płytce.

W ujęciu klasycznym składowe  $\mu_z$  momentu magnetycznego atomów srebra przechodzących przez pole magnetyczne na rysunku 41.8 powinny się zawierać w przedziale od  $-\mu_z$  (moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  skierowany w dół osi  $z$ ) do  $+\mu_z$  (moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  skierowany w górę osi  $z$ ). Zatem, jak wynika z równania (41.17), powinien istnieć cały zakres sił działających na atomy i cały zakres możliwych odchyleń, którym ulegną, od największego odchylenia w dół do największego odchylenia w górę. W efekcie powinniśmy się spodziewać, że atomy ułożą się na płytce wzdłuż pionowej linii. Tak się jednak nie dzieje.

## Doświadczalna niespodzianka

Stern i Gerlach zobaczyli na szklanej płytce dwie osobne plamki utworzone przez padające atomy srebra, jedną ponad punktem, gdzie trafiłyby atomy, gdyby nie było odchylenia, drugą zaś poniżej tego punktu. Obecność dwóch plamek można stwierdzić na rysunku 41.9 przedstawiającym wyniki bardziej współczesnej wersji doświadczenia Stern–Gerlacha. W wersji tej wiązka atomów cezu (mających momenty magnetyczne tak samo jak atomy srebra z oryginalnego doświadczenia Stern–Gerlacha) przepuszczana była przez pole magnetyczne o dużym pionowym gradiencie  $dB/dz$ . Pole magnetyczne może być włączane lub wyłączane, detektor zaś może być przesuwany w górę i w dół wiązki.

Kiedy pole było wyłączone, wiązka oczywiście nie ulegała odchyleniu, a detektor rejestrował wynik z centralnie położonym maksimum, pokazany na rysunku 41.9. Gdy zaś pole było włączane, pierwotna wiązka rozdzielała się na dwie słabsze: jedną padającą powyżej położenia wiązki nieodchylonej, a drugą poniżej tego punktu. Przesuwanie detektora wzdłuż tych wiązek powodowało powstanie widma z dwoma maksimami, pokazanego na rysunku 41.9.



Rys. 41.9. Wyniki nowoczesnej wersji doświadczenia Stern–Gerlacha. Gdy elektromagnes jest wyłączony, pojawia się tylko jedna wiązka. Kiedy elektromagnes zostaje włączony, pierwotna wiązka rozszczepia się na dwie. Te dwie wiązki odpowiadają równoległe i antyrównoległe ustawieniu momentów magnetycznych atomów cezu w zewnętrznym polu magnetycznym

## Znaczenie wyników

W oryginalnym doświadczeniu Stern–Gerlacha na szklanej płytce powstawały dwie plamki srebra, a nie pionowa srebrna kreska. Oznacza to, że składowa  $\mu_z$  momentu magnetycznego atomów srebra wzdłuż kierunku indukcji pola magnetycznego (kierunku  $z$ ) nie może przybierać dowolnych wartości pomiędzy  $-\mu_z$  i  $+\mu_z$ , jak to przewiduje obraz klasyczny. Może natomiast przyjmować jedynie dwie wartości, po jednej dla każdej plamki srebra. Tak więc doświadczenie Stern–Gerlacha pokazało, że wartość  $\mu_z$  jest skwantowana, z czego wynika (słusznie), że moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  jest także skwantowany. Co więcej, ponieważ moment pędu  $\vec{L}$  atomu jest związany z momentem magnetycznym  $\vec{\mu}$ , zatem moment pędu i jego składowa  $L_z$  są także skwantowane.

Korzystając z nowoczesnej teorii kwantowej, możemy rozszerzyć wyjaśnienie pojawienia się dwóch plamek w doświadczeniu Stern–Gerlacha. Wiemy teraz, że w atomie srebra znajduje się wiele elektronów, każdy z nich ma spinowy moment magnetyczny i orbitalny moment magnetyczny. Wiemy także, że suma wektorowa wszystkich tych momentów, *poza* momentem jednego elektronu, wynosi zero, moment orbitalny zaś tego elektronu także równy jest zeru. Zatem całkowity moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  atomu srebra jest *spinowym* momentem magnetycznym tego pojedynczego elektronu. Zgodnie z równaniem (41.13) oznacza to, że  $\mu_z$  — rzut momentu magnetycznego na osią  $z$  z rysunku 41.8 może przyjmować tylko jedną z dwóch wartości. Jedna z nich odpowiada liczbie kwantowej  $m_s = +\frac{1}{2}$  (spin pojedynczego elektronu skierowany w góre), a druga liczbie kwantowej  $m_s = -\frac{1}{2}$  (spin pojedynczego elektronu skierowany w dół). Po podstawieniu do równania (41.13) otrzymamy

$$\mu_{s,z} = -2(+\frac{1}{2})\mu_B = -\mu_B \quad \text{i} \quad \mu_{s,z} = -2(-\frac{1}{2})\mu_B = +\mu_B. \quad (41.18)$$

Następnie po podstawieniu tych wyrażeń do równania (41.17) stwierdzimy, że składowa  $F_z$  siły odchylającej atomy srebra podczas ich przechodzenia przez pole magnetyczne może przyjmować tylko dwie wartości:

$$F_z = -\mu_B \left( \frac{dB}{dz} \right) \quad \text{i} \quad F_z = \mu_B \left( \frac{dB}{dz} \right), \quad (41.19)$$

czego wynikiem jest powstanie na szklanej płytce dwóch plamek srebra.

## Przykład 41.1

W doświadczeniu Stern–Gerlacha (rys. 41.8) wiązka atomów srebra przechodzi przez pole magnetyczne o gradiencie  $dB/dz$  o wartości  $1,4 \text{ T/mm}$ , istniejącym wzdłuż osi  $z$ . Obszar, w którym istnieje ten gradient, ma długość  $w = 3,5 \text{ cm}$  liczoną w kierunku wiązki padającej. Prędkość atomów wynosi  $750 \text{ m/s}$ . Ile wynosi odległość  $d$ , na jaką zostaną odchylone atomy, kiedy opuszczą obszar z gradientem pola magnetycznego? Masa atomu srebra  $M$  równa jest  $1,8 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ .

### ROZWIĄZANIE:

**1.** Odchylenie atomu srebra w wiązce jest spowodowane oddziaływaniem pomiędzy momentem magnetycznym atomu i polem magnetycznym, wywołanym istnieniem gradientu  $dB/dz$ . Siła odchylająca jest skierowana wzdłuż gradientu pola (wzdłuż osi  $z$ ) i dana równaniem (41.17). Rozważmy wyłącznie odchylenie w kierunku dodatniej osi  $z$ . W takim wypadku spośród dwóch równań (41.19) skorzystamy ze wzoru  $F_z = \mu_B(dB/dz)$ .

**2.** Jeśli przyjmiemy, iż gradient pola  $dB/dz$  ma taką samą wartość w całym obszarze, w którym poruszają się atomy srebra, to składowa siły  $F_z$  jest w tym obszarze stała. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że przyspieszenie atomu  $a_z$  wzdłuż osi  $z$  wywołane siłą  $F_z$  jest także stałe i dane równaniem:

$$a_z = \frac{F_z}{M} = \frac{\mu_B(dB/dz)}{M}.$$

Ponieważ przyspieszenie to jest stałe, więc do wyznaczenia odchylenia  $d$  w kierunku osi  $z$  możemy użyć równania (2.15) (z tabeli 2.1)

$$d = v_{0z}t + \frac{1}{2}a_zt^2 = 0t + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_B(dB/dz)}{M}\right)t^2. \quad (41.20)$$

Siła odchylająca działa na atomy w kierunku prostopadłym do pierwotnego kierunku ich ruchu. Tak więc składowa  $v$  prędkości atomu wzdłuż pierwotnego kierunku jego ruchu nie zmienia się na skutek jej działania i atom potrzebuje czasu  $t = w/v$ , aby przebyć odległość  $w$  w tym kierunku. Podstawiając do równania (41.20) zamiast  $t$  stosunek  $w/v$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_B(dB/dz)}{M}\right)\left(\frac{w}{v}\right)^2 = \frac{\mu_B(dB/dz)w^2}{2Mv^2} \\ &= (9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T})(1,4 \cdot 10^3 \text{ T/m}) \times \\ &\quad \times \frac{(3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2 \cdot (1,8 \cdot 10^{-25} \text{ kg})(750 \text{ m/s})^2} \\ &= 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m} \approx 0,08 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Odległość pomiędzy położeniami dwóch wiązek będzie dwa razy większa, a więc będzie wynosić  $0,16 \text{ mm}$ . Odległość ta nie jest bardzo duża, ale łatwa do zmierzenia.

## 41.6. Rezonans magnetyczny

Wspominaliśmy już krótko w paragrafie 32.4, że proton ma własny spinowy moment pędu  $\vec{S}$  i związany z nim spinowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , które mają ten sam kierunek (proton ma ładunek dodatni). Jeśli proton umieścimy w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , skierowanym wzdłuż osi  $z$ , to składowa spinowego momentu magnetycznego  $\mu_z$  będzie miała tylko dwie wartości: będzie albo dodatnia, albo ujemna, tak jak pokazano na rysunku 41.10a. Z równania (29.38) wiemy, że energie dla tych dwóch orientacji różnią się o  $2\mu_z B$ , co jest energią potrzebną do odwrócenia momentu magnetycznego w jednorodnym polu magnetycznym. Stan o niższej energii to stan o dodatniej wartości  $\mu_z$ , a stan o energii wyższej to stan o ujemnej wartości  $\mu_z$ .

Załóżmy, że w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  umieścimy kroplę wody. Wówczas składowe momentów magnetycznych protonów w atomach wodoru wzdłuż kierunku pola będą albo dodatnie, albo ujemne. Jeśli następnie przyłożymy do tej kropli zmienne pole elektromagnetyczne o pewnej częstotliwości  $v$ , to momenty magnetyczne protonów ze stanu o niższej energii mogą zmienić kierunek. Taką zmianę nazywamy *odwróceniem spinu* (ang. *spin-flip*) (ponieważ zmiana kierunku momentu magnetycznego wymaga zmiany kierunku spinu protonu). Częstość  $v$  niezbędną do odwrócenia spinu jest równa

$$hv = 2\mu_z B; \quad (41.21)$$

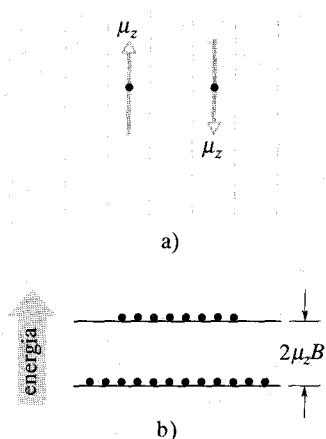
ten warunek nazywa się warunkiem **rezonansu magnetycznego** (lub **magnetycznego rezonansu jądrowego**). Innymi słowy, jeśli zmienne pole elektromagnetyczne ma spowodować odwrócenie spinu w polu magnetycznym, to fotony związane z tym polem muszą mieć energię  $hv$  równą różnicę energii odpowiadających dwóm możliwym orientacjom  $\mu_z$  (a zatem spinu protonu) w tym polu,  $2\mu_z B$ . Proton przeniesiony do wyższego stanu energetycznego w wyniku przejścia z odwróceniem spinu może powrócić do stanu o mniejszej energii, emitując foton o takiej samej energii  $hv$  jak w równaniu (41.21). Normalnie, w stanie o niższej energii znajduje się więcej atomów niż w stanie o energii wyższej, jak to pokazano na rysunku 41.10b. Oznacza to, że sumaryczna energia zmennego pola magnetycznego jest *pochłaniana*.

Stałe pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ , występujące w równaniu (41.21) nie jest właściwie zewnętrznym polem magnetycznym  $\vec{B}_{zew}$ , w którym umieszczona jest kropla, lecz jest zmodyfikowane przez niewielkie lokalne pole magnetyczne  $\vec{B}_{lok}$  pochodzące od momentów magnetycznych atomów i jąder znajdujących się w pobliżu danego protonu. Tak więc równanie (41.21) można przepisać jako

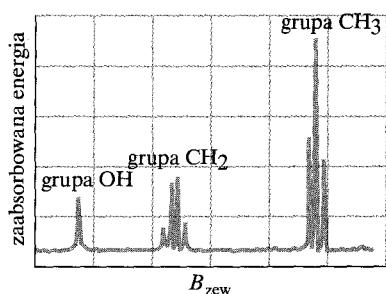
$$hv = 2\mu_z (B_{zew} + B_{lok}). \quad (41.22)$$

Aby osiągnąć rezonans, zwykle ustala się wartość częstotliwości  $v$  i zmienia się indukcję pola magnetycznego  $B_{zew}$  aż do momentu spełnienia równania (41.22) i rejestracji linii absorpcyjnej.

Magnetyczny rezonans jądrowy jest podstawą wartościowej metody analitycznej, która jest szczególnie cenna przy identyfikacji nieznanych związków. Na rysunku 41.11 pokazano **widmo jądrowego rezonansu magnetycznego** (jak się je nazywa) etanolu ( $\text{CH}_3\text{—CH}_2\text{—OH}$ ). Wszystkie linie rezonansowe odpowiadają



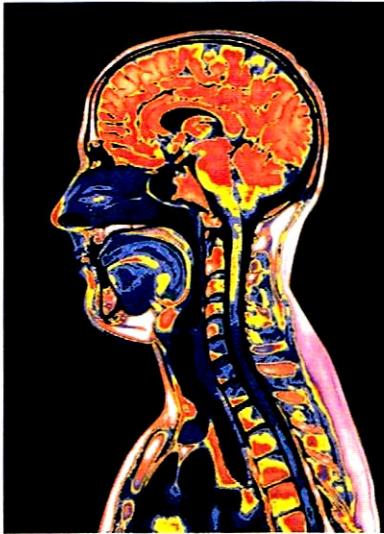
Rys. 41.10. a) Składowa spinu protonu oznaczonego na rysunku czerwoną kropką, w kierunku przyłożonego pola magnetycznego, o wartości  $\frac{1}{2}\hbar$ , może być w zewnętrznym polu magnetycznym równoległa lub antyrównoległa do  $\vec{B}$ . Ustawieniem tym odpowiada nieco różna energia. Jeśli równanie (41.21) jest spełnione, to protony w próbce mogą zostać zmuszone do zmiany kierunku spinu i przejścia z jednego poziomu na drugi. b) Zwykle w niższym stanie energetycznym znajduje się więcej protonów niż w wyższym stanie energetycznym



Rys. 41.11. Widmo jądrowego rezonansu magnetycznego dla etanolu. Linie widmowe odpowiadają absorpcji energii związanej ze zmianą orientacji spinu protonów. Trzy grupy linii odpowiadają, tak jak to zaznaczono, protonom grup OH,  $\text{CH}_2$  i  $\text{CH}_3$  w cząsteczce etanolu. Zauważ, że dwa protony z grupy  $\text{CH}_2$  znajdują się w czterech różnych lokalnych otoczeniach. Pokazany zakres pola magnetycznego jest mniejszy niż  $10^{-4}$  T

wiadają odwróceniu spinów protonów. Pojawiają się one jednak przy różnych wartościach indukcji pola zewnętrznego  $B_{\text{zew}}$ , ponieważ ze względu na różne lokalne otoczenie sześciu protonów w cząsteczce etanolu różnią się one od siebie. Widmo z rysunku 41.11 jest unikalną cechą charakterystyczną etanolu.

Metoda **rezonansu magnetycznego** została z dużym powodzeniem zastosowana w diagnostyce medycznej (nazywa się ją tam obrazowaniem magnetycznym od ang. *magnetic resonance imaging — MRI*). Protony z różnych tkanek ludzkiego ciała znajdują się w wielu różnych lokalnych polach magnetycznych. Te lokalne różnice mogą zostać wykryte metodą odwrócenia spinu, gdy ciało lub jego część znajdzie się w silnym polu magnetycznym. Komputerowa obróbka otrzymanych danych pozwala na stworzenie obrazu podobnego do zdjęcia rentgenowskiego. Na rysunku 41.12 na przykład przedstawiono przekrój ludzkiej głowy uzyskany tą metodą.



Rys. 41.12. Obraz przekroju głowy i karku człowieka wykonany metodą rezonansu magnetycznego. Niektóre szczegóły widoczne na tym obrazie nie pojawiłyby się na tradycyjnym zdjęciu rentgenowskim. Nie ujawniłaby ich też tomografia komputerowa

## Przykład 41.2

Kroplę wody zawieszoną w polu magnetycznym o indukcji  $B = 1.8 \text{ T}$  poddano działaniu zmiennego pola elektromagnetycznego o częstotliwości odpowiadającej odwróceniu spinów protonów w wodzie. Składowa momentu magnetycznego protonu zmierzona wzdłuż kierunku indukcji pola  $\vec{B}$  wynosi  $1.41 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$ . Założmy, że lokalne pola magnetyczne można zaniedbać w porównaniu z zewnętrznym polem  $\vec{B}$ . Ile wynosi częstotliwość  $v$  i długość fali  $\lambda$  pola zmiennego?

### ROZWIĄZANIE:

**1.** Proton umieszczony w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  ma energię potencjalną związaną ze swoim momentem magnetycznym.

**2.** Energia potencjalna takiego protonu może przyjmować tylko dwie wartości, a ich różnica wynosi  $2\mu_z B$ .

**3.** Jeśli pod wpływem fali elektromagnetycznej zachodzi przejście pomiędzy stanami o tych dwóch energiach (odwrócenie spinu), to energia fotonu tej fali  $hv$  musi być równa różnicy energii  $2\mu_z B$ , zgodnie z równaniem (41.21). Korzystając z tego równania, stwierdzamy, że

$$v = \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{2(1.41 \cdot 10^{-26} \text{ J/T})(1.8 \text{ T})}{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} \\ = 7.66 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 76.6 \text{ MHz.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Odpowiednia długość fali równa jest

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{7.66 \cdot 10^7 \text{ Hz}} = 3.92 \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Obliczone częstotliwość i długość fali odpowiadają krótkim falom radiowym widma elektromagnetycznego.

## 41.7. Zakaz Pauliego

W rozdziale 40 rozważaliśmy szereg pułapek elektronowych, od fikcyjnej pułapki jednowymiarowej do realnej trójwymiarowej pułapki w postaci atomu wodoru. We wszystkich tych pułapkach uwięziony był tylko jeden elektron. Jednak kiedy rozważamy pułapki zawierające dwa lub więcej elektronów (tak jak w następnych dwóch paragrafach), musimy wziąć pod uwagę regułę rządzącą światem cząstek, których spinowa liczba kwantowa  $s$  różna jest od zera i nie jest całkowita. Zasada ta stosuje się nie tylko do elektronów, ale także do protonów i neutronów, które także mają spin  $s = \frac{1}{2}$ . Zasada ta jest znana jako **zakaz Pauliego** od nazwiska

Wolfganga Pauliego, który ją sformułował w 1925 r. W przypadku elektronów mówi ona, że:

- Żadne dwa elektryny uwięzione w tej samej pułapce nie mogą mieć jednakowych wszystkich liczb kwantowych.

Oznacza to, jak zobaczymy w paragrafie 41.9, że żadne dwa elektryny w atomie nie mogą mieć takich samych wartości liczb kwantowych  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$  i  $m_s$ . Innymi słowy, stany dowolnych dwóch elektronów w atomie muszą różnić się co najmniej jedną liczbą kwantową. Gdyby tak nie było, atomy zapadłyby się i ty sam, a także świat, jaki znasz, nie mógłby istnieć.

## 41.8. Wiele elektronów w pułapkach prostokątnych

Aby przygotować się do dyskusji stanów wieloelektronowych w atomach, omówimy przypadek dwóch elektronów uwięzionych w prostokątnych pułapkach z rozdziału 40. Znowu użyjemy liczb kwantowych, które znaleźliśmy w sytuacji, gdy w takich pułapkach znajdował się tylko jeden elektron. Jednak teraz dołączymy także dyskusję spinowych momentów pędu tych dwóch elektronów. Aby to zrobić, założymy, że wszystkie pułapki umieszczone są w jednorodnym polu magnetycznym. Wówczas, zgodnie z równaniem (41.12), elektron może mieć spin skierowany albo w górę ( $m_s = \frac{1}{2}$ ), albo w dół ( $m_s = -\frac{1}{2}$ ). (Założymy też, że to pole magnetyczne jest bardzo słabe, tak że można zaniedbać energię potencjalną elektronów związaną z tym polem).

Ponieważ umieszczamy w jednej z pułapek dwa elektryny, musimy pamiętać o zakazie Pauliego. Mówi ona, że elektryny muszą się różnić co najmniej jedną liczbą kwantową.

1. *Pułapka jednowymiarowa.* W pułapce jednowymiarowej z rysunku (40.2) dopasowanie fali elektronowej do szerokości pułapki  $L$  zadaje warunek na jedną liczbę kwantową  $n$ . Zatem dowolny elektron uwięziony w pułapce musi mieć liczbę kwantową  $n$  o pewnej określonej wartości, jego liczba kwantowa  $m_s$  zaś może być równa albo  $\frac{1}{2}$ , albo  $-\frac{1}{2}$ . Dwa elektryny mogą się różnić wartościami liczby kwantowej  $n$  lub mogą mieć jednakową liczbę kwantową  $n$ , różnić się zaś orientacją spinu.
2. *Zagroda prostokątna.* W zagrodzie prostokątnej z rysunku 40.12 dopasowanie fali elektronowej do wymiarów zagrody  $L_x$  i  $L_y$  zadaje warunek na dwie liczby kwantowe  $n_x$  i  $n_y$ . Zatem dowolny elektron uwięziony w taki pułapce musi mieć określone wartości tych dwóch liczb kwantowych, jego liczba kwantowa  $m_s$  zaś może być równa albo  $\frac{1}{2}$ , albo  $-\frac{1}{2}$ . W takim przypadku istnieją trzy liczby kwantowe. Zgodnie z zakazem Pauliego dwa elektryny uwięzione w pułapce muszą się różnić co najmniej jedną z tych trzech liczb kwantowych.
3. *Pudło prostokątne.* W prostokątnym pudle z rysunku 40.13 dopasowanie fali elektronowej do wymiarów pudła  $L_x$ ,  $L_y$  i  $L_z$  zadaje warunek na trzy liczby kwantowe  $n_x$ ,  $n_y$  i  $n_z$ . Tak więc dowolny elektron uwięziony w ta-

kim pudle musi mieć określone wartości tych trzech liczb kwantowych, jego liczba kwantowa  $m_s$ , zaś może być równa albo  $\frac{1}{2}$ , albo  $-\frac{1}{2}$ . W efekcie istnieją cztery liczby kwantowe. Zgodnie z zakazem Pauliego dwa elektrony uwięzione w takiej pułapce muszą się różnić wartościami co najmniej jednej z tych czterech liczb kwantowych.

Przypuśćmy, że do prostokątnej pułapki z powyższej listy dodajemy jeden po drugim więcej niż dwa elektrony. Pierwsze elektrony zajmą naturalnie najniższy możliwy poziom energetyczny — mówimy, że poziom ten zostanie przez te elektrony *obsadzony*. Jednak w końcu zakaz Pauliego zabroni obsadzania tego najniższego poziomu przez kolejne elektrony i następny elektron musi obsadzić kolejny wyższy poziom energetyczny. Kiedy poziom energetyczny ze względu na zakaz Pauliego nie może być już obsadzany przez więcej elektronów, mówimy, że jest on **całkowicie obsadzony** lub **wypełniony**. Przeciwnie, poziom, którego nie zajmują żadne elektrony, nazywamy **nieobsadzonym** lub **pustym**. W sytuacjach pośrednich poziom jest **częściowo obsadzony**. **Konfiguracja elektronowa** układu uwięzionych elektronów to wykaz lub diagram poziomów energetycznych, które zajmują elektrony lub zbiór liczb kwantowych tych elektronów.

### Obliczanie energii całkowej

Będziemy teraz poszukiwać energii *układu* dwóch lub więcej elektronów uwięzionych w pułapce prostokątnej. Będziemy szukać całkowej energii dowolnej konfiguracji elektronów w niej uwięzionych.

Dla uproszczenia założymy, że elektrony nie oddziałują elektrycznie ze sobą, czyli zaniedbamy elektryczną energię potencjalną par elektronów. W takim przypadku całkowitą energię dowolnej konfiguracji elektronowej można znaleźć, obliczając energię każdego z elektronów w sposób stosowany już w rozdziale 40, a następnie sumując te wszystkie energie. (W przykładzie 41.3 postępujemy w ten sposób z siedmioma elektronami uwięzionymi w zagrodzie kwantowej).

Dobrym sposobem uszeregowania wartości energii danego układu elektronów jest narysowanie diagramu poziomów energetycznych *dla tego układu*, dokładnie tak, jak to poprzednio robiliśmy w rozdziale 40 z jednym elektronem w pułapce. Najniższy poziom o energii  $E_{\text{podst}}$  odpowiada stanowi podstawowemu tego układu. Kolejny poziom o wyższej energii  $E_{\text{pw}}$  odpowiada pierwszemu stanowi wzbudzonemu tego układu, następny wyższy poziom energetyczny  $E_{\text{dw}}$  odpowiada drugiemu stanowi wzbudzonemu tego układu. I tak dalej.

---

### Przykład 41.3

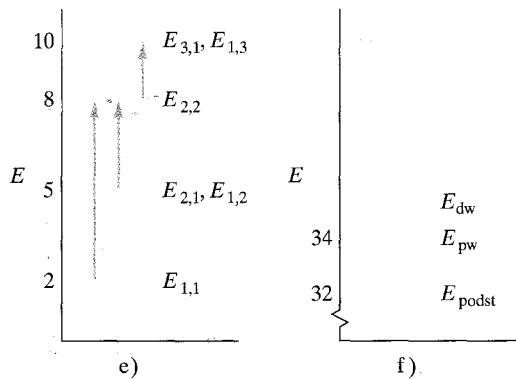
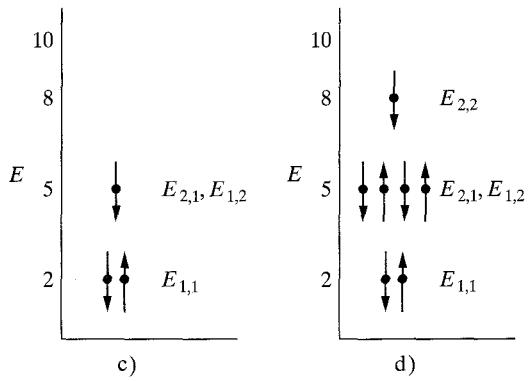
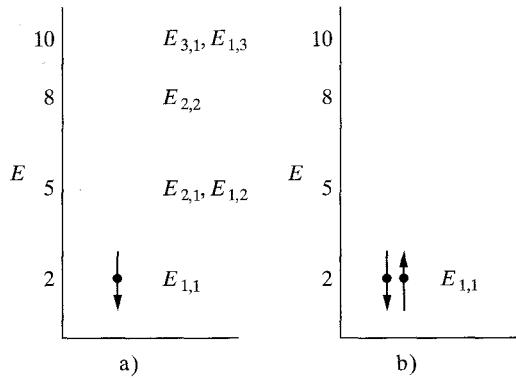
Siedem elektronów uwięzionych jest w prostokątnej zagrodzie z przykładu 40.5, będącej dwuwymiarową nieskończoną studnią potencjału o wymiarach  $L_x = L_y = L$  (rys. 40.12). Założmy, że elektrony nie oddziałują ze sobą elektrycznie.

a) Jaka jest konfiguracja elektronowa stanu podstawowego takiego układu siedmiu elektronów?

#### ROZWIĄZANIE:

Konfigurację elektronową tego układu możemy wyznaczyć, umieszczając w zagrodzie kolejno, jeden po drugim, siedem elektronów.

☞ 1. Zakładając, że elektrony nie oddziałują ze sobą, możemy do określenia, na jakich poziomach rozmieścić siedem elektronów, wykorzystać diagram poziomów elektronowych dla pojedynczego elektronu uwięzionego w tej zagrodzie. Taki *jednoelektronowy*



Rys. 41.13. a) Diagram poziomów energetycznych dla jednego elektronu uwięzionego w kwadratowej zagrodzie o boku  $L$ . (Energia  $E$  wyrażona jest jako wielokrotność  $\hbar^2/8mL^2$ ). Elektron ze spinem w dół zajmuje stan o najniższej energii. b) Dwa elektryny (jeden ze spinem w góre, drugi ze spinem w dół) zajmują najniższy poziom na diagramie energii jednoelektronowych. c) Trzeci elektron obsadza następny poziom energetyczny. d) Konfiguracja stanu podstawowego dla wszystkich siedmiu elektronów. e) Trzy możliwe przejścia rozważane w treści przykładu przy wyznaczaniu pierwszego stanu wzbudzonego. f) Diagram poziomów energetycznych dla trzech najniższych energii rozważanego układu (energie wyrażone jako wielokrotności  $\hbar^2/8mL^2$ )

diagram poziomów energetycznych pokazany jest na rysunku 40.14 i częściowo powtórzony na rysunku 41.13a. Przypomnij sobie, że zależnie od energii kolejne poziomy oznaczone są jako  $E_{nx,ny}$ . Na przykład najniższy poziom o energii  $E_{1,1}$  odpowiada liczbom kwantowym  $n_x = 1$  i  $n_y = 1$ .

**2.** Uwięzione elektryny podlegają zakazowi Pauliego, czyli żadne dwa elektryny nie mogą mieć takiego samego zestawu liczb kwantowych  $n_x$ ,  $n_y$  i  $m_s$ .

Pierwszy elektron obsadzi poziom energetyczny  $E_{1,1}$  i jego liczba kwantowa  $m_s$  może przyjmować wartości  $m_s = \frac{1}{2}$  lub  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Wybierzmy ten drugi przypadek i narysujmy na poziomie energetycznym  $E_{1,1}$  z rysunku 41.13a strzałkę skierowaną w dół (przedstawiającą elektron ze spinem w dół). Drugi elektron także obsadzi poziom  $E_{1,1}$ , ale żeby różnić się od pierwszego jedną liczbą kwantową, jego  $m_s$  musi przyjąć wartość  $+\frac{1}{2}$ . Ten drugi elektron przedstawimy jako strzałkę skierowaną w góre (spin w góre) umieszczoną na poziomie energetycznym  $E_{1,1}$  z rysunku 41.13b.

**3.** Poziom energetyczny  $E_{1,1}$  jest teraz całkowicie zapełniony i trzeci elektron nie może już mieć tej samej energii. Tak więc trzeci elektron musi obsadzić wyższy poziom energetyczny, któremu odpowiadają dwie jednakowe energie  $E_{1,2}$  i  $E_{2,1}$  (poziom jest zdegenerowany). Liczby kwantowe  $n_x$  i  $n_y$  tego trzeciego elektronu mogą przyjmować wartości odpowiednio 1 i 2 lub 2 i 1. Może też mieć liczbę kwantową  $m_s$  o wartościach  $m_s = \frac{1}{2}$  lub  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Przypiszmy mu na przykład liczby kwantowe  $n_x = 2$ ,  $n_y = 1$  i  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Elektron ten będzie reprezentowany strzałką skierowaną w dół umieszczoną na poziomie energetycznym  $E_{1,2}$  i  $E_{2,1}$  z rysunku 41.13c.

Można pokazać, że następne trzy elektryny mogą także obsadzić zdegenerowany poziom o energiach  $E_{1,2}$  i  $E_{2,1}$  pod warunkiem, że żaden ze zbiorów ich trzech liczb kwantowych nie będzie się całkowicie powtarzał. Poziom ten obsadzony przez cztery elektryny o następujących zbiorach liczb kwantowych ( $n_x$ ,  $n_y$  i  $m_s$ ):

$$(2, 1, -\frac{1}{2}), (2, 1, +\frac{1}{2}), (1, 2, -\frac{1}{2}), (1, 2, +\frac{1}{2})$$

będzie całkowicie zapełniony. Tak więc siódmy elektron musi się znaleźć na następnym, wyższym poziomie energetycznym, którym jest poziom  $E_{2,2}$ . Założymy na przykład, że jego spin jest skierowany w dół, czyli  $m_s = -\frac{1}{2}$ .

Na rysunku 41.13d pokazano wszystkie siedem elektronów na jednoelektronowym diagramie poziomów energetycznych. W ten sposób umieściliśmy w zagrodzie kwantowej siedem elektronów, które znajdują się w najniższej konfiguracji dozwolonej przez zakaz Pauliego. Konfiguracja stanu podstawowego takiego układu elektronów pokazana jest na rysunku 41.13d i przedstawiona w tabeli 41.2.

b) Ile wynosi całkowita energia układu siedmiu elektronów w stanie podstawowym, wyrażona jako wielokrotność  $\hbar^2/8mL^2$ ?

### ROZWIĄZANIE:

**2.** Całkowita energia  $E_{\text{podst}}$  jest sumą energii poszczególnych elektronów w konfiguracji stanu podstawowego tego układu. Energię każdego elektronu można znaleźć w tabeli 40.1, która jest

## Konfiguracja i energia stanu podstawowego

$n_x$	$n_y$	$m_s$	Energia*
2	2	$-\frac{1}{2}$	8
2	1	$+\frac{1}{2}$	5
2	1	$-\frac{1}{2}$	5
1	2	$+\frac{1}{2}$	5
1	2	$-\frac{1}{2}$	5
1	1	$+\frac{1}{2}$	2
1	1	$-\frac{1}{2}$	2
energia całkowita			32

(\*) wyrażona jako wielokrotność  $\frac{h^2}{8mL^2}$ .

częściowo powtórzona w tabeli 41.2 lub na rysunku 41.13d. Ponieważ na pierwszym (najniższym) poziomie znajdują się dwa elektrony, na drugim cztery, a na trzecim jeden, więc całkowita energia wynosi:

$$\begin{aligned} E_{\text{podst}} &= 2\left(2 \frac{h^2}{8mL^2}\right) + 4\left(5 \frac{h^2}{8mL^2}\right) + 1\left(8 \frac{h^2}{8mL^2}\right) \\ &= 32 \frac{h^2}{8mL^2}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Ile energii należy dostarczyć do układu, aby przeszedł on do pierwszego stanu wzbudzonego i ile będzie wtedy wynosić jego energia?

### ROZWIĄZANIE:

1. Jeśli układ ma zostać wzbudzony, to jeden z siedmiu elektronów musi przejść do wyższego stanu energetycznego na jednoelektronowym diagramie poziomów energetycznych z rysunku 41.13d.

2. Jeśli ma nastąpić takie przejście, to zmiana energii  $\Delta E$  tego elektronu (a więc całego układu) musi być równa  $\Delta E = E_w - E_n$  (równanie (40.5)), gdzie  $E_n$  jest energią stanu początkowego,  $E_w$  zaś jest energią stanu końcowego.

3. Zakaz Pauliego musi w dalszym ciągu obowiązywać; w szczególności elektron *nie może* przejść na poziom całkowicie zapełniony.

Rozważmy trzy przejścia pokazane na rysunku 41.13e; wszystkie trzy są dozwolone przez zakaz Pauliego, ponieważ są przejściami do stanów pustych lub częściowo zapełnionych. W jednym z tych możliwych przejść elektron przechodzi z poziomu  $E_{1,1}$  na częściowo obsadzony poziom  $E_{2,2}$ . Zmiana energii wynosi

$$\Delta E = E_{2,2} - E_{1,1} = 8 \frac{h^2}{8mL^2} - 2 \frac{h^2}{8mL^2} = 6 \frac{h^2}{8mL^2}.$$

(Założymy, że spin elektronu dokonującego przejścia może się zmienić, jeśli to konieczne).

W innym z możliwych przejść na rysunku 41.13e elektron przechodzi ze zdegenerowanego poziomu  $E_{2,1}$  i  $E_{1,2}$  do częściowo zapełnionego poziomu  $E_{2,2}$ . Zmiana energii jest równa

$$\Delta E = E_{2,2} - E_{2,1} = 8 \frac{h^2}{8mL^2} - 5 \frac{h^2}{8mL^2} = 3 \frac{h^2}{8mL^2}.$$

W trzecim możliwym przypadku z rysunku 41.13e elektron z poziomu  $E_{2,2}$  przechodzi do nieobsadzonego, zdegenerowanego poziomu  $E_{1,3}$  i  $E_{3,1}$ . Zmiana energii jest równa

$$\Delta E = E_{1,3} - E_{2,2} = 10 \frac{h^2}{8mL^2} - 8 \frac{h^2}{8mL^2} = 2 \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Spośród tych trzech możliwych przejść kwantowych, przejściem wymagającym najmniej energii  $\Delta E$  jest ostatnie. Moglibyśmy rozważyć więcej przejść, ale żadne z nich nie wymagały mniej energii. Zatem aby układ przeszedł ze stanu podstawowego do pierwszego stanu wzbudzonego, elektron z poziomu  $E_{2,2}$  musi przejść na nieobsadzony, zdegenerowany poziom  $E_{1,3}$  i  $E_{3,1}$ , a wymagana do tego energia wynosi

$$\Delta E = 2 \frac{h^2}{8mL^2}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Energia  $E_{\text{pw}}$  pierwszego stanu wzbudzonego tego układu jest zatem równa

$$\begin{aligned} E_{\text{pw}} &= E_{\text{podst}} + \Delta E = 32 \frac{h^2}{8mL^2} + 2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 34 \frac{h^2}{8mL^2}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Energię tę jak również energię stanu podstawowego  $E_{\text{podst}}$  tego układu możemy przedstawić na diagramie poziomów energetycznych *układu* siedmiu elektronów, tak jak to pokazano na rysunku 41.13f.

## 41.9. Budowa układu okresowego

Cztery liczby kwantowe wymienione w tabeli 41.1 identyfikują stany kwantowe poszczególnych elektronów w atomie wieloelektronowym. Funkcje falowe tych stanów nie są jednak takie jak odpowiadające im funkcje falowe atomu wodoru, ponieważ w atomach wieloelektronowych energia potencjalna danego elektronu zależy nie tylko od ładunku i położenia jądra tego atomu, ale także

od ładunków i położeń wszystkich innych elektronów w atomie. Rozwiązań równania Schrödingera dla atomów wieloelektronowych można znajdować, przy najmniej w zasadzie, numerycznie przy użyciu komputera.

Jak to już powiedzieliśmy w paragrafie 40.8, wszystkie stany o takich samych wartościach liczb kwantowych  $n$  i  $l$  tworzą podpowłokę. Dla danej wartości  $l$  istnieje  $2l + 1$  możliwych wartości magnetycznej liczby kwantowej  $m_l$ , a dla każdej wartości  $m_l$  są dwie możliwe wartości magnetycznej spinowej liczby kwantowej  $m_s$ . Tak więc podpowłoka składa się z  $2(2l + 1)$  stanów. Okazuje się, że *wszystkie stany danej podpowłoki mają prawie taką samą energię*, gdyż wartość energii zależy głównie od liczby kwantowej  $n$  i w mniejszym stopniu od liczby kwantowej  $l$ .

Podpowłoki o różnych wartościach  $l$  oznaczane są literami:

$$\begin{array}{ccccccc} l = 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ & s & p & d & f & g & h \end{array} \dots$$

Na przykład podpowłoka  $n = 3$ ,  $l = 2$  nazywana jest podpowłoką 3d.

Przypisując elektryny do stanów atomu wieloelektronowego, musimy przestrzegać zakazu Pauliego przedstawionego w paragrafie 41.7. Oznacza to, że żadne dwa elektryny w atomie nie mogą mieć jednakowych wszystkich liczb kwantowych  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$  i  $m_s$ . Gdyby ta ważna zasada nie istniała, to *wszystkie* elektryny w dowolnym atomie mogłyby przejść do najniższego stanu energetycznego. W ten sposób przestałaby istnieć chemia atomów i cząsteczek, a więc w szczególności nie byłoby biochemii. Przyjrzyjmy się atomom kilku pierwiastków, aby zobaczyć, jak na budowę układu okresowego wpływa zakaz Pauliego.

## Neon

Atom neonu ma 10 elektronów. Tylko dwa z nich znajdują się na podpowłoce o najniższej energii, podpowłoce 1s. Oba te elektryny mają liczby kwantowe równe odpowiednio  $n = 1$ ,  $l = 0$  i  $m_l = 0$ . Różnią się one magnetyczną spinową liczbą kwantową, która dla jednego elektronu wynosi  $m_s = +\frac{1}{2}$ , a dla drugiego  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Zgodnie z tabelą 41.1 podpowłoka 1s zawiera  $2(2l+1) = 2$  elektryny. Ponieważ ta podpowłoka zawiera wszystkie elektryny dozwolone przez zakaz Pauliego, mówimy o niej, że jest **zamknięta**.

Dwa z pozostałych ośmiu elektronów wypełniają kolejną podpowłokę o najniższej energii, podpowłokę 2s. Ostatnie 6 elektronów wypełnia podpowłokę 2p. Ponieważ wszystkie elektryny na tej podpowłoce mają liczbę kwantową  $l = 1$ , więc może ona zmieścić  $2(2l+1) = 6$  stanów.

W zamkniętej podpowłoce obecne są stany o wszystkich możliwych rzutach orbitalnego momentu pędu  $\vec{L}$  na wyróżnioną oś  $z$ , co można sprawdzić na rysunku 41.5. Ponieważ każdemu rzutowi dodatniemu odpowiadać będzie rzut ujemny o dokładnie takiej samej wartości, zatem dla podpowłoki traktowanej jako całość rzuty te nawzajem się zredukują. Podobnie zredukują się także rzuty spinu na oś  $z$ . Tak więc wypadkowy moment pędu oraz moment magnetyczny zamkniętej podpowłoki są równe zeru. Co więcej, elektronowa gęstość prawdopodobieństwa ma symetrię sferyczną. Zatem neon ze swoimi trzema zamkniętymi podpowłokami (1s, 2s i 2p) nie ma żadnych „luźnych” elektronów, które za-

częcałyby do chemicznych oddziaływań z innymi atomami. Neon, tak jak inne **gazy szlachetne**, znajdujące się w ostatniej kolumnie po prawej stronie układu okresowego, nie jest chemicznie aktywny.

## Sód

Kolejnym atomem w układzie okresowym po neonie jest sód z 11 elektronami. Dziesięć z nich tworzy zamknięty neonopodobny rdzeń atomowy, który, jak to już widzieliśmy, ma zerowy orbitalny moment pędu. Pozostały elektron znajduje się na oddalonej od jądra podpowłoce 3s, która jest kolejną podpowłoką o najniższej energii. Ponieważ ten **elektron walencyjny** sodu znajduje się w stanie o liczbie kwantowej  $l = 0$  (czyli w stanie s), więc moment pędu i moment magnetyczny atomu sodu pochodzą wyłącznie od spinu tego jednego elektronu.

Sód łatwo wchodzi w reakcje z innymi atomami, mającymi „lukę”, w której może trafić jego luźno związany elektron walencyjny. Sód, tak jak inne **metale alkaliczne**, tworzące pierwszą kolumnę układu okresowego, jest aktywny chemicznie.

## Chlor

Atom chloru, mający 17 elektronów, ma zamknięty 10-elektronowy neonopodobny rdzeń i siedem pozostałych elektronów. Dwa z nich zapełniają podpowłokę 3s, pozostałych pięć musi się znaleźć na podpowłoce 3p, która jest kolejną w skali energii. Podpowłoka ta, dla której  $l = 1$ , może pomieścić  $2(2l + 1) = 6$  elektronów, tak więc w podpowłoce tej pozostało luka.

Chlor chętnie oddziałuje z innymi atomami, które mają elektron walencyjny, mogący zapełnić tę lukę. Chlorek sodu (NaCl), a więc sól kuchenna, jest dlatego bardzo trwałym związkiem. Chlor, tak jak inne halogeny (fluorowce) tworzące kolumnę VIIA układu okresowego, jest aktywny chemicznie.

## Żelazo

Rozkład 26 elektronów atomu żelaza na kolejne podpowłoki można przedstawić następująco:

$$\boxed{1s^2} \quad \boxed{2s^2 \ 2p^6} \quad \boxed{3s^2 \ 3p^6} \quad \boxed{3d^6} \quad \boxed{4s^2}.$$

Podpowłoki wypisane są zgodnie z narastającym numerem powłoki. Zgodnie z przyjętą konwencją górny indeks oznacza liczbę elektronów na każdej podpowłoce. W tabeli 41.1 widać, że podpowłokę s mogą obsadzić 2 elektryny, podpowłokę p — 6 elektronów, a podpowłokę d — 10 elektronów. Tak więc pierwszych 18 elektronów atomu tworzy pięć zamkniętych podpowłok oznaczonych podkreśleniem. Pozostaje jeszcze osiem. Sześć z nich zajmie podpowłokę 3d, a 2 — podpowłokę 4s.

Te dwa ostatnie elektryny nie zajmą podpowłoki 3d (mogącej zmieścić 10 elektronów), ponieważ energia atomu jako całości jest niższa dla konfiguracji  $3d^6 \ 4s^2$  niż dla konfiguracji  $3d^8$ . Atom żelaza z ośmioma (a nie sześcioma) elektronami na podpowłoce 3d przeszedłby szybko do konfiguracji  $3d^6 \ 4s^2$ , emitując przy tym promieniowanie elektromagnetyczne. Płynąca z tego nauka mówi, że poza najprostszymi atomami stany atomowe nie muszą być obsadzane w kolejności, jaką moglibyśmy uważać za „logiczną”.

## 41.10. Promieniowanie rentgenowskie i numerowanie pierwiastków

W wyniku bombardowania tarczy wykonanej z litej miedzi lub wolframu elektronami o energiach kinetycznych rzędu kiloelektronowoltów powstaje promieniowanie elektromagnetyczne zwane **promieniowaniem rentgenowskim**. Promieniowanie to dobrze znamy, bo znajduje szerokie zastosowanie w medycynie, stomatologii czy też przemyśle. W tym miejscu jednak interesuje nas, czego dzięki niemu możemy dowiedzieć się o właściwościach atomów, które je emittują czy pochłaniają. Na rysunku 41.14 przedstawione jest widmo rentgenowskie promieniowania powstającego wtedy, gdy wiązka elektronów o energii 35 keV pada na tarczę z molibdenu. Widzimy szerokie, ciągłe widmo promieniowania, na które nałożone są dwie linie o dobrze określonych długościach fali. Widmo ciągłe i widoczne linie powstają w różny sposób, które teraz osobno omówimy.

### Ciągłe widmo promieniowania rentgenowskiego

Omówimy teraz ciągłe widmo promieniowania rentgenowskiego z rysunku 41.14, ignorując na razie istnienie dwóch wyraźnych linii, które się z niego wyłaniają. Weź pod uwagę elektron o początkowej energii kinetycznej  $E_{k0}$ , który zderza się (oddziałuje) z jednym z atomów tarczy, tak jak to pokazano na rysunku 41.15. Elektron może stracić pewną energię  $\Delta E_k$ , która pojawi się jako energia fotonu rentgenowskiego emitowanego z miejsca zderzenia. (Ze względu na stosunkowo dużą masę odrzuconego atomu przekazywana mu jest niewielka część energii, którą tu zaniedbamy).

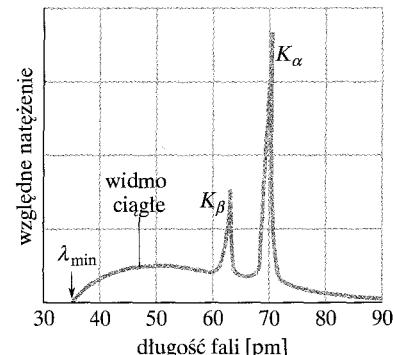
Rozproszony elektron z rysunku 41.15, którego energia jest teraz mniejsza niż  $E_{k0}$ , może ponownie zderzyć się z jakimś atomem tarczy, wytwarzając drugi foton, którego energia będzie w ogólnym przypadku różna od energii fotonu wyprodukowanego w pierwszym zderzeniu. Ten proces rozpraszania elektronu może trwać aż do chwili, gdy elektron przestanie się poruszać. Fotony wytwarzane w takich zderzeniach tworzą ciągłą część widma promieniowania rentgenowskiego (zwanej także promieniowaniem hamowania).

Charakterystyczną cechą widma pokazanego na rysunku 41.14 jest dobrze określona minimalna długość fali  $\lambda_{\min}$ , poniżej której znika widmo ciągłe. Ta minimalna długość fali, która nazywana jest **granicą krótkofalową**, odpowiada zderzeniu, w którym padający elektron w pojedynczym zderzeniu z atomem tarczy traci całą swoją energię kinetyczną  $E_{k0}$ . Cała ta energia pojawia się jako energia pojedynczego fotonu. Związaną z tym fotonem długość fali, najmniejszą możliwą długość fali promieniowania rentgenowskiego, można znaleźć z równania:

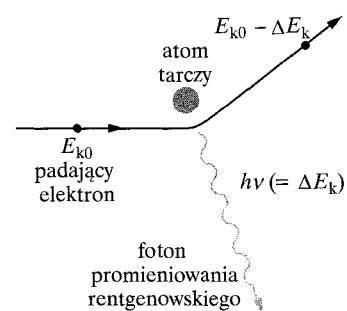
$$E_{k0} = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

lub

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{k0}} \quad (\text{granica krótkofalowa}). \quad (41.23)$$



Rys. 41.14. Widmo promieniowania rentgenowskiego wytwarzanego w wyniku bombardowania tarczy wykonanej z molibdenu elektronami o energii 35 keV. Mechanizmy odpowiedzialne za powstawanie ostrych linii widmowych i widma ciągłego są różne



Rys. 41.15. Elektron o energii kinetycznej  $E_{k0}$  przelatujący obok atomu w tarczy może wyemitować foton promieniowania rentgenowskiego, tracąc przy tym część swojej energii. W taki sposób powstaje widmo ciągłe promieniowania rentgenowskiego

Minimalna długość fali jest niezależna od materiału, z jakiego wykonano tarczę. Jeśli mielibyśmy na przykład zmienić tarczę z molibdenu na tarczę z miedzi, to zmieniłby się wszystkie cechy charakterystyczne widma rentgenowskiego z rysunku 41.14 poza granicą krótkofalową.

✓ **SPRAWDZIAN 2:** Czy granica krótkofalowa  $\lambda_{\min}$  ciągłego widma rentgenowskiego zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie nie zmieniona, jeśli a) zwiększy się energia kinetyczna elektronów padających na tarczę, b) elektrony będą padać na cienką folię, a nie gruby blok litego materiału, c) zmieni się tarczę na wykonaną z pierwiastka o większej liczbie atomowej?

### Przykład 41.4

Wiązka elektronów o energii 35 keV uderza w tarczę z molibdenu, wytwarzając promieniowanie rentgenowskie, którego widmo pokazane jest na rysunku 41.14. Jaka jest granica krótkofalowa tego widma?

#### ROZWIĄZANIE:

Granica krótkofalowa  $\lambda_{\min}$  odpowiada sytuacji, w której elektron przekazuje (w przybliżeniu) całą swoją energię kine-

tyczną emitowanemu fotonowi. Foton taki będzie miał największą możliwączęstość i najmniejszą możliwą długość fali. Z równania (41.23) otrzymujemy

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{k0}} = \frac{(4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{35 \cdot 10^3 \text{ eV}} \\ = 3,55 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 35,5 \text{ pm.} \quad (\text{odpowiedź})$$

### Widmo charakterystyczne promieniowania rentgenowskiego

Zajmijmy się teraz dwiema liniami, oznaczonymi na rysunku 41.14 jako  $K_{\alpha}$  i  $K_{\beta}$ . Te (i inne pojawiające się poza zakresem pokazanym na rysunku) linie w widmie promieniowania rentgenowskiego są **charakterystyczne** dla materiału tarczy.

Linie widmowe promieniowania rentgenowskiego pojawiają się w procesie dwustopniowym. 1. Elektron o dużej energii uderza w atom tarczy i, sam ulegając rozproszeniu, wybija jeden z głębszej leżących (na powłoce o małej wartości  $n$ ) elektronów. Jeśli taki głęboko leżący elektron znajdował się na powłoce określonej przez ogólną liczbę kwantową  $n = 1$  (która z powodów historycznych nazywana jest powłoką K), to pozostawia na tej powłoce lukę. 2. Elektron z jednej z powłok o wyższej energii przeskakuje na powłokę K, zapełniając lukię, jaka na niej istniała. Podczas tego przejścia atom emituje charakterystyczny foton promieniowania rentgenowskiego. Jeśli elektron zapełniający lukię w powłoce K pochodzi z powłoki o głównej liczbie kwantowej  $n = 2$  (nazywanej powłoką L), emitowane promieniowanie tworzy linię  $K_{\alpha}$  z rysunku 41.14. Jeśli przechodzi on z powłoki o  $n = 3$  (nazywanej powłoką M), emitowane promieniowanie tworzy linię  $K_{\beta}$  i tak dalej. Luka pozostawiona w powłoce L lub M zostanie zapełniona przez elektron z powłoki atomu o wyższej energii.

Studując promieniowanie rentgenowskie, wygodniej jest śledzić lukię utworzoną głęboko wewnętrz „chmury elektronowej” niż zmiany stanu elektronów, które tę lukię zapełniają. Na rysunku 41.16 dokładnie to pokazano. Jest to diagram poziomów energetycznych molibdenu — pierwiastka, do którego odnosi się rysunek 41.14. Energia zerowa odpowiada obojętnemu atomowi znajdująciemu się w stanie podstawowym. Poziom oznaczony jako K (o energii 20 keV) odpowiada

energii atomu molibdenu z luką na powłoce K. Podobnie poziom oznaczony jako L (o energii 2,7 keV) odpowiada atomowi z luką na powłoce L i tak dalej.

Przejścia oznaczone na rysunku 41.16 jako  $K_\alpha$  i  $K_\beta$  to te same, które wytworzą dwie linie widmowe promieniowania rentgenowskiego na rysunku 41.14. Linia  $K_\alpha$  na przykład powstaje wtedy, kiedy elektron z powłoki L zapełnia lukę na powłoce K. Na rysunku 41.16 przejście takie odpowiada przejściu luki w dół z poziomu K na poziom L.

## Numerowanie pierwiastków

W 1913 r. brytyjski fizyk H.G.J. Moseley zbadał widmo charakterystyczne promieniowania rentgenowskiego dla tylu pierwiastków, iloma mógł dysponować (38), używając ich jako tarcz bombardowanych przez elektrony w rurze próżniowej własnego projektu. Za pomocą wózka poruszanego linkami Moseley był w stanie wsuwać poszczególne tarcze w wiązkę elektronów. Długości fali emitowanego promieniowania rentgenowskiego mierzone były metodą dyfrakcji na kryształach, opisaną w paragrafie 37.9.

Moseley, przechodząc od jednego do drugiego pierwiastka z układu okresowego, poszukiwał (i znalazł) prawidłowości w tych widmach. W szczególności zauważył, że jeśli dla danej linii widmowej, takiej jak na przykład linia  $K_\alpha$ , wykreśli się zależność pierwiastka kwadratowego z częstości  $\nu$  od miejsca pierwiastka w układzie okresowym, to otrzymany wykres będzie linią prostą. Na rysunku 41.17 przedstawiono część jego licznych danych. Wniosek Moseleya brzmiał następująco:

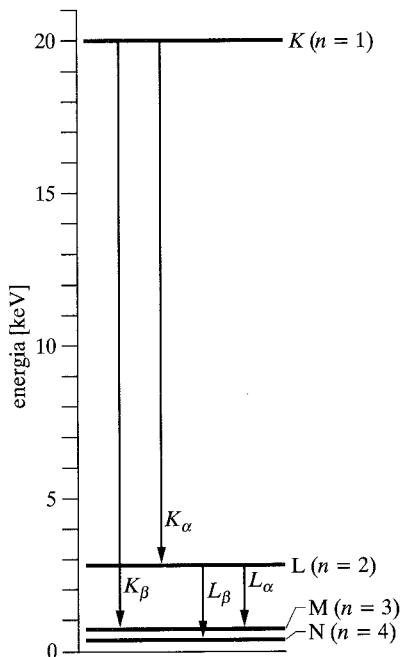
Jest to dowód, że istnieje w atomie podstawowa wielkość, zmieniająca się o stałą wartość przy przechodzeniu od jednego pierwiastka do następnego.

Wielkością tą może być tylko ładunek jądra.

Dzięki pracy Moseleya widmo charakterystyczne promieniowania rentgenowskiego stało się powszechnie uznawaną cechą pierwiastka, umożliwiając rozwiązywanie szeregu zagadek układu okresowego. Przedtem (do 1913 r.) pierwiastki w układzie okresowym szeregowano zgodnie z ich masą atomową, mimo że w kilku przypadkach nieodparte dowody natury chemicznej zaburzały ten porządek. Moseley pokazał, że rzeczywistą podstawą numerowania atomów jest ładunek jądra (a więc liczba atomowa  $Z$ ).

W 1913 r. układ okresowy miał wiele pustych miejsc i wciąż pojawiało się zaskakująco wiele doniesień o nowych pierwiastkach. Widmo rentgenowskie stało się rozstrzygającym testem prawdziwości tych doniesień. Pierwiastki z grupy lantanowców, zwane często pierwiastkami ziem rzadkich, porządkowano niewłaściwie tylko dlatego, że ich podobne właściwości chemiczne utrudniały to porządkowanie. Po opublikowaniu pracy Moseleya pierwiastki te ułożono poprawnie. Bardziej współcześnie tożsamość niektórych pierwiastków znajdujących się w układzie okresowym za uranem została potwierdzona ponad wszelką wątpliwość, kiedy stały się one dostępne w ilościach pozwalających na badanie ich indywidualnych widm rentgenowskich.

Nietrudno zorientować się, dlaczego w widmie charakterystycznym promieniowania rentgenowskiego istnieją tak uderzające regularności przy przechodze-

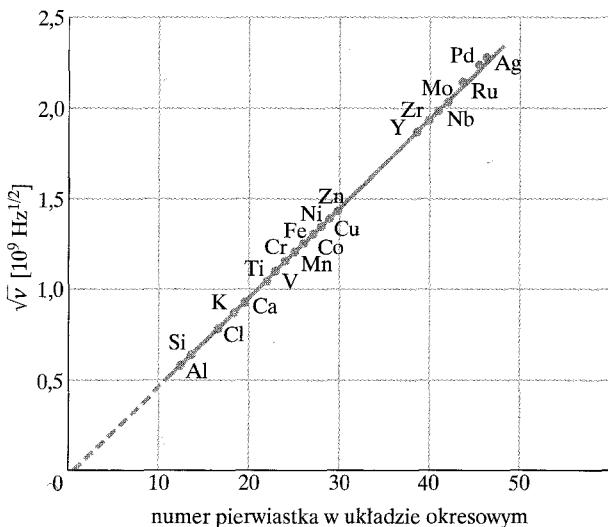


Rys. 41.16. Uproszczony diagram poziomów energetycznych dla molibdenu, pokazujący przejścia (luk, a nie elektronów) odpowiedzialne za niektóre linie widma charakterystycznego promieniowania rentgenowskiego. Każda linia pozioma odpowiada energii atomu z lukią (brakującym elektronem) na oznaczonej powłoce

niu od jednego pierwiastka do drugiego, podczas gdy w widmie optycznym z zakresu widzialnego i jego okolic takich regularności nie ma. Kluczem do identyfikacji atomu jest ładunek jego jądra. Na przykład złoto jest tym, czym jest dlatego, że jego atomy mają ładunek jądra równy  $+79e$  (czyli  $Z = 79$ ). Atom, którego ładunek jądra jest większy o jeden, to atom rtęci, a atom, którego ładunek jest mniejszy o jeden, to atom platyny. Elektryny K, które odgrywają tak znaczną rolę w tworzeniu widma rentgenowskiego, znajdują się bardzo blisko tego jądra i w związku z tym są bardzo czułe na jego ładunek. Z drugiej strony, widmo optyczne jest efektem przejść elektronów z najbardziej zewnętrznych powłok. Ładunek jądra „widziany” przez te zewnętrzne elektryny jest silnie ekranowany przez pozostałe elektryny w atomie i w efekcie widmo optyczne *nie* jest czułym próbnikiem ładunku jądrowego.

### Opis wykresu Moseleya

Dane doświadczalne Moseleya, których wykres pokazany na rysunku 41.17 jest zaledwie częścią, można bezpośrednio wykorzystać do przypisania pierwiastkom właściwego miejsca w układzie okresowym. Można byłoby tego dokonać, nawet gdyby nie istniały teoretyczne podstawy opisu wyników Moseleya. Takie podstawy jednak istnieją.



Rys. 41.17. Wykres Moseleya dla linii  $K_{\alpha}$  widma charakterystycznego 21 pierwiastków. Częstość wyznaczona jest ze zmierzonej długości fali

Zgodnie z równaniem (40.24) energia atomu wodoru wynosi

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.24)$$

Rozważmy teraz jeden z dwóch elektronów na najbardziej wewnętrznej powłoce K atomu wieloelektronowego. Ze względu na obecność drugiego elektronu z powłoki K nasz elektron „widzi” efektywny ładunek jądrowy równy około  $(Z - 1)e$ , gdzie  $e$  jest ładunkiem elementarnym, a  $Z$  jest liczbą atomową pierwiastka. Czynnik  $e^4$  w równaniu (41.24) jest iloczynem  $e^2$  — kwadratu ładunku jądra wodoru i  $(-e)^2$  — kwadratu ładunku elektronu. W przypadku atomu

wieloelektronowego możemy przybliżyć efektywną energię atomu, zamieniając czynnik  $e^4$  w równaniu (41.24) na  $(Z - 1)^2 e^2 \cdot (-e)^2$ , czyli  $e^4(Z - 1)^2$ . Po takim podstawieniu otrzymujemy:

$$E_n = -\frac{(13,6 \text{ eV})(Z - 1)^2}{n^2}. \quad (41.25)$$

Widzieliśmy, że foton promieniowania rentgenowskiego  $K_\alpha$  (o energii  $h\nu$ ) powstaje wtedy, kiedy elektron przechodzi z powłoki L ( $n = 2$ , energia  $E_2$ ) na powłokę K ( $n = 1$ , energia  $E_1$ ). Tak więc, korzystając z równania (41.25), możemy tę zmianę energii zapisać jako

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 \\ &= -\frac{(13,6 \text{ eV})(Z - 1)^2}{2^2} - \frac{-(13,6 \text{ eV})(Z - 1)^2}{1^2} \\ &= (10,2 \text{ eV})(Z - 1)^2. \end{aligned}$$

Częstość  $\nu$  fotonu z linii  $K_\alpha$  jest zatem równa

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{(10,2 \text{ eV})(Z - 1)^2}{(4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})} = (2,46 \cdot 10^{15} \text{ Hz})(Z - 1)^2. \quad (41.26)$$

Pierwiastkując obie strony równania, otrzymamy

$$\sqrt{\nu} = CZ - C, \quad (41.27)$$

gdzie  $C$  jest stałą ( $= 4,96 \cdot 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$ ). Równanie (41.27) jest równaniem linii prostej. Pokazuje ono, że jeśli wykreślmy zależność pierwiastka z częstości fotonu z linii widmowej  $K_\alpha$  promieniowania rentgenowskiego od liczby atomowej pierwiastka  $Z$ , to powinniśmy otrzymać linię prostą. To właśnie zaobserwował Moseley (patrz rysunek 41.17).

**SPRAWDZIAN 3:** Linia  $K_\alpha$  kobaltu ( $Z = 27$ ) ma długość fali równą w przybliżeniu 179 pm. Czy długość fali linii  $K_\alpha$  charakterystycznego promieniowania rentgenowskiego niklu ( $Z = 28$ ) jest większa, czy też mniejsza niż 179 pm?

### Przykład 41.5

W doświadczeniu mierzy się długości fali linii widma charakterystycznego promieniowania rentgenowskiego powstałego w wyniku bombardowania elektronami tarczy kobaltowej. W pomiarze takim pojawia się też drugie słabsze widmo charakterystyczne, które pochodzi z pewnej domieszki w kobaltcie. Długości fali linii  $K_\alpha$  równe są 178,9 pm (kobalt) i 143,5 pm (domieszka), a liczba protonów w jądrze atomu kobaltu równa jest  $Z_{\text{Co}} = 27$ . Korzystając z tych danych, określ, jaka to domieszka.

#### ROZWIĄZANIE:

→ Długości fali linii  $K_\alpha$  zarówno dla kobaltu, jak i dla domieszki (X) leżą na wykresie Moseleya dla linii  $K_\alpha$ , a równanie (41.27) jest równaniem definiującym ten wykres. Podstawiając do

tego równania zamiast częstości  $\nu$  stosunek  $c/\lambda$ , otrzymamy

$$\sqrt{\frac{c}{\lambda_{\text{Co}}}} = CZ_{\text{Co}} - C \quad \text{i} \quad \sqrt{\frac{c}{\lambda_X}} = CZ_X - C.$$

Dzieląc jedno równanie przez drugie, eliminujemy wartość  $C$  i otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\text{Co}}}{\lambda_X}} = \frac{Z_X - 1}{Z_{\text{Co}} - 1}.$$

Po podstawieniu danych mamy

$$\sqrt{\frac{178,9 \text{ pm}}{143,5 \text{ pm}}} = \frac{Z_X - 1}{27 - 1}.$$

Rozwiązuje powyższe równanie, otrzymujemy

$$Z_X = 30. \quad (\text{odpowiedź})$$

Spojrzenie na układ okresowy pozwala na identyfikację tej domieszki jako cynku.

## 41.11. Lasery i światło laserowe

W późnych latach czterdziestych, a potem znowu we wczesnych latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku fizyka kwantowa umożliwiła konstrukcję dwóch niezmiernie ważnych urządzeń: **tranzystora**, który otworzył drogę rewolucji informatycznej, i **lasera**. Światło laserowe, tak jak światło ze zwykłej żarówki, jest emitowane wtedy, gdy atomy dokonują przejścia z jednego stanu kwantowego do stanu kwantowego o niższej energii. W laserze jednak, inaczej niż w innych źródłach światła, atomy działają wspólnie, żeby wytworzyć światło o pewnych charakterystycznych cechach:

1. **Światło lasera jest wysoce monochromatyczne.** Światło ze zwykłej żarówki tworzy widmo ciągłe, na które składa się wiele długości fali i z pewnością nie jest monochromatyczne. Promieniowanie emitowane przez neonówkę jest monochromatyczne, tak że długości fali tego promieniowania różnią się od siebie nie więcej niż o  $10^{-6}$  średniej długości fali tego promieniowania. Dla światła laserowego może być ono znacznie bardziej monochromatyczne:  $10^{-15}$  średniej długości fali.
2. **Światło laserowe jest bardzo spójne.** Pojedyncze ciągi falowe światła laserowego mogą mieć setki kilometrów długości. Gdy dwie części wiązki przebywające takie odległości po różnych drogach, nakładają się znów na siebie, „pamiętają” swój wspólny początek i są w stanie wytworzyć prążki interferencyjne. Odpowiednia *długość spójności (koherencji)* ciągów falowych emitowanych przez żarówkę jest zwykle mniejsza niż metr.
3. **Światło lasera jest bardzo dobrze ukierunkowane.** Wiązka lasera rozszerza się w bardzo małym stopniu. Jej odstępstwo od dokładnej równoległości wynika wyłącznie z efektów dyfrakcyjnych okienka wyjściowego lasera. Na przykład impuls laserowy wykorzystywany do pomiaru odległości do powierzchni Księżyca wytwarza na jego powierzchni plamkę o średnicy zaledwie kilku metrów. Światło ze zwykłej żarówki można za pomocą soczewek uformować w wiązkę w przybliżeniu równoległą. Jednak rozbieżność takiej wiązki jest znacznie większa niż rozbieżność wiązki lasera. Każdy fragment włókna żarówki wytwarza osobną wiązkę, a rozbieżność kątowa wiązki wyprodukowanej jest określona przez rozmiar tego włókna.
4. **Światło lasera można dokładnie skupić.** Jeśli dwie wiązki światła przenoszą taką samą ilość energii, to wiązka, którą można skupić w mniejszą plamkę, będzie miała tam większe natężenie. Ognisko światła laserowego może być tak małe, że łatwo osiągnąć w nim gęstość mocy równą  $10^{17} \text{ W/cm}^2$ . Natężenie światła w płomieniu palnika tlenowo-acetylenowego jest zaledwie rzędu  $10^3 \text{ W/cm}^2$ .

### Liczne zastosowania lasera

Aktywnym ośrodkiem najmniejszych laserów, używanych do transmisji dźwięku i danych przez światłowody, są kryształy półprzewodnikowe o rozmiarach główkii od szpilki. Jakkolwiek małe, lasery takie potrafią wytworzyć około 200 mW

mocy. Największe lasery używane do badań nad syntezą jądrową, a także stosowane w astronomii i do celów wojskowych wypełniają duży budynek. Największy taki laser potrafi generować krótkie impulsy światła o mocy w impulsie sięgającej około  $10^{14}$  W. Jest to moc kilkaset razy większa od całkowitej mocy wytwarzanej przez elektrownie w Stanach Zjednoczonych. Aby podczas takiego impulsu nie doprowadzić do krótkiego załamania krajowego systemu energetycznego, energia potrzebna w każdym impulsie gromadzona jest ze stałą szybkością podczas stosunkowo długich przerw pomiędzy impulsami.

Spośród wielu innych zastosowań laserów można wymienić: skanowanie kodu paskowego, produkcję i odtwarzanie płyt kompaktowych, chirurgię różnego rodzaju (patrz fotografia otwierająca ten rozdział i rysunek 41.18), geodezję, cięcie materiałów w przemyśle odzieżowym (kilkaset warstw naraz), spawanie karoserii samochodowych i tworzenie hologramów.



Rys. 41.18. Przyklejanie siatkówek za pomocą lasera skierowanego do wnętrza oka pacjentki

## 41.12. Jak działa laser

Słowo *laser* jest skrótem angielskiej nazwy *light amplification by the stimulated emission of radiation* (wzmocnienie światła przez wymuszoną emisję promieniowania), a więc nie powinieneś być zaskoczony, że kluczem do działania lasera jest **emisja wymuszona**. Pojęcie to wprowadził w 1917 r. Einstein. Mimo że świat zobaczył działający laser dopiero w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku, to podstawy jego konstrukcji istniały już dziesiątki lat wcześniej.

Rozważmy izolowany atom, który może istnieć zarówno w stanie o najniższej energii równej  $E_0$  (w stanie podstawowym), jak i w stanie o wyższej energii  $E_x$  (w stanie wzbudzonym). Poniżej wymienimy trzy procesy, dzięki którym atom może przejść z jednego stanu do drugiego:

- Absorpcja.** Na rysunku 41.19a pokazano atom znajdujący się początkowo w stanie podstawowym. Jeśli taki atom umieścimy w zmiennym polu elektromagnetycznym o częstotliwości  $\nu$ , to będzie on mógł pochłonąć z tego pola energię  $h\nu$  i przejść do stanu o wyższej energii. Z zasady zachowania energii wynika, że

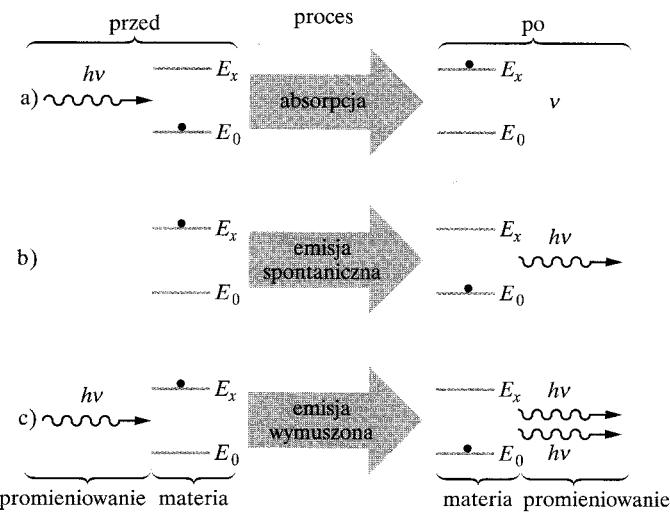
$$h\nu = E_x - E_0. \quad (41.28)$$

Proces taki nazywamy **absorpcją**.

- Emisja spontaniczna.** Atom na rysunku 41.19b znajduje się w stanie wzbudzonym i nie istnieje żadne promieniowanie zewnętrzne. Po pewnym czasie atom ten *sam z siebie* przejdzie do stanu podstawowego, emitując w takim procesie foton o energii  $h\nu$ . Proces taki nazywamy **emisją spontaniczną**, ponieważ akt ten nie jest wywołany żadnym czynnikiem zewnętrznym. W taki sposób powstaje światło we włóknie zwykłej żarówki.

Normalnie średni czas życia wzbudzonych atomów, czyli średni czas, jaki upłynie, zanim nastąpi emisja spontaniczna, wynosi około  $10^{-8}$  s. Jednak w przypadku niektórych stanów wzbudzonych ten średni czas może być nawet  $10^5$  razy dłuższy. Takie stany o długim czasie życia, nazywane stanami **metatrwałymi**, odgrywają w działaniu lasera ważną rolę.

**Rys. 41.19.** Oddziaływanie promieniowania i materii w procesach a) absorpcji, b) emisji spontanicznej, c) emisji wymuszonej. Atom (materia) przedstawiony jako czerwona kropka może się znajdować albo w stanie kwantowym o niższej energii  $E_0$ , albo w stanie kwantowym o wyższej energii  $E_x$ . W procesie (a) atom pochłania z fali świetlnej foton o energii  $h\nu$ . W procesie (b) atom emituje spontanicznie foton o energii  $h\nu$ . W procesie (c) światło o energii fotonów  $h\nu$  wymusza emisję fotonu o tej samej energii, zwiększąc tym samym energię niesioną przez falę świetlną



3. **Emisja wymuszona.** Atom na rysunku 41.19c także znajduje się w stanie wzbudzonym, ale tym razem w obecności promieniowania elektromagnetycznego o częstości danej równaniem (41.28). Foton o energii  $h\nu$  może wymusić na tym atomie jego przejście do stanu podstawowego. W czasie takiego procesu emitowany będzie dodatkowy foton, którego energia także równa będzie  $h\nu$ . Proces taki nazywamy **emisją wymuszoną**, ponieważ taki akt jest wyzwalany przez foton pochodzący z zewnątrz. Foton emitowany jest pod każdym względem identyczny z fotonem wymuszającym, a więc fale związane z tymi fotonomi mają taką samą energię, fazę, polaryzację i kierunek rozchodzenia się.

Na rysunku 41.19c pokazano emisję wymuszoną dla pojedynczego atomu. Przypuśćmy teraz, że próbka zawiera dużą liczbę atomów znajdujących się w równowadze termodynamicznej w temperaturze  $T$ . Zanim skierujemy na tę próbkę jakiekolwiek promieniowanie, w stanie podstawowym o energii  $E_0$  znajduje się  $N_0$  atomów, a w stanie o wyższej energii  $E_x$  znajduje się  $N_x$  atomów. Ludwig Boltzmann pokazał, że  $N_x$  można wyrazić za pomocą  $N_0$  wzorem

$$N_x = N_0 e^{-(E_x - E_0)/kT}, \quad (41.29)$$

w którym  $k$  jest stałą Boltzmanna. Równanie to wygląda rozsądnie. Wielkość  $kT$  jest średnią energią kinetyczną atomu w temperaturze  $T$ . Im wyższa jest ta temperatura, tym więcej średnio rzecz biorąc atomów zostanie „przerzuconych” w wyniku ich termicznych zderzeń do wyższego stanu energetycznego  $E_x$ . Ponadto, ponieważ  $E_x > E_0$ , równanie (41.29) wymaga, aby  $N_x < N_0$ , a więc żeby zawsze w wyższym stanie energetycznym było mniej atomów niż w stanie niższym. Tego właśnie możemy się spodziewać, jeśli obsadzenie poziomów energetycznych  $N_0$  i  $N_x$  będzie wyłącznie wynikiem zderzeń termicznych atomów. Rysunek 41.20a ilustruje tę sytuację.

Jeśli teraz atomy pokazane na rysunku 41.20a poddamy oddziaływaniu z dużą liczbą fotонów o energii  $E_x - E_0$ , to fotony będą pochłaniane przez atomy znajdujące się w stanie podstawowym i wytwarzane w większości przez emisję wymuszoną atomów znajdujących się w stanie wzbudzonym. Einstein pokazał,



**Rys. 41.20.** a) Równowagowy skład obsadzeń stanu podstawowego  $E_0$  i stanu wzbudzonego  $E_x$ , ustalający się w wyniku zderzeń termicznych. b) Inwersja obsadzeń uzyskiwana specjalnymi metodami. Takie odwrócenie obsadzeń jest kluczowe dla akcji laserowej

że przypadające na jeden atom prawdopodobieństwa tych dwóch procesów są jednakowe. Zatem ponieważ więcej atomów znajduje się w stanie podstawowym, *wypadkowym* efektem będzie absorpcja fotonów.

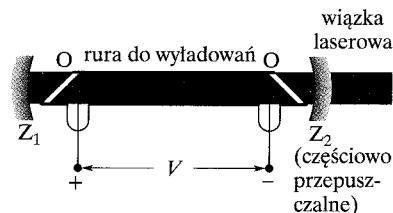
Aby wytworzyć światło laserowe, musi być więcej atomów emitujących światło, niż atomów, które je pochłaniają, innymi słowy musi być sytuacja, w której dominuje emisja wymuszona. Bezpośrednim sposobem doprowadzenia do takiej sytuacji jest zapoczątkowanie procesu z większą liczbą atomów w stanie wzbudzonym niż w stanie podstawowym, tak jak na rysunku 41.20b. Jednak ponieważ takie **odwrócenie (inwersja) obsadzeń** nie jest możliwe w stanie równowagi termodynamicznej, musimy znaleźć jakiś sprytny sposób osiągnięcia i utrzymania takiego odwrócenia obsadzeń.

## Laser helowo-neonowy

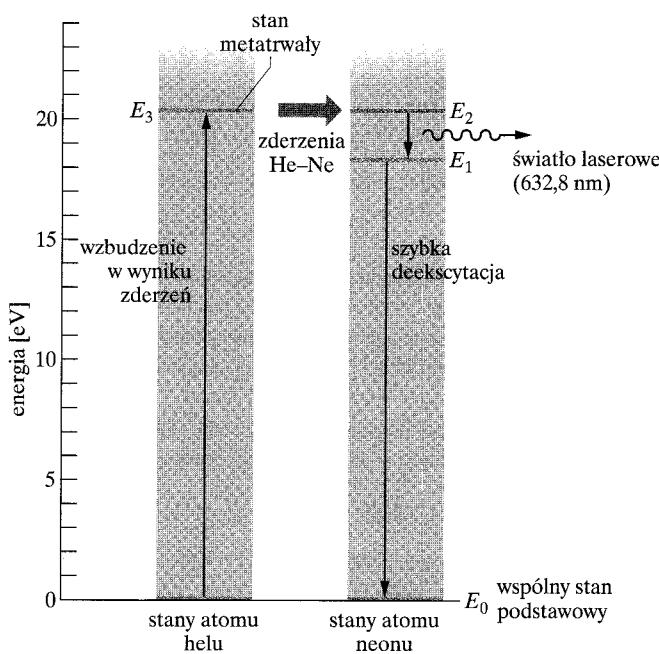
Na rysunku 41.21 pokazano typ lasera powszechnie stosowanego w laboratoriach studenckich. Został on zbudowany w 1961 r. przez Ali Javana i jego współpracowników. Szklana rura do wyładowań elektrycznych wypełniona jest gazową mieszaną helu i neonu w stosunku 20 : 80. Akcja laserowa zachodzi w neonie.

Na rysunku 41.22 pokazano uproszczone diagramy poziomów energetycznych dla atomów helu i neonu. W wyniku przepływu prądu przez mieszaninę tych gazów rośnie energia atomów helu zderzających się z elektronami. Na skutek tych zderzeń atomy helu przechodzą do stanu o energii  $E_3$ , który jest metatrwały.

Energia stanu  $E_3$  atomu helu (20,61 eV) jest bardzo bliska energii stanu  $E_2$  atomu neonu (20,66 eV). Tak więc w zderzeniu metatrwałego atomu helu i atomu neonu w stanie podstawowym ( $E_0$ ) wzbudzenie atomu helu jest często przenoszone do atomu neonu, który przechodzi do stanu o energii  $E_2$ . W taki sposób w atomach neonu poziom  $E_2$  z rysunku 41.22 może stać się silniej obsadzony niż poziom  $E_1$ .



Rys. 41.21. Budowa gazowego lasera helowo-neonowego. Przyłożone napięcie  $V$  powoduje przepływ elektronów przez rurę do wyładowań wypełnioną mieszaną gazowego helu i neonu. Elektrony zderzają się z atomami helu, które następnie zderzają się z atomami neonu emitującymi światło w całej długości rury. Światło to przechodzi przez przepuszczalne okienka O i odbija się od zwierciadeł  $Z_1$  i  $Z_2$ , przechodząc tam i z powrotem, i powodując silniejszą emisję światła przez atomy neonu. Część światła wydostaje się przez zwierciadło  $Z_2$ , tworząc wiązkę laserową.



Rys. 41.22. Cztery poziomy energetyczne atomów helu i neonu, kluczowe dla działania lasera helowo-neonowego. Akcja laserowa zachodzi pomiędzy poziomami neonu  $E_2$  i  $E_1$ , gdy na poziomie  $E_2$  znajduje się więcej atomów niż na poziomie  $E_1$ .

Ta inwersja obsadzeń jest stosunkowo prosta do osiągnięcia, ponieważ: 1) początkowo w zasadzie nie ma atomów neonu znajdujących się w stanie  $E_1$ , 2) metatrwałość poziomu helu  $E_3$  zapewnia stały dopływ atomów neonu w stanie  $E_2$  i 3) atomy neonu w stanie o energii  $E_1$  przechodzą szybko (przez poziomy pośrednie nie pokazane na rysunku) do stanu podstawowego o energii  $E_0$ .

Załóżmy teraz, że w pewnej chwili następuje spontaniczna emisja fotonu przy przejściu atomu neonu ze stanu  $E_2$  do stanu  $E_1$ . Ten foton może wywołać emisję wymuszoną drugiego fotonu, a następnie oba mogą wywołać dalsze akty emisji wymuszonej. W wyniku takiej reakcji łańcuchowej tworzy się błyskawiczne spójna wiązka czerwonego światła laserowego poruszająca się równolegle do osi rury. Światło to, o długości fali 632,8 nm przechodzi wielokrotnie przez rurę do wyładowań, odbijając się kolejno od zwierciadeł  $Z_1$  i  $Z_2$  (rys. 41.21). Przy każdym przejściu gromadzi ona dodatkowe fotony powstałe w wyniku emisji wymuszonej. Zwierciadło  $Z_1$  całkowicie odbija światło, zwierciadło  $Z_2$  zaś jest częściowo „przepuszczalne”, tak że mała część światła laserowego zdoła przeszedzieć, tworząc użyteczną wiązkę zewnętrzną.

**SPRAWDZIAN 4:** Długość fali światła z lasera A (lasera gazowego helowo-neonowego) wynosi 632,8 nm, z lasera B (lasera gazowego CO<sub>2</sub>) — 10,6 μm, a z lasera C (lasera półprzewodnikowego z arsenkiem galu) — 840 nm. Uszereguj te lasery zgodnie z malejącą różnicą energii pomiędzy dwoma stanami odpowiedzialnymi za akcję laserową.

## Przykład 41.6

Akcja laserowa w laserze helowo-neonowym z rysunku 41.21 zachodzi pomiędzy dwoma stanami wzbudzonymi atomu neonu. Jednak w wielu laserach akcja laserowa zachodzi pomiędzy stanem podstawowym i stanem wzbudzonym, tak jak to pokazano na rysunku 41.20.

a) Rozważ laser, który emitem światło o długości fali  $\lambda = 550$  nm. Ile wynosi stosunek liczby atomów w stanie  $E_x$  do liczby atomów w stanie  $E_0$ , jeśli atomy znajdują się w temperaturze pokojowej i nie jest wytwarzana inwersja obsadzeń?

### ROZWIĄZANIE:

1. Stosunek obsadzeń  $N_x/N_0$  tych dwóch stanów w równowadze termodynamicznej, to znaczy pochodzących od zderzeń termicznych atomów gazu, wynika z równania (41.29), które możemy przekształcić do postaci

$$N_x/N_0 = e^{-(E_x - E_0)/kT}. \quad (41.30)$$

Aby z równania (41.30) obliczyć stosunek  $N_x/N_0$ , musimy wyznaczyć różnicę energii  $E_x - E_0$  pomiędzy tymi stanami.

2. Różnicę energii:  $E_x - E_0$  można obliczyć z danej długości fali światła laserowego  $\lambda = 550$  nm, emitowanego przy przejściu pomiędzy tymi stanami:

$$E_x - E_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{(550 \cdot 10^{-9} \text{ m})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} \\ &= 2,26 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Aby rozwiązać równanie (41.30), musimy także znać średnią energię termiczną  $kT$  atomu w temperaturze pokojowej (300 K). Wynosi ona:

$$kT = (8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 0,0259 \text{ eV}.$$

Podstawienie tych dwóch ostatnich wyników do równania (41.30) pozwala nam znaleźć stosunek obsadzeń w temperaturze pokojowej:

$$\begin{aligned} N_x/N_0 &= e^{-(2,26 \text{ eV})/(0,0259 \text{ eV})} \\ &\approx 1,3 \cdot 10^{-38}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to niezwykle mała liczba. Wynik ten jest jednak poprawny. Atom, którego średnia energia termiczna równa jest jedynie 0,0259 eV, nieczęsto przekaże w zderzeniu drugiemu atomowi energię 2,26 eV.

b) W jakiej temperaturze stosunek obsadzeń  $N_x/N_0$  w przypadku omawianym w punkcie (a) wynosiłby  $\frac{1}{2}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z tych samych stwierdzeń kluczowych, których użyliśmy w punkcie (a). Tym razem jednak poszukujemy temperatury  $T$ , w której zderzenia termiczne wzbudziły do wyższego stanu energetycznego na tyle dużo atomów, że stosunek obsadzeń

$N_x/N_0$  byłby równy  $\frac{1}{2}$ . Podstawiając ten stosunek do równania (41.30), a następnie obliczając logarytm naturalny z obu stron równania i rozwiązuje ją względem  $T$ , otrzymujemy

$$T = \frac{E_x - E_0}{k \ln 2} = \frac{2,26 \text{ eV}}{(8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}) \ln 2} = 38\,000 \text{ K.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymana temperatura jest znacznie wyższa niż temperatura powierzchni Słońca. Jasne jest, że jeśli chcemy odwrócić obsadzenie tych dwóch poziomów, to potrzebny jest jakiś szczególny mechanizm, który do tego doprowadzi. Innymi słowy, musimy „pompować atomy”. W żadnej, dowolnie wysokiej temperaturze nie osiągniemy odwrócenia obsadzeń na skutek samych tylko zderzeń termicznych.

## Podsumowanie

**Niektóre właściwości atomów** Energie atomów są skwantowane, a więc atomy mogą przyjmować tylko pewne szczególne wartości energii związane z ich różnymi stanami kwantowymi. Atomy mogą przechodzić z jednego stanu do drugiego, emisując lub pochłaniając fotony. Częstość  $v$  światła związanego z takim fotonem wynosi

$$\nu = E_w - E_n, \quad (41.1)$$

gdzie  $E_w$  jest energią wyższą, a  $E_n$  jest energią niższą pary stanów kwantowych biorących udział w tym przejściu. Atomy mają także skwantowane momenty pędu i magnetyczne momenty dipolowe.

**Momenty pędu i magnetyczne momenty dipolowe** Elektron uwięziony w atomie ma orbitalny moment pędu  $\vec{L}$  o wartości równej

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad (41.2)$$

gdzie  $l$  jest orbitalną liczbą kwantową (mogącą przyjmować wartości przedstawione w tabeli 41.1), stała „ $h$  kreślone” zaś jest równa  $\hbar = h/2\pi$ . Rzut  $L_z$  momentu pędu  $\vec{L}$  na dowolną oś  $z$  jest skwantowany i mierzalny, jego wartość zaś wynosi

$$L_z = m_l \hbar, \quad (41.7)$$

gdzie  $m_l$  jest magnetyczną orbitalną liczbą kwantową (mogącą przyjmować wartości przedstawione w tabeli 41.1).

Z momentem pędu elektronu  $\vec{L}$  związany jest orbitalny magnetyczny moment dipolowy  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ , który jest skierowany przeciwnie do wektora  $\vec{L}$ :

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \vec{L}. \quad (41.3)$$

Rzut  $\vec{\mu}_{\text{orb},z}$  orbitalnego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_{\text{orb}}$  na dowolną oś  $z$  jest skwantowany i mierzalny, jego wartość zaś wynosi

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \mu_B, \quad (41.5)$$

gdzie  $\mu_B$  jest magnetonem Bohra:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{4\pi m} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T.} \quad (41.6)$$

Elektron zarówno uwięziony, jak i swobodny ma wewnętrzny spinowy moment pędu (lub po prostu spin)  $\vec{S}$ , którego wartość wynosi

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad (41.9)$$

gdzie  $s$  jest spinową liczbą kwantową elektronu, która zawsze jest równa  $\frac{1}{2}$ . Rzut  $S_z$  spinu  $\vec{S}$  na dowolną oś  $z$  jest skwantowany i mierzalny, jego wartość zaś wynosi

$$S_z = m_s \hbar, \quad (41.12)$$

gdzie  $m_s$  jest magnetyczną spinową liczbą kwantową elektronu, która może być równa  $+\frac{1}{2}$  lub  $-\frac{1}{2}$ .

Bez względu na to, czy elektron jest swobodny, czy uwięziony w atomie, ma wewnętrzny magnetyczny moment dipolowy, który jest związany z jego spinowym momentem pędu  $\vec{S}$ . Ten spinowy magnetyczny moment dipolowy  $\vec{\mu}_s$  jest antyrównoległy do wektora  $\vec{S}$ :

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}. \quad (41.10)$$

Rzut  $\mu_{s,z}$  spinowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_s$  jest także skwantowany i mierzalny, jego wartość zaś wynosi

$$\mu_{s,z} = -2m_s \mu_B. \quad (41.13)$$

**Spin i rezonans magnetyczny** Proton ma wewnętrzny spinowy moment pędu  $\vec{S}$  i związany z nim spinowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , który jest zawsze skierowany równolegle do  $\vec{S}$ . Jeśli proton umieszczony zostanie w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}$ , to rzut  $\mu_z$  tego momentu magnetycznego na oś  $z$  (równoległą do kierunku  $\vec{B}$ ) może przybierać tylko dwie orientacje: równoległą do  $\vec{B}$  i antyrównoległą do  $\vec{B}$ . Różnica energii odpowiadających tym stanom wynosi  $2\mu_z B$ . Energia fotonu potrzebna do odwrócenia spinu protonu i przejścia pomiędzy tymi dwoma stanami wynosi

$$\nu = 2\mu_z (B_{\text{zew}} + B_{\text{lok}}), \quad (41.22)$$

gdzie  $B_{\text{zew}}$  odpowiada indukcji pola zewnętrznego,  $B_{\text{lok}}$  zaś jest indukcją lokalnego pola magnetycznego pochodzącego od atomów i jąder otaczających ten proton. Wykrywając takie procesy odwracania spinu, otrzymujemy widma jądrowego rezonansu magnetycznego, które umożliwiają identyfikację różnych substancji.

**Zakaz Pauliego** Elektrony w atomie i innych pułapkach podlegają zakazowi Pauliego, który wymaga, aby dowolne dwa elektrony w tym samym atomie lub innego typu pułapce różniły się co najmniej jedną liczbą kwantową.

**Budowa układu okresowego** Pierwiastki w układzie okresowym ułożone są w kolejności ich rosnącej liczby atomowej  $Z$ . Ładunek jądra równy jest  $Ze$ , a  $Z$  jest zarówno liczbą protonów w jądrze, jak i liczbą elektronów w obojętnym atomie.

Stany o takiej samej wartości głównej liczby kwantowej  $n$  tworzą **powłokę**, te zaś, które mają takie same wartości zarówno  $n$ , jak i  $l$ , tworzą **podpowłokę**. Wypadkowe momenty pędu i momenty magnetyczne elektronów tworzących **zamkniętą**, czyli mieszczącą maksymalną liczbę elektronów, powłokę lub podpowłokę są równe zeru.

**Promieniowanie rentgenowskie i numerowanie pierwiastków** Ciągłe widmo promieniowania rentgenowskiego jest emitowane przez wysokoenergetyczne elektrony, gdy w zderzeniach z jądrami atomów tracą one część swojej energii. **Granica krótkofałowa**  $\lambda_{\min}$  jest długością fali fotonu emitowanego, gdy takie elektrony tracą w pojedynczym zderzeniu całą swoją energię początkową:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{k0}}, \quad (41.23)$$

gdzie  $E_{k0}$  jest początkową energią kinetyczną elektronów padających na tarczę.

**Charakterystyczne widmo promieniowania rentgenowskiego** powstaje wtedy, gdy wysokoenergetyczne elektrony wybijają elektrony z głębiej położonych powłok atomowych. Kiedy

powstała w taki sposób luka jest zapełniana przez elektron z wyższego poziomu energetycznego atomu, generowany jest foton charakterystycznego widma promieniowania rentgenowskiego.

W 1913 r. brytyjski fizyk H. G. J. Moseley zmierzył częstość linii tych charakterystycznych widm dla wielu pierwiastków. Zauważył on, że wykres zależności pierwiastka kwadratowego tej częstości od położenia pierwiastka w układzie okresowym jest linią prostą, tak jak na wykresie Moseleya z rysunku 41.17. Pozwoliło mu to wyciągnąć wniosek, że własnością określającą położenie pierwiastka w układzie okresowym nie jest jego masa atomowa, ale jego liczba atomowa  $Z$  — a więc liczba protonów w jego jądrze.

**Laser i światło laserowe** Światło laserowe powstaje w wyniku emisji wymuszonej. Promieniowanie o częstości danej równaniem

$$h\nu = E_x - E_0 \quad (41.28)$$

może wywołać przejście atomu z poziomu o energii wyższej ( $E_x$ ) na poziom o energii niższej i emisję fotonu o częstości  $v$ . Wymszajający foton i foton emitowany są identyczne pod każdym względem i wspólnie tworzą światło laserowe.

Aby emisja fotonu była procesem dominującym, musi nastąpić **odwrócenie obsadzeń**, a więc w stanie o wyższej energii musi być więcej atomów niż w stanie o energii niższej.

## Pytania

1. Elektron w atomie złota znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej  $n = 4$ . Czy wartości orbitalnej liczby kwantowej  $l$  tego elektronu: mogą być  $-3, 0, 2, 3, 4, 5$ ?

2. Atom srebra ma zamknięte podpowłoki  $3d$  i  $4d$ . Czy liczba elektronów na tych powłokach jest jednakowa, czy nie?

3. Atom uranu ma zamknięte podpowłoki  $6p$  i  $7s$ . Na której podpowłoce jest więcej elektronów?

4. Elektron w atomie rtęci znajduje się na podpowłoce  $3d$ . Czy wartości magnetycznej liczby kwantowej  $m_l$  elektronu mogą być:  $-3, -1, 0, 1, 2$ ?

5. Z ilu podpowłok i z ilu stanów elektronowych składa się a) powłoka o  $n = 2$ ? b) powłoka o  $n = 5$ ?

6. Z którego atomu z następujących par pierwiastków łatwiej jest usunąć elektron: a) kryptonu czy bromu, b) rubidu czy ceru, c) helu czy wodoru?

7. Od jakich liczb kwantowych zależy energia elektronu w a) atomie wodoru i b) w atomie wanadu?

8. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe, a które fałszywe? a) Jedna (i tylko jedna) z poniższych podpowłok nie może istnieć:  $2p, 4f, 3d, 1p$ . b) Liczba dozwolonych wartości liczby kwantowej

$m_l$  zależy tylko od  $l$ , a nie od  $n$ . c) Istnieją cztery podpowłoki z  $n = 4$ . d) Najmniejszą wartością głównej liczby kwantowej  $n$  dla zadanej orbitalnej liczby kwantowej  $l$  jest  $l + 1$ . e) Wszystkie stany o  $l = 0$  mają także  $m_l = 0$ . f) W skład każdej powłoki o głównej liczbie kwantowej  $n$  wchodzi  $n$  podpowłok.

9. Które z poniższych stwierdzeń dotyczących doświadczenia Einsteina-de Haasa są prawdziwe, a które fałszywe? a) Atomy mają momenty pędu. b) Momenty pędu atomów są skwantowane. c) Atomy mają momenty magnetyczne. d) Momenty magnetyczne atomów są skwantowane. e) Moment pędu atomu jest silnie sprzężony z jego momentem magnetycznym. f) Interpretacja doświadczenia Einsteina-de Haasa opiera się na zasadzie zachowania pędu.

10. Rozważmy dwa pierwiastki: krypton i rubid. a) Który z nich bardziej nadaje się do wykorzystania w doświadczeniu Sterna-Gerlacha z rysunku 41.8? b) Czy któryś z nich, a jeżeli tak, to który nie nadaje się w ogóle?

11. Na rysunku 41.14 pokazane jest widmo promieniowania rentgenowskiego zmierzone wtedy, gdy elektrony o energii 35 keV padają na tarczę wykonaną z molibdenu ( $Z = 42$ ). Wyobraź sobie, że tarczę w tym doświadczeniu wykonano ze srebra ( $Z = 47$ ), a nie z molibdem. Czy a)  $\lambda_{\min}$ , b) długość fali linii  $K_\alpha$ , c) długość fali linii  $K_\beta$  wzrosną, zmaleją, nie zmienią się?

**12.** Linia  $K_{\alpha}$  promieniowania rentgenowskiego dla dowolnego pierwiastka powstaje w wyniku przejścia pomiędzy powłoką K ( $n = 1$ ) i powłoką L ( $n = 2$ ). Na rysunku 41.14 linia ta (dla tarczy wykonanej z molibdenu) jest pojedyncza. Jednak, stosując większą rozdzielcość, można zobaczyć, że linia ta rozszczepia się na szereg linii o różnych długościach fal. Jest tak dlatego, gdyż w powłoce L występują stany o różnej energii. a) Ile składowych ma ta linia  $K_{\alpha}$ ? b) Ile składowych ma linia  $K_{\beta}$ ?

**13.** Czy poniższe właściwości są kluczowe dla pojawienia się akcji laserowej pomiędzy dwoma poziomami atomu? Które z nich są kluczowe? a) W stanie o wyższej energii znajduje się więcej atomów niż w stanie o energii niższej. b) Wyższy poziom

energetyczny jest metatrwały. c) Niższy poziom energetyczny jest metatrwały. d) Niższy poziom energetyczny to poziom stanu podstawowego tego atomu. e) Aktywnym ośrodkiem lasera jest gaz.

**14.** Na rysunku 41.22 pokazano częściowy diagram poziomów energetycznych atomów helu i neonu, istotnych z punktu widzenia działania lasera helowo-neonowego. Powiedziano, że atom helu znajdujący się w stanie o energii  $E_3$  może się zderzyć z atmem neonu w stanie podstawowym i przenieść ten atom do stanu wzbudzonego  $E_2$ . Energia stanu  $E_3$  atomu helu (20,61 eV) jest bliska, ale nie jest dokładnie równa energii stanu  $E_2$  atomu neonu (20,66 eV). W jaki sposób przekazanie energii jest możliwe, choć te energie nie są dokładnie równe?

## Zadania

www Rozwiązywanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązywanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 41.4 Momenty pędu i momenty magnetyczne

**1.** Pokaż, że  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,59 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$ .

**2.** Ile stanów elektronowych wchodzi w skład następujących podpowłok o: a)  $n = 4, l = 3$ ; b)  $n = 3, l = 1$ ; c)  $n = 4, l = 1$ ; d)  $n = 2, l = 0$ ?

**3.** a) Ile wartości  $l$  jest dozwolonych dla stanów o  $n = 3$ ? b) Ile wartości  $m_l$  jest dozwolonych dla stanów o  $l = 1$ ?

**4.** a) Oblicz wartość orbitalnego momentu pędu dla stanu o  $l = 3$ . b) Oblicz wartość największego rzutu tego momentu pędu na wyróżnioną osią  $z$ .

**5.** Ile stanów elektronowych wchodzi w skład następujących powłok o: a)  $n = 4$ , b)  $n = 1$ , c)  $n = 3$ , d)  $n = 2$ ?

**6.** Wypisz wszystkie liczby kwantowe dla stanów tworzących podpowłokę o  $n = 4$  i  $l = 3$ .

**7.** Elektron w atomie wodoru znajduje się w stanie o  $l = 5$ . Ile wynosi najmniejszy możliwy kąt pomiędzy wektorem  $\vec{L}$  a wyróżnioną osią  $z$ ?

**8.** Maksymalna wartość  $m_l$  elektronu w atomie wieloelektronowym wynosi +4. Co można powiedzieć o pozostałych liczbach kwantowych tego elektronu?

**9.** Orbitalna liczba kwantowa elektronu w atomie wieloelektronowym równa jest  $l = 3$ . Podaj dozwolone liczby kwantowe  $n$ ,  $m_l$  i  $m_s$  dla tego elektronu.

**10.** Ile stanów elektronowych wchodzi w skład powłoki zdefiniowanej przez wartość głównej liczby kwantowej  $n = 5$ ?

**11.** Elektron znajduje się w stanie o orbitalnej liczbie kwantowej  $l = 3$ . Oblicz wartości a)  $\vec{L}$  i b)  $\vec{\mu}$ . c) Ułóż tabelę z dozwolonymi wartościami  $m_l$ ,  $L_z$  (w jednostkach  $\hbar$ ),  $\mu_{\text{orb},z}$  (w jednostkach  $\mu_B$ ) i półklasycznego kąta  $\theta$  pomiędzy wektorem  $\vec{L}$  a dodatnim kierunkiem osi  $z$ .

**12.** Elektron znajduje się w stanie o  $n = 3$ . Podaj a) liczbę możliwych wartości  $l$ , b) liczbę możliwych wartości  $m_l$ , c) liczbę możliwych wartości  $m_s$ , d) liczbę stanów wchodzących w skład powłoki o  $n = 3$  i e) liczbę podpowłok wchodzących w skład powłoki o  $n = 3$ ?

**13.** Pokaż, że jeśli mierzmy rzut orbitalnego momentu pędu  $\vec{L}$  wzdłuż powiedzmy osi  $z$ , aby uzyskać wartość  $L_z$ , to o pozostałych składowych momentu pędu można co najwyżej powiedzieć, iż

$$(L_x^2 + L_y^2)^{1/2} = [l(l+1) - m_z^2]^{1/2}\hbar.$$

**14.** (Zasada odpowiedniości) Oszacuj a) liczbę kwantową  $l$  dla orbitalnego ruchu Ziemi wokół Słońca i b) liczbę dozwolonych orientacji płaszczyzny orbity ziemskiej zgodnie z zasadami kwantyzacji przestrzennej. c) Oblicz  $\theta_{\min}$  — połowę kąta tworzącego stożka zataczanego przez oś normalną do płaszczyzny ziemskiej orbity w trakcie jej ruchu dookoła Słońca.

### 41.5 Doświadczenie Sterna–Gerlacha

**15.** Oblicz dwa możliwe kąty pomiędzy wektorem elektronowego spinowego momentu pędu i kierunkiem pola magnetycznego w zagnieniu rozważanym w przykładzie 41.1. Pamiętaj, że orbitalny moment pędu elektronu walencyjnego w atomie srebra równy jest zeru.

**16.** Założymy, że pole magnetyczne  $\vec{B}$  w doświadczeniu Sterna–Gerlacha, opisanym dla obojętnych atomów srebra, ma wartość 0,5 T. a) Ile wynosi różnica energii atomów różniących się orientacjami momentu magnetycznego, tworzących dwie roz-

dzielone wiązki w tym doświadczeniu? b) Ile wynosi częstość promieniowania, które spowodowałoby przejście pomiędzy tymi dwoma stanami? c) Ile wynosi długość fali tego promieniowania i do jakiego zakresu promieniowania elektromagnetycznego ono należy? Moment magnetyczny obojętnego atomu srebra równy jest 1 magnetonowi Bohra.

**17.** Ile wynosi przyspieszenie atomu srebra w momencie, gdy przechodzi przez odchylający magnes w doświadczeniu Stern-Gerlacha opisanym w przykładzie 41.1?

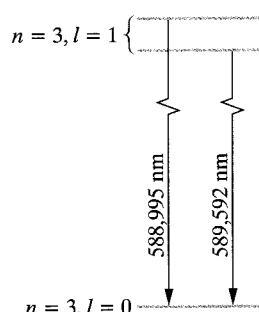
**18.** Założymy, że atom wodoru w stanie podstawowym dostaje się w obszar pola magnetycznego o długości 80 cm, które jest skierowane prostopadle do kierunku jego ruchu i którego gradient wynosi  $dB/dz = 1,6 \cdot 10^2 \text{ T/m}$ . a) Znajdź siłę, jaką gradient pola magnetycznego będzie oddziaływać na ten atom ze względu na moment magnetyczny jego elektronu. Przyjmujemy, że ten moment magnetyczny równy jest 1 magnetonowi Bohra. b) Ile wynosi przesunięcie atomu w kierunku pionowym, jeśli w kierunku poziomym przebył on w polu magnetycznym 80 cm, a jego początkowa prędkość była równa  $1,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ ?

## 41.6 Rezonans magnetyczny

**19.** Ile wynosi długość fali związanego z fotonem, który spowoduje zmianę orientacji spinu elektronowego z równoległej na antyrównoległą do pola magnetycznego o indukcji 0,2 T? Przyjmij, że  $l = 0$ .

**20.** Spinowa liczba kwantowa  $s$  protonu, tak jak elektronu, równa jest  $\frac{1}{2}$ . Atom wodoru w stanie podstawowym ( $n = 1$  i  $l = 0$ ) ma dwa poziomy energetyczne, różniące się ustawieniem spinu elektronu i protonu (równoległy lub antyrównoległy). Przy odwróceniu spinu i przejściu atomu ze stanu o wyższej energii do stanu o niższej energii emitowany jest foton o długości fali 21 cm. Radioastronomowie obserwują takie promieniowanie o długości fali 21 cm dochodzące z przestrzeni kosmicznej. Oblicz efektywne pole magnetyczne (związane z momentem magnetycznym protonu), w jakim znajduje się elektron, emitując to promieniowanie.

**21.** Wzbudzone atomy sodu emittują dwie blisko położone linie widmowe (*doublet sodowy*, patrz rysunek 41.23) o długościach fali 588,995 nm i 589,592 nm. a) Ile wynosi różnica energii pomiędzy dwoma wyższymi poziomami energetycznymi? b) Różnica ta pojawiła się, gdyż spinowy moment magnetyczny elektronu (= 1 magneton Bohra) może być skierowany albo równolegle, albo antyrównolegle do wewnętrznego pola magnetycznego związanego z orbitalnym ruchem elektronu. Wykorzystaj wynik z punktu (a) do obliczenia indukcji tego wewnętrznego pola magnetycznego.



Rys. 41.23. Zadanie 21

**22.** Do próbki zawierającej atomy wodoru przyłożone jest zewnętrzne zmienne pole magnetyczne o częstotliwości 34 MHz. Gdy indukcja stałego zewnętrznego pola magnetycznego jest równa 0,78 T, obserwuje się rezonans. Oblicz indukcję lokalnego pola magnetycznego w miejscu położenia protonów, które doznają odwrócenia spinów, zakładając, że pole zewnętrzne i pole wewnętrzne są w tym miejscu równoległe. Dla protonów  $\mu_z = 1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$ .

## 41.8 Wiele elektronów w pułapkach prostokątnych

**23.** W jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$  uwiezionej jest siedem elektronów. Ile wynosi energia stanu podstawowego układu tych siedmiu elektronów wyrażona jako wielokrotność  $h^2/8mL^2$ ? Przyjmij, że elektryny nie oddziałują ze sobą i nie zaniedbij spinu.

**24.** W prostokątnej, nieskończonej zagrodzie potencjału o wymiarach  $L_x = L$  i  $L_y = 2L$  uwiezionej jest siedem elektronów. Ile wynosi energia stanu podstawowego układu tych siedmiu elektronów wyrażona jako wielokrotność  $h^2/8mL^2$ ? Przyjmij, że elektryny nie oddziałują ze sobą i nie zaniedbij spinu.

**25.** W sytuacji przedstawionej w zadaniu 23 oblicz wyrażone jako wielokrotności  $h^2/8mL^2$  energie: a) pierwszego stanu wzbudzonego, b) drugiego stanu wzbudzonego i c) trzeciego stanu wzbudzonego tego układu siedmiu elektronów. d) Narysuj diagram poziomów energetycznych dla czterech najniższych poziomów tego układu.

**26.** W sytuacji przedstawionej w zadaniu 24 oblicz wyrażone jako wielokrotności  $h^2/8mL^2$  energie: a) pierwszego stanu wzbudzonego, b) drugiego stanu wzbudzonego i c) trzeciego stanu wzbudzonego tego układu siedmiu elektronów. d) Narysuj diagram poziomów energetycznych dla czterech najniższych poziomów tego układu.

**27.** W sześciennym pudle o wymiarach  $L_x = L_y = L_z = L$  znajduje się osiem elektronów. Ile wynosi energia stanu podstawowego układu tych ośmiu elektronów wyrażona jako wielokrotność  $h^2/8mL^2$ ? Przyjmij, że elektryny nie oddziałują ze sobą i nie zaniedbij spinu.

**28.** W sytuacji przedstawionej w zadaniu 27 oblicz wyrażone jako wielokrotności  $h^2/8mL^2$  energie: a) pierwszego stanu wzbudzonego, b) drugiego stanu wzbudzonego i c) trzeciego stanu wzbudzonego tego układu ośmiu elektronów. d) Narysuj diagram poziomów energetycznych dla czterech najniższych poziomów tego układu.

## 41.9 Budowa układu okresowego

**29.** Pokaż, że jeśli 63 elektryny w atomie europu umieszczone by na powłokach zgodnie z „logiczną” sekwencją liczb kwantowych, to pierwiastek ten miałby właściwości chemiczne podobne do właściwości sodu.

**30.** Rozważ następujące pierwiastki: selen ( $Z = 34$ ), brom ( $Z = 35$ ) i krypton ( $Z = 36$ ). W części układu okresowego, w której się znajdują te pierwiastki, podpowłoki stanów elektronowych zapełniane są w następującej kolejności:

1s      2s 2p      3s 3p 3d      4s 4p ...

Dla każdego z tych pierwiastków wskaż podpowłokę o najwyższej energii, która jest całkowicie zapełniona. Ile elektronów znajduje się na tej podpowłoce?

**31.** Przypuśćmy, że elektron nie miałby spinu, ale zakaz Pauliego nadal by obowiązywał. Czy któryś z aktualnych gazów szlachetnych pozostały nadal gazem szlachetnym? Jeśli tak, to który?

**32.** Oblicz cztery liczby kwantowe dla dwóch elektronów atomu helu w stanie podstawowym.

**33.** Liczby kwantowe dwóch elektronów litu ( $Z = 3$ ) równe są  $n = 1$ ,  $l = 0$ ,  $m_l = 0$  i  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Jakie liczby kwantowe może przyjąć trzeci elektron, jeśli atom ma być: a) w stanie podstawowym, b) w pierwszym stanie wzbudzonym?

**34.** Przypuśćmy, że dwa elektryny w tym samym atomie mają liczby kwantowe  $n = 2$  i  $l = 1$ . a) Jeśli zakaz Pauliego nie obowiązywał, to ile kombinacji stanów byłoby możliwych? b) Ile stanów jest zabronionych przez zakaz Pauliego? Które to stany?

**35.** Pokaż, że liczba stanów o tej samej liczbie kwantowej  $n$  równa jest  $2n^2$ .

#### 41.10 Promieniowanie rentgenowskie i numerowanie pierwiastków

**36.** Ile wynosi minimalna różnica potencjałów przyspieszająca elektron w lampie rentgenowskiej, aby wytworzyć promieniowanie rentgenowskie o długości fali 0,1 nm?

**37.** Wyznacz stałą Plancka, wiedząc, że granica krótkofalowa promieniowania rentgenowskiego powstającego podczas bombardowania tarczy elektronami o energii 40 keV wynosi 31,1 pm.

**38.** Pokaż, że granica krótkofalowa (wyrażona w pikometrach) ciągłego widma promieniowania rentgenowskiego emitowanego z dowolnej tarczy wynosi  $\lambda_{\min} = 1240/V$ , gdzie  $V$  jest różnicą potencjałów (wyrażoną w kilowoltach) przyspieszającą elektryny przed uderzeniem w tarczę.

**39.** Promieniowanie rentgenowskie produkowane jest w lampie przez elektryny przyspieszane przez różnicę potencjałów równą 50 kV. Elektron przed zatrzymaniem trzykrotnie zderza się z atomami tarczy. Podczas dwóch pierwszych zderzeń traci połowę swojej energii kinetycznej. Ile wynoszą długości fali fotonów powstających podczas tych zderzeń? (Zaniedbaj odrzut ciężkich atomów tarczy).

**40.** Elektron o energii 20 keV zatrzymuje się po kolejnych zderzeniach z dwoma jądrami, tak jak to pokazano na rysunku 41.15, przekazując całą swoją energię dwóm kolejno wyemitowanym fo-

tonom. Długość fali związana z drugim fotonem jest o 130 pm większa niż długość fali związana z pierwszym fotonem. a) Oblicz energię kinetyczną elektronu po pierwszym zderzeniu. b) Wyznacz energie fotonów i odpowiadające im długości fali.

**41.** Pokaż, że poruszający się elektron nie może spontanicznie wyemitować fotonu promieniowania rentgenowskiego. Musi być przy tym obecne trzecie ciało (atom lub jądro). Dlaczego? (Wskaźówka: Sprawdź zasadę zachowania energii i pędu).

**42.** W wyniku bombardowania elektronami tarczy z molibdenu powstaje zarówno ciągłe, jak i charakterystyczne widmo rentgenowskie, jak pokazano na rysunku 41.14. Energia kinetyczna padających elektronów na tym rysunku wynosi 35 keV. Jakie będą średnie wartości: a)  $\lambda_{\min}$ , b) długości fali linii  $K_\alpha$  i c) długości fali linii  $K_\beta$ , jeśli potencjał przyspieszający elektryny zwiększy się do 50 keV?

**43.** Promieniowanie rentgenowskie, którego widmo pokazano na rysunku 41.14, powstaje w wyniku bombardowania tarczy z molibdenu ( $Z = 42$ ) elektronami o energii 35 keV. Jakie byłyby wartości a)  $\lambda_{\min}$ , b) długości fali linii  $K_\alpha$  i c) długości fali linii  $K_\beta$ , jeśli elektronami o takiej samej energii byłaby bombardowana tarcza ze srebra ( $Z = 47$ )? Energie poziomów K, L i M dla srebra (por. rys. 41.16) wynoszą odpowiednio 25,51 keV; 3,56 keV i 0,53 keV.

**44.** Długość fali linii  $K_\alpha$  żelaza wynosi 193 pm. Ile wynosi różnica energii pomiędzy dwoma stanami atomu żelaza, między którymi zachodzi to przejście?

**45.** Oblicz stosunek długości fali linii  $K_\alpha$  dla niobu (Nb) i dla galu (Ga). Potrzebne dane znajdź w układzie okresowym (dodatek G).

**46.** Korzystając z rysunku 41.14, znajdź przybliżoną różnicę energii  $E_L - E_M$  dla molibdenu. Porównaj ją z wartością, jaką można uzyskać z rysunku 41.16.

**47.** Poniżej wypisano długości fali linii  $K_\alpha$  dla kilku pierwiastków:

Pierwiastek	$\lambda$ [pm]	Pierwiastek	$\lambda$ [pm]
Ti	275	Co	179
V	250	Ni	166
Cr	229	Cu	154
Mn	210	Zn	143
Fe	193	Ga	134

Wykonaj wykres Moseleya (jak na rysunku 41.17), korzystając z tych danych, i sprawdź, czy jego nachylenie zgadza się z wartością  $C$  podaną w paragrafie 41.10.

**48.** W wyniku bombardowania molibdenu ( $Z = 42$ ) elektronami o energii 35 keV powstaje widmo promieniowania rentgenowskiego pokazane na rysunku 41.14. Długości fali linii  $K_\beta$  i  $K_\alpha$  wynoszą odpowiednio 63 pm i 71 pm. a) Ile wynoszą odpowiadające im energie fotonów? b) Jakiej substancji należałoby użyć jako filtra, aby linia  $K_\beta$  została zaabsorbowana w niej znacznie silniej

niż linia  $K_\alpha$ ? Wartości energii jonizacji elektronów  $K$  w molibdenie i czterech sąsiednich pierwiastkach są następujące:

	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru
Z	40	41	42	43	44
$E_K$ [keV]	18,0	18,99	20,0	21,04	22,12

(Wskazówka: Substancja pochłonie jeden rodzaj promieniowania znacznie silniej niż drugi, jeśli fotonów pierwszego rodzaju będą miały wystarczająco dużą energię, aby wyrzucić z atomu substancji elektron  $K$ , fotonów zaś drugiego rodzaju — nie).

49. Tarcza wykonana z wolframu ( $Z = 74$ ) bombardowana jest przez elektrony w lampie rentgenowskiej. a) Ile wynosi minimalna wartość potencjału przyspieszającego, która pozwoli na wytworzenie charakterystycznych linii  $K_\alpha$  i  $K_\beta$  wolframu? b) Oblicz wartość  $\lambda_{\min}$  dla tego potencjału. c) Oblicz długości fali linii  $K_\alpha$  i  $K_\beta$ . Energia poziomów K, L i M wolframu (patrz rys. 41.16) równe są odpowiednio: 69,5 keV, 11,3 keV i 2,3 keV.

50. Energie wiązania elektronów na powłokach K i L w atomie miedzi wynoszą odpowiednio 8,979 keV i 0,951 keV. Promieniowanie rentgenowskie linii  $K_\alpha$  atomu miedzi padające na kryształ chlorku sodu daje refleks braggowski pierwszego rzędu pod kątem  $74,1^\circ$  względem równoległych płaszczyzn atomów sodu. Ile wynosi odległość pomiędzy tymi płaszczyznami?

51. a) Korzystając z równania (41.26), oszacuj stosunek energii fotonów związanych z przejściami  $K_\alpha$  w dwóch atomach, których liczby atomowe równe są  $Z$  i  $Z'$ . b) Ile wynosi ten stosunek dla uranu i glinu? c) A dla uranu i litu?

52. Wyznacz różnice pomiędzy teoretycznymi wartościami energii fotonów linii  $K_\alpha$  promieniowania rentgenowskiego otrzymywanymi z równania (41.27) a wartościami zmierzonymi dla lekkich pierwiastków od litu do magnezu. Aby tego dokonać, a) wyznacz najpierw stałą  $C$  z równania (41.27) z dokładnością do pięciu cyfr znaczących, wyrażając ją przez stałe podstawowe z równania (41.24), a następnie b) używając wartości liczbowych tych stałych z dodatku B, oblicz względne odchylenia pomiędzy wartościami teoretycznymi i wartościami zmierzonymi doświadczalnie. c) Na koniec przedstaw te odchylenia na wykresie i skomentuj otrzymany przebieg. Zmierzone energie fotonów  $K_\alpha$  dla tych pierwiastków wyrażone w elektronowoltach przedstawiono poniżej:

Li	54,3	O	524,9
Be	108,5	F	676,8
B	183,3	Ne	848,6
C	277	Na	1041
N	392,4	Mg	1254

(W rzeczywistości, ze względu na rozszczepienie poziomu energetycznego L, jest więcej niż jedna linia  $K_\alpha$ , jednak dla wymienionych pierwiastków rozszczepienie to jest bardzo małe).

## 41.12 Jak działa laser

53. Lasery można wykorzystywać do generacji krótkich impulsów światła o czasie trwania nawet 10 fs. a) Ile długości fali światła ( $\lambda = 500$  nm) składa się na taki impuls? b) Uzupełnij poniższą proporcjonalność (wyraź  $X$  w latach):

$$\frac{10 \text{ fs}}{1 \text{ s}} = \frac{1 \text{ s}}{X}.$$

54. Ile moli neonu potrzeba w warunkach z przykładu 41.6a, aby w stanie wzbudzonym o energii  $E_x$  znajdowało się 10 atomów?

55. Hipotetyczny atom ma poziomy energetyczne odległe o 1,2 eV. Jaki jest stosunek liczby atomów w trzynastym stanie wzbudzonym do liczby atomów w jedenastym stanie wzbudzonym tego atomu w temperaturze 2000 K?

56. Mierząc czas przelotu impulsu laserowego z ziemskiego obserwatorium do zwierciadła na Księżycu i z powrotem, można obliczyć odległość między tymi dwoma ciałami niebieskimi. a) Ile wynosi przewidywany czas tego przelotu? b) Odległość można zmierzyć z dokładnością około 15 cm; jakiej to odpowiada niepewności czasu przelotu? c) Jaka jest kątowa rozbieżność wiązki lasera, jeśli tworzy ona na Książycu ślad o średnicy 3 km?

57. Hipotetyczny atom ma tylko dwa atomowe poziomy energetyczne, odległe o 3,2 eV. Przypuśćmy, że na pewnej wysokości w atmosferze gwiazdy znajduje się  $6,1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  tych atomów w wyższym stanie energetycznym i  $2,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  atomów w niższym stanie energetycznym. Jaka jest temperatura atmosfery tej gwiazdy na tej wysokości?

58. Odwrócenie obsadzeń dla dwóch poziomów energetycznych często opisuje się, nadając układowi ujemną temperaturę. Jaka ujemna temperatura opisałaby układ, w którym obsadzenie wyższego poziomu energetycznego przewyższa obsadzenie poziomu niższego o 10%, różnica zaś energii pomiędzy tymi dwoma poziomami równa jest 2,1 eV?

59. Laser impulsowy emiteje światło o długości fali 694,4 nm. Czas trwania impulsu wynosi 12 ps, energia zaś przypadająca na impuls równa jest 0,15 J. a) Ile wynosi długość tego impulsu? b) Ile fotonów emitowanych jest w każdym impulsie?

60. Laser helowo-neonowy emiteje światło laserowe o długości fali 632,8 nm i mocy 2,3 mW. Z jaką szybkością urządzenie to emituje fotony?

61. Wiązka lasera o dużej mocy ( $\lambda = 600$  nm) o średnicy wiązki 12 cm kierowana jest na Książyc odległy o  $3,8 \cdot 10^5$  km. Rozbieżność tej wiązki jest wyłącznie wynikiem dyfrakcji. Rozmiar kątowy krawędzi centralnego krążka dyfrakcyjnego (patrz równanie (37-12)) dany jest równaniem

$$\sin \theta = \frac{1,22\lambda}{d},$$

gdzie  $d$  jest średnicą tej wiązki. Jaka jest średnica centralnego dysku dyfrakcyjnego na powierzchni Księżyca?

**62.** Przypuśćmy, że dostępne byłyby lasery, dla których długości fali można by precyjnie „stroić” w zakresie widzialnym, a więc od 450 nm do 650 nm. Ile kanałów telewizyjnych można by zmieścić w tym zakresie długości fali, jeśli każdy kanał zajmuje pasmo o szerokości 10 MHz?

**63.** Aktywna objętość lasera półprzewodnikowego zbudowanego z GaAlAs wynosi zaledwie  $200 \mu\text{m}^3$  (jest mniejsza niż ziarenko piasku), a mimo to taki laser może w sposób ciągły dostarczać światło o długości fali 0,8  $\mu\text{m}$  i moc 5,0 mW. Z jaką szybkością taki laser generuje fotony?

**64.** Odległe o 8 cm zwierciadła w laserze z rysunku 41.21 tworzą optyczną wnękę rezonansową, w której mogą powstać fale stojące światła laserowego. Dla każdej fali stojącej na długości 8 cm znajduje się całkowita liczba  $n$  połówek długości fali. Liczba  $n$  jest duża, a fale różnią się nieco długościami. O ile różnią się długości fali tych fal stojących w okolicach  $\lambda = 533 \text{ nm}$ ?

**65.** Aktywny ośrodek pewnego lasera, w którym generowane jest światło laserowe o długości fali 694 nm, ma 6,0 cm długości i 1,0 cm średnicy. a) Potraktuj ten ośrodek jak optyczną wnękę rezonansową podobną do zamkniętej piszczalki organów. Ile węzłów fali stojącej znajduje się wzdłuż osi lasera? b) O jaką wartość  $\Delta\nu$  musiałaby się zmienić częstotliwość tej fali, aby zwiększyć tę wartość o jeden? c) Pokaż, że  $\Delta\nu$  jest dokładnie równe odwrotności czasu przelotu światła laserowego wzdłuż osi lasera i z powrotem. d) Ile wynosi odpowiednie względne przesunięcie częstotliwości  $\Delta\nu/\nu$ ? Współczynnik załamania aktywnego ośrodka lasera (kryształu rubinu) wynosi 1,75. [www](#)

**66.** Hipotetyczny atom ma dwa poziomy energetyczne. Długość fali światła odpowiadająca optycznemu przejściu pomiędzy tymi poziomami równa jest 580 nm. W temperaturze 300 K, w pewnej konkretnej próbce,  $4 \cdot 10^{20}$  takich atomów znajduje się w stanie o niższej energii. a) Ile atomów znajduje się w stanie o wyższej energii, jeśli założymy, że spełnione są warunki równowagi termodynamicznej? b) Przypuśćmy, że za pomocą pewnego procesu zewnętrznego  $3,0 \cdot 10^{20}$  atomów „przepompowano” do stanu o wyższej energii, pozostawiając w niższym stanie energetycznym  $1,0 \cdot 10^{20}$  atomów. Jaką maksymalną energię mogą wyzwolić te atomy w pojedynczym impulsie laserowym, jeśli każdy atom przechodzi tylko raz pomiędzy tymi dwoma stanami (albo na skutek absorpcji, albo w wyniku emisji wymuszonej)?

**67.** Czy nadlatująca rakieta międzykontynentalna może zostać zniszczona za pomocą wiązki laserowej o dużej mocy? Wiązka o gęstości mocy  $10^8 \text{ W/m}^2$  prawdopodobnie zapaliłaby i zniszczyła taką wzmacnioną (nie obracającą się) rakietę w ciągu 1 s. a) Czy wiązka lasera, o mocy 5 MW (w istocie bardzo potężnego), średnicy 4 m i długości fali 3  $\mu\text{m}$ , byłaby w stanie zestrzelić rakietę odległą o 3000 km? b) Ile mogłaby wynosić maksymalnie długość fali emitowanego światła (gdyby można było ją zmieniać), aby osiągnąć ten sam efekt? Skorzystaj ze wzoru na centralny krążek dyfrakcyjny podanego w zadaniu 61.

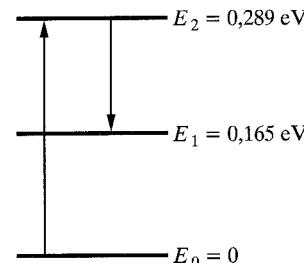
**68.** Wiązka lasera argonowego (o długości fali 515 nm) emitującego w sposób ciągły 5,0 W mocy ma średnicę  $d$  równą 3,00 mm. Wiązka ta została zogniskowana za pomocą soczewki o ogniskowej  $f = 3,5 \text{ cm}$ . W efekcie powstał obraz dyfrakcyjny, taki jak na rysunku 37.9, którego centralny krążek ma średnicę

$$R = \frac{1,22f\lambda}{d}$$

(patrz równanie (37.12) i przykład 37.3). Można pokazać, że ten centralny krążek zawiera 84% padającej mocy. a) Ile wynosi średnica tego centralnego krążka? b) Ile wynosi średnie natężenie (moc przypadająca na jednostkę powierzchni) padającej wiązki? c) Ile wynosi średnie natężenie w centralnym krążku?

### Zadania dodatkowe

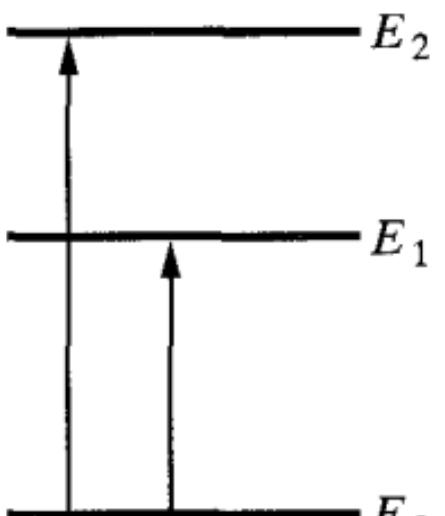
**69. Marsjański laser CO<sub>2</sub>.** W części atmosfery Marsa, do której dociera światło słoneczne, na wysokości około 75 km, w cząsteczkach dwutlenku węgla samorzutnie zachodzi akcja laserowa. Poziomy energetyczne biorące w niej udział przedstawione są na rysunku 41.24. Odwrócenie obsadzeń zachodzi pomiędzy poziomami  $E_2$  i  $E_1$ . a) Jaka długość fali światła słonecznego pobudza te cząsteczki do akcji laserowej? b) Światło o jakiej długości fali emitowane jest w wyniku tej akcji? c) Do jakiego zakresu promieniowania elektromagnetycznego należy światło wzbudzające i emitowane przez taki laser?



Rys. 41.24. Zadanie 69

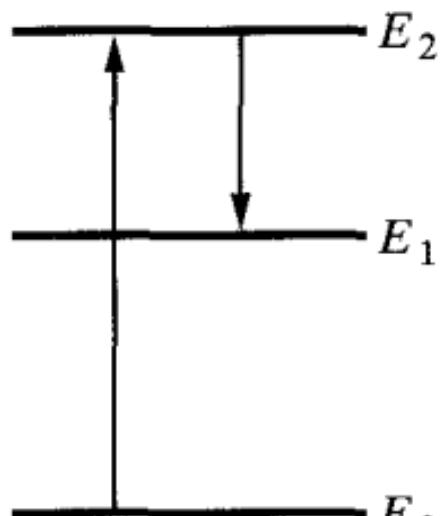
**70. Emisja wymuszona w kometach.** Kiedy kometa zbliża się do Słońca, wówczas w wyniku podwyższenia temperatury wyparowuje woda z lodu zamarzniętego na powierzchni jej jądra. W efekcie dookoła jądra komety powstaje cienka atmosfera pary wodnej. Światło słoneczne jest w stanie spowodować dysocjację pary wodnej na H i OH. Następnie światło może wzbudzić cząsteczki OH do wyższych stanów energetycznych, z których dwa pokazane są na rysunku 41.25.

Kiedy kometa jest jeszcze stosunkowo daleko od Słońca, światło słoneczne powoduje jednakowe wzbudzenie na poziomy  $E_2$  i  $E_1$  (rys. 41.25a). Tak więc nie ma między tymi poziomami inwersji obsadzeń. Jednak gdy kometa zbliży się do Słońca, wzbudzenie na poziom  $E_1$  zmniejsza się i pojawia się inwersja obsadzeń. Ma to związek z brakiem w widmie słonecznym pewnych długości fali — *linii Fraunhofera* — które są pochłamiane przez atmosferę słoneczną.



a)

Rys. 41.25. Zadanie 70



b)

Kiedy kometa zbliża się do Słońca, w wyniku zjawiska Dopplera związanego z jej ruchem względem Słońca zmienia się rejestrówana przez kometę długość fali linii Fraunhofera. W efekcie jedna z tych linii odpowiada długości fali światła potrzebnego do wzbudzenia cząsteczki OH na poziom energetyczny  $E_1$ . Pojawia się wtedy inwersja obsadzeń stanów energetycznych tych cząsteczek i wymuszona emisja światła (rys. 41.25b). Na przykład kometa Kohoutka, która zbliżała się do Słońca w grudniu 1973 r. i w styczniu 1974 r., emitowała w taki sposób w połowie stycznia promieniowanie o częstotliwości 1666 MHz. a) Ile wynosi różnica energii  $E_2 - E_1$  dla tego promieniowania? b) W jakim obszarze widma znajduje się to promieniowanie?

# 42 Przewodnictwo elektryczne cia³ sta³ych

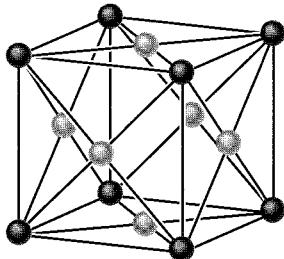
Grupa pracowników fabryki Fab 11 w Rio Rancho w stanie Nowy Meksyk. Fabryka o wartości 2,5 miliarda dolarów amerykańskich zajmuje obszar równy powierzchni około 24 boisk piłkarskich. Według *New York Timesa* ten zakład, położony „na wysokim pustynnym płaskowyżu

w Nowym Meksyku jest prawdopodobnie najbardziej produktywną fabryką na świecie, jeśli chodzi o wartość wytwarzanych w niej wyrobów”.

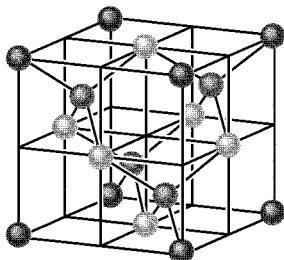
Jaka produkcja wymaga od tych ludzi ubierania się w stroje przypominające kombinezony astronautów?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





a)



b)

Rys. 42.1. a) Komórka elementarna struktury krystalicznej miedzi jest sześcianem. W każdym wierzchołku tego sześcianu (atom ciemniejszy) i w środku każdej z jego ścian (atom jaśniejszy) znajduje się jeden atom miedzi. Taka struktura krystaliczna nazywana jest siecią regularną powierzchniowo centrowaną (fcc — ang. *face centered cubic*). b) Komórka elementarna krzemu i diamentu jest także sześcianem, a sieć taką nazywa się *strukturą diamentu*. Jeden atom znajduje się w każdym wierzchołku tego sześcianu (atom najciemniejszy) i w środku każdej z jego ścian (atom najjaśniejszy). Ponadto cztery atomy (o pośrednim kolorze) znajdują się wewnątrz sześcianu. Każdy atom wiąże się ze swoimi czterema najbliższymi sąsiadami czterema dwuelektronowymi wiązaniami kovalencyjnymi (jedynie dla czterech wewnętrznych atomów pokazano na rysunku wszystkich najbliższych sąsiadów)

## 42.1. Ciało stałe

Przekonaliśmy się już, jak dobrze fizyka kwantowa tłumaczy właściwości pojedynczych atomów. W tym rozdziale mamy nadzieję pokazać na jednym obszernym przykładzie, że fizyka kwantowa równie dobrze radzi sobie z wyjaśnianiem zachowania układów atomów, tworzących ciała stałe.

Każde ciało stałe ma mnóstwo właściwości, jakie możemy badać. Czy jest przezroczyste? Czy można je rozwalcować na cienki arkusz? Jak szybko rozchodzi się w nim fala dźwiękowa? Jakie są jego właściwości magnetyczne? Czy jest dobrym przewodnikiem ciepła? ... Przykłady można mnożyć bez końca. W tym jednak rozdziale skupimy uwagę na jednym zagadnieniu: *Jakie są mechanizmy, dzięki którym ciało stałe przewodzi lub nie przewodzi elektryczności?* Jak się przekonamy, odpowiedzi na to pytanie dostarczy fizyka kwantowa.

## 42.2. Właściwości elektryczne ciał stałych

W naszych rozważaniach będziemy się zajmować tylko **krystalicznymi ciałami stałymi**, a więc ciałami stałymi, których atomy uporządkowane są w określonej trójwymiarowej strukturze zwanej **siecią**. Nie będziemy rozważać takich ciał stałych, jak drewno, tworzywa sztuczne, szkło i guma, w których atomy nie są ułożone w taki powtarzalny sposób. Na rysunku 42.1 pokazano podstawowe, powtarzające się **komórki elementarne** struktury krystalicznej miedzi, która będzie naszym modelowym metałem oraz krzemu i diamentu, które będą odpowiednio naszym modelowym półprzewodnikiem i izolatorem.

Ciała stałe można klasyfikować zgodnie z trzema podstawowymi właściwościami elektrycznymi. Są nimi:

- Opór elektryczny właściwy**  $\rho$  w temperaturze pokojowej. Jego jednostką w układzie SI jest  $\Omega \cdot \text{m}$ . Opór właściwy został zdefiniowany w paragrafie 27.4.
- Temperaturowy współczynnik oporu**  $\alpha$  zdefiniowany równaniem (27.17) jako  $\alpha = (1/\rho)(d\rho/dT)$ . Jednostką temperaturowego współczynnika oporu w układzie SI jest odwrotność kelwina ( $\text{K}^{-1}$ ). Współczynnik  $\alpha$  możemy wyznaczyć dla każdego ciała stałego, mierząc jego opór właściwy  $\rho$  w pewnym zakresie temperatur.
- Koncentracja nośników ładunku**  $n$ . Wielkość tę, zdefiniowaną jako liczba nośników ładunku przypadająca na jednostkę objętości, można wyznaczyć, badając zjawisko Halla, tak jak to przeanalizowano w paragrafie 29.4, a także z innych pomiarów. Jednostką koncentracji nośników ładunku w układzie SI jest odwrotność metra sześciennego ( $\text{m}^{-3}$ ).

Mierząc jedynie opór właściwy w temperaturze pokojowej, stwierdzimy, że pewne materiały — nazywamy je **izolatorami** — nie przewodzą praktycznie rzecz biorąc elektryczności. Materiały te mają bardzo duży opór właściwy. Doskonałym przykładem jest diament, którego opór właściwy jest większy niż opór właściwy miedzi o gigantyczny czynnik  $10^{24}$ .

Wyniki pomiarów  $\rho$ ,  $\alpha$  i  $n$  możemy następnie wykorzystać do podziału większości nieizolatorów, co najmniej w niskich temperaturach, na dwie główne kategorie. Są nimi **metale** i **półprzewodniki**.

Opór właściwy półprzewodników  $\rho$  jest znacznie większy niż opór właściwy metali.

Temperaturowy współczynnik oporu półprzewodników  $\alpha$  jest zarówno duży, jak i ujemny. Oznacza to, że opór właściwy półprzewodnika *zmniejsza się* ze wzrostem temperatury, podczas gdy opór właściwy metalu z temperaturą *rośnie*.

Koncentracja nośników prądu  $n$  jest w półprzewodnikach znacznie mniejsza niż w metalach.

W tabeli 42.1 przedstawiono wartości tych wielkości dla miedzi — naszego modelowego metalu i dla krzemu — naszego modelowego półprzewodnika.

Teraz, dysponując wynikami pomiarów  $\rho$ ,  $\alpha$  i  $n$ , mamy już doświadczalne podstawy uściślenia podstawowego pytania o przewodnictwo elektryczne w ciałach stałych: *Co powoduje, że diament jest izolatorem, miedź — metalem, a krzem — półprzewodnikiem?* Odpowiedź na to pytanie po raz kolejny przyniesie nam fizyka kwantowa.

Tabela 42.1. Niektóre właściwości elektryczne dwóch materiałów\*

Właściwość	Jednostka	Materiał	
		miedź	krzem
Charakter przewodnika		metal	półprzewodnik
Opór właściwy, $\rho$	$\Omega \cdot \text{m}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^3$
Współczynnik temperaturowy oporu, $\alpha$	$\text{K}^{-1}$	$+4 \cdot 10^{-3}$	$-70 \cdot 10^{-3}$
Koncentracja nośników ładunku, $n$	$\text{m}^{-3}$	$9 \cdot 10^{28}$	$1 \cdot 10^{16}$

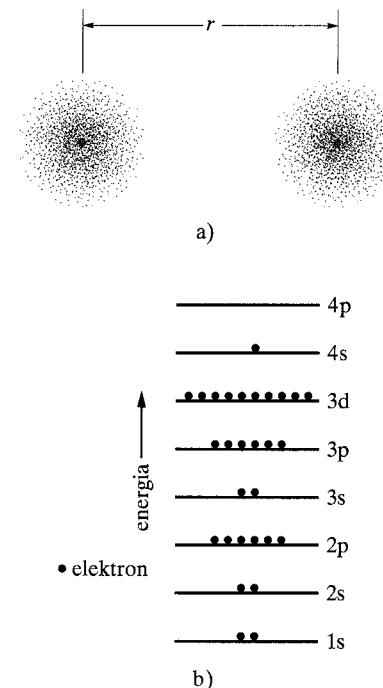
\*Wszystkie wartości odnoszą się do temperatury pokojowej.

## 42.3. Poziomy energetyczne w krysztale

Odległość pomiędzy sąsiednimi atomami w krysztale miedzi wynosi 260 pm. Na rysunku 42.2a pokazano dwa izolowane atomy miedzi oddalone o  $r$  i znajdujące się znacznie dalej od siebie niż w prawdziwym krysztale. Tak jak to pokazano na rysunku 42.2b, w każdym z tych izolowanych obojętnych atomów znajduje się 29 elektronów zajmujących kolejne podpowłoki:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1.$$

Do identyfikacji tych podpowłok użyliśmy skróconej notacji z paragrafu 41.9. Przypomnij sobie, że na przykład podpowłoka o głównej liczbie kwantowej  $n = 3$  i orbitalnej liczbie kwantowej  $l = 1$  nazywana jest w tej notacji podpowłoką 3p. Może ona pomieścić do  $2l(2l + 1) = 6$  elektronów; górnym wskaźnikiem przy symbolu podpowłoki oznaczono liczbę elektronów w tej powłoce w danym przypadku. Widzimy powyżej, że pierwszych sześć podpowłok atomu miedzi jest całkowicie zapełnionych, ale na najbardziej zewnętrznej podpowłoce 4s, na której mogą się znajdować 2 elektrony, jest tylko jeden.



Rys. 42.2. a) Dwa atomy miedzi znajdują się w dużej odległości od siebie. Rysunek przedstawia rozkład gęstości prawdopodobieństwa elektronu. b) Każdy atom miedzi ma 29 elektronów obsadzających zbiór podpowłok elektronicznych. W obojętnym elektrycznie atomie w stanie podstawowym zapełnione są wszystkie podpowłoki aż do podpowłoki 3d. Na podpowłoce 4s (która może przyjąć dwa elektrony) znajduje się jeden elektron, a wyższe podpowłoki są puste. Dla uproszczenia odległość pomiędzy podpowłokami jest na schemacie jednakowa

Jeśli zbliżymy do siebie atomy z rysunku 42.2a, zaczną one, mówiąc potocznie, odczuwać nawzajem swoją obecność. W języku fizyki kwantowej ich funkcje falowe, poczynając od funkcji elektronów z najbardziej zewnętrznej powłoki, zaczną się przekrywać.

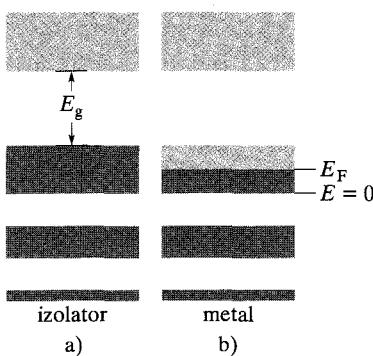
Kiedy funkcje falowe dwóch atomów przekrywają się, nie możemy już mówić o dwóch niezależnych atomach, ale o pojedynczym układzie dwuatomowym. W rozważanym przypadku będzie on zawierał  $2 \cdot 29 = 58$  elektronów. Do takiego większego układu stosuje się także zakaz Pauliego, wymagający, żeby każdy z tych 58 elektronów zajmował inny stan kwantowy. W istocie dostępnych jest 58 stanów kwantowych, ponieważ każdy poziom energetyczny izolowanego atomu rozszczepi się w układzie dwuatomowym na dwa.

Jeśli zbierzemy więcej atomów, utworzymy stopniowo sieć krystaliczną litej miedzi. Jeśli taka sieć zawiera powiedzmy  $N$  atomów, to każdy poziom izolowanego atomu miedzi musi się w krysztale rozszczepić na  $N$  poziomów. W taki sposób poszczególne poziomy energetyczne ciała stałego stworzą **pasma energetyczne**. Sąsiednie pasma będą od siebie oddzielone **przerwą energetyczną**, która odpowiada zakresowi energii, jakich nie może mieć żaden elektron. Typowe pasmo ma zaledwie kilka elektronowoltów szerokości. Ponieważ liczba atomów  $N$  może być rzędu  $10^{24}$ , widać, że energie pojedynczych poziomów w paśmie są naprawdę bardzo bliskie i że liczba tych poziomów jest ogromna.

Na rysunku 42.3 pokazano schemat typowej struktury pasmowej poziomów energetycznych w krysztale. Zwróć uwagę, że pasma o niższej energii są węższe niż te o energii wyższej. Jest tak dlatego, że elektryny obsadzające niższe poziomy energetyczne większość czasu spędzają głęboko wewnątrz chmurki elektronowej atomu. Funkcje falowe tych elektronów rdzenia atomowego nie przekrywają się w tak znacznym stopniu jak funkcje falowe elektronów z powłok zewnętrznych. Zatem rozszczepienie tych poziomów nie jest tak duże jak rozszczepienie wyższych poziomów energetycznych zwykle obsadzanych przez elektryny z powłok zewnętrznych.

## 42.4. Izolatory

Mówimy, że ciało stałe jest izolatorem, jeśli przyłożenie do niego różnicy potencjałów nie powoduje przepływu prądu elektrycznego. Aby nastąpił przepływ prądu, musi wzrosnąć średnia energia kinetyczna elektronów. Innymi słowy, niektóre elektryny w ciele stałym muszą przejść na wyższe poziomy energetyczne.



Rys. 42.4. a) Układ pasm i przerw tworzący strukturę energetyczną izolatora. Poziomy obsadzone zaznaczono kolorem czerwonym, poziomy puste zaś kolorem niebieskim. Zwróć uwagę, że obsadzony poziom o najwyższej energii to poziom z wierzchołka pasma, a kolejny dozwolony stan o wyższej energii oddzielony jest od niego stosunkowo dużą przerwą energetyczną  $E_g$ . b) Układ pasm i przerw tworzący strukturę energetyczną metalu. Obsadzony poziom o najwyższej energii, nazywany poziomem Fermiego, znajduje się w pobliżu środka pasma. Ponieważ w paśmie tym znajdują się puste poziomy energetyczne, więc elektryny z tego pasma mogą łatwo zmieniać poziomy, co umożliwia przewodzenie prądu elektrycznego.

Jednak, jak to pokazano na rysunku 42.4a, najwyższe pasmo zawierające jakiekolwiek elektryny jest w izolatorze całkowicie wypełnione, zakaz Pauliego zaś zabrania elektronom zajmować obsadzone stany.

Tak więc elektryny w wypełnionych pasmach izolatora nie mają dokąd przejść. Są zablokowane. Jest z nimi tak samo, jak z dzieckiem usiłującym wejść na drabinę. Nie uda się to, jeśli na każdym jej szczeblu jest już inne dziecko. Nie ma wolnych szczebli, a zatem żadne z dzieci nie może się ruszyć.

W paśmie znajdującym się powyżej całkowicie wypełnionego pasma z rysunku 42.4a jest mnóstwo poziomów nieobsadzonych. Jednak żeby elektron mógł zająć jeden z tych poziomów, musi uzyskać energię wystarczającą do pokonania tej znacznej przerwy energetycznej oddzielającej oba pasma. W diamentie przerwa ta jest tak szeroka (energia potrzebna na jej pokonanie równa jest 5,5 eV, czyli jest około 140 razy większa niż średnia energia termiczna cząstki swobodnej w temperaturze pokojowej), że właściwie żaden elektron nie jest w stanie jej pokonać. Diament jest izolatorem i to dobrym izolatorem.

### Przykład 42.1

Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że w temperaturze pokojowej (300 K) elektron z wierzchołka najwyższego wypełnionego pasma w diamentie (izolatorze) pokona przerwę energetyczną  $E_g$  pokazaną na rysunku 42.4a. Przerwa energetyczna  $E_g$  diamentu wynosi 5,5 eV.

#### ROZWIĄZANIE:

W rozdziale 41 używaliśmy równania (41.29),

$$\frac{N_x}{N} = e^{-(E_x - E_0)/kT}, \quad (42.1)$$

aby powiązać obsadzenie  $N_x$  stanu o energii  $E_x$  z obsadzeniem  $N_0$  stanu o energii  $E_0$  dla atomów stanowiących część układu znajdującego się w temperaturze  $T$  (wyrażonej w kelwinach);  $k$  jest stałą Boltzmanna ( $8,62 \cdot 10^{-5}$  eV/K).

 Aby znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo  $P$ , że elektron w izolatorze pokona przerwę energetyczną  $E_g$  z rysunku

42.4a, można skorzystać z równania (42.1). Najpierw różnicę energii  $E_x - E_0$  zastąpimy energią przerwy  $E_g$ . Prawdopodobieństwo  $P$  pokonania przez elektron przerwy energetycznej jest w przybliżeniu równe stosunkowi  $N_x/N_0$  liczby elektronów znajdujących się tuż powyżej przerwy energetycznej do liczby elektronów znajdujących się tuż poniżej tej przerwy.

Wartość wykładnika w równaniu (42.1) w przypadku diamentu jest równa

$$-\frac{E_g}{kT} = -\frac{5,5 \text{ eV}}{(8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})} = -213.$$

Szukane prawdopodobieństwo równe jest zatem

$$P = \frac{N_x}{N_0} = e^{-(E_g/kT)} = e^{-213} \approx 3 \cdot 10^{-93}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Powyższy wynik mówi nam, że na każde  $10^{93}$  elektronów około trzech zdoła pokonać przerwę energetyczną. Ponieważ każdy rzeczywisty diament ma mniej niż  $10^{23}$  elektronów, więc prawdopodobieństwo takiego przejścia jest znikomo małe. Nic zatem dziwnego, że diament jest tak dobrym izolatorem.

## 42.5. Metale

Cechą charakterystyczną metali, jak to pokazano na rysunku 42.4b, jest położenie najwyższego obsadzonego poziomu w pobliżu połowy pasma energetycznego. Istnieje zatem mnóstwo nieobsadzonych stanów o zbliżonych energiach, do których mogą przejść elektryny (nośniki ładunku w metalu), powodując przepływ prądu po przyłożeniu do metalu różnicy potencjałów. Tak więc metal przewodzi prąd, ponieważ elektryny w najwyższym obsadzonym paśmie mogą z łatwością przejść do wyższych stanów energetycznych istniejących w tym samym paśmie.

W paragrafie 27.6 do opisu metalu, w którym **elektrony przewodnictwa** mogą swobodnie poruszać się w całej objętości próbki, tak jak cząsteczki gazu w zamkniętym zbiorniku, zastosowaliśmy **model elektronów swobodnych**. Korzystaliśmy z tego modelu do wyprowadzenia wyrażenia na opór właściwy metali przy założeniu, że elektrony zachowują się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona. Teraz skorzystamy z tego samego modelu, aby wyjaśnić zachowanie tych elektronów — nazywanych elektronami przewodnictwa — w częściowo obsadzonym paśmie z rysunku 42.4b. Zakładając jednak, że energie tych elektronów są skwantowane i że spełniona jest zasada Pauliego, będziemy stosować się do praw mechaniki kwantowej.

Założymy także, że elektryczna energia potencjalna elektronów przewodnictwa ma jednakową wartość we wszystkich punktach w sieci. Jeśli przyjmiemy tę wartość energii potencjalnej za energię zerową, co wolno nam zrobić, to energia mechaniczna elektronów przewodnictwa  $E$  będzie wyłącznie ich energią kinetyczną.

Poziom na dnie częściowo zapełnionego pasma z rysunku 42.4b odpowiada energii  $E = 0$ . Najwyższy obsadzony poziom w tym paśmie w temperaturze zera bezwzględnego ( $T = 0$  K) nazywamy **poziomem Fermiego**, a odpowiadająca mu energia to **energia Fermiego**  $E_F$ , która dla miedzi przyjmuje wartość  $E_F = 7,0$  eV.

Prędkość elektronu z poziomu Fermiego zwana jest **prędkością Fermiego**  $v_F$ . Dla miedzi prędkość ta wynosi  $1,6 \cdot 10^6$  m/s. Fakt ten powinien wystarczyć do obalenia błędного poglądu, że w temperaturze zera bezwzględnego ustaje wszelki ruch. W tej temperaturze — wyłącznie dzięki zakazowi Pauliego — elektrony przewodnictwa są gęsto upakowane w częściowo wypełnionym paśmie przewodnictwa z rysunku 42.4b, przyjmując energie od zera do energii Fermiego.

### Ille jest elektronów przewodnictwa?

Gdybyśmy potrafili zebrać pojedyncze atomy i utworzyć z nich próbke metalu, stwierdzilibyśmy, że elektrony przewodnictwa w tym metalu są *elektronami walencyjnymi* atomów (elektronami z zewnętrznych powłok poszczególnych atomów). Atom *jednowartościowy* daje do pasma przewodnictwa jeden taki elektron, atom *dwuwartościowy* daje dwa elektrony. Zatem całkowita liczba elektronów przewodnictwa wynosi

$$\left( \begin{array}{c} \text{liczba elektronów} \\ \text{przewodnictwa w próbce} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{liczba atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{liczba elektronów} \\ \text{walencyjnych} \\ \text{przypadających na atom} \end{array} \right). \quad (42.2)$$

(W niniejszym rozdziale wiele relacji będziemy wyrażać słowami, ponieważ symbole, których dotychczas używaliśmy do opisu pojawiających się w nich wielkości, teraz reprezentują inne wielkości). *Koncentracja*  $n$  elektronów przewodnictwa w próbce jest liczbą elektronów przewodnictwa przypadającą na jednostkę objętości:

$$n = \frac{\text{liczba elektronów przewodnictwa w próbce}}{\text{objętość próbki } V}. \quad (42.3)$$

Liczبę atomów w próbce można powiązać z różnymi innymi właściwościami próbki oraz materiału, z jakiego jest ona wykonana, korzystając z następującego równania:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{liczba atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) &= \frac{\text{masa próbki } M_{\text{pr}}}{\text{masa atomowa}} = \frac{\text{masa próbki } M_{\text{pr}}}{(\text{masa molowa } M)/N_A} \\ &= \frac{(\text{gęstość materiału})(\text{objętość próbki } V)}{(\text{masa molowa } M)/N_A}, \quad (42.4) \end{aligned}$$

gdzie masa molowa jest masą jednego mola materiału, z którego wykonana jest próbka,  $N_A$  zaś jest stałą Avogadra ( $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ).

## Przykład 42.2

Ile elektronów przewodnictwa znajduje się w sześciennej kostce magnezu o objętości  $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ ? Atomy magnezu są dwuwartościowe.

### ROZWIĄZANIE:

**1.** Atom magnezu jest dwuwartościowy, a więc każdy atom dostarcza dwa elektryny do pasma przewodnictwa.

**2.** Liczba elektronów przewodnictwa w rozważanej kostce jest związana z zawartą w niej liczbą atomów magnezu równaniem (42.2).

**3.** Liczbę atomów znajdujących się w kostce można znaleźć, korzystając z równania (42.4) i znanych informacji o właściwościach magnezu.

Równanie (42.4) można przepisać w postaci

$$\left( \begin{array}{l} \text{liczba} \\ \text{atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) = \frac{(\text{gęstość materiału})(\text{objętość próbki } V)N_A}{(\text{masa molowa } M)}.$$

Gęstość magnezu wynosi  $1,738 \text{ g/cm}^3$  ( $= 1,738 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), jego masa molowa zaś równa jest  $24,312 \text{ g/mol}$  ( $= 24,312 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ) (patrz dodatek F). Wartość licznika równa jest

$$\begin{aligned} (1,738 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3)(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \\ = 2,0926 \cdot 10^{21} \text{ kg/mol.} \end{aligned}$$

Tak więc

$$\left( \begin{array}{l} \text{liczba atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) = \frac{2,0926 \cdot 10^{21} \text{ kg/mol}}{24,312 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 8,61 \cdot 10^{22}.$$

Korzystając z tego wyniku i faktu, że atomy magnezu są dwuwartościowe, można z równania (42.2) otrzymać

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{liczba elektronów} \\ \text{przewodnictwa w próbce} \end{array} \right) &= (8,61 \cdot 10^{22} \text{ atomów}) \left( 2 \frac{\text{elektryny}}{\text{atom}} \right) \\ &= 1,72 \cdot 10^{23} \text{ elektronów.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

## Przewodnictwo w temperaturze większej od zera

Nasze praktyczne zainteresowanie budzi jednak przewodnictwo elektryczne metali w temperaturach wyższych niż temperatura zera bezwzględnego. Co się dzieje z rozkładem energetycznym elektronów z rysunku 42.4b w tych wyższych temperaturach? Jak się przekonamy, zaskakująco niewiele.

Spośród elektronów w częściowo wypełnionym paśmie z rysunku 42.4b jedynie elektryny z najbliższego sąsiedztwa poziomu Fermiego znajdą nieobsadzone poziomy leżące powyżej. Tylko te elektryny mogą zostać wzbudzone termicznie na owe poziomy. Nawet w temperaturze  $T = 1000 \text{ K}$ , w której miedź będzie ja-

sno świecić w ciemnym pokoju, obsadzenie poziomów energetycznych nie będzie się znacznie różnić od rozkładu w temperaturze  $T = 0$  K.

Przekonajmy się, dlaczego tak się dzieje. Wygodną miarą energii, jaka może zostać dostarczona elektronowi przewodnictwa w wyniku drgań termicznych sieci, jest wielkość  $kT$ , gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna. W temperaturze  $T = 1000$  K jest ona równa  $kT = 0,086$  V. Żaden elektron nie może liczyć na więcej niż kilkukrotny wzrost swej energii wyłącznie na skutek drgań termicznych. W efekcie w najlepszym wypadku tylko niewielka liczba elektronów o energiach bliskich energii Fermiego ma szansę przejść na wyższe poziomy energetyczne wyłącznie w wyniku drgań termicznych. Ujmując rzecz górnolotnie, można by powiedzieć, że drgania termiczne normalnie wywołują jedynie powstanie zmarszczek na powierzchni morza Fermiego elektronów, pozostawiając nietknięte jego niezmienną głębiny.

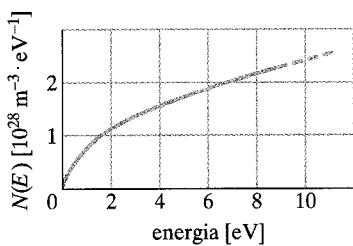
### Ile jest stanów kwantowych?

Zdolność metalu do przewodzenia elektryczności zależy od tego, ile stanów kwantowych jest dostępnych dla jego elektronów i ile wynoszą energie tych stanów. Pojawia się zatem pytanie: Ile wynoszą energie poszczególnych stanów w częściowo wypełnionym paśmie z rysunku 42.4b? Pytanie to jest bardzo trudne, ponieważ nie jesteśmy w stanie wymienić energii każdego spośród tak wielu stanów. Pytamy zamiast tego: Ile stanów w jednostkowej objętości próbki ma energie z przedziału od  $E$  do  $E + dE$ ? Zapisujemy tę wartość jako  $N(E)dE$ , gdzie  $N(E)$  nazywane jest gęstością stanów dla energii  $E$ . Jednostką wielkości  $N(E)dE$  jest liczba stanów przypadająca na metr sześcienny (stan/m<sup>3</sup> lub prostu m<sup>-3</sup>), jednostką gęstości stanów  $N(E)$  jest liczba stanów na metr sześcienny na elektronowolt (m<sup>-3</sup> · eV<sup>-1</sup>).

Wzór na gęstość stanów można wyprowadzić, znajdując liczbę stojących elektronowych fal materii, które mogą powstać w pudle o rozmiarach rozważanej próbki metalu. Metoda postępowania jest podobna do metody znajdowania liczby stojących fal dźwiękowych, które mogą powstać w zamkniętej organowej piszczałce. Różnica polega na tym, że nasze zagadnienie jest trójwymiarowe (a nie jednowymiarowe jak w piszczałce) oraz że rozważane fale są falami materii (a nie falami dźwiękowymi jak w piszczałce). Można pokazać, że wynik takiego zliczania to

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (\text{gęstość stanów}). \quad (42.5)$$

gdzie  $m$  jest masą elektronu,  $E$  zaś energią, dla której obliczamy gęstość stanów. Zwrót uwagę, że nic w powyższym wzorze nie nawiązuje do kształtu próbki, jej temperatury czy materiału, z jakiego jest ona wykonana. Kształt funkcji opisanej równaniem (42.5) przedstawiony jest na rysunku 42.5.



Rys. 42.5. Wykres funkcji opisującej gęstość stanów  $N(E)$  (a więc liczbę elektronowych poziomów energetycznych przypadających na jednostkowy przedział energii i jednostkową objętość) w zależności od energii elektronu. Funkcja gęstości stanów dotyczy tylko istniejących stanów energetycznych, a nie ma związku z tym, czy są one obsadzone przez elektrony

**SPRAWDZIAN 1:** a) Czy różnica energii pomiędzy kolejnymi stanami w miedzi dla energii  $E = 4$  eV jest większa, mniejsza, czy taka sama jak dla energii  $E = 6$  eV? b) Czy różnica energii pomiędzy kolejnymi stanami w miedzi dla energii  $E = 4$  eV jest większa, mniejsza, czy taka sama jak dla tej samej energii w identycznej objętości glinu?

### Przykład 42.3

a) Korzystając z rysunku 42.5, wyznacz liczbę stanów przypadających na każdy elektronowolt dla energii 7 eV w próbce metalu o objętości  $V$  równej  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ .

#### ROZWIĄZANIE:

Liczby stanów przypadających na każdy elektronowolt dla danej energii możemy znaleźć, korzystając z gęstości stanów  $N(E)$  dla tej energii i objętości rozważanej próbki  $V$ . Dla energii 7 eV oznacza to, że

$$\left( \begin{array}{l} \text{liczba stanów} \\ \text{przypadających na} \\ \text{elektronowolt dla} \\ \text{energii 7 eV} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{gęstość stanów } N(E) \\ \text{dla energii 7 eV} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{objętość} \\ \text{próbki } V \end{array} \right).$$

Z rysunku 42.5 wynika, że gęstość stanów odpowiadających energii  $E$  równej 7 eV wynosi około  $2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}$ . Tak więc

$$\left( \begin{array}{l} \text{liczba stanów} \\ \text{przypadających na} \\ \text{elektronowolt dla} \\ \text{energii 7 eV} \end{array} \right) = (2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1})(2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3) \\ = 4 \cdot 10^{19} \text{ eV}^{-1}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyznacz następnie gęstość stanów  $N$  w próbce w małym zakresie energii  $\Delta E$  równym 0,003 eV wokół energii 7 eV.

#### ROZWIĄZANIE:

Z równania (42.5) i rysunku 45.5 wiemy, że gęstość stanów zależy od energii. Jednak jeśli zakres energii  $\Delta E$  jest mały w porównaniu z energią  $E$ , to możemy założyć, że gęstość stanów (a więc także liczba stanów przypadających na każdy elektronowolt) jest w przybliżeniu stała. Tak więc dla energii 7 eV, liczba stanów  $N$  mieszczących się w zakresie energii  $\Delta E$  równym 0,003 eV wynosi:

$$\left( \begin{array}{l} \text{liczba stanów } N \\ \text{w zakresie energii } \Delta E \\ \text{dla energii 7 eV} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{liczba stanów przypadających} \\ \text{na elektronowolt} \\ \text{dla energii 7 eV} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{zakres} \\ \text{energii } \Delta E \end{array} \right).$$

czyli

$$N = (4 \cdot 10^{19} \text{ eV}^{-1})(0,003 \text{ eV}) = 1,2 \cdot 10^{17} \approx 1 \cdot 10^{17}. \quad (\text{odpowiedź})$$

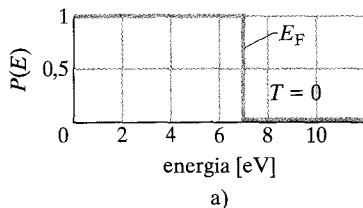
### Prawdopodobieństwo obsadzenia $P(E)$

Zdolność metalu do przewodzenia elektryczności zależy od prawdopodobieństwa, że dostępne nieobsadzone poziomy zostaną obsadzone. Można zatem zadać kolejne pytanie: Jeśli dostępny jest stan o energii  $E$ , to jakie jest prawdopodobieństwo  $P(E)$ , że zostanie on obsadzony przez elektron? Wiemy, że w temperaturze  $T = 0 \text{ K}$  dla wszystkich poziomów o energiach poniżej energii Fermiego  $P(E) = 1$ , co odpowiada pewności, że stan jest obsadzony. Wiemy także, że dla  $T = 0 \text{ K}$  dla wszystkich stanów powyżej poziomu Fermiego prawdopodobieństwo  $P(E) = 0$ , co odpowiada pewności, że stan *nie* jest obsadzony. Sytuację tę ilustruje rysunek 42.6a.

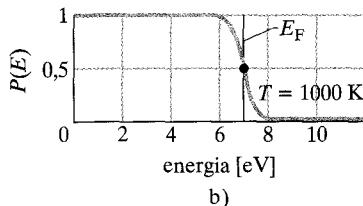
Aby znaleźć prawdopodobieństwo  $P(E)$  w temperaturach wyższych niż temperatura zera bezwzględnego, musimy skorzystać ze zbioru reguł określających kwantowe zasady obliczania prawdopodobieństwa zwanego **statystyką Fermiego–Diraca**. Utrwalono w jej nazwie nazwiska fizyków, którzy ją wprowadzili. Korzystając z tych reguł, można pokazać, że **prawdopodobieństwo obsadzenia  $P(E)$  równe jest**

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (\text{prawdopodobieństwo obsadzenia}), \quad (42.6)$$

gdzie  $E_F$  jest energią Fermiego. Zwróć uwagę, że prawdopodobieństwo  $P(E)$  zależy od różnicy energii  $E - E_F$ , która może być dodatnia lub ujemna, a nie zależy od energii  $E$ .



a)



b)

**Rys. 42.6.** Prawdopodobieństwo obsadzenia  $P(E)$  to prawdopodobieństwo, że dany poziom energetyczny jest obsadzony przez elektron. a) W temperaturze  $T = 0$  K prawdopodobieństwo  $P(E)$  jest dla poziomów o energiach  $E$  mniejszych niż energia Fermiego  $E_F$  równe jedności, dla poziomów zaś o energiach większych niż energia Fermiego  $E_F$  równe zero. b) W temperaturze  $T = 1000$  K nieco elektronów o energiach niewiele mniejszych od energii Fermiego w  $T = 0$  K przechodzi do stanów o energiach niewiele większych niż energia Fermiego. Kropka na wykresie pokazuje, że dla energii  $E = E_F$  prawdopodobieństwo  $P(E) = 0,5$

Aby zobaczyć, czy równanie (42.6) opisuje funkcję pokazaną na rysunku 42.6a, podstawmy do niego  $T = 0$  K. Wtedy:

Dla  $E < E_F$  czynnik wykładniczy w równaniu (42.6) równy jest  $e^{-\infty}$ , czyli zero, a więc  $P(E) = 1$ , co pozostaje w zgodzie z rysunkiem 42.56a.

Dla  $E > E_F$  czynnik wykładniczy w równaniu (42.6) równy jest  $e^{+\infty}$ , a więc  $P(E) = 0$ , co także zgadza się z rysunkiem 42.6a.

Na rysunku 42.6b przedstawiony jest wykres prawdopodobieństwa  $P(E)$  dla  $T = 1000$  K. Pokazuje on, że, jak to powiedziano powyżej, zmiany rozkładu elektronów w dostępnych stanach dotyczą tylko stanów, których energie są bliższe energii Fermiego  $E_F$ . Zauważ, że jeśli energia  $E = E_F$  (bez względu na temperaturę  $T$ ), to czynnik wykładniczy w równaniu (42.6) równy jest  $e^0 = 1$  i prawdopodobieństwo  $P(E_F) = 0,5$ . Dzięki temu energię Fermiego możemy zdefiniować w bardziej użyteczny sposób:

➤ Energia Fermiego dla danego materiału jest energią stanu kwantowego, który jest obsadzony przez elektron z prawdopodobieństwem 0,5.

Rysunki 42.6a i b narysowano dla miedzi, dla której energia Fermiego równa jest 7 eV. Tak więc w przypadku miedzi zarówno dla  $T = 0$  K, jak i  $T = 1000$  K, prawdopodobieństwo obsadzenia przez elektron stanu o energii 7 eV jest równe 0,5.

## Przykład 42.4

a) Jakie jest prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii przekraczającej energię Fermiego o 0,1 eV? Przymij, że temperatura próbki równa jest 800 K.

### ROZWIĄZANIE:

➤ Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu elektronowego w metalu określone jest przez statystykę Fermiego–Diraca zgodnie z równaniem (42.6). Aby wykorzystać to równanie, obliczmy najpierw bezwymiarową wartość wykładnika:

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0,1 \text{ eV}}{(8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K})(800 \text{ K})} = 1,45.$$

Podstawiając tę wartość do równania (42.6), otrzymujemy

$$P(E) = \frac{1}{e^{1,45} + 1} = 0,19, \quad \text{czyli } 19\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie jest prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii 0,1 eV poniżej energii Fermiego?

### ROZWIĄZANIE:

➤ Postępujemy podobnie jak poprzednio, z tą jednak różnicą, że tym razem energia stanu jest mniejsza niż energia Fermiego. Zatem wykładnik w równaniu (42.6) ma taką samą wartość bezwzględną co poprzednio, ale jest ujemny i równanie (42.6) przybiera teraz postać

$$P(E) = \frac{1}{e^{-1,45} + 1} = 0,81, \quad \text{czyli } 81\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

W przypadku stanów o energii mniejszej od energii Fermiego często bardziej nas interesuje prawdopodobieństwo, że stan *nie jest* obsadzony. Takie prawdopodobieństwo równe jest po prostu  $1 - P(E)$  czyli 19%. Zauważ, że jest ono równe prawdopodobieństwu obsadzenia z punktu (a).

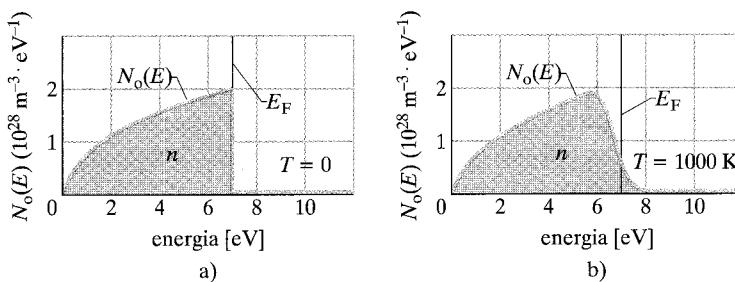
## Ile jest stanów obsadzonych?

Równanie (42.5) i rysunek 42.5 pokazują, jaki jest rozkład energetyczny możliwych stanów. Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu kwantowego opisywane równaniem (42.6) informuje o tym, że dany stan jest rzeczywiście obsadzony. Aby znaleźć gęstość stanów *obsadzonych*  $N_o(E)$ , musimy dodać każdy dostępny stan z wagą odpowiadającą właściwej wartości prawdopodobieństwa obsadzenia, a więc:

$$\begin{pmatrix} \text{gęstość stanów} \\ \text{obsadzonych } N_o(E) \\ \text{dla energii } E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{gęstość stanów} \\ N(E) \text{ dla energii } E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{prawdopodobieństwo} \\ \text{obsadzenia } P(E) \\ \text{dla energii } E \end{pmatrix},$$

$$\text{czyli } N_o(E) = N(E)P(E) \quad (\text{gęstość stanów obsadzonych}). \quad (42.7)$$

Na rysunku 42.7a przedstawiony jest wykres funkcji (42.7) dla miedzi w temperaturze  $T = 0$  K. Otrzymano go, mnożąc dla każdej energii wartość funkcji gęstości stanów (rys. 42.5) przez wartość prawdopodobieństwa obsadzenia dla temperatury zera bezwzględnego (rys. 42.6a). Wyznaczony w podobny sposób wykres z rysunku 42.7b przedstawia gęstość stanów obsadzonych dla miedzi w temperaturze  $T = 1000$  K.



Rys. 42.7. a) Gęstość stanów obsadzonych  $N_o(E)$  dla miedzi w temperaturze zera bezwzględnego. Pole pod krzywą odpowiada koncentracji elektronów  $n$ . Zauważ, że wszystkie stany o energiach aż do energii Fermiego  $E_F = 7$  eV są obsadzone, a wszystkie stany o energiach wyższych niż energia Fermiego są puste. b) Gęstość stanów obsadzonych  $N_o(E)$  dla miedzi w temperaturze  $T = 1000$  K. Zauważ, że zwiększenie temperatury wpłynęło jedynie na elektrony o energiach bliskich energii Fermiego. Tylko takie elektrony zmieniły swoje poziomy energetyczne

## Przykład 42.5

Ile stanów obsadzonych znajdowałoby się w wąskim zakresie wokół energii 7 eV, gdyby próbka omawiana w przykładzie 42.3 była wykonana z miedzi, dla której energia Fermiego równa jest 7 eV?

### ROZWIĄZANIE:

1. Możemy tu także skorzystać z przykładu 42.3a, obliczając jednak tym razem gęstość stanów *obsadzonych*  $N_o(E)$  daną wzorem (42.7) ( $N_o(E) = N(E)P(E)$ ).

2. Ponieważ chcemy obliczyć wartości dla wąskiego przedziału wokół energii 7 eV (energii Fermiego dla miedzi), prawdopodobieństwo obsadzenia  $P(E)$  równe jest 0,5. Z rysunku 42.5 widać, że gęstość stanów dla tej energii wynosi  $2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}$ . Tak więc równanie (42.7) mówi nam, że poszukiwana gęstość stanów obsadzonych wynosi

$$\begin{aligned} N_o(E) &= N(E)P(E) = (2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1})(0,5) \\ &= 1 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}. \end{aligned}$$

Następnie przepiszemy wzór z przykładu 42.3a dla stanów obsadzonych:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \text{gęstość stanów} \\ \text{obsadzonych przypadających} \\ \text{na elektronowolt dla energii 7 eV} \end{array} \right) \\ & = \left( \begin{array}{l} \text{gęstość stanów} \\ \text{obsadzonych } N_o(E) \\ \text{dla energii 7 eV} \end{array} \right) (\text{objętość próbki}). \end{aligned}$$

Podstawiając do niego obliczoną przez nas wartość  $N_o(E)$  i po przednio podaną objętość  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \text{gęstość stanów} \\ \text{obsadzonych przypadających} \\ \text{na elektronowolt dla energii 7 eV} \end{array} \right) \\ & = (1 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1})(2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3) = 2 \cdot 10^{19} \text{ eV}^{-1}. \end{aligned}$$

(odpowiedź)

## Obliczanie energii Fermiego

Przypuścmy, że dodamy (a właściwie scałkujemy) liczby stanów obsadzonych przypadających na jednostkę objętości na rysunku 42.7a dla energii od  $E = 0$  do  $E = E_F$ . Wynikiem takiego sumowania musi być  $n$  — liczba elektronów przewodnictwa przypadających na jednostkę objętości w metalu. Zapisując ten wynik w postaci równania, mamy

$$n = \int_0^{E_F} N_o(E) dE. \quad (42.8)$$

(Powyższa całka odpowiada polu powierzchni pod wykresem funkcji rozkładu na rysunku 42.7a). Ponieważ prawdopodobieństwo  $P(E) = 1$  dla wszystkich energii mniejszych od energii Fermiego, równanie (42.7) mówi nam, że możemy w równaniu (42.8) zamienić rozkład stanów obsadzonych  $N_o(E)$  na rozkład stanów  $N(E)$ , a następnie skorzystać z równania (42.8) do wyznaczenia energii Fermiego  $E_F$ . Po podstawieniu równania (42.5) do równania (42.8) otrzymamy

$$n = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} \frac{2E_F^{3/2}}{3}.$$

Rozwiążanie tego równania pozwala wyznaczyć energię Fermiego  $E_F$ :

$$E_F = \left( \frac{3}{16\sqrt{2}\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{2/3} = \frac{0,121 h^2}{m} n^{2/3}. \quad (42.9)$$

Zatem jeśli znamy koncentrację  $n$ , czyli liczbę elektronów przewodnictwa przypadających na jednostkę objętości w metalu, możemy obliczyć wartość energii Fermiego dla tego metalu.

## 42.6. Półprzewodniki

Porównując rysunek 42.8a z rysunkiem 42.4a, zauważysz, że struktura pasmowa półprzewodnika jest taka sama jak struktura pasmowa izolatora. Główną różnicą jest szerokość przerwy energetycznej  $E_g$  pomiędzy wierzchołkiem najwyższego pasma wypełnionego (nazywanego **pasmem walencyjnym**) i dnem najniższego pasma pustego (zwanego **pasmem przewodnictwa**), która w półprzewodniku jest znacznie mniejsza niż w izolatorze. Nie ma zatem wątpliwości, że krzem

( $E_g = 1,1$  eV) jest półprzewodnikiem, a diament ( $E_g = 5,5$  eV) jest izolatorem. W krzemie, ale nie w diamencie, istnieje realne prawdopodobieństwo, że drgania termiczne spowodują w temperaturze pokojowej przejście z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa.

W tabeli 42.1 porównaliśmy trzy podstawowe właściwości elektryczne miedzi — naszego przykładowego metalu i krzemu — naszego przykładowego półprzewodnika. Aby zobaczyć, czym półprzewodnik różni się od metalu, spójrzmy jeszcze raz na tę tabelę, przyglądając się po kolei wszystkim jej wierszom.

## Koncentracja nośników ładunku $n$

Dolny wiersz tabeli 42.1 pokazuje, że miedź ma znacznie więcej nośników ładunku przypadających na jednostkę objętości niż krzem. Wielkości te różnią się czynnikiem  $10^{13}$ . W przypadku miedzi każdy atom dostarcza na rzecz procesu przewodnictwa jeden elektron, swój jedyny elektron walencyjny. Nośniki ładunku w krzemie mogą pojawić się w równowadze termicznej tylko dlatego, że drgania termiczne pozwalają pewnej (bardzo małej) liczbie elektronów z pasma walencyjnego na pokonanie przerwy energetycznej i przejście do pasma przewodnictwa. W paśmie walencyjnym pozostawią one tyle samo nieobsadzonych stanów energetycznych, zwanych **dziurami**. Na rysunku 42.8b pokazano tę sytuację.

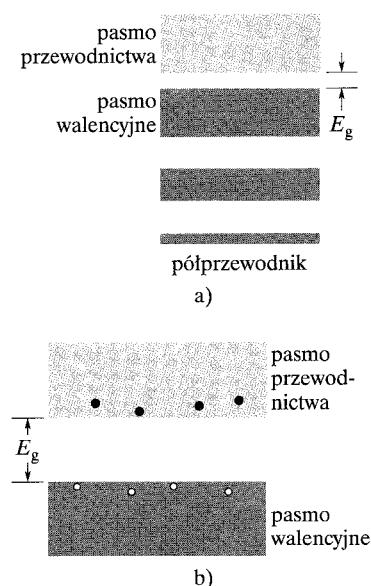
Zarówno elektryny w paśmie przewodnictwa, jak i dziury w paśmie walencyjnym są nośnikami ładunku. Dziury są nimi dlatego, że dają elektronom w paśmie walencyjnym pewną swobodę ruchu. Gdyby nie dziury, pasmo walencyjne byłoby zablokowane. Jeśli w półprzewodniku pojawią się pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , to naładowane ujemnie elektryny w paśmie walencyjnym będą unoszone w kierunku przeciwnym do natężenia  $\vec{E}$ . Dziury natomiast będą unoszone w kierunku natężenia  $\vec{E}$ . W rezultacie dziury zachowują się jak ruchome cząstki o ładunku  $+e$ .

W zrozumieniu, jak to się dzieje, pomoże ci bardzo uproszczony przykład. Wyobraźmy sobie sznur samochodów zaparkowanych zderzakiem w zderzak, z których pierwszy stoi na długość auta przed barierką. Kiedy ten pierwszy samochód podjadzie do barierki, pozostawi po sobie przestrzeń wystarczającą dla kolejnego auta. Drugi samochód może wtedy podjechać do przodu, zostawiając za sobą miejsce dla trzeciego i tak dalej. Zbliżanie się samochodów do barierki najłatwiej analizować, skupiając się na oddalaniu od niej pojedynczej „dziury” (miejscu do parkowania).

W przypadku półprzewodników przewodnictwo dziurowe jest tak samo ważne jak przewodnictwo elektronowe. Myśląc o przewodnictwie dziurowym, dobrze sobie wyobrazić, że wszystkie nieobsadzone stany w paśmie walencyjnym są zajęte przez cząstki o ładunku  $+e$  i że wszystkie elektryny zostały usunięte z pasma walencyjnego, umożliwiając tym dodatkowo naładowanym cząstkom swobodne przemieszczanie się w paśmie.

## Opór właściwy $\rho$

Z rozdziału 27 pamiętamy, że opór właściwy materiału  $\rho$  równy jest  $m/e^2 n \tau$ , gdzie  $m$  jest masą elektronu,  $e$  — ładunkiem elementarnym,  $n$  — liczbą ładun-



Rys. 42.8. Układ pasm i przerw energetycznych półprzewodnika. Układ ten przypomina strukturę energetyczną izolatora (patrz rys. 42.4a), jedynie przerwa energetyczna  $E_g$  jest w półprzewodniku znacznie mniejsza. W efekcie elektryny mogą w wyniku drgań termicznych z rozsądnym prawdopodobieństwem pokonać tę przerwę. b) Drgania termiczne umożliwiły kilku elektronom z pasma walencyjnego pokonanie przerwy energetycznej i przejście do pasma przewodnictwa. W paśmie walencyjnym pozostała taka sama liczba dziur

ków przypadających na jednostkę objętości, a  $\tau$  — średnim czasem pomiędzy zderzeniami nośników ładunku. Tabela 42.1 pokazuje, że w temperaturze pokojowej opór właściwy krzemu jest większy niż opór właściwy miedzi o czynniku około  $10^{11}$ . Tę ogromną różnicę można wyjaśnić bardzo dużą różnicą koncentracji nośników  $n$ . Inne czynniki mają także swoje znaczenie, ale ta wielka różnica koncentracji przysłania ich wpływ na opór właściwy.

### Temperaturowy współczynnik oporu $\alpha$

Przypomnij sobie, że współczynnik  $\alpha$  (patrz równanie (27.17)) równy jest względnej zmianie oporu właściwego przypadającej na jednostkową zmianę temperatury

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}. \quad (42.10)$$

Opór właściwy miedzi *rośnie* ze wzrostem temperatury (a więc  $d\rho/dT > 0$ ), ponieważ zderzenia nośników ładunku w miedzi w wyższych temperaturach zachodzą częściej. Tak więc współczynnik  $\alpha$  jest dla miedzi *dodatni*.

Częstość zderzeń rośnie z temperaturą także dla krzemu. Jednak opór właściwy krzemu maleje ze wzrostem temperatury ( $d\rho/dT < 0$ ). Dzieje się tak z powodu gwałtownego wzrostu koncentracji nośników ładunku  $n$  (elektronów w paśmie przewodnictwa i dziur w paśmie walencyjnym) ze wzrostem temperatury. (Więcej elektronów pokonuje przerwę energetyczną między pasmem walencyjnym a pasmem przewodnictwa). W efekcie współczynnik  $\alpha$  jest dla krzemu *ujemny*.

**SPRAWDZIAN 2:** Laboratorium badawcze wielkiej korporacji opracowało trzy nowe materiały, których właściwości elektryczne wymienione zostały poniżej. Przewidując opatentowanie tych materiałów, laboratorium nadało im kryptonimy. Określ dla każdego z badanych materiałów, czy jest on metalem, izolatorem, półprzewodnikiem, czy też żadnym z tych ciał stałych.

Materiał (kryptonim)	$n$ [ $m^{-3}$ ]	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	$\alpha$ [ $K^{-1}$ ]
Cleveland	$10^{29}$	$10^{-8}$	$+10^{-3}$
Boca Raton	$10^{28}$	$10^{-9}$	$-10^{-3}$
Seattle	$10^{15}$	$10^3$	$-10^{-2}$

## 42.7. Półprzewodniki domieszkowane

Przydatność półprzewodników w technologii można znakomicie poprawić, wprowadzając do ich sieci krystalicznej małą liczbę odpowiednio dobranych atomów (zwanych domieszkami), a więc **domieszkując** półprzewodnik. Zwykle na każdych  $10^7$  atomów krzemu zaledwie jeden atom jest zamieniany na atom domieszki. Praktycznie wszystkie współczesne przyrządy półprzewodnikowe zbudowane są z materiałów domieszkowanych. Istnieją dwa typy domieszkowania, zwane **typem n** i **typem p**. Zajmiemy się nimi po kolej.

## Półprzewodniki typu n

Elektrony w izolowanym atomie krzemu zajmują kolejne podpowłoki energetyczne w następujący sposób:

$$1s^2 \ 2s^2 \ 2p^6 \ 3s^2 \ 3p^2,$$

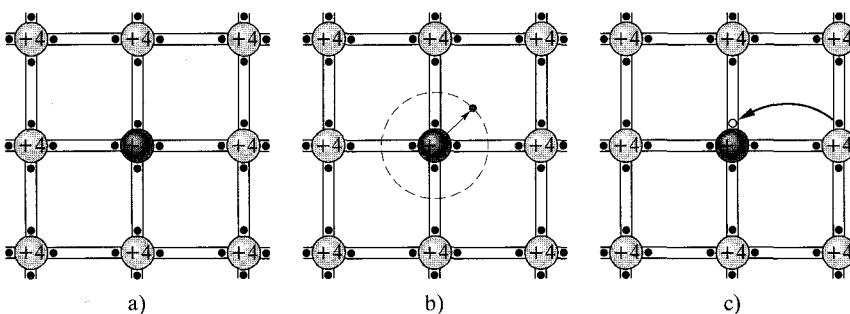
gdzie jak zwykle górne indeksy oznaczają liczbę elektronów na kolejnych podpowłokach (ich suma równa jest 14 — liczbie atomowej krzemu).

Na rysunku 42.9a przedstawiono część sieci krystalicznej czystego krzemu zrzutowaną na płaszczyznę (porównaj ten rysunek z rysunkiem 42.1b pokazującym komórkę elementarną tej sieci w trzech wymiarach). Każdy atom krzemu poświęca parę elektronów 3s i parę elektronów 3p na stworzenie z każdym ze swoich czterech najbliższych sąsiadów sztywnego dwuelektronowego wiązania kowalencyjnego. (Dwa elektrony tworzące wiązanie kowalencyjne są wspólne dla dwóch powiązanych atomów). Te cztery wiązania i sąsiednie atomy znajdujące się w komórce elementarnej krzemu pokazane są na rysunku 42.1b.

*Elektrony tworzące wiązania pomiędzy atomami krzemu tworzą pasmo walencyjne.* Kiedy elektron zostaje wyrwany z jednego z tych wiązań i może poruszać się swobodnie po sieci, mówimy, że elektron przeszedł z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Minimalna energia, jaka jest do tego potrzebna, równa jest energii przerwy  $E_g$ .

Ze względu na związanie czterech elektronów każdy „atom” krzemu jest w zasadzie jonem składającym się z wewnętrznej chmury elektronów (zawierającej 10 elektronów, podobnej do chmury elektronowej w atomie neonu) otaczającej jądro o ładunku  $+14e$ , gdzie 14 jest liczbą atomową krzemu. Wypadkowy ładunek każdego z tych jonów wynosi zatem  $+4e$  i mówimy o nich, że mają wartośćiowość = +4.

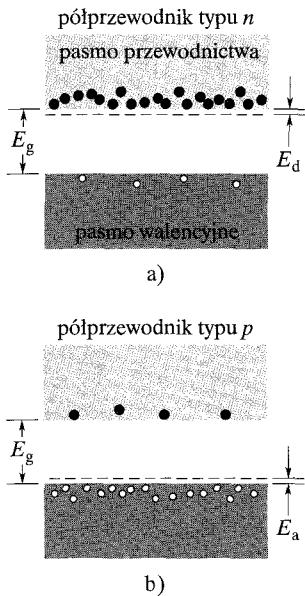
Na rysunku 42.9b centralny jon krzemu został zastąpiony atomem fosforu (wartościowość = +5). Cztery z elektronów walencyjnych atomu fosforu tworzą wiązania z otaczającymi je jonami krzemu. Piąty („dodatkowy”) elektron jest słabo związanego z rdzeniem jona fosforu. Posługując się obrazem diagramu poziomów energetycznych, mówimy zwykle, że taki elektron zajmuje zlokalizowany stan energetyczny znajdujący się w przerwie wzbronionej w średniej odległości  $E_d$  poniżej dna pasma przewodnictwa. Jest to pokazane na rysunku 42.10a. Ponieważ  $E_d \ll E_g$ , więc energia potrzebna do wzbudzenia elektronów z takiego poziomu do pasma przewodnictwa jest znacznie mniejsza niż energia potrzebna do wzbudzenia do pasma przewodnictwa elektronów walencyjnych krzemu.



Rys. 42.9. a) Schemat struktury krystalicznej czystego krzemu zrzutowany na płaszczyznę. Każdy jon krzemu jest złączany ze swoimi czterema sąsiadami dwuelektronowym wiązaniem kowalencyjnym (pokazanym tu jako para czerwonych kropek pomiędzy dwiema równoległymi czarnymi liniami). Elektrony te nie należą do indywidualnych atomów, ale do wiązania. Tworzą one pasmo walencyjne półprzewodnika. b) Jeden atom krzemu został zastąpiony atomem fosforu (wartościowość = 5). „Dodatkowy” elektron jest jedynie słabo złączany ze swoim jonowym rdzeniem i łatwo może przejść do pasma przewodnictwa, gdzie może swobodnie poruszać się po kryształku. c) Jeden atom krzemu został zastąpiony atomem gliny (wartościowość = 3). W jednym z wiązań kowalencyjnych (a więc w paśmie walencyjnym) pojawia się dziura. Dziura ta może swobodnie poruszać się po kryształku, gdy elektrony z sąsiednich wiązań przesuwają się, aby ją zapełnić. W tym przypadku dziura porusza się w prawo

Atom fosforu jest zwany **donorem**, ponieważ łatwo dostarcza on (ang. *donates*) elektron do pasma przewodnictwa. W istocie w temperaturze pokojowej praktycznie *wszystkie* elektrony dostarczone przez atomy donorów znajdują się w paśmie przewodnictwa. Dodając donory, możemy w wielkim stopniu, znacznie większym, niż to sugeruje rysunek 42.10a, zwiększyć liczbę elektronów w paśmie przewodnictwa.

Półprzewodniki domieszkowane donorami nazywane są **półprzewodnikami typu *n***, gdzie *n* oznacza *ujemny* (ang. *negative*), co wskazuje, że ujemnych nośników ładunku wprowadzonych do pasma przewodnictwa jest znacznie więcej niż dodatnich nośników ładunku, którymi są dziury w paśmie walencyjnym. W półprzewodnikach typu *n* elektrony nazywane są **nośnikami większościowymi**, dziury zaś **nośnikami mniejszościowymi**.



Rys. 42.10. a) W domieszkowanym półprzewodniku typu *n* poziomy energetyczne elektronów donora znajdują się w małej odległości  $E_d$  poniżej dna pasma przewodnictwa. Ponieważ elektrony te można łatwo wzbudzić do pasma przewodnictwa, w paśmie tym jest teraz znacznie więcej elektronów niż w przypadku półprzewodnika niedomieszkowanego. W paśmie walencyjnym znajduje się taka sama liczba elektronów jak poprzednio. b) W domieszkowanym półprzewodniku typu *p* poziomy energetyczne elektronów akceptora znajdują się w małej odległości  $E_a$  powyżej wierzchołka pasma walencyjnego. W paśmie walencyjnym będzie teraz znacznie więcej dziur niż w przypadku półprzewodnika niedomieszkowanego. W pasmie przewodnictwa pozostałe taka sama liczba elektronów jak w niedomieszkowanym półprzewodniku. Stosunek koncentracji nośników większościowych do koncentracji nośników mniejszościowych jest w rzeczywistości znacznie większy, niż sugerują to ilustracje

### Właściwości półprzewodników domieszkowanych

Właściwość	Typ półprzewodnika	
	<i>n</i>	<i>p</i>
Materiał macierzysty	krzem	krzem
Ładunek jądra materiału macierzystego	+14e	+14e
Przerwa energetyczna materiału macierzystego	1,2 eV	1,2 eV
Domieszka	fosfor	glin
Rodzaj domieszki	donor	akceptor
Nośniki większościowe	elektrony	dziury
Nośniki mniejszościowe	dziury	elektrony
Energia jonizacji domieszki	0,045 eV	0,067 eV
Wartościowość domieszki	5	3
Ładunek jądra domieszki	+15e	+13e
Wypadkowy ładunek jonu domieszki	+e	-e

### Półprzewodniki typu *p*

Rozważmy teraz rysunek 42.9c, na którym jeden z atomów krzemu (wartościowość = 4) został zastąpiony atomem glinu (wartościowość = 3). Atom glinu może stworzyć wiązania kowalencyjne tylko z trzema sąsiednimi atomami krzemu, a więc teraz w jednym z wiązań pomiędzy atomami glinu i krzemu „brakuje” elektronu (jest dziura). Aby zapełnić tę dziurę, można niewielkim kosztem energii wyrwać elektron z sąsiedniego wiązania pomiędzy atomami krzemu, tworząc jednocześnie w tym wiązaniu dziurę. Następnie elektron z jakiegoś innego wiązania może się przemieszczyć, zapełniając tę drugą dziurę. W taki sposób dziura może poruszać się po sieci.

Atom glinu zwany jest **akceptorem**, ponieważ łatwo przyjmuje (ang. *accepts*) elektron z sąsiedniego wiązania, a więc z pasma walencyjnego krzemu. Jak to zasugerowano na rysunku 42.10b, elektron ten obsadzi zlokalizowany stan akceptorowy znajdujący się w przerwie energetycznej w średniej odległości  $E_a$  powyżej wierzchołka pasma walencyjnego. Dodając akceptory, możemy w wiel-

kim stopniu, znacznie większym, niż to zasugerowano na rysunku 42.10b, zwiększyć liczbę dziur w paśmie walencyjnym. W krzemie, w temperaturze pokojowej praktycznie *wszystkie* poziomy akceptorowe są obsadzone przez elektryny.

Półprzewodniki domieszkowane akceptorami nazywane są **półprzewodnikami typu  $p$** , gdzie  $p$  oznacza dodatni (ang. *positive*), co wskazuje, że dziur wprowadzonych do pasma walencyjnego, zachowujących się jak dodatnie nośniki ładunku jest dużo więcej niż elektronów w paśmie przewodnictwa. W półprzewodnikach typu  $p$  dziury są nośnikami większościowymi, elektryny zaś nośnikami mniejszościowymi.

W tabeli 42.2 podsumowano właściwości typowych półprzewodników typu  $n$  i typu  $p$ . Zauważ w szczególności, że rdzenie atomowe donorów i akceptorów, mimo że są naładowane, nie są *nośnikami* ładunku elektrycznego. W temperaturze pokojowej pozostają one związane w sieci krystalicznej.

## Przykład 42.6

Koncentracja elektronów przewodnictwa  $n_0$  w czystym krzemie wynosi około  $10^{16} \text{ m}^{-3}$ . Założmy, że stosując domieszkowanie atomami fosforu, chcemy zwiększyć tę wartość milion ( $10^6$ ) razy. Jaką część atomów krzemu trzeba zastąpić atomami fosforu? (Pamiętaj, że drgania termiczne w temperaturze pokojowej są tak efektywne, że właściwie każdy atom fosforu oddaje swój dodatkowy elektron do pasma przewodnictwa).

### ROZWIĄZANIE:

 1. Ponieważ każdy atom fosforu dostarcza jeden elektron przewodnictwa i ponieważ chcemy, aby całkowita koncentracja elektronów przewodnictwa wynosiła  $10^6 n_0$ , więc koncentracja atomów fosforu  $n_p$  musi spełniać równanie

$$10^6 n_0 = n_0 + n_p.$$

Zatem

$$n_p = 10^6 n_0 - n_0 \approx 10^6 n_0 = 10^6 \cdot (10^{16} \text{ m}^{-3}) = 10^{22} \text{ m}^{-3}.$$

Tak więc do każdego metra sześciennego krzemu trzeba dodać  $10^{22}$  atomów fosforu.

 2. Koncentrację atomów krzemu  $n_{\text{Si}}$  w czystym krzemie (przed domieszkowaniem) możemy obliczyć, korzystając z równania (42.4), które możemy przepisać jako:

$$\left( \begin{array}{c} \text{liczba atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) = \frac{(\text{gęstość krzemu})(\text{objętość próbki } V)}{(\text{masa molowa } M_{\text{Si}})/N_A}.$$

Aby uzyskać koncentrację atomów krzemu  $n_{\text{Si}}$ , dzielimy obie strony przez objętość próbki  $V$  i otrzymujemy

$$n_{\text{Si}} = \frac{(\text{gęstość krzemu})N_A}{M_{\text{Si}}}.$$

W dodatku F znajdziemy gęstość krzemu, która wynosi  $2,33 \text{ g/cm}^3$  ( $= 2330 \text{ kg/m}^3$ ) i masę molową krzemu  $28,1 \text{ g/mol}$  ( $= 0,0281 \text{ kg/mol}$ ). Mamy zatem

$$n_{\text{Si}} = \frac{(2330 \text{ kg/m}^3)(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{0,0281 \text{ kg/mol}} = 5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Stosunek, którego szukamy, równy jest zatem w przybliżeniu

$$\frac{n_p}{n_{\text{Si}}} = \frac{10^{22} \text{ m}^{-3}}{5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}} = \frac{1}{5 \cdot 10^6}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zamieniając zaledwie jeden na pięć milionów atomów krzemu na atom fosforu, możemy zwiększyć liczbę elektronów w paśmie przewodnictwa milion razy.

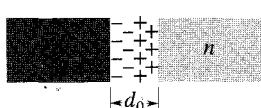
Dlaczego tak niewielki dodatek fosforu wydaje się mieć tak ogromny wpływ na właściwości krzemu? Odpowiedź brzmi: mimo że efekt jest znaczący, nie jest on jednak „ogromny”. Koncentracja elektronów przewodnictwa wynosiła przed domieszkowaniem  $10^{16} \text{ m}^{-3}$  i  $10^{22} \text{ m}^{-3}$  po domieszkowaniu. Jednak koncentracja elektronów przewodnictwa miedzi (podana w tabeli 42.1) wynosi około  $10^{29} \text{ m}^{-3}$ . Zatem nawet po domieszkowaniu, koncentracja elektronów przewodnictwa w krzemie jest około  $10^7$  razy mniejsza niż w typowym metalu, jakim jest miedź.

## 42.8. Złącze $p$ - $n$

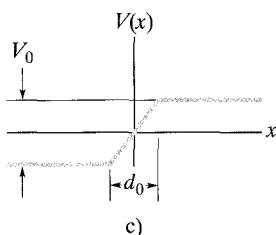
**Złącze  $p$ - $n$**  (rys. 42.11a) jest selektywnie domieszkowanym kryształem półprzewodnika. Jeden obszar takiego kryształu jest domieszkowany na typ  $n$ , obszar sąsiedni zaś jest domieszkowany na typ  $p$ . Takie złącza stanowią serce właściwie wszystkich urządzeń półprzewodnikowych.



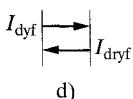
a)



b)



c)



d)

Rys. 42.11. a) Złącze  $p$ - $n$ . b) Przepływ nośników większościowych przez płaszczyznę złącza powoduje wystąpienie ładunku przestrzennego związanego z nieskompensowanymi jonami donorów (po prawej stronie złącza) i akceptorów (po lewej stronie złącza). c) Z powstaniem obszaru ładunku przestrzennego o szerokości  $d_0$  wiąże się kontaktowa różnica potencjałów  $V_0$ . d) Dyfuzja nośników większościowych (zarówno elektronów, jak i dziur) przez płaszczyznę złącza wywołuje przepływ prądu dyfuzji  $I_{\text{dyf}}$ . (W rzeczywistym złączu  $p$ - $n$  granice obszaru zubożonego nie są ostre, a zatem zależność potencjału kontaktowego od położenia (rys. c) nie jest krzywą łamana)

Załóżmy dla uproszczenia, że rozważane złącze zostało utworzone mechanicznie przez ściśnięcie kawałka półprzewodnika typu  $n$  i kawałka półprzewodnika typu  $p$ . W efekcie przejście pomiędzy jednym obszarem a drugim jest idealne i zachodzi w jednej płaszczyźnie, **plaszczyźnie złącza**.

Zastanówmy się nad ruchem elektronów i dziur zaraz po ściśnięciu elektrycznie obojętnych kawałków materiału typu  $n$  i materiału typu  $p$ . Najpierw zajmiemy się nośnikami większościowymi, którymi w materiale typu  $n$  są elektrony, a w materiale typu  $p$  — dziury.

### Ruch nośników większościowych

Jeśli rozerwiesz balon wypełniony helem, atomy helu zaczną dyfundować (rozprzestrzeniać się) w otaczającym powietrzu. Dzieje się tak dlatego, że w zwykłym powietrzu jest bardzo niewiele atomów helu. Opisując to zjawisko w języku bardziej formalnym: na granicy balon–powietrze istnieje *gradient koncentracji* helu (koncentracja atomów helu zmienia się przy przejściu przez tę granicę). Atomy helu, poruszając się, będą dążyć do zredukowania tego gradientu.

W taki sam sposób na rysunku 42.11a elektrony w obszarze typu  $n$ , znajdujące się blisko płaszczyzny złącza, będą dyfundować przez nią (na rysunku z prawej strony na lewo), przechodząc do obszaru typu  $p$ , gdzie elektronów jest niewiele. Podobnie dziury w obszarze typu  $p$ , które są blisko płaszczyzny złącza, będą dążyć do przejścia przez nią (na rysunku z lewej strony w prawo) do obszaru typu  $n$ , gdzie jest niewiele dziur. Ten ruch elektronów i dziur tworzy **prąd dyfuzji**  $I_{\text{dyf}}$ , zgodnie z konwencją skierowany z lewej strony w prawo, jak to pokazano na rysunku 42.11d.

Przypomnij sobie, że obszar typu  $n$  jest naszpikowany dodatnio naładowanymi jonomi donorów, trwale związanymi w sieci krystalicznej. W normalnych warunkach nadmiarowy ładunek dodatni każdego z tych jionów jest kompensowany przez ładunek elektronów z pasma przewodnictwa. Jednak gdy elektron pochodzący z obszaru typu  $n$  przedyfunduje przez płaszczyznę złącza, dyfuzja „odsłania” jeden z tych zjonizowanych donorów, wprowadzając w obszarze typu  $n$ , w pobliżu płaszczyzny złącza nieruchomy ładunek dodatni. Gdy dyfundujący elektron przybędzie do obszaru typu  $p$ , szybko zrekombinuje ze zjonizowanym akceptorem (któremu brakuje jednego elektronu), wprowadzając w ten sposób w pobliżu płaszczyzny złącza nieruchomy ładunek ujemny w obszarze typu  $p$ .

W taki sposób elektrony dyfundujące przez płaszczyznę złącza z prawej strony w lewo na rysunku 42.11a powodują powstanie po obu stronach płaszczyzny złącza **ładunku przestrzennego**, pokazanego na rysunku 42.11b. Dziury dyfundujące przez płaszczyznę złącza z lewej strony na prawo działają dokładnie w taki sam sposób. (Zastanów się, czy rozumiesz dlaczego). Ruch obu rodzajów nośników większościowych — elektronów i dziur — przyczynia się do wytworzenia tych dwóch obszarów ładunku przestrzennego — jednego dodatniego i jednego ujemnego. Te dwa obszary tworzą razem **obszar zubożony**, nazwany tak dlatego, gdyż jest w nim stosunkowo niewiele *ruchomych* nośników ładunku; szerokość tego obszaru oznaczyliśmy na rysunku 42.11b jako  $d_0$ .

Tworzenie się ładunku przestrzennego powoduje powstanie w obszarze zubożonym **kontaktowej różnicy potencjałów**  $V_0$  związanej z tym ładunkiem, tak

jak to pokazano na rysunku 42.11c. Ta różnica potencjałów utrudnia dalszą dyfuzję elektronów i dziur przez płaszczyznę złącza. Ładunki ujemne są wypychane z obszaru o niskim potencjale. Elektron zbliżający się do płaszczyzny złącza od strony prawej na rysunku 42.11b porusza się w kierunku obszaru niskiego potencjału i zostanie zwrócony do obszaru typu  $n$ . Podobnie ładunek dodatni (dziura) zbliżający się do płaszczyzny złącza od strony lewej porusza się w kierunku obszaru wysokiego potencjału i w efekcie zwróci do obszaru typu  $p$ .

### Ruch nośników mniejszościowych

Jak pokazano na rysunku 42.10a, mimo że nośnikami większościowymi w materiale typu  $n$  są elektrony, to jest tam jednak trochę dziur. Tak samo w materiale typu  $p$  nośnikami większościowymi są dziury, ale jest tam także nieco elektronów. Te niewielkie liczby dziur i elektronów są w odpowiednich materiałach nośnikami mniejszościowymi.

Mimo że różnica potencjałów  $V_0$  na rysunku 42.11c stanowi barierę dla nośników większościowych, to na nośniki mniejszościowe, czy to elektrony po stronie typu  $p$ , czy dziury po stronie typu  $n$ , będzie działała jak katapulta. Ładunki dodatnie (dziury) dążą do obszarów o niskim potencjale, ładunki ujemne (elektrony) dążą do obszarów o potencjale wysokim. Tak więc oba rodzaje nośników zasysane są przez tę różnicę potencjałów i przeciągane przez płaszczyznę złącza. W rezultacie ruch nośników mniejszościowych (elektronów i dziur w odpowiednich obszarach) prowadzi do powstania **prądu unoszenia  $I_{\text{dryf}}$**  (zwanego także prądem dryfowym), płynącego przez płaszczyznę złącza ze strony prawej na lewo, tak jak to pokazano na rysunku 42.11d.

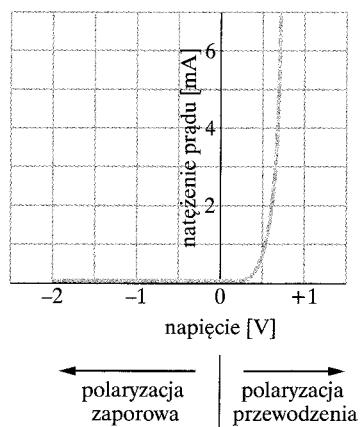
Zatem izolowane złącze  $p-n$  pozostaje w stanie równowagi, gdy na jego końcach panuje różnica potencjałów  $V_0$ . W stanie równowagi średni prąd dyfuzji  $I_{\text{dyf}}$  płynący przez płaszczyznę złącza z obszaru typu  $p$  do obszaru typu  $n$  jest akurat równy średniemu pradowi unoszenia  $I_{\text{dryf}}$  płynącemu w przeciwną stronę. Oba te prądy nawzajem się znoszą, ponieważ wypadkowy prąd płynący przez płaszczyznę złącza musi być równy zeru. Inaczej ładunek elektryczny przenoszony byłby bez końca z jednego krańca złącza na drugi.

**SPRAWDZIAN 3:** Który z wymienionych poniżej prądów płynących przez płaszczyznę złącza z rysunku 42.11a musi być równy零?

- wypadkowy prąd dziur, będących zarówno nośnikami większościowymi, jak i mniejszościowymi?
- wypadkowy prąd elektronów, będących zarówno nośnikami większościowymi, jak i mniejszościowymi?
- wypadkowy prąd elektronów i dziur, będących zarówno nośnikami większościowymi, jak i mniejszościowymi?
- wypadkowy prąd nośników większościowych, zarówno elektronów, jak i dziur?
- wypadkowy prąd nośników mniejszościowych, zarówno elektronów, jak i dziur?

### 42.9. Złącze prostujące

Popatrzmy teraz na rysunek 42.12. Pokazuje on, że po przyłożeniu do złącza  $p-n$  różnicy potencjałów w jednym kierunku (oznaczonym tu jako dodatni) popły-



Rys. 42.12. Charakterystyka prądowo-napięciowa złącza  $p-n$  pokazująca, że złącze spolaryzowane w kierunku przewodzenia ma bardzo mały opór, spolaryzowane zaś w kierunku zaporowym w zasadzie nie przewodzi prądu

nie przez nie prąd elektryczny. Jednak gdy zmienimy znak przyłożonej różnicy potencjałów, natężenie prądu płynącego przez złącze będzie w przybliżeniu równe zero.

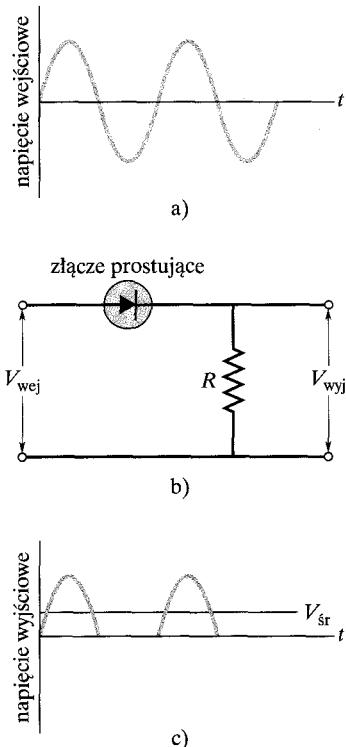
Właściwość tę wykorzystano w **złączu prostującym**, którego schematyczne oznaczenie pokazano na rysunku 42.13b. Strzałka wskazuje obszar typu *p* złącza, czyli kierunek (umowny) dozwolonego przepływu prądu. W złączu prostującym sinusoidalnie zmienne napięcie wejściowe (rys. 42.13a) jest przekształcane w „obcięte” do połowy napięcie wyjściowe (rys. 42.13c). Złącze działa jak przełącznik, który dla jednego znaku napięcia wejściowego jest zamknięty (opór zerowy), a dla drugiego jest otwarty (opór nieskończony).

Średnia wartość napięcia wejściowego na rysunku 42.13a jest równa零, natomiast średnia wartość napięcia wyjściowego na rysunku 42.13c — nie. Tak więc złącza prostującego można używać jako części urządzenia służącego do zamiany napięcia zmennego na stałe, na przykład w zasilaczach elektronicznych.

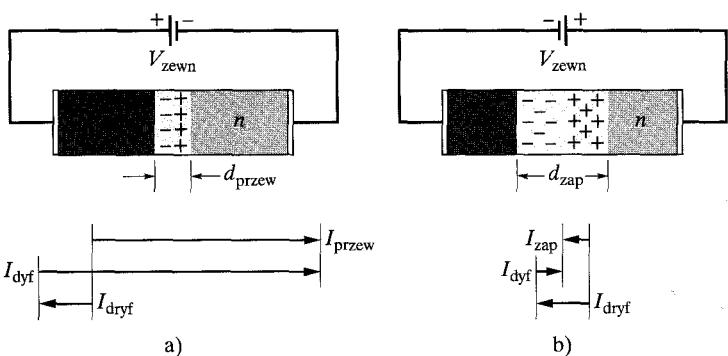
Na rysunku 42.14 wyjaśniono, dlaczego złącze *p-n* działa jak prostownik. Dodatnia elektroda źródła prądu na rysunku 42.14a jest podłączona do obszaru typu *p* złącza. Dla tej **polaryzacji złącza w kierunku przewodzenia** obszar typu *p* będzie miał wyższy potencjał niż przed podłączeniem źródła prądu, potencjał zaś obszaru typu *n* stanie się bardziej ujemny. Doprowadzi to do *obniżenia bariery potencjału*  $V_0$  z rysunku 42.11c. Więcej nośników mniejszościowych może teraz pokonać tę niższą barierę, a więc prąd dyfuzji  $I_{\text{dyf}}$  znacznie się zwiększy.

Nośniki mniejszościowe tworzące prąd unoszenia nie czują jednak istnienia bariery. Zatem podłączenie zewnętrznej baterii nie wpłynie na natężenie prądu unoszenia  $I_{\text{dryf}}$ . Równowaga prądów unoszenia i dyfuzji istniejąca w złączu bez zewnętrznej polaryzacji (patrz rys. 42.11d) załamuje się i, jak to pokazano na rysunku 42.14a, w obwodzie pojawią się duży wypadkowy prąd przewodzenia  $I_{\text{przew}}$ .

Innym efektem polaryzacji złącza w kierunku przewodzenia jest zmniejszenie szerokości obszaru zubożonego, jak to wynika z porównania rysunku 42.11b i rysunku 42.14a. Obszar zubożony zwęża się, gdyż polaryzacja złącza w kierunku



Rys. 42.13. Złącze *p-n* działające jako złącze prostujące. Działanie obwodu po-każanego na rysunku (b) polega na przepuszczaniu dodatniej części napię-cia wejściowego z rysunku (a) i zatrzy-mywaniu ujemnej części tego sygnału. Średnia wartość napięcia wejściowego jest równa zero, średnie napięcie wyj-ściowe zaś pokazane na rysunku (c) ma dodatnią wartość  $V_{\text{sr}}$



Rys. 42.14. a) Złącze *p-n* spolaryzowane w kierunku przewodzenia: obszar zubożony za-węża się, przez złącze płynie duży prąd przewodzenia  $I_{\text{przew}}$ . b) Złącze *p-n* spolaryzowane w kierunku zaporowym: obszar zubożony poszerza się, przez złącze płynie mały prąd zapo-rowy  $I_{\text{zap}}$

przewodzenia zmniejsza barierę potencjału, co powoduje zmniejszenie ładunku przestrzennego. Ponieważ jony tworzące ten ładunek tkwią nieruchomo w sieci krystalicznej, zatem zmniejszenie ładunku przestrzennego może nastąpić wyłącznie na drodze zmniejszenia szerokości obszaru zubożonego.

W obszarze zubożonym znajduje się zwykle bardzo niewiele nośników prądu, zatem jest to normalnie obszar o dużym oporze. Jednak kiedy jego szerokość zmniejsza się znacznie pod wpływem polaryzacji przewodzenia, ten opór również ulega istotnemu zmniejszeniu, co jest spójne z dużym natężeniem prądu przewodzenia.

Na rysunku 42.14b pokazano złącze **p-n spolaryzowane w kierunku zaporowym**: ujemna elektroda baterii połączona jest do obszaru typu *p*. Tym razem przyłożenie różnicy potencjałów spowoduje wzrost kontaktowej różnicy potencjałów. W efekcie prąd dyfuzji znacznie się zmniejszy, podczas gdy prąd unoszenia pozostanie nie zmieniony. Wypadkowy prąd zaporowy  $I_{\text{zap}}$  będzie stosunkowo mały. Obszar zubożony poszerzy się, jego duży opór zaś będzie spójny z małym natężeniem prądu zaporowego  $I_{\text{zap}}$ .

## 42.10. Dioda świecąca (LED)

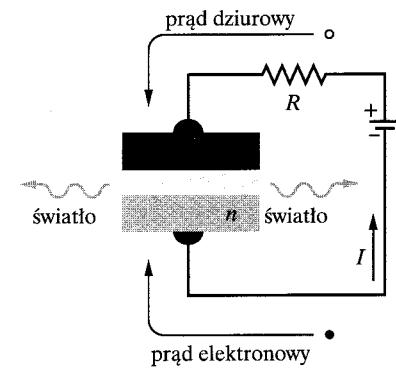
Ciągle dziś spotykamy kolorowe „elektroniczne” cyferki, które mrugają do nas z kas sklepowych, na stacjach benzynowych, w kuchenkach mikrofalowych i budzikach. Trudno byłoby też żyć bez niewidzialnych wiązek podczerwieni, kontrolujących drzwi w windzie czy emitowanych przez pilota sterującego telewizorem. Światło takie jest w prawie wszystkich przypadkach emitowane przez złącze *p-n* działające jako **dioda świecąca** (LED — z ang. *light emitting diode*). W jaki sposób w złączu *p-n* powstaje światło?

Zaczniemy od zwykłego półprzewodnika. Kiedy następuje przejście elektron–dziura, a więc gdy elektron z dna pasma przewodnictwa rekombinuje z dziurą z wierzchołka pasma walencyjnego, uwalniana jest przy tym energia równa szerokości przerwy energetycznej  $E_g$ . W krzemie, germanie i wielu innych półprzewodnikach energia ta jest w większości przekazywana drganiom termicznym sieci i w efekcie nie jest emitowane żadne światło.

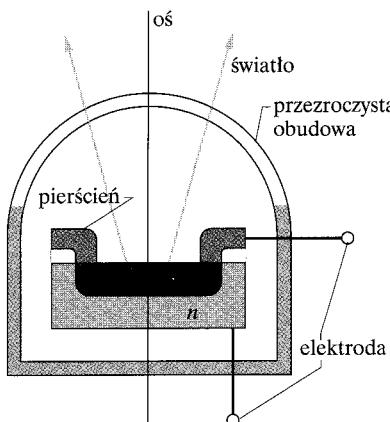
Jednak w niektórych półprzewodnikach, na przykład w arsenku galu (GaAs), energia ta może zostać wyemitowana w postaci fotonu o energii  $h\nu$  i długości fali

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g}. \quad (42.11)$$

Aby ilość emitowanego światła była na tyle duża, żeby złącze było użyteczne jako źródło światła, w materiale musi zachodzić dostatecznie dużo przejść elektron–dziura. Warunek ten *nie* jest spełniony w czystym półprzewodniku, ponieważ w temperaturze pokojowej nie istnieje w nim po prostu wystarczająco dużo par elektron–dziura. Domieszkowanie nic nie pomoże, jak to wyjaśniono na rysunku 42.10. W domieszkowanym obszarze typu *n* liczba elektronów przewodnictwa jest bardzo duża, ale nie ma w nim dostatecznie wiele dziur, które mogłyby z tymi elektronami rekombinować. W obszarze typu *p* jest mnóstwo



Rys. 42.15. Złącze *p-n* spolaryzowane w kierunku przewodzenia: elektrony wstrzykiwane są do materiału typu *n*, dziury zaś do materiału typu *p*. (Dziury poruszają się zgodnie z kierunkiem prądu  $I$ , który jest przeciwny do kierunku ruchu elektronów). Za każdym razem, gdy w wąskim obszarze zubożonym elektron rekombinuje z dziurą, emitowane jest stamtąd światło



Rys. 42.16. Przekrój diody świecącej — LED (dioda ma symetrię osiową wokół przedstawionej osi). Materiał typu  $p$ , na tyle cienki, aby przepuszczał światło, ma kształt dysku. Kontakt elektryczny z tym materiałem zapewnia metalowy pierścień znajdujący się na jego obwodzie. Obszar zubożony pomiędzy materiałem typu  $n$  i materiałem typu  $p$  nie został pokazany

dziur, ale nie ma dostatecznie wielu elektronów, które mogłyby z tymi dziurami rekombinować. Zatem ani czysty, ani domieszkowany półprzewodnik nie zapewniają na tyle dużej liczby par elektron–dziura, aby można je było wykorzystać jako użyteczne źródło światła.

Potrzebny jest nam materiał półprzewodnikowy o bardzo dużej liczbie elektronów w paśmie przewodnictwa oraz odpowiednio dużej liczbie dziur w paśmie walencyjnym. Układ o tej właściwości można uzyskać, silnie polaryzując w kierunku przewodzenia znacznie domieszkowane złącze  $p-n$ , tak jak to pokazano na rysunku 42.15. W takim układzie prąd  $I$  płynący przez złącze dostarcza elektronów do materiału typu  $n$  i dziur do materiału typu  $p$ . Jeśli domieszkowanie jest wystarczająco silne, natężenie prądu zaś wystarczająco duże, to obszar zubożony może stać się bardzo cienki (może mieć tylko kilka mikrometrów grubości). W efekcie obszar o dużej koncentracji elektronów w materiale typu  $n$  jest rozdzielony wąskim obszarem zubożonym od obszaru o odpowiednio dużej koncentracji dziur w materiale typu  $p$ . Kiedy obszary o tak dużych koncentracjach znajdują się blisko siebie, w obszarze zubożonym może zachodzić mnóstwo procesów rekombinacji elektronów i dziur. Na rysunku 42.16 pokazano budowę prawdziwej diody świecącej.

Diody świecące dostępne w handlu emittujące światło w zakresie widzialnym są zwykle tworzone ze związków galu, arsenu i fosforu. Przerwa energetyczna  $E_g$  w mieszanym krysztale arsenku (60%) i fosforku (40%) galu wynosi około 1,8 eV, co odpowiada czerwonej barwie światła. Inne układy materiałów umożliwiają konstrukcję diod świecących, emitujących światło praktycznie w całym zakresie widzialnym, bliskiej podczerwieni, a także bliskiego nadfioletu.

## Fotodioda

Przepuszczanie prądu przez odpowiednio zaprojektowane złącze  $p-n$  powoduje generację światła. Istnieje też efekt odwrotny — oświetlanie odpowiednio zaprojektowanego złącza  $p-n$  spowoduje przepływ prądu w obwodzie, którego częścią jest to złącze. Taki efekt to podstawa działania **fotodiody**.

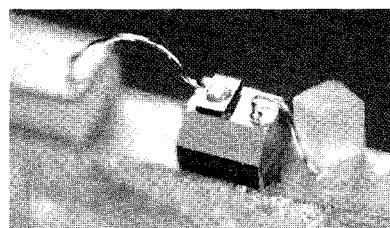
Kiedy używasz telewizyjnego pilota, dioda świecąca, która się w nim znajduje, wysyła zakodowaną sekwencję impulsów światła podczerwonego. Odbiornik w telewizorze to bardziej skomplikowana wersja prostej (dwuelektrodowej) fotodiody, która nie tylko wykrywa sygnały w podczerwieni, ale także je wzmacnia i przekształca na sygnały elektryczne zmieniające na przykład kanał lub dopasowujące siłę glosu.

## Laser złączowy

W układzie przedstawionym na rysunku 42.15 istnieje wiele elektronów w paśmie przewodnictwa materiału typu  $n$  i wiele dziur w paśmie walencyjnym materiału typu  $p$ . Tak więc mamy do czynienia z **inwersją obsadzeń** dla elektronów — na wyższych poziomach energetycznych znajduje się więcej elektronów niż na poziomach niższych. Jak przekonaliśmy się w paragrafie 41.12, jest to niezbędny, choć niewystarczający warunek powstania akcji laserowej.

Kiedy pojedynczy elektron przechodzi z pasma przewodnictwa do pasma walencyjnego, może przy tym wyemitować energię w postaci fotonu. Foton ten może wymusić przejście do pasma walencyjnego kolejnego elektronu, powodując tym samym powstanie drogą emisji wymuszonej drugiego fotonu. W ten sposób, jeśli prąd płynący przez złącze jest dostatecznie duży, może pojawić się lawina aktów emisji wymuszonej i może zostać wygenerowane światło laserowe. Aby do tego doprowadzić, przeciwległe powierzchnie kryształu ze złączem *p-n* muszą być płasko-równoległe. W ten sposób światło może odbijać się tam i z powrotem wewnątrz kryształu. (Przypomnij sobie, że w laserze helowo-neonowym z rysunku 41.21 służyła do tego celu para zwierciadeł.) Tak więc złącze *p-n* może działać jako **laser złączowy**. Światło emitowane przez taki laser jest wysoce spójne, a jego widmo jest znacznie węższe niż widmo światła generowanego w diodzie świecącej.

Lasery złączowe znajdują się w odtwarzaczach płyt kompaktowych (CD). Detekcja ich światła, odbitego od wirującej płyty, pozwala zamienić układ mikroskopijnych wgłębień w płytcie w dźwięk. Lasery złączowe znajdują też szerokie zastosowanie w telekomunikacji światłowodowej. Na rysunku 42.17 pokazano jak niewielkie są ich rozmiary. Lasery złączowe używane w telekomunikacji emitują zwykłe światło w podczerwonym zakresie widma elektromagnetycznego. Ma to związek z dwoma „oknami” pojawiającymi się w tym zakresie ( $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$  i  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ ), w których absorpcja energii przypadająca na jednostkę długości światłowodu przyjmuje minimum.



Rys. 42.17. Laser złączowy opracowany w AT&T Bell Laboratories. Szesnaście po prawej stronie zdjęcia to ziarnko soli

## Przykład 42.7

Złącze *p-n*, z którego wykonano pewną diodę świecącą, zbudowano ze związku półprzewodnikowego GaAsP o przerwie energetycznej wynoszącej 1,9 eV. Ile wynosi długość fali światła emitowanego przez tę diodę?

### ROZWIĄZANIE:

**O** Założymy, że przejścia optyczne odpowiedzialne za świecenie tej diody są wynikiem rekombinacji elektronów z dna pasma przewodnictwa i dziur z wierzchołka pasma walencyjnego. Zatem spełnione jest równanie (42.11). Wynika z niego, że

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{(1,9 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 650 \text{ nm.}$$

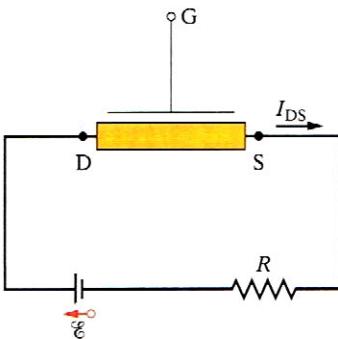
(odpowiedź)

Dioda emitemuje światło czerwone.

**SPRAWDZIAN 4:** Czy 650 nm to a) jedyna, b) największa, c) najmniejsza, czy c) średnia długość fali światła, jakie może być emitowane przez diodę omawianą w przykładzie? (Rozważ przejście kwantowe przyjęte w rozwiązaniu).

## 42.11. Tranzystor

**Tranzystor** jest trójelektrydowym przyrządem półprzewodnikowym, który może służyć do wzmacniania sygnałów elektrycznych. Na rysunku 42.18 pokazano schemat budowy tranzystora polowego (FET — *field-effect transistor*). Przepływ elektronów ze źródła S (ang. *source*) do drenu D (ang. *drain*) można sterować w takim tranzystorze polem elektrycznym (stąd tranzystor polowy). Pole to powstaje w wyniku przyłożenia odpowiedniego potencjału elektrycznego do bramki G (ang. *gate*). Istnieje wiele rodzajów tranzystorów; tutaj zajmiemy się jedynie



Rys. 42.18. Obwód elektryczny z tranzystorem polowym, w którym elektrony płyną ze źródła S do drenu D. (Zgodnie z konwencją prąd  $I_{DS}$  płynie w przeciwnym kierunku). Natężenie prądu  $I_{DS}$  sterowane jest polem elektrycznym wytwarzanym w tranzystorze przez przyłożenie napięcia do bramki G

pewnym szczególnym rodzajem tranzystora polowego, a mianowicie tranzystorem MOSFET (*metal-oxide-semiconductor-field-effect transistor* — tranzystor polowy metal-tlenek-półprzewodnik). Tranzystor MOSFET znajduje tak wiele zastosowań, że można by go nazwać wołem roboczym współczesnego przemysłu elektronicznego.

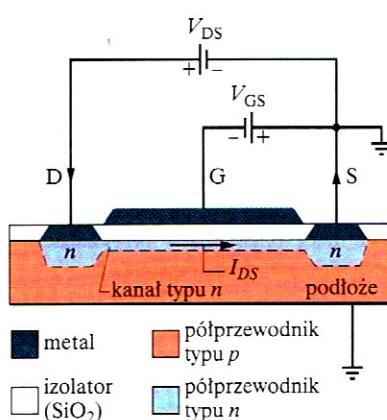
W wielu zastosowaniach tranzystor MOSFET pracuje wyłącznie w dwóch stanach: złączonym prądem źródło-dren  $I_{DS}$  (bramka otwarta — stan ON) lub z wyłączonym prądem źródło-dren  $I_{DS}$  (bramka zamknięta — stan OFF). Pierwszemu z nich możemy przypisać wartość 1, drugiemu zaś 0 w systemie dwójkowym, na którym oparte jest działanie cyfrowych układów logicznych. Przełączanie pomiędzy stanami ON i OFF w tranzystorze MOSFET może odbywać się z dużą częstotliwością. W efekcie w obwodach zbudowanych na tych tranzystorach można bardzo szybko przetwarzać dane zapisane w logice binarnej. W układach elektronicznych wszelkiego rodzaju stosuje się standardowo tranzystory MOSFET o rozmiarach rzędu 500 nm, a więc rzędu długości fali światła żółtego.

Na rysunku 42.19 pokazano podstawowe elementy budowy tranzystora MOSFET. Podłożo stanowi monokryształ krzemu lub innego materiału półprzewodnikowego, który domieszkuje się nieznacznie tak, aby otrzymać półprzewodnik typu  $p$ . W takim podłożu tkwią dwie „wyspy” silnie domieszkowane tak, aby otrzymać półprzewodnik typu  $n$ , stanowiące dren D i źródło S. Dren i źródło połączone są cienkim kanałem materiału typu  $n$ , zwanym **kanałem typu  $n$** . Na powierzchni kryształu umieszczona jest cienka izolująca warstwa dwutlenku krzemu (stąd O w nazwie MOSFET). Do warstwy tej przyłączone są dwa metaliczne kontakty do drenu D i źródła S. Nad kanałem typu  $n$  znajduje się cienka warstwa metalu (stąd M w nazwie MOSFET) tworząca bramkę G. Zauważ, że bramka G nie ma bezpośredniego kontaktu elektrycznego z pozostałymi elektrodami i podłożem, gdyż jest od nich oddzielona izolującą warstwą tlenku.

Załóżmy najpierw, że źródło S i podłożo typu  $p$  są uziemione (tzn. mają potencjał zerowy), bramka G zaś nie jest podłączona do żadnego źródła siły elektromotorycznej. Przyłożymy pomiędzy drenem a źródłem takie napięcie  $V_{DS}$ , żeby potencjał drenu był dodatni. W takim wypadku ze źródła do drenu kanałem typu  $n$  płynąć będą elektrony. Prąd  $I_{DS}$  płynący przez obszar typu  $n$  będzie konwencjonalnie skierowany od drenu do źródła, tak jak to pokazano na rysunku 42.19.

Przyłożymy następnie do bramki takie napięcie  $V_{GS}$ , żeby miała ona niższy potencjał niż źródło. Ujemny potencjał bramki G powoduje powstanie w strukturze tranzystora pola elektrycznego (stąd tranzystor polowy), które będzie starało się wypychać elektrony z kanału typu  $n$  do podłożo. Zwiększa to szerokość obszaru zubożonego istniejącego pomiędzy kanałem a podłożem. Poszerzenie obszaru zubożonego odbywa się kosztem kanału. Redukcja szerokości kanału wiąże się ze zmniejszeniem liczbą nośników ładunku, które w nim istnieją. To z kolei prowadzi do wzrostu oporu tego kanału i w efekcie do zmniejszenia natężenia prądu  $I_{DS}$ . Dobierając odpowiednio wartość napięcia  $V_{GS}$ , można ten prąd całkowicie wyłączyć. W taki sposób zmieniając napięcie  $V_{GS}$ , można przełączać tranzystor MOSFET pomiędzy stanami OFF i ON.

Nośniki ładunku nie płyną przez podłożo, ponieważ: 1) jest ono słabo domieszkowane, 2) nie jest dobrym przewodnikiem i 3) jest oddzielone od kanału



Rys. 42.19. Tranzystor MOSFET — szczególny typ tranzystora polowego. Natężeniem prądu  $I_{DS}$  płynącego kanałem typu  $n$  można sterować zmieniając różnicę potencjałów  $V_{GS}$  przyłożoną pomiędzy źródłem S a bramką G. Obszar zubożony istniejący pomiędzy materiałem typu  $n$  i podłożem typu  $p$  nie został pokazany

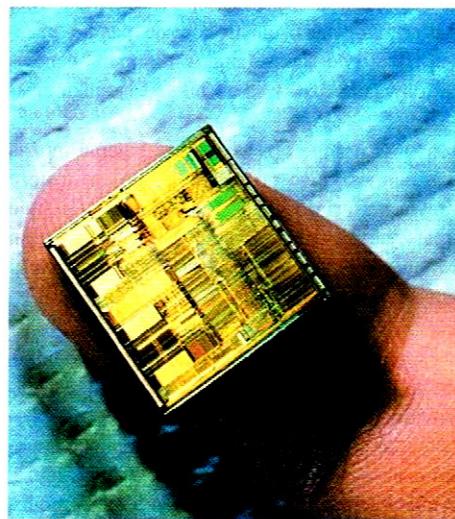
i dwóch silnie domieszkowanych obszarów typu  $n$  izolującą warstwą obszaru zubożonego, która nie została pokazana na rysunku 42.19. Taka warstwa zubożona zawsze istnieje na granicy między materiałem typu  $n$  i materiałem typu  $p$ , tak jak to pokazano na rysunku 42.11b.

## Układy scalone

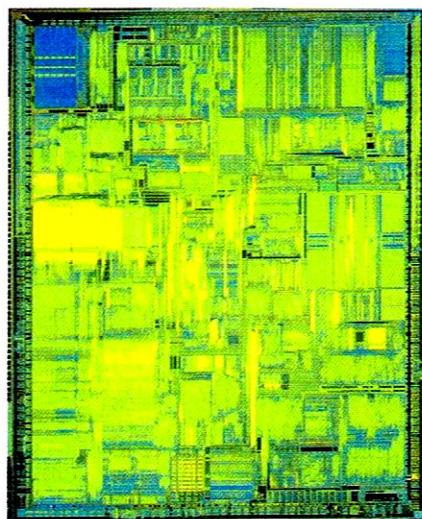
Komputery i inne urządzenia elektroniczne wykorzystują tysiące (jeśli nie miliony) tranzystorów i innych elementów elektronicznych, takich jak kondensatory i oporniki. Wszystkich tych elementów nie składa się osobno, ale wbudowuje w jeden półprzewodnikowy **układ scalony (chip)**.

Na rysunku 42.20 pokazano mikroprocesor Pentium, produkowany przez firmę Intel Corporation. Znajduje się w nim prawie 7 milionów tranzystorów, a także wiele innych elementów elektronicznych. Znacznie powiększony wygląd części innego mikroprocesora pokazano na rysunku 42.21. Różnymi kolorami zaznaczono na nim różne warstwy układu.

Układy scalone produkowane w należącej do korporacji Intel fabryce w Rio Rancho wytwarza się w procesie składającym się z 140 operacji. Na podłożu krzemowym o średnicy 20 cm powstaje około 300 układów. Pojedyncze elementy takich układów są tak małe, że najdrobniejszy pyłek kurzu może zrujnować działanie całości. Utrzymanie w pomieszczeniach produkcyjnych tej fabryki czystości tysiące razy przewyższającej normy sali operacyjnej wymaga specjalnych zabiegów. Jednym z nich jest specjalny ubiór pracowników, pokazany na fotografii otwierającej ten rozdział. Innym jest wymuszanie przepływu (z prędkością około 30 m/min) dokładnie filtrowanego powietrza przez perforowaną podłogę. Wreszcie specjalne prysznice powietrzne i wodne pomagają usuwać kosmetyki z ciała pracowników.



Rys. 42.20. Układ scalony procesora Pentium wytwarzanego przez firmę Intel używany jest głównie w komputerach. Przed użyciem zostaje zamknięty w ceramicznej obudowie



Rys. 42.21. Powiększona fotografia układu scalonego firmy Intel

## Podsumowanie

**Przewodniki, półprzewodniki i izolatory** Trzy właściwości elektryczne, które można wykorzystać do rozróżnienia krystalicznych ciał stałych to: **opór właściwy  $\rho$ , temperaturowy współczynnik oporu  $\alpha$  i koncentracja nośników ładunku  $n$** . Ciała stałe można podzielić na **przewodniki** (mały opór właściwy  $\rho$ ) i **izolatory** (duży opór właściwy  $\rho$ ). Przewodniki można dalej podzielić na **metale** (mały opór właściwy  $\rho$ , dodatni współczynnik  $\alpha$ , duża koncentracja  $n$ ) i **półprzewodniki** (duży opór właściwy  $\rho$ , ujemny współczynnik  $\alpha$ , mniejsza koncentracja  $n$ ).

**Poziomy energetyczne i przerwy energetyczne w krysztale** Izolowany atom może istnieć wyłącznie w jednym z dyskretnych stanów energetycznych. Gdy atomy zbliżają się do siebie, tworząc ciało stałe, odległości między poziomami poszczególnych atomów się zmniejszają. W efekcie w ciele stałym powstają dyskretne **pasma energetyczne**. Pasma te oddzielone są od siebie **przerwami energetycznymi**, z których każda odpowiada energiom, jakich nie może mieć żaden elektron.

Każde pasmo energetyczne składa się z ogromnej liczby poziomów o bardzo bliskich energiach. Zasada Pauliego zapewnia, że każdy z tych poziomów może być obsadzony wyłącznie przez jeden elektron.

**Izolatory** Najwyższe pasmo energetyczne obsadzone przez elektryny jest w izolatorze całkowicie zapełnione. Pasmo to jest oddzielone od pustego pasma o wyższej energii tak znaczną przerwą energetyczną, że elektryny w zasadzie nigdy nie są w stanie jej pokonać, dysponując energią termiczną.

**Metale** Najwyższe pasmo energetyczne obsadzone przez elektryny jest w metalu zapełnione tylko częściowo. Energia najwyższego obsadzonego poziomu energetycznego w tym paśmie w temperaturze zera bezwzględnego nazywana jest **energią Fermiego  $E_F$**  w metalu. Energia Fermiego dla miedzi równa jest  $E_F = 7,0 \text{ eV}$ .

Elektryny w częściowo zapełnionym paśmie to **elektryny przewodnictwa**. Ich liczba wynosi:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \text{liczba elektronów} \\ \text{przewodnictwa w próbce} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{l} \text{liczba atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{liczba elektronów} \\ \text{walencyjnych} \\ \text{przypadających na atom} \end{array} \right). \quad (42.2) \end{aligned}$$

Liczba atomów w próbce równa jest

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{liczba atomów} \\ \text{w próbce} \end{array} \right) &= \frac{\text{masa próbki } M_{\text{pr}}}{\text{masa atomowa}} = \frac{\text{masa molowa } M_{\text{pr}}}{(\text{masa molowa } M)/N_A} \\ &= \frac{(\text{gęstość materiału})(\text{objętość próbki } V)}{(\text{masa molowa } M)/N_A}. \quad (42.4) \end{aligned}$$

Koncentracja elektronów przewodnictwa  $n$  równa jest

$$n = \frac{\text{liczba elektronów przewodnictwa w próbce}}{\text{objętość próbki } V}. \quad (42.3)$$

Funkcja **gęstości stanów  $N(E)$**  opisująca liczbę dostępnych poziomów energetycznych przypadających na jednostkową objętość próbki i na jednostkowy przedział energii ma postać

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (\text{gęstość stanów}) \quad (42.5)$$

gdzie  $E$  jest energią (względem dna pasma), dla której obliczana jest wartość  $N(E)$ .

**Prawdopodobieństwo obsadzenia  $P(E)$**  (prawdopodobieństwo, że dany dozwolony stan będzie obsadzony przez elektron) równe jest

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (\text{prawdopodobieństwo obsadzenia}). \quad (42.6)$$

**Gęstość stanów obsadzonych  $N_0(E)$**  równa jest iloczynowi dwóch wielkości opisywanych przez równania (42.5) i (42.6):

$$N_0(E) = N(E)P(E) \quad (\text{gęstość stanów obsadzonych}). \quad (42.7)$$

Energię Fermiego dla metalu można obliczyć, całkując gęstość stanów obsadzonych w temperaturze  $T = 0$  od energii  $E = 0$  do energii  $E = E_F$ . Wynikiem takiego całkowania jest:

$$E_F = \left( \frac{3}{16\sqrt{2}\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{2/3} = \frac{0,121h^2}{m} n^{2/3}. \quad (42.9)$$

**Półprzewodniki** Struktura pasmowa **półprzewodników** jest taka sama jak struktura izolatorów. Jedynie szerokość przerwy energetycznej  $E_g$  jest w półprzewodniku znacznie mniejsza niż w izolatorze. W krzemie (półprzewodniku) w temperaturze pokojowej drgania termiczne przenoszą nieco elektronów do **pasma przewodnictwa**, pozostawiając tyle samo dziur w paśmie walencyjnym. Zarówno elektryny, jak i dziury są nośnikami ładunku elektrycznego.

Liczba elektronów w paśmie przewodnictwa krzemu można znacznie zwiększyć, domieszkując go niewielką ilością fosforu i uzyskując tym samym **materiał typu  $n$** . Liczbę dziur w paśmie walencyjnym można znacznie zwiększyć, domieszkując krzem glinem. Domieszkowanie takie prowadzi do uzyskania **materiału typu  $p$** .

**Złącze  $p-n$**  Złącze  $p-n$  to pojedynczy kryształ półprzewodnika, w którym jeden obszar domieszkowany jest tak, aby powstał półprzewodnik typu  $n$ , a drugi, sąsiadujący z nim obszar domieszkowany jest tak, aby powstał półprzewodnik typu  $p$ . Granicę pomiędzy jednym a drugim obszarem nazywamy **płaszczyzną złącza**. W równowadze termodynamicznej na płaszczyźnie tej zachodzą następujące zjawiska:

**Nośniki większościowe** (elektryny w obszarze typu  $n$  i dziury w obszarze typu  $p$ ) dyfundują przez płaszczyznę złącza, tworząc prąd dyfuzji  $I_{\text{dyf}}$ .

**Nośniki mniejszościowe** (dziury w obszarze typu  $n$  i elektryny w obszarze typu  $p$ ) są przeciągane przez płaszczyznę złącza i tworzą prąd unoszenia  $I_{\text{dryf}}$ . Oba wymienione prądy mają jednakową wartość bezwzględną, a więc wypadkowy prąd płynący przez płaszczyznę złącza równy jest zeru.

Po obu stronach płaszczyzny złącza powstaje **obszar zubożony** (w swobodne nośniki ładunku), w którym znajdują się zjonizowane atomy donorów i akceptorów.

W obszarze zubożonym powstaje **kontaktowa różnica potentjałów**  $V_0$ .

**Zastosowania złącza p-n** Złącze  $p-n$ , do którego przyłożono różnicę potencjałów, zaczyna znacznie łatwiej przewodzić prąd dla jednej polaryzacji niż dla polaryzacji przeciwniej. Tak więc złącze  $p-n$  może działać jak **złącze prostujące**.

Złącze  $p-n$ , spolaryzowane w kierunku przewodzenia, może emitować światło, a więc działać jako **dioda świecąca** (LED).

Długość fali emitowanego światła wynosi:

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{hc}{E_g}. \quad (42.11)$$

Silnie spolaryzowane w kierunku przewodzenia złącze  $p-n$ , w którym boczne ściany są płasko-równoległe, może działać jak **laser złączowy**, emitując światło o bardzo dobrze określonej długości fali.

**Tranzystory MOSFET** Tranzystor MOSFET jest elementem elektronicznym o trzech elektrodach, w którym napięcie przyłożone do **bramki G** steruje przepływem elektronów ze **źródła S** do **drenu D**. Tranzystor MOSFET znajduje się zwykle tylko w jednym z dwóch stanów: ON (gdy przewodzi prąd) lub OFF (gdy nie przewodzi prądu). Tranzystory takie umieszczane tysiącami i milionami na płytach krzemowych (**chipach**) w **układach scalonych** stanowią podstawę budowy każdego komputera.

## Pytania

1. Na rysunku 42.1a pokazano 14 atomów tworzących komórkę elementarną kryształu miedzi. Jednak ponieważ każdy z tych atomów należy do dwóch lub więcej sąsiadujących ze sobą komórek, więc tylko część każdego z tych atomów należy do komórki pokazanej na rysunku. Ile atomów przypada na jedną komórkę elementarną kryształu miedzi? (Aby uzyskać odpowiedź, zsumuj części atomów należące do jednej komórki elementarnej).

2. Na rysunku 42.1b pokazano 18 atomów tworzących komórkę elementarną kryształu krzemu. Jednak ponieważ każdy z tych atomów należy do dwóch lub więcej sąsiadujących ze sobą komórek, zatem tylko część każdego z tych atomów należy do komórki pokazanej na rysunku. Ile atomów przypada na jedną komórkę elementarną kryształu krzemu? (Patrz pytanie 1).

3. Czy różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami w najwyższym obsadzonym paśmie energetycznym metalu zależy od: a) materiału, z jakiego wykonana jest próbka, b) rozmiaru próbki, c) położenia tych poziomów w paśmie, d) temperatury próbki, e) energii Fermiego tego metalu?

4. Porównaj prędkość unoszenia  $v_u$  elektronów przewodnictwa w miedzianym przewodzie, w którym płynie prąd, z prędkością Fermiego  $v_F$  dla miedzi. Czy prędkość  $v_u$  jest a) w przybliżeniu równa, b) znacznie większa, czy c) znacznie mniejsza niż prędkość  $v_F$ ?

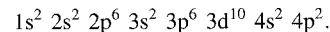
5. Gdzie w kryształku krzemu powinno się szukać: a) elektronu przewodnictwa, b) elektronu walencyjnego i c) elektronu z podpowłoką 2p izolowanego atomu krzemu?

6. Czy którekolwiek, a jeśli tak, to które, z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe? a) W dostatecznie niskich temperaturach krzem

zachowuje się jak izolator. b) W dostatecznie wysokich temperaturach krzem zachowuje się jak dobry przewodnik. c) W dostatecznie wysokich temperaturach krzem zachowuje się jak metal.

7. Przerwa energetyczna  $E_g$  krzemu i germanu wynosi odpowiednio 1,12 eV i 0,67 eV. Czy którekolwiek, a jeśli tak, to które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe? a) Koncentracja nośników ładunku w temperaturze pokojowej jest w obu substancjach jednakowa. b) Koncentracja nośników ładunku w temperaturze pokojowej jest w germanie większa niż w krzemu. c) Koncentracja elektronów przewodnictwa jest w obu substancjach większa niż koncentracja dziur. d) Koncentracja elektronów jest w obu substancjach równa koncentracji dziur.

8. W izolowanym atomie germanu są 32 elektryny znajdujące się na następujących podpowłokach energetycznych:



Pierwiastek ten krystalizuje w takiej samej strukturze jak krzem i tak jak krzem jest półprzewodnikiem. Które z elektronów germanu tworzą w kryształku pasmo walencyjne?

9. German ( $Z = 32$ ) ma taką samą strukturę krystaliczną i taką samą postać wiązań jak krzem. Jaki jest wypadkowy ładunek jonu germanu w sieci krystalicznej: +e, +2e, +4e, +28e czy +32e?

10. a) Które z wymienionych pierwiastków, użyte jako domieszkę w krzemie, prowadziłyby do uzyskania materiału typu  $n$ : arsen, ind, cyna, gal, antymon, bor? b) Które umożliwiłyby uzyskanie materiału typu  $p$ ? c) Które nie byłyby użyteczne jako domieszki? (Wskazówka: Skorzystaj z układu okresowego z dodatku G).

**11.** Próbka krzemu jest domieszkowana fosforem. Czy którekolwiek, a jeśli tak, to które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe? a) Liczba dziur w tej próbce nieznacznie wzrosła. b) Opór właściwy próbki wzrósł. c) Próbka stała się dodatnio naładowana. d) Próbka stała się ujemnie naładowana. e) Przerwa energetyczna pomiędzy pasmem walencyjnym a pasmem przewodnictwa nieco się zmniejszyła.

**12.** Czy aby uzyskać półprzewodnik typu *n*, użyłbyś a) krzemu domieszkowanego arsenem, czy b) germanu domieszkowanego indem? (Wskazówka: Skorzystaj z układu okresowego).

**13.** W spolaryzowanych złączach *p-n* pokazanych na rysunku 42.14, w każdym z obszarów zubożonych istnieje pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  związane z różnicą potencjałów istniejącą w danym obszarze. a) Czy pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  jest skierowane w prawo, czy w lewo? b) Czy wartość natężenia tego pola jest większa dla polaryzacji zaporowej, czy dla polaryzacji przewodzenia?

**14.** W pewnym izolowanym złączu *p-n* na granicach obszaru zubożonego powstaje kontaktowa różnica potencjałów  $V_0$  równa 0,78 eV. Do elektrod rozważanego złącza podłączony został voltmierz tak, że dodatni zacisk miernika połączony jest z obszarem typu *p*. Czy napięcie wskazywane przez miernik będzie równe: a) +0,78 V, b) -0,78 V, c) 0 V, d) jakiekolwiek innej wartości? (Wskazówka: Potencjały kontaktowe pojawiają się też na połączeniach złącza *p-n* i zacisków miernika).

**15.** W którym z wymienionych elementów spełnione jest prawo Ohma: a) próbka czystego krzemu, b) próbka krzemu typu *n*, c) próbka krzemu typu *p*, d) złącze *p-n*?

**16.** Dioda świecąca wykonana z mieszanego związku półprzewodnikowego: arsenku i fosforku galu emisuje światło czerwone. Jeśli popatrzasz przez taki kryształ na białą powierzchnię, to: a) zobaczyisz, że jest czerwona, b) zobaczyisz, że jest niebieska, c) nic nie zobaczyisz, bo kryształ jest nieprzezroczysty, d) zobaczyisz białą powierzchnię?

## Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 42.5 Metale

**1.** Miedź jest metalem jednowartościowym, jego masa molowa wynosi 63,54 g/mol, a gęstość to 8,96 g/cm<sup>3</sup>. Oblicz koncentrację elektronów przewodnictwa w miedzi.

**2.** Sprawdź bezpośrednim rachunkiem wartość czynnika liczbowego 0,121 w równaniu (42.9).

**3.** Pod jakim ciśnieniem (wyrażonym w atmosferach) liczba cząsteczek przypadających na jednostkę objętości w gazie doskonałym byłaby równa koncentracji elektronów przewodnictwa w miedzi, gdyby zarówno gaz, jak i miedź znajdowały się w temperaturze  $T = 300$  K?

**4.** Skorzystaj z równania (42.9) do sprawdzenia, że energia Fermiego dla miedzi równa jest 7,0 eV.

**5.** Oblicz wartość  $d\rho/dT$  w temperaturze pokojowej dla a) miedzi i b) krzemu, korzystając z danych z tabeli 42.1.

**6.** Oblicz koncentrację elektronów przewodnictwa w złocie, które jest metałem jednowartościowym. Masę molową i gęstość złota znajdziesz w dodatku F.

**7.** a) Pokaż, że równanie (42.5) można zapisać w postaci  $N(E) = CE^{1/2}$ . b) Oblicz stałą *C* i wyróżnij ją w metrach i elektronowoltach. c) Oblicz wartość  $N(E)$  dla energii  $E = 5,0$  eV.

**8.** Energia Fermiego dla miedzi równa jest 7,0 eV. Sprawdź bezpośredniem rachunkiem, że odpowiednia prędkość Fermiego równa jest 1600 km/s.

**9.** Jakie jest prawdopodobieństwo, że stan znajdujący się 0,062 eV powyżej poziomu Fermiego będzie obsadzony w temperaturze: a)  $T = 0$  K i b)  $T = 320$  K?

**10.** Oblicz gęstość stanów  $N(E)$  w metalu dla energii  $E = 8,0$  eV i pokaż, że otrzymany wynik jest zgodny z wykresem na rysunku 42.5.

**11.** Pokaż, że równanie (42.9) można przepisać w postaci  $E_F = An^{2/3}$ , gdzie stała *A* ma wartość  $3,65 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{eV}$ .

**12.** Skorzystaj z wyniku zadania 6 do wyznaczenia energii Fermiego dla złota.

**13.** Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu kwantowego znajdującego się 63 meV powyżej poziomu Fermiego równe jest 0,09. Jakie jest prawdopodobieństwo obsadzenia stanu znajdującego się 63 meV poniżej poziomu Fermiego?

**14.** Energia Fermiego dla miedzi równa jest 7,0 eV. Dla miedzi w temperaturze 1000 K: a) oblicz energię poziomu, dla którego prawdopodobieństwo obsadzenia przez elektron równe jest 0,9. Oblicz dla tej energii b) gęstość stanów  $N(E)$  i c) gęstość stanów obsadzonych  $N_o(E)$ .

**15.** Założmy, że w równaniu (42.6)  $E - E_F = \Delta E = 1,0$  eV. a) Dla jakiej temperatury prawdopodobieństwo obsadzenia  $P(E)$  obliczone przy użyciu tego równania różni się o 1% od prawdopodobieństwa obliczonego przy użyciu klasycznego równania

Boltzmanna  $P(E) = e^{-\Delta E/kT}$  (równanie (42.1) z dwiema zmianami w zapisie)? b) Dla jakiej temperatury wyniki te różnią się o 10%? [www](#)

16. Pokaż, że funkcja opisująca prawdopodobieństwo obsadzenia  $P(E)$  w równaniu (42.6) jest symetryczna względem wartości energii Fermiego, a więc pokaż, że

$$P(E_F + \Delta E) + P(E_F - \Delta E) = 1.$$

17. Przypuśćmy, że całkowita objętość próbki metalu jest sumą objętości jonów metalu tworzących sieć i (osobno) objętości zajmowanej przez elektryny przewodnictwa. Gęstość i masa molowa sodu (metalu) wynoszą odpowiednio  $971 \text{ kg/m}^3$  i  $23 \text{ g/mol}$ . Średnica jonu  $\text{Na}^+$  równa jest  $98 \text{ pm}$ . a) Jaką część objętości próbki metalicznego sodu zajmują jego elektryny przewodnictwa? b) Przeprowadź podobny rachunek dla miedzi, której gęstość, masa molowa i średnica jonu wynoszą odpowiednio  $8960 \text{ kg/m}^3$ ,  $63,5 \text{ g/mol}$  i  $135 \text{ pm}$ . c) W którym z tych metali według ciebie elektryny lepiej są opisywane przez model gazu elektronów swobodnych?

18. Oblicz gęstość stanów obsadzonych  $N_o(E)$  dla miedzi w temperaturze  $T = 1000 \text{ K}$  dla energii  $E = 4,0 \text{ eV}$ ;  $6,75 \text{ eV}$ ;  $7,0 \text{ eV}$ ;  $7,25 \text{ eV}$  i  $9,0 \text{ eV}$ . Porównaj swoje wyniki z rysunkiem 42.7b. Energia Fermiego dla miedzi równa jest  $7,0 \text{ eV}$ .

19. Oblicz koncentrację: a) cząsteczek gazowego tlenu w temperaturze  $T = 0^\circ\text{C}$  i pod ciśnieniem  $1,0 \text{ atmosfery}$  i b) elektronów przewodnictwa w miedzi. c) Ile wynosi stosunek tych dwóch wielkości? d) Oblicz średnią odległość pomiędzy cząsteczkami w obu tych przypadkach. Załóż, że odległość ta jest długością krawędzi sześcianu, którego objętość odpowiada dostępnej objętości przypadającej na jedną cząstkę.

20. Jakie jest prawdopodobieństwo, że elektron pokona przerwę energetyczną  $E_g$  (patrz rysunek 42.4a) w diamentie o masie równej masie Ziemi? Skorzystaj z odpowiedzi do sprawdzianu 42.1 i masy molowej węgla z dodatku F. Przymij, że w diamentie na jeden atom węgla przypada jeden elektron walencyjny.

21. Energia Fermiego dla srebra równa jest  $5,5 \text{ eV}$ . a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w temperaturze  $T = 0^\circ\text{C}$  obsadzone będą stany o następujących energiach:  $4,4 \text{ eV}$ ;  $5,4 \text{ eV}$ ;  $5,5 \text{ eV}$ ;  $5,6 \text{ eV}$  i  $6,4 \text{ eV}$ ? b) W jakiej temperaturze prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii  $E = 5,6 \text{ eV}$  wynosi  $0,16$ ? [www](#)

22. Pokaż, że prawdopodobieństwo  $P(E)$  tego, że stan o energii  $E$  nie jest obsadzony, wynosi

$$P(E) = \frac{1}{e^{-\Delta E/kT} + 1}.$$

gdzie  $\Delta E = E - E_F$ .

23. Energia Fermiego dla glinu jest równa  $11,6 \text{ eV}$ . Gęstość i masa molowa glinu wynoszą odpowiednio  $2,7 \text{ g/cm}^3$  i  $27 \text{ g/mol}$ . Korzystając z tych danych, wyznacz liczbę elektronów przewodnictwa przypadających na jeden atom.

24. W jakiej odległości energetycznej od poziomu Fermiego znajduje się w temperaturze  $T = 300 \text{ K}$  stan, dla którego prawdopodobieństwo obsadzenia przez elektron przewodnictwa równe jest  $0,1$ ?

25. Srebro jest metalem jednowartościowym. Oblicz: a) koncentrację elektronów przewodnictwa, b) energię Fermiego, c) prędkość Fermiego i d) długość fali de Broglie'a odpowiadającą tej prędkości elektronu. Potrzebne dane dla srebra znajdziesz w dodatku F.

26. Cynk jest metalem dwuwartościowym. Oblicz: a) koncentrację elektronów przewodnictwa, b) energię Fermiego, c) prędkość Fermiego i d) długość fali de Broglie'a odpowiadającą tej prędkości elektronu. Potrzebne dane dla cynku znajdziesz w dodatku F.

27. a) Pokaż, że gęstość stanów na poziomie Fermiego jest równa

$$N(E_F) = \frac{4 \cdot 3^{1/3} \cdot \pi^{2/3} \cdot m \cdot n^{1/3}}{h^2} = (4,11 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \cdot \text{eV}^{-1})n^{1/3},$$

gdzie  $n$  jest koncentracją elektronów przewodnictwa. b) Znajdź gęstość stanów  $N(E_F)$  dla miedzi, korzystając z wyniku zadania 1, i sprawdź swój wynik z wykresem na rysunku 42.5, pamiętając, że dla miedzi energia Fermiego  $E_F = 7,0 \text{ eV}$ .

28. a) Pokaż, że pochodna  $dP/dE$  (równanie (42.6)) dla energii  $E = E_F$  jest równa  $-\frac{1}{4}kT$ . b) Pokaż, że styczna do krzywej z rysunku 42.6b dla energii  $E = E_F$  przecina poziomą oś wykresu w punkcie  $E = E_F + 2kT$ .

29. Pokaż, że średnia energia  $E_{sr}$  elektronów przewodnictwa w metalu w temperaturze  $T = 0 \text{ K}$  wynosi  $\frac{3}{5}E_F$ . (Wskazówka: Z definicji  $E_{sr} = (1/n) \int EN_o(E)dE$ , gdzie  $n$  jest koncentracją nośników ładunku).

30. Skorzystaj z wyniku zadania 29 do wyznaczenia całkowitej energii kinetycznej ruchu postępowego elektronów przewodnictwa w próbce miedzi o objętości  $1,0 \text{ cm}^3$  w temperaturze  $T = 0 \text{ K}$ .

31. a) Skorzystaj z wyniku zadania 29 do oszacowania, ile energii zostało uwolnione przez elektryny przewodnictwa w miedzianej moncie o masie  $3,1 \text{ g}$ , gdyby nagle przestał obowiązywać zakaz Pauliego. b) Jak długo energia ta podrzymałaby świecenie żarówki o mocy  $100 \text{ W}$ ? (Uwaga: Zakaz Pauliego nie może przestać obowiązywać!).

32. W metalu w temperaturze  $T = 1000 \text{ K}$  stosunek liczby elektronów przewodnictwa o energiach większych niż energia Fermiego do liczby wszystkich elektronów przewodnictwa jest równy stosunkowi pola powierzchni pod wykresem z rysunku 42.7b, ograniczonej przez wartość energii Fermiego  $E_F$ , do pola powierzchni pod całym wykresem. Wartości te trudno obliczyć przez bezpośrednie całkowanie. W przybliżeniu stosunek ten dla dowolnej temperatury  $T$  wynosi

$$\eta = \frac{3kT}{2E_F}.$$

Zauważ, że dla temperatury  $T = 0$  K mamy  $\eta = 0$ , czego mogliśmy oczekwać. Ile wynosi  $\eta$  dla miedzi w temperaturze a) 300 K i b) 1000 K? Energia Fermiego dla miedzi  $E_F = 7,0$  eV. c) Sprawdź swoje odpowiedzi, wykonując całkowanie numeryczne równania (42.7).

33. W jakiej temperaturze 1,3% elektronów przewodnictwa w liście (metalu) ma energię większą niż energia Fermiego  $E_F$ , która jest równa 4,7 eV? (Patrz zadanie 32).

34. Srebro topi się w temperaturze 961°C. Jaka część elektronów przewodnictwa w srebrze w temperaturze topnienia znajduje się w stanach o energiach większych niż energia Fermiego  $E_F$ , która jest równa 5,5 eV? (Patrz zadanie 32).

## 42.6 Półprzewodniki

35. a) Jaka jest maksymalna długość fali światła, które wzbuď elektron z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa diamentu? Przerwa energetyczna diamentu wynosi 5,5 eV. b) Do jakiej części widma elektromagnetycznego należy to światło?

36. Arsenek galu (GaAs) jest powszechnie stosowanym półprzewodnikiem, którego przerwa energetyczna wynosi  $E_g = 1,43$  eV. Struktura krystaliczna GaAs jest podobna do struktury krzemu, w której połowę atomów krzemu zastępują atomy arsenu, a drugą połowę atomy galu. Naszkicuj strukturę krystaliczną sieci GaAs zrzutowaną na płaszczyznę, podobnie jak na rysunku 42.9a. a) Oblicz wypadkowe ładunki rdzeni jonów galu i arsenu. b) Ile elektronów przypada na jedno wiązanie? (Wskazówka: Spójrz na układ okresowy z dodatku G).

37. a) Wyznacz kąt  $\theta$  pomiędzy wiązaniem atomu krzemu z jego najbliższymi sąsiadami w sieci krystalicznej. Pamiętaj, że każdy atom krzemu wiąże się z czterema najbliższymi sąsiadami. Te cztery najbliższe atomy znajdują się w wierzchołkach czworościanu foremnego, a więc czworościanu, którego wszystkie ściany są jednakowymi trójkątami równobocznymi. b) Wyznacz długość tego wiązania, wiedząc, że atomy znajdujące się w wierzchołkach czworościanu są odległe od siebie o 388 pm.

38. Funkcję opisującą prawdopodobieństwo obsadzenia (wzór (42.6)) można zastosować zarówno do półprzewodników, jak i do metali. W przypadku niedomieszkowanych półprzewodników energia Fermiego znajduje się w pobliżu połowy przerwy energetycznej pomiędzy pasmem przewodnictwa a pasmem walencyjnym. Szerokość przerwy w germanie wynosi 0,67 eV. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) stan z dna pasma przewodnictwa jest obsadzony i b) stan z wierzchołka pasma walencyjnego nie jest obsadzony? Przymij, że  $T = 290$  K. (Uwaga: Na rysunku 42.4b pokazano, że w metalu energia Fermiego dzieli symetrycznie stany obsadzone przez elektryny przewodnictwa i dziury. Aby obraz ten był prawdziwy w przypadku półprzewodnika, poziom Fermiego musi znajdować się w pobliżu środka przerwy energetycznej. Energii Fermiego nie musi odpowiadać żaden dozwolony stan energetyczny).

39. W uproszczonym modelu półprzewodnika niedomieszkowanego prawdziwy rozkład stanów energetycznych można zastąpić takim rozkładem, w którym w paśmie walencyjnym istnieje  $N_w$  stanów o energii  $E_w$ , w paśmie przewodnictwa zaś jest  $N_p$  stanów o energii  $E_p$ . Liczba elektronów w paśmie przewodnictwa równa się liczbie dziur w paśmie walencyjnym. a) Pokaż, że z tego ostatniego warunku wynika, że

$$\frac{N_p}{\exp(\Delta E_p/kT) + 1} = \frac{N_w}{\exp(\Delta E_w/kT) + 1},$$

gdzie

$$\Delta E_p = E_p - E_F \quad \text{i} \quad \Delta E_w = -(E_w - E_F).$$

(Wskazówka: patrz zadanie 22). b) Jeśli poziom Fermiego znajduje się w przerwie pomiędzy tymi dwoma pasmami i w odległości od nich dużej w porównaniu z energią  $kT$ , to w mianownikach rozważanego równania dominują wyrażenia wykładnicze. Pokaż, że w takich warunkach

$$E_F = \frac{E_p + E_w}{2} + \frac{kT \ln(N_w/N_p)}{2}$$

oraz że jeśli  $N_w \approx N_p$ , to poziom Fermiego w półprzewodniku niedomieszkowanym znajduje się w pobliżu połowy przerwy energetycznej, tak jak to powiedziano w zadaniu 38.

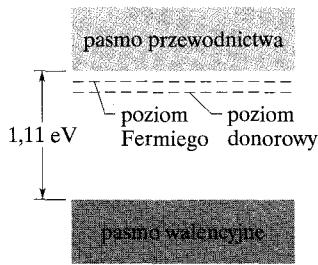
## 42.7 Półprzewodniki domieszkowane

40. Koncentracja elektronów w paśmie przewodnictwa czystego krzemu w temperaturze pokojowej (i równa jej koncentracja dziur w paśmie walencyjnym) jest równa około  $5 \cdot 10^{15}$  m<sup>-3</sup>. Przypuszcmy, że jeden na  $10^7$  atomów krzemu zamieniamy na atom fosforu. a) Czy domieszkowany w taki sposób półprzewodnik będzie typu  $n$  czy typu  $p$ ? b) Ile będzie wynosiła koncentracja nośników ładunku dostarczonych przez fosfor? c) Oblicz stosunek koncentracji nośników ładunku (elektronów w paśmie przewodnictwa i dziur w paśmie walencyjnym) w domieszkowanym krzemie do koncentracji nośników w krzemie niedomieszkowanym.

41. Oblicz masę fosforu potrzebnego do domieszkowania 1,0 g krzemu, aby otrzymać koncentrację elektronów przewodnictwa z przykładu 42.6.

42. Próbka krzemu domieszkowana jest atomami, których stany donorowe znajdują się 0,11 eV poniżej dna pasma przewodnictwa. (Przerwa energetyczna w krzemu jest równa 1,11 eV). a) Wyznacz położenie poziomu Fermiego względem wierzchołka pasma walencyjnego krzemu, jeśli prawdopodobieństwo obsadzenia każdego z tych stanów donorowych jest w temperaturze  $T = 300$  K równe  $5,0 \cdot 10^{-5}$ . b) Jakie jest wówczas prawdopodobieństwo, że stan na dnie pasma przewodnictwa jest obsadzony?

43. Domieszkowanie zmienia położenie poziomu Fermiego w półprzewodniku. Rozważ krzem, dla którego przerwa energetyczna pomiędzy wierzchołkiem pasma walencyjnego a dnem pasma przewodnictwa równa jest 1,11 eV. Poziom Fermiego



Rys. 42.22. Zadanie 43

w czystym krzemi w temperaturze  $T = 300$  K znajduje się w pobliżu połowy przerwy energetycznej. Przypuśmy, że domieszkujemy krzem atomami donorów, które mają stan energetyczny znajdujący się 0,15 eV poniżej dna pasma przewodnictwa. Przyjmijmy dalej, że w wyniku domieszkowania poziom Fermiego znajdzie się 0,11 eV poniżej dna pasma przewodnictwa (rysunek 42.22). a) Oblicz prawdopodobieństwo, że w czystym i w domieszkowanym krzemi stan z dna pasma przewodnictwa i z wierzchołka pasma walencyjnego jest obsadzony. b) Oblicz prawdopodobieństwo, że w domieszkowanym krzemi obsadzony jest stan donorowy.

## 42.9 Złącze prostujące

44. Natężenie prądu  $I$  płynącego przez idealne złącze prostujące  $p-n$  (złącze o bardzo dobrze określonych granicach pomiędzy obszarami domieszkowanymi) związane jest z różnicą potencjałów  $V$  panującą na jego elektrodach wzorem

$$I = I_0(e^{eV/kT} - 1),$$

gdzie wartość  $I_0$ , która zależy od rodzaju użytego materiału, ale nie zależy od natężenia prądu czy też różnicy potencjałów, nazywana jest *prądem zaporowym nasycenia*. Napięcie  $V$  jest dodatnie, gdy złącze jest spolaryzowane w kierunku przewodzenia, ujemne zaś, gdy polaryzacja jest zaporowa. a) Sprawdź, że powyższe równanie przewiduje zachowanie złącza prostującego, rysując wykres zależności natężenia prądu  $I$  od napięcia  $V$  w zakresie od  $-0,12$  V do  $+0,12$  V. Przyjmij  $T = 300$  K i  $I_0 = 5,0$  nA. b) Dla tej samej temperatury oblicz stosunek natężenia prądu dla polaryzacji przewodzenia 0,5 V do natężenia prądu dla polaryzacji zaporowej 0,5 V.

45. Foton docierający do zubożonego obszaru złącza  $p-n$  może się tam rozpraszać na elektronach walencyjnych. W każdym takim akcie przekazuje on część swojej energii elektronowi, który w efekcie może przejść do pasma przewodnictwa. W taki sposób foton tworzy pary elektron–dziura. Z tego powodu złącza

takie często są używane jako detektory promieniowania elektromagnetycznego, szczególnie w zakresie promieniowania rentgenowskiego i promieniowania  $\gamma$ . Założmy, że pojedynczy foton  $\gamma$  o energii 622 keV, w wyniku wielokrotnych rozproszeń w półprzewodniku o przerwie energetycznej 1,1 eV przekazuje elektronom całą swoją energię. Oblicz liczbę wykrojonych w taki sposób par elektron–dziura, zakładając, że każdy z tych elektronów przechodzi z wierzchołka pasma walencyjnego na dno pasma przewodnictwa.

## 42.10 Dioda świecąca (LED)

46. Przerwa energetyczna w kryształku chlorku potasu, znajdująca się powyżej najwyższej w całości wypełnionego pasma energetycznego, równa jest 7,6 eV. Czy kryształ ten jest, czy nie jest przezroczysty dla światła o długości fali 140 nm?

47. Najwyższe obsadzone pasmo energetyczne w pewnym krysztale jest całkowicie wypełnione. Kryształ ten jest przezroczysty dla światła o długościach fali większych niż 295 nm, a nieprzroczysty dla światła o falach krótszych. Oblicz i wyraź w elektronowoltach szerokość przerwy energetycznej pomiędzy najwyższym obsadzonym i kolejnym (pustym) pasmem energetycznym w tym materiale.

## 42.11 Tranzystor

48. Mikroprocesor Pentium, który ma rozmiar znaczka pocztowego ( $2,54$  cm  $\times$   $2,22$  cm) zawiera około 3,5 miliona tranzystorów. Jakie musiałyby być maksymalne rozmiary takich tranzystorów, gdyby były one kwadratowe i wszystkie znajdowały się na jednym poziomie? (Uwaga: Oprócz tranzystorów w mikroprocesorze znajdują się też inne elementy półprzewodnikowe, musi się też znaleźć tam miejsce na połączenia pomiędzy różnymi elementami układu. Obecnie standardowo i niedrogo wytwarza się tranzystory o rozmiarach mniejszych niż  $0,7$   $\mu\text{m}$ ).

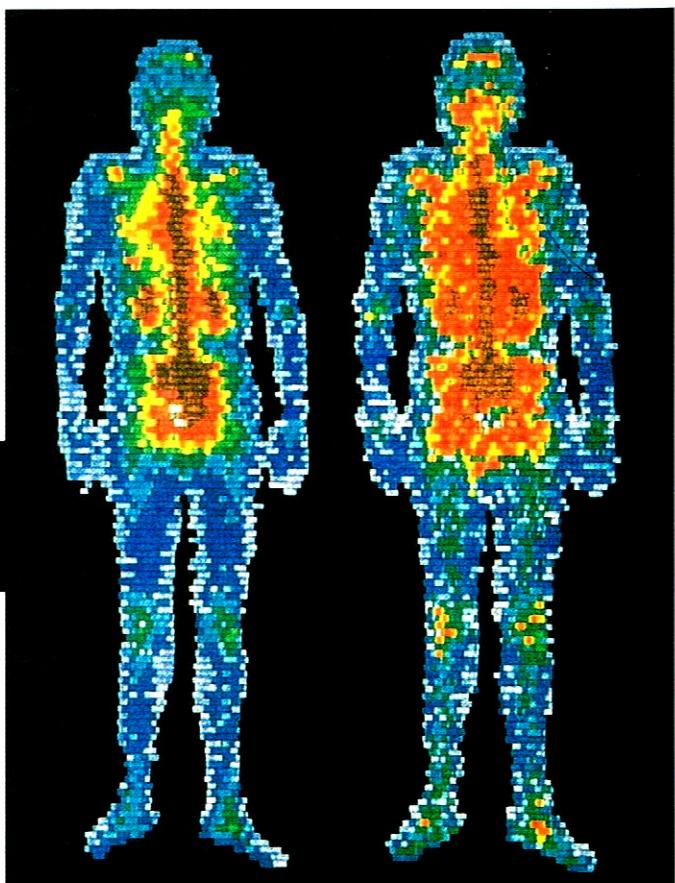
49. Kwadratowa bramka krzemiowego tranzystora MOSFET ma bok o długości  $0,5$   $\mu\text{m}$ . Izolująca warstwa dwutlenku krzemu, która oddziela tę bramkę od podłożu typu  $p$ , ma  $0,2$   $\mu\text{m}$  grubości, a jej względna przenikalność elektryczna jest równa 4,5. a) Ile wynosi równoważna pojemność układu bramka–podłożo (jeśli po ktraktuje się bramkę jak jedną, a podłożo jak drugą okładkę kondensatora płaskiego)? b) Jak duży ładunek (wyrażony jako wielokrotność ładunku elementarnego  $e$ ) znajdzie się na bramce, jeśli różnica potencjałów pomiędzy bramką a podłożem wynosi  $1,0$  V?

# 43 Fizyka jądrowa

Izotopy promieniotwórcze wstrzyknięte do ciała pacjenta gromadzą się selektywnie w różnych narządach. Ulegają rozpadom i emitują promieniowanie  $\gamma$ , które można zarejestrować za pomocą detektora i wyświetlić na ekranie monitora, jako zakodowany w postaci kolorów obraz ciała pacjenta. Zamieszczone obok obrazy (z lewej — ciało widziane od przodu, a z prawej — od tyłu) pozwalają stwierdzić, że izotopy zgromadziły się — kolor brązowy i pomarańczowy — w kręgosłupie, miednicy i żebraz.

**Co się tak naprawdę dzieje, kiedy jądro promieniotwórcze ulega rozpadowi i co dokładnie oznacza „rozpad”?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



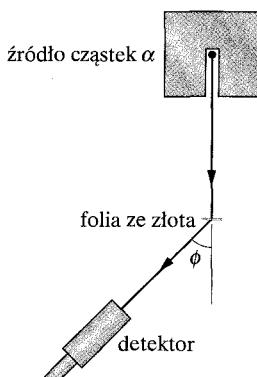
### 43.1. Odkrycie jądra

W pierwszych latach dwudziestego wieku o budowie atomów wiedziano niewiele ponad to, że znajdują się w nich elektrony. Elektrony odkryto już w 1897 roku (dokonał tego J.J. Thomson), ale ich masa pozostawała wciąż nieznana. Nie można było więc stwierdzić, ile ujemnie naładowanych elektronów zawiera atom. Wiedziano, że atomy są obojętne elektrycznie, nie budziło więc wątpliwości, że zawierają one też ładunek dodatni, chociaż nikt nie umiał powiedzieć, w jakiej postaci on występuje.

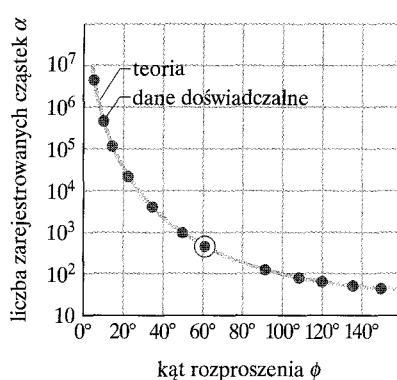
W roku 1911 Ernest Rutherford przedstawił pogląd, że dodatni ładunek jest skupiony w środku atomu w postaci **jądra**, które zawiera też przeważającą część masy atomu. Hipoteza Rutherforda nie była zwykłym domysłem, lecz miała mocne podstawy w postaci doświadczenia zaproponowanego przez niego, a wykonanego przez jego współpracowników — Hansa Geigera (jego nazwisko kojarzy się nam z licznikiem Geigera–Müllera) i Ernesta Marsdena, dwudziestoletniego studenta, który nie uzyskał jeszcze nawet tytułu licencjata.

W czasach Rutherforda wiedziano już, że niektóre pierwiastki, nazywane **promieniotwórczymi** (radioaktywnymi), ulegają samorzutnej przemianie w inne pierwiastki i że zjawisku temu towarzyszy emisja różnych cząstek. Jednym z takich pierwiastków jest radon, który emiteme cząstki  $\alpha$  o energii zbliżonej do 5,5 MeV. Dziś wiemy, że cząstki te to po prostu jądra atomów helu.

Pomysł Rutherforda polegał na zbadaniu odchylenia wiązki cząstek  $\alpha$  o znacznej energii wycelowanych w tarczę z cienkiej metalowej folii. Cząstki  $\alpha$  o masie 7300 razy większej niż masa elektronu mają ładunek  $+2e$ .



Rys. 43.1. Układ doświadczalny (widok z góry) używany w laboratorium Rutherforda w latach 1911–1913 do badania rozpraszczenia cząstek  $\alpha$  w cienkiej metalowej folii. Detektor można obracać, zmieniając kąt  $\phi$ . Źródłem cząstek  $\alpha$  jest radon — gaz będący produktem rozpadu radu. Ten prosty, mieszący się na stole laboratoryjnym układ, pozwolił odkryć jądra atomowe.



Rys. 43.2. Punkty na wykresie prezentują wyniki pomiarów rozpraszczenia cząstek  $\alpha$  w folii ze złota, uzyskane przez Geigera i Marsdena za pomocą układu z rysunku 43.1. Linia ciągła odpowiada przewidywaniom teoretycznym opartym na założeniu, że w atomie występuje małe, ciężkie, naładowane dodatnio jądro. Skala osi pionowej jest logarytmiczna i obejmuje sześć rzędów wielkości. Krzywą teoretyczną przesunięto, aby przechodziła przez punkt pomiarowy oznaczony kolkiem.

Na rysunku 43.1 przedstawiono układ doświadczalny Geigera i Marsdена. Źródłem cząstek  $\alpha$  była cienkościenna rura szklana wypełniona gazowym radonem. Eksperyment polegał na zliczaniu cząstek  $\alpha$  rozproszonych pod różnymi kątami  $\phi$ .

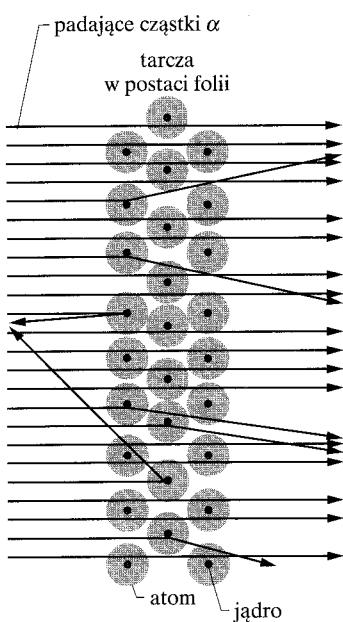
Na rysunku 43.2 zaprezentowano uzyskane przez nich wyniki. Zwróćmy uwagę, że na osi pionowej użyto skali logarytmicznej. Widzimy, że większość cząstek ulegała odchyleniu o małe kąty, ale — i to było wielką niespodzianką — niewielka ich część była rozpraszana pod bardzo dużymi kątami, bliskimi  $180^\circ$ . Rutherford wyraził ten fakt w następujących słowach skierowanych do przyjaciela: „To najbardziej niezwykłe zdarzenie w moim życiu. Wynik był prawie tak niewiarygodny, jakbyś wystrzelił 15-calowy pocisk w stronę kartki papieru, a ten odbił się od niej i uderzył w ciebie.”

Dlaczego Rutherford był aż tak zaskoczony? W tamtych czasach większość fizyków uznawała zaproponowany przez J.J. Thomsona model atomu nazywany obrazowo ciastem z rodzynkami. Sądzone, że ładunek dodatni był rozłożony równomiernie w całej objętości atomu. Elektrony („rodzynki”) drgały wokół ustalonych położen wewnętrz kuli dodatniego ładunku („ciasta”).

Największa siła odchylająca, która mogłaby działać na cząstkę  $\alpha$  przechodzącą przez dużą, dodatnio naładowaną kulę, nie zdołałaby zagiąć toru nawet o  $1^\circ$ . (Oczekiwana wielkość odchylenia byłaby podobna, jak dla pocisku przesuwającego worek ze śnieżkami). Również elektrony w atomie tylko w niewielkim stopniu oddziaływałyby na cząstkę  $\alpha$  o dużej masie i energii. W rzeczy samej, to one ulegały silnemu rozproszeniu niczym rój muszek, gdy przelatuje przez niego kamień.

Rutherford rozumiał, że do odbicia cząstki  $\alpha$  do tyłu potrzebna jest duża siła. Jej źródło można by wskazać, gdyby ładunek dodatni nie był rozłożony równomiernie w całym atomie, lecz silnie skupiony w jego środku. W takim przypadku nadlatująca cząstka  $\alpha$  mogłaby zbliżyć się na niewielką odległość do ładunku dodatniego, nie przenikając go. W wyniku tak bliskiego spotkania działałaby bardzo duża siła odchylająca.

Na rysunku 43.3 przedstawiono tory, po których mogą poruszać się cząstki  $\alpha$ , przechodząc przez atomy w folii użytej jako tarcza. Widać, że tory większości cząstek nie zmieniają się wcale lub zginają się pod małym kątem; tylko niewielka liczba cząstek (te, które poruszają się bardzo blisko jąder) ulega silnemu odchyleniu. Analizując dane, Rutherford doszedł do wniosku, że promień jądra musi być mniejszy od promienia atomu mniej więcej  $10^4$  razy.. Innymi słowy, atom to głównie pusta przestrzeń.



Rys. 43.3. Kąt rozpraszania padającej cząstki  $\alpha$  zależy od odległości jej toru od jądra atomu. Duże kąty odchylenia obserwujemy tylko dla torów bardzo bliskich jąder

## Przykład 43.1

Cząstka  $\alpha$  o energii 5,30 MeV porusza się dokładnie na wprost jądra atomu złota, które zawiera 79 protonów. W jakiej odległości od środka jądra cząstka zatrzyma się i zmieni kierunek ruchu? Pomiń odrzut znacznie cięższego jądra.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że  $\bullet \rightarrow$  dla układu składającego się z cząstki  $\alpha$  i ja-

dra atomu złota musi być spełniona zasada zachowania energii mechanicznej  $E$ . W szczególności energia układu  $E_{\text{pocz}}$  w stanie początkowym, zanim jeszcze cząstka i jądro zaczną oddziaływać ze sobą, jest równa energii  $E_{\text{koic}}$  w chwili, kiedy cząstka  $\alpha$  się zatrzymuje. Energia początkowa  $E_{\text{pocz}}$  to po prostu energia kinetyczna padającej cząstki  $\alpha$   $E_{\text{kα}}$ . Energia w stanie końcowym  $E_{\text{koic}}$  jest równa potencjalnej energii elektrycznej  $E_p$  (energia kinetyczna jest wtedy równa零). Wartość  $E_p$  można obliczyć, korzystając z równania (25.43) ( $E_p = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r$ ).

Niech  $d$  oznacza odległość pomiędzy środkiem cząstki  $\alpha$  i środkiem jądra w momencie zatrzymania się cząstki  $\alpha$ . Zasadę zachowania energii  $E_{\text{pocz}} = E_{\text{końc}}$  zapisujemy w postaci

$$E_{k\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{\text{Au}}}{d},$$

gdzie  $q_\alpha$  ( $= 2e$ ) oznacza ładunek cząstki  $\alpha$  (2 protony), a  $q_{\text{Au}}$  ( $= 79e$ ) ładunek jądra złota (79 protonów).

Podstawiając wartości ładunków i rozwiązuając równanie względem  $d$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} d &= \frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \frac{79e}{E_{k\alpha}} \\ &= \frac{(2 \cdot 79)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(4\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(5,30 \text{ MeV})(1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV})} \\ &= 4,29 \cdot 10^{-14} \text{ m.} \end{aligned}$$

(odpowiedź)

Odległość ta jest mała w skali atomowej, ale nie w skali jądrowej. Uzyskana wartość jest wyraźnie większa niż suma promieni jądra i cząstki  $\alpha$ . Jak widać, cząstka  $\alpha$  zatrzymuje się „nie dotykając” jądra złota.

## 43.2. Niektóre właściwości jąder

W tabeli 43.1 podano niektóre właściwości kilku jąder atomowych. W przypadkach gdy interesują nas właściwości jąder jako samodzielnego obiektów (a nie części atomów), nazywamy je **nuklidami**.

### Terminologia fizyki jądrowej

Jądra są zbudowane z protonów i neutronów. Liczba protonów w jądrze (**liczba atomowa**) jest oznaczana symbolem  $Z$ ; **liczba neutronów** jest oznaczana symbolem  $N$ . Łączna liczba protonów i neutronów w jądrze jest nazywana **liczbą masową**  $A$

$$A = Z + N. \quad (43.1)$$

Neutrony i protony — gdy odnosimy się do nich łącznie — nazywamy **nukleonami**.

Nuklidy oznaczamy za pomocą symboli, takich jak te w pierwszej kolumnie tabeli 43.1. Weźmy na przykład symbol  $^{197}\text{Au}$ . Wskaźnik górnny 197 oznacza wartość liczby masowej  $A$ . Symbol Au informuje, że dany pierwiastek to złoto, którego liczba atomowa wynosi 79. Z równania (43.1) można wyznaczyć liczbę neutronów w nuklidzie:  $197 - 79 = 118$ .

Tabela 43.1. Niektóre właściwości wybranych nuklidów

Nuklid	$Z$	$N$	$A$	Trwałość <sup>a</sup>	Masa <sup>b</sup> [u]	Spin <sup>c</sup>	Energia wiązania [MeV/nukleon]
$^1\text{H}$	1	0	1	99,985%	1,007 825	1/2	—
$^7\text{Li}$	3	4	7	92,5%	7, 016 003	3/2	5,60
$^{31}\text{P}$	15	16	31	100%	30,973 762	1/2	8,48
$^{84}\text{Kr}$	36	48	84	57,0%	83,911 507	0	8,72
$^{120}\text{Sn}$	50	70	120	32,4%	119,902 199	0	8,51
$^{157}\text{Gd}$	64	93	157	15,7%	156,923 956	3/2	8,21
$^{197}\text{Au}$	79	118	197	100%	196,966 543	3/2	7,91
$^{227}\text{Ac}$	89	138	227	21,8 lat	227,027 750	3/2	7,65
$^{239}\text{Pu}$	94	145	239	24 100 lat	239,052 158	1/2	7,56

<sup>a</sup> W przypadku nuklidów trwałych podano **względną częstość występowania**, która mówi, jaki ułamek atomów typowej próbki pierwiastka stanowią atomy danego izotopu. Dla nuklidów promieniotwórczych podano czasy połowicznego zniku.

<sup>b</sup> Zgodnie z powszechnie przyjętą praktyką podano masę atomu obojętnego, a nie samego jądra.

<sup>c</sup> Spinowy moment pędu w jednostkach  $\hbar$ .

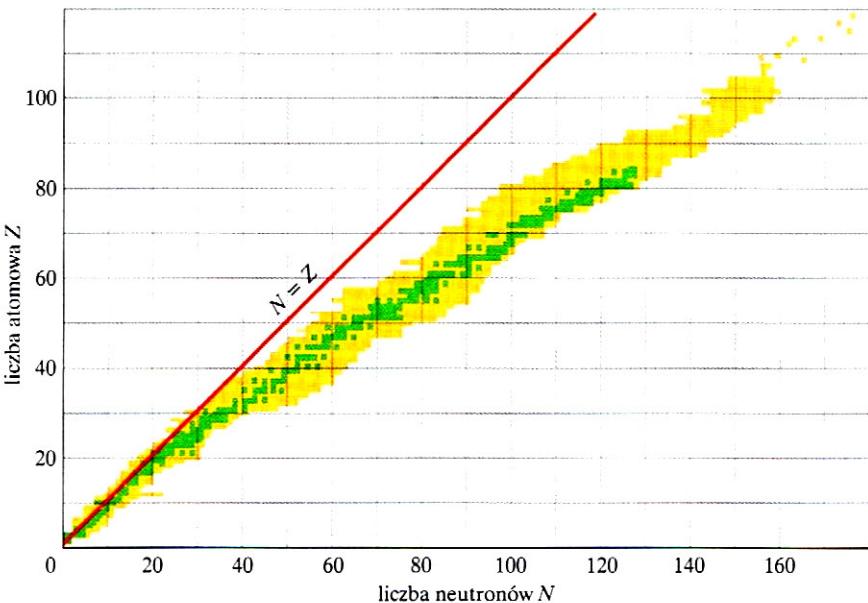
Nuklidy o tej samej liczbie atomowej  $Z$ , różniące się liczbą neutronów, nazywamy **izotopami**. Złoto ma 32 izotopy od  $^{173}\text{Au}$  do  $^{204}\text{Au}$ . Tylko jeden z nich jest trwały ( $^{197}\text{Au}$ ); pozostałe 31 to izotopy promieniotwórcze. Nuklidy promieniotwórcze, czyli **radionuklidy**, ulegają **rozpadowi**, emitując pewną cząstkę i zmieniając się w ten sposób w inny nuklid.

### Porządkowanie nuklidów

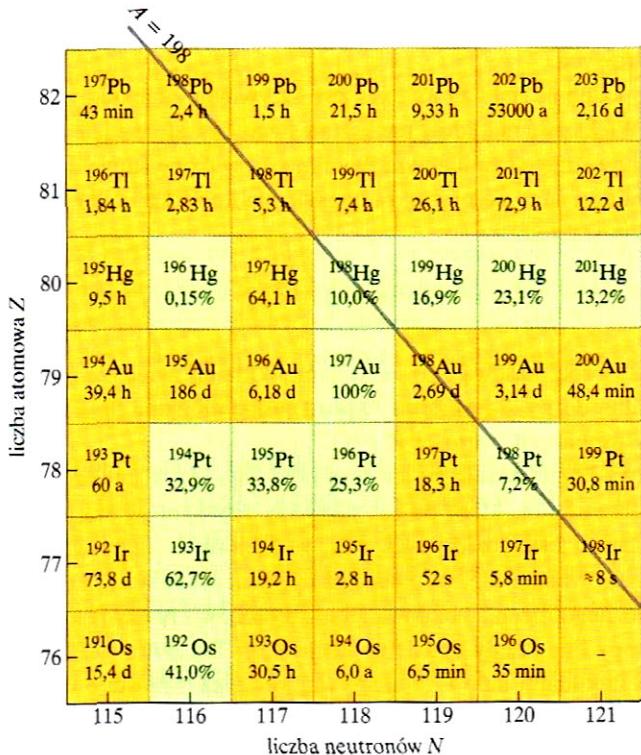
Obojętne atomy wszystkich izotopów danego pierwiastka (o tej samej liczbie  $Z$ ) mają taką samą liczbę elektronów, takie same właściwości chemiczne i zajmują to samo miejsce w układzie okresowym pierwiastków. Właściwości *jądrowe* izotopów danego pierwiastka mogą być istotnie różne. Dlatego układ okresowy pierwiastków ma ograniczone znaczenie dla fizyka jądrowego, chemika jądrowego lub inżyniera jądrowego.

Nuklidy porządkuje się na podstawie **mapy nuklidów**, jak ta z rysunku 43.4, na której położenie nuklidu wyznacza jego liczba atomowa (liczba protonów) i liczba neutronów. Nuklidy trwałe zaznaczono kolorem zielonym, a nuklidy promieniotwórcze — beżowym. Latwo dostrzec, że nuklidy promieniotwórcze leżą na obydwu skrajach oraz otaczają górny kraniec wyraźnego pasma nuklidów trwałych. Zauważmy też, że lekkie nuklidy trwałe leżą w pobliżu linii  $N = Z$ , a więc ich liczby neutronów i protonów są podobne. W przypadku ciężkich nuklidów przeważa liczba neutronów. Jak już powiedzieliśmy, złoto  $^{197}\text{Au}$  zawiera 118 neutronów i tylko 79 protonów, czyli nadmiar neutronów wynosi aż 39.

Mapy nuklidów często wykonuje się w formacie, który umożliwia powieszenie ich na ścianie. Zwykle każda kratka reprezentująca pewien nuklid zawiera jego dane. Na rysunku 43.5 przedstawiono wycinek takiej mapy dla otoczenia nuklidu  $^{197}\text{Au}$ . W przypadku nuklidów trwałych podaje się ich względнуюzęstość występowania (zazwyczaj dotyczy ona Ziemi), a dla nuklidów promienio-



Rys. 43.4. Mapa znanych nuklidów. Kolorem zielonym zaznaczono pasmo nuklidów trwałych, a beżowym — promieniotwórczych. Lekkie, trwałe nuklidy mają niemal równe liczby protonów i neutronów. W przypadku cięższych nuklidów wzrasta nadmiar neutronów. Z rysunku wynika, że dla liczby atomowej  $Z > 83$  (bizmut) nie istnieją trwałe nuklidy.



Rys. 43.5. Powiększony i wzbogacony w szczegóły wycinek mapy nuklidów z rysunku 43.4 przedstawiający otoczenie złota  $^{197}\text{Au}$ . Zielonymi kwadratami oznaczono nuklidy trwałe, dla których podano względne częstotliwości występowania. Kwadraty beżowe oznaczają nuklidy promieniotwórcze, dla których podano czasy połowicznego zaniku. Izobary wskazujące nuklidy o jednakowych liczbach masowych  $A$  przebiegają ukośnie. Na mapie wykreślono przykładową linię dla  $A = 198$

twórczych — czas połowicznego zaniku (jest on miarą szybkości ich rozpadu). Przebiegająca na ukos linia wskazuje **izobary**, czyli nuklidy o takich samych liczbach masowych; w tym przypadku odpowiada ona wartości  $A = 198$ .

Według obecnego stanu wiedzy, w warunkach laboratoryjnych udało się uzyskać nuklidy o liczbie atomowej  $Z = 116$  ( $A = 292$ ) (pierwiastki o liczbie atomowej  $Z$  większej niż 92 nie występują w przyrodzie w warunkach naturalnych). Chociaż duże jądra na ogół są mało trwałe i ulegają szybkiemu rozpadowi, istnieje grupa bardzo ciężkich nuklidów o stosunkowo długim czasie życia. Te stabilne, superciężkie nuklidy tworzą na mapie, takiej jak ta z rysunku 43.4, wyspę *stabilności* odpowiadającą dużym wartościami  $Z$  i  $N$ .

**SPRAWDZIAN 1:** Korzystając z rysunku 43.4, powiedz, którego z wymienionych nuklidów nie da się raczej znaleźć w naturalnym otoczeniu:  $^{52}\text{Fe}$  ( $Z = 26$ ),  $^{90}\text{As}$  ( $Z = 33$ ),  $^{158}\text{Nd}$  ( $Z = 60$ ),  $^{175}\text{Lu}$  ( $Z = 71$ ),  $^{208}\text{Pb}$  ( $Z = 82$ ).

### Promień jądra

Wygodną jednostką długości w skali jądrowej jest *femtometr* ( $= 10^{-15} \text{ m}$ ). Inna często używana nazwa tej samej jednostki to *fermi*; obydwie nazwy mają ten sam skrót. Mamy więc

$$1 \text{ femtometr} = 1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}. \quad (43.2)$$

Rozmiary i budowę jąder można poznać, bombardując je wiązką wysokoenergetycznych elektronów i obserwując, jak jądra rozpraszały padające elektrony. Elektrony muszą mieć wystarczająco dużą energię (przynajmniej 200 MeV), aby

odpowiadająca im długość fali de Broglie'a była mniejsza niż rozmiary badanych struktur jądrowych.

Jądro, podobnie jak atom, nie jest sztywnym obiektem o wyraźnej powierzchni. Większość nuklidów ma kształt sferyczny, ale istnieje pewna ich grupa o kształcie wyraźnie elipoidalnym. Pomimo to, wykorzystując wyniki rozpraszania elektronów (i inne pomiary), przypisuje się każdemu z nuklidów efektywny promień dany wzorem

$$r = r_0 A^{1/3}, \quad (43.3)$$

gdzie  $A$  jest liczbą masową, a  $r_0 = 1,2$  fm. Widzimy więc, że objętość jądra — proporcjonalna do  $r^3$  — jest także wprost proporcjonalna do liczby masowej  $A$  i nie zależy osobno od wartości  $Z$  i  $N$ .

Wzór (43.3) nie stosuje się do *nuklidów halo*, czyli nuklidów ze znacznym nadmiarem neutronów, które po raz pierwszy uzyskano w warunkach laboratoryjnych w latach osiemdziesiątych XX w. Nuklidy te mają większe rozmiary, niż wynika z równania (43.3), ponieważ część neutronów tworzy *halo* (aureolę) wokół sferycznego rdzenia zbudowanego z protonów i reszty neutronów. Przykładem są izotopy litu. Kiedy dodajemy neutron do  ${}^8\text{Li}$ , powstaje  ${}^9\text{Li}$  — obydwa te jądra nie są nuklidami halo — i efektywny promień wzrasta o około 4%. Kiedy jednak do  ${}^9\text{Li}$  dodamy kolejne dwa neutryny, powstanie najbogatszy w neutryny (i największy) izotop litu  ${}^{11}\text{Li}$ . Dodane neutryny nie wbudowują się jednak w istniejące jądro, lecz tworzą wokół niego halo, co zwiększa efektywny promień o około 30%. Jak widać, konfiguracji typu halo odpowiada mniejsza energia niż zwykłemu jądru zawierającemu 11 nukleonów. (W tym rozdziale będziemy na ogół zakładać, że obowiązuje równanie (43.3)).

## Masa jądrowa

Współcześnie masy atomowe można wyznaczać z olbrzymią dokładnością. W paragrafie 1.6 powiedzieliśmy, że takie masy są podawane w atomowych jednostkach masy u, zdefiniowanych tak, że masa atomu  ${}^{12}\text{C}$  (nie masa jądra) wynosi dokładnie 12 u. Przybliżony związek pomiędzy atomową jednostką masy a jednostką masy w układzie SI ma postać

$$1 \text{ u} = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (43.4)$$

Nazwa liczby masowej  $A$  nuklidu bierze się stąd, że jej wartość jest równa masie atomowej nuklidu wyrażonej w atomowych jednostkach masy i zaokrąglonej do najbliższej liczby całkowitej. I tak masa atomowa  ${}^{197}\text{Au}$  wynosi 196,966 573 u, co po zaokrągleniu daje 197 u.

W przypadku obliczeń dotyczących reakcji jądrowych niezastąpionym narzędziem jest związek  $Q = -\Delta mc^2$  (równanie (38.47)). W paragrafie 38.12 stwierdziliśmy, że energia reakcji  $Q$  jest wyzwalana (lub absorbowana), kiedy masa zamkniętego układu oddziałujących cząstek zmienia się o  $\Delta m$ .

W paragrafie (38.12) przekonaliśmy się też, że zgodnie ze wzorem Einsteina  $E = mc^2$  energia spoczynkowa równoważna jednostce masy atomowej 1 u wynosi 931,5 MeV. Z równania (38.43) wynika więc wygodny przelicznik

$$c^2 = 931,5 \text{ MeV/u}, \quad (43.5)$$

który wiąże energię w megaelektronowoltach (MeV) i masę w atomowych jednostkach masy (u).

## Energia wiązania jądra

Masa  $M$  jądra jest mniejsza niż suma mas  $\sum m$  tworzących je protonów i neutronów. Oznacza to, że energia spoczynkowa jądra  $Mc^2$  jest *mniejsza* niż suma energii spoczynkowych poszczególnych protonów i neutronów  $\sum(mc^2)$ . Różnica pomiędzy obydwoma energiami jest nazywana **energią wiązania jądra**

$$\Delta E_w = \sum(mc^2) - Mc^2 \quad (\text{energia wiązania}). \quad (43.6)$$

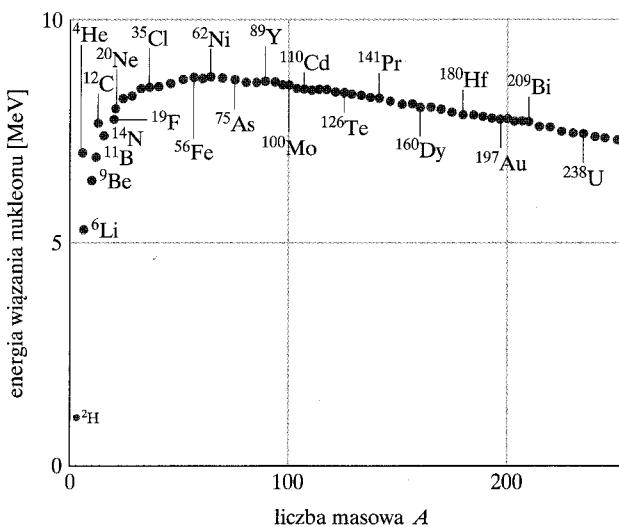
*Uwaga:* Energii wiązania nie należy rozumieć jako pewnej energii „uwięzionej” w jądrze. Jest to *różnica* energii spoczynkowej jądra i tworzących je nukleonów. Jeżeli umielibyśmy podzielić jądro na nukleony, to w procesie tym trzeba by dostarczyć wydzielanym częstkom łączną energię równą  $\Delta E_w$ . Chociaż w rzeczywistości nie możemy tego uczynić, energia wiązania jądra jest wygodną miarą jego trwałości.

Jeszcze lepszą miarą trwałości jądra jest **energia wiązania przypadająca na nukleon**  $\Delta E_{wn}$ , zdefiniowana jako iloraz energii wiązania i liczby nukleonów w jądrze  $A$ :

$$\Delta E_{wn} = \frac{\Delta E_w}{A} \quad (\text{energia wiązania nukleonu}). \quad (43.7)$$

Energię wiązania nukleonu można uważać za średnią energię podziału jądra na nukleony.

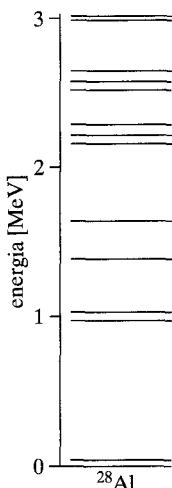
Na rysunku 43.6 przedstawiono zależność energii wiązania nukleonu  $\Delta E_{wn}$  od liczby masowej  $A$  dla wielu różnych jąder. W jądrach położonych wysoko na tym wykresie wiązania są silne — trzeba dostarczyć dużo energii, aby dokonać ich podziału. Jądra znajdujące się niżej z lewej i prawej strony są związane słabiej i do ich podziału potrzeba mniej energii w przeliczeniu na jeden nukleon.



Rys. 43.6. Energia wiązania nukleonu dla wybranych nuklidów. Największą wartość energii wiązania wśród wszystkich znanych trwałych nuklidów mają nukleony w jądrze niklu  ${}^{62}\text{Ni}$  (około 8,794 60 MeV/nukleon). Zwróćcie uwagę, że cząstka  $\alpha$  ( ${}^4\text{He}$ ) ma większą energię wiązania nukleonu niż jej sąsiedzi w układzie okresowym i stąd wynika jej szczególna stabilność

Wnioski z wykresu na rysunku 43.6 mają daleko idące konsekwencje. Nukleony w jądrze znajdującym się z prawej strony wykresu byłyby mocniej związane, jeżeli to jądro uległoby podziałowi na dwa inne leżące na wykresie powyżej niego. Taki proces — **rozszczepienie** — obserwuje się dla bardzo ciężkich jąder (o dużej liczbie masowej  $A$ ), takich jak jądra uranu rozszczepiające się samorozsutnie (czyli bez żadnej zewnętrznej przyczyny lub bez udziału źródła energii). Reakcja taka zachodzi w głowicach jądrowych, w których ogromna liczba jąder uranu lub plutonu ulega jednoczesnemu rozszczepieniu, co przybiera formę eksplozji.

Energia wiązania nukleonów w dowolnej parze jąder znajdujących się z lewej strony wykresu wzrosłaby, jeżeli rozważana para połączyłaby się w jedno jądro zajmujące na wykresie wyższe miejsce. Taka reakcja — **synteza** — zachodzi w gwiazdach. Bez niej Słońce nie świeciłoby i nie byłoby życia na Ziemi.



Rys. 43.7. Układ poziomów energetycznych nuklidu  $^{28}\text{Al}$ , wyznaczony na podstawie badań reakcji jądrowych

### Poziomy energetyczne jądra

Energie jąder — podobnie jak energie atomów — są skwantowane. Oznacza to, że jądra mogą występować tylko w dyskretnych stanach kwantowych, każdy o ścisłe określonej energii. Na rysunku 43.7 przedstawiono fragment drabinki poziomów energetycznych jądra  $^{28}\text{Al}$ , które jest typowym lekkim nuklidem. Zauważcie, że energie są wyrażone w milionach elektronowoltów, a nie elektronowoltach jak w przypadku atomów. Kiedy jądro przechodzi do niższego stanu energetycznego, emiteme foton z zakresu  $\gamma$  widma elektromagnetycznego.

### Spin jądra i magnetyzm

Wiele nuklidów charakteryzuje się własnym *momentem pędu jądra*, czyli spinem, i związanym z nim *momentem magnetycznym jądra*. Mimo że moment pędu jądra przyjmuje z grubsza te same wartości co moment pędu elektronu w atomie, momenty magnetyczne jąder są o wiele mniejsze niż typowe momenty magnetyczne atomów.

### Siły jądrowe

Zachowanie elektronów w atomie jest wynikiem działania dobrze nam znanych sił elektromagnetycznych. Aby utrzymać jądro w całości, potrzeba o wiele mocniejszego oddziaływania innego typu, zdolnego przezwyciężyć odpychanie między (naładowanymi dodatnio) protonami w jądrze i utrzymać protony oraz neutrony w niewielkiej objętości. Siły jądrowe mają niewielki zasięg, ponieważ ich działania nie obserwuje się w dużej odległości od „powierzchni” jądra.

Obecnie uważa się, że siły jądrowe scalające neutrony i protony w jądro nie są oddziaływaniem o charakterze fundamentalnym, ale konsekwencją **oddziaływaniami silnego**, które wiążą kwarki w protony i neutrony. Podobnie, siły przyciągania pomiędzy niektórymi obojętnymi elektrycznie cząsteczkami są konsekwencją sił kulombowskich łączących cząsteczki w całość.

## Przykład 43.2

Możemy wyobrażać sobie, że nuklidy są zbudowane z mieszaniny neutronów i protonów, którą można nazwać *materią jądrową*. Ile wynosi gęstość materii jądrowej?

**ROZWIĄZANIE:**

Zauważmy, że:

1. Gęstość (średnia) jądra można obliczyć, dzieląc jego masę przez objętość. Niech  $m$  oznacza masę nukleonu (nieważne czy protonu, czy neutronu, gdyż obydwie te cząstki mają bardzo podobne masy). Masa jądra zawierającego  $A$  nukleonów wynosi więc  $Am$ . Dalej założymy, że jądro jest kulą o promieniu  $r$ . Oznacza to, że jego objętość wynosi  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , a więc gęstość jądra jest równa

$$\rho = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

2. Promień jądra  $r$  jest wyrażony równaniem (43.3) ( $r = r_0 A^{1/3}$ ), w którym  $r_0$  jest równe  $1,2 \text{ fm}$  ( $= 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ). Podstawiając  $r$  do równania na gęstość, otrzymujemy

$$\rho = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}.$$

Podkreślimy, że wartość  $A$  uległa skróceniu i dzięki temu uzyskane równanie na  $\rho$  odnosi się do dowolnego jądra, które można uznać za kulę o promieniu danym równaniem (43.3). Jeżeli za masę nukleonu  $m$  podstawimy  $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , to otrzymamy

$$\rho = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi(1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3} \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3. \quad (\text{odpowiedź})$$

Uzyskana wartość jest z grubsza  $2 \cdot 10^{14}$  razy większa niż gęstość wody.

## Przykład 43.3

Ile wynosi energia wiązania nukleonu w jądrze  $^{120}\text{Sn}$ ?

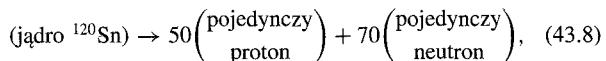
**ROZWIĄZANIE:**

Zauważmy, że:

1. Energię wiązania nukleonu  $\Delta E_{wn}$  będziemy mogli obliczyć, jeżeli wcześniej wyznaczmy energię wiązania  $\Delta E_w$  i podzielimy ją przez liczbę nukleonów  $A$  w jądrze, zgodnie z równaniem (43.7) ( $\Delta E_{wn} = \Delta E_w / A$ ).

2. Energię  $\Delta E_w$  możemy wyznaczyć, obliczając różnicę pomiędzy energią spoczynkową jądra  $Mc^2$  a sumą energii spoczynkowych  $\sum(mc^2)$  energii tworzących je nukleonów zgodnie z równaniem (43.6) ( $\Delta E_w = \sum(mc^2) - Mc^2$ ).

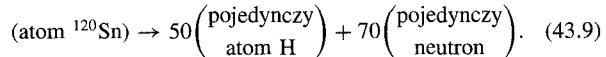
Z tabeli 43.1 wynika, że jądro  $^{120}\text{Sn}$  jest zbudowane z 50 protonów ( $Z = 50$ ) oraz 70 neutronów ( $N = A - Z = 120 - 50 = 70$ ). Musimy sobie wyobrazić podział jądra  $^{120}\text{Sn}$  na 50 protonów i 70 neutronów



a następnie obliczyć różnicę energii spoczynkowych.

Do obliczeń potrzebujemy masy jądra  $^{120}\text{Sn}$ , protonu oraz neutronu. Ponieważ znacznie łatwiej wyznaczyć masę obojętnego atomu (jądro plus elektryny) niż masę samego jądra, energię wiązania obliczamy zwykle, korzystając z mas atomowych. Zmodyfikujemy równanie (43.8) tak, aby po lewej stronie znalazły się atom  $^{120}\text{Sn}$ . W tym celu musimy do lewej strony dodać 50 elektronów (ponieważ jądro zawiera 50 protonów). Aby zachować bilans, trzeba także dodać 50 elektronów do prawej strony równania

(43.8). Elektryny te można połączyć z 50 protonami, co w rezultacie da 50 obojętnych atomów wodoru. Otrzymamy więc



Z tabeli 43.1 odczytujemy masę atomu  $^{120}\text{Sn}$   $M_{\text{Sn}} = 119,902\,199 \text{ u}$  i masę atomu wodoru  $m_H = 1,007\,825 \text{ u}$ ; ponadto masa neutronu  $m_n$  jest równa  $1,008\,665 \text{ u}$ . Podstawiając dane do równania (43.6) i korzystając z równania (43.5) ( $c^2 = 931,5 \text{ MeV/u}$ ) w celu zamiany jednostek, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta E_w &= \sum (mc^2) - Mc^2 \\ &= 50(m_H c^2) + 70(m_n c^2) - M_{\text{Sn}} c^2 \\ &= 50(1,007\,825 \text{ u})c^2 + 70(1,008\,665 \text{ u})c^2 \\ &\quad - (119,902\,199 \text{ u})c^2 \\ &= (1,095\,601 \text{ u})c^2 \\ &= (1,095\,601 \text{ u})(931,5 \text{ MeV/u}) \\ &= 1020,6 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że wykorzystanie mas atomowych zamiast mas jądrowych nie ma wpływu na wynik, ponieważ masa 50 elektronów należących do atomu  $^{120}\text{Sn}$  redukuje się z masą 50 elektronów w 50 atomach wodoru.

Z równania (43.7) możemy teraz wyznaczyć energię wiązania nukleonu

$$\begin{aligned} \Delta E_{wn} &= \frac{\Delta E_w}{A} = \frac{1020,6 \text{ MeV}}{120} \\ &= 8,51 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

### 43.3. Rozpad promieniotwórczy

Większość nuklidów na mapie z rysunku 43.4 oznaczono jako nuklidy promieniotwórcze. Nuklid promieniotwórczy spontanicznie emisuje pewną cząstkę, a sam ulega przemianie w inny nuklid, który zajmuje inny kwadrat na mapie nuklidów.

Rozpad promieniotwórczy stał się pierwszym dowodem, że prawa rządzące światem subatomowym mają charakter statystyczny. Jako przykład rozważmy próbki metalicznego uranu o masie 1 mg. Zawiera ona  $2,5 \cdot 10^{18}$  atomów o długim czasie życia promieniotwórczego  $^{238}\text{U}$ . Jądra atomów w tej próbce nie uległy rozpadowi od chwili, kiedy powstały — na długo przed narodzinami Układu Słonecznego. W dowolnej sekundzie w naszej próbce rozpada się około 12 jąder, które ulegają przemianie w jądra  $^{234}\text{Th}$ , emitując jednocześnie cząstkę  $\alpha$ .

► Nie można jednak w żaden sposób przewidzieć, czy dowolne jądro w próbce promieniotwórczej znajdzie się w tej niewielkiej liczbie jąder, które rozpadną się w kolejnej sekundzie. Dla wszystkich jąder prawdopodobieństwo jest dokładnie takie samo.

Chociaż nie da się przewidzieć, które jądra ulegną rozpadowi, to można powiedzieć, że w próbce zawierającej  $N$  promieniotwórczych jąder szybkość rozpadu ( $= -dN/dt$ ) jest proporcjonalna do liczby jąder  $N$ :

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (43.10)$$

gdzie  $\lambda$  — **stała rozpadu** jest wielkością charakterystyczną dla każdego nuklidu promieniotwórczego. Jej jednostką w układzie SI jest odwrotność sekundy ( $\text{s}^{-1}$ ).

Aby wyznaczyć zależność liczby jąder  $N$  od czasu  $t$ , przekształcimy równanie (43.10) do postaci

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \quad (43.11)$$

a następnie scałkujemy obydwie strony, uzyskując

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{t_0}^t dt,$$

czyli

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda(t - t_0). \quad (43.12)$$

$N_0$  oznacza liczbę jąder promieniotwórczych w próbce w pewnej dowolnie wybranej chwili  $t_0$ . Jeżeli przyjmiemy, że  $t_0 = 0$  i przekształcimy odpowiednio równanie (43.12), otrzymamy

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t. \quad (43.13)$$

Przechodząc do funkcji wykładniczej (funkcji odwrotnej do logarytmu naturalnego), stwierdzamy, że

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t},$$

czyli

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{rozpad promieniotwórczy}), \quad (43.14)$$

gdzie  $N_0$  oznacza liczbę jąder promieniotwórczych w chwili  $t = 0$ , a  $N$  — liczbę jąder, które pozostały po upływie czasu  $t$ . Podkreślimy, że żarówki (na przykład) nie podlegają wykładniczemu prawu rozpadu. Jeżeli zbadamy czas życia 1000 żarówek, to „ulegną one rozpadowi” (przepałą się) mniej więcej w tym samym czasie. Rozpad nuklidów promieniotwórczych jest opisany zupełnie innym prawem.

Często wielkością bardziej interesującą niż liczba jąder w próbce  $N$  jest szybkość rozpadu jąder  $R$  ( $= -dN/dt$ ). Różniczkując równanie (43.14) względem czasu, stwierdzimy, że

$$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t},$$

czyli

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{rozpad promieniotwórczy}), \quad (43.15)$$

co jest równoważną postacią prawa rozpadu promieniotwórczego (43.14). W równaniu tym  $R_0$  oznacza szybkość rozpadu w chwili  $t = 0$ , a  $R$  — szybkość rozpadu w dowolnej późniejszej chwili  $t$ . Równanie (43.10) można teraz przepisać, podstawiając doń szybkość rozpadu promieniotwórczego

$$R = \lambda N, \quad (43.16)$$

przy czym  $R$  — szybkość rozpadu i  $N$  — liczba pozostałych w próbce jąder odpowiadają tej samej chwili.

Całkowita szybkość rozpadu  $R$  w próbce zawierającej jeden lub kilka nuklidów promieniotwórczych jest nazywana **aktywnością** próbki. W układzie SI jednostką aktywności jest **bekerel**, którego nazwa została wybrana dla uczczenia Henriego Becquerela, odkrywcy promieniotwórczości:

$$1 \text{ bekerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ rozpad na sekundę.}$$

Starszą, ale nadal często używaną jednostką, jest **kiur**:

$$1 \text{ kiur} = 1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

Oto przykład wykorzystania tych jednostek. Zdanie: „Aktywność wypalonego pręta paliwowego o numerze 5658 w dniu 15 stycznia 2000 r. wynosiła  $3,5 \cdot 10^{15}$  Bq ( $= 9,5 \cdot 10^4$  Ci)” oznacza, że we wspomnianym dniu w przecie w ciągu każdej sekundy rozpadało się  $3,5 \cdot 10^{15}$  jąder promieniotwórczych. Identyfikacja nuklidów promieniotwórczych występujących w przecie paliwowym, wartości ich stałych rozpadu  $\lambda$  i rodzaj emitowanego promieniowania nie ma znaczenia przy określaniu aktywności próbki.

Często próbkę promieniotwórczą umieszcza się w pobliżu detektora, który ze względu na geometrię układu lub wydajność nie rejestruje wszystkich zachodzących w niej rozpadów. W tym przypadku odczyt jest proporcjonalny do rzeczywistej aktywności, ale daje mniejszą wartość. Wyniki pomiarów proporcjonalne do aktywności próbki i będące jej miarą podaje się w liczbie zliczeń na jednostkę czasu.

Istnieją dwa często używane parametry, które mówią o czasie życia nuklidu promieniotwórczego. Pierwszym z nich jest **czas połowicznego zaniku**  $T_{1/2}$  nuklidu promieniotwórczego, który informuje, po jakim czasie liczba jąder  $N$  i szybkość rozpadu  $R$  maleją do połowy swoich wartości początkowych. Drugim parametrem jest **średni czas życia**  $\tau$ , który mówi, w jakim czasie  $N$  i  $R$  osiągają wartości  $e$  razy mniejsze od początkowych.

Aby znaleźć związek pomiędzy czasem połowicznego zaniku  $T_{1/2}$  a stałą rozpadu  $\lambda$ , do równania (43.15) podstawimy  $R = \frac{1}{2}R_0$  oraz czas  $t$  równy  $T_{1/2}$ . W ten sposób uzyskamy

$$\frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Biorąc logarytm naturalny obydwu stron równania i rozwiązywając je względem  $T_{1/2}$ , stwierdzamy, że

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Podobnie, aby powiązać ze sobą parametry  $\tau$  i  $\lambda$ , w równaniu (43.15) przyjmiemy  $R = e^{-1}R_0$ , czas  $t$  równy  $\tau$  i rozwiążemy je względem  $\tau$ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Wartości czasu połowicznego zaniku i średniego czasu życia wiążą zależność

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2. \quad (43.17)$$

**SPRAWDZIAN 2:** Nuklid promieniotwórczy  $^{131}\text{I}$  ulega rozpadowi z czasem połowicznego zaniku 8,04 dnia. W południe, 1 stycznia aktywność pewnej próbki wynosiła 600 Bq. Nie wykonując pisemnych obliczeń, odpowiedz, czy aktywność tej próbki 24 stycznia będzie: nieco mniejsza niż 200 Bq, nieco większa niż 200 Bq, nieco większa niż 75 Bq, czy może nieco mniejsza 75 Bq.

## Przykład 43.4

Podana tabela zawiera wyniki pomiarów szybkości rozpadu promieniotwórczego nuklidu  $^{128}\text{I}$ , który jest często używany w medycynie do diagnostyki wchłaniania jodu przez tarczycę. Wyznacz stałą rozpadu i czas połowicznego zaniku tego nuklidu.

czas [min]	$R$ [zliczenia/s]	czas [min]	$R$ [zliczenia/s]
4	392,2	132	10,9
36	161,4	164	4,56
68	65,5	196	1,86
100	26,8	218	1,00

### ROZWIĄZANIE:

1. Zauważmy najpierw, że stała rozpadu  $\lambda$  wyznacza mającą wykładniczo z czasem  $t$  szybkość rozpadu  $R$  (równanie (43.15)). Powinniśmy więc móc wyznaczyć wartość  $\lambda$ , wykreślając wyniki pomiarów szybkości rozpadu  $R$  w zależności od czasu  $t$ .

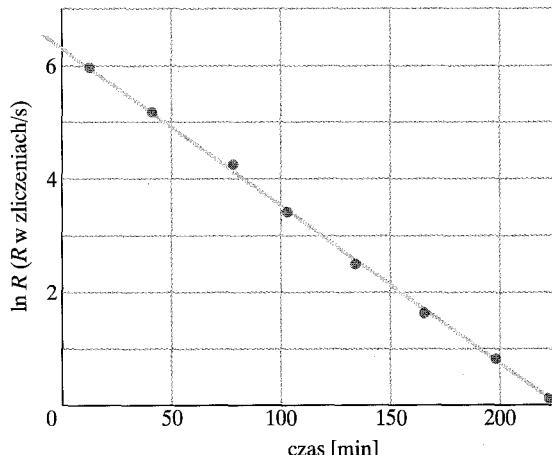
Wyznaczenie wartości  $\lambda$  na podstawie wykresu zależności  $R$  od  $t$  jest trudne, gdyż jest to zależność wykładnicza zgodnie z równaniem (43.15).

2. Musimy więc przekształcić równanie (43.15) tak, aby

pojawiła się liniowa zależność od  $t$ . W tym celu bierzemy logarytm naturalny obydwu stron równania (43.15). W rezultacie otrzymamy

$$\ln R = \ln(R_0 e^{-\lambda t}) = \ln R_0 + \ln(e^{-\lambda t}) = \ln R_0 - \lambda t. \quad (43.18)$$

Równanie (43.18) ma postać typu  $y = b + mx$ , gdzie  $b$  i  $m$  są stałymi, a więc wyraża liniową zależność  $\ln R$  od czasu  $t$ . Jeżeli wykonamy wykres zależności  $\ln R$  (a nie  $R$ ) od  $t$ , powinniśmy



Rys. 43.8. Przykład 43.4. Wykres w skali półlogarytmicznej przedstawiający opisany w tabeli rozpad próbki nuklidu  $^{128}\text{I}$

otrzymać linię prostą. Ponadto, współczynnik kierunkowy tej prostej powinien być równy  $-\lambda$ .

Na rysunku 43.8 przedstawiono wykres zależności  $\ln R$  od czasu  $t$  wykonany dla danych z tabeli. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty jest równy

$$\text{współczynnik kierunkowy prostej} = \frac{0 - 6,2}{225 \text{ min} - 0} = -0,0275 \text{ min}^{-1}.$$

Mamy więc

### Przykład 43.5

Stwierdzono, że próbka chlorku potasu KCl o masie 2,71 g pobrana z magazynu chemicznego wykazuje promieniotwórczość, a jej zmierzona aktywność jest stała i równa 4490 Bq. Obserwowaną promieniotwórczość przypisano potasowi, a konkretnie izotopowi  $^{40}\text{K}$ , którego zawartość w naturalnym potasie wynosi 1,17%. Oblicz czas połowicznego zaniku tego nuklidu.

#### ROZWIĄZANIE:

**1.** Zauważmy, że aktywność próbki jest stała, a więc nie można wyznaczyć czasu połowicznego zaniku  $T_{1/2}$ , wykreślając  $\ln R$  w zależności od czasu, tak jak uczyniliśmy w przykładzie 43.4. (Otrzymalibyśmy po prostu linię poziomą).

**2.** Możemy jednak poczynić dwa inne spostrzeżenia:

- Równanie (43.17) ( $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$ ) wiąże czas połowicznego zaniku  $T_{1/2}$  ze stałą rozpadu  $\lambda$ .
- Stała  $\lambda$  jest związana z aktywnością  $R$ , równą 4490 Bq, za pomocą równania (43.16) ( $R = \lambda N$ ), gdzie  $N$  jest liczbą jader (a tym samym atomów) izotopu  $^{40}\text{K}$  w próbce.

Łącząc równania (43.17) i (43.16), otrzymujemy

$$T_{1/2} = \frac{N \ln 2}{R}. \quad (43.19)$$

Wiemy, że liczba jader promieniotwórczych  $N$  w tym równaniu to 1,17% całkowitej liczby jader potasu  $N_K$  w próbce. Wiemy także, że  $N_K$  jest równe liczbie cząsteczek KCl  $N_{\text{KCl}}$  w próbce. Liczbę  $N_{\text{KCl}}$  można obliczyć, znając masę molową chlorku potasu  $M_{\text{KCl}}$

$$-\lambda = -0,0275 \text{ min}^{-1},$$

czyli

$$\lambda = 0,0275 \text{ min}^{-1} \approx 1,7 \text{ h}^{-1}. \quad (\text{odpowiedź})$$

**3.** Aby wyznaczyć czas połowicznego zaniku  $T_{1/2}$  nuklidu, skorzystamy z równania (43.17), które wiąże ten czas ze stałą rozpadu  $\lambda$  ( $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$ ). Podstawiając dane, stwierdzamy, że

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0,0275 \text{ min}^{-1}} \approx 25 \text{ min}. \quad (\text{odpowiedź})$$

(masę 1 mola KCl) oraz podaną masę próbki  $M_{\text{pr}}$  i łącząc ze sobą równania (20.2) i (20.3):

$$N_{\text{KCl}} = \left( \frac{\text{liczba moli}}{\text{w próbce}} \right) N_A = \frac{M_{\text{pr}}}{M_{\text{KCl}}} N_A, \quad (43.20)$$

gdzie  $N_A$  jest liczbą Avogadra ( $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ). W dodatku F odnajdujemy masę molową potasu 39,102 g/mol oraz chloru 35,453 g/mol. Masa molowa KCl jest więc równa 74,555 g/mol. Z równania (43.20) wyznaczamy liczbę cząsteczek KCl w próbce

$$N_{\text{KCl}} = \frac{(2,71 \text{ g})(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{74,555 \text{ g/mol}} = 2,188 \cdot 10^{22}.$$

Całkowita liczba atomów potasu  $N_K$  jest także równa  $2,188 \cdot 10^{22}$ , a liczba atomów izotopu  $^{40}\text{K}$  w próbce wynosi

$$N = 0,0117 N_K = (0,0117)(2,188 \cdot 10^{22}) \\ = 2,560 \cdot 10^{20}.$$

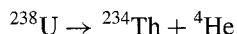
Podstawiając do równania (43.19) obliczoną wartość  $N$  oraz znaną aktywność 4490 Bq ( $= 4490 \text{ s}^{-1}$ ), otrzymujemy poszukiwany czas połowicznego zaniku

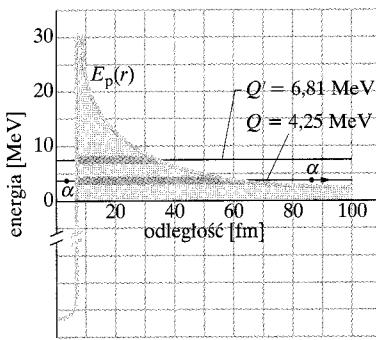
$$T_{1/2} = \frac{(2,560 \cdot 10^{20}) \ln 2}{4490 \text{ s}^{-1}} \\ = 3,95 \cdot 10^{16} \text{ s} = 1,25 \cdot 10^9 \text{ lat.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widać, czas połowicznego zaniku izotopu potasu  $^{40}\text{K}$  jest tego samego rzędu, co wiek Wszechświata. Dlatego aktywność w próbce pochodzącej z magazynu zmienia się tak wolno, że nie można tego zauważyc, prowadząc pomiary przez kilka dni, a nawet całe nasze życie. Część potasu w naszych ciałach jest promieniotwórcza, a więc i my jesteśmy nieco promieniotwórczy.

### 43.4. Rozpad $\alpha$

Jądro, które ulega **rozpadowi  $\alpha$** , przekształca się w inny nuklid, emitując przy tym cząstkę  $\alpha$  (jądro helu  $^4\text{He}$ ). Na przykład uran  $^{238}\text{U}$  w wyniku rozpadu  $\alpha$  przekształca się w tor  $^{234}\text{Th}$ :





Rys. 43.9. Wykres energii potencjalnej dla emisji cząstki  $\alpha$  z nuklidu  $^{238}\text{U}$ . Pozioma czarna linia oznaczona  $Q = 4,25 \text{ MeV}$  odpowiada energii rozpadu. Poszerzony, szary odcinek tej linii wskazuje zakres odległości  $r$  zabroniony dla cząstki  $\alpha$  w ramach fizyki klasycznej. Cząstkę  $\alpha$  zaznaczono jako punkt wewnętrz bariery potencjalnego (z lewej strony) i na zewnątrz — po pokonaniu jej na drodze tunelowania (z prawej). Pozioma czarna linia oznaczona  $Q' = 6,81 \text{ MeV}$  odpowiada energii rozpadu  $\alpha$  nuklidu  $^{228}\text{U}$ . Bariera potencjalna dla obydwu izotopów ma ten sam kształt ze względu na takie same ładunki jąder)

Zapisana w tym równaniu reakcja rozpadu  $\alpha$  uranu  $^{238}\text{U}$  może zachodzić samorzutnie (bez dostarczania z zewnątrz energii), ponieważ całkowita masa produktów rozpadu  $^{234}\text{Th}$  i  $^4\text{He}$  jest mniejsza niż masa pierwotnego jądra  $^{238}\text{U}$ . Tym samym całkowita energia spoczynkowa produktów rozpadu jest mniejsza niż energia spoczynkowa rozpadającego się jądra. Zgodnie z definicją zapisaną w równaniu (38.47) różnica pomiędzy początkową a końcową energią spoczynkową w procesach tego typu jest nazywana energią reakcji  $Q$ .

W przypadku rozpadu jądra różnicę energii spoczynkowych nazywamy energią rozpadu  $Q$ . Energia rozpadu  $Q$  dla reakcji zapisanej w równaniu (43.21) ma wartość  $4,25 \text{ MeV}$  — taka energia jest uwalniana w wyniku rozpadu  $\alpha$  jądra  $^{238}\text{U}$  i przekazywana w postaci energii kinetycznej dwóm produktom rozpadu.

Czas połowicznego zaniku nuklidu  $^{238}\text{U}$  w rozpadzie  $\alpha$  wynosi  $4,5 \cdot 10^9$  lat. Dlaczego jest on tak długi? Skoro rozpad nuklidu  $^{238}\text{U}$  jest możliwy, to dlaczego każde jądro  $^{238}\text{U}$  w próbce uranu  $^{238}\text{U}$  nie rozpada się natychmiast? Aby odpowiedzieć na te pytania, musimy bliżej przyjrzeć się rozpadowi  $\alpha$ .

W naszym modelu założymy, że cząstka  $\alpha$  istnieje (już powstała) we wnętrzu jądra, zanim jeszcze może z niego uciec. Na rysunku 43.9 przedstawiono przybliżoną zależność energii potencjalnej  $E_p(r)$  układu składającego się z cząstki  $\alpha$  oraz pozostały jądra  $^{234}\text{Th}$  od wzajemnej odległości  $r$  obydwu cząstek. Energia ta jest sumą 1) energii potencjalnej związanej z (przyciągającym) oddziaływaniem silnym występującym wewnątrz jądra oraz 2) potencjalnej energii elektrycznej związanej z (odpychającym) oddziaływaniem elektrostatycznym pomiędzy obydwoma cząstkom przed i po rozpadzie.

Pozioma czarna linia oznaczona jako  $Q = 4,25 \text{ MeV}$  odpowiada energii rozpadu. Jeżeli przyjmiemy, że jest ona równa całkowitej energii cząstki  $\alpha$  w trakcie rozpadu, to fragment krzywej  $E_p(r)$  powyżej prostej reprezentuje barierę energii potencjalnej, jak ta z rysunku 39.12. Takiej bariery cząstka nie może pokonać. Jeżeli cząstka  $\alpha$  zdołałaby się znaleźć w pewnym położeniu  $r$  w obrębie bariery, jej energia potencjalna  $E_p$  byłaby większa od energii całkowitej  $E$ . W mechanice klasycznej oznaczałoby to ujemną wartość energii kinetycznej  $E_k (= E - E_p)$ , co nie jest możliwe.

Widzimy więc, dlaczego cząstka  $\alpha$  nie może natychmiast opuścić jądra  $^{238}\text{U}$ . Jądro otacza potężną barierą potencjalną, rozciągającą się — jeżeli spróbujemy to sobie wyobrazić w trzech wymiarach — pomiędzy dwiema sferami (ich promienie to 8 fm i 60 fm). Obraz ten jest tak sugestyczny, że zmienimy teraz ostatnie pytanie i sformułujemy je tak: Jak to w ogóle możliwe, że cząstka  $\alpha$  — jak się wydaje — trwale uwięziona we wnętrzu jądra  $^{238}\text{U}$  przez otaczającą ją barierę zdoła kiedykolwiek to jądro opuścić? Odpowiedź brzmi, że — zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w paragrafie 39.9 — istnieje skończone prawdopodobieństwo, że cząstka może tunelować przez barierę potencjalną, która w fizyce klasycznej byłaby nie do pokonania. W rzeczywistości rozpad  $\alpha$  zachodzi dzięki tunelowaniu przez barierę.

Ponieważ czas połowicznego zaniku izotopu  $^{238}\text{U}$  jest bardzo długi, bariera musi być całkiem „szczelną”. Jeżeli przyjmiemy, że cząstka  $\alpha$  porusza się tam i z powrotem we wnętrzu jądra, to musi odbić się ona od wewnętrznej powierzchni bariery około  $10^{38}$  razy, zanim zdoła przedostać się przez nią na drodze tunelo-

wania. Oznacza to  $10^{21}$  prób na sekundę w ciągu  $4 \cdot 10^9$  lat (wiek Ziemi)! My znajdujemy się oczywiście na zewnątrz i możemy liczyć tylko te cząstki, które zdążyły uciec.

### Porównanie dwóch emiterów cząstek $\alpha$

Nuklid promieniotwórczy	$Q$	$T_{1/2}$
$^{238}\text{U}$	4,25 MeV	$4,5 \cdot 10^9$ a
$^{228}\text{U}$	6,81 MeV	9,1 min

Podane wyjaśnienie rozpadu  $\alpha$  można zweryfikować, rozważając inne źródła cząstek  $\alpha$ . Dla odmiany zajmijmy się rozpadem  $\alpha$  innego izotopu uranu —  $^{228}\text{U}$ , którego energia rozpadu  $Q'$  wynosi 6,81 MeV, czyli jest z grubsza o 60% większa niż dla  $^{238}\text{U}$ . (Wartość  $Q'$  jest również zaznaczona na rysunku 43.9 za pomocą czarnej linii). Z paragrafu 39.9 wynika, że współczynnik przejścia przez barierę jest bardzo wrażliwy na niewielkie zmiany całkowitej energii cząstki, która stara się przez nią przedostać. Spodziewamy się więc, że rozpad  $\alpha$  będzie zachodzić znacznie łatwiej dla tego nuklidu niż dla  $^{238}\text{U}$ . Tak jest naprawdę. Z tabeli 43.2 wynika, że czas połowicznego zaniku wynosi tu zaledwie 9,1 min! Zwiększenie wartości  $Q$  1,6 razy powoduje zmniejszenie się czasu połowicznego zaniku (a tym samym skuteczności bariery)  $3 \cdot 10^{14}$  razy. Jest to niezwykła czułość.

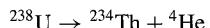
## Przykład 43.6

Mamy do dyspozycji następujące wartości mas atomowych:

$^{238}\text{U}$	238,050 79 u	$^{4}\text{He}$	4,002 60 u
$^{234}\text{Th}$	234,043 63 u	$^{1}\text{H}$	1,007 83 u
$^{237}\text{Pa}$	237,051 21 u		

Pa jest symbolem pierwiastka o nazwie protaktyn ( $Z = 91$ ).

a) Oblicz energię wyzwalaną w wyniku rozpadu  $\alpha$  jądra  $^{238}\text{U}$ . Proces jest opisany równaniem



Zwróć przy okazji uwagę, że w reakcjach jądrowych jest zachowany ładunek: liczba atomowa toru (90) i liczba atomowa helu (2) dają w sumie liczbę atomową uranu (92). Zachowana jest także liczba nukleonów: 238 = 234 + 4.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że energia wyzwalana w procesie to energia rozpadu  $Q$ , którą można obliczyć na podstawie zmiany masy  $\Delta M$  związanej z podziałem jądra  $^{238}\text{U}$ . Skorzystamy z równania (38.47)

$$Q = M_{\text{pocz}}c^2 - M_{\text{kofic}}c^2, \quad (43.22)$$

gdzie masa początkowa  $M_{\text{pocz}}$  to masa jądra  $^{238}\text{U}$ , a masa końcowa  $M_{\text{kofic}}$  jest sumą mas jąder  $^{234}\text{Th}$  i  $^4\text{He}$ . Podobnie jak w przykładzie 43.3, obliczenia musimy przeprowadzić dla atomów obojętnych

— to znaczy posługując się masami atomowymi. Podstawiając do równania (43.22) podane w zadaniu masy atomowe, otrzymamy

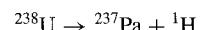
$$\begin{aligned} Q &= (238,050\,79\,\text{u})c^2 - (234,043\,63\,\text{u} + 4,002\,60\,\text{u})c^2 \\ &= (0,004\,56\,\text{u})c^2 = (0,004\,56\,\text{u})(931,5\,\text{MeV/u}) \\ &= 4,25\,\text{MeV}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że użycie mas atomowych zamiast mas jądrowych nie ma wpływu na wynik, ponieważ łączna masa elektronów w produkach reakcji redukuje się z masą elektronów w pierwotnym jądrze  $^{238}\text{U}$ .

b) Wykaż, że jądro  $^{238}\text{U}$  nie może samorzutnie wyemitować protonu.

### ROZWIĄZANIE:

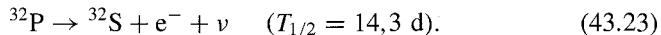
Gdyby mógł zachodzić proces emisji protonu, byłby on opisany równaniem



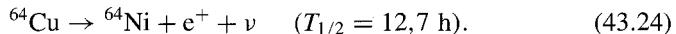
(Sprawdź, że w reakcji jest zachowany ładunek i liczba nukleonów). Korzystając z tego samego spostrzeżenia co w części (a) i powtarzając całe rozumowanie, stwierdzilibyśmy, że masa dwóch produktów rozpadu ( $= 237,051\,21\,\text{u} + 1,007\,83\,\text{u}$ ) jest *większa* od masy jądra  $^{238}\text{U}$  o wartość  $\Delta m = 0,008\,25\,\text{u}$ , co odpowiada energii rozpadu  $Q = -7,68\,\text{MeV}$ . Znak minus oznacza, że do jądra  $^{238}\text{U}$  musimy dostarczyć 7,68 MeV, zanim wyemituje ono proton. Nie ulega wątpliwości, że proces ten nie może zachodzić samorzutnie.

## 43.5. Rozpad $\beta$

Jeżeli jądro rozpada się samorzutnie, emitując przy tym elektron lub pozyton (dodatnio naładowaną cząstkę o masie elektronu), mówi się, że ulega ono **rozpadowi  $\beta$** . Podobnie jak rozpad  $\alpha$ , proces ten zachodzi samorzutnie i charakteryzuje się określoną energią rozpadu i czasem połowicznego zaniku. Tak samo jak rozpad  $\alpha$ , rozpad  $\beta$  jest procesem statystycznym, którego szybkość jest opisana równaniami (43.14) i (43.15). W rozpadzie  $\beta^-$  (*beta minus*) jądro emiteme elektron, jak na przykład w procesie



W rozpadzie  $\beta^+$  (*beta plus*) jądro emiteme pozyton



Symbol  $\nu$  oznacza **neutrino**, cząstkę obojętną elektrycznie, której masa spoczynkowa jest bardzo mała lub równa零. Neutrino bardzo słabo oddziałują z materią i dlatego tak trudno je wykryć, że przez długi czas ich obecność pozostawała nie zauważona<sup>1</sup>.

W obydwu podanych reakcjach zachowany jest ładunek i liczba nukleonów. Na przykład w rozpadzie opisanym równaniem (43.23) jądro  ${}^{32}\text{P}$  zawiera 15 protonów,  ${}^{32}\text{S}$  — 16 protonów, a neutrino  $\nu$  ma ładunek 0, można więc napisać

$$(15e) = (16e) + (-e) + (0).$$

Podobnie można sprawdzić zachowanie liczby nukleonów w reakcji:

$$(32) = (32) + (0) + (0),$$

ponieważ jądra  ${}^{32}\text{P}$  i  ${}^{32}\text{S}$  mają po 32 nukleony, a ani elektron, ani neutrino nie jest nukleonem.

W pierwszej chwili zaskakuje fakt, że jądra mogą emitować elektrony, pozytony i neutrino, skoro wcześniej powiedzieliśmy, że są one zbudowane tylko z protonów i neutronów. Już wcześniej przekonaliśmy się, że atomy emitują fotony, chociaż nigdy nie twierdziliśmy, że atomy „zawierają” fotony. Mówimy, że fotony powstają w procesie emisji.

Podobnie, elektrony, pozytony i neutrino emitowane z jądra w procesie rozpadu  $\beta$  powstają w procesie emisji. W rozpadzie  $\beta^-$  należący do jądra neutron przekształca się w proton zgodnie z równaniem



W procesie  $\beta^+$  proton przekształca się w neutron zgodnie z równaniem



<sup>1</sup>Pojęcie rozpadu obejmuje także *wychwyt elektronu*, w którym jądro rozpada się po wchłonięciu jednego z elektronów atomu, emitując przy tym neutrino. Procesem takim nie będziemy się tu zajmować. W rzeczywistości obojętna elektrycznie cząstka emitowana w procesie rozpadu (43.23) to antyneutrino, ale w tej fazie wykładu nie będziemy wprowadzać tego rozróżnienia.

Obydwia rodzaje rozpadu  $\beta$  dowodzą, że neutrony i protony nie są cząstkami prawdziwie elementarnymi. Z równań (43.25) i (43.26) wynika też, dlaczego liczba masowa nuklidu ulegającego rozpadowi  $\beta$  nie zmienia się — jest tak, ponieważ jeden z nukleonów jądra przekształca się po prostu w inny.

W rozpadach  $\alpha$  i  $\beta$  w każdym indywidualnym akcie rozpadu danego nuklidu promieniotwórczego wyzwala się taka sama energię. W rozpadzie  $\alpha$  określonego nuklidu promieniotwórczego każda emitowana cząstka  $\alpha$  ma dokładnie taką samą energię kinetyczną. Jednakże w przypadku rozpadu  $\beta^-$ , opisanego równaniem (43.25), energia rozpadu  $Q$  ulega podziałowi — w różnych proporcjach — pomiędzy emitowany elektron a neutrino. Czasami niemal całą energię otrzymuje elektron, a czasami neutrino. Jednakże w każdym przypadku suma energii elektronu i energii neutrina daje tę samą wartość  $Q$ . Podobny podział energii z zachowaniem stałej sumy  $Q$  zachodzi w rozpadzie  $\beta^+$  (równanie (43.26)).

W rozpadzie  $\beta$  energia kinetyczna emitowanego elektronu lub pozytonu może zmieniać się od zera do pewnej maksymalnej wartości  $E_{\text{kmax}}$ . Na rysunku 43.10 przedstawiono rozkład energii pozytonów dla rozpadu  $\beta$  nuklidu  $^{64}\text{Cu}$  (równanie (43.24)). Maksymalna energia pozytonu  $E_{\text{kmax}}$  musi być równa energii rozpadu  $Q$ , ponieważ neutrino unosi energię w przybliżeniu równą零, kiedy pozyton unosi energię  $E_{\text{kmax}}$ , czyli

$$Q = E_{\text{kmax}}. \quad (43.27)$$

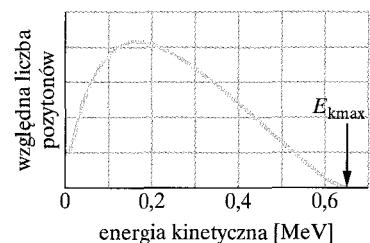
## Neutrino

Istnienie neutrin pierwszy zasugerował w 1930 roku Wolfgang Pauli. Jego hipoteza nie tylko pozwalała zrozumieć rozkład energii elektronów i pozytonów w rozpadzie  $\beta$ , ale także wyjaśniała inną związaną z nim zagadkę, dotyczącą „brakującego” momentu pędu.

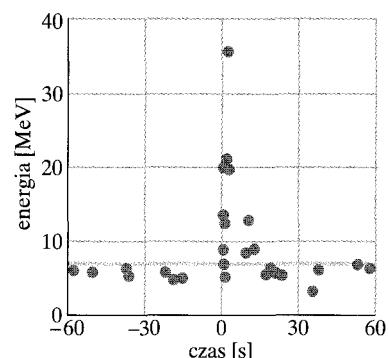
Neutrino jest cząstką trudno uchwytną; jak obliczono, średnia droga swobodna neutrina o wielkiej energii w wodzie wynosi co najmniej kilka tysięcy lat świetlnych. Jednocześnie neutrina, które pozostały po Wielkim Wybuchu, który — jak uważamy — dał początek Wszechświatu, są najliczniejszymi cząstkami elementarnymi. W każdej sekundzie ich miliardy przenikają nasze ciała, nie pozostawiając po sobie żadnego śladu.

Pomimo swej „ulotnej” natury neutrina zostały wykryte w laboratorium. Po raz pierwszy dokonali tego w 1953 r. F. Reines i C.L. Cowan, którzy zaobserwowali neutrina pochodzące z reaktora jądrowego o dużej mocy. (W 1995 r. Reines (Cowan już wtedy nie żył) otrzymał za tę pracę Nagrodę Nobla). Mimo trudności w detekcji eksperimentalna fizyka neutrin jest obecnie dobrze rozwiniętą gałęzią fizyki doświadczalnej, którą zajmują się niestrudzeni badacze w wielu laboratoriach na całym świecie.

Słońce emituje neutrina wytwarzane obficie w jego jądrze. Nocą cząstki te docierają do nas od dołu, ponieważ Ziemia jest dla nich niemal całkowicie przezroczysta. W lutym 1987 r., po trwającej 170 000 lat podróży do Ziemi dotarło światło z eksplodującej gwiazdy w Wielkim Obłoku Magellana (jednej z pobliskich galaktyk). We wspomnianej eksplozji powstała olbrzymia liczba neutrin, z których około 10 zostało zarejestrowanych przez czoły detektor neutrin w Japonii. Na rysunku 43.11 przedstawiono zapis tego zdarzenia.



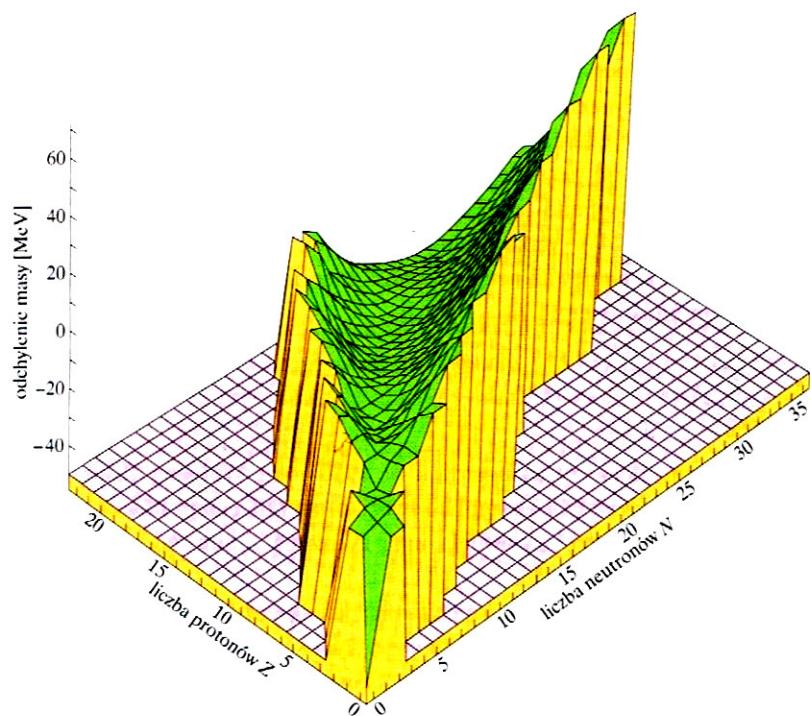
Rys. 43.10. Rozkład energii kinetycznej pozytonów emitowanych w wyniku rozpadu  $\beta$  nuklidu  $^{64}\text{Cu}$ . Maksymalna energia kinetyczna ( $E_{\text{kmax}}$ ) emitowanych cząstek ma wartość 0,653 MeV. We wszystkich rozpadach nuklidu  $^{64}\text{Cu}$  energia ta jest dzielona w różnych proporcjach między pozyton a neutrino. Najbardziej prawdopodobna energia emitowanego pozytonu wynosi około 0,15 MeV



Rys. 43.11. Gwałtowny wzrost strumienia neutrin z supernowej SN 1987A, w umownej chwili  $t = 0$  s, na obserwowanym zwykle neutrin. (W przypadku neutrin wzrost strumienia o 10 zasługuje na miano „gwałtownego”.) Cząstki były rejestrowane za pomocą bardzo złożonego detektora umieszczonego głęboko w kopalni w Japonii. Supernowa była widoczna tylko na półkuli południowej, a więc neutrina musiały przejść przez Ziemię (nie stanowi ona dla nich żadnej bariery)

## Promieniotwórczość a mapa nuklidów

Informacje zawarte w mapie nuklidów z rysunku 43.4 można uwypuklić, wykreślając w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $N-Z$  **odchylenie masy** każdego nuklidu. Odchylenie masy nuklidu (pomimo swej nazwy) wyraża przybliżoną wartość jego *całkowej* energii wiązania. Definiuje się go za pomocą wzoru  $(m-A)c^2$ , gdzie  $m$  jest masą atomu zawierającego nuklid wyrażoną w atomowych jednostkach masy,  $A$  — jego liczbą masową, a wartość  $c^2$  wynosi 931,5 MeV/u.



Rys. 43.12. Wycinek doliny nuklidów dla nuklidów o małej masie. Najbliżej nas leżą jądra deuteru, trytu i helu, przy czym hel jest położony najwyższej. Wykres urywa się mniej więcej dla  $Z = 22$  i  $N = 35$ . Nuklidy promieniotwórcze o dużych liczbach masowych  $A$  mogą zająć miejsce w dolinie dzięki wielokrotnym rozpadom  $\alpha$  i rozszczepieniom

Tak powstała powierzchnia odzwierciedla graficznie stabilność jąder. Na rysunku 43.12 (obejmującym nuklidy o małej masie) widzimy „dolinę nuklidów”, której dnem biegnie pasmo stabilności z rysunku 43.4. Nuklidy znajdujące się po stronie bogatej w protony przemieszczają się w stronę dna, ulegając rozpadowi z emisją pozitonów, a te położone po stronie bogatej w neutrony zachowują się podobnie, emitując elektrony.

**SPRAWDZIAN 3:** Nuklid  $^{238}\text{U}$  rozpada się na  $^{234}\text{Th}$  i cząstkę  $\alpha$ . W dalszej kolejności następuje łańcuch rozpadów promieniotwórczych, obejmujący zarówno rozpady  $\alpha$ , jak i  $\beta$ . W końcu powstaje nuklid trwały i dalsze rozpady promieniotwórcze nie są już możliwe. Który z następujących trwałych nuklidów jest produktem końcowym łańcucha rozpadu nuklidu  $^{238}\text{U}$ :  $^{206}\text{Pb}$ ,  $^{207}\text{Pb}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  czy  $^{209}\text{Pb}$ ? (Wskazówka: Wyboru można dokonać, badając zmiany liczby masowej  $A$  w rozpadach obydwu typów).

### Przykład 43.7

Oblicz energię  $Q$  rozpadu  $\beta$  jądra  $^{32}\text{P}$  opisanego równaniem (43.23). Potrzebne wartości mas atomowych to 31,973 91 u dla  $^{32}\text{P}$  oraz 31,972 07 u dla  $^{32}\text{S}$ .

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że energia rozpadu  $Q$  jest równa zmianie energii spoczynkowej w procesie rozpadu. Wartość  $Q$  jest dana równaniem (38.47) ( $Q = -\Delta Mc^2$ ). Ponieważ w procesie jest emitowany jeden elektron (nie jest to elektron związany w atomie), musimy zachować ostrożność, rozróżniając masy jądrowe (których nie znamy) i masy atomowe (które znamy). Niech wytuszczone symbole  $m_p$  i  $m_s$  oznaczają masy jądrowe  $^{32}\text{P}$  i  $^{32}\text{S}$ , a symbole zapisane kursywą  $m_p$  i  $m_s$  odpowiednie masy atomowe. Zatem możemy wyrazić zmianę masy w procesie rozpadu opisanym równaniem (43.23) jako

$$\Delta m = (m_s + m_e) - m_p,$$

gdzie  $m_e$  oznacza masę elektronu. Dodając i jednocześnie odejmując od prawej strony równania masę 15 elektronów  $15m_e$ , otrzymamy

mujemy

$$\Delta m = (m_s + 16m_e) - (m_p + 15m_e).$$

Wielkości w nawiasach to masy atomowe  $^{32}\text{S}$  i  $^{32}\text{P}$ , a więc

$$\Delta m = m_s - m_p.$$

Widzimy więc, że odejmując od siebie masy atomowe, automatycznie uwzględniamy masę wyemitowanego elektronu. (Ta metoda nie jest skuteczna w przypadku emisji pozytonu).

Energia rozpadu jądra  $^{32}\text{P}$  jest więc równa

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta mc^2 \\ &= -(31,972\,07 \text{ u} - 31,973\,91 \text{ u})(931,5 \text{ MeV/u}) \\ &= 1,71 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Eksperyment potwierdza, że obliczona wartość energii odpowiada największej energii kinetycznej  $E_{k\max}$ , jaką może uzyskać elektron. Chociaż energia 1,71 MeV jest uwalniana za każdym razem, kiedy jądro  $^{32}\text{P}$  ulega rozpadowi, prawie zawsze elektron uzyskuje mniejszą energię. Resztę otrzymuje neutrino, które niepostrzeżenie unosi ją na zewnątrz.

## 43.6. Datowanie na podstawie rozpadu promieniotwórczego

Znając czas połowicznego zaniku pewnego nuklidu promieniotwórczego, można wykorzystać ten nuklid jako zegar odmierzający czas. Rozpad nuklidów o bardzo długim czasie życia może na przykład posłużyć do określenia wieku skał, czyli czasu, który upłynął od ich powstania. Pomiary tego typu wykonywane dla skał pochodzących z Ziemi, Księżyca i meteorytów dają spójne wyniki, które świadczą, że ciała te liczą sobie około  $4,5 \cdot 10^9$  lat.

Na przykład izotop  $^{40}\text{K}$  rozпадa się, dając trwały izotop gazu szlachetnego — argonu  $^{40}\text{Ar}$ . Czas połowicznego zaniku dla tego rozpadu wynosi  $1,25 \cdot 10^9$  lat. Mierząc stosunek zawartości izotopów  $^{40}\text{K}$  i  $^{40}\text{Ar}$  w badanej skale, można obliczyć jej wiek. Inne powolne rozpady, jak na przykład  $^{235}\text{U}$  do  $^{207}\text{Pb}$  (wraz z etapami pośrednimi), można wykorzystać do weryfikacji tych obliczeń.

Pomiaru krótszych czasów, będących przedmiotem zainteresowania historyków, najczęściej dokonuje się, wykorzystując promieniotwórczy węgiel. Nuklid promieniotwórczy  $^{14}\text{C}$  ( $T_{1/2} = 5730$  lat) jest wytwarzany ze stałą szybkością w górnich warstwach atmosfery w wyniku bombardowania azotu przez promieniowanie kosmiczne. Radioaktywny węgiel mieszka się z węglem zwykle obecnym w atmosferze (w postaci  $\text{CO}_2$ ) tak, że jeden atom  $^{14}\text{C}$  przypada na  $10^{13}$  atomów trwałego izotopu  $^{12}\text{C}$ . W wyniku procesów biologicznych, jak fotosynteza czy też oddychanie, atomy węgla z atmosfery ulegają losowej wymianie z atomami węgla w żywych organizmach, jak brokuły, grzyby, pingwiny czy też ludzie. W rezultacie tej wymiany ustala się stan równowagi, w którym niewielki ułamek wszystkich atomów węgla w organizmach żywych to promieniotwórczy izotop  $^{14}\text{C}$ .

Taka równowaga trwa, dopóki organizm żyje. Potem ustaje i zawartość promieniotwórczego węgla w organizmie maleje z czasem połowicznego zaniku 5730 lat. Mierząc zawartość promieniotwórczego węgla w jednym grame substancji organicznej, można wyznaczyć czas, który upłynął od śmierci organizmu. Dzięki tej metodzie określono wiek węgla drzewnego z dawnych ognisk, rękopisów znad Morza Martwego i wielu innych obiektów historycznych. Wiek rękopisów określono dzięki badaniu zawartości promieniotwórczego węgla w tkaninie użytej do zatkania naczyń, w których je ukryto.

### Przykład 43.8

Pomiary zawartości atomów potasu i argonu w próbce skały księżyckowej wykonane metodą spektrometrii mas wykazały, że stosunek liczby (trwałych) atomów  ${}^{40}\text{Ar}$  do liczby (promieniotwórczych) atomów  ${}^{40}\text{K}$  wynosi 10,3. Założymy, że wszystkie atomy argonu powstały na drodze rozpadu promieniotwórczego atomów potasu z czasem połowicznego zaniku  $1,25 \cdot 10^9$  lat. Jaki jest wiek skały?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że jeśli zastygająca skała zawierała  $N_0$  atomów potasu, to ich liczba w chwili dokonywania analizy jest dana równaniem (43.14)

$$N_{\text{K}} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (43.28)$$

gdzie  $t$  oznacza wiek skały. W wyniku rozpadu każdego atomu potasu powstaje atom argonu. Liczba atomów argonu zawartych w próbce w momencie dokonywania analizy wynosi więc

$$N_{\text{Ar}} = N_0 - N_{\text{K}}. \quad (43.29)$$

Liczby  $N_0$  nie potrafimy wyznaczyć, więc musimy ją wyeliminować z równań (43.28) i (43.29). Po dokonaniu pewnych przekształceń stwierdzamy, że

$$\lambda t = \ln \left( 1 + \frac{N_{\text{Ar}}}{N} \right), \quad (43.30)$$

gdzie  $N_{\text{Ar}}/N_{\text{K}}$  jest wielkością, którą można zmierzyć. Rozwiązuając równanie względem  $t$  i korzystając ze wzoru (43.17), aby zastąpić  $\lambda$  przez  $(\ln 2)/T_{1/2}$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_{1/2} \ln(1 + N_{\text{Ar}}/N_{\text{K}})}{\ln 2} \\ &= \frac{(1,25 \cdot 10^9 \text{ lat})[\ln(1 + 10,3)]}{\ln 2} \\ &= 4,37 \cdot 10^9 \text{ lat.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Mniejsze wartości otrzymuje się, badając inne próbki pochodzenia księżyckiego lub ziemskiego, ale nie uzyskuje się wyniku, który byłby znaczco większy. Można zatem wywnioskować, że Układ Słoneczny liczy sobie około 4 miliardów lat.

## 43.7. Pomiary dawki promieniowania

Skutki działania promieniowania w postaci promieniowania  $\gamma$ , elektronów i cząstek  $\alpha$  na organizmy żywe (w szczególności na nas samych) są przedmiotem powszechnego zainteresowania. Takie promieniowanie występuje w przyrodzie w postaci promieniowania kosmicznego, a także jako skutek rozpadu pierwiastków promieniotwórczych w skorupie ziemskiej. Ważne jest też promieniowanie związane z pewnymi działaniami człowieka, jak na przykład zastosowanie promieniowania rentgenowskiego i izotopów promieniotwórczych w medycynie i przemyśle.

Nie będziemy tu rozważać różnych źródeł promieniowania jonizującego, lecz ograniczymy się do opisania jednostek, które wyrażają jego właściwości i skutki. Mówiliśmy już o aktywności źródła promieniotwórczego. Istnieją jeszcze dwie inne wielkości, które są w użyciu.

- Dawka pochłonięta (absorbowana).** To miara dawki promieniowania jonizującego (wyrażona jako energia na jednostkę masy napromieniowanej substancji) faktycznie zaabsorbowana przez pewien obiekt, jak na przykład ręka

lub klatka piersiowa pacjenta. W układzie SI jej jednostką jest **grej** (Gy). Nadal używa się też starszej jednostki nazywanej **rad** (skrót angielskiej nazwy „radiation absorbed dose” — zaabsorbowana dawka promieniowania). Obydwie jednostki są zdefiniowane i powiązane ze sobą następującą zależnością:

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg} = 100 \text{ rad.} \quad (43.31)$$

Typowe stwierdzenie określające wielkość dawki brzmi: „Dawka promieniowania  $\gamma$  o wielkości 3 Gy pochłonięta w krótkim czasie przez całe ciało spowoduje śmierć 50% ludzi poddanych jej działaniu”. Na szczęście przeciętna dawka, którą absorbujemy w ciągu roku ze źródeł naturalnych i stworzonych przez człowieka, wynosi zaledwie około 2 mGy ( $= 0,2 \text{ rad}$ ).

2. **Równoważnik dawki pochłoniętej.** Mimo że różne typy promieniowania (na przykład promieniowanie  $\gamma$  lub neutrony) mogą dostarczyć do ciała tę samą energię, nie powodują one takich samych skutków biologicznych. Równoważnik dawki pochłoniętej pozwala określić skutki biologiczne dzięki pomnożeniu dawki pochłoniętej (wyrażonej w grejach lub radach) przez pewien współczynnik liczbowy WSB (skrót od nazwy względna skuteczność biologiczna). Na przykład dla promieniowania rentgenowskiego i elektronów  $WSB = 1$ , dla powolnych neutronów  $WSB = 5$ , dla cząstek  $\alpha$   $WSB = 10$  itd. Środki ochrony osobistej, takie jak dawkomierze osobiste, rejestrują równoważnik dawki.

Jednostką równoważnika dawki w układzie SI jest **siwert** (Sv). Nadal używa się też starszej jednostki o nazwie **rem**. Obydwie jednostki łączy zależność

$$1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem.}$$

Oto przykład poprawnego użycia równoważnika dawki pochłoniętej: „Zalecenia Instytutu Ochrony Radiologicznej mówią, że nikt, kto jest narażony na działanie promieniowania (poza przyczynami zawodowymi), nie powinien w ciągu roku otrzymać równoważnika dawki pochłoniętej większego niż 5 mSv ( $= 0,5 \text{ rem}$ )”. Obejmuje to promieniowanie wszystkich rodzajów; oczywiście dla każdego rodzaju trzeba zastosować odpowiedni współczynnik WSB.

### Przykład 43.9

Powiedzieliśmy, że dawka pochłonięta promieniowania  $\gamma$  o wielkości 3 Gy jest śmiertelna dla połowy ludzi, którzy są poddani jej działaniu. O ile wzrosłaby temperatura ciała po pochłonięciu w postaci ciepła energii równoważnej tej dawce?

#### ROZWIAZANIE:

Zauważmy najpierw, że zaabsorbowaną energię  $Q$  i przyrost temperatury  $\Delta T$  wiąże równanie (19.14) ( $Q = cm\Delta T$ ). W równaniu tym  $m$  oznacza masę ciała absorbującego energię, a  $c$  jest jego ciepłem właściwym. Po drugie, z definicji dawki pochłoniętej wynika, że dawka 3 Gy odpowiada pochłonięciu przez 1 kg masy

3 J energii. Przyjmijmy, że ciepło właściwe  $c$  ludzkiego ciała jest takie samo jak ciepło właściwe wody i wynosi  $4180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ . Możemy więc obliczyć

$$\Delta T = \frac{Q/m}{c} = \frac{3 \text{ J/kg}}{4180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ K} \approx 700 \mu\text{K}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest zatem oczywiste, że zniszczenia w organizmie spowodowane przez promieniowanie jonizujące nie mają nic wspólnego ze wzrostem jego temperatury. Szkodliwe jest natomiast uszkodzenie przez promieniowanie cząsteczek DNA uniemożliwiające prawidłowe funkcjonowanie tkanek, w których promieniowanie zostało zaabsorbowane.

## 43.8. Modele jądrowe

Jądra to obiekty bardziej złożone niż atomy. W przypadku atomów prawo opisujące podstawowe oddziaływanie (prawo Coulomba) ma prostą postać i występuje dobrze określone centrum siły — jądro. W przypadku jąder prawo opisujące siłę jest złożone i nie można go zapisać jawnie ze wszystkim szczegółami. Co więcej, w jądrze, które zawiera wiele protonów i neutronów, nie ma naturalnego centrum siły, co uprościłoby obliczenia.

Wobec braku szczegółowej *teorii* jądra próbujemy konstruować jego modele. Model jądra daje prosty sposób uzyskania wglądu w tak szeroki zakres jego właściwości, jak tylko to możliwe. Użyteczność modelu jest sprawdzana przez jego zdolność do przewidywania różnych obserwacji, które można potem weryfikować doświadczalnie w laboratorium.

Szczególnie użyteczne są dwa modele jądra. Mimo że opierają się na założeniach, które zdają się nawzajem wykluczać, każdy z nich bardzo dobrze opisuje pewną grupę właściwości. Po przedstawieniu każdego z nich osobno pokażemy, jak można je połączyć ze sobą, aby uzyskać spójny obraz jądra atomowego.

### Model kroplowy

W *modelu kroplowym* stworzonym przez Nielsa Bohra nukleony poruszające się chaotycznie wewnętrz jądra, podobnie jak cząsteczki w kropli cieczy, silnie oddziałują między sobą. Dany nukleon w jądrze często zderza się z innymi nukleonami, a jego droga swobodna jest dużo mniejsza niż promień jądra.

Model kroplowy pozwala nam powiązać ze sobą wiele faktów dotyczących masy jąder oraz energii wiązania i — jak się później przekonamy — jest użyteczny do wyjaśnienia rozszczepienia jąder. Pozwala także zrozumieć szeroką klasę reakcji jądrowych.

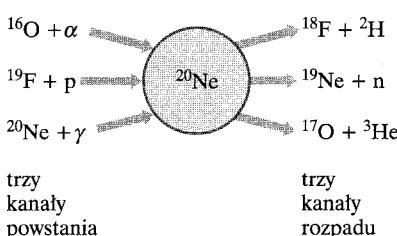
Rozważmy na przykład równanie reakcji jądrowej w ogólnej postaci



Wyobraźmy sobie, że pocisk  $a$  wnika do jądra tarczy  $X$  i tworzy **jądro złożone**  $C$ , przekazując mu pewną energię wzbudzenia. Pocisk — powiedzmy neutron — od razu uczestniczy w przypadkowych ruchach we wnętrzu jądra. W rezultacie szybko traci swoją tożsamość, a energia wzbudzenia, którą wniosł do jądra, ulega podziałowi pomiędzy inne nukleony w jądrze  $C$ .

Kwazistabilny układ oznaczony w równaniu (43.33) symbolem  $C$  ma średni czas życia rzędu  $10^{-16}$  s, po którym rozpada się na  $Y$  i  $b$ . W skali jądrowej to bardzo długi czas, mniej więcej milion razy dłuższy niż ten, którego potrzebuje nukleon o energii kilku milionów elektronowoltów na pokonanie średnicy jądra.

Podstawowe założenie związane z koncepcją jądra złożonego to wzajemna niezależność zdarzeń, jakimi są jego powstanie i rozpad. W chwili rozpadu jądro złożone zdążyło już „zapomnieć”, jak powstało. Mechanizm rozpadu nie zależy więc od mechanizmu powstania. Na przykład na rysunku 43.13 pokazano trzy możliwe sposoby powstania jądra złożonego  $^{20}\text{Ne}$  i trzy procesy jego rozpadu. Każdy z trzech mechanizmów powstania tego jądra może prowadzić do dowolnego rozpadu.



Rys. 43.13. Różne reakcje prowadzące do powstania i rozpadu jądra złożonego  $^{20}\text{Ne}$

## Model powłokowy

W modelu kroplowym zakładaliśmy, że nukleony poruszają się chaotycznie i często się ze sobą zderzają. *Model powłokowy* opiera się na przeciwnym założeniu, które głosi, że każdy nukleon znajduje się we wnętrzu jądra w dobrze określonym stanie kwantowym i prawie wcale nie uczestniczy w zderzeniach! Jądro w przeciwieństwie do atomu nie ma ustalonego centrum ładunku. Przyjmujemy więc, że każdy nukleon porusza się w studni potencjału pochodzącej od „rozmytego” (uśrednionego w czasie) potencjału od wszystkich pozostałych poruszających się nukleonów.

Stan nukleonu w jądrze, podobnie jak elektronu w atomie, jest opisany przez zbiór liczb kwantowych, które określają ruch nukleonu. Ponieważ nukleony, tak jak elektryny, podlegają zakazowi Pauliego, nie jest możliwe, aby dwa nukleony w jądrze w tym samym czasie znajdowały się w tym samym stanie kwantowym. Pod tym względem neutrony i protony trzeba rozważyć osobno — każdy z tych rodzajów cząstek ma swój własny zbiór stanów kwantowych.

Fakt, że nukleony podlegają zakazowi Pauliego, pomaga nam zrozumieć stosunkowo dużą trwałość ich stanów. Jeżeli dwa nukleony we wnętrzu jądra miałyby się zderzyć ze sobą, to każdy z nich w wyniku zderzenia musiałby uzyskać energię odpowiadającą stanowi *nieobsadzonemu*. Jeżeli taki stan nie jest dostępny, zderzenie po prostu nie może zajść. Tym samym dowolny nukleon, doświadczając wciąż „wzbronionych zderzeń”, trwa w swoim stanie ruchu dostatecznie długo, aby nadać sens stwierdzeniu, że jego energia jest dobrze określona.

W przypadku atomów ich powtarzające się cykliczne właściwości fizyczne i chemiczne wynikają z położenia w układzie okresowym uzależnionym od konfiguracji elektronów. W szczególności elektryny tworzą powłoki, a powłoki całkowicie zapełnione wykazują wielką stabilność. Moglibyśmy nazwać liczby atomowe gazów szlachetnych odpowiadające zapełnionym (zamkniętym) powłokom

$$2, 10, 18, 36, 54, 86, \dots,$$

*elektronowymi liczbami magicznymi*.

W przypadku jąder również obserwujemy występowanie zamkniętych powłok dla pewnych **magicznych liczb nukleonów**:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \dots$$

Dowolny nuklid, którego liczba protonów  $Z$  lub liczba neutronów  $N$  przyjmuje jedną z wymienionych wartości, charakteryzuje szczególna stabilność, którą można zaobserwować na wiele sposobów.

Przykłady jąder magicznych to:  $^{18}\text{O}$  ( $Z = 8$ ),  $^{40}\text{Ca}$  ( $Z = 20, N = 20$ ),  $^{92}\text{Mo}$  ( $N = 50$ ) i  $^{208}\text{Pb}$  ( $Z = 82, N = 126$ ). O jądrach  $^{40}\text{Ca}$  i  $^{208}\text{Pb}$  mówi się, że są one „podwójnie magiczne”, ponieważ mają zapełnioną powłokę dla protonów oraz zapełnioną powłokę dla neutronów.

Liczba magiczna 2 odpowiada za szczególną trwałość cząstki  $\alpha$  ( $^4\text{He}$ ), która także jest układem podwójnie magicznym  $Z = N = 2$ . I tak na krzywej energii wiązania nukleonu (rysunek 43.6) jądro to zajmuje miejsce wyraźnie powyżej swoich sąsiadów w układzie okresowym, jak wodór, lit i beryl. Cząstka  $\alpha$  jest tak mocno związana, że nie można dodać do niej jeszcze jednej cząstki — nie istnieje trwały nuklid o liczbie masowej  $A = 5$ .

Idea zamkniętych powłok sprowadza się do stwierdzenia, że pojedynczą cząstkę nie należącą do zamkniętej powłoki można stosunkowo łatwo usunąć, ale trzeba znacznie większej energii, aby zabrać cząstkę z powłoki zamkniętej. Na przykład atom sodu zawiera jeden elektron (walencyjny), który nie należy do zamkniętej powłoki. Aby oddzielić elektron walencyjny od atomu sodu, wystarczy zaledwie 5 eV energii. Jednakże do usunięcia *drugiego* elektronu, który należy do zamkniętej powłoki, potrzeba już 22 eV energii. Jako przykład z fizyki jądrowej rozważmy nuklid  $^{121}\text{Sb}$  ( $Z = 51$ ) z jednym protonem, który nie należy do zamkniętej powłoki tworzonej przez 50 protonów. Usunięcie tego pojedynczego protonu wymaga 5,8 MeV; do usunięcia drugiego protonu potrzeba już 11 MeV energii. Istnieje jeszcze wiele innych dowodów eksperymentalnych, że nukleony w jądrze tworzą zamknięte powłoki, które wykazują szczególną trwałość.

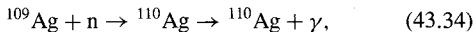
Przekonaliśmy się już, że mechanika kwantowa doskonale tłumaczy występowanie magicznych liczb elektronowych, związanych z obsadzaniem kolejnych powłok przez elektryny. Okazuje się, że przy pewnych założeniach teoria kwantowa może równie dobrze uzasadnić występowanie liczb magicznych dla nukleonów! W roku 1963 Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki otrzymali Maria Goeppert-Mayer i Hans Jensen „za odkrycia dotyczące struktury powłokowej jądra”.

### Model uogólniony

Rozważmy jądro, w którym niewielka liczba neutronów (lub protonów) znajduje się poza rdzeniem zbudowanym z zamkniętych powłok obsadzonych przez magiczną liczbę neutronów lub protonów. Zewnętrzne nukleony zajmują stany kwantowe w studni potencjału utworzonej przez centralny rdzeń, tak jak w modelu powłokowym. Zewnętrzne nukleony oddziałują także z rdzeniem, deformując go i wzbudzając w nim coś na kształt „fal przypływu”, na które składają się ruchy rotacyjne i wibracyjne. Wspomniane kolejtywne wzbudzenia rdzenia są zasadniczą cechą modelu kroplowego. Model uogólniony łączy w sobie na pozór wykluczające się nawzajem elementy modelu kroplowego i modelu powłokowego. Odniósł on znaczne sukcesy w opisie obserwowanych właściwości jąder.

### Przykład 43.10

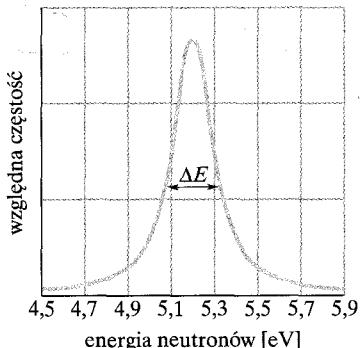
Rozważmy reakcję wychwytu neutronu



w której powstaje jądro złozone ( $^{110}\text{Ag}$ ). Na rysunku 43.14 przedstawiono względnązęczęstość występowania zdarzeń tego typu w zależności od energii padających neutronów. Wyznacz średni czas życia jądra złożonego, korzystając w tym celu z zasady nieoznaczoneści wyrażonej w postaci

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar. \quad (43.35)$$

W równaniu tym  $\Delta E$  opisuje niepewność określenia energii stanu, a  $\Delta t$  jest czasem, który mamy na wyznaczenie tej energii. W rozpatrywanym przypadku  $\Delta t$  oznacza  $t_{\text{sr}}$  — średni czas życia jądra



Rys. 43.14. Przykład 43.10. Wzglednaczęstość występowania reakcji opisanej równaniem (43.34) w zależności od energii padającego neutronu. Szerokość połówkowa  $\Delta E$  maksimum rezonansowego ma wartość około 0,20 eV

złożonego w stanie wzbudzonym przed jego powrotem do stanu podstawowego.

## ROZWIĄZANIE:

Widzimy, że względna wydajność reakcji wykazuje ostre maksimum dla energii neutronu bliskiej 5,2 eV. Sugeruje to, że mamy do czynienia z pojedynczym poziomem wzbudzonym jądra złożonego  $^{110}\text{Ag}$ . Kiedy dostępna energia (przekazywana przez padający neutron) odpowiada dokładnie różnicy energii poziomu wzbudzonego i podstawowego  $^{110}\text{Ag}$ , występuje „rezonans” i może zajść reakcja (43.34).

Krzywa rezonansowa nie jest jednak nieskończoność wąska, lecz charakteryzuje się pewną szerokością połówkową (oznaczoną

$\Delta E$ ) równą około 0,20 eV. Zauważmy, że krzywa rezonansowa ma skończoną szerokość, ponieważ stan wzbudzony nie ma precyzyjnie określonej energii, lecz charakteryzuje go niepewność  $\Delta E$  wynoszącą około 0,20 eV. Równanie (43.35) pozwala nam stwierdzić, że

$$\Delta t = t_{\text{sr}} \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{(4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}) / 2\pi}{0,20 \text{ eV}} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to czas kilkaset razy dłuższy niż ten, którego potrzebuje neutron o energii 0,20 eV na przebycie drogi równej średnicy jądra  $^{109}\text{Ag}$ . Widzimy więc, że na  $3 \cdot 10^{-15}$  s neutron staje się częścią jądra.

## Podsumowanie

**Nuklidy** Wiemy, że istnieje około 2000 nuklidów. Każdy z nich jest opisany przez liczbę atomową  $Z$  (liczbę protonów), liczbę neutronów  $N$  oraz liczbę masową  $A$  (łączną liczbę nukleonów — protonów i neutronów). Wymienione wielkości łączy zależność  $A = Z + N$ . Nuklidy o tej samej liczbie atomowej, różniące się liczbą neutronów, nazywamy izotopami. Średni promień jądra  $r$  dany jest wzorem

$$r = r_0 A^{1/3}, \quad (43.3)$$

gdzie  $r_0 \approx 1,2 \text{ fm}$ .

**Równoważność masy i energii** Energetyczny równoważnik jednej atomowej jednostki masy ( $u$ ) wynosi 931,5 MeV. Z wykresu energii wiązania wynika, że najtrwalsze są nuklidy o średnich masach, a energia może być wydzielana w reakcjach rozszczepienia jader ciężkich lub syntezy jader lekkich.

**Sily jądrowe** Jądra istnieją jako całość dzięki siłom przyciągania między nukleonami. Uważa się, że są one wtórnym przejawem oddziaływań silnych występujących pomiędzy kwarkami, z których są zbudowane nukleony. Jądra mogą występować w wielu dyskretnych stanach energetycznych opisanych przez własny moment pędu i moment magnetyczny.

**Rozpad promieniotwórczy** Większość znanych nuklidów to nuklidy promieniotwórcze. Ulegają one samorzutnemu rozpadowi z szybkością  $R$  ( $= -dN/dt$ ) proporcjonalną do liczby atomów promieniotwórczych, ze stałą proporcjonalnością nazywaną stałą rozpadu  $\lambda$ . Wynika stąd wykładowe prawo rozpadu:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad R = \lambda N = R_0 e^{-\lambda t}$$

(rozpad promieniotwórczy). ((43.14), (43.15), (43.16))

Czas połowicznego zaniku  $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$  nuklidu promieniotwórczego to czas, po którym szybkość rozpadu  $R$  (liczba jader

$N$ ) w próbce maleje dwukrotnie w stosunku do wartości początkowej.

**Rozpad  $\alpha$**  Niektóre nuklidy ulegają rozpadowi, emitując cząstkę  $\alpha$  (jądro helu  $^4\text{He}$ ). Rozpad tego typu powstrzymuje bariera potencjału, nie do przebycia dla cząstki w ramach fizyki klasycznej, którą cząstka może pokonać w wyniku tunelowania dozwolonego przez fizykę kwantową. Prawdopodobieństwo przejścia przez barierę, a tym samym czas połowicznego zaniku na drodze rozpadu  $\alpha$  silnie zależy od energii emitowanych cząstek  $\alpha$ .

**Rozpad  $\beta$**  Jądro ulegające rozpadowi  $\beta$  emitem elektron albo pozyton oraz neutrino. Energia rozpadu jest dzielona pomiędzy cząstki emitowane z jądra. Elektrony i pozytony emitowane w wyniku rozpadu  $\beta$  charakteryzują się ciągłym widmem energii, od zera aż do górnej granicy  $E_{\text{k,max}}$  ( $= Q = -\Delta mc^2$ ).

**Datowanie na podstawie rozpadu promieniotwórczego** Występujące w przyrodzie nuklidy promieniotwórcze umożliwiają określanie dat związanych z wydarzeniami historycznymi i prehistorycznymi. Na przykład wiek materiałów organicznych można określić, badając w nich zawartość węgla  $^{14}\text{C}$ ; wiek skał można określić na podstawie zawartości izotopu  $^{40}\text{K}$ .

**Dawki promieniowania** Dawkę promieniowania jonizującego można określić, podając trzy wielkości. **Bekerel** ( $1 \text{ Bq} = 1 \text{ rozpad na sekundę}$ ) jest jednostką aktywności źródła. Ilość pochłoniętej energii — **dawka pochłonięta** — jest mierzona w **grejach**, przy czym jeden grej odpowiada  $1 \text{ J/kg}$ . Szacunkowy skutek biologiczny zaabsorbowanej energii — **równoważnik dawki pochłoniętej** — jest wyrażany w **siwertach**; dawka o wielkości  $1 \text{ Sv}$  wywołuje te same skutki biologiczne niezależnie od rodzaju promieniowania, które zostało pochłonięte.

**Modele jądra** Model **kropkowy** jądra zakłada, że nukleony ciągle zderzają się ze sobą. W reakcjach polegających na pochłonięciu cząstki przez jądro, tworzy się **jądro złożone**, którego czas życia jest stosunkowo długi. Powstanie jądra złożonego i jego późniejszy rozpad to całkowicie niezależne zdarzenia.

Model **powłokowy** zakłada, że nukleony w jądrze poruszają się, w zasadzie nie zderzając się, i znajdują się w określonych stanzach energetycznych. Model przewiduje istnienie poziomów ener-

getycznych nukleonów i **liczb magicznych** (2, 8, 20, 28, 50, 82 i 126) odpowiadających zamkniętym powłokom. Nuklidy, w których liczba neutronów lub protonów odpowiada liczbie magicznej, charakteryzują się szczególną trwałością.

Model **uogólniony**, w którym zewnętrzne nukleony zajmują stan kwantowe w potentiale centralnego rdzenia utworzonego z zamkniętych powłok, okazał się wysoce użyteczny w przewidywaniu wielu właściwości jądra.

## Pytania

1. Wyobraźmy sobie, że cząstkę  $\alpha$  z przykładu 43.1 zastąpimy protonem o tej samej początkowej energii kinetycznej, poruszającym się dokładnie w kierunku jądra atomu złota. Czy mierzona względem środka jądra odległość, w której zatrzyma się proton, będzie większa, mniejsza, czy taka sama jak w przypadku cząstki  $\alpha$ ?

2. Czy w naszych ciałach jest więcej protonów niż neutronów, więcej neutronów niż protonów, czy może zawieramy podobne liczby obydwu tych cząstek?

3. Nuklid  $^{244}\text{Pu}$  ( $Z = 94$ ) jest źródłem cząstek  $\alpha$ . Który z następujących nuklidów powstaje w wyniku jego rozpadu:  $^{240}\text{Np}$  ( $Z = 93$ ),  $^{240}\text{U}$  ( $Z = 92$ ),  $^{248}\text{Cm}$  ( $Z = 96$ ) czy  $^{244}\text{Am}$  ( $Z = 95$ )?

4. O pewnym nuklidzie wiadomo, że jest szczególnie trwały. Czy odpowiadająca mu energia wiązania nukleonu leży nieco powyżej, czy nieco poniżej linii energii wiązania przedstawionej na rysunku 43.6?

5. Czy odchylenie masy cząstki  $\alpha$  (skorzystaj z wykresu na rysunku 43.12) jest większe, czy mniejsze niż całkowita energia wiązania cząstki (skorzystaj z wartości energii wiązania nukleonu podanych na rysunku 43.6)?

6. Nuklid promieniotwórczy  $^{196}\text{Ir}$  rozpada się, emittując elektron. a) Który z kwadratów na mapie z rysunku 43.5 zajmie produkt rozpadu? b) Czy będą następować kolejne rozpady?

7. Pewien nuklid ołowiu zawiera 82 protony. a) Jaki miejsce na wykresie z rysunku 43.4 zajmowałby on, jeżeli zawierałby także 82 neutrony? b) Czy w przypadku, gdyby jądro takie istniało, emitowałoby ono pozytony, elektrony, czy może byłoby trwałe? c) Korzystając z rysunku 43.4, odpowiedz, ilu neutronów należałoby oczekiwać w trwałym nuklidzie ołowiu.

8. Nuklid  $^{238}\text{U}$  ( $Z = 92$ ) może ulec rozszczepieniu na dwa fragmenty o tej samej liczbie atomowej i liczbie masowej. a) Czy nuklid  $^{238}\text{U}$  jest położony nad, czy pod linią  $N = Z$  wykreślzoną na rysunku 43.4? b) Czy powstałe fragmenty jądra znajdują się nad, czy pod tą linią? c) Czy fragmenty te są trwałe, czy promieniotwórcze?

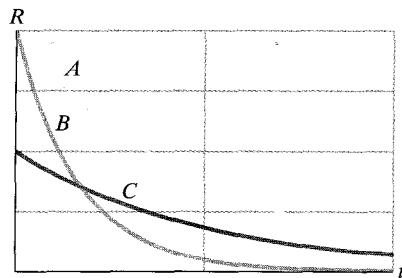
9. Nuklidy promieniotwórcze rozpadają się zgodnie z prawem wykładniczym (równaniem (43.15)). Baterie, gwiazdy, a nawet

studenci również ulegają rozpadowi, przy czym „rozpad” oznacza zużycie się lub śmierć. Czy rozpad wymienionych obiektów również jest opisany prawem wykładniczym?

10. W chwili  $t = 0$  szybkość rozpadu w próbce nuklidu promieniotwórczego  $A$  jest taka sama jak w próbce nuklidu promieniotwórczego  $B$  w chwili  $t = 30$  min. Stałe rozpadu wynoszą odpowiednio  $\lambda_A$  i  $\lambda_B$ , przy czym  $\lambda_A < \lambda_B$ . Czy kiedykolwiek szybkość rozpadu w obydwu próbkach (w tej samej chwili) będzie taka sama? [Wskazówka: Naszkicuj wykres aktywności dla obydwu próbek].

11. W chwili  $t = 0$  szybkość rozpadu w próbce nuklidu promieniotwórczego  $A$  jest dwukrotnie większa niż w próbce nuklidu promieniotwórczego  $B$ . Stałe rozpadu wynoszą odpowiednio  $\lambda_A$  i  $\lambda_B$ , przy czym  $\lambda_A > \lambda_B$ . Czy kiedykolwiek szybkość rozpadu w obydwu próbkach (w tej samej chwili) będzie taka sama?

12. Na rysunku 43.15 przedstawiono zależność aktywności od czasu dla trzech próbek promieniotwórczych. Uszereguj próbki według a) czasu połowicznego zaniku i b) wartości stałej rozpadu, zaczynając od największej wartości. [Wskazówka: W punkcie (a) wykorzystaj podziałkę na wykresie].



Rys. 43.15. Pytanie 12

13. Masa próbki promieniotwórczej została podwojona. Czy a) aktywność próbki i b) stała rozpadu próbki zwiększą się, zmniejszą się, czy nie ulegną zmianie?

14. W chwili  $t = 0$  zaczynamy obserwować dwa identyczne jądra promieniotwórcze o czasie połowicznego zaniku 5 minut.

W chwili  $t = 1$  min jedno z jąder ulega rozpadowi. Czy zdarzenie to zwiększa, czy zmniejsza prawdopodobieństwo rozpadu drugiego jądra w ciągu kolejnych 4 minut, czy też nie ma wpływu na jego rozpad?

15. Nuklid promieniotwórczy  $^{49}\text{Sc}$  charakteryzuje się czasem połowicznego zaniku 57,0 min. Pomiar szybkości rozpadu dla próbki tego nuklidu w chwili  $t = 0$  dały wynik o 6000 zliczeń/min przekraczający aktywność tła, które wynosi 30 zliczeń/min. Nie wykonując obliczeń, odpowiedz, czy liczba zliczeń dla próbki będzie równa liczbie zliczeń tła po około 3 h, 7 h, 10 h, czy po czasie znacznie dłuższym niż 10 h.

16. Nuklidy promieniotwórcze  $^{209}\text{At}$  i  $^{209}\text{Po}$  emittują cząstki  $\alpha$  o energiach odpowiednio równych 5,65 MeV i 4,88 MeV. Który nuklid ma dłuższy czas połowicznego zaniku?

17. Liczby magiczne jąder podane w paragrafie 43.8 to 2, 8, 20, 28, 50, 82 i 126. Czy nuklidy są magiczne (to znaczy szczególnie trwałe), gdy wartość magiczną ma a) tylko liczba masowa  $A$ , b) tylko liczba atomowa  $Z$ , c) tylko liczba neutronów  $N$ , czy d)  $Z$  albo  $N$  (lub obydwie te liczby)? Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

18. a) Które z następujących nuklidów są magiczne:  $^{122}\text{Sn}$ ,  $^{132}\text{Sn}$ ,  $^{98}\text{Cd}$ ,  $^{198}\text{Au}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ ? b) Które z nich, jeśli są takie, są podwójnie magiczne?

## Zadania

Rozwiązywanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązywanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 43.1 Odkrycie jądra

1. Założymy, że jądro złota ma promień 6,23 fm, a cząstka  $\alpha$  promień 1,80 fm. Jaką energię — obliczoną podobnie jak w przykładzie 43.1 — musi mieć padająca cząstka  $\alpha$ , aby „dotknęła” jądra złota?

2. Oblicz najmniejszą odległość pomiędzy jądrem atomu miedzi a zderzającą się z nim centralnie cząstką  $\alpha$  o energii 5,30 MeV.

3. Sprzęste zderzenie cząstki  $\alpha$  z jądrem powoduje jego odzut. Założymy, że cząstka  $\alpha$  o energii 5,00 MeV zderza się centralnie i sprężyście ze spoczywającym początkowo jądrem złota. Ile wynosi energia kinetyczna a) odrzuconego jądra i b) odbitej cząstki  $\alpha$ ?

### 43.2 Niektóre właściwości jąder

4. Promień sferycznego jądra zmierzony metodą rozpraszania elektronów wynosi 3,6 fm. Ile wynosi przypuszczalna wartość liczby masowej jądra?

5. Znajdź na mapie nuklidów z rysunku 43.4 położenie jąder wymienionych w tabeli 43.1. Sprawdź, że leżą one w strefie stabilności.

6. Gęstość gwiazdy neutronowej jest zbliżona do gęstości materii jądrowej, obliczonej w przykładzie 43.2. Wyobraźmy sobie, że Słońce przekształciłoby się w gwiazdę neutronową, zachowując całą swoją masę. Ile wynosiłby promień powstałego obiektu?

7. a) Ile protonów i b) ile neutronów zawiera nuklid  $^{14}\text{C}$ ?

8. Korzystając z mapy nuklidów, podaj symbole a) wszystkich trwałych izotopów o liczbie atomowej  $Z = 60$ , b) wszystkich nuklidów promieniotwórczych o liczbie neutronowej  $N = 60$ , c) wszystkich nuklidów o liczbie masowej  $A = 60$ .

9. Wykonaj mapę nuklidów podobną do przedstawionej na rysunku 43.5, zawierającą 25 nuklidów:  $^{118-122}\text{Te}$ ,  $^{117-121}\text{Sb}$ ,  $^{116-120}\text{Sn}$ ,  $^{115-119}\text{In}$  oraz  $^{114-118}\text{Cd}$ . Narysuj i oznacz a) wszystkie izobary (stałe  $A$ ) oraz b) wszystkie linie odpowiadające stałemu nadmiarowi neutronów zdefiniowanemu jako  $N - Z$ .

10. Duży nadmiar neutronów (zdefiniowany jako  $N - Z$ ) w ciężkich jądrach wiąże się z faktem, że większość takich nuklidów nie może rozpaść się na dwa trwałe jądra, nie pozbywając się przy tym części neutronów. Jako przykład rozważ spontaniczne rozszczepienie jądra  $^{235}\text{U}$  na dwa trwałe jądra o liczbach atomowych 39 i 53. a) Korzystając z dodatku F, podaj nazwy odpowiednich pierwiastków. Na podstawie rysunku 43.4 oszacuj, b) ile neutronów mogą zawierać powstałe jądra oraz c) ile neutronów pozostałoby po takim rozpadzie?

11. Elektrostatyczna energia potencjalna jednorodnie naładowanej kuli o ładunku  $q$  i promieniu  $r$  jest równa

$$E_p = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 r}.$$

a) Oblicz elektrostatyczną energię potencjalną nuklidu  $^{239}\text{Pu}$ , zakładając, że jest on kulą o promieniu 6,64 fm. b) W przypadku tego samego nuklidu porównaj wartość elektrostatycznej energii potencjalnej, w przeliczeniu na nukleon i na proton, z energią wiązania nukleonu równą 7,56 MeV. c) Jaki wniosek można wy ciągnąć na tej podstawie?

12. Oblicz i porównaj ze sobą a) gęstość masy  $\rho_m$  i b) gęstość ładunku  $\rho_q$  dla stosunkowo lekkiego nuklidu  $^{55}\text{Mn}$  oraz ciężkiego nuklidu  $^{209}\text{Bi}$ . c) Czy różnice są zgodne z twoimi przewidywaniemi? Uzasadnij odpowiedź.

**13.** Sprawdź podaną w tabeli 43.1 energię wiązania nukleonu dla nuklidu  $^{239}\text{Pu}$ . Potrzebne masy atomowe to 239,052 16 u (masa  $^{239}\text{Pu}$ ), 1,007 83 u (masa  $^1\text{H}$ ) oraz 1,008 67 u (masa neutronu).

**14.** a) Wykaż, że przybliżony wzór na masę  $M$  atomu ma postać  $M = Am_p$ , gdzie  $A$  jest liczbą masową, a  $m_p$  masą protonu.  
b) Jakie błędy względne (w procentach) popełnimy, obliczając za pomocą tego wzoru masy atomów z tabeli 43.1? Masa protonu wynosi 1,007 276 u. c) Czy wzór ten jest dostatecznie dokładny, aby użyć go w obliczeniach energii wiązania nukleonu?

**15.** Promień jądra można wyznaczyć, badając rozpraszanie na nim wysokoenergetycznych elektronów. a) Ile wynosi długość fali de Broglie'a elektronów o energii 200 MeV? b) Czy elektrony o podanej energii nadają się do przeprowadzenia wspomnianych pomiarów?

**16.** Charakterystyczny czas jądrowy jest wielkością użyteczną, mimo dość swobodnej definicji, określającej go jako czas potrzebny nukleonowi o energii kinetycznej kilku MeV na przebycie drogi równej średnicy jądra o przeciętnej masie. Jaki jest rzяд wielkości czasu jądrowego? Oblicz czas, jaki neutron o energii 5 MeV potrzebuje na przebycie drogi równej średnicy jądra  $^{197}\text{Au}$ . Skorzystaj z równania (43.3).

**17.** Ponieważ nukleony są uwiezione we wnętrzu jądra, za przybliżoną miarę niepewności ich położenia można przyjąć promień jądra  $r$ . Co mówi zasada nieoznaczoności na temat energii kinetycznej nukleonu we wnętrzu jądra o liczbie masowej  $A = 100$ ? (Wskazówka: Przymij, że nieokreśloność pędu  $\Delta p$  jest równa pędowi  $p$  nukleonu).

**18.** Masy atomowe atomów  $^1\text{H}$ ,  $^{12}\text{C}$  i  $^{238}\text{U}$  wynoszą odpowiednio 1,007 825 u, 12,000 000 u (z definicji) oraz 238,050 785 u. a) Ile wynosiłyby wymienione masy, gdyby jednostkę masy atomowej zdefiniowano, mówiąc, że masa  $^1\text{H}$  jest dokładnie równa 1,000 000 u? b) Na podstawie uzyskanych wyników odpowiedz, dlaczego nie przyjęto takiej definicji jednostki masy atomowej.

**19.** a) Wykaż, że energia związana z oddziaływaniami silnym pomiędzy dwoma nukleonami w jądrze jest proporcjonalna do jego liczby masowej  $A$ . b) Wykaż, że energia związana z oddziaływaniem elektrostatycznym pomiędzy dwoma protonami w jądrze jest proporcjonalna do  $Z(Z - 1)$ . c) Wykaż, że wraz ze wzrostem rozmiarów jąder (rysunek 43.4) znaczenie oddziaływania kulombowskiego rośnie znacznie szybciej niż oddziaływanie silnego.

**20.** Wyobraź sobie, że masz podzielić cząstkę  $\alpha$  ( $^4\text{He}$ ), usuwając z niej kolejno proton, neutron i proton. Oblicz: a) pracę wykonaną w każdym kroku, b) całkowitą energię wiązania cząstki  $\alpha$  i c) energię wiązania nukleonu. Oto niektóre potrzebne masy atomowe:

$^4\text{He}$	4,002 60 u	$^2\text{H}$	2,014 10 u
$^3\text{H}$	3,016 05 u	$^1\text{H}$	1,007 83 u
n	1,008 67 u		

**21.** W układzie okresowym można znaleźć informację, że średnia masa atomowa magnezu wynosi 24,312 u. Podana wartość jest średnią ważoną mas naturalnych izotopów magnezu zgodnie z częstością ich występowania na Ziemi. Trzy naturalne izotopy magnezu to  $^{24}\text{Mg}$  (23,985 04 u),  $^{25}\text{Mg}$  (24,985 84 u) oraz  $^{26}\text{Mg}$  (25,982 59 u). Naturalna zawartość  $^{24}\text{Mg}$  to 78,99% masowych (oznacza to, że 78,99% masy próbki naturalnego magnezu to izotop  $^{24}\text{Mg}$ ). Oblicz naturalną zawartość dwóch pozostałych izotopów.

**22.** Aby ułatwić obliczenia, masy atomowe podaje się czasami nie w postaci rzeczywistych mas atomowych, lecz jako  $(m - A)c^2$ , gdzie  $A$  jest liczbą masową w atomowych jednostkach masy. Wielkość ta, wyrażana zwykle w MeV, jest nazywana *odchyleniem masy* i oznaczana symbolem  $\Delta$ . Korzystając z danych w przykładzie 43.3, wyznacz odchylenie masy dla a)  $^1\text{H}$ , b) neutronu i c)  $^{120}\text{Sn}$ .

**23.** Moneta o nominale 1 grosza ma masę 3,0 g. Oblicz energię potrzebną do rozdzielenia wszystkich protonów i neutronów w tej monecie. Dla uproszczenia przyjmijmy, że jest ona wykonana w całości z atomów  $^{63}\text{Cu}$  (masa 62,929 60 u). Masy protonów i neutronów to odpowiednio 1,007 83 u oraz 1,008 67 u.

**24.** Ponieważ neutron nie ma ładunku elektrycznego, jego masy nie można wyznaczyć za pomocą spektrometru mas. Kiedy neutron spotyka proton (zakładamy, że obydwie cząstki niemal spoczywają), tworzą deuterон, emitując przy tym foton  $\gamma$  o energii 2,2233 MeV. Masy protonu i deuteronu są odpowiednio równe 1,007 825 035 u oraz 2,014 101 9 u. Korzystając z tych danych, wyznacz masę neutronu z największą możliwą liczbą cyfr znaczących. (Dokładniejsza wartość przelicznika masy na energię  $c^2$ , niż podana w tekście, to 931,502 MeV/u).

**25.** Wykaż, że całkowita energia wiązania  $E_w$  nuklidu jest równa

$$E_w = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta,$$

gdzie  $\Delta_H$ ,  $\Delta_n$  i  $\Delta$  to odpowiednio wartości odchylenia masy (patrz zadanie 22). Korzystając z tej metody, oblicz energię wiązania nukleonu w jądrze  $^{197}\text{Au}$ . Porównaj uzyskany wynik z wartością podaną w tabeli 43.1. Potrzebne wartości odchylenia masy zaokrąglone do trzech cyfr znaczących to:  $\Delta_H = +7,29$  MeV,  $\Delta_n = +8,07$  MeV oraz  $\Delta_{197} = -31,2$  MeV. Zwróć uwagę na łatwość obliczeń wynikającą z zastosowania odchylenia masy zamiast masy rzeczywistej.

### 43.3 Rozpad promieniotwórczy

**26.** Czas połowicznego zaniku nuklidu promieniotwórczego jest równy 30 lat. Jaka część próbki tego nuklidu nie uległa rozpadowi po upływie a) 60 lat i b) 90 lat? Przymij, że w chwili początkowej próbka zawierała tylko rozważane nuklidы.

**27.** Czas połowicznego zaniku izotopu wynosi 140 dni. Ile dni upłynie, nim szybkość rozpadu próbki tego izotopu zmniejszy się do jednej czwartej wartości początkowej?

- 28.** Czas połowicznego zaniku pewnego izotopu promieniotwórczego wynosi 6,5 h. Ile atomów tego izotopu pozostanie po upływie 26 godzin, jeżeli początkowo próbka zawierała  $48 \cdot 10^{19}$  atomów?
- 29.** Początkowo czysta próbka izotopu  $^{67}\text{Ga}$  o czasie połowicznego zaniku 78 h waży 3,4 g. a) Ile wynosi początkowa szybkość rozpadu? b) Ile wynosi szybkość rozpadu po upływie 48 h?
- 30.** Korzystając z danych przedstawionych w początkowych akapitach paragrafu 43.3, wyznacz a) stałą rozpadu  $\lambda$  oraz b) czas połowicznego zaniku izotopu  $^{238}\text{U}$ .
- 31.** Promieniotwórczy izotop rtęci  $^{197}\text{Hg}$  ulega rozpadowi, dając jako produkt złoto  $^{197}\text{Au}$ . Stała tego rozpadu wynosi  $0,0108 \text{ h}^{-1}$ . a) Oblicz czas połowicznego zaniku. Jaka część próbki nie ulegnie rozpadowi po upływie b) trzykrotnego czasu połowicznego zaniku i c) 10 dni?
- 32.** Izotop plutonu  $^{239}\text{Pu}$  powstaje w reaktorach jako produkt uboczny i dlatego jego zawartość w środowisku wzrasta. Izotop ten jest promieniotwórczy, a czas jego połowicznego zaniku wynosi  $2,41 \cdot 10^4$  lat. a) Ile jąder plutonu zawiera śmiertelna dawka o masie 2 mg? b) Ile wynosi szybkość rozpadu w próbce o podanej masie?
- 33.** Zrakowaciałe komórki są bardziej wrażliwe od zdrowych na promieniowanie rentgenowskie i  $\gamma$ . W przeszłości standardowym źródłem promieniowania w radioterapii był promieniotwórczy izotop  $^{60}\text{Co}$ , rozpadający się z czasem połowicznego zaniku 5,27 lat. Produktem tego rozpadu są wzbudzone jądra  $^{60}\text{Ni}$ , które natychmiast emittują dwa fotony  $\gamma$ , każdy o energii około 1,2 MeV. Ile promieniotwórczych jąder  $^{60}\text{Co}$  zawiera używana standardowo w lecznictwie próbka o aktywności 6000 Ci? (Obecnie w radioterapii stosuje się wysokoenergetyczne cząstki z akceleratorów liniowych).
- 34.** Czas połowicznego zaniku nuklidu promieniotwórczego  $^{64}\text{Cu}$  wynosi 12,7 h. Czysta w chwili  $t = 0$  próbka  $^{64}\text{Cu}$  ma masę 5,50 g. Jaka jej część ulegnie rozpadowi w przedziale czasu od  $t = 14$  h do  $t = 16$  h?
- 35.** W wyniku długotrwałej pracy Maria i Piotr Curie zdolali wydzielić z rudy uranu pierwszą czystą próbkę radu w postaci chlorku radu  $\text{RaCl}_2$  o masie 1 dg. Rad występował w niej w postaci promieniotwórczego izotopu  $^{226}\text{Ra}$ , którego czas połowicznego zaniku wynosi 1600 lat. a) Ile jąder radu uzyskali małżonkowie Curie? b) Ile wynosiła szybkość rozpadu uzyskanej próbki, wyrażona jako liczba rozpadów na sekundę?
- 36.** Nuklid promieniotwórczy  $^{32}\text{P}$  ( $T_{1/2} = 14,28$  d) jest często używany jako znacznik (marker) do badania reakcji biochemicznych z udziałem fosforu. a) Ile czasu musi upłynąć, aby w pewnym układzie eksperymentalnym częstość zliczeń wynosząca początkowo 3050 zliczeń/s zmniejszyła się do wartości 170 zliczeń/s? b) Roztwór zawierający promieniotwórczy izotop  $^{32}\text{P}$  jest doprowadzany do systemu korzeniowego pomidorów. Po upływie 3,48
- doby mierzy się aktywność liści związaną z rozpadem  $^{32}\text{P}$ . Przez jaki czynnik należy pomnożyć uzyskane wyniki, abytrzymać aktywność w chwili rozpoczęcia doświadczenia?
- 37.** Źródło zawiera dwa promieniotwórcze izotopy fosforu:  $^{32}\text{P}$  ( $T_{1/2} = 14,3$  d) oraz  $^{33}\text{P}$  ( $T_{1/2} = 25,3$  d). W chwili początkowej 10,0% wszystkich rozpadów pochodzi od izotopu  $^{33}\text{P}$ . Po jakim czasie 90,0% wszystkich rozpadów będzie pochodzić od izotopu  $^{33}\text{P}$ ?
- 38.** Izotop plutonu  $^{239}\text{Pu}$  ulega rozpadowi  $\alpha$  z czasem połowicznego zaniku 24 100 lat. Ile miligramów helu powstanie w wyniku rozpadu początkowo czystej próbki  $^{239}\text{Pu}$  o masie 12,0 g w ciągu 20 000 lat? (Załóż, że cały hel pochodzi bezpośrednio z rozpadu plutonu, a nie z innych produktów rozpadu).
- 39.** Próbka samaru o masie 1,00 g emmituje cząstki  $\alpha$  z częstością 120 cząstek/s. Ich źródłem jest izotop  $^{147}\text{Sm}$ , którego naturalna zawartość w samarze wynosi 15,0%. Oblicz czas połowicznego zaniku związany ze wspomnianym rozpadem  $\alpha$ .
- 40.** Po krótkim naświetlaniu próbki srebra neutronami zawiera ona dwa izotopy:  $^{108}\text{Ag}$  ( $T_{1/2} = 2,42$  min) o początkowej szybkości rozpadu  $3,1 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$  oraz  $^{110}\text{Ag}$  ( $T_{1/2} = 24,6$  s) o początkowej szybkości rozpadu  $4,1 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Wykonaj w skali półlogarytmicznej wykres, podobny do tego z rysunku 43.8, przedstawiający łączną szybkość rozpadu obydwu izotopów w zależności od czasu w przedziale od  $t = 0$  do  $t = 10$  min. Z rysunku 43.8 korzystajemy, aby pokazać, jak wyznaczyć czas połowicznego zaniku dla prostego rozpadu (pojedynczy izotop). Zaproponuj metodę wyznaczenia czasów połowicznego zaniku dwóch izotopów, zakładając, że dysponujesz wykresem zależności całkowitej szybkości rozpadu od czasu dla układu dwuizotopowego — takim, jak ten, który wykonałeś.
- 41.** Pewien nuklid promieniotwórczy może powstawać w cyklotronie ze stałą szybkością równą  $R$ . Jednocześnie ulega on rozpadowi opisanemu stałą rozpadu  $\lambda$ . Założmy, że proces tworzenia trwa dłucho w porównaniu z czasem połowicznego zaniku nuklidu promieniotwórczego. Wykaż, że po takim czasie liczba jąder promieniotwórczych ma stałą wartość, równą  $N = R/\lambda$ . Następnie udowodnij, że wynik ten nie zależy od liczby jąder promieniotwórczych w chwili początkowej. Mówimy, że nuklid znajduje się w równowadze wiekowej (trwałej) ze swoim źródłem. W tym stanie szybkość rozpadu nuklidu jest równa szybkości jego powstawania.
- 42.** Oblicz masę czystej próbki izotopu  $^{40}\text{K}$ , jeżeli jej początkowa szybkość rozpadu jest równa  $1,70 \cdot 10^5$  rozpadów/s. Czas połowicznego zaniku tego izotopu wynosi  $1,28 \cdot 10^9$  lat.
- 43.** (Patrz zadanie 41). Nuklid promieniotwórczy  $^{56}\text{Mn}$ , powstający w cyklotronie w wyniku bombardowania deuteronomi tarczy z manganu rozpada się z czasem połowicznego zaniku 2,58 h. Tarcza zawiera tylko trwały izotop manganu  $^{55}\text{Mn}$ . Reakcję mangan–deuteron, której produktem jest izotop  $^{56}\text{Mn}$ , opisuje równanie
- $$^{55}\text{Mn} + d \rightarrow ^{56}\text{Mn} + p.$$

Po bombardowaniu, które trwało znacznie dłużej niż 2,58 h, aktywność tarczy związana z rozpadem izotopu  $^{56}\text{Mn}$  wynosi  $8,88 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ . a) Ile wynosi wartość stałej  $R$  opisującej szybkość tworzenia się jąder  $^{56}\text{Mn}$  podczas bombardowania tarczy w cyklotronie? b) Ile wynosi szybkość rozpadu jąder (także podczas bombardowania)? c) Ile jąder  $^{56}\text{Mn}$  znajduje się w tarczy w chwili zakończenia jej bombardowania? d) Ile wynosi ich łączna masa?

**44.** (Patrz zadania 41 i 43). Źródło radowe zawiera 1,00 mg izotopu  $^{226}\text{Ra}$ , który rozпадa się z czasem połowicznego zaniku 1600 lat, dając jako produkt gaz szlachetny radon  $^{222}\text{Rn}$ . Powstały izotop radonu ulega z kolei rozpadowi  $\alpha$  z czasem połowicznego zaniku 3,82 d. a) Ile wynosi szybkość rozpadu izotopu  $^{226}\text{Ra}$  w źródle? b) Po jakim czasie radon znajdzie się w równowadze wiekowej z radem, którego jest produktem rozpadu? c) Ile wynosi szybkość rozpadu radonu? d) Oblicz ilość radonu w chwili osiągnięcia stanu równowagi z radem.

**45.** Jednym z zagrożeń związanych z opadem promieniotwórczym po wybuchu bomby atomowej jest obecność izotopu  $^{90}\text{Sr}$ , którego czas połowicznego zaniku wynosi 29 lat. Ponieważ właściwości chemiczne strontu są podobne do właściwości wapnia, pierwiastek ten po zjedzeniu przez krowy występuje w mleku, a wraz z nim trafia częściowo do kości ludzi i zwierząt. Elektrony wysokoenergetyczne emitowane w wyniku rozpadu  $\beta$  izotopu  $^{90}\text{Sr}$  uszkadzają szpik kostny, co uniemożliwia wytwarzanie czerwonych krwinek. W wyniku eksplozji bomby o sile 1 megaton powstaje około 400 g izotopu  $^{90}\text{Sr}$ . Załóż, że cały opad rozłoży się równomiernie na obszarze  $2000 \text{ km}^2$ . Jakie pole powierzchni zajmie wtedy dawka o aktywności 74 000 zliczeń/s, tzn. „bezpieczna” dla człowieka?

#### 43.4 Rozpad $\alpha$

**46.** Załóżmy, że jądro  $^{238}\text{U}$  jest zbudowane z cząstki  $\alpha$  ( $^{4}\text{He}$ ) oraz pozostałą części — jądra  $^{234}\text{Th}$ . Narysuj wykres elektrycznej energii potencjalnej  $E_p(r)$ , gdzie  $r$  jest odlegością pomiędzy tymi cząstками. Uwzględnij przedział odległości  $10 \text{ fm} < r < 100 \text{ fm}$ . Porównaj swój wykres z tym, który przedstawiono na rysunku 43.9.

**47.** Cięższe nuklidы na ogół są bardziej podatne na rozpad  $\alpha$ . Na przykład czas połowicznego zaniku na drodze rozpadu  $\alpha$  najtrwalszego izotopu uranu  $^{238}\text{U}$  jest równy  $4,5 \cdot 10^9$  lat. W przypadku najtrwalszego izotopu plutonu  $^{244}\text{Pu}$  odpowiednia wartość wynosi  $8,0 \cdot 10^7$  lat, a kiuru  $^{248}\text{Cm}$  —  $3,4 \cdot 10^5$  lat. Jaka część próbki wymienionych izotopów plutonu i kiuru nie ulegnie rozpadowi w czasie potrzebnym do rozpadu połowy jąder w próbce uranu  $^{238}\text{U}$ ?

**48.** Rozważ jądro  $^{238}\text{U}$ , które emiteme a) cząstkę  $\alpha$  lub b) po kolei neutron, proton, neutron i proton. Oblicz energię, która zostanie wyzwolona w każdym z przypadków. c) Sprawdź, przeprowadzając odpowiednie rozumowanie oraz bezpośrednie obliczenia, że różnica pomiędzy uzyskanymi wynikami jest równa całkowitej

energii wiążania cząstki  $\alpha$ . Oblicz tę energię wiążania cząstki  $\alpha$ . Oto niektóre potrzebne masy atomowe:

$^{238}\text{U}$	238,050 79	u	$^{234}\text{Th}$	234,043 63	u
$^{237}\text{U}$	237,048 73	u	$^{4}\text{He}$	4,002 60	u
$^{236}\text{Pa}$	236,048 91	u	$^{1}\text{H}$	1,007 83	u
$^{235}\text{Pa}$	235,045 44	u	n	1,008 67	u

**49.** Jądro  $^{238}\text{U}$  emiteme cząstkę  $\alpha$  o energii 4,196 MeV. Oblicz energię rozpadu  $Q$  dla tego procesu, uwzględniając energię odzutu powstałygo jądra  $^{234}\text{Th}$ .

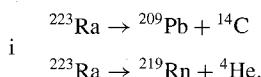
**50.** Nuklidы promieniotwórcze emiteme cząstki  $\alpha$ , a nie inne zestawy nukleonów, ponieważ cząstka  $\alpha$  ma szczególnie trwałą budowę. Aby potwierdzić tę opinię, oblicz energie rozpadu dla następujących hipotetycznych procesów i przedyskutuj uzyskane wyniki:

- a)  $^{235}\text{U} \rightarrow ^{232}\text{Th} + ^{3}\text{He}$ ,
- b)  $^{235}\text{U} \rightarrow ^{231}\text{Th} + ^{4}\text{He}$ ,
- c)  $^{235}\text{U} \rightarrow ^{230}\text{Th} + ^{5}\text{He}$ .

Oto potrzebne masy atomowe:

$^{232}\text{Th}$	232,0381	u	$^{3}\text{He}$	3,0160	u
$^{231}\text{Th}$	231,0363	u	$^{4}\text{He}$	4,0026	u
$^{230}\text{Th}$	230,0331	u	$^{5}\text{He}$	5,0122	u
$^{235}\text{U}$	235,0439	u			

**51.** W niektórych rzadkich przypadkach jądro może ulec rozpadowi, emiteme cząstkę cięższą niż cząstka  $\alpha$ . Przeanalizuj następujące rozpady:



a) Oblicz wartości energii rozpadu  $Q$  dla obydwu procesów i przekonaj się, że obydwa są dozwolone pod względem energetycznym.  
b) Wysokość bariery kulombowskiej dla emisji cząstki  $\alpha$  wynosi około 30 MeV. Ile wynosi wysokość bariery energetycznej dla emisji jądra  $^{14}\text{C}$ ? Potrzebne wartości mas atomowych to:

$^{223}\text{Ra}$	223,018 50	u	$^{14}\text{C}$	14,003 24	u
$^{209}\text{Pb}$	208,981 07	u	$^{4}\text{He}$	4,002 60	u
$^{219}\text{Rn}$	219,009 48	u			

#### 43.5 Rozpad $\beta$

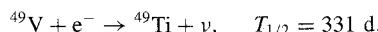
**52.** Cięższe nuklidы promieniotwórcze, mogące być emiterami cząstek  $\alpha$  lub  $\beta$ , należą do jednego z czterech łańcuchów rozpadu zależnie od wartości liczby masowej, która może być postaci  $4n$ ,  $4n+1$ ,  $4n+2$  lub  $4n+3$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną. a) Uzasadnij podane stwierdzenie i wykaż, że jeżeli nuklid należy do jednego z wymienionych łańcuchów, to wszystkie jego produkty rozpadu będą należeć do tego samego łańcucha. b) Przyporządkuj wymienione nuklidы do poszczególnych łańcuchów:  $^{235}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{240}\text{Pu}$ ,  $^{245}\text{Cm}$ ,  $^{246}\text{Cm}$ ,  $^{249}\text{Cf}$  oraz  $^{253}\text{Fm}$ .

**53.** Pewien trwały nuklid po pochłonięciu neutronu emituje elektron, a nowo powstały nuklid samorzutnie rozpada się na dwie cząstki  $\alpha$ . Zidentyfikuj wspomniany nuklid.

**54.** Nuklid o średniej masie (na przykład  $A = 150$ ) emisuje elektron o energii kinetycznej 1,0 MeV. a) Ile wynosi długość fali de Broglia'ego tego elektronu? b) Oblicz promień jądra, które wyemitowało elektron. c) Czy taki elektron można zamknąć w „puddle” o rozmiarach jądra jako falę stojącą? d) Czy uzyskane liczby można wykorzystać, aby obalić (już nieaktualny) pogląd, że elektryny są obecne w jądrze?

**55.** Izotop cezu  $^{137}\text{Cs}$  występuje w opadzie promieniotwórczym po naziemnym wybuchu bomby atomowej. Jest to poważne zagrożenie dla środowiska ze względu na powolny rozpad ( $T_{1/2} = 30,2$  lat) na bar  $^{137}\text{Ba}$  związany z wyzwalaniem znacznej energii. Masy atomowe Cs i Ba wynoszą odpowiednio 136,9071 u i 136,9058 u. Oblicz całkowitą energię wyzwalaną podczas tego rozpadu.

**56.** Niektóre nuklidy promieniotwórcze rozpadają się, wychwytując jeden z elektronów należących do własnego atomu, na przykład z powłoki K. Jeden z takich procesów ma postać



Wykaż, że energia rozpadu w tym procesie jest dana wzorem

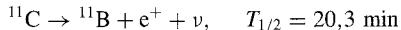
$$Q = (m_V - m_{\text{Ti}})c^2 - E_K,$$

gdzie  $m_V$  i  $m_{\text{Ti}}$  oznaczają odpowiednio masy izotopów  $^{49}\text{V}$  i  $^{49}\text{Ti}$ , a  $E_K$  jest energią wiązania elektronu z powłoki K w atomie wanadu. (Wskazówka: Przyjmij, że  $m_V$  i  $m_{\text{Ti}}$  są masami jądrowymi i postępuj tak, jak w przykładzie 43.7).

**57.** Swobodny neutron ulega rozpadowi opisanemu równaniem (43.26). Ile wynosi największa możliwa energia kinetyczna emitowanego elektronu  $E_{K\max}$ , jeżeli różnica mas atomowych neutronu i atomu wodoru wynosi  $840 \mu\text{m}$ .

**58.** Wyznacz energię  $Q$  dla rozpadu jądra  $^{49}\text{V}$  na drodze wychwytu elektronu opisanego w zadaniu 56. Potrzebne dane to  $m_V = 48,948\,52 \text{ u}$ ,  $m_{\text{Ti}} = 48,947\,87 \text{ u}$  oraz  $E_K = 5,47 \text{ keV}$ .

**59.** Nuklid promieniotwórczy  $^{11}\text{C}$  rozpada się zgodnie z równaniem



Największa energia emitowanych pozytonów wynosi 0,960 MeV. a) Wykaż, że energia rozpadu w tym procesie jest równa

$$Q = (m_C - m_B - 2m_e)c^2,$$

gdzie  $m_C$  i  $m_B$  oznaczają odpowiednio masy izotopów  $^{11}\text{C}$  i  $^{11}\text{B}$ , a  $m_e$  jest masą pozytonu. b) Znając wartości mas  $m_C = 11,011\,434 \text{ u}$ ,  $m_B = 11,009\,305 \text{ u}$  oraz  $m_e = 0,000\,548\,6 \text{ u}$ , oblicz energię rozpadu  $Q$  i porównaj ją z podaną wcześniej maksymalną energią emitowanych pozytonów. (Wskazówka: Przyjmij, że  $m_C$  i  $m_B$  są masami jądrowymi i postępuj zgodnie z przykładem 43.7 dotyczącym rozpadu  $\beta$ . Zwróć uwagę, że rozpad  $\beta^+$  jest wyjątkiem od ogólnej reguły, która mówi, że korzystając z mas atomowych w obliczeniach związanych z rozpadami jądrowymi, automatycznie uwzględnia się masę emitowanego elektronu).

**60.** Dwa izotopy promieniotwórcze  $^{238}\text{U}$  oraz  $^{232}\text{Th}$  ulegające rozpadowi  $\alpha$  oraz jeden izotop  $^{40}\text{K}$  ulegający rozpadowi  $\beta$  występują w granicie w dostatecznej ilości, aby w znaczącym stopniu przyczynić się do ogrzewania Ziemi na drodze rozpadu promieniotwórczego. Izotopy ulegające rozpadowi  $\alpha$  inicjują łańcuchy rozpadu, których końcowymi produktami są trwałe izotopy ołowiu. Izotop  $^{40}\text{K}$  ulega pojedynczemu rozpadowi  $\beta$ . Dane o rozpadach zawiera przedstawiona tabela:

Nuklid wyjściowy	Typ rozpadu	Czas połowicznego zaniku [a]	Trwały produkt	$Q$ [MeV]	$f$ [ppm]
$^{238}\text{U}$	$\alpha$	$4,47 \cdot 10^9$	$^{206}\text{Pb}$	51,7	4
$^{232}\text{Th}$	$\alpha$	$1,41 \cdot 10^{10}$	$^{208}\text{Pb}$	42,7	13
$^{40}\text{K}$	$\beta$	$1,28 \cdot 10^9$	$^{40}\text{Ca}$	1,31	4

W tabeli symbolem  $Q$  oznaczono całkowitą energię wydzieloną w łańcuchu rozpadów jednego jądra wyjściowego, aż do powstania trwałego jądra końcowego, a  $f$  — względową zawartość izotopu w granicie (ppm oznacza części na milion). a) Wykaż, że w wyniku rozpadu wymienionych izotopów energia termiczna jest wydzielana z szybkością  $1,0 \cdot 10^{-9} \text{ W}$  na każdy kilogram granitu. b) Zakładając, że powierzchniowa, sferyczna warstwa Ziemi o grubości 20 km zawiera  $2,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  granitu, oszacuj całkowitą moc wydzielaną w wyniku procesów rozpadu na całej Ziemi. Porównaj ten wynik z całkowitą mocą docierającą do Ziemi ze Słońca, równą  $1,7 \cdot 10^{17} \text{ W}$ .

**61.** Nuklid promieniotwórczy  $^{32}\text{P}$  rozpada się na  $^{32}\text{S}$  zgodnie z równaniem (43.23). W konkretnym akcie rozpadu emitowany jest elektron o największej możliwej energii równej 1,71 MeV. Ile wynosi energia kinetyczna odrzutu jądra  $^{32}\text{S}$ ? (Wskazówka: W przypadku elektronu trzeba skorzystać z relatywistycznych wzorów na energię kinetyczną i pęd. Mechanika nierelatywistyczna dobrze opisuje dość wolny ruch jądra  $^{32}\text{S}$ ).

### 43.6 Datowanie na podstawie rozpadu promieniotwórczego

**62.** Próbka węgla drzewnego z pradawnego ogniska ma masę 5,0 g i aktywność związaną z rozpadem izotopu  $^{14}\text{C}$  równą 63,0 rozpadów/s. Podobna aktywność zmierzona dla rosnącego drzewa wynosi 15,3 rozpadów/s na 1 g. Czas połowicznego zaniku izotopu  $^{14}\text{C}$  to 5730 lat. Ile ma lat próbka węgla drzewnego?

**63.** Uran  $^{238}\text{U}$  rozpada się na ołów  $^{206}\text{Pb}$  z czasem połowicznego zaniku  $4,47 \cdot 10^9$  lat. Rozpad ten zachodzi w wielu etapach, ale pierwszy z nich ma zdecydowanie najdłuższy czas połowicznego zaniku. Dzięki temu w wielu przypadkach można przyjąć, że w wyniku rozpadu powstaje ołów, czyli



Badana skała zawiera 4,20 mg uranu  $^{238}\text{U}$  oraz 2,135 mg ołowiu  $^{206}\text{Pb}$ . Założymy, że tworząca się skała nie zawierała ołowiu,

który w całości powstał w wyniku rozpadu uranu. a) Ile atomów  $^{238}\text{U}$  i  $^{206}\text{Pb}$  zawiera obecnie skała? b) Ile atomów  $^{238}\text{U}$  zawierała tworząca się skała? c) Jaki jest wiek skały?

**64.** Uważa się, że pewna skała liczy sobie 260 milionów lat. Jaka ilość ołówku  $^{206}\text{Pb}$  powinna w niej występować, jeżeli zawiera ona 3,70 mg uranu  $^{238}\text{U}$ ? Patrz zadanie 63.

**65.** Stwierdzono, że próbka skały wydobyta z głębi Ziemi zawiera 0,86 mg  $^{238}\text{U}$ , 0,15 mg  $^{206}\text{Pb}$  oraz 1,6 mg  $^{40}\text{Ar}$ . Jaką ilość izotopu  $^{40}\text{K}$  powinna zawierać ta próbka? Potrzebne wartości czasów połowicznego zaniku można znaleźć w zadaniu 60.

### 43.7 Pomiary dawki promieniowania

**66.** Licznik Geigera–Müllera rejestruje 8700 zliczeń w ciągu 1 minuty. Oblicz aktywność źródła w bekerach i kiurach, zakładając, że licznik rejestruje wszystkie rozpady.

**67.** Nuklid  $^{198}\text{Au}$  o czasie połowicznego zaniku 2,70 d ma zastosowanie w leczeniu raka. Jaką trzeba wziąć masę nuklidu, aby uzyskać aktywność 250 Ci?

**68.** Pilot samolotu pasażerskiego spędza przeciętnie 20 godzin tygodniowo, lecąc na wysokości 10 km. Na tej wysokości równoważnik dawki pochłoniętej związany z promieniowaniem kosmicznym wynosi  $7,0 \mu\text{Sv}/\text{h}$ . Ile wynosi roczny (52 tygodnie) równoważnik dawki związany z tym źródłem promieniowania? Zwróć uwagę, że maksymalny roczny dozwolony równoważnik dawki (ze wszystkich źródeł) dla ogółu populacji wynosi 5 mSv, a dla pracowników w dziedzinach związanych z promieniowaniem 50 mSv.

**69.** Typowa dawka promieniowania rentgenowskiego (współczynnik WSB równy 0,85) otrzymywana podczas prześwietlenia klatki piersiowej wynosi  $250 \mu\text{Sv}$ . Oblicz wartość pochłoniętej energii w dżulach, zakładając, że na działanie promieniowania narażona jest połowa ciała pacjenta o masie 88 kg.

**70.** Ciało człowieka o masie 75 kg otrzymuje dawkę o wielkości  $2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Gy}$  w postaci cząstek  $\alpha$ , dla których współczynnik WSB jest równy 12. Oblicz a) wartość zaabsorbowanej energii w dżulach oraz b) równoważnik dawki pochłoniętej w siwertach i remach.

**71.** Pracownik obsługujący reaktor powielający przypadkowo wdycha 2,5 mg pyłu plutonu  $^{239}\text{Pu}$ . Czas połowicznego zaniku izotopu  $^{239}\text{Pu}$  wynosi 24 100 lat, a jego rozpad zachodzi na drodze emisji cząstek  $\alpha$ . Energia emitowanych cząstek  $\alpha$  wynosi 5,2 MeV, a ich współczynnik WSB jest równy 13. Założmy, że pluton pozostał w organizmie pracownika przez 12 godzin oraz że 95% emitowanych cząstek  $\alpha$  zostało zaabsorbowanych przez ciało. Oblicz a) liczbę wchłoniętych atomów plutonu, b) liczbę atomów, które uległy rozpadowi w ciągu 12 godzin, c) energię zaabsorbowaną przez ciało pracownika, d) wynikającą stąd dawkę pochłoniętą w grejach oraz e) równoważnik dawki pochłoniętej w siwertach.

### 43.8 Modele jądrowe

**72.** Można przyjąć, że typowa energia kinetyczna nukleonu w jądrze o średniej masie wynosi 5,0 MeV. Jakiej efektywnej temperaturze jądrowej odpowiada ta energia, jeżeli przyjmiemy założenia kroplowego modelu budowy jądra?

**73.** Jądro pośrednie występujące w pewnej reakcji jądrowej ulega rozpadowi po  $10^{-22} \text{ s}$  od chwili powstania. a) Jaka jest nieoznaczoność energii  $\Delta E$  stanu tego jądra? b) Czy stan ten możemy nazwać jądrem złożonym? (Patrz przykład 43.10).

**74.** Znajdź na podanej liście nuklidy a) z zapełnionymi powłokami nukleonowymi, b) z jednym nukleонem na zewnątrz zapełnionej powłoki oraz c) z brakiem jednego nukleonu w zapełnionej powłoce. Lista nuklidów:  $^{13}\text{C}$ ,  $^{18}\text{O}$ ,  $^{40}\text{K}$ ,  $^{49}\text{Ti}$ ,  $^{60}\text{Ni}$ ,  $^{91}\text{Zr}$ ,  $^{92}\text{Mo}$ ,  $^{121}\text{Sb}$ ,  $^{143}\text{Nd}$ ,  $^{144}\text{Sm}$ ,  $^{205}\text{Tl}$  oraz  $^{207}\text{Pb}$ .

**75.** Rozważ trzy procesy prowadzące do utworzenia jądra złożonego  $^{20}\text{Ne}$  (rysunek 43.13). Oto niektóre z mas atomowych występujących cząstek:

$^{20}\text{Ne}$	19,992 44 u	$\alpha$	4,002 60 u
$^{19}\text{F}$	18,998 40 u	p	1,007 83 u
$^{16}\text{O}$	15,994 91 u		

Jaką energię musi mieć a) cząstka  $\alpha$ , b) proton i c) foton  $\gamma$ , aby dostarczyć jądru złożonemu energię wzbudzenia 25,0 MeV?

### Zadania dodatkowe

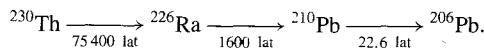
**76.** Pod koniec drugiej wojny światowej holenderskie władze aresztowały pod zarzutem zdrady artystę Hansa van Meegerena. Oskarżono go o sprzedaż jednemu z czołowych przedstawicieli reżimu nazistowskiego — Hermannowi Goeringowi arcydzieła *Chrystus i jego uczniowie w Emmaus* pędzla holenderskiego mistrza Johanna Vermeera (1632–1675). Meegeren odnalazł ten obraz w 1937 roku, po upływie 300 lat, w ciągu których był on uważany za zaginiony. Tuż po odkryciu eksperci orzekli, że *Emmaus* to prawdopodobnie największe dzieło Vermeera. Sprzedaż takiego arcydzieła kultury narodowej wrogowi uznano za niewyobrażalną zdradę.

Wkrótce po uwięzieniu van Meegeren oznajmił niespodziewanie, że to on, a nie Vermeer namalował *Emmaus*. Wyjaśnił, że starannie naśladował styl mistrza, użył oryginalnego płótna sprzed 300 lat i zestawu pigmentów, którymi zwykł posługiwać się Vermeer. Następnie skopiał na dziele podpis Vermeera i wygrzał je, aby uzyskać autentyczny, stary wygląd.

Czy van Meegeren klamał, aby uniknąć wyroku za zdradę, przyznając się do mniej poważnego przestępstwa, jakim było fałszerstwo? Według historyków sztuki obraz *Emmaus* wyglądał na autentyczne dzieło Vermeera, ale gdy w 1947 roku toczył się proces van Meegerena, nie znano naukowych metod odpowiedzi na tak sformułowane pytanie. Dopiero w 1968 roku zagadkę był w stanie rozwiązać Bernard Kisch z Carnegie-Mellon University, który wykorzystał nowo opracowane techniki analizy radiacyjnej.

W szczególności dokonał on analizy niewielkiej pobranej z obrazu próbki białego barwnika, który zawierał ołów. Barwnik

ten jest otrzymywany z rudy ołowiu. Ołów w niej zawarty powstaje w wyniku długiego łańcucha rozpadów promieniotwórczych, którego początkiem jest nietrwały izotop uranu  $^{238}\text{U}$ , a końcem trwały izotop ołowiu  $^{206}\text{Pb}$ . Postępując zgodnie z ideą Keischa, skupmy się na fragmencie łańcucha rozpadów, w którym pominięto nuklidы promieniotwórcze o krótkich w porównaniu z pozostałymi czasach zaniku:



Podaliśmy dłuższe i bardziej istotne czasy połowicznego zaniku nuklidów występujących w rozpatrywanym fragmencie łańcucha.  
a) Wykaż, że w jednostkowej próbce rudy ołowiu liczba jąder izotopu  $^{210}\text{Pb}$  zmienia się z szybkością

$$\frac{dN_{210}}{dt} = \lambda_{226}N_{226} - \lambda_{210}N_{210},$$

gdzie  $N_{210}$  i  $N_{226}$  oznaczają liczby jąder  $^{210}\text{Pb}$  i  $^{226}\text{Ra}$  w próbce jednostkowej, a  $\lambda_{210}$  i  $\lambda_{226}$  są odpowiednimi stałymi rozpadu.

Ponieważ w łańcuchu rozpady trwają od miliardów lat, a czas połowicznego zaniku  $^{210}\text{Pb}$  jest wyraźnie krótszy niż  $^{226}\text{Ra}$ , obydwia te nuklidы znajdują się w *równowadze*. Oznacza to, że liczby ich jąder i ich koncentracje w próbce nie ulegają zmianie. b) Ile wynosi stosunek  $R_{226}/R_{210}$  aktywności obydwu nuklidów w jednostkowej próbce rudy ołowiu? c) Ile wynosi stosunek liczby jąder obydwu nuklidów?

Gdy pigment był wydzielany z rudy, większość jąder  $^{226}\text{Ra}$  została zeń usunięta. Załóżmy, że w pigmencie pozostał jedynie 1%  $^{226}\text{Ra}$ . Ile wynosiły wartości stosunków d)  $R_{226}/R_{210}$  i e)  $N_{226}/N_{210}$  w świeżej uzyskanym pigmencie?

Keisch rozumiał, że z czasem stosunek  $R_{226}/R_{210}$  będzie stopniowo zmieniać się od wartości charakterystycznej dla świeżego barwnika do wartości występującej w rudzie, ponieważ przywracana jest równowaga pomiędzy nuklidem  $^{210}\text{Pb}$  i pozostałością  $^{226}\text{Ra}$ . Jeżeli obraz *Emmaus* był naprawdę namalowany przez Vermeera trzysta lat przed badaniami z 1968 roku, to wartość stosunku powinna być bliska wynikowi uzyskanego w punkcie (b). Jeżeli obraz namalował w latach trzydziestych van Meegeren, to próbka liczyła sobie około trzydziestu lat i stosunek powinien być bliższy wynikowi z punktu (d). Keisch stwierdził, że stosunek ma wartość 0,09. f) Czy obraz był dziełem Vermeera?

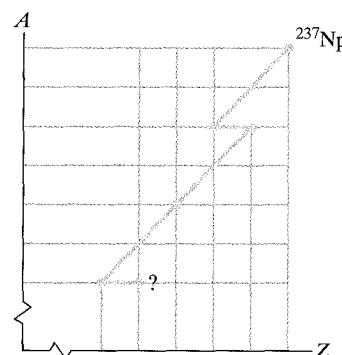
77. W wyniku próbnych wybuchów jądrowych dokonywanych w atmosferze, do górnych jej warstw dostał się radioaktywny pył. Występujące tam prądy powietrzne sprawiły, że pył rozprzestrzenił się na całej Ziemi, nim opadł na powierzchnię gleby i wody. Jedna z takich prób została przeprowadzona w październiku 1976 roku. Jaka część powstała w wyniku tej eksplozji strontu  $^{90}\text{Sr}$  będzie nadal istnieć w październiku 2006 roku? Czas połowicznego zaniku dla  $^{90}\text{Sr}$  wynosi 29 lat.

78. Próbka promieniotwórcza przeznaczona do naświetleń pacjentów w szpitalu jest przygotowywana w pobliskim laboratorium. Czas połowicznego zaniku próbki jest równy 83,61 h. Ile powinna wynosić jej początkowa aktywność, jeżeli w chwili naświetlania pacjenta 24 godziny później aktywność próbki jest równa  $7,4 \cdot 10^8 \text{ Bq}$ ?

79. Nuklid promieniotwórczy  $^{99}\text{Tc}$  można wstrzyknąć do krewiego biegu pacjenta w celu monitorowania przepływu krwi, mierzenia jej objętości lub zlokalizowania nowotworu. Nuklid jest wytwarzany w szpitalu, w układzie zawierającym izotop promieniotwórczy  $^{99}\text{Mo}$ , który rozpada się na  $^{99}\text{Tc}$  z czasem połowicznego zaniku 67 h. Raz dziennie z układu pobiera się izotop  $^{99}\text{Tc}$ , który po rozpadzie  $^{99}\text{Mo}$  znajduje się w stanie wzbudzonym. Jądro  $^{99}\text{Tc}$  wraca do stanu podstawowego, emitując foton  $\gamma$ , co rejestrują detektory rozmieszczone wokół ciała pacjenta. Proces powrotu do stanu podstawowego charakteryzuje się czasem połowicznego zaniku 6,0 h. a) Jaki proces jest odpowiedzialny za rozpad jądra  $^{99}\text{Mo}$  na  $^{99}\text{Tc}$ ? b) Ile fotonów  $\gamma$  będzie emitowanych w ciele pacjenta bezpośrednio po wstrzygnięciu mu dawki  $^{99}\text{Tc}$  o aktywności  $8,2 \cdot 10^7 \text{ Bq}$ ? c) Ile jader  $^{99}\text{Tc}$  w stanie wzbudzonym zgromadziło się w niewielkim nowotworze, jeżeli emisja promieni  $\gamma$  z jego obszaru zachodzi w pewnej chwili z szybkością 38 fotonów na sekundę?

80. W wyniku wybuchu i pożaru w 1986 roku w elektrowni atomowej w Czarnobylu część terytorium Ukrainy została skażona cezem  $^{137}\text{Cs}$ , który ulega rozpadowi  $\beta^-$  z czasem połowicznego zaniku 30,2 lat. W roku 1996 szacowano, że całkowita aktywność na skażonym obszarze o powierzchni  $2,6 \cdot 10^5 \text{ km}^2$  wynosi około  $1 \cdot 10^{16} \text{ Bq}$ . Założymy, że promieniotwórczy cez jest równomiernie rozłożony na podanym obszarze, a elektrony emitowane w rozpadzie  $\beta$  z równym prawdopodobieństwem biegą prosto w góre lub w dół. Ile elektronów z rozpadu  $\beta$  pochłonęłoby twoje ciało, jeżeli leżałyś przez godzinę na ziemi a) w 1996 roku, b) obecnie? (Musisz oszacować pole przekroju swojego ciała).

81. W październiku 1992 roku szwajcarska policja aresztowała dwóch mężczyzn, którzy zamierzali przemyścić osm z Europy Wschodniej, a następnie sprzedać go na czarnym rynku. Jednakże przez pomyłkę przemytnicy wzięli ze sobą cez  $^{137}\text{Cs}$ . Każdy z nich miał w kieszeni próbkę tego izotopu o masie 1,0 g. Ile wynosiła aktywność takiej próbki w bekerach i kiurach? Czas połowicznego zaniku  $^{137}\text{Cs}$  wynosi 30,2 lat. (W lecznictwie stosuje się próbki tego izotopu promieniotwórczego o aktywności co najwyżej kilku milikiurów).



Rys. 43.16. Zadanie 82

**82.** Na rysunku 43.16 przedstawiono fragment schematu rozpadu promieniotwórczego nuklidu  $^{237}\text{Np}$  na wykresie we współrzędnych A-Z. Punkty na wykresie to izotopy, a pięć odcinków pomiędzy nimi odpowiadają rozpadowi  $\alpha$  albo  $\beta^-$ . Jaki izotop znajduje się na końcu linii (na rysunku 43.16 oznaczono go znakiem zapytania)?

**83.** Izotop  $^{40}\text{K}$  o czasie połowicznego zaniku  $1,26 \cdot 10^9$  lat może ulegać rozpadowi na wapń  $^{40}\text{Ca}$  lub argon  $^{40}\text{Ar}$ . W wyniku rozpadu wapń i argon powstają w stosunku  $8,54 : 1 = 8,54$ . Próbka w chwili początkowej zawierała tylko potas  $^{40}\text{K}$ . Obecnie zawiera ona równe ilości potasu i argonu, czyli stosunek K do Ar jest równy  $1 : 1 = 1$ . Jaki jest wiek próbki? (Wskazówka: Potraktuj to zadanie jak inne dotyczące datowania wykorzystującego rozpad promieniotwórczy, z tym że tu mamy dwa produkty rozpadu zamiast jednego).

**84.** Powietrze w niektórych jaskiniach zawiera znaczne ilości radonu, który wdychany przez dłuższy czas może powodować raka płuc. W Wielkiej Brytanii w jaskini zawierającej największe stężenie radonu jego aktywność na jednostkę objętości wynosi

$1,55 \cdot 10^5 \text{ Bq/m}^3$ . Założymy, że spędzasz w jaskini dwie pełne doby (śpisz w jej wnętrzu). Ile wynosi przybliżona liczba atomów radonu  $^{222}\text{Rn}$ , które w tym czasie przeszłyby przez twoje płuca z wdychanym i wydychanym powietrzem? Izotop promieniotwórczy  $^{222}\text{Rn}$  występujący w radonie ma czas połowicznego zaniku 3,82 dnia. Musisz oszacować objętość swoich płuc i częstotliwość oddychu.

**85.** Jądro  $^7\text{Li}$  porusza się z energią kinetyczną 3,00 MeV w kierunku jądra  $^{232}\text{Th}$ . Ile będzie wynosiła najmniejsza odległość międzypomiędzy środkami obydwu jąder, przy założeniu, że znacznie cięższe jądro  $^{232}\text{Th}$  się nie poruszy?

**86.** Ile wynosi energia wiązania nukleonu w jądrze  $^{262}\text{Bh}$ ? Masa atomu wynosi 262,1231 u.

**87.** Po ilu latach aktywność próbki izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  zmniejszy się do 0,020 wartości początkowej? Czas połowicznego zaniku izotopu  $^{14}\text{C}$  wynosi 5730 lat.

**88.** Ile wynosi aktywność próbki izotopu  $^{92}\text{Kr}$  o masie 20 ng, jeżeli jego czas połowicznego zaniku wynosi 1,84 s?

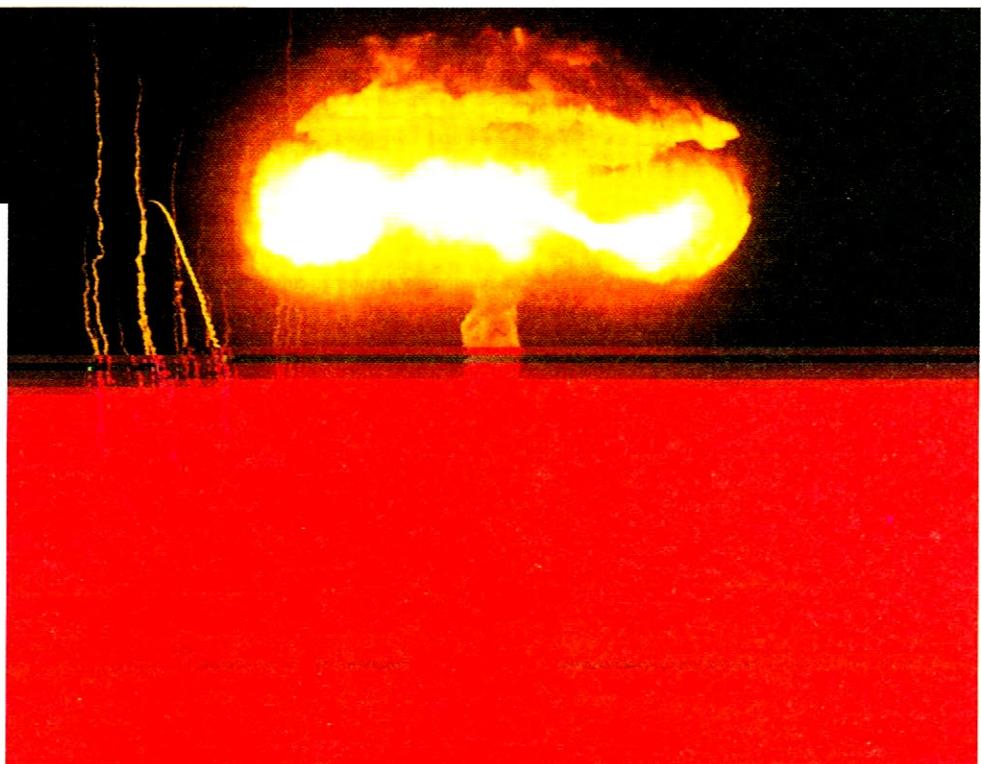
# 44 Energia jądrowa

Od końca II wojny światowej obraz grzyba atomowego wprawia ludzi w przerażenie.

Kiedy Robert Oppenheimer, szef zespołu naukowców, którzy zbudowali pierwszą bombę atomową, ujrzał jej eksplozję, wypowiedział słowa pochodzące ze świętej księgi hinduizmu: „Teraz stałem się Śmiercią, niszczycielem światów”.

Jakie jest fizyczne  
wytlumaczenie  
obrazu, który  
przeraża świat?

Odpowiedź znajdziesz w tym  
rozdiale.



## 44.1. Atom i jego jądro

Kiedy czerpiemy energię, spalając w piecu węgiel, to w rzeczywistości manipujemy atomami węgla i tlenu tak, że konfiguracja ich zewnętrznych elektronów zmienia się na bardziej trwałą. Kiedy czerpiemy energię, „spalając” w reaktorze jądrowym uran, to manipujemy jądrami, zmieniając na bardziej trwałą konfigurację nukleonów.

Elektryny utrzymuje w atomie elektromagnetyczna siła kulombowska, a do oderwania jednego z nich potrzeba zaledwie kilku elektronowoltów. Nukleony w jądrze utrzymuje oddziaływanie silne, a oderwanie jednego z nich wymaga milionów elektronowoltów. Czynnik rzędu kilku milionów tłumaczy, dlaczego z kilograma uranu można otrzymać o wiele więcej energii niż z kilograma węgla.

Uwalnianiu energii w procesie spalania atomów lub jąder towarzyszy ubytek masy, wyrażony równaniem  $Q = -\Delta mc^2$ . Podstawowa różnica pomiędzy spalaniem uranu a spalaniem węgla polega na tym, że w pierwszym przypadku wykorzystuje się znacznie większą część dostępnej masy (znowu o czynnik rzędu kilku milionów).

Różne procesy odpowiedzialne za spalanie atomów i jąder dają różne rzędy mocy, czyli szybkości dostarczania energii. W procesie jądrowym kilogram uranu można spalić szybko, detonując bombę, albo powoli — w reaktorze. W procesie atomowym może to być eksplozja laski dynamitu albo powolne trawienie zjedzonego pączka.

Energia wyzwalana przez 1 kg materii

Rodzaj materii	Proces	Czas świecenia żarówki o mocy 100 W
Woda	spadek wody z wysokości 50 m	5 s
Węgiel	spalanie	8 h
Wzbogacony $\text{UO}_2$	rozszczepienie w reaktorze	690 a
$^{235}\text{U}$	całkowite rozszczepienie	$3 \cdot 10^4$ a
Gorący gazowy deuter	całkowita synteza	$3 \cdot 10^4$ a
Materia i antymateria	całkowita anihilacja	$3 \cdot 10^7$ a

W tabeli 44.1 pokazano, jaką energię można uzyskać z kilograma materii podanej różnym procesom. Zamiast jednak podać wyniki w prost w jednostkach energii, przeliczono je na czas świecenia stuwatowej żarówki. Tylko trzy pierwsze wiersze tabeli opisują przemiany, które zrealizowano. Pozostałe trzy wiersze mówią o granicach, których w praktyce nie można osiągnąć. Ostatni wiersz — całkowita wzajemna anihilacja materii i antymaterii — dotyczy najbardziej efektywnego procesu wyzwalania energii. W jego rezultacie cała masa spoczynkowa ulega przemianie na inne formy energii.

Pamiętajmy, że wartości podane w tabeli 44.1 obliczono dla jednostkowej masy. Z kilograma uranu można uzyskać kilka milionów razy więcej energii niż z kilograma węgla lub spadającej wody. Z drugiej strony, skorupa ziemska zawiera olbrzymie ilości węgla, a tamy pozwalają spiętrzyć wielkie masy wody.

## 44.2. Rozszczepienie jądra: podstawy procesu

W roku 1932 angielski fizyk James Chadwick odkrył neutron. Kilka lat później pracujący w Rzymie Enrico Fermi zauważył, że w trakcie bombardowania różnych pierwiastków za pomocą neutronów powstają nowe pierwiastki promieniotwórcze. Fermi przewidział, że neutron, który jest pozbawiony ładunku, może się okazać bardzo skutecznym pociskiem w skali jądrowej. W odróżnieniu od protonu lub cząstki  $\alpha$  na zbliżający się do powierzchni jądra neutron nie działa siła odpychania kulombowskiego. Nawet *neutrony termiczne* — powolne neutryny, będące w równowadze termodynamicznej z materią w temperaturze pokojowej i o średniej energii kinetycznej bliskiej 0,04 eV — są użytecznymi pociskami w badaniach jądrowych.

Pod koniec lat trzydziestych XX wieku fizyczka Lise Meitner i chemicy Otto Hahn oraz Fritz Strassmann kontynuowali w Berlinie prace Fermiego i jego współpracowników, bombardując za pomocą neutronów termicznych roztwór soli uranu. Zauważyli wtedy, że pojawiło się kilka nowych izotopów promieniotwórczych. W roku 1939, w wielokrotnie powtarzanych próbach, udało się zidentyfikować jeden z nich jako bar. Hahn i Strassmann nie mogli jednak zrozumieć, w jaki sposób ten pierwiastek o średniej masie ( $Z = 56$ ) mógł powstać w wyniku bombardowania uranu ( $Z = 92$ ) za pomocą neutronów.

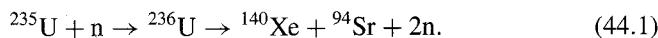
Zagadkę tę kilka tygodni później rozwiązała Meitner wraz ze swoim siostrzeńcem Otto Frischem. Zaproponowali oni mechanizm, w którym jądro uranu po zaabsorbowaniu neutronu termicznego dzieliło się — uwalniając energię — na dwa z grubsza jednakowe fragmenty, z których jeden mógł być na przykład jądrem baru. Frisch nazwał ten proces **rozszczepieniem jądra**.

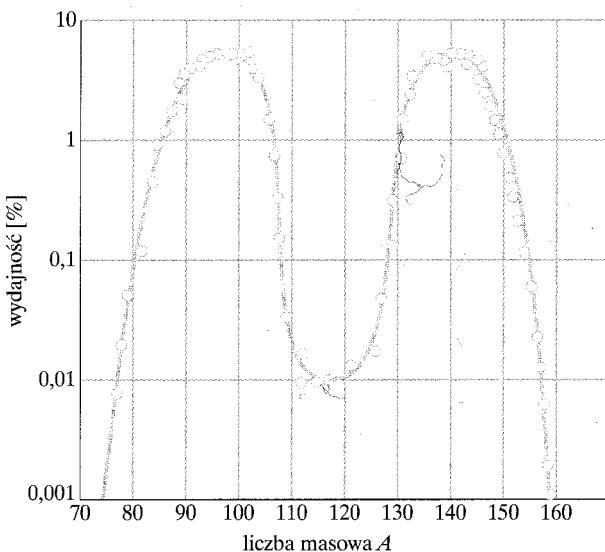
Kluczowa rola Meitner w odkryciu rozszczepienia nie była w pełni doceniana aż do chwili, kiedy niedawne badania historyczne rzuciły na jej dokonania nowe światło. Nie została ona laureatem Nagrody Nobla, którą w 1944 roku wybrano Otto Hahna. Jednakże zarówno Hahn, jak i Meitner zostali upamiętnieni przez nazwanie na ich cześć nowych pierwiastków: hahnu (symbol Ha,  $Z = 105$ ) oraz meitneru (symbol Mt,  $Z = 109$ ).

### Blższe spojrzenie na rozszczepienie

Na rysunku 44.1 przedstawiono rozkład częstości powstawania fragmentów o różnych liczbach masowych pod wpływem bombardowania nuklidu  $^{235}\text{U}$  neutronami termicznymi. Najbardziej prawdopodobne liczby masowe, dla których zachodzi około 7% wszystkich zdarzeń, skupiają się wokół wartości  $A \approx 95$  oraz  $A \approx 140$ . Co ciekawe, widoczny na rysunku 44.1 rozkład o dwóch maksimach nadal pozostaje nie wyjaśniony.

W typowym procesie rozszczepienia jądro  $^{235}\text{U}$  absorbuje neutron termiczny i przekształca się w silnie wzbudzone jądro złożone  $^{236}\text{U}$ . Właśnie to jądro ulega rozszczepieniu na dwa fragmenty. Powstałe produkty szybko emittują dwa neutryny, dając w wyniku rozszczepienia (w typowym przypadku) jądra  $^{140}\text{Xe}$  ( $Z = 54$ ) oraz  $^{94}\text{Sr}$  ( $Z = 38$ ). Sumaryczne równanie opisujące rozszczepienie ma więc postać





Rys. 44.1. Rozkład mas fragmentów powstacych w wyniku rozszczepienia nuklidu  $^{235}\text{U}$ . Zwróć uwagę, że oś pionowa jest w skali logarytmicznej

Zauważmy, że podczas tworzenia się i rozszczepienia jądra złożonego jest zachowana liczba protonów i liczba neutronów (a więc także ich łączna liczba i wypadkowy ładunek).

Występujące w równaniu (44.1) fragmenty  $^{140}\text{Xe}$  i  $^{94}\text{Sr}$  są bardzo nietrwałe i ulegają rozpadowi  $\beta$  (neutron przemienia się w proton, czemu towarzyszy emisja elektronu oraz neutriona) aż do powstania trwałych produktów końcowych. Dla ksenonu łańcuch przemian wygląda następująco:

$^{140}\text{Xe} \rightarrow ^{140}\text{Cs} \rightarrow ^{140}\text{Ba} \rightarrow ^{140}\text{La} \rightarrow ^{140}\text{Ce}$					
$T_{1/2}$	14 s	64 s	13 d	40 h	trwały
Z	54	55	56	57	58

(44.2)

Dla strontu łańcuch ma postać

$^{94}\text{Sr} \rightarrow ^{94}\text{Y} \rightarrow ^{94}\text{Zr}$				
$T_{1/2}$	75 s	19 min	trwały	
Z	38	39	40	

(44.3)

Zgodnie z tym, czego powinniśmy oczekwać na podstawie paragrafu 43.5, liczby masowe (140 i 94) fragmentów nie zmieniają się w kolejnych rozpadach  $\beta$ , a liczby atomowe (początkowo 54 i 38) zwiększały się w każdym kolejnym kroku o jeden.

Przeglądając się pasmu trwałości nuklidów na mapie z rysunku 43.4, widać, dlaczego produkty rozszczepienia nie są trwałe. Nuklid  $^{236}\text{U}$  ulegający rozszczepieniu w reakcji (44.1) zawiera 92 protony oraz 236 – 92, czyli 144 neutrony, co daje stosunek liczby neutronów do liczby protonów zbliżony do 1,6. Pierwotne fragmenty powstałe bezpośrednio w wyniku reakcji rozszczepienia mają z grubsza ten sam stosunek liczby protonów i neutronów. Jednakże trwałe nuklidы o średnich masach mają mniejsze stosunki liczby neutronów i protonów. Pierwotne fragmenty są więc bogate w neutrony (zawierają zbyt wiele neutronów) i muszą się kilku z nich pozbyć — dwóch w przypadku reakcji (44.1). Te jądra także mają zbyt dużo neutronów, aby mogły być trwałe. Rozpad  $\beta$  umożliwia po-

zbycie się nadwyżki neutronów dzięki ich przemianie w protony, która zachodzi wewnątrz jądra.

Energię wyzwalaną w rozszczepieniu nuklidu o dużej masie można oszacować, rozważając energie wiązania nukleonów  $\Delta E_{\text{wn}}$  przed i po rozszczepieniu. Na początek zauważmy, że rozszczepienie zachodzi, ponieważ całkowita masa spoczynkowa się zmniejsza. Oznacza to, że energia wiązania nukleonu  $\Delta E_{\text{wn}}$  w produktach rozszczepienia wzrasta, a więc nukleony są silniej związane. Energia reakcji  $Q$  dla rozszczepienia jest więc równa

$$Q = \left( \frac{\text{całkowita końcowa}}{\text{energia wiązania}} \right) - \left( \frac{\text{początkowa}}{\text{energia wiązania}} \right). \quad (44.4)$$

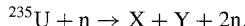
W naszym oszacowaniu założymy, że początkowe ciężkie jądro rozpada się na dwa jądra o średniej masie i jednakowej liczbie nukleonów. Możemy zapisać to tak

$$Q = \left( \frac{\text{końcowa}}{\Delta E_{\text{wn}}} \right) \left( \frac{\text{końcowa liczba}}{\text{nukleonów}} \right) - \left( \frac{\text{początkowa}}{\Delta E_{\text{wn}}} \right) \left( \frac{\text{początkowa liczba}}{\text{nukleonów}} \right). \quad (44.5)$$

Z rysunku 43.6 wynika, że w przypadku ciężkiego nuklidu ( $A \approx 240$ ) energia wiązania nukleonu jest zbliżona do 7,6 MeV/nukleon. Dla nuklidów o średniej masie ( $A \approx 120$ ) odpowiednia wartość to około 8,5 MeV/nukleon. Zatem energia wyzwalana w reakcji rozszczepienia ciężkiego jądra na dwa jądra o średniej masie wynosi

$$Q = \left( 8,5 \frac{\text{MeV}}{\text{nukleon}} \right) (2 \text{ jądra}) \left( 120 \frac{\text{nukleonów}}{\text{jądro}} \right) - \left( 7,6 \frac{\text{MeV}}{\text{nukleon}} \right) \left( 240 \frac{\text{nukleonów}}{\text{jądro}} \right) \approx 200 \text{ MeV}. \quad (44.6)$$

**SPRAWDZIAN 1:** Ogólne równanie reakcji rozszczepienia ma postać



Której z następujących par nuklidów nie można podstawić za X i Y: a)  $^{141}\text{Xe}$  i  $^{93}\text{Sr}$ ; b)  $^{139}\text{Cs}$  i  $^{95}\text{Rb}$ ; c)  $^{156}\text{Nd}$  i  $^{79}\text{Ge}$ ; d)  $^{121}\text{In}$  i  $^{113}\text{Ru}$ ?

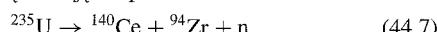
## Przykład 44.1

Oblicz energię rozpadu  $Q$  dla reakcji rozszczepienia wyrażonej równaniem (44.1), uwzględniając rozpady półproduktów opisane równaniami (44.2) i (44.3). Niektóre potrzebne do obliczeń masy atomowe:

$^{235}\text{U}$	235,0439 u	$^{140}\text{Ce}$	139,9054 u
n	1,008 67 u	$^{94}\text{Zr}$	93,9063 u

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że 1) energia rozpadu  $Q$  jest przekazywana produktom rozpadu w postaci energii kinetycznej i 2)  $Q = -\Delta mc^2$ , gdzie  $\Delta m$  jest zmianą masy. Ponieważ mamy uwzględnić rozpad fragmentów jądra powstałych w wyniku rozszczepienia, połączymy ze sobą równania (44.1), (44.2) i (44.3), co pozwoli nam uzyskać wypadkową reakcję rozpadu



W równaniu występuje tylko jeden neutron, ponieważ neutron

inicjujący reakcję — po lewej stronie równania (44.1) — redukuje się z jednym z dwóch neutronów po prawej stronie równania. Zmiana masy dla reakcji opisanej równaniem (44.7) wynosi

$$\begin{aligned} \Delta m &= (139,9054 \text{ u} + 93,9063 \text{ u} + 1,008 67 \text{ u}) - (235,0439 \text{ u}) \\ &= -0,223 53 \text{ u}, \end{aligned}$$

a odpowiadająca jej energia rozpadu

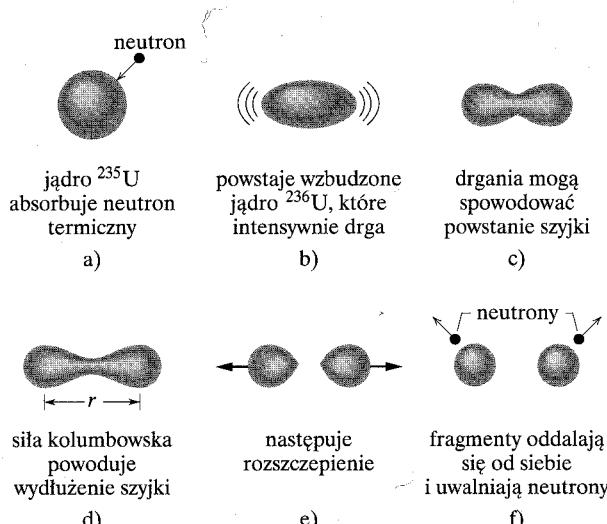
$$\begin{aligned} Q &= -\Delta mc^2 = -(-0,223 53 \text{ u})(931,5 \text{ MeV/u}) \\ &= 208 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

dobrze zgadza się z oszacowaniem opartym na równaniu (44.6).

Jeżeli reakcja rozszczepienia zachodzi w ciele stałym, główna część energii rozpadu, która początkowo ma postać energii kinetycznej produktów rozpadu, zamienia się na energię wewnętrzną ciała, co obserwujemy jako wzrost jego temperatury. Mniej więcej 5 lub 6 procent energii rozpadu otrzymują neutriny emitowane w rozpadzie  $\beta$  pierwotnych produktów rozszczepienia. Energia ta jest unoszona poza układ i tracona.

### 44.3. Model rozszczepienia jądra

Wkrótce po odkryciu rozszczepienia Niels Bohr i John Wheeler wyjaśnili jego podstawy, wykorzystując model kroplowy jądra (paragraf 43.8), oparty na analogii pomiędzy jądrem a naładowaną kroplą cieczy. Na rysunku 44.2 przedstawiono kolejne fazy rozszczepienia według tego modelu. Powolny (termiczny) neutron pochłonięty przez ciężkie jądro — niech to będzie  $^{235}\text{U}$  — wpada do studni potencjału związanego z oddziaływaniem silnym we wnętrzu jądra. Energia potencjalna neutronu ulega przemianie na energię wzbudzenia jądra (rys. 44.2b). Jest ona równa energii wiązania neutronu w jądrze  $E_n$ , która z kolei odpowiada zmianie masy spoczynkowej układu neutron–jądro związanej z absorpcją neutronu.

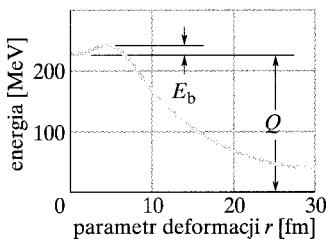


Rys. 44.2. Przebieg typowej reakcji rozszczepienia według modelu Bohra i Wheelera

Na rysunkach 44.2c i d pokazano, że jądro przypominające drgającą, naładowaną kroplę cieczy wcześniej czy później przybierze kształt hantli z krótką „szyjką” i zacznie dzielić się na dwie naładowane kule. Jeżeli odpychanie elektrostatyczne pomiędzy tymi kulami rozsunie je na tyle daleko, że „szyjka” ulegnie przerwaniu, obydwa fragmenty oddalają się, unosząc pewną szczątkową energię wzbudzenia (rys. 44.2e i f). W ten sposób nastąpi rozszczepienie jądra.

Przedstawiony model daje wiarygodny jakościowy obraz reakcji rozszczepienia. Trzeba jednak odpowiedzieć na trudne pytanie: Dlaczego niektóre ciężkie nuklidы (na przykład  $^{235}\text{U}$  lub  $^{239}\text{Pu}$ ) z łatwością rozszczepiają się pod wpływem neutronów termicznych, podczas gdy inne, równie ciężkie nuklidы (na przykład  $^{238}\text{U}$  lub  $^{243}\text{Am}$ ) zachowują się inaczej?

Bohr i Wheeler zdołali wyjaśnić ten problem. Na rysunku 44.3 przedstawiono wykres energii potencjalnej jądra na różnych etapach procesu rozszczepienia, wykonany na podstawie zaproponowanego przez nich modelu. Energię przedstawiono w zależności od parametru deformacji  $r$ , który opisuje odstępstwo drgającego jądra od kształtu sferycznego. Na rysunku 44.2d pokazano, jak można zdefiniować ten parametr tuż przed rozszczepieniem jądra. Kiedy frag-



Rys. 44.3. Energia potencjalna jądra na różnych etapach reakcji rozszczepienia według przewidywań modelu Bohra i Wheelera. Na wykresie zaznaczono energię rozszczepienia  $Q$  (około 200 MeV) i wysokość bariery  $E_b$

menty oddzieliły się już od siebie, parametr deformacji jest równy odległości pomiędzy ich środkami.

Na rysunku 44.3 zaznaczono różnicę energii pomiędzy stanem początkowym i końcowym rozszczepiającego się jądra — czyli energię rozpadu  $Q$ . Z wykresu wynika, że dla pewnej wartości  $r$  krzywa energii potencjalnej osiąga maksimum. Widzimy więc, że rozszczepienie nastąpi, jeżeli istniejąca *bariera potencjału* o wysokości  $E_b$  zostanie pokonana — góram lub dzięki zjawisku tunelowemu. Przypomina to rozpad  $\alpha$  (rys. 43.9), który także powstrzymywał bariera potencjału.

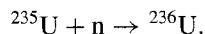
Jest oczywiste, że rozszczepienie dokona się tylko pod warunkiem, że zaabsorbowany neutron dostarczy energii wzbudzenia  $E_n$  o wartości wystarczającej do pokonania bariery. Energia ta nie musi dorównywać wysokości bariery  $E_b$ , ponieważ fizyka kwantowa dopuszcza tunelowanie.

#### Wyniki obliczeń rozszczepienia dla czterech nuklidów

Nuklid tarczy	Nuklid rozszczepiany	$E_n$ [MeV]	$E_b$ [MeV]	Rozszczepienie przez neutrony termiczne?
$^{235}\text{U}$	$^{236}\text{U}$	6,5	5,2	tak
$^{238}\text{U}$	$^{239}\text{U}$	4,8	5,7	nie
$^{239}\text{Pu}$	$^{240}\text{Pu}$	6,4	4,8	tak
$^{243}\text{Am}$	$^{244}\text{Am}$	5,5	5,8	nie

W tabeli 44.2 zawarto wyniki obliczeń dla czterech ciężkich nuklidów. Wyniki te pozwalają zorientować się, czy pochłonięty neutron termiczny może zainicjować rozszczepienie. Dla każdego nuklidu podano wysokość bariery  $E_b$  oraz wartość energii wzbudzenia  $E_n$  dla jądra powstałe w wyniku absorpcji neutronu. Wysokości bariery  $E_b$  zostały obliczone na podstawie teorii Bohra i Wheelera. Wartości  $E_n$  obliczono na podstawie zmiany masy spoczynkowej związanej z absorpcją neutronu.

Obliczenia energii wzbudzenia  $E_n$  przedstawimy na przykładzie pierwszego wiersza tabeli, który odnosi się do absorpcji neutronu przez nuklid  $^{235}\text{U}$



Potrzebne nam dane to masa nuklidu  $^{235}\text{U}$  równa 235,043 923 u, masa neutronu 1,008 665 u oraz masa nuklidu  $^{236}\text{U}$  równa 236,045 562 u. Łatwo obliczyć, że w rezultacie absorpcji neutronu masa zmniejsza się o  $7,026 \cdot 10^{-3}$  u. Energia związana ze zmianą masy jest przekazywana jako energia wzbudzenia  $E_n$ . Mnożąc zmianę masy przez  $c^2$  (= 931,5 MeV/u), otrzymujemy wartość  $E_n = 6,5$  MeV podaną w pierwszym wierszu tabeli.

Pierwszy i trzeci wiersz tabeli 44.2 mają głęboki kontekst historyczny, ponieważ tłumaczą, dlaczego dwie bomby atomowe użyte w II wojnie światowej zawierały uran  $^{235}\text{U}$  (pierwsza) i pluton  $^{239}\text{Pu}$  (druga). Dla obydwu wymienionych nuklidów —  $^{235}\text{U}$  oraz  $^{239}\text{Pu}$  — energia wzbudzenia jest większa od wysokości bariery  $E_n > E_b$ . Dlatego w obydwu przypadkach reakcję rozszczepienia może zainicjować absorpcja neutronu termicznego. Dla dwóch pozostałych nuklidów

( $^{238}\text{U}$  i  $^{243}\text{Am}$ ) mamy  $E_n < E_b$ , a więc pochłonięcie neutronu nie daje jądru wystarczającej energii, niezbędnej do przejścia nad barierą potencjału lub do pokonania jej na drodze tunelowania. Zamiast ulec rozszczepieniu, jądro pozbędzie się energii wzbudzenia, emitując foton  $\gamma$ .

Nuklidы  $^{238}\text{U}$  i  $^{243}\text{Am}$  mogą ulec rozszczepieniu pod warunkiem, że zaabsorują neutron o znacznie większej energii (w porównaniu z neutronem termicznym). Na przykład dla nuklidu  $^{238}\text{U}$  energia neutronów powinna wynosić co najmniej 1,3 MeV, aby ze znacznym prawdopodobieństwem mogło zachodzić *rozszczepienie przez neutrony przedkie*.

Obydwie bomby atomowe użyte w II wojnie światowej wykorzystywały zdolność neutronów termicznych do niemal jednoczesnego zainicjowania rozszczepienia olbrzymiej liczby jąder w rdzeniu bomby, co wyzwało energię w postaci wybuchu o niszczycielskich skutkach. W pierwszej bombie użyto izotopu uranu  $^{235}\text{U}$ , który zdołano wydzielić z rudy uranu w wystarczającej ilości do zbudowania jej, a jeszcze wcześniej bomby testowej. (Ruda uranu zawiera głównie izotop  $^{238}\text{U}$ , który — jak się wcześniej przekonaliśmy — nie ulega rozszczepieniu pod wpływem neutronów termicznych.) W drugiej bombie wobec braku wystarczającej ilości uranu  $^{235}\text{U}$  użyto plutonu  $^{239}\text{Pu}$ , opierając się tylko na obliczeniach teoretycznych, jak te z tabeli 44.2.

#### 44.4. Reaktor jądrowy

W wyniku rozszczepienia można uzyskiwać duże ilości energii pod warunkiem, że jeden akt rozszczepienia będzie wyzwalać następne, aby proces obejmował całe paliwo jądrowe, podobnie jak ogień trawi belkę. Fakt, że w wyniku reakcji rozszczepienia powstaje więcej neutronów, niż jest zużywanych, otwiera drogę do **reakcji łańcuchowej**, w której każdy wytwarzany neutron potencjalnie wyzwala kolejne rozszczepienie. Reakcja taka może zachodzić gwałtownie (jak w przypadku bomby atomowej) lub w sposób kontrolowany (jak w reaktorze jądrowym).

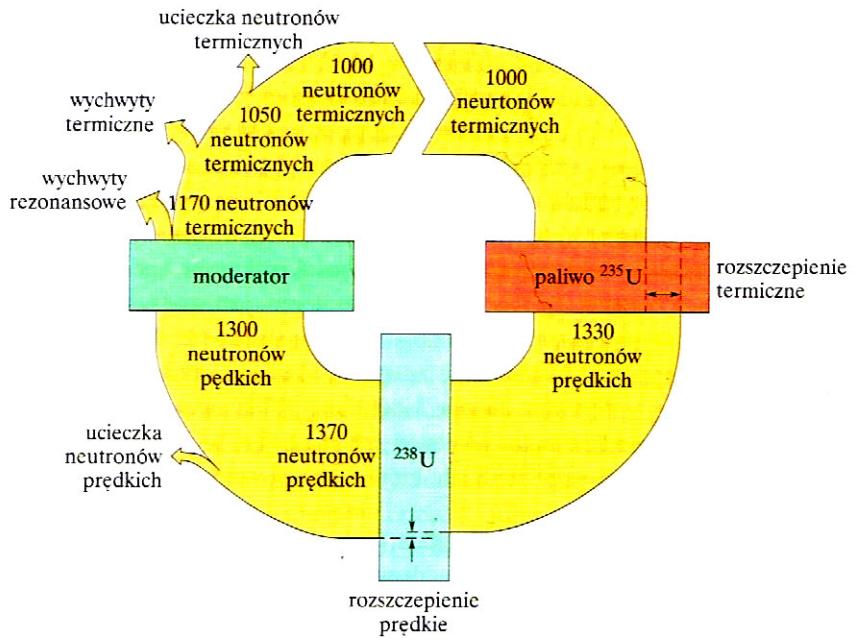
Wyobraźmy sobie, że chcemy zaprojektować reaktor wykorzystujący rozszczepienie uranu  $^{235}\text{U}$  pod wpływem neutronów termicznych. Ruda uranu zawiera 0,7% tego izotopu, a pozostałe 99,3% to izotop  $^{238}\text{U}$ , który nie ulega rozszczepieniu pod wpływem neutronów termicznych. Założymy, że dysponujemy sztucznie *wzbogaconym* paliwem uranowym zawierającym 3% izotopu  $^{235}\text{U}$ . Aby zbudować działający reaktor, musimy rozwiązać trzy problemy:

1. *Ucieczka neutronów.* Część neutronów powstałych w wyniku rozszczepienia będzie uciekać poza reaktor, nie dając wkładu do reakcji łańcuchowej. Ucieczka odbywa się z powierzchni, której pole jest proporcjonalne do kwadratu charakterystycznego rozmiaru reaktora (pole powierzchni sześcianu o krawędzi  $a$  jest równe  $6a^2$ ). Neutrony są jednak wytwarzane w całej objętości paliwa, a więc ich liczba zależy od trzeciej potęgi rozmiaru charakterystycznego (objętość rozważanego sześcianu to  $a^3$ ). Możemy dowolnie zmniejszyć ułamek traconych neutronów, budując reaktor o dużym rdzeniu, co redukuje stosunek jego powierzchni do objętości (=  $6/a$  dla sześcianu).

2. *Energia neutronów.* Reakcja rozszczepienia jest źródłem neutronów prędkich o energiach kinetycznych bliskich 2 MeV. Pamiętajmy jednak, że rozszczepienie najefektywniej wywołują neutrony termiczne. Neutrony prędkie można spowolnić, miesząc paliwo uranowe z pewną substancją — nazywaną **moderatorem** — która spełnia dwa warunki: po pierwsze, efektywnie spowalnia neutrony dzięki wielokrotnym zderzeniom sprężystym i po drugie, nie absorbuje neutronów, tzn. nie zmniejsza ich liczby w rdzeniu i nie eliminuje ich z reakcji rozszczepienia. W większości reaktorów energetycznych pracujących w Stanach Zjednoczonych moderatorem jest woda, a właściwie jądra wodoru — protony. W rozdziale 10 przekonaliśmy się, że poruszająca się cząstka zderzająca się centralnie ze spoczywającą cząstką o takiej samej masie oddaje jej *całą* swoją energię kinetyczną. Widzimy więc, że protony są efektywnym moderatorem, ponieważ ich masa jest w przybliżeniu taka sama, jak masa neutronów prędkich, które mają spowalniać.
3. *Wychwyt neutronów.* Neutrony prędkie (2 MeV) powstałe w wyniku rozszczepienia i spowalniane przez moderator do energii termicznych (około 0,04 eV) muszą po drodze pokonać krytyczny przedział energii (od 1 do 100 eV), w którym są szczególnie podatne na wychwyt przez jądra  $^{238}\text{U}$  nie prowadzący jednak do rozszczepienia. Taki *wychwyt rezonansowy*, któremu towarzyszy emisja promieniowania  $\gamma$ , eliminuje neutrony z łańcucha rozszczepienia. Aby zredukować prawdopodobieństwo niepożądanego wychwytu neutronów, paliwo uranowe i moderator nie są dosłownie zmieszane, ale tworzą „przekładaniec”, zajmując różne miejsca w objętości reaktora.

W typowym reaktorze paliwo ma postać pastylek wykonanych z tlenku uranu, umieszczonych jedna za drugą w długich, pustych w środku metalowych rurkach. Ciekły moderator otacza wiązki tych **prtów paliwowych**, tworząc wraz z nimi **rdzeń** reaktora. Taka geometria zwiększa prawdopodobieństwo, że neutrony prędkie wytwarzane w prtach paliwowych znajdą się w moderatorze w chwili, kiedy ich energia będzie mieć wartość z krytycznego przedziału. Gdy neutrony osiągną już energie termiczne, nadal mogą ulegać wychwytom, które nie prowadzą do rozszczepienia (*wychwyt neutronów termicznych*). Jednakże jest znacznie bardziej prawdopodobne, że neutrony takie powrócą do pręta paliwowego i spowodują rozszczepienie jądra.

Na rysunku 44.4 przedstawiono bilans neutronów dla typowego energetycznego reaktora jądrowego, pracującego ze stałą mocą. Prześledźmy losy 1000 neutronów termicznych w rdzeniu reaktora dla jednego pełnego cyklu, czyli *pokolenia*. Powodują one powstanie 1330 neutronów w wyniku rozszczepienia paliwa  $^{235}\text{U}$  oraz 40 neutronów na skutek prędkiego rozszczepienia uranu  $^{238}\text{U}$ . Mamy więc razem o 370 neutronów więcej niż na początku, przy czym wszystkie te neutrony są prędkie. Kiedy reaktor pracuje ze stałą mocą, dokładnie taka sama liczba neutronów (370) jest tracona w wyniku ucieczki z rdzenia lub wychwytów nie prowadzących do rozszczepienia, co daje nam 1000 neutronów termicznych na początku następnego pokolenia. W ciągu cyklu każdy z 370 neutronów powstały w wyniku rozszczepienia pozostawia swą energię w rdzeniu reaktora, a więc powoduje jego ogrzanie.

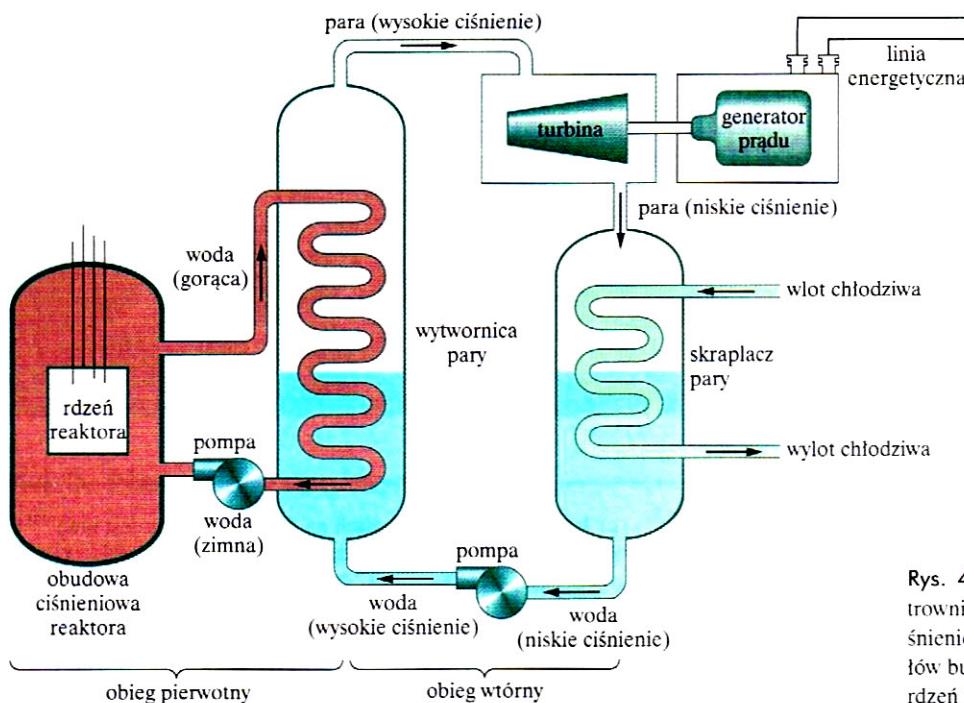


Rys. 44.4. Bilans neutronów w reaktorze. Pokolenie liczące 1000 neutronów termicznych oddziałuje z paliwem, czyli  $^{235}\text{U}$ , matrycą  $^{238}\text{U}$  oraz z moderatorem. W wyniku reakcji rozszczepienia powstaje 1370 neutronów; 370 z nich jest traconych w rezultacie ucieczki z rdzenia lub wychwytów, które nie prowadzą do rozszczepienia. Pozostaje więc 1000 neutronów termicznych, które tworzą kolejne pokolenie. Rysunek wykonał dla reaktora pracującego ze stałą mocą

Ważnym parametrem reaktora jest *współczynnik mnożenia*  $k$ , który wyraża stosunek liczby neutronów na początku danego pokolenia do liczby neutronów na początku poprzedniego pokolenia. W przypadku przedstawionym na rysunku 44.4 współczynnik mnożenia wynosi  $1000/1000$ , czyli dokładnie 1. Jeżeli  $k = 1$ , to mówimy, że reaktor pracuje w stanie *krytyczny*, czyli takim, jaki jest wymagany, aby jego moc była stała. Zwykle jednak reaktory projektuje się tak, aby mogły osiągnąć stan *nadmocytyczny* ( $k > 1$ ). Współczynnik mnożenia reguluje się, aby reaktor stał się krytyczny, za pomocą **prętów sterujących** wsuwanych do rdzenia. Pręty te, wykonane z materiałów efektywnie pochłaniających neutrony, jak na przykład kadm, można wsuwać głębiej, aby zmniejszyć moc reaktora, albo wysuwać, zwiększając moc lub kompensując skłonność reaktora do przechodzenia w stan *podkrytyczny*, spowodowany gromadzeniem się w rdzeniu produktów rozszczepienia (absorbujących neutrony) podczas okresów pracy ciągłej.

Jak szybko wzrosłaby moc reaktora, gdyby nagle usunąć z rdzenia jeden z prętów sterujących? Okazuje się, że o wartości *czasu reakcji* decyduje niewielka część neutronów, które nie pojawiają się natychmiast po rozszczepieniu jąder, lecz nieco później, kiedy powstałe fragmenty ulegają rozpadowi  $\beta$ . Spośród 370 „nowych” neutronów uwzględnionych w bilansie na rysunku 44.4 około 16 to neutrony opóźnione emitowane w rozpadach  $\beta$  jąder, których czas połowicznego zaniku waha się od 0,2 do 55 s. Neutrony opóźnione są wprawdzie nieliczne, ale to one zwiększały czas reakcji reaktora na zmianę położenia prętów sterujących i pozwalają dopasować go do czasu działania elementów mechanicznych.

Na rysunku 44.5 przedstawiono schemat elektrowni wyposażonej w najczęściej stosowany reaktor wodny ciśnieniowy. W reaktorze tego typu woda jest jednocześnie moderatorem i chłodziwem. W *obiegu pierwotnym* gorąca woda pod wysokim ciśnieniem (około 600 K i 150 atm) przepływa przez reaktor i pośredni-

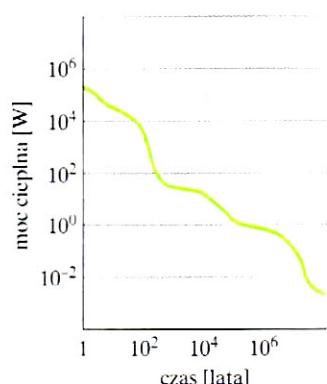


Rys. 44.5. Uproszczony schemat elektrowni jądrowej z reaktorem wodnym ciśnieniowym. Pominęto wiele szczegółów budowy — w tym układy chłodzące rdzeń reaktora w razie awarii

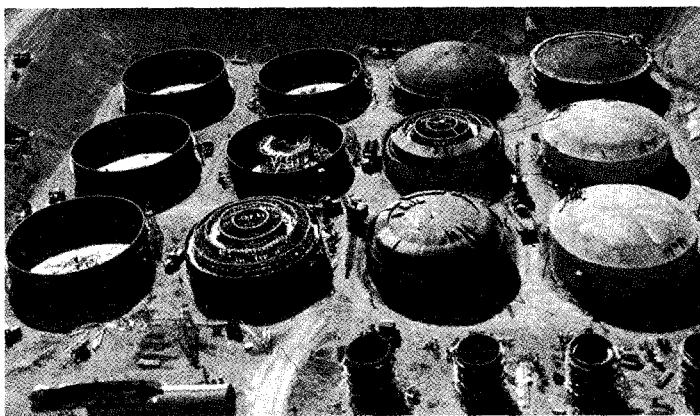
czy w wymianie ciepła pomiędzy rdzeniem a wytwarznicą pary, która jest częścią obiegu wtórnego. Para pod wysokim ciśnieniem pochodząca z wytwarzni napędza turbinę, a te z kolei generatory prądu. Po przejściu przez turbinę rozprężona para o niskim ciśnieniu jest chłodzona i po skropleniu pompowana z powrotem do wytwarzni pary. Pewne wyobrażenie o wielkości układu zyskamy, poznając kilka charakterystycznych liczb: typowy reaktor o mocy 1000 MW używany w elektrowni jądrowej ma wysokość 12 m i ciężar 4 MN, a szybkość przepływu wody w obiegu pierwotnym wynosi około 1 Mi/min.

Nieuniknionym skutkiem pracy reaktora jądrowego są odpady promieniotwórcze, zawierające produkty rozszczepienia oraz ciężkie jądra *transuranowców*, takich jak pluton i ameryk. Miarą ich radioaktywności jest szybkość wydzielania energii termicznej. Na rysunku 44.6 przedstawiono wykres mocy wyzwalanej w postaci ciepła przez odpady wytworzone w ciągu roku przez elektrownię jądrową średniej wielkości. Większość zużytych prętów paliwowych z reaktorów energetycznych przechowuje się na miejscu, zanurzone w wodzie. Bezpieczne, stałe składowiska odpadów trzeba dopiero wybudować.

Znaczną część odpadów promieniotwórczych powstały przy produkcji broni atomowej podczas II wojny światowej i w latach następnych składa się także w miejscu ich powstania. Na rysunku 44.7 widzimy na przykład budowę podziemnych zbiorników w Hanford Site w stanie Washington. Każdy z nich może zmieścić 1 Mi ciekłych odpadów o dużej radioaktywności. Obecnie na składowisku tym są 152 takie zbiorniki. Oprócz tego zakopano tam duże ilości odpadów stałych zarówno tych o słabej radioaktywności (na przykład skażone ubrania ochronne), jak i silnie radioaktywnych (rdzenie reaktorów złomowanych atomowych okrętów podwodnych).



Rys. 44.6. Moc cieplna wyzwalana w czasie rozpadu odpadów promieniotwórczych nagromadzonych w czasie rocznej pracy typowej elektrowni jądrowej. Przebieg krzywej jest wynikiem nałożenia efektów związanych z rozpadem wielu nuklidów o różnych czasach połowicznego zaniku. Zwróćcie uwagę, że obydwie osie wykresu mają skalę logarytmiczną



Rys. 44.7. Zestaw podziemnych zbiorników w Hanford Site (stan Waszyngton) w trakcie budowy w latach II wojny światowej. Zwróć uwagę na robotników i ciężarówki widoczne na zdjęciu. Każdy zbiornik mieści obecnie 1 Mi odpadów o wysokim poziomie radioaktywności

## Przykład 44.2

W dużej elektrowni jądrowej pracuje reaktor wodny ciśnieniowy. Moc cieplna rdzenia reaktora wynosi 3400 MW, a wytwarzana moc elektryczna 1100 MW. 57 000 prętów paliwowych zawiera  $8,60 \cdot 10^4$  kg uranu w postaci tlenku uranu. Uran jest wzbogacony tak, aby zawierał 3,0% izotopu  $^{235}\text{U}$ .

a) Ile wynosi sprawność elektrowni?

### ROZWIĄZANIE:

Przypomnijmy sobie definicję sprawności elektrowni lub jakiegokolwiek innego układu przetwarzającego energię: sprawność to stosunek mocy wyjściowej (szybkości, z jaką układ dostarcza użyteczną energię) do mocy wejściowej (szybkości, z którą energia musi być dostarczana do układu). Definicję sprawności oznaczanej symbolem  $\eta$  zapisujemy w postaci

$$\eta = \frac{\text{energia użyteczna}}{\text{energia dostarczana}} = \frac{1100 \text{ MW (energia elektryczna)}}{3400 \text{ MW (ciepło)}} \\ = 0,32, \quad \text{czyli } 32\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

O sprawności — jak w przypadku wszystkich elektrowni — decyduje druga zasada termodynamiki. Podeczas pracy opisanej elektrowni moc równą 3400 MW – 1100 MW trzeba odprowadzić w postaci ciepła do otoczenia.

b) Jaka jest szybkość reakcji  $R$  rozszczepienia w rdzeniu reaktora?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

- 1) wszystkie zachodzące rozszczepienia dają razem moc  $P$  równą 3400 MW,
- 2) zgodnie z równaniem (44.6) energia  $Q$  wydzielana w pojedynczym akcie rozszczepienia wynosi około 200 MeV. Jeżeli elektrownia pracuje ze stałą mocą  $P$ , otrzymamy

$$R = \frac{P}{Q} = \left( \frac{3,4 \cdot 10^9 \text{ J/s}}{200 \text{ MeV/proces}} \right) \left( \frac{1 \text{ MeV}}{1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J}} \right) \\ = 1,06 \cdot 10^{20} \text{ procesy rozszczepienia/s} \\ \approx 1,1 \cdot 10^{20} \text{ procesy rozszczepienia/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jak szybko (w kilogramach na dobę) zużywany jest uran  $^{235}\text{U}$  w paliwie? Obliczenia wykonaj dla chwili początkowej.

### ROZWIĄZANIE:

Wiemy, że ~~uran~~ uran  $^{235}\text{U}$  zużywa się w dwóch procesach: 1) rozszczepienia, którego szybkość obliczyliśmy w punkcie (b) oraz 2) wychwytu neutronu nie prowadzącego do rozszczepienia i zchodzącego około cztery razy wolniej. Wynika stąd, że łączna szybkość zużycia uranu  $^{235}\text{U}$  jest równa

$$(1 + 0,25)(1,06 \cdot 10^{20} \text{ atom/s}) = 1,33 \cdot 10^{20} \text{ atom/s.}$$

Do dalszych obliczeń potrzebujemy masę atomu uranu  $^{235}\text{U}$ . Nie możemy skorzystać z masy molowej uranu podanej w dodatku F, ponieważ odpowiada ona najbardziej rozpowszechnionemu izotopowi uranu o liczbie masowej 238. Zamiast tego przyjmiemy, że masa każdego atomu  $^{235}\text{U}$  wyrażona w atomowych jednostkach masy jest równa jego liczbie masowej  $A$ . Masa atomu izotopu  $^{235}\text{U}$  jest zatem równa 235 u ( $= 3,90 \cdot 10^{-25}$  kg). Uranu  $^{235}\text{U}$  ubywa więc z szybkością

$$\frac{dM}{dt} = (1,33 \cdot 10^{20} \text{ atom/s})(3,90 \cdot 10^{-25} \text{ kg}) \\ = 5,19 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s} \approx 4,5 \text{ kg/d.} \quad (\text{odpowiedź})$$

d) Na jak długo wystarczy zapas uranu  $^{235}\text{U}$ , jeżeli będzie on zużywany z obliczoną szybkością?

### ROZWIĄZANIE:

Wiemy, że w chwili początkowej masa izotopu  $^{235}\text{U}$  wynosi 3,0% z  $8,6 \cdot 10^4$  kg uranu zawartego w tlenku uranu. ~~uran~~ czas  $T$  potrzebny do zużycia całej masy uranu  $^{235}\text{U}$  ze stałą szybkością równą 4,5 kg/d wynosi zatem

$$T = \frac{(0,030)(8,6 \cdot 10^4 \text{ kg})}{4,5 \text{ kg/d}} \approx 570 \text{ d.} \quad (\text{odpowiedź})$$

W rzeczywistości pręty paliwowe trzeba wymieniać całymi partiami, zanim jeszcze wyczerpie się zawarty w nich zapas uranu  $^{235}\text{U}$ .

e) Ile wynosi szybkość przemiany masy na inne formy energii w reakcji rozszczepienia uranu  $^{235}\text{U}$  w rdzeniu reaktora?

## ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że zamiana masy na inne formy energii zachodzi tylko w wyniku rozszczepienia, które daje moc 3400 MW, a nie w wyniku wychwytu neutronów (choćże proces ten powoduje zużycie paliwa). Korzystając ze wzoru Einsteina  $E = mc^2$ , możemy napisać

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dE/dt}{c^2} = \frac{3.4 \cdot 10^9 \text{ W}}{(3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 3.8 \cdot 10^{-8} \text{ kg/s} = 3.3 \text{ g/d.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Widzimy, że przemiana masy na inne formy energii odbywa się

z szybkością odpowiadającą z grubsza „znikaniu” jednej monety dziennie, czyli znacznie wolniej niż wynosi zużycie paliwa obliczone w punkcie (c).

**SPRAWDZIAN 2:** W rozwiązany przykładzie przekonaliśmy się, że moc elektryczna wytwarzana w elektrowni jądrowej ( $P_{\text{gen}} = 1100 \text{ MW}$ ) jest mniejsza niż moc oddawana do środowiska ( $P_{\text{srod}} = 2300 \text{ MW}$ ). Czy druga zasada termodynamiki: a) wymaga, aby wartość  $P_{\text{gen}}$  była zawsze mniejsza niż  $P_{\text{srod}}$ ; b) pozwala, aby wartość  $P_{\text{gen}}$  była większa niż  $P_{\text{srod}}$ ; c) pozwala, aby moc  $P_{\text{srod}} = 0$  w przypadku zoptymalizowanej konstrukcji reaktora?

## 44.5. Naturalny reaktor jądrowy

Kiedy 2 grudnia 1942 roku Enrico Fermi i jego współpracownicy uruchamiali swój reaktor jądrowy (rys. 44.8), mieli prawo sądzić, że to pierwszy taki reaktor w dziejach Ziemi. Mniej więcej 30 lat później okazało się, że było inaczej.



Rys. 44.8. Obraz przedstawiający pierwszy reaktor jądrowy zbudowany w latach II wojny światowej przez zespół pod kierownictwem Enrica Fermiego w hali sportowej uniwersytetu w Chicago. Reaktor, który osiągnął stan krytyczny 2 grudnia 1942 roku, zbudowano z kostek uranu poprzedzanych blokami grafitu. Posłużył on jako prototyp późniejszych reaktorów, wykorzystywanych do produkcji plutonu przeznaczonego dla rozszczepialnych głowic bojowych

Około dwa miliardy lat temu w złożach uranu, eksploatowanych obecnie na terytorium Gabonu w Afryce Zachodniej, zaczął działać reaktor, w którym samoistnie rozwinęła się łańcuchowa reakcja rozszczepienia. Pracował on kilkaset tysięcy lat. Przekonamy się, jak było to możliwe, rozważając odpowiedzi na dwa pytania:

1. *Czy ilość paliwa była dostatecznie duża?* W reaktorze wykorzystującym reakcję rozszczepienia uranu paliwem jest izotop  $^{235}\text{U}$ , którego częstość występowania w warunkach naturalnych wynosi 0,72%. Taki wynik dają pomiary wykonywane dla skał pochodzących ze skorupy ziemskiej, powierzchni Księżyca i meteorytów. Do odkrycia w Afryce Zachodniej doprowadziło spostrzeżenie, że tamtejsze złoża wykazują niedobór izotopu  $^{235}\text{U}$  — w niektórych próbkach jego zawartość wynosi zaledwie 0,44%. W wyniku badań wysunięto hipotezę, że niską zawartość uranu  $^{235}\text{U}$  można wytlumaczyć, jeżeli się przyjmie, że w pewnym okresie izotop  $^{235}\text{U}$  został zużyty w wyniku reakcji rozszczepienia zachodzącej w samoistnym reaktorze.

Problem polega na tym, że naturalna zawartość izotopu  $^{235}\text{U}$  (0,72%) wystarcza, aby uruchomić reaktor — przekonał się o tym Fermi i jego współpracownicy — tylko pod warunkiem jego przemyślanej i dopracowanej w szczegółach konstrukcji. Wydaje się nieprawdopodobne, aby reaktor jądrowy bez wzbogaconego paliwa mógł samoistnie osiągnąć stan krytyczny.

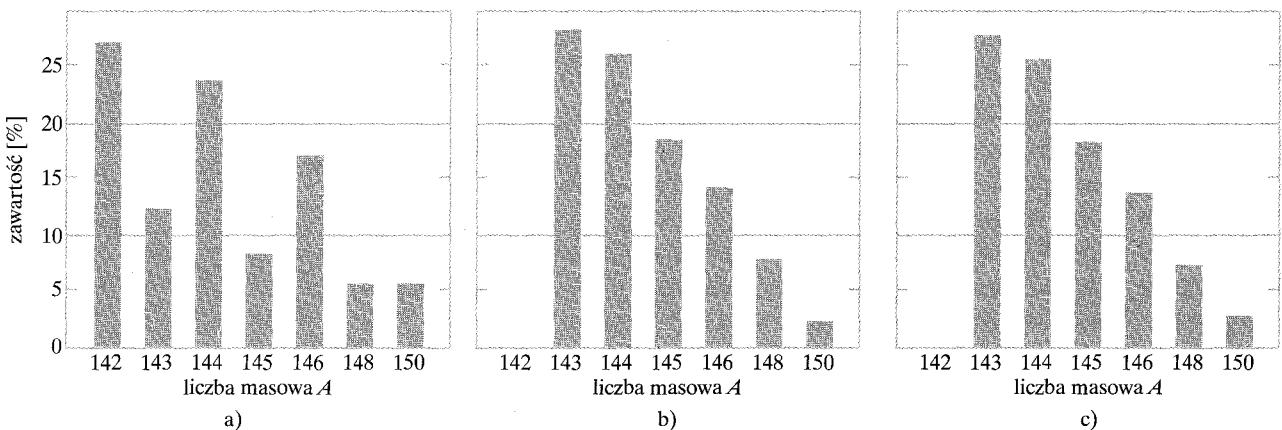
Pamiętajmy, że w odległej przeszłości sytuacja wyglądała inaczej niż dziś. Obydwia izotopy  $^{235}\text{U}$  oraz  $^{238}\text{U}$  są promieniotwórcze, a ich czasy połowicznego zaniku wynoszą odpowiednio  $7,04 \cdot 10^8$  lat oraz  $44,7 \cdot 10^8$  lat. Jak widać, czas połowicznego zaniku łatwo rozszczepialnego izotopu  $^{235}\text{U}$  jest około 6,4 razy krótszy niż izotopu  $^{238}\text{U}$ . Ponieważ izotop  $^{235}\text{U}$  rozpada się szybciej niż  $^{238}\text{U}$ , w przeszłości jego względna zawartość w rudzie uranu była większa. W rzeczywistości przed dwoma miliardami lat zawartość  $^{235}\text{U}$  wynosiła nie 0,72%, lecz 3,8%. Jest to wartość bliska tej, do której dziś wzbogaca się uran dla potrzeb współczesnych reaktorów energetycznych. Jeżeli odpowiednie paliwo rozszczepialne było dostępne, powstanie naturalnego reaktora (przy spełnieniu pewnych innych warunków) nie jest tak zaskakujące. Jak widać, paliwo było dostępne. Tak się składa, że przed dwoma miliardami lat najwyższą formą życia na Ziemi były niebieskozielone algi.

2. Czy są inne dowody? Zubożenie złóż uranu w izotop  $^{235}\text{U}$  nie jest jeszcze ostatecznym dowodem istnienia naturalnego reaktora, w którym zachodziła reakcja rozszczepienia. Trzeba poszukać dalszych argumentów.

Jeżeli pracował reaktor, to musiały także powstać produkty rozszczepienia. Spośród mniej więcej 30 pierwiastków, których trwałe izotopy są twarzane w reaktorze, przynajmniej część nadal musi pozostać na miejscu. Potrzebnego dowodu może dostarczyć nam analiza częstości występowania izotopów.

Szczególnie przekonujące są wyniki uzyskane dla neodiumu. Na rysunku 44.9a przedstawiono naturalne częstości występowania siedmiu trwałych izotopów neodiumu, a na rysunku 44.9b — względne zawartości tych samych izotopów wśród trwałych produktów rozszczepienia uranu  $^{235}\text{U}$ . Wyraźne różnice nie zaskakują, zważywszy na całkowicie różne pochodzenie obydwu zestawów izotopów. Szczególnie rzuca się w oczy całkowity brak wśród

Rys. 44.9. Częstości występowania izotopów neodiumu o różnych liczbach masowych a) w naturalnych złóżach rud tego pierwiastka i b) w zużytym paliwie z elektrowni jądrowej. Wykres c) przedstawia częstość występowania izotopów neodiumu (po wprowadzeniu kilku poprawek) w rudach uranu wydobywanych z kopalni w Gabonie (Afryka Zachodnia). Zwróć uwagę, że wykresy (b) i (c) są podobne do siebie, ale różnią się wyraźnie od wykresu (a)



produktów rozszczepienia izotopu  $^{142}\text{Nd}$ , którego zawartość w warunkach naturalnych jest największa.

Zapytajmy więc: jakie są częstości występowania izotopów neodymu w próbkach rudy uranu z Afryki Zachodniej? Jeżeli funkcjonował tam naturalny reaktor jądrowy, to powinniśmy się spodziewać, że znajdziemy w nich izotopy z *obydwu* źródeł (czyli „naturalne” oraz powstałe w wyniku rozszczepienia uranu). Na rysunku 44.9c przedstawiono uzyskane wyniki po wprowadzeniu do nich odpowiednich poprawek. Porównanie rysunków 44.9b i c mówi nam, że w miejscu tym rzeczywiście działał naturalny reaktor jądrowy.

Fakt, że produkty rozszczepienia powstały w naturalnym reaktorze jądrowym w Afryce Zachodniej pozostał tam przez dwa miliardy lat, przemawia za możliwością długotrwałego składowania odpadów promieniotwórczych w skorupie ziemskiej, w miejscach starannie dobranych pod względem warunków geologicznych.

### Przykład 44.3

Stosunek częstości występowania izotopów  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  w naturalnym uraniu ma obecnie wartość 0,0072. Ile wynosił ten stosunek  $2 \cdot 10^9$  lat temu? Czasy połowicznego zaniku obydwu izotopów są odpowiednio równe  $7,04 \cdot 10^8$  lat i  $44,7 \cdot 10^8$  lat.

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że stosunek  $N_5/N_8$  częstości występowania izotopów  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  w chwili  $t = 0$  nie wynosił 0,0072 — taka jest jego obecna wartość, odpowiadająca chwili  $2 \cdot 10^9$  lat. To konsekwencja faktu, że obydwa izotopy rozpadają się z różną szybkością. Niech  $N_5(0)$  i  $N_8(0)$  oznaczają liczby odpowiednich izotopów w próbce uranu w chwili  $t = 0$ , a  $N_5(t)$  i  $N_8(t)$  — liczby tych izotopów w pewnej późniejszej chwili  $t$ . Dla każdego z izotopów możemy posłużyć się równaniem (43.14), które pozwoli nam wyrazić liczbę jąder w chwili  $t$  w zależności od ich liczb w chwili  $t = 0$ :

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-\lambda_5 t} \quad \text{oraz} \quad N_8(t) = N_8(0)e^{-\lambda_8 t};$$

$\lambda_5$  i  $\lambda_8$  oznaczają odpowiednio stałe rozpadu. Dzieląc stronami obydwa równania, otrzymamy

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(0)}{N_8(0)} e^{-(\lambda_5 - \lambda_8)t}.$$

Ponieważ zależy nam na wyznaczeniu stosunku  $N_5(0)/N_8(0)$ , musimy równanie przekształcić:

$$\frac{N_5(0)}{N_8(0)} = \frac{N_5(t)}{N_8(t)} e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}. \quad (44.8)$$

Pamiętajmy, że stałą rozpadu wiąże z czasem połowicznego zaniku równanie (43.17), które mówi, że

$$\lambda_5 = \frac{\ln 2}{T_{1/2,5}} = \frac{\ln 2}{7,04 \cdot 10^8 \text{ a}} = 9,85 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$$

oraz

$$\lambda_8 = \frac{\ln 2}{T_{1/2,8}} = \frac{\ln 2}{44,7 \cdot 10^8 \text{ a}} = 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}.$$

Wykładnik w równaniu (44.8) będzie mieć wartość

$$(\lambda_5 - \lambda_8)t = [(9,85 - 1,55) \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}] (2 \cdot 10^9 \text{ a}) \\ = 1,66.$$

Po podstawieniu tej wartości do równania (44.8) otrzymamy

$$\frac{N_5(0)}{N_8(0)} = \frac{N_5(t)}{N_8(t)} e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} = (0,0072)(e^{1,66}) \\ = 0,0379 \approx 3,8\% \quad (\text{odpowiedź})$$

Gdy Ziemia powstawała 4,5 miliarda lat temu, stosunek częstości występowania izotopów uranu  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  był jeszcze większy (około 30%).

## 44.6. Synteza termojądrowa: podstawy procesu

Wykres energii wiązania z rysunku 43.6 mówi nam, że w wyniku połączenia dwóch lekkich jąder w jedno większe zostanie wyzwolona energia. Taki proces nazywamy **syntezą jądrową**. Przeciwdziała mu odpychanie kulombowskie, które

powstrzymuje dwie naładowane dodatnio cząstki przed zbliżeniem się do siebie na dostatecznie małą odległość, aby znalazły się w zasięgu przyciągających sił jądrowych i mogły się ze sobą połączyć. Wysokość *bariery kulombowskiej* zależy od ładunków i promieni oddziałujących jąder. W przykładzie 44.4 wykażemy, że w przypadku dwóch protonów ( $Z = 1$ ) bariera ma wysokość 400 keV. Dla cząstek o większym ładunku jest ona odpowiednio wyższa.

Aby energia była wydzielana w użytecznych ilościach, synteza jądrowa musi zachodzić dla makroskopowej porcji materii. Sprzyjające temu warunki można stworzyć, ogrzewając próbki do temperatury, w której cząstki mają energię umożliwiającą im — tylko dzięki ruchom termicznym — pokonanie bariery kulombowskiej. Jest to **synteza termojądrowa**.

Przyjęło się, że w publikacjach poświęconych syntezie termojądrowej temperaturę wyraża się za pomocą energii kinetycznej oddziałujących cząstek, korzystając z zależności

$$E_k = kT, \quad (44.9)$$

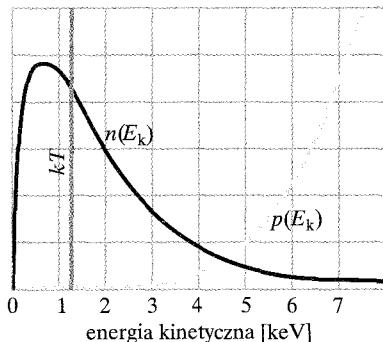
gdzie  $E_k$  oznacza energię kinetyczną odpowiadającą *najbardziej prawdopodobnej prędkości oddziałujących cząstek*,  $k$  jest stałą Boltzmanna, a  $T$  — temperaturą wyrażoną w kelwinach. Tak więc zamiast mówić: „temperatura we wnętrzu Słońca wynosi  $1,5 \cdot 10^7$  K”, powiemy raczej: „temperatura we wnętrzu Słońca wynosi 1,3 keV”.

Temperatura pokojowa odpowiada energii  $E_k \approx 0,03$  eV; cząstka o takiej energii nie ma szans na pokonanie bariery o wysokości bliskiej 400 keV. Nawet we wnętrzu Słońca, gdzie  $kT = 1,3$  keV, prawdopodobieństwo zajścia syntezy termojądrowej — jak się na pierwszy rzut oka wydaje — nie jest zbyt duże. Wiemy, że mimo to synteza termojądrowa nie tylko zachodzi w jądrze Słońca, ale decyduje o właściwościach tej i innych gwiazd.

Latwiej rozwiążemy tę zagadkę, jeżeli uświadomimy sobie dwa fakty:  
 1) Energia wyrażona za pomocą równania (44.9) odpowiada cząstkom o prędkości *najbardziej prawdopodobnej*, którą zdefiniowaliśmy w paragrafie 20.7. W rzeczywistym rozkładzie mamy też cząstki poruszające się ze znacznie większymi prędkościami, a więc o odpowiednio wyższych energiach.  
 2) Obliczona wysokość bariery jest jej *maksymalną* wysokością. Cząstka o energii mniejszej niż wysokość bariery może się przez nią przedostać dzięki tunelowaniu, o czym przekonaliśmy się już, rozważając rozpad  $\alpha$  (paragraf 43.4).

Podane fakty podsumowano na rysunku 44.10. Krzywa oznaczona jako  $n(E_k)$  przedstawia rozkład Maxwella dla protonów w temperaturze panującej w jądrze Słońca. Krzywa ta różni się od rozkładu Maxwella z rysunku 20.7 tym, że wykreślono ją w zależności od energii, a nie prędkości. Dla dowolnej energii kinetycznej  $E_k$  iloczyn  $n(E_k) dE_k$  wyraża prawdopodobieństwo, że proton ma energię kinetyczną z przedziału od  $E_k$  do  $E_k + dE_k$ . Wartość  $kT$  w jądrze Słońca zaznaczono na rysunku za pomocą pionowej linii. Zwróćcie uwagę, jak dużo protonów w jądrze Słońca ma energię większą od wskazanej wartości.

Na rysunku 44.10 krzywa oznaczona  $p(E_k)$  opisuje prawdopodobieństwo pokonania bariery przez dwa zderzające się ze sobą protony. Z przebiegu tych dwóch krzywych wynika, że dla pewnej energii kinetycznej protonów ich synteza zachodzi najczęściej. Dla energii znacznie wyższych bariera staje się przezroczysta,



Rys. 44.10. Krzywa  $n(E_k)$  opisuje rozkład energetyczny liczby protonów w jądrze Słońca. Krzywa  $p(E_k)$  przedstawia prawdopodobieństwo pokonania bariery (a więc reakcji syntezy) w wyniku zderzenia dwóch protonów. Linia pionowa oznacza wartość  $kT$  odpowiadającą temperaturze w jądrze Słońca. Zwróć uwagę, że skale pionowe dla obydwu krzywych są różne

ale liczba protonów o takiej energii jest bardzo mała. Dla energii dużo niższych mamy wprawdzie wiele protonów, ale bariera kulombowska jest dla nich zbyt trudna do pokonania.

**SPRAWDZIAN 3:** Które z zaproponowanych reakcji syntezy nie powodują wyzwoleń energii: a)  ${}^6\text{Li} + {}^6\text{Li}$ , b)  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ , c)  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ , d)  ${}^{20}\text{Ne} + {}^{20}\text{Ne}$ , e)  ${}^{35}\text{Cl} + {}^{35}\text{Cl}$  i f)  ${}^{14}\text{N} + {}^{35}\text{Cl}$ ? (Wskazówka: Wykorzystaj wykres energii wiązania z rysunku 43.6).

## Przykład 44.4

Załóżmy, że proton jest kulą o promieniu  $R \approx 1 \text{ fm}$ . Dwa protony zbliżają się do siebie, każdy z energią kinetyczną równą  $E_k$ .

a) Ile musi wynosić wartość energii  $E_k$ , aby odpychanie kulombowskie zatrzymało obydwie cząsteczki dokładnie wtedy, kiedy „zetkną” się ze sobą? Wyznaczoną w ten sposób energię  $E_k$  możemy uznać za miarę wysokości bariery kulombowskiej.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że energia  $E$  układu dwóch protonów jest zachowana w trakcie ich zbliżania się do siebie. W szczególności energia początkowa  $E_{\text{pocz}}$  jest równa energii końcowej  $E_{\text{końc}}$  w chwili, kiedy protony się zatrzymują. Energia początkowa  $E_{\text{pocz}}$  jest sumą energii kinetycznych obydwu protonów i wynosi  $2E_k$ . Gdy protony zatrzymują się, cała energia układu  $E_{\text{końc}}$  jest elektryczną energią potencjalną  $E_p$  daną wzorem (25.43) ( $E_p = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r$ ). W naszym przypadku  $r$  jest odległością między środkami protonów, która w chwili ich zatrzymania jest równa  $2R$ , a obydwa ładunki  $q_1$  i  $q_2$  mają wartość  $e$ . Korzystając z zasady zachowania energii  $E_{\text{pocz}} = E_{\text{końc}}$ , możemy więc napisać

$$2E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R}.$$

Po podstawieniu znanych wartości uzyskamy wynik

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(16\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(1 \cdot 10^{-15} \text{ m})} \\ &= 5,75 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 360 \text{ keV} \approx 400 \text{ keV}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

b) W jakiej temperaturze średnia energia kinetyczna protonów tworzących gaz będzie mieć wartość obliczoną w punkcie (a), a więc energię równą wysokości bariery kulombowskiej?

### ROZWIĄZANIE:

Przyjmijmy założenie, że gaz protonowy jest gazem doskoñalym. W takim przypadku średnia energia protonów jest określona równaniem (20.24)  $E_{\text{kśr}} = \frac{3}{2}kT$ , gdzie  $k$  oznacza stałą Boltzmanna. Rozwiązujejąc równanie względem  $T$  i podstawiając wynik uzyskany w punkcie (a), otrzymamy

$$\begin{aligned} T &= \frac{2E_{\text{kśr}}}{3k} = \frac{(2)(5,75 \cdot 10^{-14} \text{ J})}{(3)(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})} \\ &\approx 3 \cdot 10^9 \text{ K}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

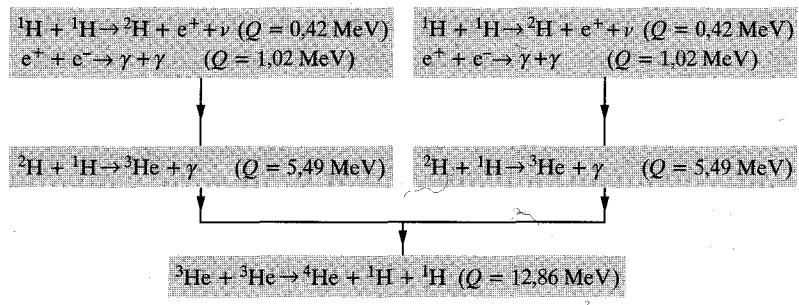
Temperatura w jądrze Słońca wynosi zaledwie  $1,5 \cdot 10^7 \text{ K}$ , a więc jest oczywiste, że w zachodzącej tam reakcji syntezy uczestniczą tylko protony o energiach znacznie przekraczających średnią energię.

## 44.7. Synteza termojądrowa we wnętrzu Słońca i innych gwiazd

Słońce już od paru miliardów lat wypromieniało energię z mocą  $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$ . Skąd bierze się ta energia? Spalanie chemiczne należy wykluczyć. Jeżeli Słońce byłoby zbudowane z węgla i tlenu — w odpowiednich proporcjach — mogłoby istnieć zaledwie przez około 1000 lat. Inna możliwość to powolne kurczenie się Słońca pod wpływem siły grawitacji. Przekształcając grawitacyjną energię potencjalną w energię termiczną, Słońce mogłoby zachować swoją temperaturę i jednocześnie wypromieniaływać energię. Obliczenia wykluczają także ten mechanizm. Otrzymany w ten sposób czas życia Słońca jest przynajmniej 500 razy za krótki. Przekonamy się, że Słońce spała nie węgiel, lecz wodór, w palenisku jądrowym, a nie atomowym lub chemicznym.

Reakcja syntezy we wnętrzu Słońca jest procesem wielostopniowym, w którym wodór jest „spalany” do postaci helu. „Paliwem” jest wodór, a „popiołem”

Rys. 44.11. Schemat cyklu protonowo-protonowego odpowiedzialnego za wytwarzanie energii we wnętrzu Słońca. Proces polega na połączeniu się protonów w cząstkę  $\alpha$  ( ${}^4\text{He}$ ), któremu towarzyszy wyzwolenie energii 26,7 MeV



— hel. Na rysunku 44.11 przedstawiono odpowiedzialny za ten proces **cykl protonowo-protonowy** (p-p).

Cykl p-p rozpoczyna się od zderzenia dwóch protonów ( ${}^1\text{H} + {}^1\text{H}$ ), które tworzą deuter ( ${}^2\text{H}$ ) z jednoczesną kreacją pozytonu ( $e^+$ ) i neutrina ( $\nu$ ). Pozyton w krótkim czasie spotyka we wnętrzu Słońca swobodny elektron ( $e^-$ ) i obydwie cząstki anihilują (patrz paragraf 22.6), a ich energia spoczynkowa jest uwalniana w postaci dwóch fotonów  $\gamma$ .

W górnej części rysunku 44.11 umieszczone są parę równań opisujących powyższe zdarzenia. W rzeczywistości zachodzą one niezwykle rzadko. Tylko jedno na  $10^{26}$  zderzeń proton–proton prowadzi do powstania deuteru. W znakomitej większości przypadków dwa protony odbijają się od siebie spreżyście. Właśnie ten etap jest wąskim gardłem, które ogranicza szybkość wydzielania się energii i sprawia, że Słońce nie eksploduje. Pomimo powolności procesu wielkie i gęste jądro Słońca zawiera tak olbrzymią liczbę protonów, że deuter jest wytwarzany z szybkością  $10^{12}$  kg/s.

Powstały deuter szybko zderza się z innym protonem i, zgodnie z równaniem w środkowym rzędzie rysunku 44.11, łączy się z nim, tworząc jądro  ${}^3\text{He}$ . Dwa jądra  ${}^3\text{He}$  mogą wreszcie (w dość długim czasie  $10^5$  lat) spotkać się ze sobą, tworząc ostatecznie cząstkę  $\alpha$  ( ${}^4\text{He}$ ) i dwa protony (dolny rzad na rysunku 44.11).

Podsumowując, schemat z rysunku 44.11 mówi, że cykl p-p sprowadza się do połączenia się czterech protonów i dwóch elektronów, czego rezultatem jest powstanie cząstki  $\alpha$ , dwóch neutrin i sześciu fotonów  $\gamma$ . Mamy więc

$$4 {}^1\text{H} + 2e^- \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu + 6\gamma. \quad (44.10)$$

Dodajmy teraz do każdej strony równania (44.10) po dwa elektryny:

$$(4 {}^1\text{H} + 4e^-) \rightarrow ({}^4\text{He} + 2e^-) + 2\nu + 6\gamma. \quad (44.11)$$

Cząstki, które umieszczone są w nawiasach, to *atomy* (nie tylko „gołe”, pozbaione elektronów jądra) wodoru i helu. Dzięki temu możemy obliczyć energię wyzwalaną w reakcji (44.10) (i (44.11)), która wynosi

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta mc^2 \\ &= -[4,002\,603 \text{ u} - (4)(1,007\,825 \text{ u})][931,5 \text{ MeV/u}] \\ &= 26,7 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

gdzie 4,002 603 u jest masą atomu helu, a 1,007 825 u masą atomu wodoru. Masa neutrin — o ile różni się od zera — jest tak mała, że można ją pominać,

a fotony promieniowania  $\gamma$  w ogóle nie mają masy. Dlatego wielkości te nie występują w obliczeniach energii reakcji.

Taką samą wartość  $Q$  (co jest oczywiste) otrzymalibyśmy, dodając do siebie energie  $Q$  wydzielane w kolejnych etapach cyklu protonowo-protonowego przedstawionego na rys. 44.11. Mamy więc

$$\begin{aligned} Q &= (2)(0.42 \text{ MeV}) + (2)(1.02 \text{ MeV}) + (2)(5.49 \text{ MeV}) + 12.86 \text{ MeV} \\ &= 26.7 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

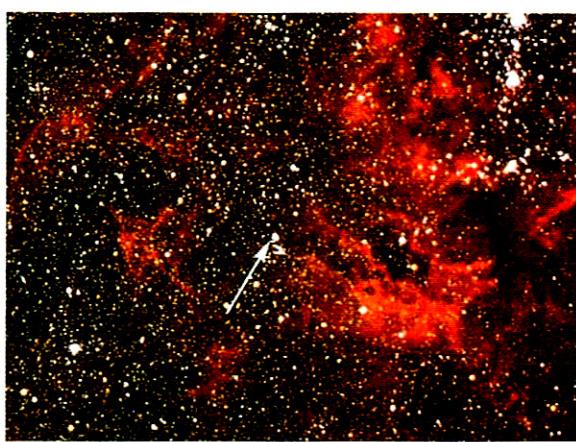
Część tej energii — mniej więcej 0.5 MeV — unoszą ze Słońca dwa neutriny występujące w równaniach (44.10) i (44.11). Reszta energii pozostaje w jądrze Słońca w postaci energii termicznej. Energia ta jest stopniowo transportowana w kierunku powierzchni Słońca, skąd jest wypromieniowywana w postaci fal elektromagnetycznych, w tym także światła widzialnego.

Spalanie wodoru w jądrze Słońca może przypominać nam alchemię, ponieważ jeden pierwiastek zamienia się w inny. Średniowieczni alchemicy byli jednak zainteresowani przemianą ołowiu w złoto, a nie wodoru w hel. Można powiedzieć, że zmierzali we właściwym kierunku, ale ich retorty nie były dostatecznie gorące. Ich temperatura powinna być równa co najmniej  $10^8$  K, a nie zaledwie 600 K.

Spalanie wodoru zachodzi we wnętrzu Słońca już od około  $5 \cdot 10^9$  lat, a obliczenia mówią, że paliwa powinno wystarczyć na drugie tyle. Za 5 miliardów lat jądro Słońca, składające się wtedy w znacznej części z helu, zacznie stygnąć i zapadać się pod wpływem grawitacji. Spowoduje to ponowny wzrost temperatury i rozszerzanie się otoczki jądra, co zmieni Słońce w *czerwonego olbrzyma*.

Gdy temperatura jądra ponownie wzrośnie do około  $10^8$  K, znowu będzie możliwa produkcja energii w procesie syntezy — tym razem w wyniku spalania helu, w procesie prowadzącym do powstania węgla. W trakcie dalszej ewolucji, kiedy gwiazda staje się coraz gorętsza, może również zachodzić synteza innych pierwiastków. Jednakże pierwiastki cięższe niż te, które znajdują się w okolicy maksimum krzywej energii wiązania z rysunku 43.6, nie mogą powstać na drodze syntezy.

Rys. 44.12. Gwiazda Sanduleak wybuchła w 1987 r. jako supernowa. Na rysunku (a) przed wybuchem, na rysunku (b) po wybucie. Jasność supernowej była 100 milionów razy większa niż jasność Słońca i można ją było obserwować gołym okiem. Eksplozja nastąpiła 155 000 lat świetlnych od nas, a więc także 155 000 lat temu



a)



b)

Uważy się, że pierwiastki o większych liczbach masowych powstają w wyniku wychwytu neutronów podczas gwałtownego wybuchu gwiazdy, którą nazywamy *supernową* (rys. 44.12). W rezultacie takiego wybuchu zewnętrzna powłoka gwiazdy jest wyrzucana w przestrzeń kosmiczną i staje się częścią rozrzedzonego ośrodka, który wypełnia przestrzeń międzygwiazdową. To właśnie z tej materii, stale wzbogacanej o szczątki gwiezdnych wybuchów, tworzą się na drodze kondensacji wywołanej grawitacją nowe gwiazdy.

Obecność na Ziemi pierwiastków cięższych niż wodór i hel sugeruje, że Układ Słoneczny powstał z materii międzygwiazdowej zawierającej pozostałości takich eksplozji. Widzimy więc, że wszystkie pierwiastki wokół nas — łącznie z tymi w naszych ciałach — powstały we wnętrzach gwiazd, które już nie istnieją. Jeden z uczonych ujął to w następujących słowach: „W rzeczy samej, jesteśmy dziećmi gwiazd”.

### Przykład 44.5

Z jaką szybkością  $dm/dt$  jest zużywany wodór w jądrze Słońca, w zachodzącym tam cyklu p-p przedstawionym na schemacie z rys. 44.11?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że  szybkość produkcji energii  $dE/dt$  w procesie, w którym we wnętrzu Słońca jest zużywany wodór (protony), równa się mocy  $P$  wy promieniowywanej przez Słońce

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

Aby wprowadzić do tego równania szybkość zużywania masy  $dm/dt$ , możemy je zapisać w postaci

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dm} \frac{dm}{dt} \approx \frac{\Delta E}{\Delta m} \frac{dm}{dt}, \quad (44.12)$$

gdzie  $\Delta E$  jest energią wytworzoną w procesie, w którym zostały zużyte protony o masie  $\Delta m$ . Z wcześniejszych rozważań przedstawionych w tym paragrafie wiemy, że zużywając cztery protony, otrzymujemy energię termiczną równą 26,2 MeV ( $= 4,20 \cdot 10^{-12}$  J). Oznacza to, że zmiana energii  $\Delta E = 4,20 \cdot 10^{-12}$  J odpowiada zmianie masy  $\Delta m = 4(1,67 \cdot 10^{-27}$  kg). Podstawiając te wielkości oraz moc Słońca  $P$ , podaną w dodatku C, do równania (44.12), stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{\Delta m}{\Delta E} P = \frac{4(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}{4,20 \cdot 10^{-12} \text{ J}} (3,90 \cdot 10^{26} \text{ W}) \\ &= 6,2 \cdot 10^{11} \text{ kg/s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widać, w każdej sekundzie Słońce zużywa olbrzymie ilości wodoru. Nie musimy jednak zbytnio się przejmować, że go zabraknie, ponieważ masa Słońca  $2 \cdot 10^{30}$  kg gwarantuje, że zapasy wystarczą na długie, długie czas.

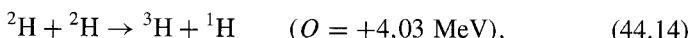
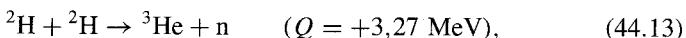
### 44.8. Kontrolowana synteza termojądrowa

Pierwsza synteza termojądrowa na Ziemi dokonała się na atolu Eniwetok 1 listopada 1952 roku, kiedy Stany Zjednoczone przeprowadziły eksplozję pierwszej bomby termojądrowej, której wynikiem było wyzwolenie energii równoważnej 10 milionom ton TNT. Wysoką temperaturę i gęstość niezbędną do zainicjowania syntezy uzyskano, używając jako zapalnika bomby rozszczepialnej.

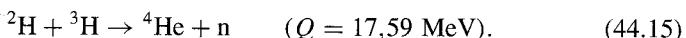
O wiele trudniej zbudować stałe i kontrolowane źródło energii oparte na syntezie jądrowej, na przykład reaktor termojądrowy, który mógłby pracować w elektrowni. W wielu krajach podejmowane są w tym kierunku intensywne wysiłki, ponieważ powszechnie uważa się, że reaktor termojądrowy jest przyszłościowym źródłem energii, przynajmniej do produkcji elektryczności.

Ze względu na swą powolność cykl p-p przedstawiony na rysunku 44.11 nie jest dobrym punktem wyjścia do budowy reaktora termojądrowego. W ja-

drze Słońca wspomniana reakcja zachodzi tylko dzięki olbrzymiej koncentracji znajdujących się tam protonów. W warunkach ziemskich najbardziej atrakcyjne wydają się reakcje dwóch jąder deuteru — deuteronów (reakcja d-d):



a także reakcja deuteronu z jądrem trytu — trytonem (reakcja d-t)<sup>1</sup>



Częstość występowania deuteru — źródła deuteronów na potrzeby tych reakcji — wynosi zaledwie 1 : 6700, ale jego zasoby są ogromne dzięki rozmiarom mórz. Zwolennicy energetyki jądrowej tak komentują wybór źródeł energii: kiedy wyczerpią się wszystkie paliwa kopalne, będziemy mieć do wyboru „spalanie skał” (rozszczepienie uranu wydobywanego z rudy) albo „spalanie wody” (syntezę termojądrową wykorzystującą deuter pochodzący z wody).

Budowa reaktora termojądrowego wymaga spełnienia trzech warunków:

- 1.** *Duża koncentracja cząstek n.* Koncentracja oddziałujących cząstek (niech będzie to liczba deuteronów w jednostce objętości) musi być wystarczająco duża, aby zderzenia d-d zachodziły odpowiednio często. W wysokiej temperaturze, która jest niezbędna w tym procesie, wszystkie atomy deuteru będą całkowicie zjonizowane i utworzą obojętną elektrycznie plazmę (zjonizowany gaz) składającą się z deuteronów i elektronów.
- 2.** *Wysoka temperatura plazmy T.* Plazma musi być gorąca. W przeciwnym razie zderzające się deuterony nie będą mieć dostatecznie dużej energii, aby pokonać rozdzielającą je barierę kulombowską. W warunkach laboratoryjnych udało się uzyskać plazmę o temperaturze 35 keV, czyli  $4 \cdot 10^8 \text{ K}$ . Jest to wartość 30 razy większa niż temperatura we wnętrzu Słońca.
- 3.** *Długi czas utrzymania τ.* Zasadniczym problemem jest utrzymanie plazmy o odpowiednio wysokiej gęstości i temperaturze przez czas na tyle długi, żeby w reakcji syntezy mogła wziąć udział znaczna część paliwa. Jest oczywiste, że nie można do tego celu użyć zbiornika o ścianach z jakiegokolwiek ciała stałego, gdyż nie wytrzymałby on wymaganej wysokiej temperatury. Trzeba więc skorzystać z bardziej wymyślnych metod uwięzienia plazmy w pewnej objętości. Dwie z nich pokróćce omówimy.

Można wykazać, że warunkiem działania reaktora termojądrowego, w którym zachodzi reakcja d-t, jest spełnienie warunku

$$n\tau > 10^{20} \text{ s/m}^3. \quad (44.16)$$

Warunek ten, znany jako **kryterium Lawsona**, informuje o możliwości dokonania wyboru pomiędzy utrzymywaniem większej liczby cząstek przez krótki czas lub mniejszej ich liczby przez czas dłuższy. Niezależnie od spełnienia tego warunku, nadal trzeba zapewnić odpowiednio wysoką temperaturę plazmy.

<sup>1</sup>Jądro izotopu wodoru  $^3\text{H}$  (trytu) jest nazywane *trytonem*. Jest to nuklid promieniotwórczy o czasie połowicznego zaniku 12,3 lat.

Obecnie bada się dwie metody wytwarzania energii na drodze kontrolowanej reakcji termojądrowej. Chociaż żadna z nich nie przyniosła jeszcze spodziewanego sukcesu, prace są kontynuowane ze względu na obiecujące wyniki i potencjalne korzyści z kontrolowanej syntezy jądrowej dla rozwiązania problemów energetycznych świata.

### Utrzymywanie magnetyczne

Jedną z odmian pułapek magnetycznych jest **tokamak** (ros. toroidalnaja kamiera s magnitnoj katuszkoj). Plazma jest uwięziona w toroidalnej odpompowanej komorze za pomocą odpowiednio ukształtowanego pola magnetycznego, które działając na cząstki naładowane, uniemożliwia im kontakt ze ściankami komory. Na rysunku 44.13 przedstawiono urządzenie tego typu znajdujące się w Laboratorium Fizyki Plazmy Uniwersytetu w Princeton.

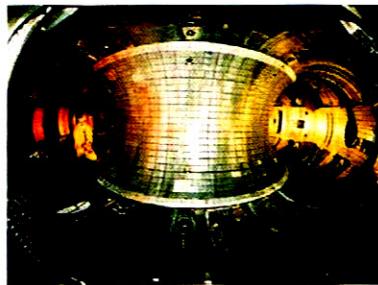
Plazmę można ogrzewać, indukując w niej prąd lub bombardując ją z zewnątrz wiązką wysokoenergetycznych cząstek. Pierwszym celem jest **utrzymanie plazmy**, co następuje po spełnieniu kryterium Lawsona. Celem głównym jest **zapłon**, czyli zainicjowanie samopodtrzymującej się reakcji termojądrowej, której w ostatecznym rachunku towarzyszy wyzwalanie energii. Do roku 2000 nie udało się uzyskać zapłonu w żadnym tokamaku ani w innych urządzeniach wykorzystujących pułapki magnetyczne.

### Utrzymywanie inercyjne

Metoda inercyjna uwięzienia i ogrzewania paliwa, w celu zainicjowania w nim syntezy termojądrowej, polega na „ostrzeliwaniu” ze wszystkich stron stałej kapsułki z paliwem za pomocą wiązek światła laserowego o dużym natężeniu. W rezultacie następuje częściowe odparowanie materii z powierzchni kapsułki. Dzięki temu powstaje skierowana do wnętrza fala uderzeniowa, która ścisza paliwo w środku kapsułki. Proces nazywamy *utrzymywaniem inercyjnym*, ponieważ a) paliwo jest *utrzymywane* we wnętrzu kapsułki i b) cząstki dzięki swej *inercji* (bezwładności związanej z masą) nie uciekają z ogrzewanej kapsułki przez krótki czas jej oświetlania.

**Synteza laserowa** wykorzystująca utrzymywanie inercyjne jest badana w wielu laboratoriach, nie tylko w Stanach Zjednoczonych. Na przykład w Lawrence Livermore Laboratory używa się mniejszych niż ziarenka piasku kapsułek z paliwem deuterowo-trytowym (rys. 44.14). Kapsułki oświetla się za pomocą dziesięciu rozmieszczonych symetrycznie wiązek laserowych. Impulsy laserów dobrano tak, aby każda kapsułka otrzymywała 200 kJ energii w czasie krótszym niż nanosekunda. Odpowiada to mocy w impulsie równej  $2 \cdot 10^{14}$  W, czyli z grubą szacunką 100 razy większej niż stała moc wszystkich elektrowni na kuli ziemskiej!

W reaktorze termojądrowym wykorzystującym syntezę laserową kapsułki z paliwem mają eksplodować niczym miniaturowe bomby wodorowe z szybkością  $10^{100}$  na sekundę. Do roku 2000 prace nad syntezą laserową nie przyniosły sukcesu, ale nadal prowadzi się intensywne badania w tym kierunku.



Rys. 44.13. Eksperymentalny reaktor termojądrowy typu tokamak w Uniwersytecie w Princeton



Rys. 44.14. Małe kapsułki na tle monety éwierédolarowej to kapsułki z paliwem deuterowo-trytowym przeznaczone do doświadczeń nad syntezą laserową

## Przykład 44.6

Założymy, że kapsułka z paliwem do syntezy laserowej zawiera jednakowe liczby atomów deuteru oraz trytu (i żadnych innych substancji). Pod wpływem oświetlenia impulsami promieniowania laserowego początkowa gęstość kapsułki  $d = 200 \text{ kg/m}^3$  wzrasta  $10^3$  razy.

a) Ile cząstek na jednostkę objętości (zarówno jąder deuteru, jak i trytu) zawiera kapsułka po zwiększeniu jej gęstości? Masa molowa deuteru  $M_d$  wynosi  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ , a masa molowa trytu  $M_t = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że gęstość układu zawierającego tylko jeden rodzaj cząstek możemy wyrazić jako iloczyn masy cząstek i ich koncentracji (liczby cząstek na jednostkę objętości):

$$\left( \begin{array}{c} \text{gęstość} \\ [\text{kg/m}^3] \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{koncentracja} \\ [\text{m}^{-3}] \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{masa cząstki} \\ [\text{kg}] \end{array} \right). \quad (44.17)$$

Niech  $n$  oznacza całkowitą koncentrację cząstek w gęstszej kapsułce. Wówczas liczba atomów deuteru w jednostce objętości wynosi  $n/2$ , a liczba atomów trytu w jednostce objętości także jest równa  $n/2$ .

W dalszej kolejności możemy uogólnić równanie (44.17) na układ złożony z dwóch rodzajów cząstek, wyrażając gęstość  $d^*$  gęstszej kapsułki jako sumę indywidualnych gęstości obydwu rodzajów cząstek:

$$d^* = \frac{n}{2} m_d + \frac{n}{2} m_t, \quad (44.18)$$

gdzie symbole  $m_d$  i  $m_t$  oznaczają odpowiednio masy atomów deuteru i trytu. Obydwie te masy można zastąpić masami molowymi, podstawiając

$$m_d = \frac{M_d}{N_A} \quad \text{oraz} \quad m_t = \frac{M_t}{N_A},$$

gdzie  $N_A$  jest liczbą Avogadra. Po dokonaniu odpowiednich podstawień i uwzględnieniu, że gęstość  $d^*$  gęstszej kapsułki jest równa  $1000d$ , możemy rozwiązać równanie (44.18) względem  $n$ , uzyskując

$$n = \frac{2000d N_A}{M_d + M_t}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$\begin{aligned} n &= \frac{(2000)(200 \text{ kg/m}^3)(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} + 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} \\ &= 4,8 \cdot 10^{31} \text{ m}^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jak długo koncentracja cząstek w kapsułce musi mieć wartość obliczoną w punkcie (a), aby spełnić kryterium Lawsona utrzymania plazmy?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że do utrzymania plazmy zwiększoną koncentrację cząstek trzeba utrzymać przez czas  $\tau$  określony równaniem (44.16) ( $n\tau > 10^{20} \text{ s/m}^3$ ). Prowadzi to do wyniku

$$\tau > \frac{10^{20} \text{ s/m}^3}{4,8 \cdot 10^{31} \text{ m}^{-3}} \approx 10^{-12} \text{ s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

(W tym czasie trzeba też utrzymać odpowiednio wysoką temperaturę plazmy).

## Podsumowanie

**Energia jądrowa** Reakcje jądrowe — w przeliczeniu na jednostkę masy — są około milion razy bardziej efektywne od reakcji chemicznych pod względem przemiany masy na inne postacie energii.

**Rozszczepienie jądra** Równanie (44.1) opisuje rozszczepienie jąder  $^{236}\text{U}$  spowodowane bombardowaniem jąder uranu  $^{235}\text{U}$  za pomocą neutronów termicznych. Równania (44.2) i (44.3) przedstawiają łańcuchy rozpadów  $\beta$  pierwotnych produktów rozszczepienia. W wyniku pojedynczego aktu rozszczepienia wyzwala się energia  $Q \approx 200 \text{ MeV}$ .

Rozszczepienie można wytlumaczyć, posługując się modelem kroplowym jądra, który przedstawia je jako kroplę naładowanej cieczy mającej pewną energię wzbudzenia. Warunkiem roz-

szczepienia jest pokonanie bariery potencjału na drodze tunelowania. Podatność na rozszczepienie zależy od wzajemnej relacji pomiędzy wysokością bariery  $E_b$  a energią wzbudzenia  $E_n$ .

Neutrony wyzwalane w wyniku rozszczepienia mogą spowodować **reakcję łańcuchową**. Na rysunku 44.4 przedstawiono bilans neutronów dla jednego pokolenia typowego reaktora. Na rysunku 44.5 przedstawiono schemat elektrowni jądrowej.

**Synteza jądrowa** Wyzwalanie energii na drodze łączenia się — **syntezy** dwóch lekkich jąder w jedno powstrzymuje bariera kulombowska. Synteza może zachodzić dla makroskopowych porcji materii tylko wtedy, kiedy temperatura (energia cząstek) będzie dostatecznie wysoka, aby tunelowanie zachodziło z wystarczającą wydajnością.

Energia Słońca powstaje głównie na drodze spalania wodoru w reakcji termojądrowej z wytworzeniem helu w **cyklu protono-nowo-protonowym** przedstawionym na rysunku 44.11. Pierwiastki o liczbach atomowych mniejszych niż  $A \approx 56$  (maksimum krzywej energii wiązania) mogą powstać w wyniku innych reakcji syntezy, które zachodzą po wyczerpaniu przez gwiazdę zapasów wodoru.

**Kontrolowana synteza jądrowa** Nie udało się jeszcze przeprowadzić kontrolowanej syntezy termojądrowej, która byłaby źródłem energii. Największe nadzieje wiążą się z reakcjami d-d i d-t.

Warunkiem syntezy jądrowej jest spełnienie w reaktorze kryterium Lawsona

$$n\tau > 10^{20} \text{ s/m}^3 \quad (44.16)$$

i utrzymanie odpowiednio wysokiej temperatury plazmy  $T$ .

W reaktorach typu **tokamak** plazma jest uwięziona w polu magnetycznym. W przypadku **syntezy laserowej** stosuje się uwięzienie inercyjne.

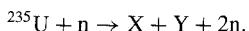
## Pytania

1. Czy zależność  $Q = -\Delta mc^2$  odnosi się a) do wszystkich procesów wymienionych w tabeli 44.1, b) wszystkich procesów z wyjątkiem zachodzących w wodospadzie, c) tylko do reakcji rozszczepienia, d) tylko do reakcji rozszczepienia i syntezy?

2. Czy zgodnie z rysunkiem 44.1 rozszczepienie jądra uranu  $^{235}\text{U}$  na dwie równe części pod wpływem neutronów termicznych zachodzi mniej więcej raz na a) 10 000, b) 1000, c) 100 czy d) 10 zdarzeń?

3. Czy pierwotne produkty rozszczepienia zawierają a) więcej protonów niż neutronów, b) więcej neutronów niż protonów, c) zbliżone liczby obydwoj częstek?

4. Przeanalizuj reakcję rozszczepienia



Uszereguj według prawdopodobieństwa powstania (zaczynając od największej wartości) następujące nuklidy, które można podstawić do równania zamiast symbolu X (lub Y): a)  $^{152}\text{Nd}$ , b)  $^{140}\text{I}$ , c)  $^{128}\text{In}$ , d)  $^{115}\text{Pd}$ , e)  $^{105}\text{Mo}$ . (Wskazówka: Skorzystaj z wykresu na rysunku 44.1).

5. Z każdej podanej pary nuklidów wybierz ten, który jest bardziej prawdopodobnym produktem reakcji rozszczepienia: a)  $^{93}\text{Sr}$  i  $^{93}\text{Ru}$ , b)  $^{140}\text{Gd}$  i  $^{140}\text{I}$ , c)  $^{155}\text{Nd}$  i  $^{155}\text{Lu}$ . (Wskazówka: Skorzystaj z rysunku 43.4 i układu okresowego pierwiastków).

6. Założmy, że jądro  $^{238}\text{U}$  „połyka” neutron, a następnie nie rozszczepia się, lecz ulega rozpadowi  $\beta$ , emittując elektron i neutrino. Który z nuklidów będzie produktem tego rozpadu: a)  $^{239}\text{Pu}$ , b)  $^{238}\text{Np}$ , c)  $^{239}\text{Np}$  czy d)  $^{238}\text{Pa}$ ?

7. Reaktor jądrowy pracuje z pewną mocą, a charakteryzujący go współczynnik mnożenia jest równy jeden. Czy po zmniejszeniu za pomocą prętów sterujących mocy reaktora do 25% wartości początkowej współczynnik mnożenia reaktora będzie a) nieco mniejszy od jedności, b) znacznie mniejszy od jedności, c) nadal równy jedności?

8. Rdzeń reaktora jądrowego powinien mieć jak najmniejszy stosunek pola powierzchni do objętości. Uszereguj następujące bryły według stosunku ich pola powierzchni do objętości, zaczynając od wartości największej: a) sześcian o krawędzi  $a$ , b) kula o promieniu  $a$ , c) stożek o wysokości  $a$  i promieniu podstawy  $a$  oraz d) walec o promieniu  $a$  i wysokości  $a$ . (Pole powierzchni bocznej stożka wynosi  $\sqrt{2}\pi a^2$ , a jego objętość  $\pi a^3/3$ ).

9. Na rysunku 44.6 przedstawiono zależność od czasu ciepła wydzielanego przez odpady powstałe w ciągu roku w elektrowni jądrowej. Ile razy (w przybliżeniu) zmalała energia termiczna wydzielana po upływie 100 lat: a) 20, b) 200, c) 2000 czy d) więcej niż 2000 razy?

10. Który z wymienionych pierwiastków *nie* mógł powstać w wyniku syntezy termojądrowej we wnętrzu gwiazdy: a) węgiel, b) krzem, c) chrom, d) brom?

11. Neutrina unoszą około 2% energii, która jest wydzielana w jądrze Słońca w wyniku zachodzącego tam cyklu p-p. Czy energia strumienia neutrin jest: a) równa, b) większa, czy c) mniejsza niż energia wypromienowywana z powierzchni Słońca w postaci fal elektromagnetycznych?

12. Kryterium Lawsona dla reakcji d-t (równanie (44.16)) ma postać  $n\tau > 10^{20} \text{ s/m}^3$ . Czy w przypadku reakcji d-d liczba po prawej stronie nierówności powinna być a) taka sama, b) mniejsza czy c) większa?

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

## 44.2 Rozszczepienie jądra: podstawy procesu

1. a) Ile atomów zawiera 1 kg czystego uranu  $^{235}\text{U}$ ? b) Ile energii (w dzulach) wydzielili się w wyniku rozszczepienia 1 kg uranu  $^{235}\text{U}$ ? Przyjmij, że  $Q = 200 \text{ MeV}$ . c) Jak długo świeciłaby żarówka o mocy 100 W zasilana uzyskaną energią?

2. Uzupełnij następującą tabelę, odnoszącą się do ogólnego równania reakcji rozszczepienia  $^{235}\text{U} + n \rightarrow X + Y + bn$ .

X	Y	b
$^{140}\text{Xe}$	—	1
$^{139}\text{I}$	—	2
—	$^{100}\text{Zr}$	2
$^{141}\text{Cs}$	$^{92}\text{Rb}$	—

3. Z jaką szybkością musi zachodzić reakcja rozszczepienia jąder uranu  $^{235}\text{U}$  pod wpływem neutronów, aby wydzielana moc była równa 1,0 W? Przyjmij, że  $Q = 200 \text{ MeV}$ .

4. Izotop plutonu  $^{239}\text{Pu}$  ulega rozszczepieniu w podobny sposób jak uran  $^{235}\text{U}$ . Średnia energia rozszczepienia jest równa 180 MeV. Ile energii (w MeV) zostanie wyzwolonej, jeżeli rozszczepieniu ulegnie 1,0 kg plutonu  $^{239}\text{Pu}$ ?

5. Przekonaj się, że zgodnie z tym, co podano w paragrafie 44.2, średnia energia kinetyczna neutronów w stanie równowagi z materią o temperaturze 300 K jest bliska 0,04 eV.

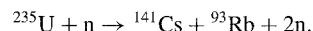
6. Oblicz energię  $Q$  wyzwalaną w wyniku rozszczepienia jądra  $^{98}\text{Mo}$  na dwie równe części. Do rozwiązania potrzebne są masy atomowe izotopu  $^{98}\text{Mo}$  97,905 41 u oraz  $^{49}\text{Sc}$  48,950 02 u. W przypadku gdyby okazało się, że wartość  $Q$  jest dodatnia, wyjaśnij, dlaczego reakcja ta nie zachodzi samorzutnie.

7. Oblicz energię  $Q$  wyzwalaną w wyniku rozszczepienia jądra  $^{52}\text{Cr}$  na dwie równe części. Masa atomowa izotopu  $^{52}\text{Cr}$  51,490 51 u oraz  $^{26}\text{Mg}$  25,982 59 u.

8. Nuklid  $^{235}\text{U}$  ulega rozpadowi  $\alpha$  z czasem połowicznego zaniku  $7,0 \cdot 10^8$  lat. Może on także (rzadko) rozпадać się w wyniku samorzutnego rozszczepienia. Gdyby nie zachodził rozpad  $\alpha$ , czas połowicznego zaniku (na drodze rozszczepienia) byłby równy 3,0 ·

$10^{17}$  lat. a) Ile wynosi szybkość reakcji rozszczepienia w próbce uranu  $^{235}\text{U}$  o masie 1,0 g? (b) Ile rozpadów  $\alpha$  uranu  $^{235}\text{U}$  przypada na jeden akt rozszczepienia?

9. Oblicz energię uwalnianą w reakcji rozszczepienia



Potrzebne do obliczeń masy są równe:

$^{235}\text{U}$	235,043 92 u	$^{93}\text{Rb}$	92,921 57 u
$^{141}\text{Cs}$	140,919 63 u	n	1,008 67 u.

10. Sprawdź, że zgodnie z tabelą 44.1 rozszczepienie uranu  $^{235}\text{U}$  zawartego w 1 kg  $\text{UO}_2$  (wzbogaconym tak, aby izotop  $^{235}\text{U}$  stanowił 3% masowych uranu w tlenku uranu) wystarczy do zasilania żarówki 100 W przez 690 lat.

11. W pewnym akcie rozszczepienia jądra uranu  $^{235}\text{U}$ , zainicjowanym pochłonięciem powolnego neutronu, nie został wyemitowany neutron, a jednym z produktów było jądro  $^{85}\text{Ge}$ . a) Jakie jądro było drugim produktem rozszczepienia? b) Jaki był podział energii reakcji  $Q = 170 \text{ MeV}$  pomiędzy obydwa powstałe jądra? c) Oblicz prędkości początkowe (bezpośrednio po rozpadzie) obydwu jąder.

12. Rozważmy rozszczepienie uranu  $^{238}\text{U}$  wywołane przedkimi neutronami. W jednym z aktów rozszczepienia nie został wyemitowany neutron, a w wyniku rozpadu  $\beta$  pierwotnych produktów powstały trwałe jądra  $^{140}\text{Ce}$  i  $^{99}\text{Ru}$ . a) Ile rozpadów zawierają łącznie obydwa łańcuchy rozpadów  $\beta$  prowadzące do powstania trwałych produktów? b) Oblicz energię  $Q$  wspomnianej reakcji rozszczepienia. Potrzebne do obliczeń masy atomowe są równe:

$^{238}\text{U}$	238,050 79 u	$^{140}\text{Ce}$	139,905 43 u
n	1,008 67 u	$^{99}\text{Ru}$	98,905 94 u

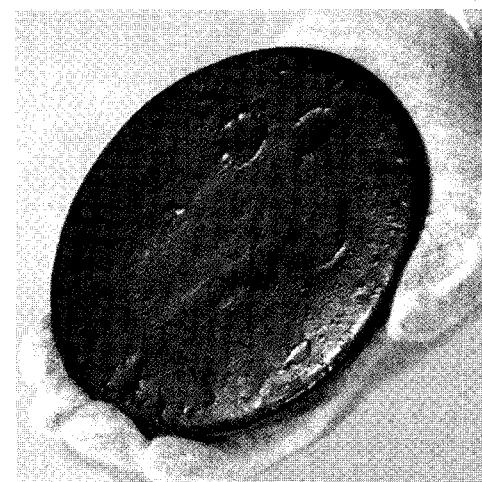
13. Założmy, że bezpośrednio po rozszczepieniu jądra  $^{236}\text{U}$  (równanie (44.1)) powstały fragmenty  $^{140}\text{Xe}$  i  $^{94}\text{Sr}$  stykają się ze sobą powierzchniami. a) Oblicz elektryczną energię potencjalną (w MeV) związaną z odpychaniem się obydwu jąder, zakładając, że są one sferyczne. (Wskazówka: Skorzystaj z równania (43.3), aby obliczyć promień obydwu jąder). b) Porównaj uzyskaną wartość z energią wyzwalaną w typowej reakcji rozszczepienia.

14. Jądro  $^{236}\text{U}$  w wyniku rozszczepienia rozpada się na dwa fragmenty:  $^{140}\text{Xe}$  i  $^{96}\text{Sr}$ . a) O ile procent różni się pole powierzchni powstałych fragmentów od pola powierzchni pierwotnego jądra  $^{236}\text{U}$ ? b) Jaka jest procentowa zmiana objętości? (c) Jaka jest procentowa zmiana elektrycznej energii potencjalnej? Elektryczna energia potencjalna jednorodnie naładowanej kuli o promieniu  $r$  i ładunku  $Q$  jest dana wzorem

$$E_p = \frac{3}{5} \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right).$$

#### 44.4 Reaktor jądrowy

15. Reaktor o mocy 200 MW, w którym zachodzi reakcja rozszczepienia, zużywa połowę swego paliwa w ciągu 3 lat. Ile uranu  $^{235}\text{U}$  znajduje się początkowo w reaktorze? Przyjmij, że cała uzyskana energia pochodzi z rozszczepienia uranu  $^{235}\text{U}$ , który nie jest używany w żadnych innych procesach.
16. Powtórz obliczenia z zadania 15, uwzględniając wychwyt neutronów przez uran  $^{235}\text{U}$ , który nie prowadzi do rozszczepienia.
17. Jądro  $^{238}\text{Np}$  musi uzyskać 4,2 MeV energii, aby mogło ulec rozszczepieniu. Usunięcie neutronu z tego nuklidu wymaga 5,0 MeV energii. Czy jądro  $^{237}\text{Np}$  może ulec rozszczepieniu pod wpływem neutronów termicznych?
18. W bombie atomowej energia jest wyzwalana na skutek niekontrolowanej reakcji rozszczepienia plutonu  $^{239}\text{Pu}$  (lub uranu  $^{235}\text{U}$ ). Siła wybuchu bomby jest oceniana przez porównanie z masą trotylu (TNT), którego wybuch da tę samą energię. Jedna megatona ( $1 \text{ Mt} = 10^6 \text{ ton}$ ) TNT odpowiada wydzieleniu energii równej  $2,6 \cdot 10^{28} \text{ MeV}$ . a) Oblicz siłę wybuchu bomby zawierającej 95 kg plutonu  $^{239}\text{Pu}$ , jeżeli rozszczepieniu ulegnie 2,5 kg plutonu. (Patrz zadanie 4). b) Jaką rolę spełnia pozostała część ładunku plutonu  $^{239}\text{Pu}$  (92,5 kg), skoro nie ulega on rozszczepieniu?
19. Energia termiczna, będąca wynikiem pochłaniania w materii promieniowania emitowanego podczas rozpadu izotopów promieniotwórczych, może posłużyć do budowy niewielkich źródeł zasilania dla satelitów, automatycznych stacji meteorologicznych i innych urządzeń instalowanych w trudno dostępnych miejscach. Niezbędne izotopy promieniotwórcze powstają w dużych ilościach w reaktorach jądrowych, a następnie są oddzielane chemicznie od zużytego paliwa. Jednym z izotopów wykorzystywanych w tym celu jest pluton  $^{238}\text{Pu}$  ( $T_{1/2} = 87,7 \text{ lat}$ ), emittujący cząstki  $\alpha$  o energii  $Q = 5,50 \text{ MeV}$ . Jaką moc cieplną można otrzymać, dysponując 1 kg tego izotopu?
20. (Patrz zadanie 19). Wśród wielu produktów reakcji rozszczepienia, które można wydzielić metodami chemicznymi z paliwa zużytego w reaktorze jądrowym, jest izotop  $^{90}\text{Sr}$  ( $T_{1/2} = 29 \text{ lat}$ ). W dużych reaktorach izotop ten powstaje z wydajnością 18 kg/rok. Dzięki swej promieniotwórczości izotop pozwala wytwarzać energię termiczną z szybkością 0,93 W/g. (a) Wyznacz efektywną energię rozpadu  $Q_{\text{ef}}$  jądra  $^{90}\text{Sr}$ . (Energia efektywna obejmuje wkład od rozpadów wszystkich jąder w łańcuchu rozpadów, którego początkiem jest nuklid  $^{90}\text{Sr}$ , poza energią, którą unoszą z próbki neutrina). b) Potrzebne jest źródło energii elektrycznej o mocy 150 W przeznaczone do zasilania umieszczonej pod wodą boi sygnałowej. Jaka ilość izotopu  $^{90}\text{Sr}$  jest potrzebna przy założeniu, że przemiana energii termicznej na elektryczną zachodzi ze sprawnością 5,0% ?
21. Istnieją obawy, że udostępnianie nowym krajom technologii związanej z energetyką jądrową może zwiększyć szansę wybuchu wojny jądrowej, ponieważ reaktory pozwalają przetwarzać —
- jako produkt uboczny procesu wychwytu neutronu — tani uran  $^{238}\text{U}$  na pluton  $^{239}\text{Pu}$ , który jest materiałem rozszczepialnym stosowanym w bombach jądrowych. Jak wygląda prosty ciąg reakcji obejmujących wychwyt neutronu i rozpad  $\beta$ , który pozwala uzyskać wspomniany izotop plutonu?
22. Czasem życia pokolenia neutronów w reaktorze  $t_{\text{pok}}$  nazywamy średni czas, po którym przedni neutron emitowany w wyniku rozszczepienia staje się neutronem termicznym i może zainicjować kolejny akt rozszczepienia. Wyobraźmy sobie, że w chwili  $t = 0$  reaktor pracuje z mocą  $P_0$ . Wykaż, że w chwili  $t$  moc reaktora  $P(t)$  będzie równa
- $$P(t) = P_0 k^{t/t_{\text{pok}}},$$
- gdzie  $k$  jest współczynnikiem mnożenia. W przypadku pracy ze stałą mocą  $k = 1$ .
23. Bomba atomowa o sile 66 kiloton (patrz zadanie 18) została wykonana z czystego uranu  $^{235}\text{U}$  (rys. 44.15). W wyniku wybuchu rozszczepienia ulega 4,0 % uranu. a) Ile uranu zawiera bomba? b) Ile powstanie pierwotnych produktów rozszczepienia? c) Ile



Rys. 44.15. Zadanie 23. Kęs uranu  $^{235}\text{U}$  przeznaczonego do zastosowania w głowicy bojowej, przygotowany do dalszej obróbki

neutronów powstały w wyniku rozszczepienia zostanie wyemitowanych do środowiska? (Przeciętnie reakcja rozszczepienia daje 2,5 neutronu).

24. W pewnym reaktorze czas życia pokolenia neutronów (patrz zadanie 22) wynosi 1,0 ms. Ile swobodnych neutronów znajduje się w dowolnej chwili w tym reaktorze, jeżeli pracuje on z mocą 500 MW?

25. W pewnym reaktorze czas życia pokolenia neutronów (patrz zadanie 22) wynosi 1,3 ms. Reaktor ten pracuje z mocą 1200 MW.

Aby przeprowadzać testy eksploracyjne, moc tę trzeba okresowo zmniejszać do 350 MW. Pożądany czas tej operacji wynosi 2,6 s. Jaką wartość współczynnika mnożenia trzeba ustawić, aby zmiana mocy zachodziła w pożądanym czasie? [www](#)

**26.** Reaktor pracuje z mocą 400 MW. Czas życia pokolenia neutronów (patrz zadanie 22) w tym reaktorze wynosi 30,0 ms. Ile wyniesie moc wytwarzana w reaktorze po upływie 5,0 min przy założeniu, że w tym czasie współczynnik mnożenia wyniesie 1,0003?

**27.** a) Neutron o masie  $m_n$  i energii kinetycznej  $E_k$  zderza się centralnie ze spoczywającym atomem o masie  $m$ . Wykaż, że względna zmiana energii kinetycznej neutronu w wyniku tego zderzenia wynosi

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{4m_n m}{(m_n + m)^2}.$$

b) Oblicz wartości  $\Delta E_k/E_k$  w przypadku zderzenia neutronu ze spoczywającym atomem wodoru, deuteru, węgla i ołowiu. c) Ile razy neutron musi zderzyć się centralnie z atomem deuteru (jest to często stosowany moderator), aby jego początkowa energia kinetyczna  $E_k = 1,00 \text{ MeV}$  osiągnęła wartość termiczną (0,025 eV)? (W rzeczywistości większość zderzeń w moderatorze nie zachodzi centralnie).

## 44.5 Naturalny reaktor jądrowy

**28.** Ile lat temu stosunek częstości występowania izotopów  $^{235}\text{U}$  do  $^{238}\text{U}$  w naturalnych złożach uranu był równy 0,15?

**29.** Szacuje się, że naturalny reaktor jądrowy opisany w paragrafie 44.5 w okresie swego działania wytworzył 15 gigawatolat energii. a) Jaka była średnia moc reaktora, jeżeli funkcjonował on przez 200 000 lat? b) Ile kilogramów uranu  $^{235}\text{U}$  zużył on czasie swego działania?

**30.** Stwierdzono, że niektóre próbki uranu pobrane ze złoża w obrębie naturalnego reaktora opisanego w paragrafie 44.5 są nieco *wzbogacone* w izotop  $^{235}\text{U}$ , zamiast być zubożone. Spróbuj to wyjaśnić, odwołując się do procesu wychwytu neutronu przez dominujący izotop  $^{238}\text{U}$ , a następnie rozpadu  $\beta$  i  $\alpha$  powstających produktów.

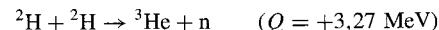
**31.** Wydobywany dziś uran zawiera jedynie 0,72% rozszczepialnego izotopu  $^{235}\text{U}$  zmieszанego z izotopem  $^{238}\text{U}$ . Zawartość ta jest zbyt niska, aby przygotować paliwo dla reaktora, w którym reakcja rozszczepienia zachodzi pod wpływem neutronów termicznych. Z tego powodu naturalny uran trzeba wzbogacać w izotop  $^{235}\text{U}$ . Obydwia izotopy uranu  $^{235}\text{U}$  i  $^{238}\text{U}$  są promieniotwórcze, a ich czasy połowicznego zaniku są równe odpowiednio  $T_{1/2} = 7,0 \cdot 10^8 \text{ lat}$  i  $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9 \text{ lat}$ . Ile lat temu naturalny uran można było wykorzystać jako paliwo dla reaktora, o względnej zawartości  $^{235}\text{U}$  do  $^{238}\text{U}$  równej 3%? [www](#)

## 44.6 Synteza termojądrowa: podstawy procesu

**32.** Znajdź i zapisz podane w tekście przybliżone wysokości bariery kulombowskiej dla a) rozpadu  $\alpha$  nuklidu  $^{238}\text{U}$  i b) rozszczepienia nuklidu  $^{235}\text{U}$  pod wpływem neutronów termicznych.

**33.** Oblicz wysokość bariery kulombowskiej dla centralnego zderzenia dwóch deuteronów. Przyjmij, że promień deuteronu jest równy 2,1 fm.

**34.** Przekonaj się, że 1 kg deuteru wykorzystany w reakcji syntezy



pozwoliłby świecić żarówce o mocy 100 W przez  $3 \cdot 10^4$  lat.

**35.** W przeszłości proponowano inne niż ogrzewanie metody, które pozwoliłyby jądom pokonywać barierę kulombowską w reakcji syntezy. Rozważmy wykorzystanie akceleratora cząstek. Wyobraź sobie, że dysponujesz dwoma akceleratorami wytwarzającymi przeciwbieżne wiązki deuteronów, które mogą zderzać się centralnie. a) Jakie napięcie przyspieszające trzeba zastosować, aby zderzające się deuterony mogły pokonać barierę kulombowską? b) Jak sądzisz, dlaczego opisana metoda nie jest obecnie stosowana?

**36.** Oblicz wysokość bariery kulombowskiej dla dwóch jader  $^7\text{Li}$  wystrzelanych naprzeciw siebie z tą samą energią kinetyczną  $E_k$ . (Wskazówka: Skorzystaj z równania (43.3), aby obliczyć promień jądra).

**37.** Krzywa  $n(E_k)$  na wykresie z rysunku 44.10 przedstawia koncentrację cząstek w zależności od ich energii wyrażoną równaniem

$$n(E_k) = 1,13n \frac{E_k^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-E_k/kT},$$

gdzie  $n$  oznacza całkowitą koncentrację cząstek. W środku Słońca temperatura wynosi  $1,50 \cdot 10^7 \text{ K}$ , a średnia energia protonu  $E_{k\text{sr}}$  jest równa 1,94 keV. Oblicz stosunek koncentracji protonów o energii 5 keV do koncentracji protonów o energii średniej.

**38.** W rozdziale 20 omówiono rozkład Maxwella dla cząsteczek w gazie. a) Wykaż, że najbardziej prawdopodobna energia dana jest wzorem

$$E_{\text{prawd}} = \frac{1}{2}kT.$$

Porównaj ten wzór z krzywą  $n(E)$  z rysunku 44.10, wykreślzoną dla temperatury  $T = 1,50 \cdot 10^7 \text{ K}$ . b) Wykaż, że najbardziej prawdopodobna prędkość dana jest wzorem

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Oblicz wartość liczbową prędkości dla protonów w temperaturze  $T = 1,50 \cdot 10^7 \text{ K}$ . c) Wykaż, że energia odpowiadająca najbardziej prawdopodobnej prędkości (różna od najbardziej prawdopo-

dobnej energii) jest dana wzorem

$$E_{v,\text{prawd}} = kT.$$

Znajdź odpowiednią wartość na krzywej z rysunku 44.10.

#### 44.7 Synteza termojądrowa we wnętrzu Słońca i innych gwiazd

39. Wykaż, że energia uwalniana w wyniku połączenia się trzech cząstek  $\alpha$  w jądro  $^{12}\text{C}$  jest równa 7,27 MeV. Masy atomowe wynoszą 4,0026 u dla helu  $^4\text{He}$  i 12,0000 u dla węgla  $^{12}\text{C}$ .

40. Przekonaliśmy się, że łączna energia  $Q$  wyzwalana w pełnym cyklu protonowo-protonowym wynosi 26,7 MeV. Jak powiązać ten wynik z wartościami  $Q$  dla poszczególnych reakcji składających się na ten cykl, wymienionych na rysunku 44.11?

41. Materia w jądrze Słońca ma gęstość  $1,5 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$  i w przybliżeniu zawiera 35% wodoru i 65% helu. a) Ile wynosi koncentracja protonów w środku Słońca? b) Ile razy uzyskana wartość jest większa od koncentracji cząsteczek w gazie doskonałym w warunkach normalnych (temperatura  $0^\circ\text{C}$ , ciśnienie  $1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ )?

42. Sprawdź trzy wartości  $Q$  podane dla reakcji wymienionych na rysunku 44.11. Niezbędne do obliczeń masy atomowe są równe:

$^1\text{H}$	1,007 825 u	$^4\text{He}$	4,002 603 u
$^2\text{H}$	2,014 102 u	$e^\pm$	0,000 548 6 u
$^3\text{He}$	3,016 029 u		

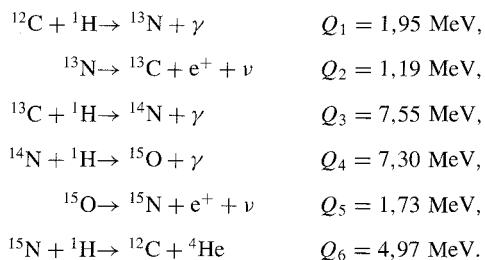
(Wskazówka: Zwróć uwagę na różnicę pomiędzy masami atomowymi a masami jądrowymi i odpowiednio uwzględnij pozytyony).

43. Słońce ma masę  $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , a moc promieniowania wynosi  $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$ . a) Z jaką szybkością masa Słońca ulega przemianie na inne formy energii? b) Jaką część swej pierwotnej masy utraciło Słońce od momentu, kiedy mniej więcej  $4,5 \cdot 10^9$  lat temu rozpoczął się w nim proces spalania wodoru?

44. Oblicz i porównaj energie wyzwalane w wyniku reakcji: a) syntezy 1 kg wodoru głęboko we wnętrzu Słońca i b) rozszczepienia 1 kg uranu  $^{235}\text{U}$  w reaktorze.

45. a) Oblicz szybkość, z jaką w Słońcu powstają neutriny. Przymij założenie, że energia jest wytwarzana tylko w cyklu protonowo-protonowym. b) Z jaką częstością neutrina docierają do Ziemi?

46. W niektórych gwiazdach bardziej wydajnym źródłem energii niż cykl protonowo-protonowy jest cykl węglowy. Składa się on z następujących reakcji:

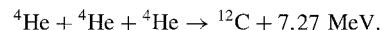


a) Wykaż, że podany cykl reakcji daje te same produkty końcowe co cykl protonowo-protonowy, który przedstawiono na rysunku 44.11. b) Sprawdź, że w obydwu cyklach jest wyzwalana taka sama energia  $Q$ .

47. Spalanie węgla opisuje reakcja  $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$ . Energia termiczna wydzielana w tej reakcji jest równa  $3,3 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$  spalonego węgla. a) Podaj wartość wydzielanej energii termicznej w przeliczeniu na atom węgla. b) Wyraź tę energię w przeliczeniu na kilogram substratów — węgla i tlenu razem. c) Wyobraźmy sobie, że Słońce (masa =  $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ) jest zbudowane z węgla i tlenu w proporcjach zgodnych z równaniem reakcji spalania, a moc jego promieniowania nadal wynosi  $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$ . Jak długo Słońce mógłby istnieć?

48. Założymy, że jądro Słońca jest kulą o promieniu jednej czwartej promienia Słońca, w której zawiera się ósma część masy Słońca. Przymijmy ponadto, że jądro zawiera 35% masowych wodoru oraz że jest w nim wytwarzana cała energia. Ile czasu upłyne, nim Słońce zużyje cały wódór, jeżeli wypala się on z szybkością obliczoną w przykładzie 44.5? Masa Słońca jest równa  $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

49. Wodór w gwiazdzie zamienia się w hel aż do chwili, gdy zawartość helu wzrasta do 100%. Następnie hel zamienia się w węgiel w wyniku reakcji  $3\alpha$

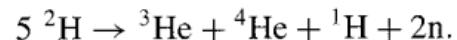


Masa gwiazdy jest równa  $4,6 \cdot 10^{32} \text{ kg}$ , a szybkość wytwarzania w niej energii wynosi  $5,3 \cdot 10^{30} \text{ W}$ . Jak długo potrwa zamiana helu w węgiel?

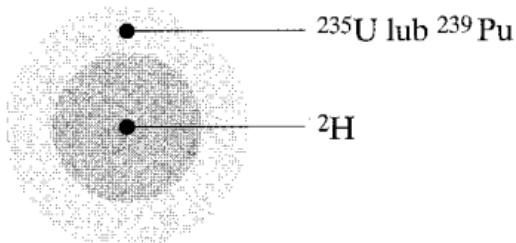
50. Łączna energia  $Q$  wyzwalana w cyklu protonowo-protonowym przedstawionym na rysunku 44.11 jest równa 26,2 MeV. a) Podaj wartość wyzwalanej energii w przeliczeniu na kilogram zużytego wodoru. b) Moc Słońca jest równa  $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$ . Jaka jest szybkość zużycia wodoru, jeżeli cała energia Słońca jest wytwarzana w cyklu protonowo-protonowym? c) Z jaką szybkością Słońce traci swoją masę? Wyjaśni rozbieżność wyników z punktu (b) i (c). d) Masa Słońca wynosi  $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ . Po jakim czasie zmaleje ona o 0,10%, jeżeli przyjmiemy, że szybkość utraty masy jest stała i równa wynikowi uzyskanemu w punkcie (c).

51. Rysunek 44.16 przedstawia wczesny schemat bomby wodorowej. Paliwem jest tu deuter  $^2\text{H}$ . Wysoką temperaturę i koncentrację

częstek niezbędną do zainicjowania reakcji syntezy daje „zapalnik” w postaci bomby rozszczepialnej wykonanej z uranu  $^{235}\text{U}$  lub plutonu  $^{239}\text{Pu}$ , której wybuch daje falę uderzeniową ściskającą deuter. Sumaryczną reakcję syntezy można zapisać w postaci równania



a) Oblicz energię reakcji syntezy  $Q$ . Niezbędne masy atomowe podano w zadaniu 42. b) Oblicz siłę wybuchu bomby (patrz zadanie 18), jeżeli synteza ulega 30% z 500 kg zawartego w niej deuteru.



Rys. 44.16. Zadanie 51

#### 44.8 Kontrolowana synteza termojądrowa

52. Sprawdź wartości energii  $Q$  podane w równaniach (44.13), (44.14) i (44.15). Potrzebne do obliczeń wartości mas są równe:

$^1\text{H}$	1,007 825 u	$^4\text{He}$	4,002 603 u
$^2\text{H}$	2,014 102 u	n	1,008 665 u
$^3\text{H}$	3,016 049 u		

53. Zwykła woda zawiera około 0,0150% masowych wody ciężkiej, w której dwa atomy wodoru są zastąpione atomami deuteru  $^2\text{H}$ . Jaką średnią moc moglibyśmy uzyskać, spalając w ciągu 1 dnia cały deuter zawarty w 1 kg wody w reakcji syntezy opisanej równaniem  $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + \text{n}$  ?

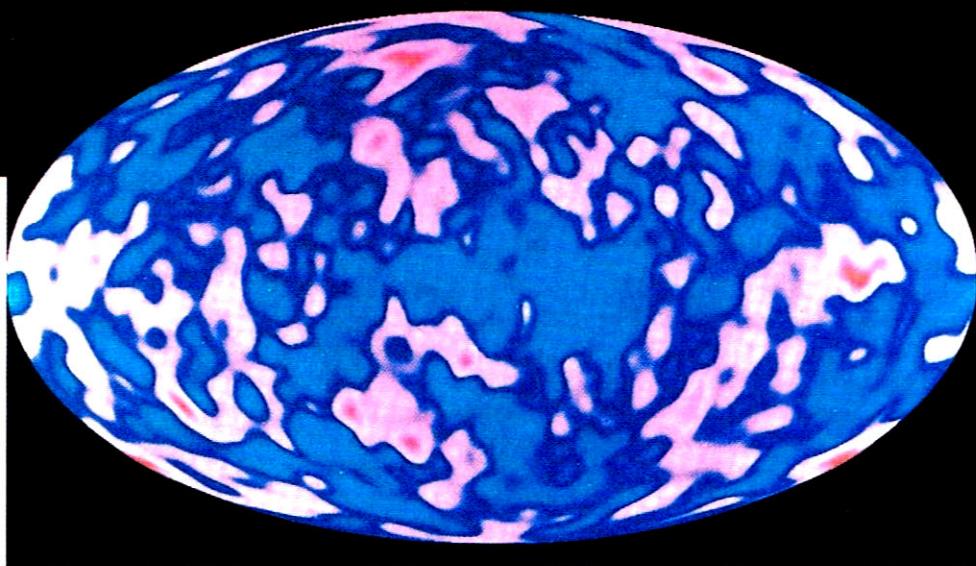
54. Jak dzieli się między cząstkę  $\alpha$  i neutron energia  $Q$  wyzwalana w reakcji syntezy deuteron-tryton zapisanej w równaniu (44.15)? Pomiń stosunkowo niewielkie energie kinetyczne obydwu reagujących cząstek.

# 45 Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

Zamieszczony niżej kolorowy obraz można uznać za zdjęcie Wszechświata, gdy liczył on sobie 300 000 lat, co było około  $15 \cdot 10^9$  lat temu. Taki widok ujrzelibyśmy wtedy, rozglądając się na wszystkie strony (został on przedstawiony w postaci owalu). „Niebo” rozświetlają smugi światła emitowanego przez atomy, ale galaktyki, gwiazdy i planety nie zdążyły jeszcze powstać.

Jak można było  
sfotografować  
tak młody  
Wszechświat?

Odpowiedź znajdziesz w tym  
rozdziale.



## 45.1. Fizyka naprawdę współczesna

Fizycy często określają teorię względności i mechanikę kwantową mianem „fizyki współczesnej”, chcąc odróżnić je od mechaniki newtonowskiej i stworzonej przez Maxwella teorii elektromagnetyzmu, które tworzą zrębę „fizyki klasycznej”. Z upływem lat słowo „współczesna” jest coraz mniej właściwe w odniesieniu do teorii, których podstawy stworzono w początkach XX wieku. Mimo to nadana kiedyś etykieta nadal jest używana.

Ostatni rozdział poświęcimy dwóm kierunkom badań, które w pełni zasługują na miano współczesnych, mimo że ich korzenie sięgają głęboko wstecz. Skupią się one wokół z pozoru tylko prostych pytań:

*Z czego jest zbudowany Wszechświat?*

*Dlaczego Wszechświat wygląda tak, a nie inaczej?*

Poszukiwanie odpowiedzi na nie nabraly tempa w ostatnich dziesięcioleciach.

Wiele zawdzięczamy eksperymentom wykonywanym przy użyciu potężnych akceleratorów cząstek. Jednakże fizycy badający zderzenia cząstek o coraz większych energiach w coraz większych akceleratorach zrozumieli już, że na Ziemi nie da się zbudować akceleratora zdolnego nadać cząstkom dostatecznie wielkich energii, aby zweryfikować najbardziej ogólne teorie. W dziejach Wszechświata istniało tylko jedno źródło takich cząstek i był nim on sam w pierwszych milisekundach swojego istnienia.

W tym rozdziale pojawi się cała masa nowych pojęć i prawdziwy potok nazw cząstek. Nie starajcie się ich koniecznie zapamiętać. Jeżeli poczujecie się przez moment zagubieni, to doświadczycie tego, co fizycy na początku drogi, kiedy widzieli tylko narastające komplikacje i nie mieli zbyt dużych nadziei na zrozumienie czegokolwiek. Wytrwałość w zapoznawaniu się z materiałem pozwoli też odczuć podniecenie, które było udziałem uczonych, gdy wreszcie ze wspaniałych akceleratorów trysnęły nowe wyniki, teoretycy wysunęli idee bez porównania śmielsze niż w przeszłości, a z zamętu zaczął się wyłaniać porządek.

## 45.2. Cząstki, cząstki, cząstki

W latach trzydziestych ubiegłego wieku wielu uczonych sądziło, że moment ostatecznego poznania struktury materii jest bliski. Aby zrozumieć, jak zbudowany jest atom, wystarczały trzy cząstki: elektron, proton i neutron. Fizyka kwantowa dobrze opisywała budowę atomu i promieniotwórczy rozpad  $\alpha$ . Postulowano istnienie neutrina i chociaż jeszcze nie odkryte, to już znalazło swoje miejsce w teorii dobrze opisującej rozpad  $\beta$ , którą stworzył Enrico Fermi. Wierzono, że teoria kwantów zastosowana do protonów i neutronów już wkrótce wyjaśni budowę jądra. Czy trzeba było czegoś więcej?

Euforia nie trwała długo. Już koniec dziesięciolecia zapoczątkował serię odkryć coraz nowych cząstek, która trwa do dziś. Nowym cząstkom nadawano nazwy i symbole, takie jak *mion* ( $\mu$ ), *pion* ( $\pi$ ), *kaon* ( $K$ ) i *sigma* ( $\Sigma$ ). Wszystkie nowo poznane cząstki są nietrwałe; spontanicznie ulegają przemianie w inne



Rys. 45.1. Detektor cząstek OPAL (*omni-purpose apparatus*) zainstalowany w europejskim laboratorium cząstek wielkich energii CERN (Genewa, Szwajcaria). OPAL został zaprojektowany do pomiarów energii cząstek wytwarzanych w zderzeniach elektronów i pozytonów o energiach 50 GeV. Mimo że detektor ma pokaźne rozmiary, jest mały w porównaniu z samym akceleratorem, który ma kształt pierścienia o obwodzie 27 km

cząstki z szybkością, którą opisuje takie samo prawo, jak w przypadku rozpadu jader promieniotwórczych. Jeżeli w chwili  $t = 0$  mamy  $N_0$  cząstek pewnego rodzaju, to ich liczba  $N$  w późniejszej chwili  $t$  jest opisana równaniem (43.14)

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (45.1)$$

Szybkość rozpadu  $R$  maleje od początkowej wartości  $R_0$  zgodnie z równaniem (43.15)

$$R = R_0 e^{-\lambda t}, \quad (45.2)$$

a czas połowicznego zaniku  $T_{1/2}$ , stałą rozpadu  $\lambda$  i średni czas życia  $\tau$  wiąże zależność (43.17)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2. \quad (45.3)$$

Czasy połowicznego zaniku nowych cząstek mieszczą się w przedziale od około  $10^{-6}$  do  $10^{-23}$  s. Niektóre z nich żyją tak krótko, że nie da się ich zaobserwować, a o ich istnieniu świadczą tylko pośrednie dowody.

Nowe cząstki są wytwarzane w wyniku zderzeń przeciwbieżnych wiązek protonów lub elektronów przyspieszanych do wielkich energii w akceleratorach znajdujących się w laboratoriach, takich jak Fermilab (Chicago, USA), CERN (Genewa, Szwajcaria), SLAC (Stanford, USA) oraz DESY (Hamburg, Niemcy). Obserwacja ich jest możliwa dzięki coraz bardziej wyrafinowanym detektorom (rys. 45.1), które rozmiarami i złożonością przypominają same akcelulatory sprzed paru dziesięcioleci.

Dziś znamy kilkaset różnych cząstek. Ich nazewnictwo wyczerpało już możliwości alfabetu greckiego i większość z nich identyfikuje jedynie numer pozycji w regularnie publikowanych tabelach. Aby nie pogubić się w tej masie cząstek, trzeba je uporządkować, przyjmując pewne proste kryteria fizyczne. Na początku spróbujemy podzielić cząstki, odpowiadając na trzy pytania.

### Fermion czy bozon?

Wszystkie cząstki mają własny moment pędu nazywany **spinem**, który omawialiśmy już na przykładzie elektronów, protonów i neutronów w paragafie 32.4. Uogólniając przyjętą tam notację, możemy napisać, że składowa spinu  $\vec{S}$  w dowolnym kierunku (przyjmujemy, że jest on związany z osią  $z$ ) jest równa

$$S_z = m_s \hbar \quad \text{dla } m_s = s, s-1, \dots, -s, \quad (45.4)$$

gdzie  $\hbar$  wynosi  $h/2\pi$ ,  $m_s$  jest *magnetyczną spinową liczbą kwantową*, a  $s$  jest *spinową liczbą kwantową*. Ostatnia wielkość może przyjmować dodatnie wartości połówkowe ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) i nieujemne wartości całkowite ( $0, 1, 2, \dots$ ). Na przykład dla elektronu spinowa liczba kwantowa jest równa  $s = \frac{1}{2}$ . Dlatego spin elektronu (mierzony w dowolnym kierunku) może przyjmować wartość

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (\text{spin w góre})$$

lub

$$S_z = -\frac{1}{2} \hbar \quad (\text{spin w dół}).$$

W praktyce pojęcia *spin* używamy w dwóch znaczeniach: przede wszystkim nazywamy tak własny moment pędu cząstki  $\vec{S}$ , ale często skracamy w ten sposób

nazwę spinową liczby kwantowej  $s$ . W tym przypadku można usłyszeć, że elektron to cząstka o spinie  $\frac{1}{2}$ .

Cząstki o połówkowych wartościach spinowej liczby kwantowej (na przykład elektryny) są nazywane **fermionami** dla uczczenia Enrica Fermiego, który odkrył prawa statystyczne opisujące ich zachowanie (jednocześnie dokonał tego Paul Dirac). Podobnie jak elektryny, również protony i neutrony spełniają warunek  $s = \frac{1}{2}$  i dlatego są fermionami.

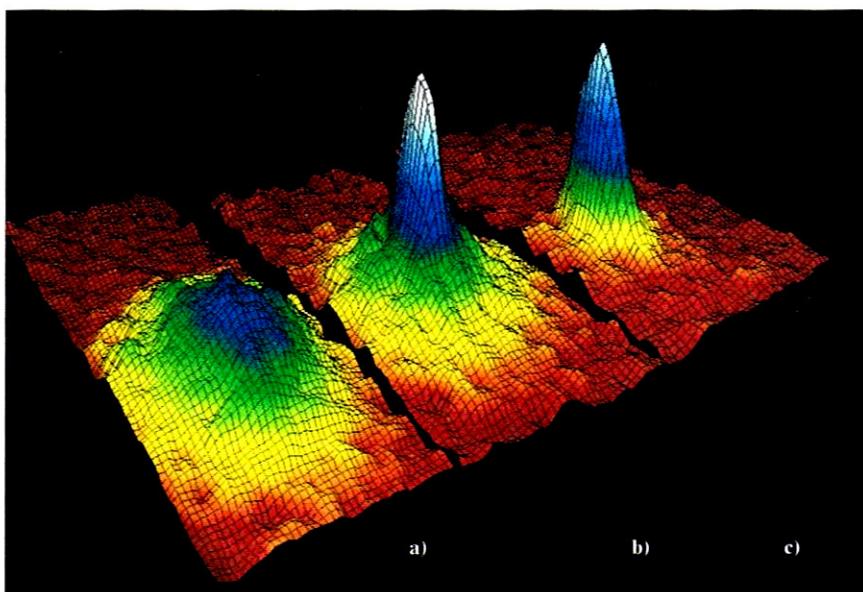
Cząstki, dla których spinowa liczba kwantowa jest zerem lub dodatnią liczbą całkowitą, są nazywane **bozonami** na cześć hinduskiego fizyka Satyendry Natha Bosego, który (jednocześnie z Albertem Einsteinem) odkrył prawa statystyki rządzące ich zachowaniem. Bozony są fotony, dla których  $s = 1$ ; wkrótce poznacie także inne cząstki zaliczane do tej klasy.

Taka klasyfikacja cząstek może wydawać się banalna, ale w istocie jest bardzo ważna, ponieważ:

► Fermiony podlegają zakazowi Pauliego, który mówi, że w danym stanie kwantowym może znajdować się tylko jedna cząstka. Bozony *nie* podlegają zakazowi Pauliego. W każdym stanie kwantowym może znaleźć się dowolna ich liczba.

Wagę zakazu Pauliego poznaliśmy, „budując” atom i umieszczając kolejne elektryny (spin  $\frac{1}{2}$ ) w poszczególnych stanach kwantowych. Zakaz Pauliego doprowadził nas do pełnego opisu budowy i właściwości różnych atomów oraz ciał stałych, takich jak metale i półprzewodniki.

Ponieważ bozony *nie* podlegają zakazowi Pauliego, dążą one do zajmowania stanu o najniższej energii. W roku 1995 zespół z uniwersytetu w Boulder (Kolorado, USA) zdołał uzyskać kondensat zawierający około 2000 atomów rubidu-87 (są one bozonami) w jednym stanie kwantowym o energii bliskiej zera. Autorzy



Rys. 45.2. Trzy wykresy rozkładu prędkości atomów pary rubidu-87. Temperatura gazu na kolejnych rysunkach od (a) do (c) jest coraz mniejsza. Na wykresie (c) ostre maksimum jest wycentrowane wokół prędkości 0 — oznacza to, że wszystkie atomy znajdują się w tym samym stanie kwantowym. Otrzymanie kondensatu Bosego-Einsteina w 1995 roku było szczytowym osiągnięciem fizyki atomowej

tego doświadczenia — Eric A. Cornell i Carl E. Wieman — oraz Wolfgang Ketterle z MIT otrzymali w 2001 r. Nagrodę Nobla.

Warunkiem powstania kondensatu było chłodzenie par rubidu o odpowiednio dużej gęstości do temperatury wystarczająco niskiej, aby długość fali de Broglie'a poszczególnych atomów była większa niż średnia odległość między nimi. W takim przypadku funkcje falowe poszczególnych atomów zaczynają się przekrywać i cały układ znajduje się w jednym stanie kwantowym. Nazywa się go *kondensatem Bosego-Einsteina*. Na rysunku 45.2 pokazano, że po obniżeniu temperatury par rubidu do zaledwie  $1.70 \cdot 10^{-7}$  K układ rzeczywiście „skupia” się w jednym dobrze określonym stanie, w którym prędkości wszystkich atomów są bliskie zeru.

### Hadron czy lepton?

Cząstki można też klasyfikować według czterech podstawowych oddziaływań, w których uczestniczą. *Sila grawitacyjna* działa na wszystkie cząstki, ale w przypadku obiektów mniejszych od atomu jest tak mała, że można ją pominać (prynajmniej w prowadzonych dziś badaniach). *Sily elektromagnetyczne* działają na wszystkie cząstki mające *ładunek elektryczny*; jej skutki są powszechnie znane i mogą być w miarę potrzeby uwzględnione. W tym rozdziale z reguły będziemy pomijać oddziaływanie elektromagnetyczne.

Pozostało nam *oddziaływanie silne*, które wiąże ze sobą nukleony, oraz *oddziaływanie słabe*, odpowiedzialne za rozpad  $\beta$  i inne podobne procesy. W oddziaływaniach słabych uczestniczą wszystkie cząstki, w oddziaływaniach silnych — tylko niektóre.

Mogliśmy więc sklasyfikować cząstki, przyjmując za kryterium ich uczestnicztwo w oddziaływaniu silnym. Cząstki, które *oddziałują silnie*, nazywamy hadronami. Cząstki, które *nie oddziałują silnie*, lecz uczestniczą w oddziaływaniach słabych, to leptony. Protony, neutrony i piony są hadronami; elektrony i neutrino to leptony. Wkrótce poznamy inne cząstki należące do tych grup.

Wśród hadronów można dokonać dalszego podziału: niektóre z nich będące jednocześnie bozonami — na przykład pion — zaliczamy do mezonów. Inne hadrony będące fermionami — na przykład proton — nazywamy barionami.

### Cząstka czy antycząstka?

W roku 1928 Dirac przewidział, że elektron  $e^-$  powinien mieć swój dodatnio naładowany odpowiednik o tej samej masie i spinie. W roku 1932 Carl Anderson odkrył tę cząstkę — pozyton  $e^+$  w promieniowaniu kosmicznym. Z czasem fizycy zrozumieli, że *każda* cząstka ma odpowiadającą jej antycząstkę. Cząstki tworzące taką parę mają identyczną masę, spin i przeciwnie ładunki elektryczne (o ile są naładowane) oraz inne liczby kwantowe, których jeszcze nie omawialiśmy.

Z początku pojęcie *cząstka* było zarezerwowane dla cząstek często spotykanych, jak elektrony, protony czy neutrony, a określenie *antycząstka* odnosiło się do ich rzadko występujących partnerów. Później, w przypadku cząstek nietrwałych, podziału na cząstki i antycząstki dokonywano tak, aby zachować zgodność z pewnymi prawami zachowania, które omówimy w dalszej części rozdziału. (Pewne

zamieszanie wynika stąd, że czasami — jeżeli rozróżnienie nie jest istotne — cząstki i antycząstki nazywamy po prostu cząstkami). Często, chociaż nie zawsze, oznaczamy antycząstkę, umieszczając nad symbolem cząstki kreskę. Na przykład antycząstkę protonu, którego symbolem jest  $p$  — antyproton — oznaczamy pisząc  $\bar{p}$  (czytamy to  $p$  z kreską).

Kiedy cząstka spotyka antycząstkę, obydwie mogą ulec *anihilacji*. Rozumiemy przez to, że cząstka i jej antycząstka znikają, a ich całkowita energia pojawia się w innej postaci. Na przykład w wyniku anihilacji elektronu z pozytonem energię unoszą dwa fotony promieniowania  $\gamma$ :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (45.5)$$

Jeżeli przed anihilacją elektron i pozyton znajdowały się w spoczynku, ich energia całkowita była równa sumie energii spoczynkowych i była równo dzielona pomiędzy obydwa fotony. Aby zachować pęd, fotony, które nie mogą znajdować się w spoczynku, muszą biec w przeciwnych kierunkach.

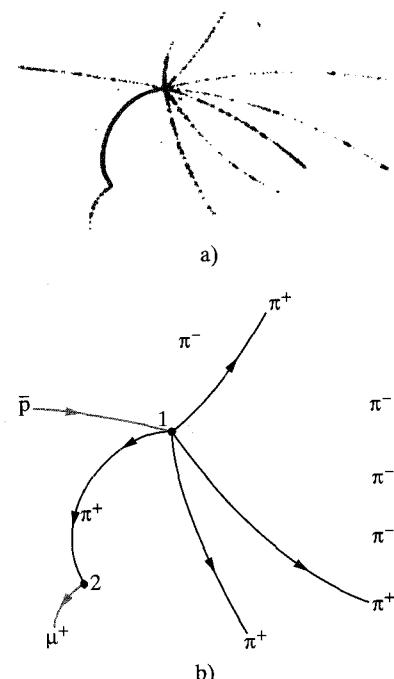
W roku 1996 fizycy w CERN-ie zdołali wytworzyć na kilka nanosekund atomy antywodoru zbudowane z pozytonu i antyprotonu związań ze sobą (prawdopodobnie tak samo, jak elektron jest związany z protonem w atomie wodoru). Taki zbiór antycząstek jest nazywany *antymaterią* w odróżnieniu od zbioru zwykłych cząstek (*materii*).

Można rozważać, czy istnieją galaktyki zbudowane z antymaterii, w których można spotkać antyatomy, antycząsteczki, a nawet antyfizyków. Można też rozważać rozmiary katastrofy będącej wynikiem zderzenia planetoidy pochodzącej z takiej galaktyki z Ziemią (i anihilacji jej części). Na szczęście zgodnie z obecnymi poglądami nie tylko nasza Galaktyka, ale i cały Wszechświat są zbudowane przede wszystkim z materii, a nie antymaterii. (Ta asymetria niepokoi fizyków, którzy przywykli, że na ogół naturę cechuje symetria).

### 45.3. Interludium

Zanim podejmiemy dalszy trud klasyfikacji cząstek, przez chwilę spróbujmy poczuć ducha badań i przyjrzymy się typowemu zdarzeniu, które przedstawia zdjęcie z komory pęcherzykowej (rys. 45.3a).

Widoczne ślady to pęcherzyki powstałe wzduż torów cząstek naładowanych poruszających się w komorze wypełnionej ciekłym wodorem. Cząstkę pozostawiającą dany ślad można zidentyfikować — między innymi — mierząc względne odległości pomiędzy pęcherzykami. Komora znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, które zagina tory cząstek o ładunku dodatnim przeciwne do kierunku ruchu wskazówek zegara, a cząstek o ładunku ujemnym zgodnie z tym kierunkiem. Mierząc promień krzywizny toru, można wyznaczyć pęd cząstki, która go pozostawiła. W tabeli 45.1 podano właściwości cząstek i antycząstek uczestniczących w zdarzeniu przedstawionym na rysunku 45.3a, także tych, które nie zostawiły widocznego śladu. Zgodnie z przyjętą praktyką masy cząstek w tabeli 45.1 — i we wszystkich innych tabelach w tym rozdziale — zostały wyrażone w jednostkach  $MeV/c^2$ . Korzystamy z tych jednostek, ponieważ energie spoczynkowe cząstek są potrzebne o wiele częściej niż ich masy. Jak widać, masa



Rys. 45.3. a) Zdjęcie z komory pęcherzykowej przedstawiające serię zdarzeń zainicjowanych przez antyproton, który wszedł do komory z lewej strony. b) Te same tory naszkicowane i opisane dla większej przejrzystości. Punkty 1 i 2 wskazują miejsca zdarzeń, które opisano w tekście. Topy cząstek są zakrzywione przez pole magnetyczne w komorze, które odchyla poruszające się cząstki naładowane

Cząstki i antycząstki uczestniczące w zdarzeniu przedstawionym na rysunku 45.3

Cząstka	Symbol	Ładunek $q$	Masa [MeV/ $c^2$ ]	Spin $s$	Typ	Średni czas życia [s]	Antycząstka
neutrino	$\nu$	0	0	$\frac{1}{2}$	lepton	cząstka trwała	$\bar{\nu}$
elektron	$e^-$	-1	0,511	$\frac{1}{2}$	lepton	cząstka trwała	$e^+$
mion	$\mu^-$	-1	105,7	$\frac{1}{2}$	lepton	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$\mu^+$
pion	$\pi^+$	+1	139,6	0	mezon	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\pi^-$
proton	$p$	+1	938,3	$\frac{1}{2}$	barion	cząstka trwała	$\bar{p}$

protonu podana w tabeli 45.1 jest równa  $938,3 \text{ MeV}/c^2$ . Aby uzyskać energię spoczynkową protonu, wartość tę mnozymy przez  $c^2$  i otrzymujemy wartość  $938,3 \text{ MeV}$ .

Podstawowymi narzędziami analizy zdjęć, takich jak to z rysunku 45.3a, są prawa zachowania energii, pędu, momentu pędu, ładunku elektrycznego i innych wielkości, których jeszcze nie omawialiśmy. Fotografia na rysunku 45.3a jest w rzeczywistości jedną z dwóch składowych zdjęcia stereoskopowego, które umożliwia analizę zdarzenia w trzech wymiarach.

Ciąg zdarzeń przedstawiony na rysunku 45.3a został zapoczątkowany przez wysokoenergetyczny antyproton ( $\bar{p}$ ), wytworzony w akceleratorze w Lawrence Berkeley Laboratory, który wszedł do komory z lewej strony. Rozpatrywana sekwencja obejmuje trzy oddzielne zdarzenia; dwa zasły w punktach oznaczonych 1 i 2 na rysunku 45.3b, a trzecie — poza przedstawionym polem widzenia. Przyjmyjmy się bliżej każdemu z nich:

1. *Anihilacja protonu i antyprotonu.* W punkcie 1 (rys. 45.3b) padający antyproton (tor niebieski) zderzył się z protonem ciekłego wodoru, który znajdował się komorze. W rezultacie nastąpiła anihilacja obydwu cząstek. Możemy stwierdzić, że antyproton poruszał się, ponieważ większość cząstek powstały w wyniku anihilacji rozbiegła się do przodu — na rysunku 45.3 w prawo. Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd antyprotonu w chwili anihilacji musiał być skierowany w tę samą stronę.

Całkowita energia w procesie zderzenia antyprotonu i protonu jest sumą energii kinetycznej antyprotonu i dwóch (jednakowych) energii spoczynkowych cząstek ( $2 \cdot 938,3 \text{ MeV}$ , czyli  $1876,6 \text{ MeV}$ ). Energia ta wystarcza, aby powstało kilka lżejszych cząstek nawet o pewnej energii kinetycznej. W naszym przypadku w wyniku anihilacji powstały cztery piony dodatnie (tory czerwone na rysunku 45.3b) i cztery piony ujemne (tory zielone). (Dla uproszczenia przyjmiemy, że nie powstały fotony  $\gamma$ , które nie zostawiają śladów w komorze, ponieważ nie mają ładunku elektrycznego). Proces anihilacji można więc zapisać w postaci równania

$$p + \bar{p} \rightarrow 4\pi^+ + 4\pi^- \quad (45.6)$$

Jak widać z tabeli 45.1, piony dodatnie ( $\pi^+$ ) są *cząstками*, a piony ujemne ( $\pi^-$ ) *antycząstkami*. Reakcja zapisana za pomocą równania (45.6) jest przykładem *oddziaływania silnego*, ponieważ wszystkie uczestniczące w niej cząstki są hadronami.

Sprawdzimy teraz, czy w reakcji jest zachowany ładunek elektryczny. W tym celu ładunek elektryczny cząstki zapiszemy w postaci iloczynu  $qe$ , gdzie  $q$  jest **liczbą kwantową ładunku elektrycznego**. Sprawdzenie, czy ładunek elektryczny w reakcji jest zachowany, sprowadza się do porównania sum opisujących go liczb kwantowych dla cząstek w stanie początkowym i końcowym. W reakcji (45.6) całkowity ładunek w stanie początkowym wynosi  $1 + (-1)$ , czyli  $0$ , a w stanie końcowym  $4 \cdot (1) + 4 \cdot (-1)$ , czyli także  $0$ . Widzimy więc, że ładunek jest zachowany.

Z zasady zachowania energii wynika, że energia dostępna w procesie anihilacji  $p\bar{p}$  jest nie mniejsza niż suma energii spoczynkowych protonu i antyprotonu, wynoszącej 1876,6 MeV. Energia spoczynkowa pionu to 139,6 MeV, a więc łączna energia spoczynkowa ośmiu powstałych pionów jest równa  $8 \cdot 139,6$  MeV, czyli 1116,8 MeV. Pozostałą energię, czyli około 760 MeV, osiem pionów przejmuje w postaci energii kinetycznej. Nie ma więc problemów ze spełnieniem zasady zachowania energii.

2. *Rozpad pionu.* Piony są cząstками nietrwałyymi; średni czas życia pionów naładowanych wynosi  $2,6 \cdot 10^{-8}$  s. W punkcie 2 na rysunku 45.3b jeden z pionów dodatnich zatrzymuje się w komorze i ulega samorzutnemu rozpadowi na antymion  $\mu^+$  (tor fioletowy) i neutrino  $\nu$ :



Neutrino, które nie ma ładunku, nie zostawia śladu w komorze. Zarówno antymion, jak i neutrino są leptonami, czyli cząstkami, które nie oddziałują silnie. Dlatego reakция przedstawiona w równaniu (45.7) jest przykładem *oddziaływania słabego*. Energia spoczynkowa antymionu jest równa 105,7 MeV, a więc różnica  $139,6$  MeV –  $105,7$  MeV, czyli 33,9 MeV, może być przekazana antymionowi i neutrino w postaci energii kinetycznej.

Sprawdzimy teraz, czy w reakcji (45.7) zachowany jest spin. W tym celu musimy zbadać, czy w zachodzącym procesie wypadkowa składowa  $S_z$  spinu w kierunku osi  $z$  jest zachowywana. Spinowe liczby kwantowe  $s$  cząstek uczestniczących w reakcji to: 0 dla pionu  $\pi^+$  oraz  $\frac{1}{2}$  dla antymionu  $\mu^+$  i neutrino  $\nu$ . Dlatego składowa  $S_z$  dla  $\pi^+$  jest równa  $0\hbar$ , a dla  $\mu^+$  i  $\nu$  może przyjmować wartości  $+\frac{1}{2}\hbar$  albo  $-\frac{1}{2}\hbar$ .

Składowa  $S_z$  jest zachowana w reakcji (45.7), o ile istnieje *pewiem* sposób, by wartość początkowa  $S_z$  ( $= 0\hbar$ ) była równa sumarycznej wartości  $S_z$  w stanie końcowym. Widzimy, że jeżeli dla jednej z powstałych cząstek, nieważne czy  $\mu^+$ , czy może  $\nu$ , będziemy mieć  $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ , a dla drugiej  $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ , to wartość wypadkowa w stanie końcowym wyniesie  $0\hbar$ . Jak widać, wartość  $S_z$  może być zachowana, a więc proces rozpadu opisany równaniem (45.7) może zachodzić.

Z równania (45.7) wynika też, że w reakcji jest zachowany ładunek, ponieważ w stanie początkowym jest równy  $+1$ , a w stanie końcowym wynosi  $+1 + 0 = +1$ .

3. *Rozpad mionu.* Miony (obojętnie czy  $\mu^+$ , czy  $\mu^-$ ) są nietrwałe i ulegają rozpadowi ze średnim czasem życia  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s. Chociaż nie zostało to uwidocznione na rysunku 45.3b, mion powstały w wyniku reakcji (45.7)

zatrzymuje się i rozpada samorzutnie zgodnie z równaniem

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}. \quad (45.8)$$

Energia spoczynkowa antymionu jest równa 105,7 MeV, a pozytonu zaledwie 0,511 MeV, co umożliwia przekazanie trzem cząstkom powstały w rozważanym rozpadzie 105,2 MeV w postaci energii kinetycznej.

Możecie zapytać, dlaczego w równaniu (45.8) występują *dwa* neutrina. Skąd wiadomo, że nie wystarczy jedno, jak w przypadku reakcji rozpadu pionu opisanej równaniem (45.7)? Odpowiedź brzmi, że spinowe liczby kwantowe mionu, pozytonu i neutrina są równe  $\frac{1}{2}$ ; jedno neutrino nie wystarczyłoby więc, aby w reakcji (45.8) zachować składową  $S_z$  spinu. W parafagie 45.4 podamy jeszcze jeden powód występowania dwóch neutrin.

## Przykład 45.1

Spoczywający pion dodatni rozpada się zgodnie z równaniem

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu.$$

Ile wynosi energia kinetyczna antymionu  $\mu^+$ ? Ile wynosi energia kinetyczna neutrina?

**ROZWIĄZANIE:**

Zauważmy, że w procesie rozpadu musi być zachowana całkowita energia i pęd układu. Zaczniemy od zapisania w postaci równania zasady zachowania energii (energia spoczynkowa  $mc^2$  plus energia kinetyczna  $E_k$ ) dla reakcji rozpadu:

$$m_\pi c^2 + E_{k_\pi} = m_\mu c^2 + E_{k_\mu} + m_\nu c^2 + E_{k_\nu}.$$

Ponieważ ulegający rozpadowi pion spoczywał, jego energia kinetyczna  $E_{k_\pi}$  jest równa 0. Podstawiając podane w tabeli 45.1 wartości mas  $m_\pi$ ,  $m_\mu$  i  $m_\nu$ , stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} E_{k_\mu} + E_{k_\nu} &= m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - m_\nu c^2 \\ &= 139,6 \text{ MeV} - 105,7 \text{ MeV} - 0 \\ &= 33,9 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (45.9)$$

Równanie (45.9) nie pozwala niezależnie od siebie wyznaczyć wartości  $E_{k_\mu}$  oraz  $E_{k_\nu}$ , dlatego musimy skorzystać z zasady zachowania pędu. Ponieważ w chwili rozpadu pion spoczywał, powstałe w rozpadzie cząstki — mion i neutrino muszą poruszać się w przeciwnych kierunkach. Przyjmijmy, że ich ruch zachodzi wzdłuż pewnej osi. Składowe pędu cząstek uczestniczących w reakcji muszą więc spełniać zależność

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu,$$

a ponieważ  $p_\pi = 0$ ,

$$p_\mu = -p_\nu. \quad (45.10)$$

Wartości pędów  $p_\mu$  i  $-p_\nu$  chcemy teraz powiązać z energiami kinetycznymi  $E_{k_\mu}$  i  $E_{k_\nu}$ , co umożliwi nam wyznaczenie ich wartości. Ponieważ nie mamy podstaw, aby założyć, że do opisania ruchu mionu i neutrina wystarczy przybliżenie nierelatywistyczne, skorzystamy z równania (38.51), które w ramach szczególnej teorii względności opisuje zależność pomiędzy pędem a energią kinetyczną:

$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2. \quad (45.11)$$

Z równania (45.10) wynika, że

$$(p_\mu c)^2 = (p_\nu c)^2. \quad (45.12)$$

Podstawiając równanie (45.11) do lewej i prawej strony równania (45.12), otrzymamy

$$E_{k_\mu}^2 + 2E_{k_\mu} m_\mu c^2 = E_{k_\nu}^2 + 2E_{k_\nu} m_\nu c^2.$$

Uwzględniając fakt, że masa neutrina  $m_\nu = 0$  (zgodnie z tabelą 45.1) oraz  $E_{k_\nu} = 33,9 \text{ MeV} - E_{k_\mu}$  (z równania (45.9)) i rozwiązując równanie względem  $E_{k_\mu}$ , otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned} E_{k_\mu} &= \frac{(33,9 \text{ MeV})^2}{(2)(33,9 \text{ MeV} + m_\mu c^2)} \\ &= \frac{(33,9 \text{ MeV})^2}{(2)(33,9 \text{ MeV} + 105,7 \text{ MeV})} \\ &= 4,12 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

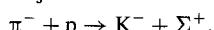
Następnie korzystając z równania (45.9), obliczamy energię kinetyczną neutrina:

$$\begin{aligned} E_{k_\nu} &= 33,9 \text{ MeV} - E_{k_\mu} = 33,9 \text{ MeV} + 4,12 \text{ MeV} \\ &= 29,8 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Widzimy, że chociaż pędy obydwu cząstek są równe, neutrino otrzymuje większą część energii kinetycznej (88%).

## Przykład 45.2

Nieruchome protony w komorze pecherzykowej są bombardowane wysokoenergetycznymi pionami ujemnymi, w wyniku czego zachodzi następująca reakcja:



Energie spoczynkowe cząstek występujących w równaniu są równe

$\pi^-$	139,6 MeV	$K^-$	493,7 MeV
$p$	938,3 MeV	$\Sigma^+$	1189,4 MeV

Jaka jest wartość energii  $Q$  wydzielanej w wyniku reakcji?

## ROZWIĄZANIE:

Przypomnijmy sobie, że energię wydzieloną w wyniku reakcji można obliczyć, korzystając z równania

$$Q = \left( \begin{array}{l} \text{całkowita początkowa} \\ \text{energia spoczynkowa} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{całkowita końcowa} \\ \text{energia spoczynkowa} \end{array} \right).$$

Dla rozważanej reakcji mamy

$$\begin{aligned} Q &= (m_\pi c^2 + m_p c^2) - (m_K c^2 + m_\Sigma c^2) \\ &= (139,6 \text{ MeV} + 938,3 \text{ MeV}) - (439,7 \text{ MeV} + 1189,4 \text{ MeV}) \\ &= -605 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Znak minus oznacza, że proces jest *endotermiczny*, czyli energia kinetyczna padającego pionu ( $\pi^-$ ) musi przekraczać pewną wartość progową, aby reakcja mogła zajść. Energia progowa musi być większa niż 605 MeV, ponieważ z zasadą zachowania pędu wynika, że kaon ( $K^-$ ) i cząstka sigma ( $\Sigma^+$ ) muszą nie tylko powstać, ale także uzyskać pewną energię kinetyczną. Obliczenia w ramach mechaniki relatywistycznej, które w szczegółach wykraczają poza nasze możliwości, pozwalają stwierdzić, że energia progowa rozpatrywanej reakcji jest równa 907 MeV.

## 45.4. Leptony

W tym i następnym paragrafie omówimy niektóre cząstki, kierując się dokonanym wcześniej ich podziałem na leptony i hadrony. Zaczniemy od leptonów, czyli cząstek, które *nie* oddziałują silnie. Dotychczas poznaliśmy dwa leptony — po-wszechnie znany elektron i towarzyszące mu w rozpadzie  $\beta$  neutrino. Mion, którego rozpad opisuje równanie (45.8), jest kolejnym członkiem tej samej rodziny. Fizycy z czasem zrozumieli, że neutrino, które powstaje w rozpadzie mionu, *nie jest tą samą cząstką*, co neutrino emitowane w rozpadzie  $\beta$ , towarzyszące pojawienniu się elektronu. Pierwsze z nich nazywamy **neutrinem mionowym** (symbol  $\nu_\mu$ ), a drugie **neutrinem elektronowym** ( $\nu_e$ ).

Wiemy, że obydwa neutrina są różnymi cząstками, ponieważ kiedy bombardujemy tarczę wiązką neutrin mionowych (pochodzących z rozpadu pionów — równanie (45.7)), powstają *tylko miony* — nigdy elektryny. Z drugiej strony, jeżeli na tarczę skierujemy wiązkę neutrin elektronowych (emitowanych z wnętrza reaktora jądrowego w wyniku rozpadu  $\beta$  produktów rozszczepienia), będziemy obserwować *tylko elektryny* — nigdy miony.

Jeszcze innym leptonem jest **taon**, odkryty w laboratorium SLAC w 1975 roku. Jego odkrywca Martin Perl został jednym z laureatów Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w 1995 roku. Taon ma swoje własne neutrino różne od dwóch pozostałych. W tabeli 45.2 wymieniono wszystkie leptony (cząstki i antycząstki); wszystkie mają spinową liczbę kwantową  $s$  równą  $\frac{1}{2}$ .

Leptony<sup>a</sup>

Rodzina	Cząstka	Symbol	Masa [MeV/ $c^2$ ]	Ładunek $q$	Antycząstka
elektronowa	elektron	$e^-$	0,511	-1	$e^+$
	neutrino elektronowe <sup>b</sup>	$\nu_e$	0	0	$\bar{\nu}_e$
mionowa	mion	$\mu^-$	105,7	-1	$\mu^+$
	neutrino mionowe <sup>b</sup>	$\nu_\mu$	0	0	$\bar{\nu}_\mu$
taonowa	taon	$\tau^-$	1777	-1	$\tau^+$
	neutrino taonowe <sup>b</sup>	$\nu_\tau$	0	0	$\bar{\nu}_\tau$

<sup>a</sup> Wszystkie leptony mają spin  $\frac{1}{2}$ , a więc są fermionami.

<sup>b</sup> Dziś już wiemy, że masy neutrin są różne od zera, choć bardzo małe.

Są powody, aby podzielić leptony na trzy rodziny, każda zawierająca cząstkę (elektron, mion lub taon), związane z nią neutrino i odpowiadające im antycząstki. Co więcej, mamy powody, aby wierzyć, że istnieją tylko trzy rodziny leptonów wymienione w tabeli 45.2. Leptony nie mają wewnętrznej struktury, ani dających się zmierzyć rozmiarów. Sądzimy, że w oddziaływaniach z innymi cząstками lub falami elektromagnetycznymi zachowują się jak idealnie punktowe cząstki elementarne.

### Prawo zachowania liczby leptonowej

Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, że w reakcjach, w których uczestniczą leptony, jest spełnione prawo zachowania liczby kwantowej nazywanej **liczbą leptonową**  $L$ . Każdej cząstce z tabeli 45.2 przypisano liczbę  $L = +1$ , a odpowiadającej jej antycząstce  $L = -1$ . Wszystkie inne cząstki, które nie są leptonami, mają liczbę leptonową równą零  $L = 0$ . Z eksperymentów wynika ponadto, że

► We wszystkich oddziaływaniach liczba leptonowa jest zachowywana osobno dla każdej rodziny leptonów.

W rzeczywistości mamy więc trzy liczby leptonowe  $L_e$ ,  $L_\mu$  i  $L_\tau$ , a wartość każdej z nich musi być zachowana w dowolnej reakcji między cząstkami. Ten fakt doświadczalny jest znany jako **prawo zachowania liczby leptonowej**.

Jako przykład rozważymy rozpad antymionu przedstawiony w równaniu (45.8), które teraz możemy zapisać dokładniej

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + v_e + \bar{v}_\mu. \quad (45.13)$$

Najpierw przyjrzymy się temu równaniu z punktu widzenia jednej z rodzin leptonów, którą stanowią miony. Antymion  $\mu^+$  jest antycząstką (tabela 45.2) i dlatego jego mionowa liczba leptonowa  $L_\mu = -1$ . Dwie cząstki  $e^+$  i  $v_e$  nie należą do rodziny mionów, a więc w ich przypadku  $L_\mu = 0$ . Po prawej stronie pozostało nam antyneutrino  $\bar{v}_\mu$ , którego mionowa liczba leptonowa  $L_\mu = -1$ . Jak widać, po obydwu stronach równania (45.13) mamy tę samą sumaryczną wartość mionowej liczby leptonowej  $L_\mu = -1$ ; gdyby tak nie było, cząstka  $\mu^+$  nie mogłaby ulec rozpadowi zgodnie z podanym równaniem.

Po lewej stronie równania (45.13) nie występują żadne cząstki z elektronowej rodzinie leptonów, a więc elektronowa liczba leptonowa musi być równa zero,  $L_e = 0$ . Po prawej stronie tego równania mamy pozyton, który jest antycząstką (tabela 45.2), a więc jego elektronowa liczba leptonowa wynosi  $L_e = -1$ . Dla neutrina elektronowego będącego cząstką  $L_e = +1$ . Widzimy więc, że po prawej stronie równania (45.13) sumaryczna elektronowa liczba leptonowa jest równa 0. W rozpatrywanym procesie elektronowa liczba leptonowa jest więc zachowana.

W równaniu (45.13) nie występują leptony należące do rodziny taonowej, a więc nie ulega wątpliwości, że dla obydwu stron mamy  $L_\tau = 0$ . Przekonaliśmy się, że kwantowe liczby leptonowe  $L_e$ ,  $L_\mu$  i  $L_\tau$  nie zmieniają się w procesie rozpadu opisanym równaniem (45.13), a ich wartości są odpowiednio równe  $-1$ ,  $0$  i  $0$ . Nasz przykład ilustruje zasadę zachowania liczby leptonowej, która obejmuje we wszystkich oddziaływaniach cząstek.

**SPRAWDZIAN 1:** a) Mezon  $\pi^+$  rozpada się w procesie  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ . Do której rodziny leptonów należy neutrino  $\nu$ ? b) Czy wspomniane neutrino jest cząstką, czy antycząstką? c) Jaka jest wartość jego liczby leptonowej?

## 45.5. Hadrony

Jesteśmy już gotowi, by zająć się hadronami (barionami i mezonami) — cząstkami, które między sobą oddziałują silnie. Na początek uzupełnimy listę praw zachowania o nową pozycję — prawo zachowania liczby barionowej.

Aby wytlumaczyć jego istotę, rozważymy proces rozpadu protonu

$$p \rightarrow e^+ + \nu_e. \quad (45.14)$$

W rzeczywistości proces ten *nigdy* nie zachodzi. Powinniśmy się z tego cieszyć, bo w przeciwnym razie wszystkie protony we Wszechświecie stopniowo zamieniłyby się w pozytony, z katastrofalnymi dla nas konsekwencjami. Zauważmy jednak, że proces ten nie łamie zasad zachowania energii, pędu ani liczby leptonowej.

Obserwowaną trwałość protonu — a także niewystępowanie wielu innych procesów, które zachodziłyby, gdyby proton był nietrwały — tłumaczymy, wprowadzając nową liczbę kwantową — **liczbę barionową**  $B$  i nowe prawo zachowania — **prawo zachowania liczby barionowej**:

► Każdemu barionowi przypisujemy liczbę  $B = +1$ , każdemu antybarionowi liczbę  $B = -1$ , a pozostałym cząstkom  $B = 0$ . Proces nie jest dozwolony, jeżeli powodowałby zmianę sumarycznej liczby barionowej uczestniczących w nim cząstek.

Spośród cząstek występujących w równaniu (45.14) proton ma liczbę barionową  $B = +1$ , a pozyton i neutrino  $B = 0$ . Widzimy więc, że w reakcji nie byłaby zachowana liczba barionowa i dlatego nie może ona zachodzić.

**SPRAWDZIAN 2:** Nigdy nie obserwuje się następującej reakcji rozpadu neutronu:

$$n \rightarrow p + e^-.$$

Która z wymienionych zasad zachowania jest łamana w tym rozpadzie: a) energii, b) momentu pędu, c) pędu, d) ładunku, e) liczby leptonowej, f) liczby barionowej? Masy cząstek wynoszą:  $m_n = 939,6 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2$  oraz  $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ .

### Przykład 45.3

Sprawdź, czy spoczywający proton może ulec rozpadowi zgodnie z następującym równaniem:

$$p \rightarrow \pi^0 + \pi^+.$$

Właściwości protonu i pionu  $\pi^+$  podano w tabeli 45.1. Pion  $\pi^0$  ma zerowy ładunek i spin, a jego energia spoczynkowa wynosi 135,0 MeV.

### ROZWIĄZANIE:

► Trzeba sprawdzić, czy proponowany rozpad nie łamie omówionych wcześniej praw zachowania. Liczba kwantowa opisująca ładunek elektryczny w stanie początkowym jest równa +1, a w stanie końcowym 0 + 1, czyli także +1. Ładunek elektryczny jest więc zachowany w rozważanym procesie. Liczba leptonowa jest także zachowana, ponieważ żadna z trzech cząstek nie jest leptonem, a więc wszystkie liczby leptonowe mają wartość zero.

Nie ma również problemów z zachowaniem pędu. Ponieważ proton spoczywa, jego pęd jest równy零. Wystarczy więc, że obydwa piony będą poruszać się w przeciwnie strony z tym samym pędem, aby ich całkowity pęd był równy零. Fakt, że pęd może być zachowany, oznacza, że proces nie łamie zasad zachowania pędu.

Czy jest dość energii, aby rozpad mógł zajść? Ponieważ proton spoczywa, trzeba sprawdzić, czy jego energia spoczynkowa wystarczy na energie spoczynkowe i energie kinetyczne pionów. Przekonamy się o tym, obliczając wartość energii  $Q$  rozpadu:

$$\begin{aligned} Q &= \left( \begin{array}{l} \text{całkowita początkowa} \\ \text{energia spoczynkowa} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{całkowita końcowa} \\ \text{energia spoczynkowa} \end{array} \right) \\ &= m_p c^2 - (m_0 c^2 - m_+ c^2) \\ &= 938,3 \text{ MeV} - (135,0 \text{ MeV} + 139,6 \text{ MeV}) \\ &= 663,7 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

## Przykład 45.4

Cząstka o nazwie ksi-minus i symbolu  $\Xi^-$  rozpada się zgodnie z równaniem:

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-.$$

Cząstki  $\Lambda^0$  (lambda zero) i  $\pi^-$  są nietrwałe. Następujące rozpady zachodzą kaskadowo, aż powstaną stosunkowo trwałe cząstki:

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e.$$

a) Czy cząstka  $\Xi^-$  jest leptonem, czy hadronem? Jeżeli poprawna jest druga odpowiedź, to czy jest ona barionem, czy mezonem?

### ROZWIĄZANIE:

Przypomnijmy sobie, że istnieją trzy rodziny leptonów (tabela 45.2) i cząstka  $\Xi^-$  nie należy do żadnej z nich. Tym samym  $\Xi^-$  musi być hadronem.

Aby odpowiedzieć na drugie pytanie, trzeba wyznaczyć liczbę barionową cząstki  $\Xi^-$ . Jeżeli jest ona równa  $+1$  lub  $-1$ , to  $\Xi^-$  jest barionem. Jeżeli jest ona równa  $0$ , to  $\Xi^-$  jest mezonem. Aby się o tym przekonać, napiszemy sumaryczny schemat rozpadu  $\Xi^-$  na stosunkowo trwałe produkty:

$$\Xi^- \rightarrow p + 2(e^- + \bar{\nu}_e) + 2(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu). \quad (45.15)$$

Po prawej stronie równania mamy proton o liczbie barionowej  $+1$  oraz elektrony i neutriny, których liczby barionowe są równe  $0$ . Sumaryczna wartość liczby barionowej po prawej stronie równania jest równa  $+1$ . Taka sama musi być liczba barionowa cząstki  $\Xi^-$ , która samodzielnie występuje po lewej stronie równania. Dochodzimy więc do wniosku, że  $\Xi^-$  jest barionem.

Dodatnia wartość  $Q$  mówi, że początkowa energia spoczynkowa jest większa od końcowej energii spoczynkowej. Proton ma więc dość energii, aby rozpaść się na dwa piony.

Czy spin jest zachowany w procesie rozpadu? Trzeba sprawdzić, czy składowa  $S_z$  spinu wzduż dowolnej osi  $z$  może być zachowana w rozpadzie. Kwantowe liczby spinowe s częścią uczestniczących w reakcji to  $\frac{1}{2}$  dla protonu i  $0$  dla obydwu pionów. Oznacza to, że w przypadku protonu składowa  $S_z$  może przyjąć wartość  $+\frac{1}{2}\hbar$  lub  $-\frac{1}{2}\hbar$ , a dla obydwu pionów jest równa  $0\hbar$ . Widzimy więc, że wartość  $S_z$  nie może być zachowana i proponowany rozpad protonu nie może zachodzić.

W rozpadzie nie jest także zachowana liczba barionowa: proton ma liczbę barionową  $B = +1$ , a obydwa piony liczby barionowe  $B = 0$ . Niezachowanie liczby barionowej jest kolejną przyczyną uniemożliwiającą proponowany rozpad.

b) Czy w procesie rozpadu są zachowane trzy liczby leptonowe?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że w każdym procesie musi być z osobna zachowana liczba leptonowa dla każdej rodziny leptonów z tabeli 45.2. Rozważmy najpierw elektronową liczbę leptonową  $L_e$ , która wynosi  $+1$  dla elektronu  $e^-$ ,  $-1$  dla antyneutrina elektronowego  $\bar{\nu}_e$  i  $0$  dla pozostałych cząstek w równaniu (45.15). Widzimy, że łączna wartość liczby elektronowej  $L_e$  przed rozpadem wynosi  $0$ , a po rozpadzie  $2[+1 + (-1)] + 2(0 + 0) = 0$ , zatem łączna elektronowa liczba leptonowa jest zachowana. Podobnie można wykazać, że łączne liczby leptonowe są zachowane dla rodzin mionów i taonów.

c) Co można powiedzieć o spinie cząstki  $\Xi^-$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że w rozpadzie opisanym równaniem (45.15) musi być zachowana składowa  $S_z$  spinu. Możemy więc wyznać składową  $S_z$  spinu dla cząstki  $\Xi^-$  występującej po lewej stronie równania, rozważając składowe  $S_z$  dziewięciu cząstek po prawej stronie równania. Wszystkie te cząstki mają spin  $\frac{1}{2}$  i dla tego składowa  $S_z$  dla każdej z nich może przyjmować wartość  $+\frac{1}{2}\hbar$  lub  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Niezależnie jaką kombinację przyjmiemy, łączna wartość będzie iloczynem nieparzystej wielokrotności ułamka  $\frac{1}{2}$  i liczby  $\hbar$ . Tym samym składowa  $S_z$  cząstki  $\Xi^-$  musi być iloczynem nieparzystej wielokrotności ułamka  $\frac{1}{2}$  i liczby  $\hbar$ , a więc spinowa liczba kwantowa musi mieć wartość połówkową. (W rzeczywistości kwantowa liczba spinowa wynosi  $\frac{1}{2}$ ). Cząstka  $\Xi^-$  jest wymieniona wraz z innymi barionami o spinie  $\frac{1}{2}$  w tabeli 45.3).

## 45.6. Jeszcze jedno prawo zachowania

Cząstki mają jeszcze inne właściwości, oprócz tych wymienionych już wcześniej: masy, ładunku, spinu, liczby leptonowej i liczby barionowej. Pierwszą z tych właściwości odkryto, kiedy naukowcy zauważali, że pewne nowe cząstki, jak kaon ( $K$ ) czy sigma ( $\Sigma$ ), zawsze powstają parami. Wydawało się, że w żadnym procesie nie można wytworzyć tylko jednej z tych cząstek. Na przykład, jeżeli wiązka wysokoenergetycznych pionów oddziałuje z protonami obecnymi w komorze pęcherzykowej, często obserwujemy reakcję



Natomiast reakcja



która nie łamie żadnego ze znanych w początkach badań nad cząstками elementarnymi praw zachowania, nie zachodzi nigdy.

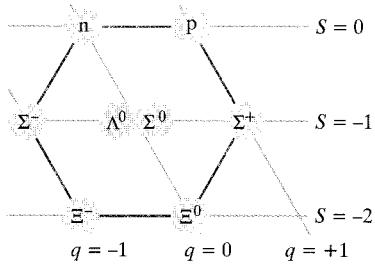
W końcu wysunięto hipotezę (uczynili to Murray Gell-Mann z USA i niezależnie K. Nishijima z Japonii), że niektóre cząstki mają nową właściwość, która otrzymała nazwę **dziwność**. Dziwność ma własną liczbę kwantową  $S$  oraz prawo jej zachowania. (Musicie uważać, aby nie pomylić występującego tu symbolu  $S$  z oznaczeniem spinu). Określenie **dziwność** wzięło się stąd, że jeszcze przed dokonaniem jednoznacznej identyfikacji cząstek nazywano je „cząstkami dziwnymi” i to określenie do nich przywarło.

W przypadku protonu, neutronu i pionu  $S = 0$ , co oznacza, że nie są to cząstki „dziwne”. Wysunięto hipotezę, że dla kaonu  $K^+$  mamy  $S = +1$ , a dla cząstki  $\Sigma^+$   $S = -1$ . W reakcji (45.16) sumaryczna dziwność w stanie początkowym i końcowym jest równa 0. Ale w reakcji (45.17) w stanie końcowym wypadkowa dziwność ma wartość  $-1$ ; tym samym reakcja nie zachowuje dziwności i dlatego nie może ona zachodzić. Jest oczywiste, że na listę praw zachowania musimy wpisać jeszcze jedną pozycję — **prawo zachowania dziwności**:

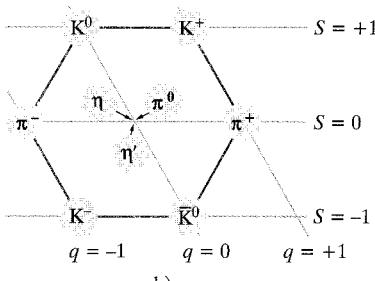
➤ Dziwność jest zachowywana w oddziaływaniach silnych.

Wprowadzanie nowej właściwości cząstek tylko po to, aby wy tłumaczyć ich zagadkowe zachowanie, jak na przykład zachodzenie tylko jednej z reakcji (45.16) i (45.17), mogło wydawać się mało eleganckie. Jednakże dziwność i związana z nią liczba kwantowa już wkrótce pojawiła się w innych zagadnieniach fizyki cząstek elementarnych. Obecnie jest ona traktowana jako pełnoprawna właściwość cząstek na równi z ładunkiem i spinem.

Niech was nie zwiedzie mało poważne brzmienie nazwy. Dziwność nie jest ani trochę bardziej tajemniczą właściwością cząstek niż ładunek. Obydwie te właściwości cząstki mogą mieć lub nie. Każdą opisuje liczba kwantowa. Każda też jest związana z prawem zachowania. Odkryto jeszcze inne właściwości cząstek, nadając im jeszcze bardziej podejrzane nazwy, jak *pięknko* czy *powab*, ale zawsze są to pełnoprawne wielkości. Aby poprzeć to przykładem, opiszemy, jak dziwność pomogła fizykom zrozumieć ważne prawidłowości wśród cząstek elementarnych.



a)



b)

Rys. 45.4. a) Diagram przedstawiający osiem barionów o spinie  $\frac{1}{2}$  wymienionych w tabeli 45.3, uzyskany w ramach formalizmu ośmiokrotnej ścieżki. Cząstki są oznaczone jako kółka na wykresie dziwność-ładunek. Do przedstawienia kwantowej liczby ładunkowej użyto osi skośnej. b) Analogiczny schemat dla dziewięciu mezonów o spinie 0 wymienionych w tabeli 45.4.

## 45.7. Ścieżka ośmiokrotna

Mamy osiem barionów — w tym neutron i proton, których spinowa liczba kwantowa jest równa  $\frac{1}{2}$ . Niektóre ich właściwości podano w tabeli 45.3. Na rysunku 45.4a przedstawiono fascynujący obraz, który ujrzymy, jeżeli wykreślimy zależność dziwności tych barionów od ich ładunku, przedstawiając ładunek na osi skośnej. Sześć spośród ośmiu barionów tworzy sześciokąt foremny, a dwa pozostałe leżą w jego środku.

Przejedźmy teraz od hadronów zwanych barionami do innych hadronów — mezonów. Dziewięć takich cząstek o spinie 0 wymieniono w tabeli 45.4. Jeżeli przedstawimy je na takim samym wykresie zależności dziwności od ładunku, jak ten, który wykonaliśmy dla barionów, ujrzymy taki sam fascynujący obraz! Te i podobne diagramy są częścią formalizmu *ścieżki ośmiokrotnej*<sup>1</sup>, który w 1961 roku wymyślili niezależnie od siebie Murray Gell-Mann z California Institute of Technology i Yuval Ne'eman z Imperial College w Londynie. Dwa schematy z rysunku 45.4 reprezentują liczniejszą grupę symetrycznych diagramów, które pozwalają przedstawiać bariony i mezony.

Analogiczny diagram dla *dziecięciu* barionów o spinie  $\frac{3}{2}$  (nie przedstawiony tu) przypomina ustawione w trójkąt kręgle. Jednak, kiedy po raz pierwszy zaproponowano taki układ, znano tylko *dziewięć* cząstek z tej grupy; brakowało jednej, która znajduje się w wysuniętym wierzchołku. W roku 1962 Gell-Mann, opierając się na swojej teorii i kierując się wymaganiami symetrii, powiedział mniej więcej tak:

Twierdzę, że istnieje barion o spinie  $\frac{3}{2}$ , ładunku -1, dziwności -3 i energii spoczynkowej około 1680 MeV. Jeżeli poszukacie cząstki omega minus (proponuję, żeby ją tak nazwać), powinniście ją znaleźć.

Zespół fizyków z Brookhaven National Laboratory, którym kierował Nicholas Samios, podjął wyzwanie i odnalazł „brakującą” cząstkę. Nic nie daje większego zaufania do teorii niż szybkie eksperymentalne potwierdzenie jej przewidywań.

### Osiem barionów o spinie $\frac{1}{2}$

Cząstka	Symbol	Masa [MeV/ $c^2$ ]	Liczby kwantowe	
			ładunek $q$	dziwność $S$
proton	p	938,3	+1	0
neutron	n	939,6	0	0
lambda	$\Lambda^0$	1115,6	0	-1
sigma	$\Sigma^+$	1189,4	+1	-1
sigma	$\Sigma^0$	1192,5	0	-1
sigma	$\Sigma^-$	1197,3	-1	-1
ksi	$\Xi^0$	1314,9	0	-2
ksi	$\Xi^-$	1321,3	-1	-2

### Dziewięć mezonów o spinie 0.<sup>a</sup>

Cząstka	Symbol	Masa [MeV/ $c^2$ ]	Liczby kwantowe	
			ładunek $q$	dziwność $S$
pion	$\pi$	135,0	0	0
pion	$\pi^+$	139,6	+1	0
pion	$\pi^-$	139,6	-1	0
kaon	$K^+$	493,7	+1	+1
kaon	$K^-$	493,7	-1	-1
kaon	$K^0$	497,7	0	+1
kaon	$\bar{K}^0$	497,7	0	-1
eta	$\eta$	547,5	0	0
eta prim	$\eta'$	957,8	0	0

<sup>a</sup> Wszystkie mezony są bozonami o spinach 0, 1, 2, ... Wszystkie mezony wymienione w tej tabeli mają spin 0.

<sup>1</sup>Termin odwołuje się do mistycyzmu Wschodu. Liczba osiem oznacza osiem liczb kwantowych (w podręczniku definiujemy tylko niektóre z nich), które występują w wykorzystującej symetrię teorii tłumaczącej diagramy.

Diagramy formalizmu ośmiokrotnej ścieżki są dla fizyki cząstek elementarnych tym samym, czym układ okresowy dla chemii. W obydwiu przypadkach obserwujemy pewien porządek, a wszelkie puste miejsca (nieznane cząstki lub pierwiastki) widać wyraźnie; ukierunkowuje to poszukiwania uczonych. W przypadku układu okresowego, już samo jego istnienie sugerowało, że atomy nie są cząstками elementarnymi, lecz mają wewnętrzną strukturę. Podobnie diagramy wykonywane dla cząstek przemawiają za istnieniem wewnętrznej struktury bariońów i mezonów, która odpowiadałaby za ich właściwości. Taką strukturę wyjaśnia *model kwarkowy*, który teraz omówimy.

## 45.8. Model kwarkowy

W roku 1964 Gell-Mann i George Zweig niezależnie od siebie zauważyli, że formalizm ośmiokrotnej ścieżki łatwo wyjaśniać, jeżeli przyjmie się hipotezę, że mezony i bariony są zbudowane z mniejszych składowych, które Gell-Mann nazywał **kwarkami**. Na początku była mowa o trzech kwarkach: *kwarku górnym* (symbol u „up”), *kwarku dolnym* (symbol d „down”) oraz *kwarku dziwnym* (symbol s „strange”). Właściwości im przypisywane podano w tabeli 45.5. (Nazwy wspomnianych kwarków, a także tych, które poznamy później, nie mają żadnego szczególnego znaczenia. Wszystkie te nazwy razem nazywamy *zapachami kwarków*. Równie dobrze można by nazwać kwarki: waniliowy, czekoladowy i truskawkowy, a nie górny, dolny i dziwny).

Ułamkowy ładunek elektryczny kwarków może wprawiać w zakłopotanie. Wstrzymajcie się z oceną do chwili, kiedy zobaczycie, jak dobrze te ułamkowe ładunki sumują się do całkowitych ładunków mezonów i barionów. We wszystkich normalnych sytuacjach, niezależnie czy procesy zachodzą na Ziemi, czy gdzieś w kosmosie, kwarki zawsze są połączone w dwójkę lub trójkę z powodów, których nadal dobrze nie rozumiemy. Jednak w 2000 roku niektóre akceleratory zyskały wreszcie możliwość bombardowania tarcz pociskami o wystarczająco wielkiej energii, by w wyniku zderzeń mogły pojawić się swobodne kwarki.

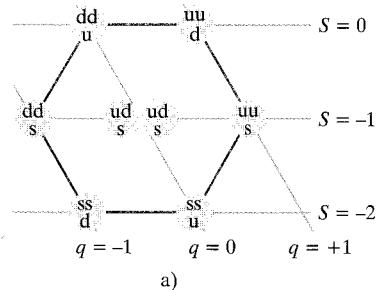
Wiemy już, jak można budować atomy, łącząc ze sobą elektrony i jądra. Teraz zobaczymy, jak otrzymać mezony i bariony, tworząc różne kombinacje kwarków. Okazuje się, że:

► Nie znamy żadnych mezonów ani barionów, których właściwości nie można by zrozumieć, biorąc właściwą kombinację kwarków. Odwrotnie, nie ma też dozwolonej kombinacji kwarków, która nie odpowiadałaby obserwowanemu mezonowi lub barionowi.

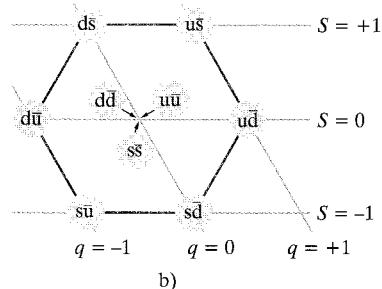
Przyjrzyjmy się najpierw barionom z tabeli 45.3.

### Kwarki i bariony

Każdy barion jest zbudowany z trzech kwarków; niektóre kombinacje przedstawiono na rysunku 45.5a. Patrząc na liczbę barionową, widzimy, że dowolne trzy kwarki (dla każdego  $B = +\frac{1}{3}$ ) dają poprawny barion ( $B = +1$ ).



a)



b)

Rys. 45.5. a) Struktura kwarkowa ośmiu barionów o spinie  $\frac{1}{2}$  z rysunku 45.4a. (Chociaż dwa środkowe bariony zbudowane są z tych samych kwarków, cząstka sigma jest stanem wzbudzonym lambdy i ulega rozpadowi do cząstki lambda, emitując foton  $\gamma$ ). b) Struktura kwarkowa dziewięciu mezonów o spinie 0 z rysunku 45.4b

Ładunek elektryczny również nie nastręcza problemów, o czym przekonają nas trzy przykłady. Proton jest zbudowany z kwarków u, u i d, a więc jego ładunek jest równy

$$q(uud) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + (-\frac{1}{3}) = +1.$$

Neutron jest zbudowany z kwarków u, d i d i dlatego jego ładunek jest równy

$$q(udd) = \frac{2}{3} + (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) = 0.$$

Cząstka  $\Sigma^-$  (sigma minus) jest zbudowana z kwarków d, d i s, o sumarycznym ładunku

$$q.dds = -\frac{1}{3} + (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) = -1.$$

Równie łatwo poradzić sobie z dziwnością. Możecie to sprawdzić, biorąc na przykład dane cząstki  $\Sigma^-$  z tabeli 45.3 oraz właściwości kwarków z tabeli 45.5.

### Kwarki i mezony

Mezony są zbudowane z par kwark–antykwark; przykłady takich połączeń przedstawiono na rysunku 45.5b. Model mezonu w postaci pary kwark–antykwark odzwierciedla fakt, że mezony nie są barionami, czyli ich liczba barionowa wynosi zero,  $B = 0$ . Liczba barionowa kwarka jest równa  $+\frac{1}{3}$ , a antykwarka  $-\frac{1}{3}$ ; ich suma daje więc liczbę barionową mezonu równą zeru.

Weźmy na przykład mezon  $\pi^+$  zbudowany z kwarka górnego u i antykwarka dolnego  $\bar{d}$ . Z tabeli 45.5 wynika, że ładunek elektryczny kwarka górnego wynosi  $+\frac{2}{3}$ , a antykwarka dolnego  $+\frac{1}{3}$  (znak ładunku jest przeciwny niż dla kwarka dolnego). W rezultacie stwierdzamy, że ładunek pionu  $\pi^+$  jest równy +1, gdyż

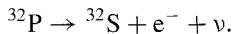
$$q(u\bar{d}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = +1.$$

Wszystkie liczby kwantowe opisujące ładunek i dziwność kombinacji przedstawionych na rysunku 45.5b są zgodne z tymi, które podano w tabeli 45.4 oraz na rysunku 45.4b. Sprawdźcie, że wykorzystano wszystkie możliwe kombinacje kwark–antykwark dla kwarka górnego, dolnego oraz dziwnego i otrzymano w ten sposób wszystkie znane mezony o spinie 0. Elementy układanki pasują idealnie.

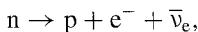
 **SPRAWDZIAN 3:** Czy kombinacja kwarka dolnego (d) i antykwarka górnego ( $\bar{u}$ ) opisuje: a) mezon  $\pi^0$ , b) proton, c) mezon  $\pi^-$ , d) mezon  $\pi^+$ , czy e) neutron?

### Nowe spojrzenie na rozpad $\beta$

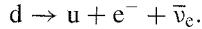
Przyjrzyjmy się jeszcze, jak wygląda rozpad  $\beta$  z punktu widzenia modelu kwarckowego. Równanie (43.23) opisuje typowy przykład takiego procesu



Po odkryciu neutronu i stworzeniu przez Fermiego teorii rozpadu  $\beta$ , fizycy doszli do wniosku, że polega on na przemianie neutronu w proton we wnętrzu jądra, zgodnie z równaniem



w którym dokładniej wskazano rodzaj powstającego neutrina. Dziś możemy już stwierdzić, że neutron (udd) ulega przemianie na proton (uud) dzięki wymianie kwarka dolnego na górnego. Widzimy więc, że fundamentalny rozpad  $\beta$  można opisać równaniem



Dzięki coraz większej wiedzy o elementarnej strukturze materii możemy pogłębiać nasze zrozumienie poznanych wcześniej procesów. Widzimy też, że model kwarkowy nie tylko pozwala lepiej zrozumieć budowę cząstek, ale mówi też wiele na temat ich oddziaływań.

### Jeszcze kilka kwarków

Są jeszcze inne cząstki, a w ramach formalizmu ósmokrotnej ścieżki inne diagramy, o których nie wspominaliśmy. Aby je opisać, potrzebujemy trzech nowych kwarków: *kwarka powabnego* (symbol „c” *charm*), *kwarka wysokiego* (symbol „t” *top*) oraz *kwarka niskiego* (symbol „b” *bottom*). Istnieje razem sześć kwarków, które wszystkie wymieniono w tabeli 45.5.

Kwarki<sup>a,b</sup>

Kwark	Symbol	Masa [MeV/ $c^2$ ]	Liczby kwantowe			
			ładunek $q$	dziwność $S$	liczba barionowa $B$	antycząstka
górnego	u	5	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{u}$
dolnego	d	10	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{d}$
powabny	c	1500	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{c}$
dziwny	s	200	$-\frac{1}{3}$	-1	$+\frac{1}{3}$	$\bar{s}$
wysoki	t	175 000	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{t}$
niski	b	4300	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$\bar{b}$

<sup>a</sup> Wszystkie kwarki (także antykwarki) mają spin  $\frac{1}{2}$ , a więc są fermionami. Liczby kwantowe  $q$ ,  $S$  i  $B$  dla antykwarka mają przeciwnie wartości niż dla odpowiedniego kwarka.

<sup>b</sup> W języku angielskim kwarki t i b są także nazywane „true” i „beauty”, co w polskim nazewnictwie tłumaczy się jako „prawdziwy” i „piękny”. Polskie tłumaczenie nazw „top” i „bottom”, wobec zarezerwowania nazw „górnego” i „dolnego” dla kwarków u i d, sprawia problemy. Propozycje nazw „wysoki” i „niski” wysunęła Komisja Nazewnictwa Polskiego Towarzystwa Fizycznego. Inne nazwy, które można spotkać, to „szczytowy” (t) i „denny” (b) (*przyp. tłum.*).

Zwrócić uwagę, że trzy kwarki mają wyjątkowo duże masy. Najcięższy z nich t (wysoki) ma masę niemal 170 razy większą niż proton. Aby otrzymać cząstki zawierające tak ciężkie kwarki, które muszą mieć odpowiednio duże energie spoczynkowe, potrzeba coraz większych i większych energii. Właśnie dlatego kwarków tych nie odkryto wcześniej.

Pierwszą zaobserwowaną cząstką zawierającą kwark powabny był mezon J/Ψ zbudowany z kwarków c i  $\bar{c}$ . Został on odkryty w 1974 roku jednocześnie i niezależnie od siebie przez zespoły Samuela Tinga z Brookhaven National Laboratory oraz Burtona Richtera ze Stanford University.

Kwark wysoki umykał wszystkim próbom uzyskania go w laboratorium aż do 1995 roku, kiedy jego istnienie zostało potwierdzone za pomocą Tevatronu, olbrzymiego akceleratora cząstek w Laboratorium im. Fermiego w Chicago. W tym

akceleratorze protony i antyprotony, każdy o energii 0,9 TeV ( $= 9 \cdot 10^{11}$  eV) zderzają się ze sobą w obrębie dwu potężnych detektorów cząstek. W bardzo nielicznych przypadkach zderzające się protony wytwarzają pary składające się z kwarka i antykwarka wysokiego. Pary te *bardzo* szybko rozpadają się na cząstki, które można wykryć i na podstawie ich obecności wywnioskować o istnieniu pary kwark wysoki–antykwark wysoki.

Powróćmy na chwilę do tabeli 45.5 (rodzina kwarków) oraz tabeli 45.2 (rodzina leptonów) i zauważmy, że istnieje duże podobieństwo pomiędzy „sześciocząstkowymi” rodzinami, z których każda w naturalny sposób rozпадa się na trzy dwucząstkowe podrodziny. Według naszej obecnej wiedzy leptony i kwarki są cząstkami w pełnym znaczeniu elementarnymi i nie mają żadnej wewnętrznej struktury.

## Przykład 45.5

Cząstka  $\Xi^-$  ma spin  $s$  równy  $\frac{1}{2}$ , ładunek  $q$  równy  $-1$  i dziwność  $S$  równą  $-2$ . Wiadomo też, że cząstka ta nie zawiera kwarka niskiego. Z jakiej kombinacji kwarków jest zbudowana cząstka  $\Xi^-$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Z przykładu 45.4 wiemy już, że cząstka  $\Xi^-$  jest barionem. Wynika stąd, że  musi ona być zbudowana z trzech kwarków (a nie dwóch, jak w przypadku mezonów).

Zwrócmy uwagę, że dziwność  $S$  cząstki  $\Xi^-$  wynosi  $-2$ . Zauważmy, że  różną od zera dziwność ma tylko kwark dziwny  $s$  i antykwark dziwny  $\bar{s}$ . Co więcej, tylko kwark dziwny ma *ujemną* dziwność, a więc cząstka  $\Xi^-$  musi zawierać ten kwark. Ponieważ dziwność  $\Xi^-$  jest równa  $-2$ , więc cząstka musi zawierać dwa kwarki dziwne.

Aby stwierdzić, który kwark — nazwijmy go  $x$  — wchodzi jako trzeci do kombinacji, przyjrzymy się innym znany nam właściwościom cząstki  $\Xi^-$ . Jej ładunek  $q$  wynosi  $-1$ . Ładunek  $q$  każdego kwarka dziwnego wynosi  $-\frac{1}{3}$ . Trzeci kwark  $x$  musi mieć także ładunek  $-\frac{1}{3}$ , aby można w rezultacie otrzymać

$$q(\Xi^-) = q(ssx) = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Oprócz kwarka  $s$  ładunek  $q = -\frac{1}{3}$  mają jeszcze kwark dolny  $d$  oraz niski  $b$ . Ponieważ treść zadania wyklucza kwark niski  $b$ , więc trzeci kwark musi być kwarkiem dolnym. Nasz wniosek jest zgodny z rachunkiem przeprowadzonym dla liczb barionowych:

$$B(\Xi^-) = B(ssd) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = +1.$$

Doszliśmy więc do wniosku, że cząstka  $\Xi^-$  jest zbudowana z kwarków  $s$ ,  $s$  i  $d$ .

## 45.9. Oddziaływanie podstawowe i cząstki pośredniczące

Zostawimy teraz klasyfikację cząstek i przyjrzymy się siłom działającym pomiędzy nimi.

### Oddziaływanie elektromagnetyczne

Na poziomie atomowym mówimy, że dwa elektrony oddziałują ze sobą elektromagnetycznie w sposób opisany prawem Coulomba. Mówiąc dokładniej, oddziaływanie jest opisane przez efektywną teorię nazywaną **elektrodynamiką kwantową** (QED — *quantum electrodynamics*). Mówiąc o niej, że elektrony odczuwają swoją obecność, wymieniając między sobą fotony.

Nie możemy zaobserwować tych fotonów, ponieważ są one emitowane przez jeden elektron i niemal natychmiast pochłaniane przez inny. Z tego powodu nazywamy je **fotonami wirtualnymi**. Ponieważ fotony te służą komunikowaniu się dwóch oddziałujących cząstek, nazywamy je czasami *cząstkami pośredniczącymi*.

Jeżeli spoczywający elektron emiteme foton, a jego stan nie ulega żadnej zmianie, energia nie jest zachowana. Zasadę zachowania energii ratuje jednak zasada nieoznaczoności, wyrażona w postaci

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar, \quad (45.18)$$

o której wspominaliśmy w przykładzie 43.10. Obecnie skorzystamy z niej, mówiąc, że można „pożyczyc” pewną energię  $\Delta E$ , łamiąc zasadę zachowania energii, pod warunkiem, że zostanie „zwrócona” w czasie  $\Delta t$  nie dłuższym niż  $\hbar / \Delta E$ , tak aby niedobór energii nie zostałauważony. Właśnie tak zachowują się wirtualne fotony. Kiedy elektron  $A$  wysyła wirtualny foton, niedobór energii jest szybko usuwany, skoro tylko elektron otrzyma wirtualny foton od elektronu  $B$ . Złamanie zasady zachowania energii dla pary elektronów jest ukryte dzięki zasadzie nieoznaczoności.

## Oddziaływanie słabe

Teorię oddziaływań słabych, w których uczestniczą wszystkie cząstki, stworzono na zasadach analogicznych do teorii oddziaływań elektromagnetycznych. Jednakże oddziaływania pomiędzy cząstkami nie przekazują w tym przypadku pozbawione masy fotony, lecz oznaczone symbolami  $W$  i  $Z$  cząstki o różnych od zera masach spoczynkowych. Teoria odniósła wielki sukces, ponieważ pozwoliła dostrzec, że oddziaływanie elektromagnetyczne i oddziaływanie słabe są różnymi aspektami tego samego **oddziaływania elektrosłabego**. Osiągnięcie to stanowiło logiczną kontynuację prac Maxwella, który wykazał, że siły elektryczne i magnetyczne są różnymi przejawami jednego oddziaływania *elektromagnetycznego*.

Teoria oddziaływań elektrosłabych precyzyjnie przewidziała właściwości cząstek pośredniczących. Ich ładunki i masy na przykład miały wynosić:

Cząstka	Ładunek	Masa
$W$	$\pm e$	$80,6 \text{ GeV}/c^2$
$Z$	0	$91,2 \text{ GeV}/c^2$

Przypomnijmy, że masa protonu wynosi zaledwie  $0,938 \text{ GeV}/c^2$ ; cząstki pośredniczące  $W$  i  $Z$  są zatem bardzo ciężkie! W roku 1979 Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki za stworzenie teorii oddziaływań elektrosłabych otrzymali Sheldon Glashow, Steven Weinberg i Abdus Salam.

Teoria została potwierdzona w 1983 roku, kiedy Carlo Rubbia i jego zespół z CERN-u sprawdzili doświadczalnie, że istnieją obydwie cząstki pośredniczące, a ich masy są zgodne z przewidywanymi wartościami. Za realizację wspaniałego eksperymentu Rubbia i Simon van der Meer zostali w 1984 roku uhonorowani Nagrodą Nobla.

Pewne pojęcie o złożoności współczesnej fizyki cząstek elementarnych można uzyskać, wspominając starszy, również wyróżniony Nagrodą Nobla eksperyment, który doprowadził do odkrycia neutronu. Polegał on na bombardowaniu tarczy cząstками emitowanymi w procesie naturalnego rozpadu promieniotwórczego, a cały układ eksperymentalny mieścił się na stole laboratoryjnym. Opu-

blikowana w 1932 roku praca „Możliwe istnienie neutronu” miała tylko jednego autora, którym był James Chadwick.

Dla porównania odkrycie cząstek pośredniczących W i Z w 1983 r. zostało dokonane przy użyciu akceleratora cząstek o obwodzie 7 km, który nadawał im energię kilkuset miliardów elektronowoltów. Ciężar głównej części detektora cząstek wynosił 20 MN. W eksperymencie uczestniczyło ponad 130 fizyków z 12 instytutów w ośmiu krajach, wspieranych przez liczną rzeszę pracowników obsługi.

## Oddziaływanie silne

Stworzono również teorię oddziaływań silnych, które wiążą ze sobą kwarki we wnętrzu hadronów. W tym przypadku cząstki pośredniczące są nazywane **gluonami** i — podobnie jak w przypadku fotonów — przewiduje się, że nie mają one masy. Teoria zakłada, że każdy „zapach” kwarka występuje w trzech odmianach, które dla wygody nazwano *czerwonym, żółtym i niebieskim*. Istnieją więc trzy, różniące się kolorem kwarki górne itd. Antykwarki również występują w trzech kolorach: *antyczerwonym, antyżółtym i antyniebieskim*. W żadnym razie nie należy sądzić, że kwarki są kolorowe niczym malutkie kuleczki. Nazwy są czysto umowne, chociaż, jak się przekonamy, w tym przypadku mają pewne formalne uzasadnienie.

Oddziaływanie pomiędzy kwarkami nazywamy **oddziaływaniem kolorowym**, a opisującą ją teorię przez analogię z elektrodynamiką kwantową (QED) nazywamy **chromodynamiką kwantową** (QCD — *quantum chromodynamics*). Okazuje się, że kwarki mogą łączyć się tylko w kombinacje o *neutralnych kolorach*.

Istnieją dwa sposoby, aby zapewnić neutralność koloru. W przypadku rzeczywistych kolorów czerwony + niebieski + żółty daje biały, czyli kolor neutralny. Budując barion z trzech kwarków, musimy więc wziąć po jednym w kolorze czerwonym, żółtym i niebieskim. Podobnie trzeba postąpić w przypadku barw dopełniających (antykolorów): antyczerwony + antyżółty + antyniebieski również daje w sumie kolor biały, a więc można z trzech antykwarków (o odpowiednich antykolorach) zbudować antybarion. Na koniec wreszcie kolory czerwony + antyczerwony, żółty + antyżółty i niebieski + antyniebieski dają biel. Można więc połączyć kwark i antykwark w mezon. Reguła neutralności kolorów nie zezwala na występowanie innych kombinacji kwarków i rzeczywiście połączenia takie nie są obserwowane.

Oddziaływania kolorowe nie tylko wiążą ze sobą kwarki w bariony i mezony, ale działają też pomiędzy nimi i w tym przypadku są tradycyjnie nazywane oddziaływaniem silnym. Oddziaływanie silne nie tylko wiążą kwarki w protony i neutrony, ale również protony i neutrony — w jądra atomowe.

## Marzenie Einsteina

Unifikacja występujących w przyrodzie oddziaływań fundamentalnych w jedno oddziaływanie — zadanie, któremu Einstein poświęcił wiele czasu pod koniec życia — jest także celem współczesnych badań. Wiemy już, że oddziaływa-

nie słabe z powodzeniem udało się połączyć wspólną teorią z oddziaływaniem elektromagnetycznym tak, że można patrzeć na nie jak na różne przejawy jednego *oddziaływania elektroślabego*. Teorie, które próbują uzupełnić tę kombinację o oddziaływanie silne — tak zwane *teorie wielkiej unifikacji* (GUT — *grand unification theories*) — są ciągle doskonalone. Teorie, które mogłyby ostatecznie rozwiązać problem różnorodności sił, obejmując swoim zasięgiem także grawitację — nazywane czasami *teoriami wszystkiego* — znajdują się dziś na obiecującym, ale spekulatywnym etapie rozwoju.

## 45.10. Chwila refleksji

Spróbujmy z pewnej perspektywy spojrzeć na to, czego się właśnie nauczyliśmy. Jeżeli nasze zainteresowania ograniczają się do poznania budowy otaczającego nas świata, wystarczą nam wiadomości na temat elektronu, neutrina, neutronu i protonu. Jak ktoś stwierdził, znajomość tych cząstek wystarcza do sterowania statkiem kosmicznym „Ziemia”. Kilka bardziej egzotycznych cząstek znajdziemy, badając promieniowanie kosmiczne. Jednakże, aby spotkać znakomitą większość cząstek, trzeba ogromnym kosztem budować wielkie akceleratory.

Wysiłki te musimy podejmować, ponieważ — odwołując się do skali energetycznej — żyjemy w świecie niskich temperatur. Nawet we wnętrzu Słońca wartość  $kT$  jest rzędu 1 keV. Aby wytwarzać egzotyczne cząstki, trzeba przyspieszać protony i elektrony do energii w zakresie GeV lub TeV, a nawet większych.

Dawno, dawno temu temperatura Wszechświata była dość wysoka, aby energie tego rzędu były dostępne. Tak wysokie temperatury występowały podczas **Wielkiego Wybuchu**, kiedy rodził się Wszechświat (wraz z przestrzenią i czasem). Właśnie pragnienie zrozumienia Wszechświata na tym etapie jest powodem, który skłania uczonych do badania cząstek o wielkich energiach.

Wytłumaczymy wkrótce, że niegdyś *cała* przestrzeń Wszechświata była bardzo skupiona, a temperatura cząstek ją wypełniających niewiarygodnie wysoka. Z czasem Wszechświat rozszerzał się i stygł, osiągając w końcu rozmiary i temperaturę, które widzimy dziś.

Wyrażenie „widzimy dziś” wymaga komentarza: patrząc w przestrzeń kosmiczną, patrzymy zarazem wstecz w czasie, ponieważ światło gwiazd i galaktyk potrzebowało wiele czasu, by do nas dotrzeć. Najbardziej odległymi odkrytymi obiektyami są **kwazary** (ang. *quasar* — *quasistellar object*, czyli obiekt nibygwiezdny), będące niezwykle jasnymi jądrami galaktyk oddalonych od nas o około  $14 \cdot 10^9$  lat świetlnych. Każde takie jądro zawiera potężną czarną dziurę; materia (gaz, a nawet gwiazdy) wciągana przez czarne dziury rozgrzewa się i emituje bardzo silne promieniowanie, wystarczająco intensywne, byśmy mogli dostrzec je z olbrzymich odległości. Kwazary widzimy w takiej postaci, jak wyglądały przed miliardami lat, kiedy docierające do nas światło rozpoczęło swoją podróż.

## 45.11. Wszechświat się rozszerza

Z paragrafu 38.10 wiemy już, że można wyznaczyć wzgólną prędkość zbliżania się lub oddalania od nas galaktyk, mierząc długości fal świetlnych, które

emitują. Jeżeli ograniczymy się tylko do odległych galaktyk, pomijając naszych najbliższych sąsiadów, okaże się, że *wszystkie* oddalają się od nas!

W roku 1929 Edwin P. Hubble odkrył zależność pomiędzy obserwowaną prędkością  $v$  oddalania się galaktyki, a jej odległością  $r$  od nas. Pomiary wykazały, że obydwie wielkości są do siebie wprost proporcjonalne, zgodnie ze wzorem

$$v = Hr \quad (\text{prawo Hubble'a}), \quad (45.19)$$

gdzie  $H$  jest współczynnikiem proporcjonalności, nazywanym **stałą Hubble'a**. Wartość  $H$  jest zwykle wyrażana w kilometrach na sekundę na megaparsek ((km/s)/Mpc). Megaparsek jest jednostką długości powszechnie stosowaną w astrofizyce i astronomii:

$$1 \text{ Mpc} = 3,084 \cdot 10^{19} \text{ km} = 3,260 \cdot 10^6 \text{ lat świetlnych}. \quad (45.20)$$

Wartość stałej Hubble'a  $H$  zmienia się wraz z wiekiem Wszechświata. Wyznaczenie jej obecnej wartości jest bardzo trudne, ponieważ wymaga wykonania pomiarów dla bardzo odległych galaktyk. Niedawno w jednej z prac podano, że aktualna wartość  $H$  jest równa  $70 \pm 7 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ , podczas gdy inne badania przemawiają za wartością  $58 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ . W bieżącym rozdziale przyjmiemy „wartość kompromisową”:

$$H = 63,0 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc}) = 19,3 \text{ mm}/(\text{s} \cdot \text{y}), \quad (45.21)$$

gdzie  $y$  jest symbolem roku świetlnego. Wzajemne oddalanie się galaktyk interpretujemy jako przejaw rozszerzania się Wszechświata, podobnie jak zwiększa się odległości między rodzinami w rosnącym cieście drożdżowym. Obserwatorzy we wszystkich innych galaktykach również stwierdzili, że odległe od nich galaktyki oddalają się zgodnie z prawem Hubble'a. Mówiąc dalej językiem użytego porównania, żadna rodzinka (galaktyka) nie jest uprzywilejowana.

Prawo Hubble'a jest zgodne z hipotezą, że Wszechświat powstał w wyniku Wielkiego Wybuchu i od tamtej chwili stale się rozszerza. Jeżeli przyjąć, że szybkość ekspansji jest stała (wartość  $H$  nie zmienia się), możemy oszacować wiek Wszechświata  $T$ , wykorzystując w tym celu równanie (45.19). Założymy, że od momentu Wielkiego Wybuchu dowolna część Wszechświata (na przykład jakaś galaktyka) oddala się od nas ze stałą prędkością  $v$  określona równaniem (45.19). W takim przypadku czas potrzebny, aby pewien obszar oddalił się na odległość  $r$ , wynosi

$$T = \frac{r}{v} = \frac{r}{Hr} = \frac{1}{H} \quad (\text{szacunkowy wiek Wszechświata}). \quad (45.22)$$

Podstawiając naszą kompromisową wartość  $H$  zapisaną w równaniu (45.21), otrzymamy czas  $T$  równy  $15 \cdot 10^9$  lat. Dokładniejsza rozważania na temat ekspansji Wszechświata dają wartości  $T$  z przedziału pomiędzy  $12 \cdot 10^9$  a  $15 \cdot 10^9$  lat.

## Przykład 45.6

Z pomiarów przesunięcia długości fal świetlnych wynika, że kwazar oddala się z prędkością  $2,8 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  (około 93% prędkości światła). Oszacuj, w jakiej odległości od nas znajduje się ten kwazar?

### ROZWIĄZANIE:

☞ Zastosujmy prawo Hubble'a i podstawmy doń podaną przed-

kość  $v$ . Korzystając z równań (45.19) i (45.21), stwierdzamy, że

$$r = \frac{v}{H} = \frac{2,8 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{19,3 \text{ mm/(s} \cdot \text{y)}} = 14,5 \cdot 10^9 \text{ y.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Uzyskany wynik należy traktować jako przybliżony, ponieważ prędkość oddalania się kwazara nie zawsze wynosiła  $v$ ; innymi słowy stała  $H$  nie była niezmienna w całym procesie rozszerzania się Wszechświata.

## Przykład 45.7

Pewna linia emisjona zidentyfikowana w promieniowaniu wysłanym z odległej galaktyki ma długość  $\lambda' = 1,1\lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest właściwą długością tej linii. W jakiej odległości od nas znajduje się ta galaktyka?

### ROZWIĄZANIE:

Po pierwsze, zauważmy, że ☞ oddalanie się tej galaktyki opisuje prawo Hubble'a ( $v = Hr$ ). Po drugie, możemy założyć, że ☞ przesunięcie długości fali w widmie oddalającej się galaktyki jest przesunięciem dopplerowskim opisanym równaniem (38.33) ( $v = c\Delta\lambda/\lambda$ ). Przyrównując do siebie prawe strony obydwu równań,trzymujemy

$$Hr = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda}, \quad (45.23)$$

co po dokonaniu przekształceń daje

$$r = \frac{c\Delta\lambda}{H\lambda}. \quad (45.24)$$

W równaniu tym

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 1,1\lambda - \lambda = 0,1\lambda.$$

Podstawiając tę zależność do równania (45.24), otrzymamy

$$\begin{aligned} r &= \frac{c(0,1\lambda)}{H\lambda} = \frac{0,1c}{H} \\ &= \frac{(0,1)(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{19,3 \text{ mm/(s} \cdot \text{y)}} (1000 \text{ mm/m}) \\ &= 1,6 \cdot 10^9 \text{ y.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

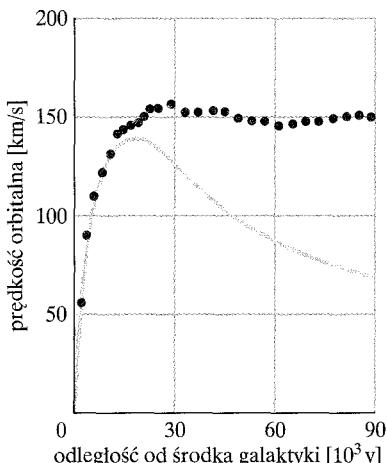
## 45.12. Promieniowanie reliktowe

W roku 1965 Arno Penzias i Robert Wilson z Bell Telephone Laboratories badali czuły odbiornik do komunikacji w zakresie mikrofal. Zauważyli wtedy słaby „szum”, którego natężenie nie zmieniało się wraz z kierunkiem ustawienia anteny. Wkrótce stało się jasne, że Penzias i Wilson odkryli **promieniowanie reliktowe (kosmiczne promieniowanie tła)**, które powstało we wczesnym okresie ewolucji Wszechświata i niemal jednorodnie wypełnia całą przestrzeń. Promieniowanie, którego maksymalne natężenie przypada dla fal o długości 1,1 mm, ma takie samo widmo jak promieniowanie wydobywające się z wnęki, której ściany mają temperaturę 2,7 K. Tę wnękę stanowi cały Wszechświat. Za swoje odkrycie Penzias i Wilson zostali w 1978 r. uhonorowani Nagrodą Nobla w dziedzinie fizyki.

Promieniowanie, o którym mowa, powstało około 300 000 lat po Wielkim Wybuchu, kiedy Wszechświat nagle stał się przezroczysty dla fal elektromagnetycznych (promieniowanie elektromagnetyczne nie było natychmiast pochłaniane przez cząstki). W tamtym czasie odpowiadało ono temperaturze rzędu  $10^5$  K. Wraz z rozszerzaniem się Wszechświata temperatura promieniowania spadła do obecnej wartości 2,7 K.

## 45.13. Ciemna materia

W Kitt Peak National Laboratory Vera Rubin i jej współpracownik Kent Ford mieli prędkości rotacji wielu odległych galaktyk. Pomiary polegały na określaniu



Rys. 45.6. Zależność prędkości orbitalnej gwiazd w typowej galaktyce od ich odległości od środka galaktyki. Teoretyczna linia ciągła odpowiadająca założeniu, że galaktyka zawiera tylko materię widzialną, opada dla dużych odległości od centrum. Punkty prezentujące wyniki pomiarów wskazują, że prędkości orbitalne gwiazd dla dużych odległości od centrum galaktyki są w przybliżeniu stałe

przesunięć dopplerowskich widm jasnych gromad gwiazd położonych w różnej odległości od centrum galaktyki. Jak widać na rysunku 45.6, uzyskane wyniki były zaskakujące: prędkość orbitalna gwiazd położonych na obrzeżach galaktyki była taka sama jak w pobliżu centrum.

Linia ciągła na rysunku 45.6 pokazuje wynik, którego można by oczekiwąć, jeżeliby cała masa galaktyki była związana z obszarem emitującym światło. Zależność, którą wyznaczyli Rubin i Ford, nie jest też zgodna z obserwacjami dla Układu Słonecznego. Na przykład prędkość orbitalna Plutona (najdalszej od Słońca planety) wynosi zaledwie dziesiątą część prędkości Merkurego (planety najbliższej Słońca).

Jedynie wy tłumaczenie wyników, które uzyskali Rubin i Ford, zgodne z mechaniką klasyczną, wymaga założenia, że przeciętna galaktyka zawiera o wiele więcej materii, niż możemy zaobserwować. W rzeczywistości w widzialnej części galaktyki znajduje się zaledwie od około 5 do 10% jej całkowitej masy. Poza opisanymi badaniami ruchu obrotowego galaktyk są także inne argumenty, które mówią, że duża część materii we Wszechświecie nie jest dostępna naszym obserwacjom.

Czym więc jest **ciemna materia**, która przenika i otacza galaktykę niczym gigantyczne halo o średnicy często nawet 30 razy większej niż jej widzialna część? Kandydatów do roli ciemnej materii możemy podzielić na dwie grupy o nieco dziwnych nazwach WIMP (weakly interacting massive particles — słabo oddziałujące cząstki mające masę) oraz MACHO (massive compact halo objects — masywne zwarte obiekty halo). Jeżeli neutrino mają masę różną od zera, to są kandydatami do grupy WIMP. Z kolei kandydatami do roli MACHO są czarne dziury, białe karły i brązowe karły — obiekty o rozmiarach Jowisza i zbyt małej masie, aby stać się gwiazdami, które świecą (i są widoczne) dzięki zachodzącej w ich wnętrzu syntezie termojądrowej.

Według stanu wiedzy z roku 2000 obiekty MACHO są naprawdę obecne w naszej Galaktyce. Wyobraźmy sobie, że (niewidoczny) obiekt MACHO w naszej Galaktyce przechodzi pomiędzy Ziemią a gwiazdą w pobliskiej galaktyce. Einstein w swojej ogólnej teorii względności przewidział, że światło przechodzące w pobliżu ciała o dużej masie ulegnie odchyleniu wskutek oddziaływanego z masą tego ciała (paragraf 14.9). Tym samym, jeżeli gwiazda, obiekt MACHO i Ziemia znajdują się na jednej linii, obiekt MACHO będzie zachowywać się jak *soczewka grawitacyjna*, skupiając światło przechodzące w jego pobliżu i powodując, że obraz gwiazdy rozjaśni się, kiedy przesłoni ją MACHO.

Zaobserwowano już wystarczająco wiele takich zdarzeń, by oszacować, że ciemna materia stanowi istotną część (niektórzy mówią 50%) masy naszej galaktyki. Obserwacje są kontynuowane.

## 45.14. Wielki Wybuch

W roku 1985 pewien fizyk stwierdził na konferencji naukowej:

Fakt, że Wszechświat powstał w wyniku Wielkiego Wybuchu, który nastąpił około 15 miliardów lat temu, jest równie pewny, jak to, że Ziemia krąży wokół Słońca.

To mocne stwierdzenie wyraża zaufanie, jakie mają specjalści do teorii Wielkiego Wybuchu, którą po raz pierwszy sformułował belgijski fizyk Georges Lemaître.

Nie należy sobie wyobrażać, że Wielki Wybuch przypominał eksplozję gigantycznego fajerwerku, którą można by obserwować, stojąc sobie gdzieś z boku. Nie istniało „gdzieś z boku”, ponieważ właśnie Wielki Wybuch oznaczał powstawanie samej czasoprzestrzeni. W naszym obecnym Wszechświecie nie można wskazać żadnego punktu i powiedzieć o nim „To tutaj nastąpił Wielki Wybuch”. Nastąpił on bowiem wszędzie.

Co więcej nie istnieje też żadne „przed Wielkim Wybuchem”, ponieważ czas zaczął się właśnie wraz z tym aktem tworzenia. W tym kontekście słowo „przed” traci swoje znaczenie. Możemy jednak wyobrażać sobie, co działało się w czasie po Wielkim Wybuchu:

**$t \approx 10^{-43}$  s.** To najwcześniejszy moment w ewolucji Wszechświata, o którym możemy snuć jakieś wiarygodne wyobrażenia. Właśnie wtedy pojęcia przestrzeni i czasu nabraly obecnego znaczenia, a znane nam prawa fizyki zaczęły obowiązywać. Cały Wszechświat był wtedy mniejszy od protonu, a jego temperatura sięgała nawet  $10^{32}$  K.

**$t \approx 10^{-34}$  s.** Do tego momentu Wszechświat gwałtownie rozszerzył się, zwiększając swoje rozmiary około  $10^{30}$  razy. Przypomina gorącą zupę o temperaturze około  $10^{27}$  K składającą z fotonów, kwarków i leptonów.

**$t \approx 10^{-4}$  s.** Kwarki mogą już łączyć się ze sobą, tworząc protony i neutrony oraz ich antycząstki. Dzięki ciągemu rozszerzaniu (znacznie już wolniej niż wcześniej) Wszechświat ostygł na tyle, że fotony nie mają dość energii, by rozbić nowe cząstki. Cząstki i antycząstki zderzają się ze sobą, ulegając anihilacji. Istnieje pewien nadmiar materii, która przetrwa, nie znajdując sobie partnerów do anihilacji i utworzy znany nam dziś świat.

**$t \approx 1$  min.** Wszechświat ostygł na tyle, że zderzające się protony i neutrony mogą połączyć się ze sobą w lekkie jądra  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  oraz  $^7\text{Li}$ . Przewidywana względna zawartość wymienionych izotopów zgadza się z obserwacjami we współczesnym Wszechświecie. Wszechświat zawiera wiele promieniowania, ale światło przebywa bardzo krótką drogę przed oddziaływaniem z kolejnym jądrem, w związku z tym Wszechświat jest nieprzezroczysty.

**$t \approx 300\,000$  lat.** Temperatura spadła już do około  $10^4$  K i elektrony zaczynają łączyć się z „golymi” do tej pory jądrami, tworząc atomy. Ponieważ światło w niewielkim stopniu oddziałuje z nienajadowanymi cząstками, jakimi są obojętne atomy, może ono bez przeszkód pokonywać duże odległości. W ten sposób powstaje *promieniowanie reliktowe*, któremu poświęciliśmy paragraf 45.12. Atomy wodoru i helu pod wpływem grawitacji tworzą skupiska inicjujące powstawanie gwiazd i galaktyk.

Pierwsze pomiary sugerowały, że promieniowanie reliktowe jest w pełni izotropowe, co oznaczało, że 300 000 lat po Wielkim Wybuchu cała materia we Wszechświecie była rozłożona jednorodnie. Wynik był zaskoczeniem, ponieważ

we współczesnym Wszechświecie materia nie jest rozłożona równomiernie, lecz skupiona w postaci galaktyk, gromad galaktyk i supergromad złożonych z gromad galaktyk. Istnieją także olbrzymie obszary *pustki* zawierające stosunkowo niewiele materii oraz obszary tak gęste, że nazywamy je *ścianami*. Jeżeli teoria powstania Wszechświata na drodze Wielkiego Wybuchu jest chociaż w przybliżeniu prawdziwa, źródłał niejednorodności rozkładu materii należy szukać w czasie, kiedy Wszechświat liczył sobie mniej niż 300 000 lat — powinny one teraz przejawiać się w postaci anizotropowego rozkładu mikrofalowego promieniowania tła.

W roku 1992 pomiary przeprowadzone przez należącego do NASA satelitę COBE (Cosmic Background Explorer) wykazały, że promieniowanie tła rzeczywiście nie jest idealnie izotropowe. Wykonana na podstawie wspomnianych obserwacji mapa, która otwiera bieżący rozdział, pokazuje Wszechświat, kiedy miał on zaledwie 300 000 lat. Widać na nim początki tworzenia się wielkich skupisk materii, co potwierdza, że teoria Wielkiego Wybuchu jest przynajmniej w swoich podstawach słuszna.

## 45.15. Zakończenie

Na zakończenie zastanówmy się przez chwilę, dokąd prowadzi nas szybko poszerzany zasób wiedzy na temat Wszechświata. To, że jest ona źródłem satysfakcji dla całej rzeszy kierowanych ciekawością fizyków i astronomów, nie podlega żadnej dyskusji. Ale są i tacy, którzy odczuwają, że wypływa z niej wrażenie „marności” w tym sensie, że nowe odkrycia pokazują nam nasze skromne miejsce w potężnym Wszechświecie. I tak w porządku chronologicznym ludzie zrozumieli, że:

Nasza Ziemia nie leży w środku Układu Słonecznego.

Nasze Słońce jest tylko jedną z wielu gwiazd w naszej Galaktyce.

Nasza Galaktyka jest tylko jedną z wielu, a Słońce to przeciętna gwiazda.

Nasza Ziemia istnieje z grubsza trzy razy krócej niż Wszechświat i zniknie, kiedy po wypaleniu się wodoru Słońce stanie się czerwonym olbrzymem.

Istoty człekokształtne zamieszkują Ziemię od miliona lat — mglniecie oka w kosmicznej skali czasu.

Nasze miejsce we Wszechświecie jest skromne, ale prawa fizyki, które wykryliśmy (czy raczej odkryliśmy?) — jak się wydaje — obowiązują w całym Wszechświecie i — jak wierzymy — w przeszłości i w przyszłości. Nie znałeśiśmy do tej pory żadnego dowodu, że w innej części Wszechświata mogą obowiązywać inne prawa. Dopóki ktoś nie stwierdzi czegoś przeciwnego, dopóty mamy prawo oznać wszystkie prawa fizyki nalepką „Odkryte na Ziemi”. Wiele jest jeszcze do odkrycia: „Świat pełen jest cudów, które cierpliwie czekają, aż nasze umysły staną się gotowe, by je dostrzec”.

## Podsumowanie

**Leptony i kwarki** Zgodnie z aktualną wiedzą cała materia jest zbudowana z 6 rodzajów **leptonów** (tabela 45.2), 6 rodzajów **kwarków** (tabela 45.5) oraz ich 12 **antycząstek**, po jednej dla każdego leptonu i kwarka. Wszystkie te cząstki mają spinową liczbę kwantową  $\frac{1}{2}$ , a więc są **fermionami** (cząstkami o połówkowym spinie).

**Oddziaływania** Cząstki naładowane oddziałują elektromagnetycznie, wymieniając między sobą **wirtualne fotony**. Między leptonami oraz między leptonami i kwarkami istnieje oddziaływanie słabe z wymianą ciężkich cząstek pośredniczących W i Z. Ponadto między kwarkami istnieje **oddziaływanie kolorowe**. Oddziaływanie elektromagnetyczne i słabe są różnymi przejawami tego samego **oddziaływania elektrosłabego**.

**Leptony** Trzy leptony (elektron, mion i taon) mają ładunek elektryczny  $-1e$ . Istnieją też trzy obojętne elektrycznie **neutrina** (także leptony), każde związane z jednym leptonem naładowanym. Masy neutrin są bardzo małe. Antycząstki leptonów naładowanych mają ładunki dodatnie.

**Kwarki** Sześć kwarków (dolny, górny, dziwny, powabny, niski i wysoki, w kolejności od najlżejszego do najcięższego) ma liczbę barionową  $+\frac{1}{3}$  i ładunek elektryczny  $+\frac{2}{3}e$  lub  $-\frac{2}{3}e$ . Kwark dziwny ma dziwność  $-1$ , a pozostałe kwarki dziwność  $0$ . W przypadku antykwarków podane znaki zmieniają się na przeciwe.

**Hadrony: bariony i mezony** Kwarki łączą się w oddziałujące silnie cząstki nazywane **hadronami**. **Barioni** są hadronami o спинie ułamkowym ( $\frac{1}{2}$  lub  $\frac{2}{3}$ ), a więc są **fermionami**. **Mesony** są hadronami o spinie całkowitym (0 lub 1), a więc są **bozonami**. Liczba barionowa mezonów jest równa zeru; dla barionów wynosi  $+1$  lub  $-1$ . **Chromodynamika kwantowa** przewiduje istnienie następujących dozwolonych kombinacji kwarków: kwark z antykwarkiem, trzy kwarki lub trzy antykwarki (przewidywania te są zgodne z eksperymentami).

**Rozszerzanie się Wszechświata** Przeprowadzone dotychczas obserwacje przemawiają za modelem Wszechświata rozszerzającego się, w którym odległe galaktyki oddalażą się od nas z prędkością w określonej przez **prawo Hubble'a**:

$$v = Hr \quad (\text{prawo Hubble'a}), \quad (45.19)$$

gdzie  $H$  oznacza stałą Hubble'a. W naszym podręczniku przyjmujemy, że jej wartość jest równa

$$H = 63,0 \text{ km/s} \cdot \text{MPc} = 19,3 \text{ mm/(s} \cdot \text{y}). \quad (45.21)$$

Ekspansja opisana prawem Hubble'a i wypełniające całą przestrzeń mikrofalowe promieniowanie tła przemawiają za tym, że Wszechświat powstał w wyniku Wielkiego Wybuchu od 12 do 15 miliardów lat temu.

## Pytania

1. Fermionami i bozonami są nie tylko cząstki elementarne, jak elektron czy proton, lecz także całe atomy, zależnie od tego, czy ich sumaryczna spinowa liczba kwantowa ma wartość połówkową czy całkowitą. Rozważmy izotopy helu  ${}^3\text{He}$  i  ${}^4\text{He}$ . Odpowiedz, które z następujących zdań są poprawne.
  - a) Obydwa atomy są fermionami.
  - b) Obydwa są bozonami.
  - c)  ${}^4\text{He}$  jest fermionem, a  ${}^3\text{He}$  bozonem.
  - d)  ${}^3\text{He}$  jest fermionem, a  ${}^4\text{He}$  bozonem. (Dwa elektrony w atomie helu tworzą zamknięta powłokę i nie mają wpływu na wypadkowy spin).
2. Czy pole magnetyczne na rysunku 45.3b jest skierowane „za kartkę”, czy „przed kartką”?
3. Który z ośmiu pionów na rysunku 45.3b ma najmniejszą energię kinetyczną?
4. Elektron nie może ulec rozpadowi na dwa neutrino. Które z praw zachowania zostały złamane, gdyby nastąpił taki rozpad?
  - a) energii,
  - b) momentu pędu,
  - c) ładunku,
  - d) liczby leptonowej,
  - e) pędu,
  - f) liczby barionowej?
5. Proton nie może ulec rozpadowi na neutron i neutrino. Które z praw zachowania zostały złamane, gdyby taki rozpad nastąpił?
  - a) energii (założymy, że proton spoczywa),
  - b) momentu pędu,
  - c) ładunku,
  - d) liczby leptonowej,
  - e) pędu,
  - f) liczby barionowej?
6. Energia spoczynkowa protonu jest wystarczająco duża, by mógł on rozpaść się na wiele elektronów, neutrin i ich antycząstek. Które z praw zachowania zostały złamane, gdyby taki rozpad nastąpił?
  - a) elektronowej liczby leptonowej,
  - b) momentu pędu,
  - c) ładunku,
  - d) mionowej liczby leptonowej,
  - e) pędu,
  - f) liczby barionowej?
7. Wiemy, że mezon  $\pi^-$  ma strukturę kwarkową  $d\bar{u}$ . Które z praw zachowania zostały złamane, gdyby mezon  $\pi^-$  był zbudowany z kwarka d i kwarka u: a) energii, b) momentu pędu, c) ładunku, d) liczby leptonowej, e) pędu, f) liczby barionowej?
8. Cząstkę  $\Sigma^+$  charakteryzuje następujące liczby kwantowe: dziwność  $S = -1$ , ładunek  $q = +1$  oraz spin  $s = \frac{1}{2}$ . Która z następujących kombinacji kwarków opisuje jej budowę?
  - a) dds,
  - b)  $s\bar{s}$ ,
  - c) uus,
  - d) ssu czy e) uu $\bar{s}$ ?

- 9.** Lewa kolumna zawiera listę haseł z zakresu fizyki atomowej, a prawa z fizyki cząstek. Połącz w pary hasła z obydwu kolumn.
- |                          |                                  |
|--------------------------|----------------------------------|
| 1) chemia                | a) diagramy ścieżki ośmiokrotnej |
| 2) elektryny             | b) brakujące hadrony             |
| 3) układ okresowy        | c) chromodynamika kwantowa       |
| 4) brakujące pierwiastki | d) fizyka cząstek                |
| 5) mechanika kwantowa    | e) kwarki.                       |

- 10.** Rozważ neutrino o symbolu  $\bar{\nu}_\tau$ . a) Czy jest ono kwarkiem, leptonem, mezonem, czy barionem? b) Czy jest to cząstka, czy antycząstka? c) Czy jest to bozon, czy fermion? d) Czy rozważane neutrino ulega samorzutnemu rozpadowi?

**11.** Połącz w pary hasła z obydwu kolumn:

- |            |                 |
|------------|-----------------|
| 1) taon    | a) kwark        |
| 2) pion    | b) lepton       |
| 3) proton  | c) mezon        |
| 4) poziton | d) barion       |
| 5) powab   | e) antycząstka. |

- 12.** Uszereguj następujące cząstki, zaczynając od najczęstszej:  
a) proton, b) neutrino, c) mezon  $\pi^+$ , d) kwark dziwny, e) taon, f) elektron i g)  $\Sigma^-$ .

- 13.** Jaką wartość mają liczby leptonowe dla następujących cząstek: a)  $\pi^-$ , b)  $e^-$ , c)  $\mu^+$ , d)  $\tau^-$ , e)  $\bar{\nu}_\mu$ .

## Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 45.3 Interludium

- 1.** Oblicz różnicę masy mionu i pionu, o których była mowa w przykładzie 45.1. Odpowiedź wyraź w kilogramach.

- 2.** Elektron i poziton znajdują się w odległości  $r$ . Oblicz stosunek siły grawitacyjnej i elektrostatycznej działającej między obydwiami cząstками. Co — na podstawie uzyskanego wyniku — możesz powiedzieć o siłach działających pomiędzy cząstkami obserwowanymi w komorze pęcherzykowej?

- 3.** Neutralny pion ulega rozpadowi, emittując dwa fotony  $\gamma$ :  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Oblicz długość fali promieniowania  $\gamma$  emitowanego w wyniku rozpadu spoczywającego obojętnego pionu.

- 4.** Pion dodatni rozpada się zgodnie z równaniem (45.7):  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ . Jak wygląda rozpad pionu ujemnego? (Wskazówka: Pion  $\pi^-$  jest antycząstką  $\pi^+$ ).

- 5.** Ile wydzieliłoby się energii, gdyby Ziemia uległa anihilacji w zderzeniu z anty-Ziemią?

- 6.** Pewne teorie przewidują, że proton ulega rozpadowi z czasem połowicznego zaniku  $10^{32}$  lat. Zakładając, że to prawda, oblicz liczbę protonów ulegających rozpadowi w ciągu roku w basenie pływackim o rozmiarach olimpijskich, zawierającym  $4,32 \cdot 10^5$  litrów wody.

- 7.** Obserwacje neutrin emitowanych przez supernowę SN1987a w Wielkim Obłoku Magellana (rys. 44.12) pozwalają stwierdzić, że energia spoczynkowa neutrina elektronowego nie przekracza 20 eV. Załóż, że energia spoczynkowa neutrina jest większa od

zero i rzeczywiście wynosi 20 eV. O ile wolniej od światła poruszały się neutrino o energii 1,5 MeV wyemitowane w wyniku rozpadu  $\beta$ ?

- 8.** Obojętny pion ma energię spoczynkową 135 MeV i średni czas życia  $8,3 \cdot 10^{-17}$  s. Oblicz, ile wynosi największa długość śladu, który może zostawić w komorze pęcherzykowej ta cząstka, wiedząc, że jej początkowa energia kinetyczna wynosiła 80 MeV, a rozpad cząstki nastąpił po upływie średniego czasu życia. Uwzględnij relatywistyczną dylatację czasu.

- 9.** Energie spoczynkowe wielu krótkożyciowych cząstek nie mogą być zmierzony bezpośrednio i trzeba je obliczać na podstawie pędów i energii spoczynkowych produktów ich rozpadu. Rozważ mezon  $\rho^0$  rozpadający się zgodnie z równaniem  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ . Oblicz energię spoczynkową mezonu  $\rho^0$ , jeżeli przeciwne skierowane składowe pędu powstały pionów mają wartość 358,3 MeV/c. Energie spoczynkowe pionów znajdziesz w tabeli 45.4.

- 10.** Taon dodatni ( $\tau^+$ , energia spoczynkowa 1777 MeV) o energii kinetycznej 2200 MeV porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 1,20 T. a) Oblicz pęd cząstki w kilogram razy metr na sekundę. Pamiętaj o uwzględnieniu efektów relatywistycznych. b) Oblicz promień toru taonu.

- 11.** a) Spoczywająca cząstka 1 rozpada się na cząstki 2 i 3, które oddalają się od siebie z równymi co do wartości bezwzględnej, lecz skierowanymi przeciwnie pędami. Udowodnij, że energia kinetyczna  $E_{k2}$  cząstki 2 jest dana wzorem

$$E_{k2} = \frac{1}{2E_1} [(E_1 - E_2)^2 - E_3^2],$$

gdzie  $m_1, m_2$  i  $m_3$  są masami, a  $E_1, E_2$  i  $E_3$  — energiami spoczynkowymi cząstek. (Wskazówka: Postępuj zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w przykładzie 45.1, z tą różnicą, że teraz żadna z cząstek nie ma zerowej masy). b) Pokaż, że wzór z punktu (a) daje energię kinetyczną mionu obliczoną w przykładzie 45.1.

## 45.6 Jeszcze jedno prawo zachowania

12. Sprawdź, że hipotetyczny rozpad protonu opisany równaniem (45.14) nie łamie zasad zachowania a) ładunku, b) energii i c) pędu. d) A zasady zachowania momentu pędu?

13. Które z praw zachowania zostanie złamane w proponowanych reakcjach rozpadu? Przyjmij, że rozpadająca się cząstka spoczywa, a orbitalny moment pędu produktów jest równy zeru. a)  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu$ ; b)  $\mu^- \rightarrow e^+ + v_e + \bar{\nu}_\mu$ ; c)  $\mu^+ \rightarrow \pi^+ + v_\mu$ .

14. Cząstka  $A_2^+$  i produkty jej rozpadu rozpadają się zgodnie z następującymi równaniami:

$$A_2^+ \rightarrow \rho^0 + \pi^+, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + v + \bar{\nu},$$

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu},$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + v, \quad \mu^- \rightarrow e^- + v + \bar{\nu}.$$

a) Jakie trwałe cząstki są ostatecznymi produktami rozpadu?  
b) Wykorzystując dostępne dane, odpowiedz, czy cząstka  $A_2^+$  jest fermionem, czy bozonem? Czy cząstka ta jest mezonem, czy barionem? Jaka jest jej liczba barionowa? (Wskazówka: Patrz przykład 45.4).

## 45.7 Ścieżka ośmiokrotna

15. Reakcja  $\pi^+ + p \rightarrow p + p + \bar{n}$  zachodzi w wyniku oddziaływania silnego. Korzystając z praw zachowania, określ ładunek, liczbę barionową i dziwność antyneutronu.

16. Rozważ dziwność cząstek i odpowiedz, które z podanych reakcji zachodzą dzięki oddziaływaniom silnym: a)  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$  b)  $\Lambda^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + n$ ; c)  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ ; d)  $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$ .

17. Które z praw zachowania jest złamane w proponowanych reakcjach (przyjmij, że orbitalny moment pędu produktów rozpadu wynosi 0): a)  $\Lambda^0 \rightarrow p + K^-$ ; b)  $\Omega^- \rightarrow \Sigma^- + \pi^0$  (dla  $\Omega^-$ :  $S = -3$ ,  $q = -1$ , a  $m = 1672 \text{ MeV}/c^2$ ); c)  $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$ ?

18. Oblicz energię reakcji a)  $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$ , b)  $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$ .

19. Cząstka  $\Sigma^-$  mająca energię kinetyczną 220 MeV rozpada się zgodnie z równaniem  $\Sigma^- \rightarrow \pi^- + n$ . Oblicz całkowitą energię kinetyczną produktów rozpadu.

20. Wykaż, że jeżeli zamiast wykresów zależności dziwności  $S$  od ładunku  $q$  dla barionów o spinie  $\frac{1}{2}$  (rys. 45.4a) i mezonów o spinie 0 (rys. 45.4b) wykonamy w układzie prostokątnym wykres zależności wielkości  $Y = B + S$  od wielkości  $T_z = q - \frac{1}{2}(B + S)$ , to w wyniku uzyskamy sześciokąt. (Wielkość  $Y$  nazywamy hiperładunkiem, a  $T_z$  — izospinem).

21. Korzystając z praw zachowania, odpowiedz, jaka cząstka kryje się pod symbolem  $x$  w następujących reakcjach, które zachodzą w wyniku oddziaływania silnego: a)  $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + x$ ; b)  $p + \bar{p} \rightarrow n + x$ ; c)  $\pi^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^0 + x$ .

22. Rozważ rozpad spoczywającej cząstki  $\Lambda^0$ :  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ . a) Oblicz energię rozpadu. b) Wyznacz energię kinetyczną protonu. c) Ile wynosi energia kinetyczna pionu? (Wskazówka: Patrz zadanie 11).

## 45.8 Model kwarkowy

23. Kwarkowe składы protonu i neutronu to odpowiednio uud i udd. Jak wyglądają kwarkowe składы a) antyprotonu i b) antyneutronu?

24. Korzystając z tabel 45.3 i 45.5, zidentyfikuj bariony odpowiadające podanym kombinacjom kwarków. Porównaj odpowiedź z oktetem barionów z rysunku 45.4a: a) ddu; b) uus; c) ssd.

25. Z kwarku górnego, dolnego i dziwnego zbuduj — o ile to możliwe — barion a) o ładunku  $q = +1$  i dziwności  $S = -2$  oraz b) o ładunku  $q = +2$  i dziwności  $S = 0$ .

26. Jaka kombinacja kwarków odpowiada cząstkom a)  $\Lambda^0$  oraz b)  $\Xi^0$ ?

27. Istnieje 10 barionów o spinie  $\frac{3}{2}$ . Ich symbole oraz liczby kwantowe określające ładunek  $q$  i dziwność  $S$  zawiera tabela.

$q$	$S$	$q$	$S$
$\Delta^-$	-1	0	$\Sigma^{*0}$ 0 -1
$\Delta^0$	0	0	$\Sigma^{*+}$ +1 -1
$\Delta^+$	+1	0	$\Xi^{*-}$ -1 -2
$\Delta^{++}$	+2	0	$\Xi^{*0}$ 0 -2
$\Sigma^{*-}$	-1	-1	$\Omega^-$ -1 -3

Przedstaw te bariony na wykresie zależności ładunku od dziwności, w skośnym układzie współrzędnych, jak w przypadku rys. 45.4. Porównaj swój wykres ze wspomnianym rysunkiem.

28. Nie znamy mezonów o ładunku  $q = +1$  i dziwności  $S = -1$  oraz ładunku  $q = -1$  i dziwności  $S = +1$ . Wyjaśnij to, korzystając z modelu kwarkowego.

29. Barion  $\Sigma^{*0}$  o spinie  $\frac{3}{2}$  (patrz zadanie 27) ma energię spoczynkową 1385 MeV (z niepewnością, którą tu pomijamy). Barion  $\Sigma^0$  o spinie  $\frac{1}{2}$  ma energię spoczynkową 1192,5 MeV. Która cząstka porusza się szybciej i o ile, jeżeli obydwie mają energię kinetyczną 1000 MeV.

## 45.11 Wszechświat się rozszerza

30. W jakiej odległości prędkość oddalania się galaktyk byłaby równa prędkości światła, przy założeniu, że dla tak wielkich odległości możemy zastosować prawo Hubble'a?

31. Ile wynosi obserwowana długość fali pierwszej linii serii Balmera wodoru (656,3 nm) emitowanej z galaktyki znajdującej się

w odległości  $2,4 \cdot 10^8$  y od nas. Załącz, że przesunięcie doopplerowskie opisane jest równaniem (38.33) i że spełnione jest prawo Hubble'a.

32. W warunkach laboratoryjnych jedna z linii emisyjnych sodu ma długość 590,0 nm. W widmie jednej z galaktyk linia ta ma długość 602,0 nm. Oblicz odległość tej galaktyki od nas, zakładając, że spełnione jest prawo Hubble'a, a przesunięcie dopplerowskie opisane jest równaniem (38.33).

33. Czy Wszechświat będzie rozszerzać się w nieskończoność? Aby odpowiedzieć na to pytanie, można przyjąć założenie (czy rozsądne?), że prędkość  $v$  oddalania się galaktyki w odległości  $r$  zależy tylko od masy materii wewnątrz sfery o promieniu  $r$ , z Ziemią w środku. Przyjmijmy, że całkowita masa wewnątrz sfery wynosi  $M$ , a prędkość ucieczki jest równa  $v_u = \sqrt{2GM/r}$  (równanie (14.27)). a) Wykaż, że rozszerzanie się Wszechświata nie będzie zachodzić w nieskończoność, jeżeli średnia gęstość materii wewnątrz sfery będzie równa co najmniej

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

b) Oszacuj wartość liczbową „gęstości krytycznej”. Podaj wynik w postaci liczby atomów wodoru na metr sześcienny. Pomiary rzeczywistej gęstości materii są trudne i dodatkowo skomplikowane wskutek obecności ciemnej materii.

34. Obserwowane prędkości odległych galaktyk i kwazarów są bliskie prędkości światła i dlatego wymagają zastosowania relatywistycznych wzorów opisujących przesunięcie dopplerowskie (równanie (38.30)). Przesunięcie ku czerwieni wyrażamy jako względową zmianę długości fali  $z = \Delta\lambda/\lambda_0$ . a) Pokaż, że zależność parametru  $\beta = v/c$ , opisującego prędkość oddalania się galaktyk, od przesunięcia ku czerwieni  $z$  jest dana wzorem

$$\beta = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

b) W przypadku jednego z kwazarów odkrytego w 1987 roku  $z = 4,43$ . Oblicz dla niego wartość parametru  $\beta$ . c) Oblicz, jak daleko znajduje się ten kwazar, zakładając, że w tej odległości nadal obowiązuje prawo Hubble'a.

## 45.12 Promieniowanie reliktowe

35. Obecność promieniowania reliktowego sprawia, że najmniejsza możliwa temperatura gazu w przestrzeni międzygwiazdowej i międzygalaktycznej wynosi 2,7 K, a nie 0 K. Oznacza to, że znaczna część cząsteczek w przestrzeni kosmicznej, których stany wzbudzone mają niskie energie, może występować w tych stanach. Powrót do stanu podstawowego wiązałby się z emisją możliwego do wykrycia promieniowania. Rozważ (hipotetyczną) cząsteczkę z jednym stanem wzbudzonym. a) Ile musiałaby wynosić energia stanu wzbudzonego, aby występowało w nim 25% cząsteczek? (Wskazówka: Patrz równanie (41.29)). b) Ile wynosiłaby długość fali fotona emitowanego w wyniku powrotu cząsteczki do stanu podstawowego?

## 45.13 Ciemna materia

36. Ile musiałaby wynosić masa Słońca, aby Pluton (najdalsza planeta od Słońca) poruszał się taką prędkością, jaką dziś ma Merkury (planeta najbliższa Słońca)? Skorzystaj z danych w dodatku C i podaj wynik w zależności od obecnej masy Słońca  $M$ . (Przyjmij, że orbity planet są okręgami).

37. Wyobraź sobie, że promień Słońca wzrosłby do wartości  $5,90 \cdot 10^{12}$  m (średni promień orbity najdalszej planety — Plutona), jego gęstość była jednorodna, a planety poruszałyby się we wnętrzu tak utworzonego obiektu. a) Oblicz prędkość orbitalną Ziemi w nowej konfiguracji i porównaj wynik z aktualną wartością 29,8 km/s. Przyjmij, że promień orbity Ziemi nie ulegnie zmianie. b) Ile wynosiłby nowy czas obiegu Ziemi wokół Słońca? (Masa Słońca nie ulega zmianie).

38. Przyjmij, że materia (gwiazdy, gaz, pył) tworząca pewną galaktykę o masie  $M$  jest rozłożona równomiernie we wnętrzu kuli o promieniu  $R$ . Gwiazda o masie  $m$  obiega centrum galaktyki po orbicie kołowej o promieniu  $r < R$ . a) Wykaż, że prędkość orbitalna  $v$  gwiazdy jest dana wzorem

$$v = r \sqrt{GM/R^3},$$

a okres obiegu

$$T = 2\pi \sqrt{R^3/GM}$$

nie zależy od promienia  $r$ . Pomiń wszelkie siły oporu. b) Jak wyglądałby odpowiedni wzór, gdyby masa galaktyki była skupiona w pobliżu centrum galaktyki, to znaczy większość masy znalazła się w odległości mniejszej niż  $r$  od jej centrum?

## 45.14 Wielki Wybuch

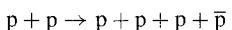
39. Prawo Wiena mówi, że długość fali odpowiadająca maksimum natężenia promieniowania elektromagnetycznego ciała o temperaturze  $T$  równa się  $\lambda_{\max} = (2898 \mu\text{m} \cdot \text{K})/T$ . a) Wykaż, że energię fotonów odpowiadających tej długości fali można obliczyć ze wzoru  $E = (4,28 \cdot 10^{-10} \text{ MeV/K})T$ . b) Ile wynosi minimalna temperatura, przy której promieniowanie to jest zdolne do kreacji pary elektron–pozyton (patrz paragraf 22.6)?

40. Korzystając z prawa Wiena (patrz zadanie 39), odpowiedz na następujące pytania: a) Jakiej temperaturze odpowiada maksimum natężenia promieniowania reliktowego dla fali o długości 1,1 mm? b) Około 300 000 lat po Wielkim Wybuchu Wszechświat stał się przezroczysty dla promieniowania elektromagnetycznego. W tym czasie jego temperatura wynosiła około  $10^5$  K. Dla jakiej długości fali natężenie promieniowania było największe?

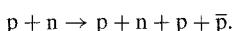
## Zadania dodatkowe

41. Rysunek 45.7 przedstawia fragment układu eksperymentalnego, który w latach pięćdziesiątych XX wieku posłużył do odkrycia antyprotonów. Wiązka protonów o energii 6,2 GeV z akceleratora zderza się z jądrami tarczy miedzianej. Zgodnie z przyjętą

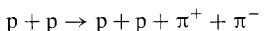
wówczas teorią w zderzeniach protonów z protonami i neutronami należącymi do jąder tarczy powinny powstawać antyprotony



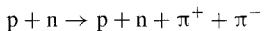
oraz



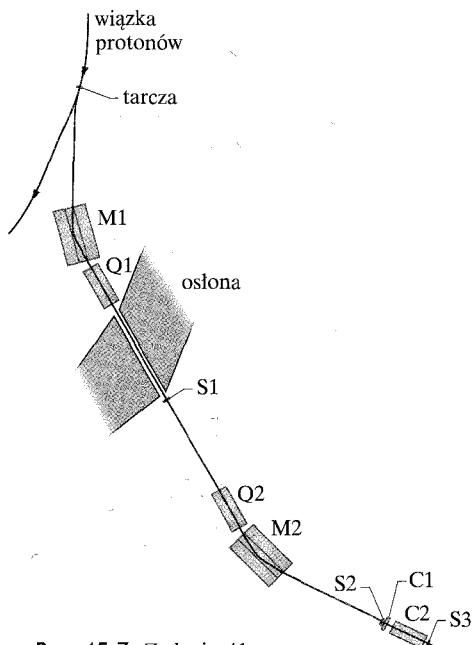
Przewidywano jednak, że reakcje tego typu, jeżeli nawet zachodziłyby, to powinny zachodzić znacznie rzadziej niż zdarzenia z kreacją pionów



oraz



Tak więc większość cząstek powstających w zderzeniach protonów o energii 6,2 GeV z tarczą powinny stanowić piony.



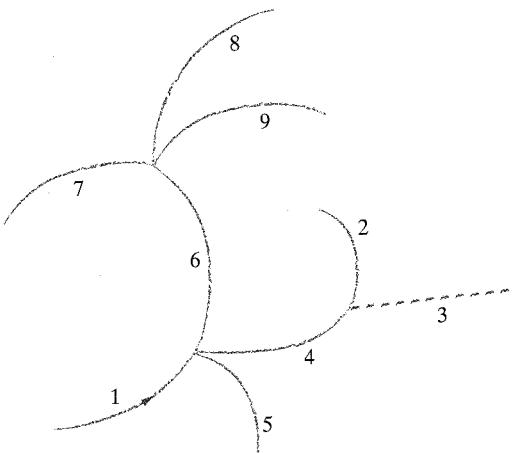
Rys. 45.7. Zadanie 41

Aby udowodnić, że antyprotony istnieją i powstają w wyniku zderzeń, cząstki wychodzące z tarczy kierowano do zespołu detektorów i magnesów przedstawionych na rysunku 45.7. Pierwszy magnes M1 odchyłał tory wszystkich przechodzących przez niego cząstek naładowanych. Pole magnetyczne dobrano tak, aby do drugiego magnesu mogły dotrzeć tylko cząstki z ładunkiem ujemnym ( $\bar{p}$  lub  $\pi^-$ ) o pędzie 1,19 GeV/c. Magnes Q1 był magnesem kwadrupolowym, skupiającym cząstki w wiązkę, która trafiała w otwór w grubej osłonie i docierała do licznika scyntylacyjnego S1. Cząstka naładowana przechodząca przez taki licznik tworzyła sygnał (podobnie jak ekran zwykłego telewizora rozbłyska, kiedy pada na niego elektron). Dzięki temu każdy zarejestrowany impuls informuje o przejściu przez licznik pionu  $\pi^-$  o pędzie 1,19 GeV/c lub (być może) antyprotonu  $\bar{p}$  o pędzie 1,19 GeV/c.

Po rozogniskowaniu przez magnes Q2 cząstki są kierowane za pomocą magnesu M2 do licznika scyntylacyjnego S2 i dwóch liczników Czerenkowa C1 i C2. Liczniki tego typu generują sygnał tylko wtedy, kiedy prędkość przechodzącej cząstki jest zawarta w pewnym przedziale. W opisywanym eksperymencie cząstki o prędkości większej niż 0,79c wyzwalały licznik C1, a cząstki o prędkości z przedziału od 0,75c do 0,78c licznik C2.

Istnieją dwie metody rozróżnienia pojedynczych antyprotonów od występujących w dużej liczbie pionów ujemnych. Obydwie sprowadzają się do badania różnicy prędkości pomiędzy antyprotonem  $\bar{p}$ , a pionem  $\pi^-$  o pędach 1,19 GeV/c: 1) Zgodnie z obliczeniami antyproton  $\bar{p}$  powinien wyzwałać jeden z liczników Czerenkowa, a pion  $\pi^-$  drugi. 2) Podobnie czas  $\Delta t$  pomiędzy impulsami z liczników S1 i S2, oddalonych o 12 m, będzie mieć różne wartości dla antyprotonu  $\bar{p}$  i pionu  $\pi^-$ . Tym samym, jeżeli zostanie wyzwolony odpowiedni licznik Czerenkowa i różnica czasu  $\Delta t$  będzie mieć właściwą wartość, eksperyment potwierdzi istnienie antyprotonów.

Ille wynosi prędkość a) antyprotonu o pędzie 1,19 GeV/c oraz b) pionu ujemnego o tym samym pędzie? Prędkość antyprotonu przechodzącego przez liczniki Czerenkowa będzie w rzeczywistości nieco mniejsza od obliczonej, ponieważ straci on część energii w detektorach. Który z liczników Czerenkowa zostanie wyzwolony przez c) antyproton i d) pion ujemny? Jaka różnica czasu  $\Delta t$  będzie świadczyć o przejściu e) antyprotonu i f) pionu ujemnego? [Zadanie zostało przygotowane na podstawie publikacji: O. Chamberlain, E. Segré, C. Wiegand i T. Ypsilantis, „Observation of Antiprotons”, *Physical Review*, **100**, 947–950 (1955)].



Rys. 45.8. Zadanie 42

**42. Gra w cząstki.** Na rysunku 45.8 przedstawiono tory cząstek w komorze mgłowej (w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do płaszczyzny rysunku) w pewnym fikcyjnym eksperymencie. Podana dalej tabela zawiera fikcyjne liczby kwantowe opisujące cząstki, które pozostawiły ślady. Cząstka A wchodzi do komory, zostawia ślad 1 i rozpadła się na trzy cząstki. Następnie cząstka, która pozostała ślad 6, rozpadła się na trzy cząstki,

a cząstka związana ze śladem 4 rozpada się na dwie cząstki, z których jedna nie jest naładowana elektrycznie — jej ślad jest oznaczony prostą linią przerywaną. O cząstce, która zostawiła ślad 8, wiadomo, że jej liczba kwantowa — powaga — ma wartość 0.

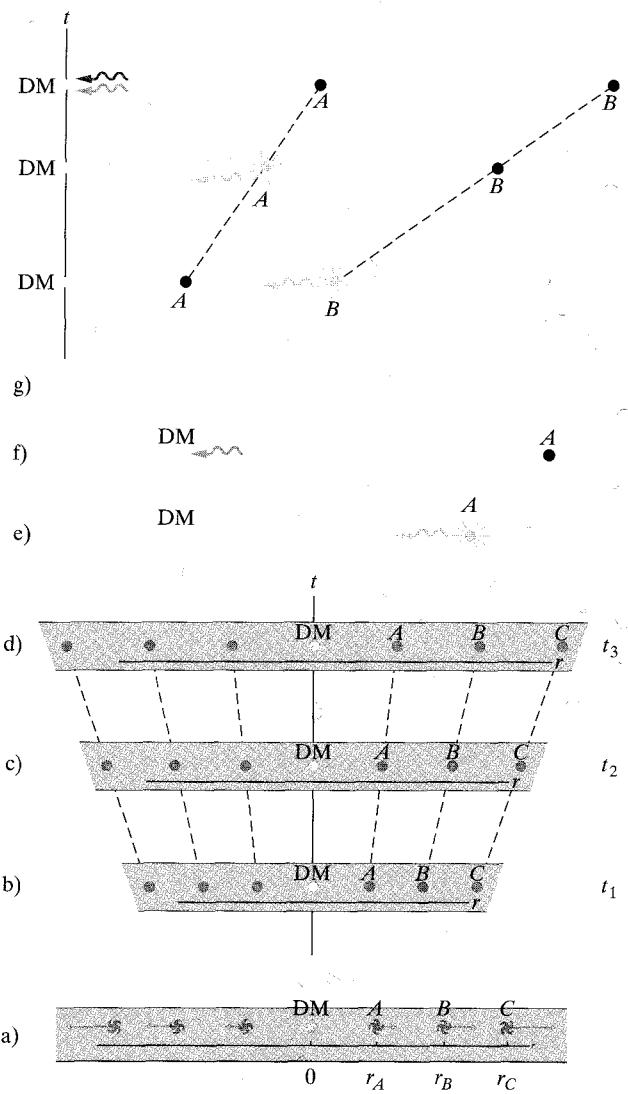
Stosując zasady zachowania fikcyjnych liczb kwantowych w każdym z rozpadów i biorąc pod uwagę kierunki krzywizny torów, powiąz ze sobą cząstki i ich ślady. Jedna z wymienionych w tabeli cząstek nie powstała, a pozostałe pojawiły się tylko jeden raz.

Cząstka	Ładunek	Fantazja	Powaga	Spryt
A	1	1	-2	-2
B	0	4	3	0
C	1	2	-3	-1
D	-1	-1	0	1
E	-1	0	-4	-2
F	1	0	0	0
G	-1	-1	1	-1
H	3	3	1	0
I	0	6	4	6
J	1	-6	-4	-6

**43. Kosmologiczne przesunięcie ku czerwieni.** Rozszerzanie się Wszechświata jest często przedstawione na schematach podobnych do rysunku 45.9a. Nasze położenie oznaczono na nim symbolem DM (Droga Mleczna) w początku osi  $r$  rozciągającej się od nas w każdym kierunku. Na rysunku zaznaczono też odległość galaktyki. Ich symbolom są przypisane wektory prędkości wyznaczonej na podstawie przesunięcia ku czerwieni światła docierającego do nas z tych galaktyk. Zgodnie z prawem Hubble'a prędkość każdej z galaktyk jest proporcjonalna do jej odległości od nas. Rysunki tego typu mogą wprowadzać w błąd, ponieważ sugerują one, że: 1) przesunięcie ku czerwieni wynika z ruchu galaktyk względem nas w statycznej (stacjonarnej) przestrzeni i 2) my znajdujemy się w wyróżnionym centrum ruchu.

W rzeczywistości rozszerzanie się Wszechświata i rosnące odległości między galaktykami nie wynikają z ich ruchu w istniejącej wcześniej przestrzeni, lecz z rozszerzania się samej przestrzeni w całym Wszechświecie. *Przestrzeń jest dynamiczna, a nie statyczna.*

Na rysunkach 45.9b, c, d inaczej przedstawiono Wszechświat i jego rozszerzanie się. Każdy z rysunków odpowiada jednowymiarowi przekrojowi Wszechświata (w kierunku pewnej osi  $r$ ); dwa pozostałe wymiary nie są przedstawione. Każdy z trzech rysunków przedstawia Drogę Mleczną oraz sześć innych galaktyk (oznaczonych kropkami). Rysunki są uszeregowane wzdłuż osi czasu skierowanej w góre. Na rysunku b, przedstawiającym najwcześniej moment, Droga Mleczna i sześć pozostałych galaktyk znajdują się w stosunkowo niewielkich odległościach. Z czasem przestrzeń rozszerza się, a galaktyki oddalają się od siebie. Zwróćcie uwagę, że rysunki wykonano względem Drogi Mlecznej i, patrząc stąd, widać oddalanie się wszystkich galaktyk wywołane rozszerzaniem się Wszechświata. Jednakże Droga Mleczna nie jest w żaden szczególny sposób wyróżniona — galaktyki oddają się także od każdego innego punktu obserwacji.



Rys. 45.9. Zadanie 43

Na rysunkach 45.9e i f przedstawiono Drogę Mleczną i jedną z pozostałych galaktyk, nazwijmy ją A, w dwóch szczególnych chwilach w trakcie rozszerzania się Wszechświata. Na rysunku e, galaktyka A znajduje się w odległości  $r$  od Drogi Mlecznej i emittuje falę świetlną o długości  $\lambda$ . Na rysunku f po upływie czasu  $\Delta t$ , wysłane światło dociera na Ziemię. Oznaczmy szybkość rozszerzania się Wszechświata na jednostkę długości w przestrzeni jako  $\alpha$  i założymy, że jest ona stała w czasie  $\Delta t$ . Tym samym w czasie  $\Delta t$  każda odległość we Wszechświecie (na przykład każdy metr) zwiększy się o  $\alpha \Delta t$ . Odległość  $r$  wydłuży się o  $r\alpha \Delta t$ . Fala świetlna z rysunków 45.9e i f biegnie z prędkością  $c$  z galaktyki A w kierunku Ziemi. a) Udowodnij, że

$$\Delta t = \frac{r}{c - r\alpha}.$$

Obserwowana długość fali  $\lambda'$  jest większa niż długość fali  $\lambda$  emitowanego światła, ponieważ przestrzeń uległa rozszerzeniu w czasie  $\Delta t$ . Ten przyrost długości fali jest nazywany **kosmologicznym przesunięciem ku czerwieni** i nie wynika ze zjawiska Dopplera. b) Udowodnij, że zmiana długości fali  $\Delta\lambda (= \lambda' - \lambda)$  jest dana wzorem

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{r\alpha}{c - r\alpha}.$$

c) Korzystając ze wzoru dwumianowego (dodatek E), rozwiń prawą stronę tego równania. d) Jak będzie wyglądać wyrażenie na  $\Delta\lambda/\lambda$ , jeżeli ograniczymy się tylko do pierwszego wyrazu rozszerzenia?

Jeżeli dla odmiany założymy, że rysunek 45.9a jest właściwy, a zmiana długości fali  $\Delta\lambda$  jest skutkiem zjawiska Dopplera, to jej wartość będzie określona równaniem (38.33)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

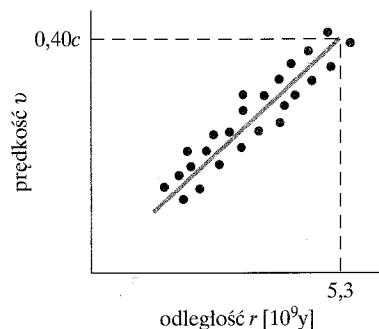
w którym  $v$  oznacza radialną prędkość galaktyki A względem Ziemi. e) Korzystając z prawa Hubble'a, porównaj wynik uzyskany na podstawie zjawiska Dopplera z wynikiem opartym na rozszerzaniu kosmologicznym uzyskanym w punkcie (d) i oblicz wartość parametru  $\alpha$ . W ten sposób można się przekonać, że obydwa wyniki, otrzymane na podstawie całkowicie różnych modeli przesunięcia ku czerwieni światła docierającego z odległych galaktyk, są ze sobą zgodne.

Wyobraźmy sobie, że przesunięcie ku czerwieni światła pochodzącego z galaktyki A wynosi  $\Delta\lambda/\lambda = 0,050$ , a szybkość rozszerzania się Wszechświata jest stała i ma wartość, którą przyjelismy w tym rozdziale. f) Wykorzystując wynik uzyskany w punkcie (b), oblicz odległość między galaktyką A i Ziemią w chwili emisji światła. Oblicz, jak dawno światło opuściło galaktykę, g) postugując się wynikiem z punktu (a) oraz h) zakładając, że przesunięcie ku czerwieni jest skutkiem zjawiska Dopplera. (Wskazówka: W punkcie (h) czas jest równy odległości w chwili emisji światła podzielonej przez prędkość światła, ponieważ jeżeli założymy, że przesunięcie ku czerwieni jest wywołane zjawiskiem Dopplera, to

odległość nie będzie się zmieniać, gdy światło będzie biec w naszą stronę. W tym przypadku obydwa modele przesunięcia ku czerwieni dają różne wyniki). i) Jaka jest odległość Ziemi od galaktyki A, kiedy widzimy docierające zeń światło? (Zakładamy, że galaktyka A wciąż istnieje. Gdyby przestała istnieć, dowieźlibyśmy się o tym fakcie dopiero wtedy, gdy dotarłoby do nas światło wyemitowane w ostatniej fazie jej istnienia).

Wyobraźmy sobie teraz, że obserwowane światło docierające z galaktyki B (rysunek 45.9g) wykazuje przesunięcie ku czerwieni o wartości  $\Delta\lambda/\lambda = 0,080$ . j) Posługując się wynikiem z punktu (b), oblicz odległość Ziemi od galaktyki B w chwili, kiedy opuszczało ją światło. k) Korzystając z wyniku (a), oblicz, jaki czas temu światło opuściło galaktykę B. l) Jaka była odległość między galaktykami A i B w chwili, kiedy pierwszą z nich opuszczało światło, które teraz obserwujemy?

**44.** Na rysunku 45.10 przedstawiono hipotetyczny wykres zależności prędkości  $v$  oddalania się galaktyk od ich odległości  $r$  mierzonej względem nas; linia odpowiada najlepszemu dopasowaniu do wyników. Na podstawie wykresu określ wiek Wszechświata, zakładając, że jest spełnione prawo Hubble'a, a stała Hubble'a nie zmienia się podczas rozszerzania się Wszechświata.



Rys. 45.10. Zadanie 44

# DODATEK A

## Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)\*

### 1. Jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa	Symbol	Definicja
długość	metr	m	„długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy” (1983)
masa	kilogram	kg	„ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odtąd uważany za jednostkę masy” (1889)
czas	sekunda	s	„czas trwania 9 192 631 770 okresów fali promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nad-subtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133” (1967)
natężenie prądu elektrycznego	amper	A	„natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończonymi długich, prostolinowych przewodach o znikomo małym, kołowym przekroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ newtona na każdy metr długości przewodu” (1946)
temperatura termodynamiczna	kelwin	K	„1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody” (1967)
ilość substancji	mol	mol	„ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12” (1971)
światłość	kandela	cd	„światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe 1/683 wata na steradian” (1979)

\* Na podstawie pracy „The International System of Units (SI)”, National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wag (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

## 2. Niektóre jednostki pochodne SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
pole powierzchni	metr kwadratowy	$\text{m}^2$
objętość	metr sześcienny	$\text{m}^3$
częstość	herc	Hz
gęstość	kilogram na metr sześcienny	$\text{kg}/\text{m}^3$
prędkość	metr na sekundę	$\text{m}/\text{s}$
prędkość kątowa	radian na sekundę	$\text{rad}/\text{s}$
przyspieszenie	metr na sekundę kwadrat	$\text{m}/\text{s}^2$
przyspieszenie kątowe	radian na sekundę kwadrat	$\text{rad}/\text{s}^2$
siła	niuton	N
ciśnienie	paskal	Pa
praca, energia, ciepło	dżul	J
moc	wat	W
ładunek elektryczny	kulomb	C
napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna	wolt	V
natężenie pola elektrycznego	wolt na metr (lub niuton na kulomb)	V/m
opór elektryczny	om	$\Omega$
pojemność elektryczna	farad	F
strumień magnetyczny	weber	Wb
indukcyjność	henr	H
indukcja magnetyczna	tesla	T
natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m
entropia	dżul na kelwin	J/K
ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	J/(kg · K)
przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	W/(m · K)
natężenie promieniowania	wat na steradian	W/sr

## 3. Jednostki uzupełniające SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr

# DODATEK B

## Niektóre podstawowe stałe fizyczne\*

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
prędkość światła w próżni	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	2,997 924 58	(dokładnie)
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	1,602 176 462	0,039
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)	6,673	1500
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)	8,314 472	1,7
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	6,022 141 99	0,079
stała Boltzmanna	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K	1,380 650 3	1,7
stała Stefana–Boltzmanna	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> · K <sup>4</sup> )	5,670 400	7,0
objętość molowa gazu doskonałego <sup>c</sup>	$V_m$	$2,27 \cdot 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2,271 098 1	1,7
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	(dokładnie)
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	(dokładnie)
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	6,626 068 76	0,078
masa elektronu <sup>d</sup>	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg $5,49 \cdot 10^{-4}$ u	9,109 381 88 5,485 799 110	0,079 0,0021
masa protonu <sup>d</sup>	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg $1,0073$ u	1,672 621 58 1,007 276 466 88	0,079 $1,3 \cdot 10^{-4}$
stosunek masy protonu do masy elektronu	$m_p/m_e$	1840	1836,152 667 5	0,0021
stosunek ładunku elektronu do masy elektronu	$e/m_e$	$1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg	1,758 820 174	0,040
masa neutronu <sup>d</sup>	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg $1,0087$ u	1,674 927 16 1,008 664 915 78	0,079 $5,4 \cdot 10^{-4}$
masa atomu wodoru <sup>d</sup>	$m_{^1H}$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
masa atomu deuteru <sup>d</sup>	$m_{^2H}$	2,0141 u	2,014 101 777 9	0,0005
masa atomu helu-4 <sup>d</sup>	$m_{^4He}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067

\* Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r.  
(patrz: [www.physics.nist.gov](http://www.physics.nist.gov)).

cd.

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność wzgledna <sup>b</sup>
masa mionu	$m_\mu$	$1,88 \cdot 10^{-28}$ kg	1,883 531 09	0,084
moment magnetyczny elektronu	$\mu_e$	$9,28 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,284 763 62	0,040
moment magnetyczny protonu	$\mu_p$	$1,41 \cdot 10^{-26}$ J/T	1,410 606 663	0,041
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,274 008 99	0,040
magneton jądrowy	$\mu_N$	$5,05 \cdot 10^{-27}$ J/T	5,050 783 17	0,040
promień Bohra	$a_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m	5,291 772 083	0,0037
stała Rydberga	$R$	$1,10 \cdot 10^7$ m <sup>-1</sup>	1,097 373 156 854 8	$7,6 \cdot 10^{-6}$
comptonowska długość fali elektronu	$\lambda_C$	$2,43 \cdot 10^{-12}$ m	2,426 310 215	0,0073

<sup>a</sup> Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tę samą potęgę liczby 10 i jednostkę co odpowiednie wartości zaokrąglone.<sup>b</sup> W jednostkach  $10^{-6}$  (milionowych częściach całości).<sup>c</sup> W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).<sup>d</sup> Atomowa jednostka masy 1 u = 1,660 538 73  $\cdot 10^{-27}$  kg.

# DODATEK C

## Niektóre dane astronomiczne

### Wybrane odległości od Ziemi

do Księżyca <sup>a</sup>	$3,82 \cdot 10^8$ m	do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do Słońca <sup>a</sup>	$1,50 \cdot 10^{11}$ m	do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4,04 \cdot 10^{16}$ m	do granicy obserwowlanego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

<sup>a</sup> Odległość średnia.

### Słońce, Ziemia i Księżyc

Właściwość	Jednostka	Słońce	Ziemia	Księżyc
masa	kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
średni promień	m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
średnia gęstość	kg/m <sup>3</sup>	1410	5520	3340
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	m/s <sup>2</sup>	274	9,81	1,67
prędkość ucieczki	km/s	618	11,2	2,38
okres obrotu <sup>a</sup>		37 d na biegunach <sup>b</sup> , 26 d na równiku <sup>b</sup>	23 h 56 min	27,3 d
całkowita moc promieniowania <sup>c</sup>	W	$3,90 \cdot 10^{26}$		

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.

<sup>c</sup> Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością 1340 W/m<sup>2</sup>.

## Wybrane właściwości planet

	Merkury	Venus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
średnia odległość od Słońca, $10^6$ km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
okres obiegu, lat	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
okres obrotu <sup>a</sup> , d	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
prędkość na orbicie, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
nachylenie osi względem płaszczyzny orbity	< 28°	≈ 3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
nachylenie orbity względem orbity Ziemi	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
mimośród orbity	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
średnica równika, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
masa (masa Ziemi = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
gęstość (gęstość wody = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni <sup>c</sup> , m/s <sup>2</sup>	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
prędkość ucieczki <sup>c</sup> , km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
liczba znanych satelitów	0	0	1	2	16 <sup>d</sup>	18 <sup>e</sup>	17 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	1

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Venus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.

<sup>c</sup> Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.

<sup>d</sup> + pierścień.

<sup>e</sup> + pierścienie.

# DODATEK D

## Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabel. Na przykład  $1 \text{ stopień} = 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów, a zatem  $16,7^\circ = 16,7 \cdot 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Wiliams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

### Kąt płaski

	$\circ$	'	"	radianów	obrotów
$1 \text{ stopień} = 1$	60		3600	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-3}$
$1 \text{ minuta} = 1,667 \cdot 10^{-2}$	1		60	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$4,630 \cdot 10^{-5}$
$1 \text{ sekunda} = 2,778 \cdot 10^{-4}$		$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$7,716 \cdot 10^{-7}$
$1 \text{ radian} = 57,30$	3438			$2,063 \cdot 10^5$	1
$1 \text{ obrót} = 360$		$2,16 \cdot 10^4$		$1,296 \cdot 10^6$	6,283
					1

### Kąt bryłowy

$$1 \text{ pełny kąt bryłowy} = 4\pi \text{ steradianów} = 12,57 \text{ steradianów}$$

### Długość

	cm	metrów	km	cali	stóp	mil
$1 \text{ centymetr} = 1$	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$0,3937$	3,281	$6,214 \cdot 10^{-6}$	
$1 \text{ metr} = 100$	1	$10^{-3}$	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$	
$1 \text{ kilometr} = 10^5$	1000	1	$3,937 \cdot 10^4$	3281	0,6214	
$1 \text{ cal (in)} = 2,540$	$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$	
$1 \text{ stopa (ft)} = 30,48$	0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$	
$1 \text{ mila (lądowa)} = 1,609 \cdot 10^5$	1609	1,609	$6,336 \cdot 10^4$	5280	1	

$$1 \text{ angstrom} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ mila morska} = 1852 \text{ m} = 1,151 \text{ mil} = 6076 \text{ stóp}$$

$$1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ rok świetlny} = 9,460 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$1 \text{ parsek} = 3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

$$1 \text{ sażen} = 6 \text{ stóp}$$

$$1 \text{ promień Bohra} = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$1 \text{ jard} = 3 \text{ stopy}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

## Pole powierzchni

	<b>m<sup>2</sup></b>	<b>cm<sup>2</sup></b>	<b>ft<sup>2</sup></b>	<b>in<sup>2</sup></b>
<b>1 metr kwadratowy = 1</b>	$10^4$	10,76	1550	
1 centymetr kwadratowy = $10^{-4}$	1	$1,076 \cdot 10^{-3}$	0,1550	
1 stopa kwadratowa = $9,290 \cdot 10^{-2}$	929,0	1	144	
1 cal kwadratowy = $6,452 \cdot 10^{-4}$	6,452	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1	

1 mila kwadratowa =  $2,788 \cdot 10^7$  ft<sup>2</sup> = 640 akrów

1 barn =  $10^{-28}$  m<sup>2</sup>

1 akr = 43 560 ft<sup>2</sup>

1 hektar =  $10^4$  m<sup>2</sup> = 2,471 akrów

## Objętość

	<b>m<sup>3</sup></b>	<b>cm<sup>3</sup></b>	<b>l (litrów)</b>	<b>ft<sup>3</sup></b>	<b>in<sup>3</sup></b>
<b>1 metr sześcienny = 1</b>	$10^6$	1000	35,31	$6,102 \cdot 10^4$	
1 centymetr sześcienny = $10^{-6}$	1	$1,000 \cdot 10^{-3}$	$3,531 \cdot 10^{-5}$	$6,102 \cdot 10^{-2}$	
1 litr = $1,000 \cdot 10^{-3}$	1000	1	$3,531 \cdot 10^{-2}$	61,02	
1 stopa sześcienna = $2,832 \cdot 10^{-2}$	$2,832 \cdot 10^4$	28,32	1	1728	
1 cal sześcienny = $1,639 \cdot 10^{-5}$	16,39	$1,639 \cdot 10^{-2}$	$5,787 \cdot 10^{-4}$	1	

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231 in<sup>3</sup>

1 galon angielski = 277,4 in<sup>3</sup> = 1,201 galonów amerykańskich

## Masa

	<b>g</b>	<b>kg</b>	<b>u</b>	<b>uncji</b>	<b>funtów</b>
1 gram = 1	0,001	$6,022 \cdot 10^{23}$	$3,527 \cdot 10^{-2}$	$2,205 \cdot 10^{-3}$	
1 kilogram = 1000	1	$6,022 \cdot 10^{26}$	35,27	2,205	
1 atomowa jednostka masy = $1,661 \cdot 10^{-24}$	$1,661 \cdot 10^{-27}$	1	$5,857 \cdot 10^{-26}$	$3,662 \cdot 10^{-27}$	
1 uncja handlowa (oz) = 28,35	$2,835 \cdot 10^{-2}$	$1,718 \cdot 10^{25}$	1	$6,250 \cdot 10^{-2}$	
1 funt handlowy (lb) = 453,6	0,4536	$2,732 \cdot 10^{26}$	16	1	

## Gęstość

	<b>kg/m<sup>3</sup></b>	<b>g/cm<sup>3</sup></b>	<b>lb/ft<sup>3</sup></b>	<b>lb/in<sup>3</sup></b>
1 kg/m <sup>3</sup> = 1	0,001	$6,243 \cdot 10^{-2}$	$3,613 \cdot 10^{-5}$	
1 g/cm <sup>3</sup> = 1000	1	62,43	$3,613 \cdot 10^{-2}$	
1 lb/ft <sup>3</sup> = 16,02	$1,602 \cdot 10^{-2}$	1	$5,787 \cdot 10^{-4}$	
1 lb/in <sup>3</sup> = $2,768 \cdot 10^4$	27,68	17,28	1	

## Czas

	<b>a</b>	<b>d</b>	<b>h</b>	<b>min</b>	<b>s</b>
1 rok = 1	365,25	$8,766 \cdot 10^3$	$5,259 \cdot 10^5$	$3,156 \cdot 10^7$	
1 doba = $2,738 \cdot 10^{-3}$	1	24	1440	$8,640 \cdot 10^4$	
1 godzina = $1,141 \cdot 10^{-4}$	$4,167 \cdot 10^{-2}$	1	60	3600	
1 minuta = $1,901 \cdot 10^{-6}$	$6,944 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	60	
1 sekunda = $3,169 \cdot 10^{-8}$	$1,157 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	

km/h	m/s	cm/s	mil/h	ft/s
1 km/h = 1	0,2778	27,78	0,6214	0,9113
1 m/s = 3,6	1	100	2,237	3,281
1 cm/s = $3,6 \cdot 10^{-2}$	0,01	1	$2,237 \cdot 10^{-2}$	$3,281 \cdot 10^{-2}$
1 mila/h = 1,609	0,4470	44,70	1	1,467
1 stopa/s = 1,097	0,3048	30,48	0,6818	1

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

## Siła

dyn	N	G	kG	funtów
1 dyna = 1	$10^{-5}$	$1,020 \cdot 10^{-3}$	$1,020 \cdot 10^{-6}$	$2,248 \cdot 10^{-6}$
1 N = $10^5$	1	102,0	0,1020	0,2248
1 G = 980,7	$9,807 \cdot 10^{-3}$	1	0,001	$2,205 \cdot 10^{-3}$
1 kG = $9,807 \cdot 10^5$	9,807	1000	1	2,205
1 funt = $4,448 \cdot 10^5$	4,448	453,6	0,4536	1

Jednostki: gram-sila (G), kilogram-sila (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-sila jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ); analogicznie dla kilograma-sily i funta.

## Ciśnienie

atm	dyn/cm <sup>2</sup>	cali wody	cm Hg	Pa	funtów/in <sup>2</sup>	funtów/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera = 1	$1,013 \cdot 10^6$	406,8	76	$1,013 \cdot 10^5$	14,70	2116
1 dyna/cm <sup>2</sup> = $9,869 \cdot 10^{-7}$	1	$4,015 \cdot 10^{-4}$	$7,501 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1,405 \cdot 10^{-5}$	$2,089 \cdot 10^{-3}$
1 cal wody <sup>a</sup> w temp. 4°C = $2,458 \cdot 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \cdot 10^{-2}$	5,202
1 cm rtęci <sup>a</sup> w temp. 0°C = $1,316 \cdot 10^{-2}$	$1,333 \cdot 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 paskal = $9,869 \cdot 10^{-6}$	10	$4,015 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-4}$	1	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,089 \cdot 10^{-2}$
1 funt/in <sup>2</sup> = $6,805 \cdot 10^{-2}$	$6,895 \cdot 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \cdot 10^3$	1	144
1 funt/ft <sup>2</sup> = $4,725 \cdot 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \cdot 10^{-2}$	47,88	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

<sup>a</sup> W standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

1 bar =  $10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$       1 milibar =  $10^3 \text{ dyn/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$       1 tor = 1 mm Hg

## KIERNIA, PRAWO, CIĘŻKO

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii,  $E = mc^2$ , i wyrażają energię wypuszczaną przy całkowitej zamianie na energię masy jednego kilograma lub atomowej jednostki masy u (dwa ostatnie wiersze) oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (dwie ostatnie kolumny tabeli).

erg	J	cal	kWh	eV	MeV	kg	u
$1 \text{ erg} = 1$	$10^{-7}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$6,242 \cdot 10^{11}$	$6,242 \cdot 10^5$	$1,113 \cdot 10^{-24}$	$670,2$
$1 \text{ dżul} = 10^7$	1	0,2389	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	$6,242 \cdot 10^{12}$	$1,113 \cdot 10^{-17}$	$6,702 \cdot 10^9$
$1 \text{ kaloria} = 4,186 \cdot 10^7$	4,186	1	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$2,613 \cdot 10^{19}$	$2,613 \cdot 10^{13}$	$4,660 \cdot 10^{-17}$	$2,806 \cdot 10^{10}$
$1 \text{ kilowatogodzina} = 3,600 \cdot 10^{13}$	$3,600 \cdot 10^6$	$8,600 \cdot 10^5$	1	$2,247 \cdot 10^{25}$	$2,247 \cdot 10^{19}$	$4,007 \cdot 10^{-11}$	$2,413 \cdot 10^{16}$
$1 \text{ elektronowolt} = 1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	1	$10^{-6}$	$1,783 \cdot 10^{-36}$	$1,074 \cdot 10^{-9}$
$1 \text{ megaelektronowolt} =$							
	$= 1,602 \cdot 10^{-6}$	$1,602 \cdot 10^{-13}$	$3,827 \cdot 10^{-14}$	$4,450 \cdot 10^{-20}$	$10^{-6}$	1	$1,783 \cdot 10^{-30}$
$1 \text{ kilogram} = 8,987 \cdot 10^{23}$	$8,987 \cdot 10^{16}$	$2,146 \cdot 10^{16}$	$2,497 \cdot 10^{10}$	$5,610 \cdot 10^{35}$	$5,610 \cdot 10^{29}$	1	$6,022 \cdot 10^{26}$
$1 \text{ atomowa jednostka masy} =$							
	$= 1,492 \cdot 10^{-3}$	$1,492 \cdot 10^{-10}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$4,146 \cdot 10^{-17}$	$9,320 \cdot 10^8$	932,0	$1,661 \cdot 10^{-27}$

## WŁASNOŚCI

KM	cal/s	kW	W
$1 \text{ koń mechaniczny} = 1$	178,1	0,7457	745,7
$1 \text{ kaloria na sekundę} = 5,615 \cdot 10^{-3}$	1	$4,186 \cdot 10^{-3}$	4,186
$1 \text{ kilowat} = 1,341$	238,9	1	1000
$1 \text{ wat} = 1,341 \cdot 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

## WŁASNOŚCI MAGNETYCZNE

Gs	T	mGs
$1 \text{ gaus (Gs)} = 1$	$10^{-4}$	1000
$1 \text{ tesla (T)} = 10^4$	1	$10^7$
$1 \text{ miligaus (mGs)} = 0,001$	$10^{-7}$	1
$1 \text{ tesla} = 1 \text{ weber/m}^2$		

## SYSTEMLI MAGNETYCZNY

maksieli	weberów
$1 \text{ maksweli} = 1$	$10^{-8}$
$1 \text{ weber} = 10^8$	1

# DODATEK E

## Wzory matematyczne

### GEOMETRIA

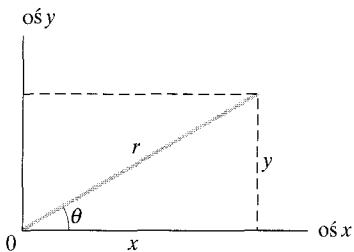
Koło o promieniu  $r$ : obwód =  $2\pi r$ ; pole powierzchni =  $\pi r^2$ .  
 Kula o promieniu  $r$ : pole powierzchni =  $4\pi r^2$ ; objętość =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .  
 Walec obrotowy o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ; objętość =  $\pi r^2 h$ .  
 Trójkąt o podstawie  $a$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni =  $\frac{1}{2}ah$ .

### RÓWNANIE KWADRATOWE I JEGO ROZWIĄZANIE

Jeśli  $ax^2 + bx + c = 0$ , to  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KATA $\theta$

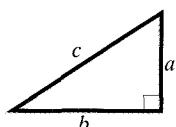
$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} & \operatorname{ctg} \theta &= \frac{x}{y} \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{r}{y}\end{aligned}$$



### TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



### TRÓJKĄTY

Kąty:  $A, B, C$ .

Boki im przeciwnie:  $a, b, c$ .

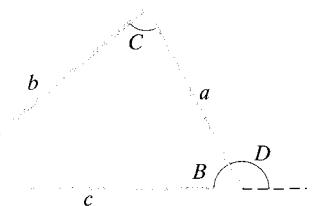
$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Kąt zewnętrzny

$$D = A + C.$$



### SYMBOLE MATEMATYCZNE

$=$  równa się

$\approx$  równa się w przybliżeniu

$\sim$  jest tego samego rzędu wielkości

$\neq$  nie jest równe

$\equiv$  jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako

$>$  jest większe niż ( $\gg$  jest dużo większe niż)

$<$  jest mniejsze niż ( $\ll$  jest dużo mniejsze niż)

jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)

jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)

$\pm$  plus albo minus

$\propto$  jest proporcjonalne do

$\sum$  suma

$x_{\text{sr}}$  wartość średnia  $x$

### TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

## ROZWINIĘCIA FUNKCJI W SZEREGI POTĘGOWE

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(wzór dwumianowy)

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

## WZORY CRAMERA

Układ równań z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{oraz} \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

## ILOCZINY WEKTORÓW

Niech  $\hat{i}, \hat{j}$  i  $\hat{k}$  będą wektorami jednostkowymi kierunków  $x, y$  i  $z$ . Zachodzą związki:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}.$$

Dowolny wektor  $\vec{a}$  o składowych wzdłuż osi  $x, y$  i  $z$  równych  $a_x, a_y$  i  $a_z$  można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Niech  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach)  $a, b$  i  $c$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}),$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ — skalar}).$$

Niech  $\theta$  będzie mniejszym z kątów między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}, \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

## POCHODNE I CAŁKI

W poniższych wzorach  $u$  i  $v$  są dowolnymi funkcjami zmiennej  $x$ , a  $a$  i  $m$  są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

$$1. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$2. \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

$$5. \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$6. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$8. \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$9. \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$10. \frac{d}{dx}\tg x = \sec^2 x$$

$$11. \frac{d}{dx}\ctg x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$12. \frac{d}{dx}\sec x = \tg x \sec x$$

$$13. \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\ctg x \operatorname{cosec} x$$

$$14. \frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$15. \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$16. \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$1. \int dx = x$$

$$2. \int audx = a \int u dx$$

$$3. \int (u+v)dx = \int u dx + \int v dx$$

$$4. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$6. \int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$7. \int e^x dx = e^x$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x$$

$$10. \int \tg x dx = \ln|\sec x|$$

$$11. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$12. \int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

$$13. \int x e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$$

$$14. \int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$$

$$15. \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$16. \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$18. \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$19. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$20. \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$$

$$21. \int \frac{x dx}{x+d} = x - d \ln(x+d)$$

# DODATEK F

## Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
aktyn	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
ameryk	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
antymon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
argon	Ar	18	39,948	1,6626 · 10 <sup>-3</sup>	-189,4	-185,8	0,523
arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
astat	At	85	(210)	—	(302)	—	—
azot	N	7	14,0067	1,1649 · 10 <sup>-3</sup>	-210	-195,8	1,03
bar	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
berkel	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
beryl	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
bizmut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
bohr	Bh	107	262,12	—	—	—	—
bor	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
brom	Br	35	79,909	3,12 (ciecz)	-7,2	58	0,293
cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
cez	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
chlor	Cl	17	35,453	3,214 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	-101	-34,7	0,486
chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
cyna	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
cynk	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
cyrkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
dubn	Db	105	262,114	—	—	—	—
dysproz	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
einstein	Es	99	(254)	—	—	—	—
erb	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
europ	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
ferm	Fm	100	(237)	—	—	—	—
fluor	F	9	18,9984	1,696 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
fosfor	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
frans	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
gadolin	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
gal	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
german	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
glin	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
hafn	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
has	Hs	108	(265)	—	—	—	—
hel	He	2	4,0026	0,1664 · 10 <sup>-3</sup>	-269,7	-268,9	5,23
holm	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
ind	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
iryd	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
iterb	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
itr	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
jod	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
kadm	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
kaliforn	Cf	98	(251)	—	—	—	—
kiur	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
kobalt	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
krypton	Kr	36	83,80	3,488 · 10 <sup>-3</sup>	-157,37	-152	0,247
krzem	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
ksenon	Xe	54	131,30	5,495 · 10 <sup>-3</sup>	-111,79	-108	0,159
lantan	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
lit	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
lorens	Lr	103	(257)	—	—	—	—
lutet	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
magnez	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
mangan	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
meitner	Mt	109	(266)	—	—	—	—
mendelew	Md	101	(256)	—	—	—	—
miedź	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
molibden	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
neon	Ne	10	20,183	0,8387 · 10 <sup>-3</sup>	-248,597	-246,0	1,03
neptun	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
nikiel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
niob	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
nobel	No	102	(255)	—	—	—	—
ołów	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
osm	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
pallad	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
platyna	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
pluton	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
polon	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
potas	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
prazeodym	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
promet	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
protaktyn	Pa	91	(231)	15,37 (oszacowanie)	(1230)	—	—

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
rad	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
radon	Rn	86	(222)	9,96 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
ren	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
rod	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
rteć	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
rubid	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
ruten	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
rutherford	Rf	104	261,11	—	—	—	—
samar	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
seaborg	Sg	106	263,118	—	—	—	—
selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
siarka	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
skand	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
sód	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
srebro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
stront	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
tal	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
tantal	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
technet	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
terb	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
tlen	O	8	15,9994	1,3318 · 10 <sup>−3</sup>	−218,80	−183,0	0,913
tor	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
tul	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
tytan	Ti	22	47,9	4,54	1670	3260	0,523
uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
wanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
wapń	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
węgiel	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
wodór	H	1	1,00797	0,08375 · 10 <sup>−3</sup>	−259,19	−252,7	14,4
wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
złoto	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
żelazo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
ununnil	Uun	110	(269)	—	—	—	—
ununun	Uuu	111	(272)	—	—	—	—
ununbi	Unb	112	(264)	—	—	—	—
ununtri	Unt	113	—	—	—	—	—
unkwad	Unq	114	(285)	—	—	—	—
ununpent	Unp	115	—	—	—	—	—
ununheks	Unh	116	(292)	—	—	—	—

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce „masa molowa” podano w nawiasach wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia.

Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem.

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowoodkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).

# DODATEK G

## Układ okresowy pierwiastków

OKRESY POZIOME	metale przejściowe																		gazy szlachetne	
	metale alkaliczne IA		metale półmetale niemetale		metale II A		metale IIIA IV A VA VI A VII A		He											
1	H																		0	
2	Li	Be																	Ne	
3	Na	Mg																	Ar	
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br		Kr	
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I		Xe	
6	Cs	Ba	57-71	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At		Rn	
7	Fr	Ra	89-103	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt											118

lantanowce *	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
aktynowce †	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Nazwy pierwiastków o liczbie atomowej od 104 do 109 (rutherford, dubn, seaborg, bohr, has i meitner) zostały ustalone przez Międzynarodową Unię Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC) w 1997 roku. Pierwiastki o liczbie atomowej 110, 111, 112, 114 i 116 zostały już odkryte, lecz nie nadano im jeszcze nazw. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).

# ODPOWIEDZI

## do sprawdzianów oraz pytań i zadań o numerach nieparzystych

### Rozdział 39

#### SPRAWDZIANY

1. b, a, d, c 2. a) lit, sód, potas, cez; b) wszystkim wykresom odpowiada taka sama wartość **h** 3. a) jednakowa; b)–d) dla promieniowania rentgenowskiego 4. a) dla protonu; b) jednakowe; c) dla protonu 5. taka sama

#### PYTANIA

1. a) mikrofale; b) promieniowanie rentgenowskie; c) promieniowanie rentgenowskie 3. z potasu 5. na płytce gromadzi się ładunek dodatni, przeciwdziałając dalszej emisji elektronów 7. zero 9. a) większy; b) mniejsza 11. nie nastąpi żadna istotna zmiana 13. zmniejszy się o czynnik  $1/\sqrt{2}$ ; b) zmniejszy się o czynnik  $\frac{1}{2}$  15. a) maleje; b) rośnie; c) taka sama; d) taka sama 17. a 19. a) zero; b) tak

#### ZADANIA

1.  $4,14 \text{ eV} \cdot \text{fs}$  5.  $1,0 \cdot 10^{45}$  fotonów/s 7.  $5,9 \mu\text{eV}$  9.  $2,047 \text{ eV}$  11.  $4,7 \cdot 10^{26}$  fotonów 13. a) lampa na podczerwień; b)  $1,4 \cdot 10^{21}$  fotonów/s 15. a)  $2,96 \cdot 10^{20}$  fotonów/s; b) 48 600 km; c)  $5,89 \cdot 10^{18}$  fotonów/ $(\text{m}^2 \cdot \text{s})$  17. bar i lit 19. 170 nm 21. 676 km/s 23. a) 2,0 V; b) 0; c) 2,0 eV; d) 295 nm 25. 233 nm 27. a) 382 nm; b) 1,82 eV 29.  $9,68 \cdot 10^{-20} \text{ A}$  31. a) 2,7 pm; b) 6,05 pm 33. a)  $8,57 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$ ; b) 35,4 keV; c)  $1,89 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 35,4 \text{ keV/c}$  37. a) 2,43 pm; b) 1,32 fm; c) 0,511 MeV; d) 938 MeV 39. 300% 43. a) 41,8 keV; b) 8,2 keV 45. 1,12 keV 47.  $44^\circ$  51. 7,75 pm 53. 4,3  $\mu\text{eV}$  55. a) 38,8 meV; b) 146 pm 57. a) proton:  $1,24 \mu\text{m}$ ; elektron:  $1,22 \text{ nm}$ ; b) 1,24 fm dla obu 59. a)  $1,9 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; b) 346 fm 61. 0,025 fm, około 200 razy mniej niż promień jądra 63. neutron 65. 9,70 kV (obliczenia relatywistyczne), 9,76 kV (obliczenie klasyczne) 73. d)  $x = n(\lambda/2)$ , gdzie  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  75. 0,19 m 79. a) proton:  $9,02 \cdot 10^{-6}$ , deuteron:  $7,33 \cdot 10^{-8}$ ; b) 3,0 MeV dla obu; c) 3,0 MeV dla obu 81. a) -20%; b) -10%; c) +15% 83.  $T = 10^{-x}$ , gdzie  $x = 7,2 \cdot 10^{39}$  ( $T$  jest bardzo małe)

### Rozdział 40

#### SPRAWDZIANY

1. b, a, c 2. a) liczba maksimów gęstości prawdopodobieństwa jest jednakowa; b) a, b, c 3. a, b, c, d 4.  $E_{1,1}$  (ani  $n_x$ , ani  $n_y$  nie mogą być równe zeru) 5. a) 5; b) 7

#### PYTANIA

1. a)  $\frac{1}{4}$ ; b) wszystkie energie zmieniają się o taki sam czynnik 3. c 5. a)  $\sqrt{1/L} \sin(\pi/2L)x$ ; b)  $\sqrt{4/L} \sin(2\pi/L)x$ ; c)  $\sqrt{2/L} \cos(\pi/L)x$  7. mniejsza 9. a) poszerzyć; b) pogłębić 11.  $n = 1, n = 2, n = 3$  13. b, c, d 15. a) pierwsza linia serii Lymana i pierwsza linia serii Balmera; b) granica serii Lymana minus granica serii Paschena

#### ZADANIA

1. a)  $37,7 \text{ eV}$ ; b)  $0,0206 \text{ eV}$  3. 1900 MeV 5.  $0,02 \text{ eV}$  7.  $90,3 \text{ eV}$  11.  $68,7 \text{ nm}$ ;  $25,8 \text{ nm}$ ;  $13,7 \text{ nm}$  i  $8,59 \text{ nm}$  13. a)  $1,3 \cdot 10^{-19} \text{ eV}$ ; b) około  $n = 1,2 \cdot 10^{19}$ ; c)  $0,95 \text{ J} = 5,9 \cdot 10^{18} \text{ eV}$ ; d) tak 15. b) nie; c) nie; d) tak 17. a) 0,05; b) 0,1; c) 0,0095 19. 59 eV 21. b)  $k = (2\pi/h)[2m(U_0 - E)]^{1/2}$  25.  $3,08 \text{ eV}$  27. 0,75; 1,0; 1,25; 1,75; 2,0; 2,25; 3,00; 3,75 29. 1,0; 2,0; 3,0; 5,0; 6,0; 8,0; 9,0 31. 2,6 eV 33. 4,0 35. a) 12 eV; b)  $6,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; c) 103 nm 39. a) 0; b)  $10,2 \text{ nm}^{-1}$ ; c)  $5,54 \text{ nm}^{-1}$  41. a) 13,6 eV; b) 3,4 eV 43. a)  $z \text{ n} = 4$  do  $n = 2$ ; b) seria Balmera 45. a) 13,6 eV; b) -27,2 eV 47. a) 2,6 eV; b)  $z \text{ n} = 4$  do  $n = 2$  49. 0,68 55. a) 0,0037; b) 0,0054 59. a)  $P_{210} = (r^4/8a^5)e^{-r/a} \cos^2 \theta$ ;  $P_{21-1} = P_{211} = (r^4/16a^5)e^{-r/a} \sin^2 \theta$

### Rozdział 41

#### SPRAWDZIANY

1. 7 2. a) spadek; b)–c) pozostaje nie zmienione 3. mniej 4. A, C, B

#### PYTANIA

1. 0, 2 i 3 3.  $6p$  5. a) 2, 8; b) 5, 50 7. a)  $n$ ; b)  $n \text{ i } l$  9. a, c, e, f 11. a) nie zmieni się; b) zmaleją; c) zmaleją 13. a i b

#### ZADANIA

3. a) 3; b) 3 5. a) 32; b) 2; c) 18; d) 8 7.  $24,1^\circ$  9.  $n > 3, m_l = +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, m_s = \pm \frac{1}{2}$  11. a)  $\sqrt{12}\hbar$ ; b)  $\sqrt{12}\mu_B$

c)	$m_l$	$L_z$	$\mu_{\text{orb}}$	$z$	$\theta$
	-3	$-3\hbar$	$+3\mu_B$		$150^\circ$
	-2	$-2\hbar$	$+2\mu_B$		$125^\circ$
	-1	$-\hbar$	$+\mu_B$		$107^\circ$
	0	0	0		$90^\circ$
	+1	$+\hbar$	$-\mu_B$		$73,2^\circ$
	+2	$+2\hbar$	$-2\mu_B$		$54,7^\circ$
	+3	$+3\hbar$	$-3\mu_B$		$30,0^\circ$

- 15.**  $54,7^\circ$  i  $125^\circ$  **17.**  $73 \text{ km/s}^2$  **19.**  $5,35 \text{ cm}$  **21.** a)  $2,13 \text{ meV}$ ; b)  $18 \text{ T}$  **23.**  $44(h^2/8mL^2)$  **25.** a)  $51(h^2/8mL^2)$ ; b)  $53(h^2/8mL^2)$ ; c)  $56(h^2/8mL^2)$  **27.**  $42(h^2/8mL^2)$  **31.** argon **33.** a)  $(n, l, m_l, m_s) = (2, 0, 0, \pm\frac{1}{2})$ ; b)  $n = 2, l = 1, m_l = 1, 0$  lub  $-1, m_s = \pm\frac{1}{2}$  **39.**  $49,6 \text{ pm}$ ,  $99,2 \text{ pm}$  **43.** a)  $35,4 \text{ pm}$ , tak jak dla molibdenu; b)  $57 \text{ pm}$ ; c)  $50 \text{ pm}$  **45.**  $9/16$  **49.** a)  $69,5 \text{ kV}$ ; b)  $17,9 \text{ pm}$ ; c)  $K_\alpha$ :  $21,4 \text{ pm}$ ,  $K_\beta$ :  $18,5 \text{ pm}$  **51.** a)  $(Z-1)^2/(Z'-1)^2$ ; b)  $57,5$ ; c)  $2070$  **53.** a)  $6$ ; b)  $3,2 \cdot 10^6$  lat **55.**  $9,1 \cdot 10^{-7}$  **57.**  $10\,000 \text{ K}$  **59.** a)  $3,6 \text{ mm}$ ; b)  $5,25 \cdot 10^{17}$  **61.**  $4,7 \text{ km}$  **63.**  $2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  **65.** a)  $3,03 \cdot 10^5$ ; b)  $1430 \text{ MHz}$ ; d)  $3,3 \cdot 10^{-6}$  **67.** a) nie; b)  $140 \text{ nm}$  **69.** a)  $4,3 \mu\text{m}$ ; b)  $10 \mu\text{m}$ ; c) podczerwień

## Rozdział 42

### SPRAWDZIANY

1. a) większy; b) taki sam **2.** Cleveland, metal; Boca Raton, żaden; Seattle, półprzewodnik **3.** a, b i c **4.** b

### PYTANIA

- 1.** **4** **3.** b i c, tak **5.** a) gdziekolwiek w sieci; b) w dowolnym wiązaniu krzem–krzem; c) w rdzeniu jonu krzemu, w położeniu węzłowym sieci **7.** b i d **9.**  $+4e$  **11.** żadne **13.** a) w lewo; b) napiecie zaporowe **15.** a, b i c

### ZADANIA

- 1.**  $8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  **3.**  $3490 \text{ atm}$  **5.** a)  $+8,0 \cdot 10^{-11} \Omega \cdot \text{m/K}$ ; b)  $\sim 210 \Omega \cdot \text{m/K}$  **7.** b)  $6,81 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-3/2}$ ; c)  $1,52 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}$  **9.** a) 0; b)  $0,0955$  **13.**  $0,91$  **15.** a)  $2500 \text{ K}$ ; b)  $5300 \text{ K}$  **17.** a) 90%; b) 12,5%; c) sód **19.** a)  $2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ; b)  $8,43 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ; c) 3100; d) cząsteczki: 3,3 nm; elektryny:  $0,228 \text{ nm}$  **21.** a) 1,0; 0,99; 0,5; 0,014;  $2,5 \cdot 10^{-17}$ ; b)  $700 \text{ K}$  **23.** **3** **25.** a)  $5,86 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ; b)  $5,52 \text{ eV}$ ; c)  $1390 \text{ km/s}$ ; d)  $0,522 \text{ nm}$  **27.** b)  $1,8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}$  **31.** a)  $19,8 \text{ kJ}$ ; b)  $197 \text{ s}$  **33.**  $200^\circ\text{C}$  **35.** a)  $225 \text{ nm}$ ; b) nadfiolet **37.** a)  $109,5^\circ$ ; b)  $235 \text{ pm}$  **41.**  $0,22 \mu\text{g}$  **43.** a) czysty:  $4,78 \cdot 10^{-10}$ ; domieszkowany: 0,0141; b)  $0,824$  **45.**  $6,02 \cdot 10^5$  **47.**  $4,2 \text{ eV}$  **49.** a)  $5,0 \cdot 10^{-17} \text{ F}$ ; b) około  $300e$

## Rozdział 43

### SPRAWDZIANY

1.  ${}^{90}\text{As}$  i  ${}^{158}\text{Nd}$  **2.** nieco więcej niż  $75 \text{ Bq}$  (upłynął czas nieco krótszy niż trzykrotny czas połowicznego zaniku) **3.**  ${}^{206}\text{Pb}$

### PYTANIA

1. mniejsza **3.**  ${}^{240}\text{U}$  **5.** mniejszy **7.** a) na linii  $N = Z$ ; b) pozytyony; c) około 120 **9.** nie **11.** tak **13.** a) wzrośnie; b) nie zmieni się **15.** 7 h **17.** d

### ZADANIA

- 1.**  $28,3 \text{ MeV}$  **3.** a)  $0,390 \text{ MeV}$ ; b)  $4,61 \text{ MeV}$  **7.** a) sześć; b) osiem **11.** a)  $1150 \text{ MeV}$ ; b)  $4,81 \text{ MeV/nukleon}$ ,  $12,2 \text{ MeV/proton}$  **15.** a)  $6,2 \text{ fm}$ ; b) tak **17.**  $E_k \approx 30 \text{ MeV}$  **21.**  ${}^{25}\text{Mg}$ :  $9,303\%$ ;  ${}^{26}\text{Mg}$ :  $11,71\%$  **23.**  $1,6 \cdot 10^{25} \text{ MeV}$  **25.**  $7,92 \text{ MeV}$  **27.**  $280 \text{ d}$  **29.** a)  $7,6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ; b)  $4,9 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  **31.** a)  $64,2 \text{ h}$ ; b)  $0,125$ ; c)  $0,0749$  **33.**  $5,3 \cdot 10^{22}$  **35.** a)  $2,0 \cdot 10^{20}$ ; b)  $2,8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  **37.**  $209$

- 39.**  $1,13 \cdot 10^{11}$  a **43.** a)  $8,88 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ; b)  $8,88 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ; c)  $1,19 \cdot 10^{15}$ ; d)  $0,111 \mu\text{g}$  **45.**  $730 \text{ cm}^2$  **47.** Pu:  $1,2 \cdot 10^{-17}$ , Cm:  $e^{-9173} \approx 0$  **49.**  $4,269 \text{ MeV}$  **51.** a)  $31,8 \text{ MeV}$ ,  $5,98 \text{ MeV}$ ; b)  $86 \text{ MeV}$  **53.**  ${}^{7}\text{Li}$  **55.**  $1,21 \text{ MeV}$  **57.**  $0,782 \text{ MeV}$  **59.** b)  $0,961 \text{ MeV}$  **61.**  $78,4 \text{ eV}$  **63.** a) U:  $1,06 \cdot 10^{19}$ , Pb:  $0,624 \cdot 10^{19}$ ; b)  $1,69 \cdot 10^{19}$ ; c)  $2,98 \cdot 10^9$  a **65.**  $1,8 \text{ mg}$  **67.**  $1,02 \text{ mg}$  **69.**  $13 \text{ mJ}$  **71.** a)  $6,3 \cdot 10^{18}$ ; b)  $2,5 \cdot 10^{11}$ ; c)  $0,20 \text{ J}$ ; d)  $2,3 \text{ mGy}$ ; e)  $30 \text{ mSv}$  **73.** a)  $6,6 \text{ MeV}$ ; b) nie **75.** a)  $25,4 \text{ MeV}$ ; b)  $12,8 \text{ MeV}$ ; c)  $25,0 \text{ MeV}$  **77.**  $0,49$  **79.** a) rozpad  $\beta^-$ ; b)  $8,2 \cdot 10^7$ ; c)  $1,2 \cdot 10^6$  **81.**  $3,2 \cdot 10^{12} \text{ Bq} = 86 \text{ Ci}$  **83.**  $4,28 \cdot 10^9$  a **85.**  $1,3 \cdot 10^{-13} \text{ m}$  **87.**  $3,2 \cdot 10^4$  a

## Rozdział 44

### SPRAWDZIANY

1. c i d **2.** a) nie; b) tak; c) nie **3.** e

### PYTANIA

1. a **3.** b **5.** a)  ${}^{93}\text{Sr}$ ; b)  ${}^{140}\text{I}$ ; c)  ${}^{155}\text{Nd}$  **7.** c **9.** a **11.** c

### ZADANIA

- 1.** a)  $2,6 \cdot 10^{24}$ ; b)  $8,2 \cdot 10^{13} \text{ J}$ ; c)  $2,6 \cdot 10^4 \text{ a}$  **3.**  $3,1 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$  **7.**  $-23,0 \text{ MeV}$  **9.**  $181 \text{ MeV}$  **11.** a)  ${}^{153}\text{Nd}$ ; b)  $110 \text{ MeV}$  dla  ${}^{83}\text{Ge}$ ,  $60 \text{ MeV}$  dla  ${}^{153}\text{Nd}$ ; c)  $1,6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  dla  ${}^{83}\text{Ge}$ ,  $8,7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  dla  ${}^{153}\text{Nd}$  **13.** a)  $252 \text{ MeV}$ ; b) typowa energia rozszczepienia  $200 \text{ MeV}$  **15.**  $461 \text{ kg}$  **17.** tak **19.**  $557 \text{ W}$  **21.**  ${}^{238}\text{U} + n \rightarrow {}^{239}\text{U} \rightarrow {}^{239}\text{Np} + e$ ,  ${}^{239}\text{Np} \rightarrow {}^{239}\text{Pu} + e$  **23.** a)  $84 \text{ kg}$ ; b)  $1,7 \cdot 10^{25}$ ; e)  $1,3 \cdot 10^{25}$  **25.**  $0,99938$  **27.** b)  $1,0, 0,89, 0,28, 0,019$ ; c) **8** **29.** a)  $75 \text{ kW}$ ; b)  $5800 \text{ kg}$  **31.**  $1,7 \cdot 10^9$  a **33.**  $170 \text{ keV}$  **35.** a)  $170 \text{ kV}$  **37.**  $0,151$  **41.** a)  $3,1 \cdot 10^{31} \text{ protonów/m}^3$ ; b)  $1,2 \cdot 10^6$  razy **43.** a)  $4,3 \cdot 10^9 \text{ kg/s}$ ; b)  $3,1 \cdot 10^{-4}$  **45.** a)  $1,83 \cdot 10^{38} \text{ s}^{-1}$ ; b)  $8,25 \cdot 10^{28} \text{ s}^{-1}$  **47.** a)  $4,1 \text{ eV/atom}$ ; b)  $9,0 \text{ MJ/kg}$ ; c)  $1500 \text{ a}$  **49.**  $1,6 \cdot 10^8$  a **51.** a)  $24,9 \text{ MeV}$ ; b)  $8,65 \text{ megatonów}$  **53.**  $14,4 \text{ kW}$

## Rozdział 45

### SPRAWDZIANY

1. a) rodzina mionów; b) cząstka; c)  $L_\mu = +1$  **2.** b i e **3.** c

### PYTANIA

1. d **3.** pion  $\pi^+$  po lewej stronie, którego tor wygina się w dół **5.** a, b, c, d **7.** c, f **9.** 1d, 2e, 3a, 4b, 5c **11.** 1b, 2c, 3d, 4e, 5a **13.** a) 0; b) +1; c) -1; d) +1; e) -1

### ZADANIA

- 1.**  $6,03 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$  **3.**  $18,4 \text{ fm}$  **5.**  $1,08 \cdot 10^{42} \text{ J}$  **7.**  $2,7 \text{ cm/s}$  **9.**  $769 \text{ MeV}$  **13.** a)  $L_e$ , spinu; b)  $L_\mu$ , ładunku; c) energii,  $L_\mu$  **15.**  $q = 0$ ,  $B = -1$ ,  $S = 0$  **17.** a) energia; b) dziwność c) ładunek **19.**  $338 \text{ MeV}$  **21.** a)  $K^+$ ; b)  $\bar{n}$ ; c)  $K^0$  **23.** a)  $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$ ; b)  $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$  **25.** a) nie jest możliwe; b)  $uuu$  **29.**  $\Sigma^0$ ,  $7530 \text{ km/s}$  **31.**  $666 \text{ nm}$  **33.** b)  $4,5 \text{ atomu H w m}^3$  **35.** a)  $256 \mu\text{eV}$ ; b)  $4,84 \text{ mm}$  **37.** a)  $122 \text{ m/s}$ ; b)  $246 \text{ a}$  **39.** b)  $2,38 \cdot 10^9 \text{ K}$  **41.** a)  $0,785\text{c}$ ; b)  $0,993\text{c}$ ; c) C2; d) C1; e) 51 ns; f) 40 ns **43.** c)  $r\alpha/c + (r\alpha/c)^2 + (r\alpha/c)^3 + \dots$ ; d)  $\Delta\lambda/\lambda = r\alpha/c$ ; e)  $\alpha = H$ ; f)  $7,4 \cdot 10^8 \text{ y}$ ; g)  $7,8 \cdot 10^8 \text{ a}$ ; h)  $7,4 \cdot 10^8 \text{ a}$ ; i)  $7,8 \cdot 10^8 \text{ y}$ ; j)  $1,2 \cdot 10^9 \text{ y}$ ; k)  $1,2 \cdot 10^9 \text{ a}$ ; l)  $4,4 \cdot 10^8 \text{ y}$

# AUTORZY ZDJĘĆ

## ROZDZIAŁ 39

Strona 1 — Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/©Photo Researchers. Rys. 39.8 — Druk za zgodą: A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki/Advanced Research Laboratory, Hitachi, Ltd., Kokubinju, Tokyo; H. Ezawa, Department of Physics, Gakushuin University, Mejiro, Tokyo. Rys. 39.9a — Druk za zgodą: Riber Division of Instruments, Inc. Rys. 39.9b — PSSC film „Fale materii”, druk za zgodą: Education Development Center, Newton, Massachusetts. Rys. 39.13 — ©IBMRL/Visuals Unlimited.

## ROZDZIAŁ 40

Strona 33 — Druk za zgodą: International Business Machines Corporation, Almaden Research Center, CA. Rys. 40.10 — Zdjęcie pochodzi z *Scientific American*, styczeń 1993, s. 122, druk za zgodą: Michael Steingerwald, Bell Labs-Lucent Technologies. Rys. 40.11b — Zdjęcie pochodzi z *Scientific American*, wrzesień 1995, s. 67, druk za zgodą: H. Temkin, Texas Tech University. Rys. 40.17 — Zdjęcie pochodzi z książki W. Finkelnburg *Struktura materii* wyd. Springer-Verlag, 1964. Druk za zgodą wydawnictwa.

## ROZDZIAŁ 41

Strona 66 — Larry Mulvehill/©Photo Researches. Rys. 41.1 — Druk za zgodą: Warren Nagourney. Rys. 41.12 — David Job/Tony Stone Images/New York, Inc. Rys. 41.18 — Michael Rosenfield/Tony Stone Images/New York, Inc.

## ROZDZIAŁ 42

Strona 103 — Steve Northrup/New York Times Pictures. Rys. 42.17 — Druk za zgodą: AT&T. Rys. 42.20 — Druk za zgodą: Intel.

## ROZDZIAŁ 43

Strona 134 — Elscint/Science Photo Library/©Photo Researchers.

## ROZDZIAŁ 44

Strona 169 — Druk za zgodą: U.S. Department of Energy. Rys. 44.7 — Druk za zgodą: U.S. Department of Energy. Rys. 44.8 — Garry Sheehan „Narodziny wieku atomu”, 1957. Druk za zgodą: Chicago Historical Society. Rys. 44.12a — ©Anglo Australian Telescope Board. Rys. 44.13 — Druk za zgodą: Princeton Plasma Physics Laboratory. Rys. 44.14 — Druk za zgodą: Los Alamos National Laboratory, New Mexico. Rys. 44.15 — Druk za zgodą: Martin Marietta Energy System/U.S. Department of Energy.

## ROZDZIAŁ 45

Strona 198 — Druk za zgodą: NASA. Rys. 45.1 — David Parker/©Photo Researchers. Rys. 45.2 — Druk za zgodą: Michael Mathews. Rys. 45.3 — Druk za zgodą: Lawrence Berkeley National Laboratory.

# SKOROWIDZ

## A

absorpja 3, 91  
akceptor 118  
aktywność próbki 145, 159  
Anderson C. 202  
anihilacja 204  
antycząstka 202–203, 204, 225  
antymateria 203  
antyneutrino 150  
atom 34, 67–95, 170  
—, moment magnetyczny dipolowy 71–72  
—, — pędu 71–72  
—, właściwości 67–70, 95

## B

bariera kulombowska 184  
— potencjału 22, 175  
— —, szerokość 23  
barion 202, 209, 213–214, 225  
Becquerel H. 145  
bekerel 145, 159  
Binnig G. 23  
Bohr N. 41, 156, 174  
Bose S.N. 201  
bozon 200–201, 225

## C

Chadwick J. 171, 218  
chlor 84  
chromodynamika kwantowa 218, 225  
ciało stałe 104–129  
— — kryształiczne 104  
— — —, poziom energetyczny 105–106  
— — —, właściwości elektryczne 104–105  
ciemna materia 221–222  
Compton A. 8  
Cowan C.L. 151  
cykl protonowo–protonowy p–p 186, 191  
czas połowicznego zaniku 145, 200

— reakcji  
— utrzymania 189  
częstka 199–203  
— swobodna 19, 34  
—  $\alpha$  186  
czerwony olbrzym 187  
częstość progowa 5

## D

datowanie radioaktywne 153–154, 159  
Davisson C.J. 15  
dawka pochłonięta (absorbowana) promieniowania 154–155, 159  
— —, równoważnik 155, 159  
de Broglie L. 14  
de Haas W.J. 69  
detektor cząstek 200  
deuter 186  
Diels J.C. 14  
dioda świecąca 123–125, 129  
Dirac P.A.M. 70  
donor 118  
doświadczenie Davissona–Germera 15  
— Einsteina–de Haasa 69–70  
— Minga Lai i Jean–Claude'a Dielsa 14  
— Sterna–Gerlacha 73–76  
— Younga 12  
dren 125  
drugie zerowe, energia 43  
dyfrakcja 17  
dyfuzja, prąd 120  
dziura 86, 115  
dziwność 221  
—, prawo zachowania 221

## E

Einstein A. 218  
elektrodynamika kwantowa 216  
elektron 14–17  
—, energia 35–40

—, konfiguracja 80  
—, powłoka 58  
— przewodnictwa 108–110  
— —, liczba 108–109  
— —, prawdopodobieństwo obsadzenia 111–112  
— —, stan kwantowy 110–111  
—, stan podstawowy 37  
— —, wzbudzony 37  
— walencyjny 35, 84  
—, wychwyt 150  
—, wzbudzenie 38  
elektrownia jądrowa 179  
emisja 3  
— fotonu 3, 38  
— spontaniczna 91  
— wymuszona 91–92, 96  
energia Fermiego 108, 114  
— jądrowa 191  
— jonizacji 67  
— reakcji 148  
— rozpadu 148  
— wiązania jądra 141–142  
— — nukleonu 141  
— wyzwalana 170  
Esaki L. 23

## F

fala biegąca 34  
— Comptona, długość 10  
— de Broglie'a, długość 15, 25, 202  
— prawdopodobieństwa 12, 15, 25  
— stojąca 34  
— w linie 34–35  
fale materii 14–17, 25, 34–35  
— —, częstość kołowa 18  
femtometr 139  
Fermi E. 171, 181, 199, 201  
fermion 200–201, 225  
fizyka kwantowa 2, 34

Ford K. 221  
fotodioda 124  
fotoelektron 4  
foton 2–3, 25  
—, emisja 3  
—, energia 3  
—, pęd 8–11  
— wirtualny 216  
—  $\gamma$  186  
fotopowielacz 14  
Frisch O. 171  
fulereny 16  
funkcja falowa 18, 25, 40–43, 60  
— elektronu 40–43  
—, normalizacja 42, 60

## G

gazy szlachetne 84  
Geiger H. 135  
Gell–Mann M. 211, 212  
Gerlach W. 73  
Germer L.H. 15  
gęstość prawdopodobieństwa 19, 25, 40, 55, 60  
— radialna 55, 60  
— stanów 110  
— — obsadzonych 113  
Giaever I. 23  
gluon 218  
Goeppert–Mayer M. 158  
Goudsmit S. 70  
granica krótkofalowa 85, 96  
grej 155

## H

hadron 202, 204, 209–210, 225  
Hahn O. 171  
halogeny 84  
Hubble E.P. 220

## I

interferencja 16  
inwersja obsadzeń 93, 96, 124  
izobara 139  
izolator 104, 106–107, 128  
izotop 138, 159

## J

Javan A. 93  
jądro 135–160, 170  
—, moment magnetyczny 142  
—, — pęd 142  
—, poziom energetyczny 142  
—, promień 139–140  
— złożone 156, 160

Jensen H. 158  
Josephson B. 23

## K

kanał typu  $n$  126  
kaon 199, 211  
kiur 145  
kolimator 74  
komórki elementarne 104  
kondensat Bosego–Einstaina 202  
kropki kwantowe 47–48  
kryterium Lawsona 189  
kwant 2, 25  
— światła 2–3, 25  
kwantyzacja 34  
kwark 213–216, 225  
— dolny 216  
— dziwny 216  
— górny 216  
— niski 215  
— powabny 215  
— wysoki 215  
kwazar 219

## L

laser 90–94, 96  
—, działanie 91–93  
— helowo–neonowy 93–94  
—, światło 90  
—, zastosowanie 90–91  
— złączowy 124–125, 129  
Lemaître G. 223  
lepton 202, 207–209, 225  
liczba atomowa 73, 137, 159,  
— barionowa 209  
— —, prawo zachowania 209  
— kwantowa 35, 54, 60  
— główna 54, 60  
— — ładunku elektrycznego 205  
— — magnetyczna 54  
— — — spinowa 70, 200  
— — orbitalna 54  
— — spinowa 70, 200  
— leptonica 208  
— —, prawo zachowania 208–209  
— masowa 137, 159  
liczby magiczne 157, 160  
linie absorpcyjne 52  
— emisyjne 52

## Ł

ładunek elektryczny 202  
— przestrzenny 120

## M

magneton Bohra 72  
Marsden E. 135  
masa jądrowa 140–141  
— molowa 109  
—, odchylenie 152  
materia 203  
—, falowa natura 17  
—, korpuskularna natura 17  
Maxwell J.C. 217  
Meitner L. 171  
metale 105, 107–114, 128  
— alkaliczne 84  
metatrwałość 91  
mezon 202, 209, 214, 225  
miedź 105  
mikroskop tunelowy skaningowy 24, 48  
Ming Lai 14  
mion 199  
—, rozpad 205–206  
model Bohra 53–54  
— Bohra i Wheelera 174–176  
— elektronów swobodnych 108  
— jądra 156–158, 160  
— — kroplowy 156, 160  
— — powłokowy 157–158, 160  
— — uogólniony 158, 160  
— kwarkowy 213–216  
— Thomsona 136  
moderator 177  
molibden 86  
moment magnetyczny dipolowy 68, 71, 95  
— — efektywny 73  
— — spinowy 72  
— pęd 68–69, 95  
— — orbitalny 71  
— — spinowy 72  
Moseley H.G.J. 87

## N

nanokryształ 46  
neon 83  
neutrino 150, 151, 186, 205, 225  
— elektronowe 207  
— mionowe 207  
neutron 159  
—, energia 177  
— prędkie 176  
— termiczny 174  
—, ucieczka 176  
—, wychwyt 177  
Nishijima K. 211  
nośnik ładunku 118

nośnik ładunku, koncentracja 104  
— mniejszościowy 118, 121, 129  
— wiązkościowy 118, 120–121, 128  
nukleon 137, 159  
nuklid 137, 159  
—, efektywny promień 140  
—, halo 140  
—, mapa 138, 152  
—, porządkowanie 138–139  
—, właściwości 137

## ○

obieg pierwotny 178  
— wtórny 179  
obszar zubożony 120, 129  
oddziaływanie elektromagnetyczne  
216–217  
— elektrostatyczne 217, 219, 225  
— kolorowe 218, 225  
— silne 132, 159, 202, 204, 218  
— słabe 202, 205, 217–218  
odpady promieniotwórcze 179  
odpychanie kulombowskie 183  
okres 67  
opór właściwy 104, 115–116

## ¶

parametr deformacji 174  
parsek 220  
pasmo energetyczne 106, 128  
— przewodnictwa 114, 128  
— walencyjne 114  
Pauli W. 151  
Penzias A. 221  
Perl M. 207  
pierwiastki chemiczne 67  
—, numerowanie 87–88, 96  
—, okres 67  
—, promieniotwórcze 135  
—, właściwości 67  
piezoelektryczność 24  
pion 199  
—, rozpad 205  
plazma, temperatura 189  
podpowłoka 58, 60, 70, 96  
— zamknięta 83  
potencjal hamujący 4  
powłoka 58, 60, 70, 96  
poziom energetyczny 37, 80, 105–106  
—, częściowo obsadzony 80  
—, diagram 37  
—, jądra 142  
—, nieobsadzony (pusty) 80  
—, obsadzony (wypełniony) 80

— Fermiego 108  
pozyton 186  
półprzewodnik 105, 114–116, 128  
—, domieszkowanie 116–119  
— typu  $n$  116–118, 128  
— typu  $p$  116, 118–119, 128  
praca wyjścia 6, 25  
 prawdopodobieństwo detekcji 40–42  
— obsadzenia 111–112, 128  
 prawo Coulomba 156  
— Hubble'a 220, 225  
prąd fotoelektryczny 4  
— unoszenia 121  
prędkość Fermiego 108  
prt paliwowy 177  
— sterujący 178  
promieniotwórczość 152  
promieniowanie reliktowe 221  
— rentgenowskie 85–87, 96  
—, widmo charakterystyczne 86–87,  
96  
—, ciągłe 85–86, 96  
—  $\gamma$  177  
promień Bohra 55, 60  
przejście kwantowe (przeskok kwantowy)  
38  
przerwa energetyczna 106, 128  
przesunięcie comptonowskie 9–10, 25  
przewodnik 128  
pułdo prostokątne 49, 79–80  
pułapka elektronowa 35–50, 60, 79  
— dwu- i trójwymiarowa 37  
— jednowymiarowa 35–36, 79

## R

rad 155  
radionuklid 138  
—, czas połowicznego zaniku 145  
—, rozpad 138  
—, średni czas życia 145  
rdzeń 177  
reakcja łańcuchowa 176, 191  
reaktor jądrowy 176–181  
—, naturalny 181–183  
—, wodny ciśnieniowy 178  
reguła lokalizacji przestrzennej 35, 59  
rem 155  
rezonans jądrowy magnetyczny 77–78,  
95  
—, obrazowanie (MRI) 78  
—, widmo 77  
Richter B. 215  
Rohrer H. 23  
rozkład Maxwella 184

rozpad promieniotwórczy 144–147,  
153–154, 159  
—, szybkość 200  
—  $\alpha$  147–149, 159  
—  $\beta$  150–152, 159, 178, 202, 214–215  
rozproszenie comptonowskie 11  
rozszczepienie jądra 142, 171–173, 191  
—, model 174–176  
równania mechaniki newtonowskiej 19  
równanie Einsteina 6–7  
— Maxwella 19  
— normalizacyjne 42, 60  
— Schrödingera 18–20  
różnica potencjałów, kontaktowa 120,  
129

Rubbia C. 217

Rubin V. 221  
Rutherford E. 135

## S

Samios N. 212  
Schrödinger E. 19  
seria Balmera 53  
— Lymana 53  
— Paschena 53  
serie widmowe, granice 53  
sieć 104  
siła grawitacyjna 202  
siły elektromagnetyczne 202  
— jądrowe 142, 159  
siwert 155, 159  
Słońce 184, 185–188  
soczewka grawitacyjna 222  
sód 84  
spin 70–73, 95, 200  
srebro 74  
stała Avogadra 109  
— Boltzmanna 92  
— Hubble'a 220  
— Plancka 3  
— rozpadu 144, 159, 200  
stan nadkrytyczny 178  
— podkrytyczny 178  
— podstawowy 54–56  
—, energia 42–43, 60  
statystyka Fermiego–Diraca 111  
Stern O. 73  
studnia potencjału 36–46  
—, głębokość 44  
—, nieskończoność głęboka 36, 59  
— skończona 44, 60  
supernowa 187, 188  
synteza 142, 183

syntesa jądrowa 183, 191–192  
— laserowa 190, 192  
— termojądrowa 183–191  
— — kontrolowana 188–191  
— — we wnętrzu Słońca i innych gwiazd 185–188

## §

ścieżka ośmiokrotna 212–213  
średni czas życia 145, 200  
światło 12–14, 25  
—, emisja i pochłanianie 68  
—, fala 12  
—, promień 14

## T

taon 207  
Taylor G.I. 13  
temperaturowy współczynnik oporu 104,  
116  
Ting S. 215  
tokamak 190, 192  
tranzystor 90, 125–127  
— FET 125  
— MOSFET 126, 129  
tunelowanie 22–24

## U

Uhlenbeck G. 70  
układ okresowy 82–85, 96  
— scalony (chip) 127, 129  
utrzymywanie inercyjne 190  
— magnetyczne 190

## V

van der Meer S. 17

## W

warunek brzegowy 56  
Wheeler J. 174  
Widmo 52  
wielka unifikacja, teoria 219  
Wielki Wybuch, teoria 219, 222–224, 225  
Wilson R. 221  
wodór 50–59  
—, funkcja falowa stanu podstawowego  
54–57  
—, liczby kwantowe 54  
—, model Bohra 53–54  
—, poziomy energetyczne 51–53  
—, widmo atomu 52  
WSB (względna skuteczność biologiczna) 155  
współczynnik przejścia (transmisji) 23

Wszechświat 219–221, 225

—, wiek 220  
wychwyty rezonansowy 177  
wykres Moseleya 88–89

## Z

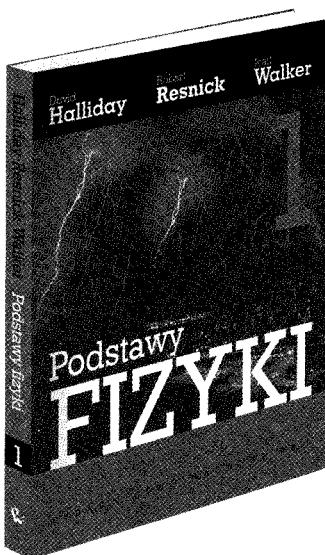
zagroda 48–49  
— kwantowa 33  
— prostokątna 48–49, 79  
zapłon 190  
zakaz Pauliego 78–79, 95, 201  
zasada nieoznaczoności Heisenberga 21,  
25, 217  
— odpowiedniości (korespondencji) 41, 60  
zjawisko fotoelektryczne 4–7, 25  
— tunelowe 22–24, 26  
złącze  $p-n$  119–121, 128  
—, płaszczyzna 120, 128  
—, polaryzacja w kierunku przewodzenia 122  
—, — — zaporowym 123  
— prostujące 121–123  
Zweig G. 213

## Ż

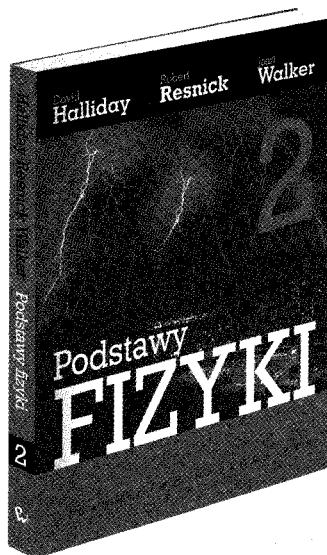
żelazo 84

David Halliday • Robert Resnick • Jearl Walker

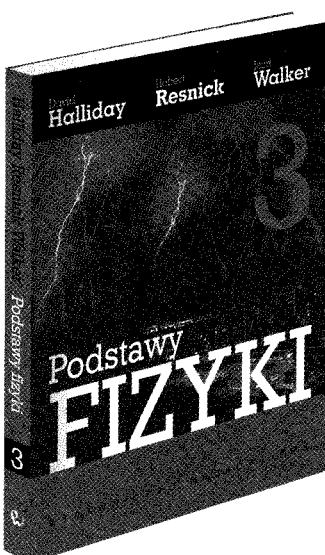
# PODSTAWY FIZYKI t. 1-5



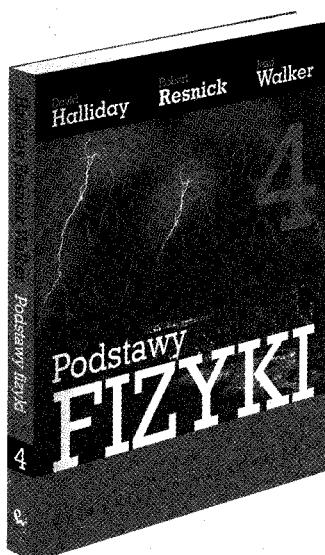
Tom 1  
MECHANIKA



Tom 2  
MECHANIKA cd.  
TERMODYNAMIKI



Tom 3  
ELEKTRYCZNOŚĆ  
I MAGNETYZM



Tom 4  
OPTYKA  
TEORIA  
WZGLĘDNOŚCI

## Wybrane stałe fizyczne\*

prędkość światła	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)
energetyczny równoważnik masy	$c^2$	$8,99 \cdot 10^{16}$ J/kg 931,5 MeV/u
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s $4,14 \cdot 10^{-15}$ eV · s
stała Boltzmanna	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K $8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C
masa elektronu	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
masa protonu	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
masa neutronu	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg
masa deuteronu	$m_d$	$3,34 \cdot 10^{-27}$ kg
promień Bohra	$r_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T $5,79 \cdot 10^{-5}$ eV/T
stała Rydberga	$R$	0,01097 nm <sup>-1</sup>

\* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

## Wybrane współczynniki zamiany jednostek\*

### Masa i gęstość

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

### Długość i objętość

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in} = 3,28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mila} = 1,61 \text{ km} = 5280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ Å}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} = 1000 \text{ fm}$$

$$1 \text{ rok świetlny (y)} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3 \\ &= 264 \text{ galony amerykańskie} \end{aligned}$$

### Czas

$$1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$$

$$1 \text{ a} = 365 \frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$$

### Prędkość

$$1 \text{ m/s} = 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mili/h}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,621 \text{ mili/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

### Sила i ciśnienie

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} = 0,225 \text{ funta}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dyn/cm}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cm Hg}$$

### Energia i moc

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergów} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ KM} = 746 \text{ W}$$

### Magnetyzm

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}$$

### Miara łukowa kąta

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ obrotu}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ obrotu}$$

\* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

David **Halliday**  
Robert **Resnick**  
Jearl **Walker**

5

# Podstawy fizyki

**RESNICK • HALLIDAY reaktywacja**

- kompletny, nowoczesny podręcznik fizyki nareszcie po polsku !
- aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum
- teoria poparta licznymi przykładami
- pytania i zadania sprawdzające po każdym rozdziale
- przejrzysty układ tekstu
- wspaniała szata graficzna
- kolorowe, sugestywne ilustracje wzbogacające i uzupełniające wykład
- nowość: najważniejsze zagadnienia fizyki współczesnej !

**Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów**

**Nieoceniona pomoc dla nauczycieli**

## **Tom 5**

zawiera zagadnienia z następujących dziedzin fizyki współczesnej

- fizyka kwantowa
- fizyka ciała stałego
- fizyka jądrowa i cząstek elementarnych

t.5

ISBN 83-01-13994-3



9 788301 139940

t.1-5

ISBN 83-01-13997-8



9 788301 139971