Zadanie 6

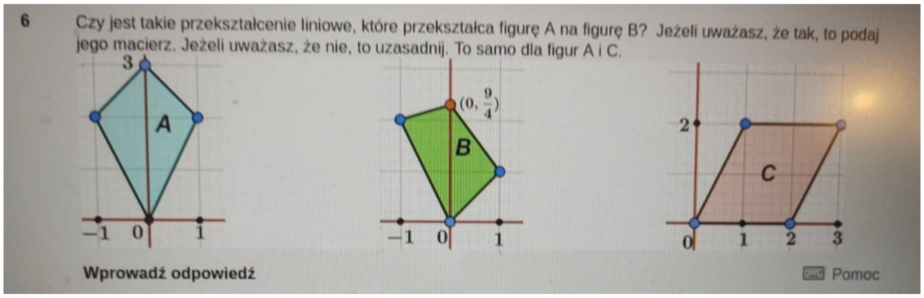

Figure 1: Zadanie 6

Pytanie sprowadza się do znalezienia przekształcenia liniowego, które zestaw punktów:

[A = (-1,2),\ B = (0,3),\ C = (1,2),]

przekształca na zestaw punktów:

[A' = (-1,2),\ B' = (0,2.25),\ C' = (1,1),]

(punkt $(0,0)$ pomijam, jako że zawsze będzie się transformował na $(0,0)$).

Poszukujemy macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, która spełnia równania:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.25 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Czyli mamy układy równań:

$$\begin{cases} -a + 2b = -1, \\ 3b = 0, \\ a + 2b = 1, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} -c + 2d = 2 \\ 3d = 2.25 \\ c + 2d = 1 \end{cases} \quad .$$

Od razu widzimy, że wartość $b = 0$, natomiast $a = \frac{1}{2}$. Wartość $d = 0.75$, natomiast $c = -0.5$. Tak ustalone wartości spełniają równania, zatem macierz przekształcenia to:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Zatem figura A może zostać przekształcona do figury A' za pomocą przekształcenia liniowego.

Drugi przypadek

W drugim przypadku poszukujemy kolejnego przekształcenia liniowego transformującego punkty:

[A = (-1,2),\ B = (0,3),\ C = (1,2),]

na:

[A" = (1,2),\ B" = (3,2),\ C" = (2,0).]

Ponownie, poszukujemy macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, która spełnia równania:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Czyli mamy układy równań:

$$\begin{cases} -a + 2b = 1, \\ 3b = 3, \\ a + 2b = 2, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} -c + 2d = 2 \\ 3d = 2 \\ c + 2d = 0 \end{cases}.$$

Od razu widzimy, że wartość $b = 1$. Prowadzi to jednak do sprzeczności:

$$
\begin{cases}
-a + 2 = 1, \\
3 = 3, \\
a + 2 = 2,
\end{cases}
$$

czyli $a = 0 = 1$, co jest sprzeczne. Zatem nie istnieje macierz przekształcenia, która spełniałaby równania. Zatem figura A nie może zostać przekształcona do figury A'' za pomocą przekształcenia liniowego.