Wykład 6

Endomorfizmy

Przypomnijmy:

Definicja 5.1 *Endomorfizmem nazywamy przekształcenie liniowe przestrzeni V w siebie.*

Symbolem $End(V)$ określamy zbiór wszystkich przekształceń liniowych $f: V \to V$.

Twierdzenie 5.2 *Niech układy $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ będą dwiema bazami przestrzeni V nad ciałem K. Niech $f: V \to V$ Wówczas $M(f)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}} = C^{-1}M(f)_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}C$, gdzie $C = M(id)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}$.*

Przykład 5.3 *Niech $M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -16 & 12 \\ -30 & 22 \end{bmatrix}$, $M(g)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 15 & -9 \end{bmatrix}$*

i $M(h)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 19 & -12 \\ 30 & -19 \end{bmatrix}$.

Wówczas dla bazy $\mathscr{A} = \big((2,3);(3,5)\big)$ otrzymujemy:

$M(f)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,

$M(g)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *więc g jest rzutem na* $\operatorname{lin}\{(2,3)\}$ *wzdłuż* $\operatorname{lin}\{(3,5)\}$

$M(h)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *więc h jest symetrią względem* $\operatorname{lin}\{(2,3)\}$ *wzdłuż* $\operatorname{lin}\{(3,5)\}$.

Definicja 5.4 *Niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w siebie.*

1) Podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy podprzestrzenią niezmienniczą przekształcenia f jeżeli $f(V) \subset V$.

2) Wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ nazywamy wektorem własnym przekształcenia f jeżeli $f(\alpha) = r\alpha$ dla pewnej liczby r.

3) Liczbę r nazywamy wartością własną przekształcenia f jeżeli $f(\alpha) = r\alpha$ dla pewnego niezerowego wektora α.

Definicja 5.5 *Niech $M \in \mathbb{R}_n^n$ będzie macierzą kwadratową. Wielomianem charakterystycznym M nazywamy $w_M(x) = \det(M - xI)$.*

Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f nazywamy $w_M(x) = \det(M - xI)$, gdzie M jest macierzą f w dowolnej bazie.

Definicja 5.6 *Liczbę r nazywamy wartością własną macierzy kwadratowej M jeżeli $\det(M - rI) = 0$ czyli r jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy M.*

Twierdzenie 5.7 *Zbiór pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy M jest zbiorem wartości własnych M.*

Twierdzenie 5.8 *Wektory o różnych wartościach własnych tworzą zbiór liniowo niezależny.*

Twierdzenie 5.9 *Niech $f : K^n \to K^n$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas macierz f w bazie $\mathcal{B}$ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}$ składa się z wektorów własnych.*

Twierdzenie 5.10 *Niech $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ma n różnych wartości własnych $a_1, a_2, ..., a_n$. Wówczas istnieje baza $\mathcal{B}$, złożona z wektorów własnych i macierz f w tej bazie ma postać* $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

Definicja 5.11 *Klatką Jordana nazywamy macierz kwadratową postaci:*
$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$ *czyli macierz, której niezerowymi elementami są a na przekątnej i 1 na drugiej przekątnej.*

Twierdzenie 5.12 (Jordana) *Jeżeli wielomian charakterystyczny endomorfizmu f rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe to istnieje taka baza przestrzeni K^n w której macierz f ma postać* $M(f)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$ *i na przekątnej stoją klatki Jordana. Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do permutacji klatek.*

Twierdzenie 5.13 (Jordana) *Jeżeli wielomian charakterystyczny macierzy M rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe to istnieje taka macierz odwracalna A, że* $A^{-1}MA = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$
i na przekątnej stoją klatki Jordana.

Przykład 5.14 *Szukamy postaci Jordana macierzy* $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Liczymy wielomian charakterystyczny:
$$\begin{vmatrix} 2-x & 2 & 5 \\ 1 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x)\begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$= (5-x)(x^2-5x+4) = (5-x)(x-1)(x-4)$.

Dla każdej z wartości własnych 1,4,5 szukamy wektora własnego rozwiązując układy jednorodne o macierzach:

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 2 & 5 \\ 1 & 3-1 & 2 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektorem własnym, przekształcenia ϕ o wartości własnej 1 jest np. $(-2,1,0)$.

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 & 5 \\ 1 & 3-4 & 2 \\ 0 & 0 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektorem własnym, przekształcenia ϕ o wartości własnej 4 jest np. $(1,1,0)$.

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 2 & 5 \\ 1 & 3-5 & 2 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektorem własnym, przekształcenia ϕ o wartości własnej 5 np. $(14,11,7)$.

W bazie $\mathcal{B} = \Big((-2,1,0),(1,1,0),(14,11,4)\Big)$ *macierzą ϕ jest* $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *i to jest postać Jordana macierzy M.*

Niech $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *będzie macierzą, której kolumnami są wektory z bazy $\mathcal{B}$. Wtedy* $A^{-1}MA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Podamy teraz przykład macierzy z większymi klatkami:

Przykład 5.15 *Niech* $M = M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. *Wielomianem charakterystycznym jest:* $X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2 = (X-1)^3(X-2)$

$$M - I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } M - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $r(M-I) = 2$ więc w postaci Jordana macierz M ma jedną klatkę o wartości własnej 2 i $4-2=2$ klatki o wartości własnej 1. Jedna z nich musi być rozmiaru 2 a druga 1.

Postacią Jordana macierzy jest

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Każdy wektor własny o wartości własnej 1 jest rozwiązaniem układu równań jednorodnych o macierzy

$$M-I=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} -2II \\ \\ \\ +III \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ +II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 i x_3 są parametrami i ogólną postacią rozwiązania jest $(2x_2, x_2, x_3, -2x_3) = x_2(2,1,0,0) + x_3(0,0,1,-2)$.

Zatem wektory o wartości własnej 1 tworzą 2 wymiarową podprzestrzeń o bazie $\mathcal{B} = \{(2,1,0,0), (0,0,1,-2)\}$.

Każdy wektor własny o wartości własnej 2 jest rozwiązaniem układu równań jednorodnych o macierzy

$$M-2I=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ -I \\ \\ +2III \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ +I-2II \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

więc jest postaci $x_3(0,0,-1,1)$.

Z wymiaru przestrzeni wektorów własnych wynika, że w postaci Jordana macierz M ma jedną klatkę o wartości własnej 2 i dwie klatki o wartości własnej 1. Jedna z nich musi być rozmiaru 2 a druga 1.

Postacią Jordana macierzy jest

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Szukamy bazy. $\alpha_1 \in lin\{(0,0,-1,1)\}$ *zaś* $\alpha_2, \alpha_4 \in lin\{(2,1,0,0),(0,0,1,-2)\}$. *Natomiast α_3 spełnia $f(\alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3$ a więc jest rozwiązaniem układu*

o macierzy $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 0 & 2a \\ 1 & -2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b \\ -1 & 2 & -2 & -1 & -2b \end{array}\right]$

$$ale \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix} \text{ więc wystarczy przyjąć}$$

$a = b = 1$. *Czyli* $\alpha_3 = (1, 0, 0, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, -2) = (2, 1, 1, -2)$ *i* $\alpha_4 = (2, 1, 0, 0)$.

Sprawdzenie

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$