1 Testy dla wartości oczekiwanej

1.1 Testy dla pojedynczej próby

$$H : \mu = \mu_0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} K &: \mu \neq \mu_0 \\ K' &: \mu < \mu_0 \\ K'' &: \mu > \mu_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Model 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma)$, σ-znane
Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}. \tag{3}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}], \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i $z_{1-\alpha}$ są, odpowiednio, kwantylami rozkładu normalnego $N(0,1)$ rzędów $1-\frac{\alpha}{2}$ i $1-\alpha$.

Model 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma)$, σ-nieznane
Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}, \tag{5}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -t^{[n-1]}_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t^{[n-1]}_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -t^{[n-1]}_{1-\alpha}], \\ W''_\alpha &= [t^{[n-1]}_{1-\alpha}, +\infty), \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $t^{[n-1]}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i $t^{[n-1]}_{1-\alpha}$ są, odpowiednio, kwantylami rozkładu t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody rzędów $1-\frac{\alpha}{2}$ i $1-\alpha$.

Model 3

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. rozkład nieznany, ale $n-$ duże
Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}. \tag{7}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}], \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned} \tag{8}$$

1.2 Testy dla dwóch prób niezależnych

$$H : \mu_1 = \mu_2, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} K &: \mu_1 \neq \mu_2 \\ K' &: \mu_1 < \mu_2 \\ K'' &: \mu_1 > \mu_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Model 1

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $N(\mu_1, \sigma_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $N(\mu_2, \sigma_2)$; próby niezależne, σ_1 i σ_2 znane

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \tag{11}$$

gdzie $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ są, odpowiednio, średnimi arytmetycznymi z pobranych próbek.

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}], \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty), \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie liczby $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ i $z_{1-\alpha}$ są, odpowiednio, kwantylami rozkładu $N(0,1)$ rzędów $1 - \frac{\alpha}{2}$ i $1 - \alpha$.

Model 2

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $N(\mu_1, \sigma_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $N(\mu_2, \sigma_2)$; próby niezależne, σ_1 i σ_2 nieznane, ale równe (tzn. $\sigma_1 = \sigma_2$)

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \tag{13}$$

gdzie $\overline{X}$ i S_1^2 oraz $\overline{Y}$ i S_2^2 są, odpowiednio, średnimi arytmetycznymi i wariancjami z pobranych próbek.

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_1+n_2-2]}] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_1+n_2-2]}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -t_{1-\alpha}^{[n_1+n_2-2]}], \\ W''_\alpha &= [t_{1-\alpha}^{[n_1+n_2-2]}, +\infty), \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie liczby $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_1+n_2-2]}$ i $t_{1-\alpha}^{[n_1+n_2-2]}$ są, odpowiednio, kwantylami rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ i $1 - \alpha$ rozkładu t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

Model 3

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $N(\mu_1, \sigma_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $N(\mu_2, \sigma_2)$; próby niezależne, σ_1 i σ_2 nieznane

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{15}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -c(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1, n_2)] \cup [c(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1, n_2), +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -c(1-\alpha, n_1, n_2)], \\ W''_\alpha &= [c(1-\alpha, n_1, n_2), +\infty), \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie

$$c(\xi, n_1, n_2) \simeq \frac{\frac{S_1^2}{n_1} t_\xi^{[n_1-1]} + \frac{S_2^2}{n_2} t_\xi^{[n_2-1]}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \tag{17}$$

przy czym $t_\xi^{[n_1-1]}$ i $t_\xi^{[n_2-1]}$ są kwantylami rozkładu t-Studenta rzędu ξ, odpowiednio, o $n_1 - 1$ i $n_2 - 1$ stopniach swobody.

Model 4

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d.; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d.; próby niezależne; rozkłady nieznane, ale licznościach n_1 i n_2 duże
Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{18}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}], \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned} \tag{19}$$

1.3 Test dla obserwacji parami zależnych

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $N(\mu_1, \sigma_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $N(\mu_2, \sigma_2)$; próby parami zależne
Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{Z}}{S_Z}\sqrt{n}, \tag{20}$$

gdzie $\overline{Z}$ oraz S_Z jest, odpowiednio, średnią i odchyleniem standardowym z próby $Z_1, \ldots, Z_n$, przy czym $Z_i = X_i - Y_i$
Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n-1]}] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n-1]}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -t_{1-\alpha}^{[n-1]}], \\ W''_\alpha &= [t_{1-\alpha}^{[n-1]}, +\infty). \end{aligned} \tag{21}$$

2 Testy dla wariancji

2.1 Testy dla pojedynczej próby

$$H : \sigma^2 = \sigma_0^2, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} K &: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ K' &: \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ K'' &: \sigma^2 > \sigma_0^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Model 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma)$, μ-znane
Statystyka testowa:

$$T = \frac{n\widetilde{S}^2}{\sigma_0^2}, \tag{24}$$

Obszary krytyczny

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}] \cup [\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}, +\infty) \qquad (25)\\ W'_\alpha &= (0, \chi^2_{\alpha,n}] \\ W''_\alpha &= [\chi^2_{1-\alpha,n}, +\infty), \end{aligned}$$

przy czym $\chi^2_{\beta,n}$ jest kwantylem rzędu β rozkładu chi-kwadrat o n stopniach swobody.

Model 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma)$, μ-nieznane
Statystyka testowa:

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \qquad (26)$$

Obszary krytyczny

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}] \cup [\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, +\infty) \qquad (27)\\ W'_\alpha &= (0, \chi^2_{\alpha,n-1}] \\ W''_\alpha &= [\chi^2_{1-\alpha,n-1}, +\infty), \end{aligned}$$

przy czym $\chi^2_{\beta,n-1}$ jest kwantylem rzędu β rozkładu chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody.

Model 3

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. rozkład nieznany, ale $n-$ duże
Statystyka testowa:

$$T = \sqrt{\frac{2nS^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3}\,, \qquad (28)$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \qquad (29)\\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}] \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned}$$

2.2 Testy dla dwóch prób niezależnych

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $N(\mu_1, \sigma_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $N(\mu_2, \sigma_2)$; próby niezależne

$$H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad (30)$$

$$K'' : \sigma_1^2 > \sigma_2^2\ . \qquad (31)$$

Statystyka testowa:

$$T'' = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (32)$$

Obszar krytyczny

$$W_\alpha = [F_{1-\alpha}^{[n_1-1,n_2-1]}, +\infty), \qquad (33)$$

gdzie $F_{1-\alpha}^{[n_1-1,n_2-1]}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu F-Snedecora o (n_1-1, n_2-1) stopniach swobody.
Dla

$$K' : \sigma_1^2 < \sigma_2^2, \qquad (34)$$

statystyka testowa:

$$T' = \frac{1}{T''} = \frac{S_2^2}{S_1^2}, \qquad (35)$$

obszar krytyczny

$$W_\alpha = [F_{1-\alpha}^{[n_2-1,n_1-1]}, +\infty), \tag{36}$$

gdzie $F_{1-\alpha}^{[n_2-1,n_1-1]}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu F-Snedecora o (n_2-1, n_1-1) stopniach swobody.

Dla

$$K : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2, \tag{37}$$

statystyka testowa:

$$T = \begin{cases} T' & \text{gdy} \quad S_1^2 > S_2^2, \\ T'' & \text{gdy} \quad S_2^2 > S_1^2, \end{cases} \tag{38}$$

obszar krytyczny:

$$W_\alpha = \begin{cases} [F_{1-\alpha}^{[n_1-1,n_2-1]}, +\infty) & \text{gdy} \quad S_1^2 > S_2^2, \\ [F_{1-\alpha}^{[n_2-1,n_1-1]}, +\infty) & \text{gdy} \quad S_2^2 > S_1^2. \end{cases} \tag{39}$$

3 Testy dla wskaźnika struktury

3.1 Testy dla pojedynczej próby

$$H : p = p_0, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} K &: \ p = p_0, \\ K' &: \ p < p_0, \\ K'' &: \ p > p_0. \end{aligned} \tag{41}$$

Model 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $Bern(p)$; $n-$ duże

Statystyka testowa

$$T = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \tag{42a}$$

gdzie

$$\widehat{p} = \frac{k}{n},$$

przy czym gdzie k jest liczbą elementów wyróżnionych (sukcesów) w próbie o liczności n.

Obszar krytyczny

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}], \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned} \tag{43}$$

Model 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $Bern(p)$; $n-$ nieduże

Statystyka testowa:

$$T = 2\left(arcsin\sqrt{\widehat{p}} - arcsin\sqrt{p_0}\right)\sqrt{n}, \tag{44}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}] \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned} \tag{45}$$

3.2 Testy dla dwóch niezależnych prób

$$H : p_1 = p_2, \tag{46}$$

$$\begin{aligned} K &: p_1 \neq p_2, \\ K' &: p_1 < p_2, \\ K'' &: p_1 > p_2. \end{aligned} \tag{47}$$

Model 1

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $Bern(p_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $Bern(p_2)$; próby niezależne; n_1 i n_2- duże

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n^*}}}, \tag{48}$$

gdzie $\widehat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$ oraz $\widehat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$, przy czym k_1 i k_2 oznaczają liczbę zaobserwowanych sukcesów, odpowiednio, w pierwszej i drugiej próbie, natomiast

$$p^* = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}, \tag{49}$$

$$n^* = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}. \tag{50}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}] \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned} \tag{51}$$

Model 2

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $Bern(p_1)$; $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. $Bern(p_2)$; próby niezależne; n_1 oraz n_2- nieduże

Statystyka testowa:

$$T = 2\left(arcsin\sqrt{\widehat{p}_1} - arcsin\sqrt{\widehat{p}_2}\right)\sqrt{n^*}, \tag{52}$$

Obszar krytyczny:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \\ W'_\alpha &= (-\infty, -z_{1-\alpha}] \\ W''_\alpha &= [z_{1-\alpha}, +\infty). \end{aligned} \tag{53}$$