# Matematyka dyskretna

Igor Nowicki

2 lutego 2021

# 1 Ściągawka

## 1.1 Kategorie zadań

Ile jest rozmieszczeń n obiektów w k pudełkach ?

| OBIEKTY / PUDEŁKA | rozróżnialne | nierozróżnialne |
|---|---|---|
| rozróżnialne | funkcje ze zbioru obiektów do zbioru pudełek<br>$k^n$ | rozwiązania całkowitoliczbowe nieujemne równania<br>$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$<br>liczba rozmieszczeń = $\binom{n+k-1}{n}$ |
| rozróżnialne; każde pudełko zajęte<br>$n \geq k$ | surjekcje ze zbioru obiektów do zbioru pudełek<br>$k! \left\{ {n \atop k} \right\}$ | rozwiązania całkowitoliczbowe dodatnie równania<br>$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$<br>liczba rozmieszczeń = $\binom{n-1}{n-k}$ |
| nierozróżnialne; każde pudełko zajęte<br>$n \geq k$ | podział zbioru n obiektów na k bloków<br>Liczba Stirlinga drugiego rodzaju<br>$\left\{ {n \atop k} \right\}$ | podział liczby n na k składników<br>$P(n, k)$ |
| rozróżnialne; istotna jest kolejność obiektów w pudełkach | rozmieszczenia uporządkowane<br>$k^{\overline{n}}$ | |
| rozróżnialne; w każdym pudełku najwyżej jeden obiekt<br>$n \leq k$ | funkcje różnowartościowe ze zbioru obiektów do zbioru pudełek<br>$k^{\underline{n}}$ | $\binom{k}{n}$ |

## 1.2 Liczby Stirtlinga drugiego rodzaju i liczby Bella

**Liczba Stirlinga drugiego rodzaju** $\left\{ n \atop k \right\}$ odpowiada na pytanie na ile sposobów zbiór $n$ elementowy można podzielić na $k$ rozłącznych podzbiorów. **Liczba Bella** $B_n$ jest natomiast definiowana jako liczba wszystkich możliwych podziałów zbioru $n$-elementowego na podzbiory.

Tablica liczb Stirlinga drugiego rodzaju i liczb Bella:

| | $B_n$ | $S(n, k)$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| $n = 0$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 5 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 15 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | 52 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | 203 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 7 | 877 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 8 | 4140 | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | 0 | 0 | |
| 9 | 21147 | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 | 0 | |
| 10 | 115975 | 0 | 1 | 511 | 9330 | 34105 | 42525 | 22827 | 5880 | 750 | 45 | 1 | |
| ... | | | | | | | ... | | | | | | |

## 1.3 Liczba podziałów

$P(n, k)$ - podział liczby $n$ na $k$ składników. Opisywane przez diagramy Ferrersa.
$P(n)$ - liczba niezerowych podziałów liczby $n$.

Tablica liczby podziałów liczby na składniki:

| | $P(n)$ | $P(n, k)$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $k = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
| $n = 0$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | 7 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | 11 | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 7 | 15 | 0 | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 8 | 22 | 0 | 1 | 4 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | 30 | 0 | 1 | 4 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 10 | 42 | 0 | 1 | 5 | 8 | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 11 | 56 | 0 | 1 | 5 | 10 | 11 | 10 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | |
| 12 | 77 | 0 | 1 | 6 | 12 | 15 | 13 | 11 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | |
| ... | | | | | | | | ... | | | | | | | |

# 2 Zakres tematyczny

## 2.1 Zliczanie funkcji; zliczanie podzbiorów; zliczanie relacji

**Zadanie 2.1.1.** Dane są dwa zbiory:

$$A = \{a, 1, b, \{a, b\}\}, B = \{a, 1, b, \{a, 1\}, 2\}.$$

a) Ile jest wszystkich funkcji $f : A \to B$?

b) Ile jest funkcji różnowartościowych $g : B \to A$?

c) Ile jest funkcji różnowartościowych $g : B \to P(A)$?

d) Ile jest wszystkich relacji w zbiorze B?

e) Ile jest wszystkich surjekcji $h : B \to A$?

f) Ile jest wszystkich surjekcji $s : A \to B$?

g) Ile jest wszystkich bijekcji $b : B \to B$?

h) Ile podzbiorów ma zbiór $P(A \times B)$? {definicja: P (Y) = zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Y}

i) Jaką część wszystkich relacji, dających się określić w zbiorze B, stanowią relacje równoważności?

j) Ile relacji równoważności można zdefiniować w zbiorze B?

*Rozwiązanie.*

- Moc zbioru $|A| = 4$,
- moc zbioru $|B| = 5$,
- moc zbioru $|P(A)| = 2^4 = 16$,
- moc zbioru $|P(B)| = 2^5 = 32$.

a) Ile jest wszystkich funkcji $f : A \to B$?

Odwzorować z $A$ do $B$ jest $5^4$. Bierze się to z faktu, że każdemu z 4 elementów $A$ (obiektów) możemy przypisać dokładnie jeden z 5 elementów $B$ (pudełek). Korzystamy ze wzoru na $n$ rozróżnialnych obiektów w $k$ rozróżnialnych pudełkach: $k^n = 5^4$.

b) Ile jest funkcji różnowartościowych $g : B \to A$?

Nie ma żadnych funkcji różnowartościowych - przynajmniej element zbioru $A$ będzie wskazywany przez dwa elementy zbioru $B$ (zasada Dirichleta).

c) Ile jest funkcji różnowartościowych $g : A \to B$?

Bierzemy pierwszy element $A$, możemy mu przypisać jeden z 5 elementów $B$. Kolejnemu możemy przypisać już tylko jeden z 4 elementów, potem jeden z 3... i tak dalej, 4 razy. Odpowiedź to $5^{\underline{4}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

d) Ile jest funkcji różnowartościowych $g : B \to P(A)$?

Analogiczna odpowiedź: z $n = 5$ do $k = 2^4 = 16$. W każdym pudełku co najwyżej jeden obiekt, $k^{\underline{\mathrm{n}}} = 16^{\underline{5}}$.

e) Ile jest wszystkich surjekcji $h : B \to A$?

Odpowiedź jest ta sama jak na pytanie "na ile sposobów 5 rozróżnialnych elementów możemy umieścić w 4 pudełkach tak, aby w każdym pudełku był przynajmniej 1 element"? Odpowiedzią na to pytanie jest $k!\left\{{n \atop k}\right\}$, gdzie $k$ jest liczbą pudełek (4), a $n$ - liczbą obiektów (5). W tym wypadku mamy $4!\left\{{5 \atop 4}\right\} = 4! \cdot 10 = 240$ kombinacji.

f) Ile jest wszystkich surjekcji $s : A \to B$?

Oczywiście niemożliwe jest rozłożyć 4 elementy do 5 pudełek tak, by każde pudełko miało przynajmniej jeden element. Odpowiedź to zero.

g) Ile jest wszystkich bijekcji $b : B \to B$?

Odpowiadamy na pytanie, ile jest permutacji zbioru 5-elementowego. Odpowiedzią jest oczywiście $5! = 120$.

h) Ile podzbiorów ma zbiór $P(A \times B)$? {definicja: P (Y) = zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Y}

Liczba podzbiorów zbioru $X$ jest równa mocy zbioru potęgowego, $|P(X)| = 2^{|X|}$. W tym wypadku bierzemy zbiór będący iloczynem kartezjańskim, o mocy 20 elementów - odpowiedzią jest $2^{20} = 1024 \cdot 1024 \approx 1,000,000$.

i) Ile jest wszystkich relacji równoważności w zbiorze B?

Relacja równoważności jest określana jednoznacznie przez podział elementów na klasy abstrakcji - takie klasy są zawsze rozłączne. Pytamy zatem, na ile sposobów możemy rozdzielić zbiór 5 elementów na rozłącznie podzbiory.

Odpowiedź na pytanie "ile jest podziałów zbioru $n$-elementowego na $k$ bloków" daje **liczba Stirlinga drugiego rodzaju**, $\left\{{n \atop m}\right\}$. Natomiast suma wszystkich możliwych podziałów, tj. $B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$, jest dana jako **liczba Bella**.

Rozwiązaniem jest $B_5 = 52$.

j) Jaką część wszystkich relacji, dających się określić w zbiorze B, stanowią relacje równoważności?

Wszystkie relacje w zbiorze $B$ jest równa wszystkim możliwym macierzom binarnym $|B| \times |B|$, tj. $2^{25}$ macierzom. Liczba wszystkich relacji równoważności odpowiada liczbie Bella $B_5$, co jest równe 52.

□

**Zadanie 2.1.2.** X - zbiór 5-elementowy, Y - zbiór 4-elementowy, Z - zbiór 9-elementowy
a = liczba takich relacji równoważności w zbiorze Z które mają co najmniej siedem klas abstrakcji.
b = liczba surjekcji $X \to Y$.
Która liczba jest większa: a czy b? Uzasadnij.

*Rozwiązanie.* Skorzystamy z tabeli liczb Stirlinga.
Liczba wszystkich podziałów zbioru $n$-elementowego na $k$ części to liczba Stirlinga drugiego rodzaju:

$$\left\{{n \atop k}\right\}.$$

Potrzebujemy liczbę wszystkich podziałów na 7, 8 lub 9 bloków - odpowiadają im liczby Stirlinga $\left\{{9 \atop 7}\right\}, \left\{{9 \atop 8}\right\}, \left\{{9 \atop 9}\right\}$. Z tabeli wyczytujemy, że odpowiadają im, kolejno: $462, 36, 1$. Ich suma wynosi 499.

$a = \left\{ {9 \atop 7} \right\} + \left\{ {9 \atop 8} \right\} + \left\{ {9 \atop 9} \right\} = 462, 36, 1 = 499.$
Zliczanie surjekcji $X \to Y$ oznacza policzenie wszystkich sposobów tworzenia czterech niepustych zbiorów ze zbioru 5 elementów, razy liczba kombinacji 4 elementów.

$$b = \left\{ {5 \atop 4} \right\} \cdot 4!.$$

□

## 2.2 Zbiory z powtórzeniami; funkcje tworzące; zastosowanie funkcji tworzących do zliczania rozwiązań nierówności

**Zadanie 2.2.1.** 1. Zbadaj, ile rozwiązań ma nierówność: $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8$, gdzie $x_1, x_2, x_3$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, a dodatkowo spełnione są warunki: $x_1$ - parzysta, $x_2 = 0$ lub $1, 2 < x_3 < 5$.

2. Ile rozwiązań ma podwójna nierówność:$5 < x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8$, przy czym warunki na zmienne są takie same jak w podpunkcie 1 ?

3. Zbadaj, ile rozwiązań ma nierówność: $x_1+x_2+x_3 \leqslant 8$, gdzie $x_1, x_2, x_3$są liczbami całkowitymi nieujemnymi, a dodatkowo spełnione są warunki: $x_1$ - parzysta, $x_2 = 0 lub 1$, $x_3$ podzielne przez 3.

*Rozwiązanie.* a) Musimy policzyć sumę przypadków:

- $x_1$ parzysta, $x_2 = 0$,
- $x_1$ parzysta, $x_2$ dowolna, $x_3 \in \{3, 4\}$,
- $x_1$ parzysta, $x_2 = 0$ oraz $x_3 \in \{3, 4\}$.

Pierwszy przypadek możemy policzyć poprzez wygenerowanie funkcji tworzącej $f(x) = (1+x^2+x^4+x^6+x^8)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)$ i policzenie sumy wszystkich argumentów dla potęg mniejszych lub równych od 8 dla wymnożonych wielomianów - wynik to 25.

Drugi przypadek atakujemy w ten sam sposób, z tym że mamy funkcję tworzącą $f(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) \cdot (x^3 + x^4) = O(x^9) + 6x^8 + 5x^7 + 4x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3$, co daje 21 rozwiązań.

Trzeci przypadek daje nam $f(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8) \cdot 1 \cdot (x^3 + x^4) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + O(x^9)$, co daje sumę 6 rozwiązań.

Aby policzyć wszystkie rozwiązania, skorzystamy z zasady włączania/wyłączania, tj. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 21 - 6 = 40$ rozwiązań.

□

**Zadanie 2.2.2.** $X =< 5a, 4b, 3c >$; rozważ takie podzbiory, w których a występuje parzystą liczbę razy, b występuje najwyżej dwa razy, ale co najmniej raz, c występuje co najmniej dwa razy. Skonstruuj funkcję tworzącą dla ciągu liczb podzbiorów k-elementowych, przy zadanych warunkach dla $a, b, c$.

1. Ile takich podzbiorów zawiera więcej niż 6 elementów?

2. Ile takich podzbiorów zawiera 4 elementy lub 8 elementów?

*Rozwiązanie.* Warunki zamieniają się w następujący wielomian dla funkcji tworzącej:

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4) \cdot (1 + x + x^2) \cdot (x^2 + x^3) = x^9 + 2x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2$$

1. Ile takich podzbiorów zawiera więcej niż 6 elementów?

   Pytamy o współczynniki przy potęgach wyższych niż 6: $1 + 2 + 3 = 6$.

2. Ile takich podzbiorów zawiera 4 elementy lub 8 elementów?

   Pytamy o sumę współczynników przy potęgach 4 oraz 8: $3 + 2 = 5$

□

## 2.3 Podział zbioru na bloki - liczby Stirlinga II rodzaju; liczby Bella - zliczanie relacji równoważności; zliczanie surjekcji

**Zadanie 2.3.1.** Z osób $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ tworzymy 4 niepuste zespoły.

a) Ile jest sposobów stworzenia zespołów?

b) Ile jest sposobów przy warunkach: $a, b$ muszą być w jednym zespole oraz ani $c$, ani $d$ nie mogą być razem z $a$ oraz $b$.

*Rozwiązanie.* Korzystamy z modelu podziału na bloki.

a) Dla braku warunków rozwiązaniem będzie prosty podział na bloki: $P(n, k) = P(8, 4) = \left\{ {8 \atop 4} \right\}$.

b) Przy narzuconym warunku traktujemy zbiór jako 7-elementowy (a oraz b muszą być zawsze razem). Od takiego zbioru odejmujemy liczbę przypadków w których $c$ jest razem z $(a, b)$, $d$ jest razem z $(a, b)$ oraz $c$ i $d$ są razem z $(a, b)$.

   - Liczba przypadków $c$ razem z $(a, b)$: $\left\{ {6 \atop 4} \right\}$,
   - Liczba przypadków $d$ razem z $(a, b)$: $\left\{ {6 \atop 4} \right\}$,
   - Liczba przypadków $c, d$ razem z $(a, b)$: $\left\{ {5 \atop 4} \right\}$,

   Suma wszystkich przypadków $(a, b)$ bez $c$ lub $d$: $X = \left\{ {6 \atop 4} \right\} + \left\{ {6 \atop 4} \right\} - \left\{ {5 \atop 4} \right\} = 120$.

   Całkowita liczba przypadków: $\left\{ {7 \atop 4} \right\} - (2\left\{ {6 \atop 4} \right\} - \left\{ {5 \atop 4} \right\}) = 230$.

□

**Zadanie 2.3.2.** $X = \{a, b, c, d, e\}$. $Y = \{1, 2, 3\}$. Ile jest funkcji $g : X \to Y$ takich, że $|g^{-1}(\{3\})| = 2$?

*Rozwiązanie.* Pytamy o liczbę przypadków, w których w pudełku 3 są dokładnie dwa elementy z $X$. Możemy wybrać dwa elementy ze zbioru 5 elementowego na $\binom{5}{2}$ sposobów. Następnie, chcemy przyporządkować pozostałe trzy elementy do dowolnych dwóch pozostałych pudełek: $2^3$ możliwości. Razem mamy $\binom{5}{2} \cdot 2^3 = 80$ kombinacji. □

## 2.4 Podziały liczby na składniki

**Zadanie 2.4.1.** 18 pięciozłotowych monet wrzuciliśmy do czterech identycznych puszek. Oblicz liczbę kombinacji, jeśli:

a) W każdej puszce są co najmniej 3 monety.

b) W każdej puszce musi się znaleźć parzysta i niezerowa suma.

Diagramy Ferrisa.

*Rozwiązanie.* Przy braku warunków mielibyśmy przypadek podziału 18 na 4 lub 3 lub 2 lub 1 skadników, czyli $P(18,4)+P(18,3)+P(18,2)+P(18,1)$, lub po prostu $p(18)$, gdzie $p$ jest zliczaniem wszystkich możliwych podziałów.
Dla przypadków opisanych w warunkach:

a) W każdej puszce są co najmniej 3 monety.

   Skorzystamy z tego założenia by uprościć sobie rozwiązywanie. Jeśli wrzucimy do każdej puszki po dwie monety, to pozostaje nam 10 monet do rozdysponowania na 4 niezerowe składniki - zatem $P(10,4)$.

b) W każdej puszce musi się znaleźć parzysta i niezerowa suma.

   Możemy potraktować układ jako równoważny z wrzucaniem 9-ciu par monet do puszek. W ten sposób lądujemy z $P(9,4) = 6$ przypadkami.

□

**Zadanie 2.4.2.** Do trzech jednakowych puszek wrzucono 9 monet groszowych: 1, 2, 5, 10, 20, 50 oraz złotowych: 1, 2, 5.
Ile jest sposobów wrzucenia jeśli:

1. w każdej puszcze znalazła się jakaś moneta
2. nie ma ograniczeń jak w wersji 1

*Rozwiązanie.* Zadanie polega na rozmieszczeniu **rozróżnialnych** elementów na nierozróżnialne zbiory - jest ono równoważne z pytaniem o liczbę podziałów na trzy klasy abstrakcji (w przypadku 1) lub po prostu o liczbę podziałów na klasy abstrakcji (w przypadku 2).
Dla przypadku pierwszego mamy liczbę podziałów w postaci liczby Stirlinga $\left\{ {9 \atop 3} \right\} = 3025$. W drugim przypadku mamy odpowiedź w postaci sumy podziałów na trzy, dwa lub jedno pudełko: $\left\{ {9 \atop 3} \right\} + \left\{ {9 \atop 2} \right\} + \left\{ {9 \atop 1} \right\} = 3281$. □

**Zadanie 2.4.3.** Ile jest podziałów liczby 20 na 8 składników?

*Rozwiązanie.* Oczywiście odpowiedzią będzie $P(20,8)$. Spróbujemy uzyskać tę liczbę z mniejszych sum, na podstawie wzoru:

$$P(n,k) = \sum_{i=0}^{k} P(n-k,i),$$

czyli w tym wypadku będzie to:

$$P(20,8) = P(12,0) + P(12,1) + \iddots + P(12,8) = 70.$$

□

**Zadanie 2.4.4.** Ile jest podziałów liczby 13 na 4 składniki, w których największy składnik jest nie mniejszy niż 4?

*Rozwiązanie.* Oczywiście dzieląc 13 na 4 składniki musimy mieć największy składnik większy lub równy 4 - ze względu na zasadę szufladkową. Zatem $P(13,4) = 18$. □

**Zadanie 2.4.5.** 20 jednakowych klocków włożono do 5 jednakowych pudełek. Pudełka są niepuste. W jednym z pudełek są dokładnie 4 klocki. Ile jest takich sposobów rozłożenia klocków?

*Rozwiązanie.* Oczywiście musimy wykluczyć jedno pudełko z czterema klockami, co redukuje nasz układ do 16 jednakowych klocków w 4 jednakowych pudełkach. Sposobów rozmieszczenia jest oczywiście $P(16,4) = P(12,1) + P(12,2) + P(12,3) + P(12,4) = 34$. □

**Zadanie 2.4.6.** Dane jest 10 jednakowych zadań na 4 jednakowe maszyny. Każda z maszyn musi pracować (mieć przynajmniej jedno zadanie). Ile jest sposobów przydziału zadań do maszyn?

*Rozwiązanie.* Odpowiedź to $P(10,4)$. □

**Zadanie 2.4.7.** Dane jest 8 rozróżnialnych zadań na 4 jednakowe maszyny. Każda z maszyn pracuje. Na jednej z maszyn są dokładnie 2 zadania. Ile jest sposobów?

*Rozwiązanie.* Po pierwsze, wybieramy 2 zadania na $\binom{8}{2}$ sposobów. Po drugie, mnożymy wynik przez $\left\{{6 \atop 3}\right\}$. Wynik to:

$$\binom{8}{2} \cdot \left\{{6 \atop 3}\right\} = 2520.$$

□

**Zadanie 2.4.8.** Mamy 8 rozróżnialnych zadań dla 4 rozróżnialnych maszyn. Każda z maszyn pracuje.

*Rozwiązanie.* Wynik to $4! \cdot \left\{{8 \atop 4}\right\} = 40824$. □

**Zadanie 2.4.9.** 12 identycznych piłek wkładamy do jednakowych toreb. W torbie mieszczą się najwyżej 4 piłki. Na ile sposobów możemy to zrobić? Wyjaśnij.

*Rozwiązanie.* Przypadek podziału 12 identycznych elementów do toreb gdzie najwięcej możemy upakować 4 elementy na raz jest identyczny z przypadkiem podziału na 4, 3, 2 oraz 1 zbiór. Odpowiedź to:

$$P(12,4) + P(12,3) + P(12,2) + P(12,1) = 34.$$

□

**Zadanie 2.4.10.** Zdajemy test z analizy. Jest 5 zadań z granic funkcji, 2 zadania z ekstremów, 3 zadania z całek, 2 zadania z równań różniczkowych. Każde zadanie jest za 1 punkt. Test jest zaliczony, gdy uzyskamy co najmniej 4 punkty. Warunki: musimy rozwiązać nie więcej niż 2 zadania z granic, przynajmniej jedno zadanie z całek i przynajmniej jedno zadanie z równań różniczkowych. Ile jest różnych zestawów zaliczających?

*Rozwiązanie.* Zadanie możemy przedstawić w sposób formalny. Zliczamy liczbę podzbiorów przynajmniej czteroelementowych zbioru z powtórzeniami:

$$< 5g, 2e, 3c, 2r >,$$

dla którego podzbiory muszą mieć najwyżej $2g$, przynajmniej $1c$ oraz przynajmniej $1r$.
Zadanie można przetłumaczyć na formę $< 2g, 2e, 3c, 2r >$, ponieważ możemy rozwiązać maksymalnie 2 zadania z granic.
Najprościej jest zastosować tutaj metodę funkcji tworzących:

$$f(x) = (1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2)\cdot(x+x^2+x^3)\cdot(x+x^2) = x^9+4x^8+9x^7+13x^6+13x^5+9x^4+4x^3+x^2.$$

Bierzemy tylko potęgi równe lub większe od 4. Suma współczynników to $1+4+9+13+13+9 = 49$.

$\square$

**Zadanie 2.4.11.** 10 rozróżnialnych zadań przypisujemy dowolnie do trzech identycznych maszyn. Na ile sposobów możemy to zrobić?

*Rozwiązanie.* Odpowiedź to suma podziałów na trzy maszyny (niepuste), dwie maszyny oraz jedną maszynę. Ponieważ są one nierozróżnialne, nie gra roli które wybierzemy. Odpowiedź to:

$$\left\{ {10 \atop 3} \right\} + \left\{ {10 \atop 2} \right\} + \left\{ {10 \atop 1} \right\} = 9842.$$

$\square$

## 2.5 Dobór modelu matematycznego do zadania zliczania

**Zadanie 2.5.1.**

$$X = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

a) Ile jest relacji równoważności w X które mają dwie klasy abstrakcji?

b) Ile jest relacji równoważności w X takich, że ich klasy abstrakcji są mocy parzystej?

c) Ile jest relacji równoważności w X takich, że ich klasy abstrakcji są mocy nieparzystej?

d) Ile jest relacji równoważności w X, które mają dwie klasy abstrakcji?

*Rozwiązanie.* a) Szukamy podziału zbioru 6 elementowego na 2 niezerowe i nierozróżnialne bloki. Odpowiedź to liczba Stirlinga $\left\{ {6 \atop 2} \right\}$.

b)

$\square$