# Algebra, WIT 2019/2020

pierwsze kolokwium–przykładowe rozwiązania

**Zadanie 1.** Znajdź wszystkie liczby zespolone będące rozwiązaniami równania:

i) $z^2 = -3 + 4i$,

ii) $z^2 - 3z + (3 - i) = 0$.

**Rozwiązanie 1.** i) **pierwszy sposób:** wiemy, że jeśli $w = a + bi$ oraz $z^2 = w$, to

$$z = \pm \left( \frac{b}{\sqrt{2(|w| - a)}} + i\sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right).$$

W naszym przypadku $w = -3 + 4i$ oraz $|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ co po podstawieniu do wzoru daje $z = \pm(1 + 2i)$.

**drugi sposób:** niech $z = p + qi$, wtedy $z^2 = p^2 - q^2 + 2pqi$. Daje to układ równań

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = -3 \\ 2pq = 4 \\ p^2 + q^2 = 5 \end{cases}$$

(ostatnie równanie bierze się z równości $|z|^2 = |w|$). Dodając do siebie pierwsze i trzecie równanie otrzymujemy $p^2 = 1$, zatem $p = \pm 1$, co uwzględniając drugie daje $q = \pm 2$. Zatem $z = \pm(1 + 2i)$.

ii) jeśli $az^2 + bz + c = 0$, to $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(3 - i) = -3 + 4i$. Z poprzedniego punktu mamy $\sqrt{\Delta} = \pm(1 + 2i)$. Zatem $z = \frac{3 + (1+2i)}{2} = 2 + i$ lub $z = \frac{3 - (1+2i)}{2} = 1 - i$.

**Zadanie 2.** Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby

i) $\frac{5+14i}{4+i}$,

ii) $(-1 + i\sqrt{3})^{11}$.

**Rozwiązanie 2.** i) mnożymy licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną do mianownika, aby sprowadzić dzielenie przez liczbę zespoloną do dzielenia przez liczbę rzeczywistą,

$$\frac{5 + 14i}{4 + i} = \frac{(5 + 14i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{20 - 5i + 56i + 14}{4^2 - i^2} = \frac{34 + 51i}{17} = 2 + 3i.$$

Część rzeczywista to 2 a część urojona to 3.

ii) **pierwszy sposób:** przedstawmy liczbę $z=-1+i\sqrt{3}$ w postaci trygonometrycznej, tj. $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Mamy $|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$. Zatem

$$\begin{cases}\cos\varphi=-\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Kąt to $\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ bo $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ oraz $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ze wzoru de Moivre'a mamy

$$(-1+i\sqrt{3})^{11}=\left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{11}=2^{11}\left(\cos\frac{22\pi}{3}+i\sin\frac{22\pi}{3}\right)=$$

$$=2^{11}\left(\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^{11}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=2^{11}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^{11}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Część rzeczywista to $-2^{10}$ a część urojona to $-2^{10}\sqrt{3}$.
**drugi sposób:** zauważamy, że $z=2\varepsilon_3$ gdzie $\varepsilon_3$ to pierwiastek pierwotny trzeciego stopnia z 1. Zatem $z^{11}=2^{11}\varepsilon_3^{11}=2^{11}\varepsilon_3^2$ a to już możemy obliczyć ze wzoru skróconego mnożenia.

**Zadanie 3.** Podaj rozwiązanie ogólne układu równań liniowych, wyrażając zmienne związane przez parametry.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3-4x_4+x_5-4x_6=-4\\ 2x_1+x_2+4x_3-3x_4-2x_5-x_6=9\\ -3x_1+5x_2-6x_3+11x_4-2x_5+11x_6=9\end{cases}$$

**Rozwiązanie 3.** Tworzymy macierz ze współczynników i sprowadzamy ją operacjami elementarnymi na wierszach do postaci schodkowej zredukowanej:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}1&-2&2&-4&1&-4&-4\\2&1&4&-3&-2&-1&9\\-3&5&-6&11&-2&11&9\end{array}\right]\xrightarrow[w_3+3w_1]{w_2-2w_1}\left[\begin{array}{rrrrrr|r}1&-2&2&-4&1&-4&-4\\0&5&0&5&-4&7&17\\0&-1&0&-1&1&-1&-3\end{array}\right]\xrightarrow[w_2+5w_3]{w_1-2w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}1&0&2&-2&-1&-2&2\\0&0&0&0&1&2&2\\0&-1&0&-1&1&-1&-3\end{array}\right]\xrightarrow[w_3-w_2]{w_1+w_2}\left[\begin{array}{rrrrrr|r}1&0&2&-2&0&0&4\\0&0&0&0&1&2&2\\0&-1&0&-1&0&-3&-5\end{array}\right]\xrightarrow[w_2\leftrightarrow w_3]{(-1)w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}1&0&2&-2&0&0&4\\0&1&0&1&0&3&5\\0&0&0&0&1&2&2\end{array}\right]$$

.
Parametrami są $x_3, x_4, x_6$. Wracamy do równań.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 + 3x_6 = 5 \\ x_5 + 2x_6 = 2 \end{cases}$$

I wyrażamy zmienne związane przez parametry

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 5 - x_4 - 3x_6 \\ x_5 = 2 - 2x_6 \end{cases}, x_3, x_4, x_6 \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 4.** i) znajdź bazę zbioru rozwiązań układu równań,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

ii) sprawdź czy wektor $v = (3, 3, -1, -1, 3)$ należy do tej przestrzeni, jeśli tak, to znajdź jego współrzędne w znalezionej bazie.

**Rozwiązanie 4.** i) Tworzymy macierz ze współczynników układu i sprowadzamy ją do postaci schodkowej zredukowanej (pomijamy ostatnią kolumnę, bo układ jest jednorodny)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 7 & -4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2+3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1+2w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Parametrami są $x_3, x_4, x_5$. Wracamy do równań przenosząc parametry na prawą stronę.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 10x_4 - 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 4x_4 \end{cases}, \ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Każdy wektor spełniający układ równań jest postaci

$$(x_3 - 10x_4 - 2x_5, x_3 - 4x_4, x_3, x_4, x_5), \ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

Przedstawmy go w postaci

$$(x_3-10x_4-2x_5, x_3-4x_4, x_3, x_4, x_5) = x_3(1, 1, 1, 0, 0)+x_4(-10, -4, 0, 1, 0)+x_5(-2, 0, 0, 0, 1)$$

Wektory $(1, 1, 1, 0, 0), (-10, -4, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 0, 1)$ rozpinają zbiór rozwiązań i są liniowo niezależne, zatem tworzą bazę przestrzeni rozwiązań.

ii) wektor $v = (3, 3, -1, -1, 3)$ należy do przestrzeni rozwiązań bo spełnia oba równania, patrząc na ostatnie trzy współrzędne zauważamy, że

$$(3, 3, -1, -1, 3) = -(1, 1, 1, 0, 0) - (-10, -4, 0, 1, 0) + 3(-2, 0, 0, 0, 1),$$

zatem współrzędne wektora $v$ w znalezionej bazie to $-1, -1, 3$.

**Zadanie 5.** Które z poniższych zbiorów $V, W$ są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^3$?

i) $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 = x_3\}$,

ii) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + (x_3 - 1)^2 = x_3^2\}$.

**Rozwiązanie 5.** Zbiór $V$ jest podprzestrzenią bo jest opisany jednorodnym równaniem. Zbiór $W$ nie jest podprzestrzenią bo np. nie zawiera wektora $(0, 0, 0)$ (każda podprzestrzeń zawiera wektor zerowy). Alternatywnie, $(1, 0, 1) \in W$ ale $(2, 0, 2) \notin W$.