

Zadanie 3

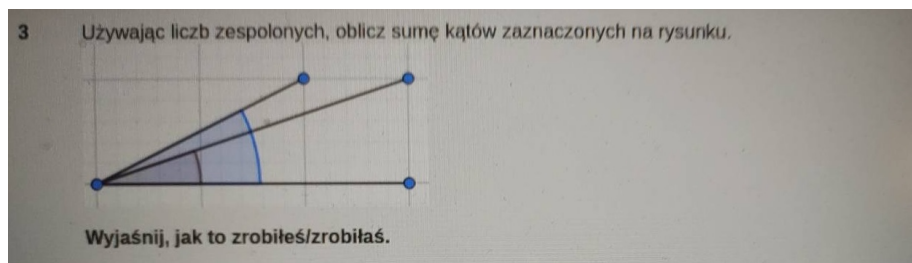


Figure 1: Zadanie 3

Oznaczmy obydwa kąty jako α oraz β . Niech α będzie mniejszym z kątów. Dodatkowo, mamy cztery punkty, O (początek układu współrzędnych), A, B oraz C. Przekształcamy rysunek na:

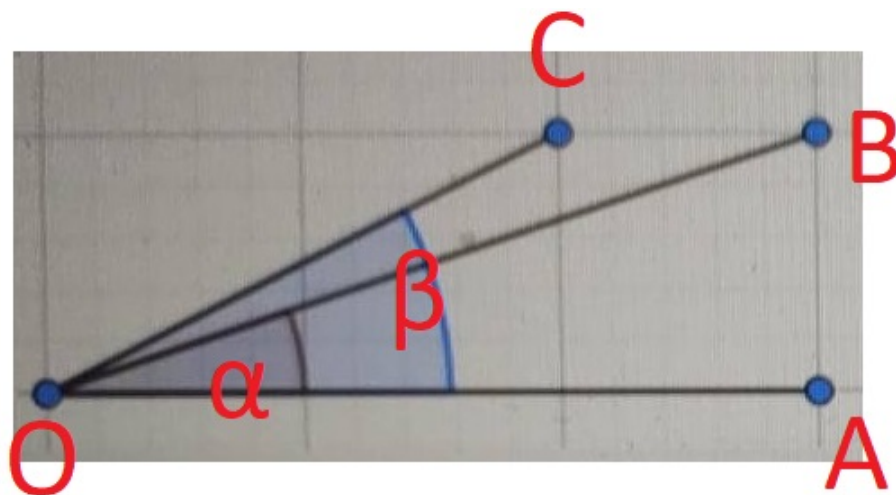


Figure 2: Zadanie 3 - przekształcenie

Zamierzamy działać w doktrynie liczb zespolonych. Zauważamy, że mamy siatkę współrzędnych na podstawie której możemy wyliczyć współrzędne punktów A, B oraz C. Nie mamy jednostek, ale ze względu na podobieństwo trójkątów nie jest to istotne - zatem możemy przypisać punktom następujące współrzędne:

$$A = (3, 0),$$

$$B = (3, 1),$$

$$C = (2, 1).$$

Ponieważ chcemy rozwiązać problem w dziedzinie liczb zespolonych, to przypiszemy punktom odpowiednie liczby zespolone:

$$A = 3$$

$$B = 3 + i$$

$$C = 2 + i$$

(zgodnie z konwencją, że współrzędne (x, y) odpowiadają liczbie $z = x + iy$).

Liczby zespolone mogą być reprezentowane na dwa sposoby. Pierwszy z nich to przedstawiony wyżej $z = x + iy$, czyli współrzędne kartezjańskie. Drugi z nich to współrzędne biegunowe, gdzie liczba zespolona jest reprezentowana jako $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, gdzie r to odległość od początku układu współrzędnych, a θ to kąt między osią rzeczywistą a wektorem łączącym punkt z początkiem układu współrzędnych.

Współrzędne biegunowe mogą być również zwinięte do wyrażenia

$$z = r \exp i\phi.$$

Jeśli szukamy kąta między dwiema liczbami zespolonymi, to możemy skorzystać z wyrażenia:

$$\cos \theta = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|},$$

gdzie operator \Re oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej, a \bar{z} to sprzężenie liczby zespolonej (czyli zastąpienie $x + iy$ wyrażeniem $x - iy$).

Szukamy kąta α , tj. kąta między A oraz B .

W naszym przypadku, mamy:

$$z_1 = A = 3,$$

$$z_2 = B = 3 + i.$$

Obliczamy iloczyn $z_1 \cdot \overline{z_2}$:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 \cdot (3 - i) = 9 - 3i.$$

Obliczamy wartości bezwzględne:

$$|z_1| = |3| = 3,$$

$$|z_2| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Obliczamy wartość cosinusa kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Zatem:

$$\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18.43^\circ.$$

Analogicznie obliczamy kąt β :

$$\begin{aligned} z_1 &= A = 3, \\ z_2 &= C = 2 + i. \end{aligned}$$

Obliczamy iloczyn $z_1 \cdot \overline{z_2}$:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 \cdot (2 - i) = 6 - 3i.$$

Obliczamy wartości bezwzględne:

$$|z_1| = |3| = 3,$$

$$|z_2| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Obliczamy wartość cosinusa kąta β :

$$\cos \beta = \frac{\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Zatem:

$$\beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 26.57^\circ.$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} \alpha &= 18.43^\circ, \\ \beta &= 26.57^\circ. \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta \approx 45^\circ.$$

(zadanie można wykonać jeszcze inaczej, konstruując punkt D będący zbudowany o przekręcenie punktu C względem punktu A o α , a następnie obliczając kąt dla liczby zespolonej D).

Alternatywna metoda

Zauważmy, że sumę kątów możemy uzyskać w jeszcze jeden sposób, poprzez pomnożenie dwóch liczb zespolonych, zgodnie ze wzorem:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp i\phi_1 \cdot r_2 \exp i\phi_2 = r_1 r_2 \exp i(\phi_1 + \phi_2).$$

Zatem musimy pomnożyć liczby zespolone B oraz C :

$$B = 3 + i = \sqrt{10} \exp i \arccos \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$C = 2 + i = \sqrt{5} \exp i \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Obliczamy iloczyn:

$$D = B \cdot C = (3 + i)(2 + i) = 6 + 5i - 1 = 5 + 5i$$

Kąt między D oraz A to:

$$\cos \gamma = \frac{\Re(D \cdot \bar{A})}{|D| \cdot |A|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\Re((5 + 5i) \cdot 3)}{|5 + 5i| |3|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\Re(5 + 5i)}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$