

2.1. Po zakończeniu sesji stwierdzono, że 60% studentów drugiego roku zdało egzamin z języka C++, natomiast 25% zdało egzamin z C++ oraz z RPS. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student, który zdał egzamin z C++, zdał również egzamin z RPS?

2.2. Okazało się, że 70% programistów pewnej firmy zna dobrze język Ruby, zaś 50% — zarówno Ruby jak i Lua. Wyznacz prawdopodobieństwo, że przypadkowo napotkany na korytarzu pracownik znający Ruby potrafiłby napisać skrypt w Lua.

2.3. Rzucamy czterema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła trójka wiedząc, iż na wszystkich kostkach wypadła inna liczba oczek.

2.4. W studenckim punkcie ksero stoją 2 kopiarki. Prawdopodobieństwo, że każda z nich jest używana wynosi 0,6. Gdy ktoś korzysta z jednego urządzenia to prawdopodobieństwo, że drugie będzie zajęte, wynosi 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kopiarka będzie wolna.

2.5. Kazik ma trzy koleżanki. U Ani bywa 10 razy w miesiącu, u Basi 15 razy w miesiącu, a u Cecylii w pozostałe dni (rzecz dzieje się w październiku). Jako że Kazik to łasuch, a każda z niewiast „cicho” zabiega o jego względy, często spotkanie kończy się sową wyżerką. Ania wita Kazika suto zastawionym stołem średnio 3 razy na 5 randek, Basia — 7 razy na 13, a Cecylia tylko raz na 9 spotkań.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym dniu Kazik nie wróci do domu z pustym żołądkiem?

(b) Tomek widział Kazika zataczającego się na ulicy z przejedzenia. Którą przyjaciółkę najprawdopodobniej odwiedził nasz bohater? Z jakim prawdopodobieństwem jest to Cecylia?

2.6. (PG) Wśród dziennikarzy rozgorzał spór, kto będzie ubiegał się o fotel prezydencki z ramienia partii rządzącej. Według komentatorów jest tylko trzech liczących się kandydatów, przy czym z prawdopodobieństwem 0,4 rekomendację partii otrzyma poseł Glut, z prawdopodobieństwem 0,35 poseł Dryg oraz z prawdopodobieństwem 0,25 senator Klaps. Uważa się przy tym, iż gdyby kandydatem stronnictwa został pan Glut, to prawdopodobieństwo wygrania przezeń wyborów wynosiłoby 0,7, w przypadku rekomendowania Dryga 0,8, zaś Gluta — 0,9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kandydat wysunięty przez partię rządzącą wygra wybory?

2.7. Wytwórnia słodczy produkuje 4 rodzaje cukierków: krówki, irysy, landryny i kukulki. Miesięczna produkcja wynosi odpowiednio 9, 6, 13 i 7 ton. Przez pomyłkę wypuszczono partię towaru, w której zamiast cukru użyto soli. Szacuje się, że prawdopodobieństwo znalezienia słonej krówki wynosi 12%, irysa — 19%, landrynki — 21% oraz kukulki — 2%. (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany cukierek będzie słony? (b) Mama kupiła synkowi cukierka w lokalnym sklepie. Okazało się, że był on słony. Z jakim prawdopodobieństwem była to kukulka?

2.8. (PG) Kanałem łączności nadaje się dwa rodzaje sygnałów: A oraz B z prawdopodobieństwami, odpowiednio, 0,6 i 0,4. Sygnały te podlegają zakłóceniom, na skutek których sygnał A może być odebrany jako B, sygnał B jako A, bądź też sygnał może w ogóle nie zostać odebrany. Prawdopodobieństwa zaistnienia poszczególnych sytuacji podano w poniższej tabeli. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyemitowany sygnał nie został odebrany.

		Sygnały odebrane		
		A	B	Zanik
Sygnały nadane	A	0,7	0,2	0,1
	B	0,2	0,7	0,1

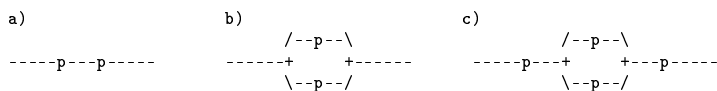
2.9. Dominik umawia się dziś na randkę. Prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania z Kamilą wynosi 0,6, a z Dorotą 0,7. Zadzwoił więc do obu dziewcząt i zaproponował schadzkę pod Hotelem Giewont o godz. 17, oczywiście nie mówiąc nic o „tej drugiej”. Wiedząc że, rzecz jasna, dziewczyny przychodzą niezależnie od siebie, oblicz prawdopodobieństwo, że Dominik (a) straci dwie „koleżanki”, (b) spędzi miły wieczór z którąś z nich.

2.10. Borys i Sasza niezbyt często pojawiają się na zajęciach w szkole. Borys jest obecny na 60% zajęć, zaś jego koleżanka wagaruje zwykle 3 razy na 10 lekcji. Oboje można spotkać jednocześnie na 40% lekcji. Oblicz prawdopodobieństwo, że na zajęciach (a) jest choć jedno z nich, (b) jest dokładnie jedno z nich, (c) nie ma żadnego z nich. Czy „przyjście Borysa” i „przyjście Saszy” na zajęcia są zdarzeniami niezależnymi?

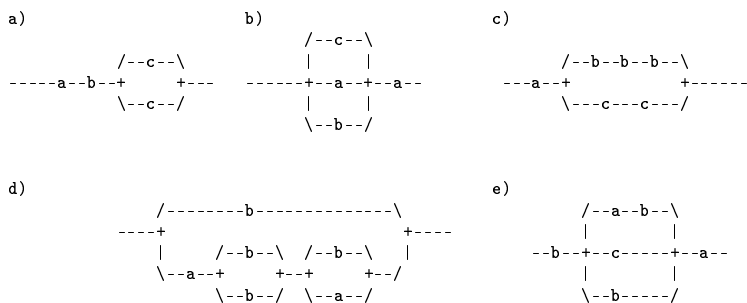
2.11. Czerwony Kapturek idzie do babci. Dziewczynkę po drodze mogą spotkać nieprzyjemności, na przykład czyhający w zaroślach (z prawdopodobieństwem $p_{\text{wilk}} = 0,3$) zły wilk albo otwarte złamanie nogi ($p_{\text{noga}} = 0,2$). Zdarzenia te wydarzają się niezależnie od siebie. (a.) Oblicz prawdopodobieństwo, że babunia ujrzy dziś swoją wnuczkę całą i zdrową. (b.) Jakie jest prawdopodobieństwo spełnienia się znanego powiedzenia, że nieszczęścia chodzą parami?

2.12. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. (a) Sprawdź (korzystając z definicji), czy „wylosowanie asa” i „wylosowanie karty czerwonej” (\heartsuit lub \diamondsuit) są zdarzeniami niezależnymi. (b) Sprawdź, czy „wylosowanie karty mniejszej od 10” i „wyciągnięcie pika” (\spadesuit) są zdarzeniami niezależnymi. (c) Sprawdź, czy „wylosowanie pika (\spadesuit) i „wyciągnięcie czarnego asa” (\clubsuit lub \spadesuit) są zdarzeniami niezależnymi.

2.13. Wujek Karol robi dla swojej rodziny lampki choinkowe, łącząc żarówki w przedziwne układy. Żarówki przepalają się niezależnie od siebie, a prawdopodobieństwo poprawnej pracy każdej z nich przez święta wynosi p . Jakie jest prawdopodobieństwo, że dzieci Karola będą mogły się cieszyć widokiem świecącej choinki? Dokonaj obliczeń dla schematów poniżej.



2.14. Załóżmy, że wujek Karol kupił żarówki o 3 typach sprawności: a , b , c . Prawdopodobieństwa popsucia się każdej z nich wynoszą odpowiednio 0,1, 0,2 i 0,3. Czy pod koniec świąt będzie panował w domu błogi klimat?



2.15. Zdzisiek strzela „w dziesiątkę” o każdej porze dnia i nocy z prawdopodobieństwem $1/3$. Romek założył się z nim, że co jak co, ale dziś nie uda mu się trafić ani razu w 3 strzałach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Roman ma rację?

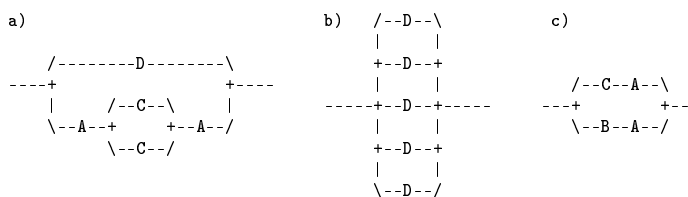
2.16. Bolek spieszy się na zajęcia z RPS. Jeżeli po drodze będą korki, to na pewno się spóźni. Z prawdopodobieństwem 10% utknie na ul. Powązkowskiej, z prawdopodobieństwem 15% w al. Prymasa Tysiąclecia (budowa węzła A2), a na ul. Kasprzaka — 5%. Załóżmy, że korki powstają niezależnie od siebie. Jaką ma szansę dojechać na czas?

2.17. W małym schronisku znajduje się 10 psów, 6 kotów, 3 tchórzofretki i 1 pawian. Zwierzęta od czasu do czasu podejmują próby ucieczki. Prawdopodobieństwa sukcesu „dezercji” są różne dla każdego gatunku i wynoszą odpowiednio 13%, 43%, 18% i 70%.

- Ze schroniska uciekło zwierzę. Oblicz prawdopodobieństwo, że był to pawian.
- Każdemu kotkowi przydzielona została losowo jedna z 10 klatek. Oblicz prawdopodobieństwo, że pewne dwa kotki zamieszkają razem.
- Pewna panienka z „dobrego” domu zażyczyła sobie 4 dowolne zwierzątka. Jej rodzice spełnili tę zachciankę (w drodze losowania) i właśnie wracają do domu ze zwierzątkami w bagażniku. Nie wiedzą jednak, że córka wpadnie w histerię, gdy ujrzy nieparzystą liczbę piesków. Wyznacz prawdopodobieństwo, że wszyscy będą szczęśliwi.

2.18. Rozpatrzmy eksperyment w schemacie klasycznym, polegający na rzucie dwiema kostkami do gry. W każdym przypadku podaj przykłady takich dwóch zdarzeń A i B (o ile istnieją), że: (a) A i B są niezależne, (b) A i B są rozłączne, (c) A i B są niezależne oraz rozłączne, (d) $A \neq B$ oraz $P(A|B) = 1$, (e) $P(A|B) = 0$, (f) $P(A|B) = P(A)$, (g) $A \cap B = \emptyset$ oraz $P(A|B) > 0$.

2.19. Określono oczekiwaną zawodność elementów elektronicznych dla różnych kategorii jakości. Klasa A dopuszcza awaryjność na poziomie 1%, B — 2,5%, C — 5% oraz D — 10%. Zakładając, że każdy z elementów psuje się niezależnie od siebie, wyznacz dla którego z poniższych układów przewidywany jest najdłuższy czas poprawnej pracy.



2.20. W pudełku roztargnionego Zenka znajduje się 6 płyt CD, 8 DVD i 2 Blu-ray. Wiadomo, że Zenek szanuje płyty w różnym stopniu. Prawdopodobieństwo, że znajdziemy zarysowany dysk CD wynosi 30%, DVD — 20% a Blu-ray — 10%.

- Z pudełka wyciągnęliśmy losowo płytę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona zarysowana?
- Okazało się, że jest ona jednak zarysowana. W jakiej technologii została ona najbardziej prawdopodobnie wyprodukowana? Jakie jest prawdopodobieństwo, że była to płyta DVD?

2.21. Egzamin z pewnego przedmiotu składa się z 3 pytań. Szanse na poprawne odpowiedzenie na poszczególne pytania wynoszą $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$. Zaliczenie bądź niezaliczenie jednego pytania nie wpływa na wynik innego. Wykładowca wstawia pozytywną ocenę z egzaminu, jeżeli student odpowie poprawnie na choć jedno pytanie. Oblicz prawdopodobieństwo zdania egzaminu.

2.22. 25% kobiet i 70% mężczyzn popiera obecną politykę rządu wobec pewnej kontrowersyjnej sprawy. Przeprowadzono ankietę, w której wzięło udział 700 kobiet i 500 mężczyzn. Wylosowano osobę, która, jak się okazało, nie popiera owej polityki. Wyznacz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

2.23. (Ash, 1970) Two coins are available, one unbiased („*sprawiedliwa*”) and the other two-headed (*posiadająca z dwóch stron orły*). Choose a coin at random and toss it once; assume that the unbiased coin is chosen with probability $3/4$. Given that the result is heads, find the probability that the two-headed coin was chosen.

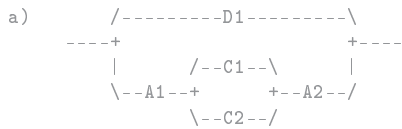
2.24. 78% kobiet oraz 56% mężczyzn spośród kapituły Orderu Uśmiechu popiera kandydaturę Pana Kleksa do otrzymania nagrody. Rada składa się z 21 kobiet i 39 mężczyzn. (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba popiera Pana Kleksa? (b) Losowo wybrana osoba popiera Pana Kleksa. Określ prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

2.25. W pewnej grze przygodowej bohater musi przejść bezpiecznie przez system komnat. Startuje z pomieszczenia A, a kończy w G. Komnata A połączona jest z B. Z B można dojść do C i D. Z C do E i F. Do komnaty G przychodzi się z E, F bądź D. Prawdopodobieństwo, że bohater wpadnie pułapkę w komnacie A wynosi 10%, w B 5%, w C 3%, w D 30%, w E 10%, w F 15% oraz w G 5%. Jakie jest prawdopodobieństwo zwycięstwa?

Wskazówka do zadania 2.19. W tym zadaniu należy wyznaczyć prawdopodobieństwa poprawnej pracy wszystkich przedstawionych układów i wybrać ten, który cechuje się największą niezawodnością.

Dla ułatwienia rozwiążemy przypadek (a).

Oznaczmy poszczególne elementy układu (a) w następujący sposób:



Mamy do czynienia z 5 elementami elektronicznymi; każdy z osobna może w danej chwili albo funkcjonować poprawnie (oznaczymy ten stan przez T) albo być uszkodzony (ozn. N). Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zatem, opisujący stany wszystkich elementów na raz — czyli układu jako całości, może być zdefiniowany jako

$$\Omega = \{(A1, A2, C1, C2, D1), A1, A2, C1, C2, D1 \in \{T, N\}\} = \{T, N\}^5.$$

Mamy $|\Omega| = 2^5 = 32$. Teraz $(\Omega, 2^\Omega, P)$ — przestrzeń probabilistyczna modelująca rozpatrywane zagadnienie.

Niech $S_{A1} = \{\omega \in \Omega : \text{element A1 działa prawidłowo}\} = \{(T, A2, C1, C2, D1), A2, C1, C2, D1 \in \{T, N\}\}$. Podobnie definiujemy zdarzenia $S_{A2}, S_{C1}, S_{C2}, S_{D1}$. Z treści zadania wynika, iż $P(S_{A1}) = P(S_{A2}) = 0,99$, $P(S_{C1}) = P(S_{C2}) = 0,95$, $P(S_{D1}) = 0,90$, oraz że zdarzenia $S_{A1}, S_{A2}, S_{C1}, S_{C2}, S_{D1}$ są niezależne.

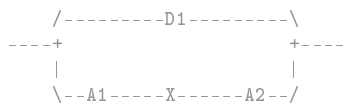
Oznaczmy przez U zdarzenie $\{\omega \in \Omega : \text{układ (a) jako całość działa prawidłowo}\}$. Mamy:

$$S_U = S_{D1} \cup [S_{A1} \cap (S_{C1} \cup S_{C2}) \cap S_{A2}].$$

Dla ułatwienia obliczeń pogrupujemy pewne elementy w jednostki „wyższego rzędu”. Niech $S_X = S_{C1} \cup S_{C2}$ oraz niech $S_Y = S_{A1} \cap (S_{C1} \cup S_{C2}) \cap S_{A2} = S_{A1} \cap S_X \cap S_{A2}$, czyli $S_U = S_{D1} \cup S_Y$. Nasz układ może być zatem przedstawiony w formie



bądź



Zdarzenia S_{D1}, S_Y oraz $S_{D1}, S_{A1}, S_X, S_{A2}$ są oczywiście niezależne.

Elementy C1 i C2 działają w tzw. połączeniu równoległym. Mamy:

$$P(S_X) = P(S_{C1} \cup S_{C2}) = P(S_{C1}) + P(S_{C2}) - P(S_{C1} \cap S_{C2}).$$

S_{C1}, S_{C2} są zdarzeniami niezależnymi, więc $P(S_{C1} \cap S_{C2}) = P(S_{C1}) \cdot P(S_{C2})$, czyli $P(S_X) = 0,95 + 0,95 - 0,95 \cdot 0,95 = 0,9975$.

Elementy A1, X i A2 działają w tzw. połączeniu szeregowym (element X jest „wirtualny”). Mamy (z niezależności zdarzeń):

$$P(S_Y) = P(S_{A1} \cap S_X \cap S_{A2}) = P(S_{A1}) \cdot P(S_X) \cdot P(S_{A2}) = 0,99 \cdot 0,9975 \cdot 0,99 = 0,97764975 \simeq 0,9776.$$

I ostatecznie możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania układu (a) jako całości:

$$P(S_U) = P(S_{D1} \cup S_Y) \simeq 0,9978.$$

Odpowiedź do zadania 2.23. $\frac{2}{5}$.