

3.1. Bolek bierze udział w loterii „Szczęśliwy traf”, w której można zdobyć nagrody pieniężne o wartościach 10, 25 i 100 zł. Okazuje się, że prawdopodobieństwa wyciągnięcia poszczególnych losów wynoszą:

x_i	0	10	25	100
p_i	80%	15%	4%	1%

Podaj postać dystrybuanty tej zmiennej losowej oraz narysuj jej wykres.

3.2. Prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych ocen z egzaminu z RPS mają się następująco:

x_i	2	3	4	5
p_i	15%	45%	a	b

Wiadomo, że prawdopodobieństwo uzyskania piątki jest 2 razy większe niż uzyskania czwórki.

- Wyznacz wartości stałych a i b tak, by powyższa tabelka określała rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej możliwą do uzyskania ocenę z egzaminu.
- Sporządź wykres funkcji rozkładu (funkcji masy) prawdopodobieństwa.
- Sporządź wykres dystrybuanty tej zmiennej losowej.
- Wyznacz i zinterpretuj prawdopodobieństwa: $P(X > 3)$, $P(X \geq 3)$, $P(3 < X \leq 4)$.

3.3. Dystrybuanta pewnej zmiennej losowej typu dyskretnego dana jest poniżej.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0,25 & \text{dla } x \in [0, 1), \\ \frac{1}{3} & \text{dla } x \in [1, 4), \\ 0,5 & \text{dla } x \in [4, 5), \\ \frac{8}{9} & \text{dla } x \in [5, 8), \\ 1 & \text{dla } x \geq 8. \end{cases}$$

- Opisz tabelką rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej. Sporządź wykres tego rozkładu.
- Wyznacz prawdopodobieństwa: $P(X < 4)$, $P(X \leq 4)$, $P(X > 5)$, $P(X \geq 5)$, $P(1 \leq X \leq 8)$, $P(1 \leq X < 8)$.

3.4. Zabawkowa wyrzutnia rakiet podłączana do portu USB pozwala na wyrzucenie 3 pocisków, z których każdy trafia do celu niezależnie od pozostałych z prawdopodobieństwem 0,8. Podaj postać rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuanty zmiennej losowej opisującej liczbę celnych strzałów wykonanych przez Jasia do jego młodszej siostry właśnie odrabiającej lekcje.

3.5. Pani kadrowa oszacowała, że Janek spóźnia się do pracy z prawdopodobieństwem 0,15 każdego dnia. Interesuje nas możliwa liczba dni w 5-dniowym tygodniu pracy, w którym Janek pojawia się w zakładzie niepunktualnie.

- Wyznacz postać funkcji rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuanty dla tego rozkładu.
- Wyznacz prawdopodobieństwo, że uda się mu spóźnić co najwyżej jeden raz w najbliższym tygodniu.

3.6. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Za każdym razem, gdy na obu kostkach wypadnie taka sama liczba oczek, otrzymujemy 1 zł. Jeśli wypadnie para „1” i „6” lub „6” i „1”, otrzymujemy 5 zł. W przeciwnym razie tracimy 2 zł.

Wyznacz postać dystrybuanty oraz narysuj jej wykres. W jaki sposób mając daną dystrybuantę obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania jakiegokolwiek nagrody (> 0 zł)?

3.7. Broniąc decyzji o zakupie nowych urządzeń usprawniających ruch w metrze (m.in. pozwalających rozwinąć wyższą prędkość), władze miasta podały, że dystrybuanta czasu oczekiwania na pociąg (w minutach) wyraża się wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{100} x^2 & \text{dla } 0 \leq x < 10, \\ 1 & \text{dla } x \geq 10. \end{cases}$$

Oblicz średni czas oczekiwania i jego odchylenie standardowe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mimo wprowadzenia usprawnień trzeba będzie czekać na pociąg dłużej niż 5 minut?

3.8. Mamy daną funkcję $f(x) = \left(\frac{a}{x^4}\right)$ dla $x \geq 1$ i $f(x) = 0$ dla $x < 1$.

- Wyznacz wartość stałej $a \in \mathbb{R}$ tak, by f była gęstością pewnej zmiennej losowej.
- Wyznacz jej dystrybuantę.
- Oblicz prawdopodobieństwa: $P(X \leq 1,2)$, $P(X > 1,5)$, $P(1,1 < X < 1,5)$.

3.9★ Rozwiąż powyższe zadanie dla funkcji $f(x) = (-ae^{-5x})$ dla $x > 0$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \leq 0$ (dla pewnego $a \in \mathbb{R}$).

3.10. (a) Wyznacz wartości stałych $c, d \in \mathbb{R}$, aby F była dystrybucją pewnej zmiennej losowej ciągłej. Sporządź jej wykres. (b) Wyznacz postać gęstości f i sporządź jej wykres.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ cx^2 + d & \text{dla } 1 \leq x < 4, \\ 1 & \text{dla } x \geq 4. \end{cases}$$

3.11. Poniżej dana jest dystrybucja pewnej zmiennej losowej. (a) Sporządź jej wykres. (b) Wyznacz postać gęstości f i sporządź jej wykres.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 - e^{-2x} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

3.12. Szacuje się, że aż 10% studentów nie lubi zajęć z RPS. Jaka jest szansa, że wśród 6 przypadkowo napotkanych studentów co najmniej dwie nie będą lubiły tego przedmiotu?

3.13. Prawdopodobieństwo znalezienia wybrakowanego towaru wynosi 5%. Kontrola sprawdza liczbę braków spośród 10 losowo wybranych sztuk towaru. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontrola napotka w tej próbie nie więcej niż 1 wadliwą sztukę produktu? Rozwiąż to zadanie zakładając, że

- (a) licznosc produktów w rozpatrywanej partii jest bardzo duża,
- (b) liczba wyprodukowanych towarów wynosi 100.

3.14. Okazuje się, że liczbę żądań dostępowych na minutę do pewnego serwera WWW można opisać zmienną losową z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej 12. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu godziny będzie ponad 5000 zgłoszeń. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas pomiędzy dwoma zgłoszeniami wynosić będzie mniej niż 1 sekundę?

3.15. Okazuje się, że liczbe zgłoszeń do pewnej małej centrali telefonicznej można opisać rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej 10 (na godzinę).

- (a) Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu doby centralka obsłuży nie więcej niż 100 użytkowników.
- (b) Oblicz prawdopodobieństwo, że czas pomiędzy dwoma kolejnymi połączeniami abonenckimi wynosi mniej niż minutę.

3.16. Ekspertyzy pokazują, że czas bezawaryjnej pracy pewnego typu żarówek można opisać rozkładem wykładniczym o wartości oczekiwanej równej 500 h. Jakie jest prawdopodobieństwo że losowo wybrana z partii żarówka będzie świecić bez przerwy dłużej niż 3 tygodnie?

3.17. Rzucamy symetryczną kostką, dopóki nie wypadnie „jedyńka”. Jaka jest wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe liczby potrzebnych do wykonania rzutów?

3.18. Pewna partia składa się z 200 towarów, spośród których wiadomo, że 50 jest wadliwych. Kontrola w przedsiębiorstwie sprawdzi 5 losowo wybranych produktów z tej partii. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja liczby braków w tej próbie? Dział jakości odrzuci partię, jeśli okaże się, że znajdzie w niej więcej niż 1 brak. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia?

3.19★ Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 5$. Wiedząc, że $P(X = 3) \simeq 0,1403739$ wyznacz wartość $P(X = 4)$ bez używania kalkulatora.

3.20. W pewnym kraju przeciętny wzrost dorosłego mężczyzny wynosi 170 cm, przy wariancji 100 cm^2 . Zakładamy, że rozkład wzrostu w populacji jest normalny.

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkamy mężczyznę wyższego niż 2 m? A jakie, że niższego niż 160 cm?
- (b) Wyznacz wzrost, którego nie przekracza 75% mężczyzn.
- (c) Jaka jest frakcja mężczyzn, których wzrost zawiera się w przedziale $[155, 185] \text{ cm}$?

3.21. (PG) Rozkład długości skoków na olimpijskiej skoczni narciarskiej jest normalny z wartością oczekiwaną 120 metrów i odchyleniem standardowym 10 m. Podaj odległość, powyżej której skacze 75% zawodników.

3.22. Wiele testów inteligencji stosowanych w psychologii standaryzuje się tak, aby oczekiwany wynik w populacji wynosił 100 przy odchyleniu standardowym 16. Zakładając, że rozkład wyników jest normalny, wyznacz:

- (a) Wynik, który przekracza 95% osób oraz wynik, który osiąga tylko 5% osób,
- (b) Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba osiągnie wynik z przedziału 100 ± 16 oraz 100 ± 32 ,
- (c) Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba ma IQ powyżej 130.

3.23. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$, gdzie $\mu = 32$ i $\sigma = 4$. Oblicz:

- (a) $P(X \leq 30)$, $P(X \in (28, 34))$, $P(X > 29)$,
- (b) x takie że $P(X \leq x) = 0,8$,

(c) y takie że $P(\mu - y < X < \mu + y) = 0,95$.

3.24. Liczbę zgłoszeń do centrali telefonicznej w Wąchocku można opisać zmienną losową z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej 5 (połączeń na godzinę).

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu godziny nie nastąpi żadne połączenie? A jakie, że będzie ich więcej niż 10?
- (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas pomiędzy dwoma połączeniami będzie krótszy niż 5 minut? A jakie, że będzie dłuższy niż kwadrans?

3.25. Wyznacz wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych w zadaniach 3.1, 3.2, 3.3.

3.26. Dystrybucja pewnej zmiennej losowej typu dyskretnego dana jest poniżej.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1/6 & \text{dla } x \in [0, 2), \\ 1/3 & \text{dla } x \in [2, 4), \\ 7/12 & \text{dla } x \in [4, 5), \\ 8/9 & \text{dla } x \in [5, 7), \\ 1 & \text{dla } x \geq 7. \end{cases}$$

- (a) Opisz tabelką rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej. Sporządź wykres tego rozkładu.
- (b) Oblicz wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe tej zmiennej losowej.

3.27. (PG) Broniąc decyzji o wprowadzeniu bus-pasów władze miasta podały, iż na ulicach, na których je wytyczono, gęstość rozkładu czasu oczekiwania na autobus (w minutach) wyraża się wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{50} & \text{dla } 0 \leq x < 10, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wyznacz dystrybucję czasu oczekiwania na autobus. Oblicz oczekiwany czas oczekiwania oraz jego odchylenie standardowe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzeba będzie czekać na autobus dłużej niż 5 minut?

3.28. Dana jest następująca funkcja.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1, \\ x+1 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ ax^2 & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz wartość stałej $a \in \mathbb{R}$, aby f była gęstością pewnej zmiennej losowej. Sporządź jej wykres.
- (b) Wyznacz postać dystrybucyjną F i sporządź jej wykres.
- (c) Oblicz prawdopodobieństwa: $P(X < \frac{1}{2})$, $P(X > 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(-\frac{1}{2} < X < 0)$.
- (d) Oblicz wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe tej zmiennej losowej.

3.29. Dana jest następująca funkcja.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0,125x & \text{dla } 0 \leq x < 2, \\ b & \text{dla } 2 \leq x < 4, \\ -0,25(x-5) & \text{dla } 4 \leq x < 5, \\ 0 & \text{dla } x \geq 5. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz wartość stałej $b \in \mathbb{R}$, aby f była gęstością pewnej zmiennej losowej. Sporządź jej wykres.
- (b) Wyznacz postać dystrybucyjną F i sporządź jej wykres.
- (c) Oblicz prawdopodobieństwa: $P(X < 3)$, $P(X > 4)$, $P(1 \leq X < 4)$.
- (d) Oblicz wartość oczekiwaną, wariancję, modę i medianę.

3.30★ Mamy daną funkcję $f(x) = \mathbb{I}_{x \geq 0} (10e^{-ax})$.

- (a) Wyznacz wartość stałej $a \in \mathbb{R}$ tak, by f była gęstością pewnej zmiennej losowej.
- (b) Wyznacz jej dystrybucję.
- (c) Wyznacz jej wartość oczekiwaną, wariancję, medianę oraz kwantyl rzędu 0,25.
- (d) Oblicz prawdopodobieństwa: $P(X \leq 1,2)$, $P(X > 1,5)$, $P(1,1 < X < 1,2)$.

3.31★ Wyprowadź wzór ogólny na dystrybucję, wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe tzw. rozkładu Pareto z parametrem $k > 2$ i $s > 1$. Jego gęstość dana jest wzorem: $f(x) = \frac{ks^k}{(s+x)^{k+1}}$ (dla $x > 0$).

3.32★ Wyprowadź wzór na wariancję rozkładu jednostajnego na przedziale $[a, b]$, gdzie $a < b$.

3.33. Podaj postaci funkcji rozkładu (masy) prawdopodobieństwa i dystrybuanty dla następujących rozkładów dyskretnych. Jakimi parametrami są opisane te rozkłady? Jakie zjawiska mogą opisywać? Jakie są ich wartości oczekiwane i wariancje? (a) Rozkład Bernoulliego (dwupunktowy), (b) Rozkład dwumianowy, (c) Rozkład Poissona, (d) Rozkład geometryczny, (e) Rozkład hipergeometryczny.

3.34. Podaj postaci funkcji gęstości i dystrybuanty dla następujących rozkładów ciągłych. Jakimi parametrami są opisane te rozkłady? Jakie zjawiska mogą opisywać? Jakie są ich wartości oczekiwane i wariancje? (a) Rozkład jednostajny, (b) Rozkład wykładniczy, (c) Rozkład normalny.

3.35. Wymień i zdefiniuj znane Ci charakterystyki rozkładów zmiennych losowych: (a) charakterystyki położenia, (b) charakterystyki rozproszenia, (c) charakterystyki kształtu.

3.36. Naszkicuj wykres gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu ciągłego: (a) jednomodalnego, (b) wielomodalnego, (c) nie mającego mody, (d) lewostronnie skośnego, (e) prawostronnie skośnego.

3.37★ Niech X, Y — zmienne losowe oraz $a \in \mathbb{R}$ — stała. Udowodnij poniższe wyrażenia zarówno dla zmiennych losowych dyskretnych jak i dla ciągłych.

- | | | | |
|---|---|------------------------------------|---|
| • $\mathbb{E}a = a$ | • $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ | • $\mathbb{E} X \geq \mathbb{E}X$ | • $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var } X$ |
| • $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}X$ | • $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$ | • $\text{Var } X \geq 0$ | • $\text{Var}(X + a) = \text{Var } X$ |
| • $\mathbb{E}(X + a) = \mathbb{E}X + a$ | • $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$ | • $\text{Var } a = 0$ | • $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$ |