GRS - zadania treningowe przed II kolokwium; cz. 1

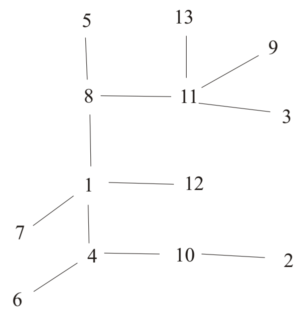
Zadanie 1.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

M jest macierzą sąsiedztwa wierzchołków grafu skierowanego K.
a] Czy K jest turniejem?
Czy w K są spełnione założenia:
b] twierdzenia Nasha-Williamsa?
c] twierdzenia Meyniela?
Uzasadnij i przytocz te twierdzenia.
d] Czy graf K ma cykl Hamiltona?

Zadanie 2.

T



Zadanie 3.

a] Wyznacz kod Prüfera drzewa T.

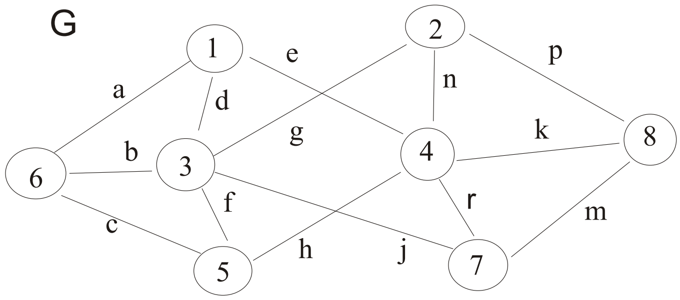
b] Zbuduj drzewo o kodzie Prüfera (10, 11, 8, 4, 1, 11, 4, 1, 1, 8, 11).

Zadanie 3.
W grafie pełnym K_n (Określ, jaka jest wartość n) :
(4a**)** Wyznacz drzewo rozpinające T o kodzie Prüfera (4, 4, 5, 3, 3).
(4b**)** Czy cykl (3, 7, 5, 4, 3) jest cyklem fundamentalnym tego grafu względem drzewa T ? Uzasadnij.
Czy cykl (3, 5, 4, 3) jest fundamentalny względem T? Uzasadnij.
(4c**)** Przedstaw cykl c = (4, 3, 2, 1, 5, 4) jako różnicę symetryczną cykli fundamentalnych.

Zadanie 4.
Rozpatrzmy graf dwudzielny $G = K_{100,97}$. Niech T będzie drzewem rozpinającym grafu G.
Niech y oznacza liczbę wszystkich cykli fundamentalnych grafu G (względem drzewa T).
Podaj jak najwęższy przedział, w jakim mieści się liczba y. Uzasadnij.

Zadanie 5.

1. Ile wynosi w G maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych między wierzchołkami 6 i 8?
2. Ile wynosi w G maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych między wierzchołkami 6 i 8?
3. Stosując odpowiednią wersję tw. Mengera, wyznacz minimalną moc zbioru rozspajającego (rozdzielającego) wierzchołki 6 i 8 oraz wskaż taki zbiór krawędzi (wierzchołków) o minimalnej mocy.
4. Ile wynosi spójność krawędziowa (wierzchołkowa) tego grafu? Uzasadnij.
5. Czy w tym grafie istnieją zbiory rozspajające (rozdzielające) minimalne, ale nie o minimalnej mocy?

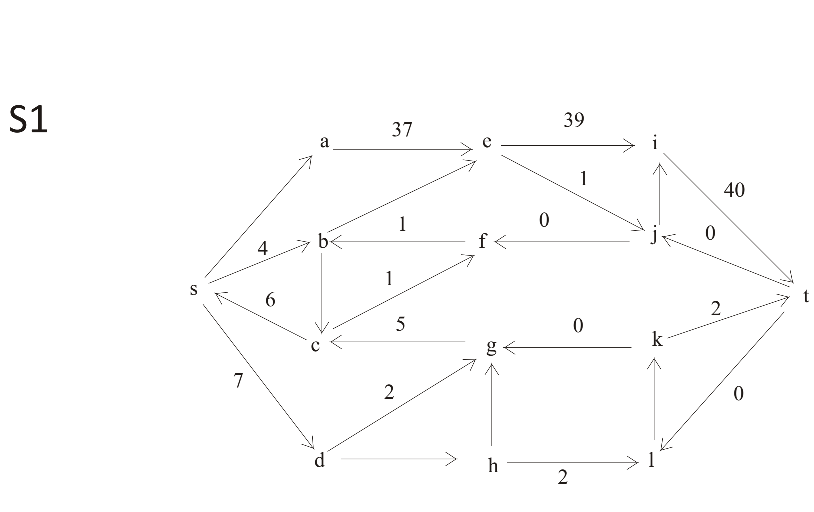


Zadanie 6.

W sieci S1 s jest źródłem, t jest ujściem; przepustowość każdego łuku wynosi 40.
Nad łukami zaznaczono wartości pewnej funkcji. Nie dla wszystkich łuków te wartości są podane.

1) Uzupełnij wartości funkcji (dla siedmiu łuków, dla których wartość nie jest podana) w taki sposób, by otrzymać funkcję przepływu ze źródła s do ujścia t. Otrzymasz pewien przepływ F. (Na rysunku wpisz te wartości nad łukami.)
2) Wyznacz przekrój P_U sieci odpowiadający zbiorowi wierzchołków U = {s, a ,b, g, h}. (Wypisz i zaznacz na schemacie łuki wchodzące w skład przekroju $P_{U.}$)
3) Wyznacz przepustowość przekroju P_U.
4) Wyznacz wartość przepływu F przez przekrój P_U.

5) Konstruując ciąg ścieżek powiększających (wystartuj, oczywiście, z przepływu F), wyznacz przepływ maksymalny w sieci S1. (Ścieżki zaznacz na kolejnych rysunkach oraz wypisz je pod rysunkiem, odpowiadającym danej ścieżce. Oblicz również wartość przepływu, jaki otrzymujesz w każdym kroku algorytmu.)
6) Udowodnij, że w efekcie procedury otrzymany został przepływ maksymalny. (Zaznacz na rysunku wartości końcowego przepływu maksymalnego.)
7) Wyznacz przekrój o minimalnej przepustowości.



Zadanie 7.

W sieci S2 = ((V, A), c), (s jest źródłem, t jest ujściem), przepustowości łuków c (x,y) zaznaczono przy łukach liczbami podkreślonymi.

Początkowa funkcja przepływu F ma wartość 0 dla każdego łuku (x,y).

(1) Czy ścieżka p1 = (s, b, e, g, t) jest ścieżką powiększającą przepływ F ? Uzasadnij.

(2) Wyznacz przepustowość przekroju P_U odpowiadającego zbiorowi wierzchołków U = {s, b, g, d }.

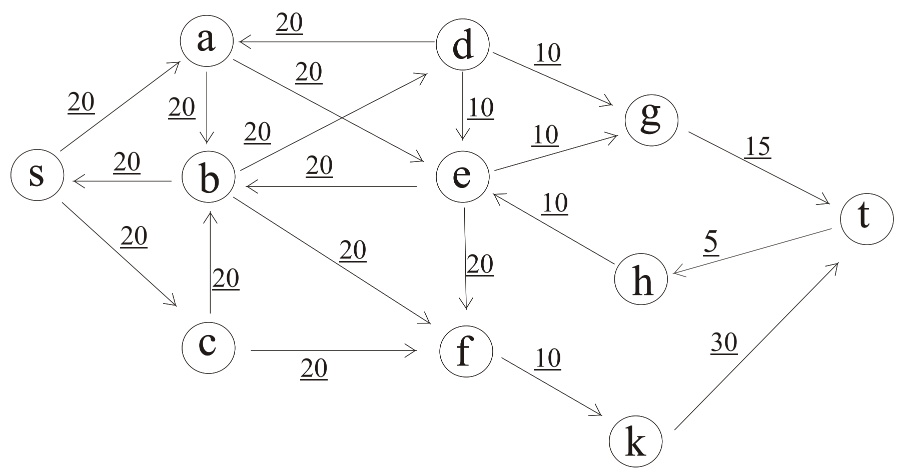
(3) Budując ciąg ścieżek powiększających, wyznacz przepływ maksymalny ze źródła s do ujścia t . Wypisz tworzone po kolei ścieżki i zaznacz je na schematach sieci. Na każdym kroku algorytmu oblicz wartość W(MF) uzyskanego przepływu MF.

(4) Zaznacz na schemacie sieci uzyskany końcowy przepływ maksymalny.

(5) Wskaż przekrój sieci między źródłem s a ujściem t, mający minimalną przepustowość. Uzasadnij, że jest to przekrój o minimalnej przepustowości.

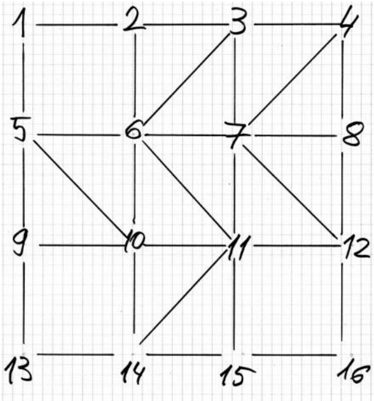
(6) Uzasadnij fakt, że wyznaczony końcowy przepływ MF jest rzeczywiście przepływem maksymalnym.

S2



GRS_IZ_2020/21   Zadania treningowe przed II kol, cz. 2

Zadanie 1.



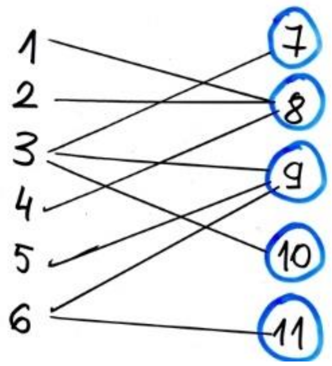
Wyznacz kilka skojarzeń maksymalnej mocy w podanym grafie,

stosując algorytm oparty na tw. Berge'a.

Zacznij algorytm od niewielkiego skojarzenia początkowego (np. skojarzenia mocy 3).

Zadanie 2.

G = (V $_1$ u V$_2$, E) – graf dwudzielny



Wyznacz w G:

1) skojarzenie maksymalnej mocy;

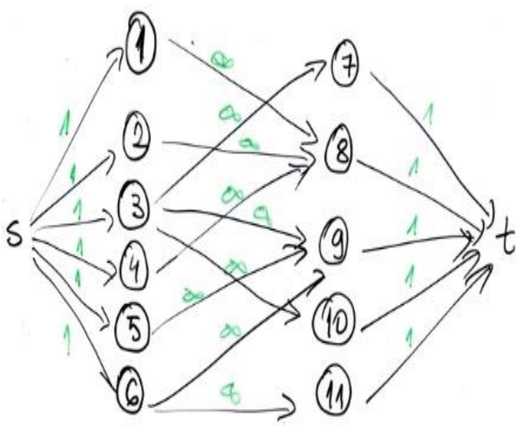
2) minimalną liczbę wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie; wskaż odpowiedni zbiór wierzchołków;

3) maksymalną liczbę wierzchołków niezależnych; wskaż odpowiedni zbiór wierzchołków;

4) minimalną liczbę krawędzi pokrywających wszystkie wierzchołki; wskaż odpowiedni zbiór krawędzi.

5) Na podstawie wyników z **1) – 4)** przekonaj się, jak spełnione są równości i nierówności występujące w twierdzeniu Gallaia i w tw. Königa.

Zadanie 3.



W tej sieci zielonymi liczbami oznaczone są przepustowości łuków.

Łuki z wierzchołków 1, 2, 3, 4, 5, 6 do wierzchołków 7, 8, 9, 10, 11 mają bardzo dużą przepustowość np. = 100.

Łuki ze źródła s do wierzchołków 1, 2, 3, 4, 5, 6 mają przepustowość 1.

Łuki z wierzchołków 7, 8, 9, 10, 11 do ujścia t mają przepustowość 1.

Dla każdego łuku wartość przepływu początkowego wynosi 0.

Skonstruuj przepływ maksymalny w tej sieci.

Zauważ, w jaki sposób uzyskany przepływ maksymalny wyznacza skojarzenie maksymalnej mocy w grafie dwudzielnym G z poprzedniego zadania.

Zadanie 4.

Wyznacz wartości υ, ρ, α, τ dla poniższych dwóch grafów. Przekonaj się, jak spełnione są równości i nierówności występujące w twierdzeniu Gallaia.