2. Linia prosta. Line on the plane. Пряма лінія на площині. Прамая на плоскасці.

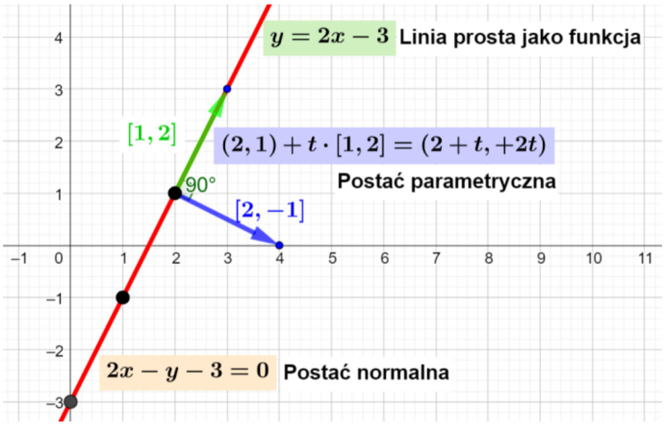
Zadanie 2.1. Podaj współczynnik kierunkowy prostych o równaniach:

a) $y =-\sqrt{3}x$, b) $y =-1$ c) $y = 1 + \frac{x}{\sqrt{3}}$, d) $y = \sqrt{3} - x$, e) $y = 2x+3$

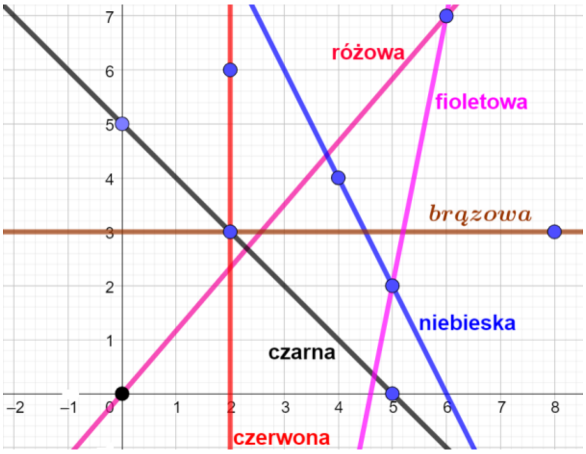
Zadanie 2.2. Napisz równania podanych prostych w postaci normalnej i w postaci parametrycznej:

a) $y = x$, b), $y = -x$, c) $y = 2x$, d) $y = 2x + 1$, e) $y = -x + 2$, f) $y = 2x - 3$, g) $y = -4x + 5$.

Rozwiązanie dla prostej $y = 2x-3$. Widzimy ją na rysunku. Każdy punkt linii prostej jest jej *punktem zaczepienia*. Współczynniki równania w postaci normalnej to współrzędne wektora prostopadłego do niej. Wektor kierunkowy prostej (u nas **[1,2]**) jest prostopadły do wektora normalnego **[2, –1]**. Postać parametryczną otrzymujemy dodając do punktu zaczepienia wielokrotności wektora kierunkowego.



Rys. 2.1.



Rys. 2.2.

Zadanie 2.3. Wyznacz równania normalne i przedstawienie parametryczne prostych, które widzisz na rysunku. Rozwiązanie dla prostej różowej. Przechodzi ona przez punkty (5,2) i (6,7). Jej wektorem kierunkowym jest zatem (6,7) – (5,2) = [1,5]. Za punkt zaczepienia wezmę na przykład (5,2). Przedstawieniem parametrycznym jest zatem **(5,2) + t·[1,5] = (5+t, 2+5*t*).** Wektorem normalnym jest wektor prostopadły do kierunkowego, czyli na przykład [5, –1] . Równanie normalne to **$5x - y - 23 = 0$** . Sprawdźmy z przedstawieniem parametrycznym:

$$5\cdot(5+t) - (2+5t) - 23 = 25 + 5t - 2 - 5t - 23 = 0 \text{, OK.}$$

Wyjaśnienie terminologii. Okrąg opisany = circumscribed, inscribed circle, Описане коло. Wysokość trójkąta = height (altitude) of the triangle. Висота трикутника. Symetralna = perpendicular bisector, серединний перпендикуляр, або медіатриса. Dwusieczna: angle bisector, Środek ciężkości = centre of gravity,

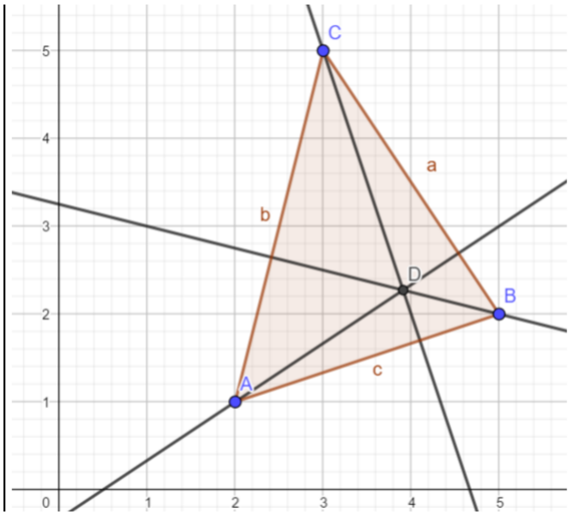
Zadanie 2.4. Dla trójkąta o wierzchołkach (2,1), (5,2), (3,5) wyznacz współrzędne środka ciężkości, środka okręgu opisanego i ortocentrum.

Zadanie . Wyznacz współrzędne ortocentrum widocznego trójkąta.

Rozwiązanie (jedno z możliwych). Wierzchołkami trójkąta są punkty $A=(2,1)$, $B=(5,2)$, $C=(3,5)$. Wektorem kierunkowym prostej AC jest [1,4], zatem prosta prostopadła, przechodząca przez (5,2) ma równanie $x+4y=13$. Inaczej mówiąc, to jest równanie wysokości z punktu B. Prosta AB ma wektor kierunkowy [3,1] , a zatem wysokość z punktu C ma równanie $3x+\ y=14$. Z układu równań

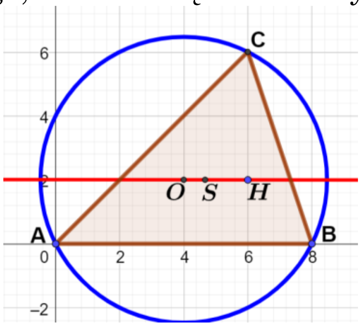
$$\begin{cases} x+4y=13 \\ 3x+y=14 \end{cases}$$

wyznaczamy $x=\frac{43}{11}, y=\frac{25}{11}$. Sprawdzamy, czy zgadza się „na oko”. Tak, bo $\frac{43}{11}$ to prawie 4, a $\frac{25}{11}$ to „trochę więcej niż 2”.



Rys. 2.3.

Zadanie 2.5. Dla trójkąta o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(3,3)$ wyznacz ortocentrum, środek okręgu opisanego, środek ciężkości. Wyznacz równanie linii prostej przechodzącej przez te punkty.



Zadanie 2.6. Wykorzystując Geogebrę, narysuj a) okrąg opisany na trójkącie z zadania 2.4, b) okrąg wpisany w ten trójkąt, c) okrąg przechodzący przez A i styczny do boku BC.

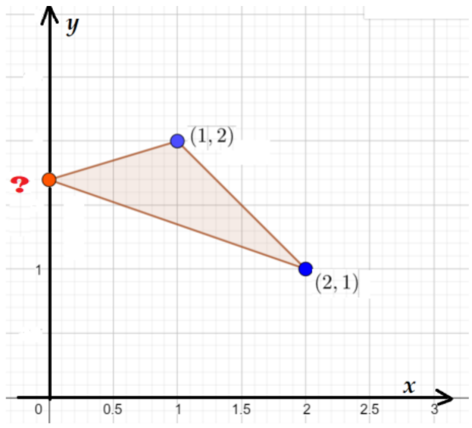
Zadanie 2.7.

Wyznacz wszystkie takie punkty na osi y , że widoczny na rysunku trójkąt ma pole 1.

Rozwiązanie. Najprościej jest skorzystać ze wzoru wyznacznikowego na pole trójkąta. Jeżeli za współrzędne szukanego punktu przyjmiemy $(0, y)$, to wektorami rozpinającymi trójkąt będą $[1, 2\text{-}y]$ i $[2,1\text{-}y]$. Mamy $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2-y \\ 2 & 1-y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ (y-3)$. A zatem wartość bezwzględna $|\ x-3|$ *ma być równa* 2 . Są dwa takie punkty: $y=1$ i $y=5$.

To samo możemy osiągnąć z innego wzoru wyznacznikowego na pole trójkąta. Jest ono równie połowie wartości bezwzględnej wyznacznika $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & y \end{vmatrix}$.

Trochę naokoło jest ze wzoru $P=\frac{1}{2}\ a\ b\ sin\ \gamma$ (połowa iloczynu długości boków i sinusa kąta między nimi). Oznaczmy, jak poprzednio, współrzędne niewiadomego punktu przez $0, y$…. *dokończ.*



Zadanie 2.8. Wyznacz miarę zaznaczonego kąta w stopniach i minutach kątowych.

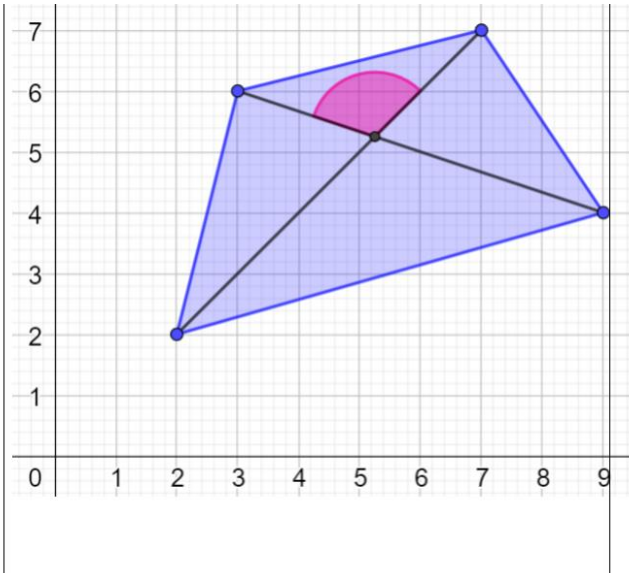
Zadanie .Wierzchołki czworokąta mają współrzędne, jak na rysunku. Wyznacz tangens zaznaczonego kąta.

Rozwiązanie. Przekątne czworokąta to wektory [5,5], [-2, 6]. Kosinus kąta między nimi to

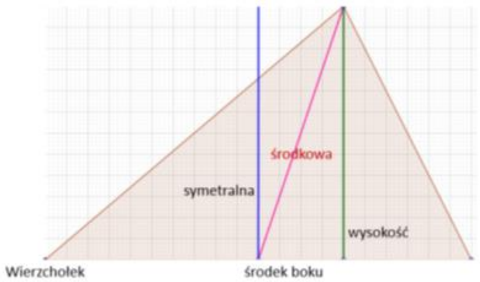
$$\frac{[5,5].[-6,2]}{\sqrt{50}\ \cdot\ \sqrt{40}} = \frac{-20}{\sqrt{50}\ \cdot\ \sqrt{40}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

A zatem sinus to

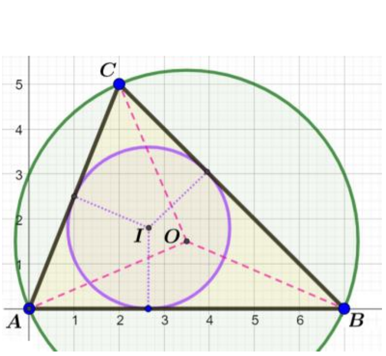
$\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ **.** Wybieramy znak + , bo sinus dla takich kątów jest dodatni. Stąd otrzymujemy, że tangens jest równy **-2** . Warto sprawdzić, czy wynik wygląda prawdopodobnie. Wolfram podaje wartość arctan (-2) równą w przybliżeniu minus 63 ½ stopnia. Dlaczego „wszystko się zgadza" ?

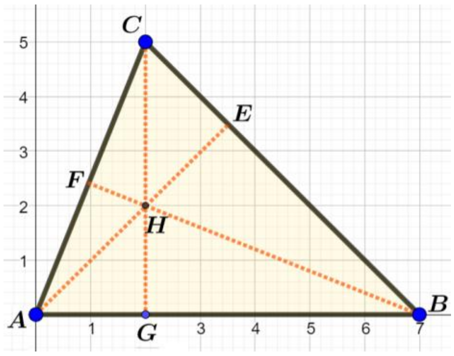


Zadanie 2.9. Wyznacz równania trzech środkowych, trzech symetralnych i trzech wysokości trójkąta o wierzchołkach (0,0), (40,0), (28,24). Wyznacz współrzędne punktu wspólnego środkowych, punktu wspólnego symetralnych i punkty wspólnego wysokości. Wykaż, że punkty te leżą na jednej prostej i znajdź jej równanie. Jeżeli masz kłopoty z polską terminologią, spójrz na rysunek. Якщо ви не знаєте польських слів про трикутники, подивіться на малюнок. Калі вы не ведаеце польскай мовы пра трохкутнікі, зірніце на малюнак. . Wykorzystaj program Wolfram Alpha. Використовуйте програму Wolfram Alpha.



Zadanie 2.10. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (7, 0)$, $C = (2,5)$.





Rysunek sugeruje, że środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC jest punkt $O = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Potwierdź to rachunkiem (oblicz odległości O od wierzchołków A, B, C). Rysunek drugi sugeruje, że ortocentrum (punktem wspólnym wysokości trójkąta) jest $H = (2,2)$. Potwierdź to rachunkiem – sprawdź, że $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CG} \perp \overrightarrow{AB}$.

Zadanie 2.11. Wyznacz kąt między prostymi o równaniach

a) $2x + 3y + 5 = 0$ i $3x - 2y + 2 = 0$,
b) $x + y = 0$ i $x - 2 = 0$.
c) $2x + 3y + 5 = 0$ i $3x + 2y + 5 = 0$
d) $(\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y + 1 = 0$ i $x + y + 2 = 0$.

Zadanie 2.12. Wyznacz równanie ogólne (= w postaci normalnej) prostej przechodzącej przez dwa dane punkty A, B :

a) $A = (2,1)$, $B = (-3, 4)$ b) $A = (0,-2)$, $B = (3, 7)$ c) $A = (2,5)$, $B = (2, -3)$
d) $A = (-1,3)$, $B = (2, 3)$ e) $A = (6,-3)$, $B = (-2, 5)$ f) $A = (20,-6)$, $B = (-8, 14)$.

Rozwiązanie zadania a). Jeżeli pamiętasz postać równania prostej ze szkoły, to możesz zastosować (zwróć jednak uwagę, że ma to być równanie postaci $Ax + By + C = 0$). Sposób 2. Wektorem kierunkowym tej prostej jest $B - A = [-5, 3]$. Wektorem normalnym (prostopadłym jest wobec tego [3,5]. Prosta ma równanie $3x + 5y + ? = 0$. „Znak zapytania" wyznaczamy, podstawiając np. współrzędne punktu (2,1). Otrzymujemy równanie $3x + 5y - 11 = 0$. Nie zaszkodzi sprawdzić. Podstawiamy współrzędne punktu (–3, 4) i sprawdzamy, czy się zgadza:

$3\cdot(-3)+5\cdot 4 - 11 = -9 + 20 - 11 = 0$. Zgadza się. Najprościej jest skorzystać z równania wyznacznikowego.

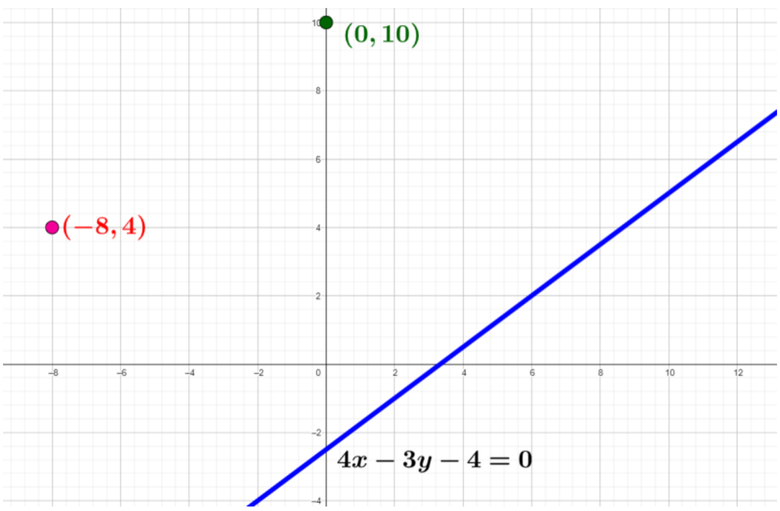
Zadanie 2.13. Znajdź taką liczbę c, że proste o równaniach podanych mają punkt wspólny:

a) $x + y + 1 = 0$, $x + c = 0$, $3x - y - 9 = 0$,
b) $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$, $4x + 7y + c = 0$,
c) $cx + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$, $x + 5y - 2 = 0$.

Zadanie 2.14. Wyznacz odległość punktu od prostej

a) punktu (1,1) od prostej $x - y = 1$;
b) punktu (1,1) od prostej $x - y = 3$;
c) punktu (2, 4) od prostej $3x + 4y = 43$;
d) punktu (–7, –11) od prostej $5x + 12y - 2 = 0$.

Zadanie 2.15. Na podanej prostej o równaniu $4x - 3y - 4 = 0$ znajdź punkty, które są jest najbliżej od podanych punktów (–8, 4), (0, 10).

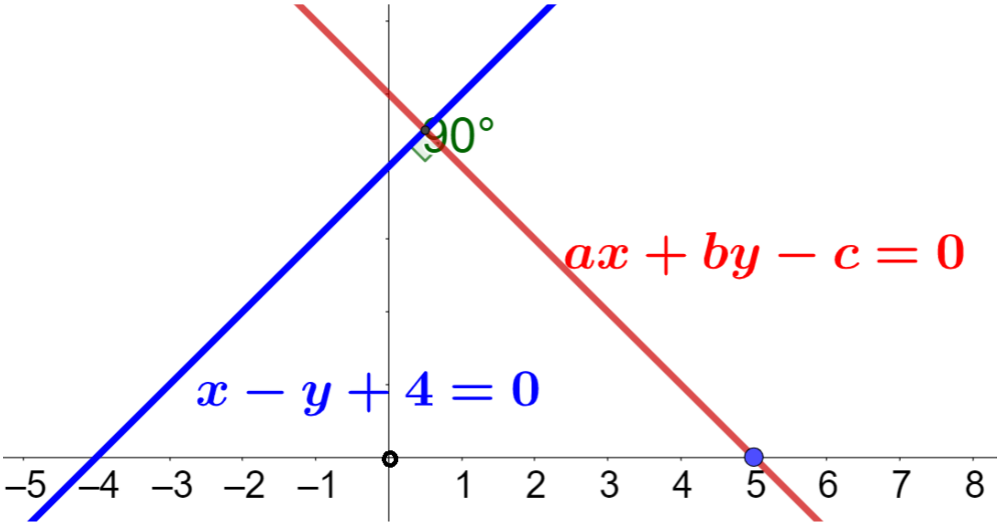


Zadanie 2.16. Dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $mx + (m+4)y - 5 = 0$ oraz $(m+1)x - my - 10 = 0$ przecinają się na osi odciętych (= to jest na osi x) ?

Zadanie 2.17. Dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $x - my + m + 4 = 0$ oraz $2mx + y - m - 1 = 0$ przecinają się na osi rzędnych (= to jest na osi y) ?

Zadanie 2.18. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których proste o równaniach $(m^2 - 2)\,x - y = 0$ oraz $mx - y + 6 = 0$ są prostopadłe i dla których proste te są równoległe.

Zadanie 2.19. Na podstawie danych na rysunku wyznacz współczynniki a, b, c w równaniu ogólnym prostej :



Zadanie 2.20.

a) Rachunkiem wektorowym wykaż, że gdy połączymy środki sąsiednich boków dowolnego czworokąta, to otrzymamy równoległobok.
b) W dowolnym sześciokącie *ABCDEF* wyznaczamy środki ciężkości trójkątów *ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB.* Oznaczmy te środki kolejno przez *K, L, M, N, O, P.* Rachunkiem wektorowym wykaż, że przeciwległe boki sześciokąta *KLMNOP* są równoległe.