Zadanie 1. Dane są implikacje

i) jeśli $V \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią, to $(0, \dots, 0) \in V$,

ii) dla $m \in \mathbb{Z}$, jeśli $4|m$, to $2|m$,

iii) jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest różniczkowalna,

iv) jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, to jest ograniczony,

v) ustalmy $A, B \in P(\mathbb{Z})$ takie, że $A \dot{-} B$ jest skończony, dla $C \in P(\mathbb{Z})$ jeśli $A \dot{-} C$ jest skończony, to $B \dot{-} C$ jest skończony.

Które z tych implikacji są prawdziwe? Sformułuj twierdzenia odwrotne, przeciwstawne i przeciwne. Które z nich są prawdziwe?

Zadanie 2. Niech $A_n = (2 - \frac{1}{n+1}, 4 - \frac{2}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Oblicz

i) $\bigcap_{n=2}^{4} A_n$,

ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} A_n$,

iii) $\bigcup_{n=3}^{8} A_n$,

iv) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} A_n$.

Zadanie 3. Udowodnij tożsamość zbiorów

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \times (B \setminus D)) \cup ((A \setminus C) \times B).$$

Zadanie 4. Dla $a, b \in \mathbb{N}$ niech $aRb \leftrightarrow a = b^2$. Sprawdź czy relacja R jest

i) antysymetryczna,

ii) przeciwzwrotna,

iii) przechodnia,

iv) symetryczna.

Odp. tak, nie, nie, nie

Zadanie 5. Dla poniższych relacji R

i) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,

ii) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

oblicz $R^{-1}, R^2, R^3, R \circ R^{-1}$.

Odp.

i) $R^{-1} = R, R^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge (x = y \vee x = -y)\}, R^3 = R, R \cdot R^{-1} = R^2$,

ii) $R^{-1} = R, R^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge y \in [-1, 1]\}, R^3 = R^2, R \cdot R^{-1} = R^2$.

Zadanie 6. Która z poniższych relacji jest zwrotna, przeciwzwrotna, symetryczna, asymetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna?

i) $A =$ mieszkańcy Polski, $xRy \leftrightarrow$ y jest bratem x,

ii) $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y)R(z, w) \leftrightarrow x \leq z \wedge y \leq w$,

iii) $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y)R(z, w) \leftrightarrow x \leq z \vee y \leq w$,

iv) $A, B \in P(\mathbb{Z}), \quad ARB \leftrightarrow A \subset B$,

v) $x, y \in \mathbb{Z}, \quad xRy \leftrightarrow \max(x, y) = 1$.

Które z powyższych relacji są relacjami porządku częściowego?

Odp.

	zwr	pzwr	sym	asym	antysym	prz	sp
i)	-	+	-	-	-	-(!)	-
ii)	+	-	-	-	+	+	-
iii)	+	-	-	-	-	-	+
iv)	+	-	-	-	+	+	-
v)	-	-	+	-	-	-	-

Relacjami porządku częściowego jest relacja ii) oraz iv).

Zadanie 7. Narysuj diagramy Hassego dla relacji podzielności na zbiorach

i) $X = \{1, 2, 3, 6, 12\}$,

ii) $X = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$,

iii) $X = \{1, 3, 9, 27, 729\}$,

iv) $X = \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 20, 30, 60\}$.

Zadanie 8. Na zbiorze $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadajemy relację $\leq_{lex}$

$$(x, y) \leq_{lex} (z, w) \leftrightarrow (x < z) \vee [(x = z) \wedge (y \leq w)].$$

i) wykaż, że jest to relacja porządku liniowego,

ii) narysuj diagram Hassego dla relacji $\leq_{lex}$,

iii) uogólnij relację na $X = \mathbb{N}^3$.

Zadanie 9. Uporządkuj zbiór

$$X = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (0, 0, 4), (4, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 3, 3)\},$$

odpowiednio, względem porządków

i) $\leq_{lex}$,

ii) $\leq_{grlex}$.

Sprawdź, że relacja R

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) R (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \leftrightarrow 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 \leq 2\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_3,$$

jest quasi–porządkiem na zbiorze X i nie jest porządkiem częściowym na X.

Odp.

i) $(0, 0, 4), (0, 1, 0), (0, 3, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (4, 0, 0)$,

ii) $(0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 4), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (4, 0, 0), (0, 3, 3)$.

Zadanie 10. Czy klasyczne algorytmy sortowania (przez wstawianie, bąbelkowe, przez łączenie, szybkie itp.) będą porządkowały zbiory n-tek liczb rzeczywistych według porządków $\leq_{lex}, \leq_{grlex}$, po zastąpieniu porównywania liczb porównywaniem n-tek względem tych porządków? Napisz własną funkcję w Pythonie 3 porównującą n-tki i użyj jej w jednym z klasycznych algorytmów.

Zadanie 11. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Sprawdź, że relacja $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zadana warunkiem

$$xRy \leftrightarrow f(x) \leq f(y),$$

jest quasi-porządkiem na zbiorze $\mathbb{R}$. Podaj przykład funkcji f takiej, że R jest quasi-porządkiem, ale nie jest porządkiem częściowym. Podaj przykład funkcji f takiej, że R jest porządkiem częściowym. Podaj charakteryzację funkcji f jak wyżej.