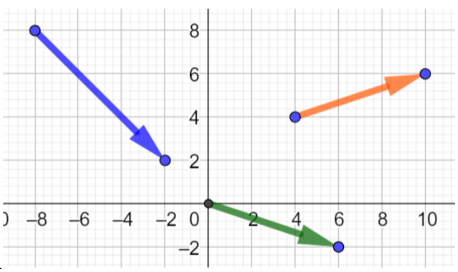
Zadania z algebry, część 1 WEKTORY i część 2 LINIA PROSTA

1. **Wektory na płaszczyźnie**. Vectors on the plane. Вектори на площині. Вектары на плоскасці.

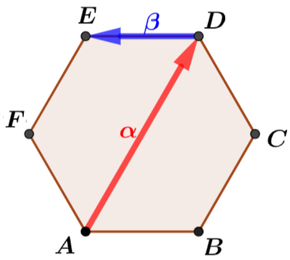
Można powiedzieć, że wektor to strzałka, która wyznacza kierunek, na przykład [1, 0] to kierunek „na wschód”, [0,1] „na północ” , [1,1] na północny wschód i tak dalej. Podobnie w przestrzeni.

W ogólniejszym ujęciu wektorem jest dowolny ciąg liczb, np. [1, 0, -3, 4, 9]. Jeszcze bardziej ogólne pojęcie wektora poznamy później.

Zadanie 1.1. Dla podanego wektora $\vec{w}$ zaznacz $2\vec{w}$, $-3\,\vec{w}$, $\frac{1}{3}\,\vec{w}$, $-\frac{5}{3}\,\vec{w}$.



Rys. 1

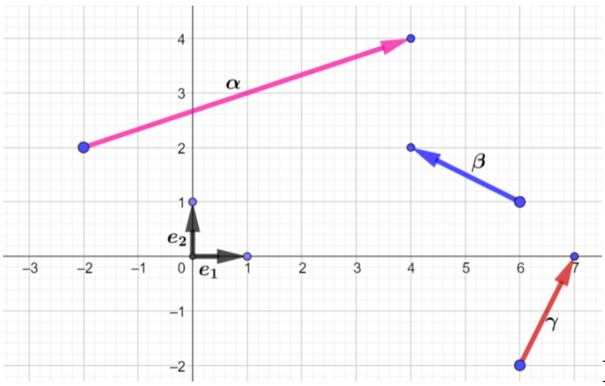


Rys. 2

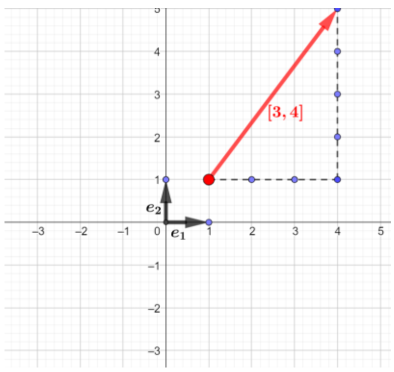
Zadanie 1.2. Na rysunku 2 masz sześciokąt foremny (regular hexagon, правильний шестикутник, правільны шасцікутнік) *ABCDEF*. Niech $\overrightarrow{AD} = \alpha$, $\overrightarrow{DE} = \beta$. Zapisz za pomocą wektorów α, β

$$\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{FC},\quad \overrightarrow{DC},\quad \overrightarrow{EB},\quad \overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{FD}.$$

Zadanie 1.3. Wskaż punkty zaczepienia (initial points) i wyznacz współrzędne podanych wektorów:



Rys.3



Rys. 4

Zadanie 1.4. Narysuj wektory [3,4], [–3,4], [–3, –4], [–3,–4], [4,3], [–4,3], [–4,–3], [–4,3], zaczepione w punkcie (1,1). Pierwszy z nich masz na rys. 4.

Zadanie 1.5. Oblicz współrzędne środka odcinka *AB*, jeżeli

a) $A = (-4,1)$, $B = (6,-1)$;

b) $A = (5,7)$, $B = (13,3)$;

b) $A = (-25, 30)$, $B = (15, 0)$;

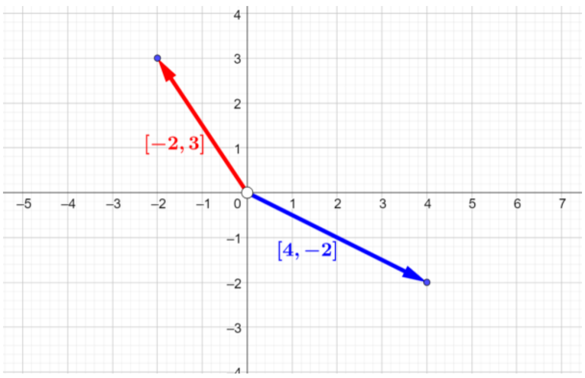
d) $A = (103, 64)$, $B = (-29, -60)$.

Zadanie 1.6. Oblicz długość wektora $\vec{AB}$, jeżeli

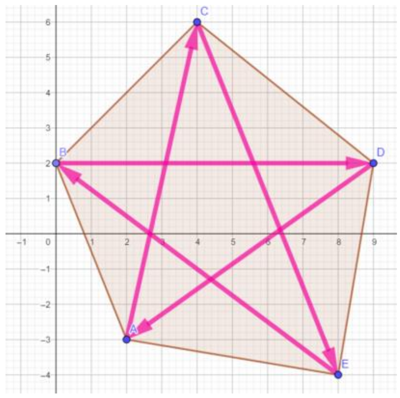
a) $A = (-3,1)$, $B = (-5,-6)$, b) $A = (2,-7)$, $B = (-13,1)$

Zadanie 1.7. Oblicz długości wektorów z zadania 1.4.

Zadanie 1.8. Mamy $\vec{u} = [-2,3]$, $\vec{v} = [4,-2]$. Spójrz na rys. 5. Wyznacz współrzędne wektorów $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$, $2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$. Narysuj te wektory.



Rys.5, rys. 6



Zadanie 1.9. Mamy $\alpha = [3,-4]$, $\beta = [1,2]$. Rozwiąż równania:

a) $x \cdot \alpha + y \cdot \beta = [7,4]$, b) $x \cdot \alpha - y \cdot \beta = [-5,-8]$,

c) $(x+y) \cdot \alpha + (x-y) \cdot \beta = [0,2]$, d) $x \cdot (\alpha+\beta) - y \cdot (\alpha-\beta) = [-1,0]$

Zadanie 1.10. Dobierz x tak, by wektory α, β były równoległe (parallel, паралельні, паралельныя).

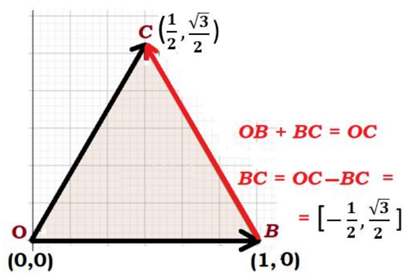
a) $\alpha = [-2,1]$, $\beta = [x,3]$

b) $\alpha = [-4,x]$, $\beta = [-2,x+1]$

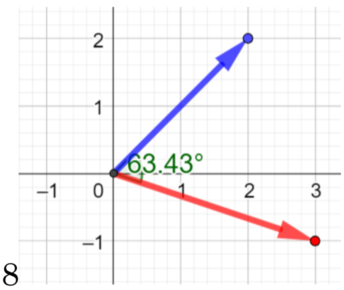
c) $\alpha = [4,x]$, $\beta = [-2,x+1]$

Zadanie 1.11. Sprawdź rachunkiem wektorowym, że po wyjściu z dowolnego wierzchołka pięciokąta (rys. 6) i poruszając się po przekątnych (a więc po strzałkach), dojdziesz do punktu wyjścia.

Zadanie 1.12. Trójkąt równoboczny, equilateral triangle, рівносторонній.



Rys.7, rys.8



Przyjirzyj się rysunkowi 7. Wyznacz współrzędne środka tego trójkąta. Wyznacz wektory łączące wierzchołki tego trójkąta ze środkiem.

Zadanie 1.13. Za pomocą iloczynu skalarnego wyznacz kąt między podanymi wektorami. Narysuj te wektory i sprawdź „na oko", czy wynik się zgadza.

a) $[3, -1], [2,2]$, b) $[1,2], [0,1]$, c) $[1, -1]$, $[1,1]$, d) $[3,2], [-4,6]$.

Wyjaśnienie. Niech kątem tym będzie α . W przykładzie a) mamy

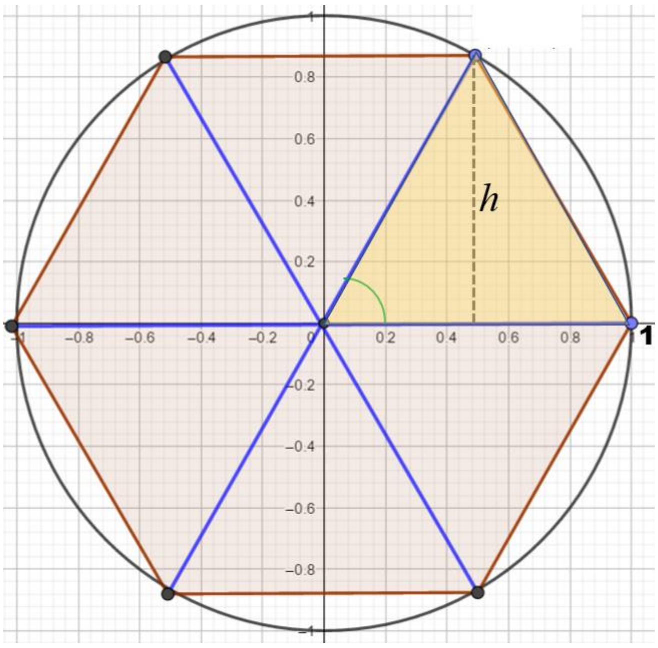
$$\cos\alpha = \frac{[3,-1].[2,2]}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

. Daje to kąt ok. $63{,}5^{\circ}$ (spójrz na rys. 8).

Zadanie 1.14. Dane są trójkąty *ABC*. Który z nich jest równoramienny, równoboczny, prostokątny? Sprawdź to za pomocą rachunku wektorowego.

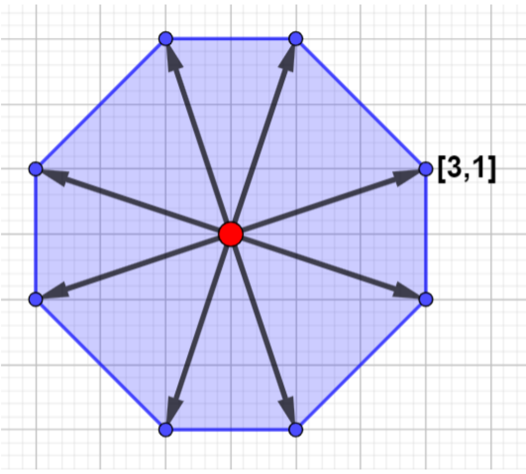
a) $A = (2, 3)$, $B = (3, 3)$, $C = (2, 4)$,
b) $A = (-1, -3)$, $B = (-1, -2)$, $C = (2, -3)$,
c) $A = (2, 2)$, $B = (3, 2)$, $C = (\frac{5}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2})$,
d) $A = (-2, 4)$, $B = (-3, 5)$, $C = (-1,5)$,
e) $A = (1,1)$, $B = (-9,12)$, $C = (12,11)$.
f) $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$, $C = (0,1)$.

Zadanie 1.15. Wyznacz współrzędne wierzchołków sześciokąta foremnego o środku (0,0) i boku 1 (rys. 9). Calculate coordinates of the vertices of the regular hexagon with center (0,0) and side length 1. Знайдіть координати вершин звичайного шестикутника з центром у (0,0) та стороною 1.

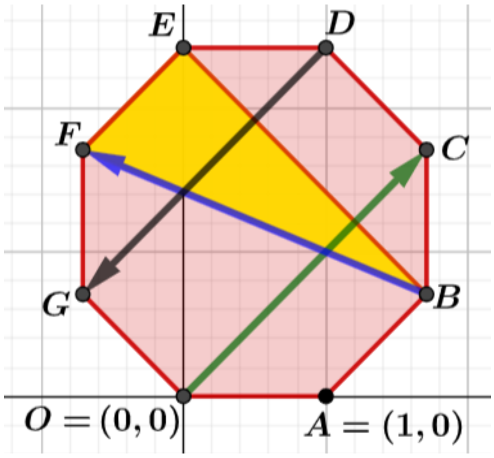


Rys. 9.

Zadanie 1.16. Ośmiokąt. Octagon. Восьмикутник. Васьмікутнік.



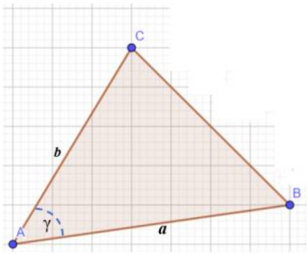
Rys. 10.



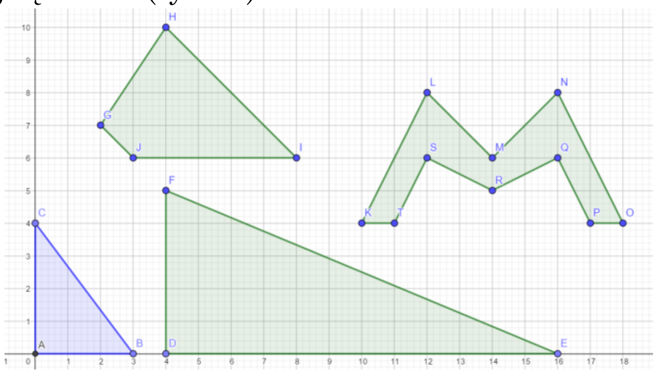
Rys. 11

a) Przyjmując środek ośmiokąta za punkt (0,0), a kratkę za jednostkę, wyznacz współrzędne wierzchołków ośmiokąta z rys. 10.
b) Wyznacz współrzędne wierzchołków ośmiokąta foremnego z rys.11. Wyznacz wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GO}$.
c) Wyznacz wektory zaznaczone strzałką na rys. 11.
d) Stosując rachunek wektorowy, oblicz pole trójkąta *BEF*.

Zadanie 1. 17. Oblicz pole trójkąta *ABC* (rys. 12):



Rys. 12.

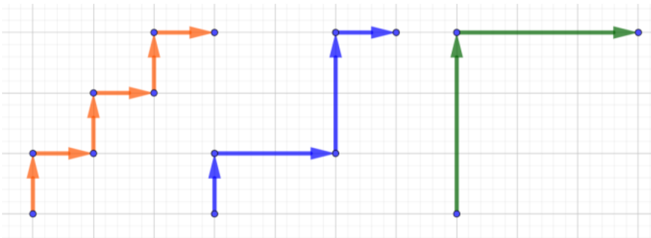


rys. 13

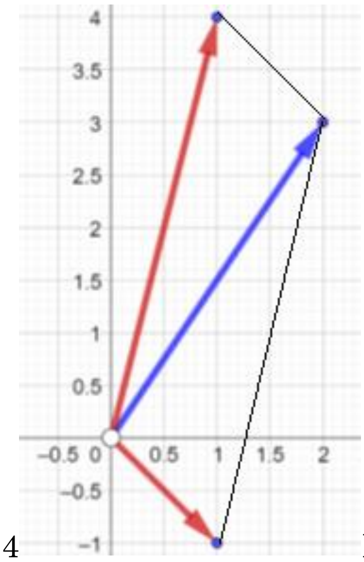
Zadanie 1.18. Oblicz obwody i kąty tych wielokątów (rys. 12). Find the perimeters and angles of polygons. Обчисліть периметр і кути многокутників.

Zadanie 1.19. Oznaczenia: N, S, E, W (północ, południe, wschód, zachód, north, south, east, west, північ, південь, захід, схід, поўнач, поўдзень, усход, захад. Narysuj drogi: **N^4 E^4 S^4 W^4 , $N^4E^4SW^3S^3W$, $NW(NE)^2$ $SE(SW)^2$.**

Zadanie 1.20. Zakoduj drogi widoczne na rys. 14.



Rys.14



Rys. 15

Zadanie 1.21. Na pewno rozumiesz, że $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{-1}$, $\mathbf{W} = \mathbf{E}^{-1}$. Opisując drogi, możemy zatem używać tylko N i E. Te dwa przesunięcia (na północ i na wschód) są niezależne (**independent, незалежні, незалежныя, nepriklausomi**). Narysuj drogę $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{N}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{N}^{-2}\mathbf{E}^{-2}$.

Zadanie 1.22. Rysując odpowiednie drogi, przekonaj się, że $(\mathbf{NE})^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{N}^{-1}$ i że to nie jest to samo, co $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}^{-1}$.

Zadanie 1.23. Rysując odpowiednie drogi, przekonaj się, że $(\mathbf{ENEN})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{E}^{-1}$

Kombinacja liniowa wektorów = linear combination of vectors = лінійна комбінація.

Zadanie 1.24. Przedstaw [2,3] w postaci kombinacji liniowej podanych wektorów. Narysuj.

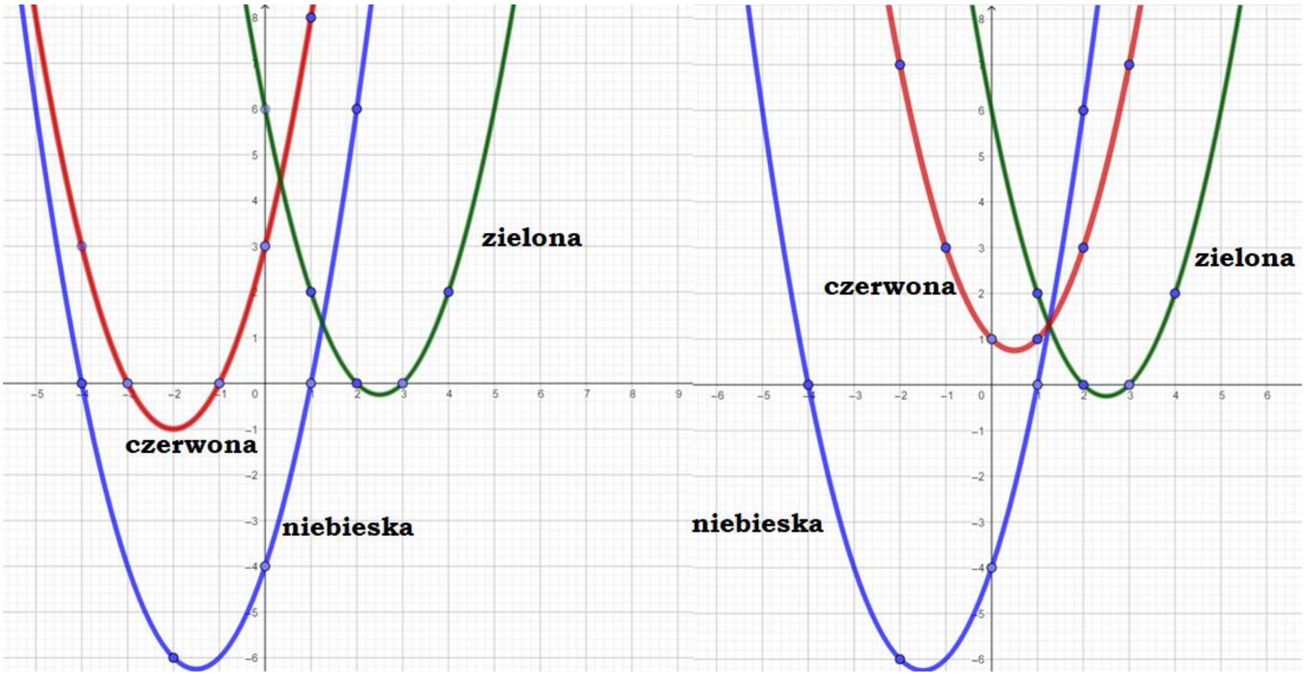
a) Wektor [2,3] jako kombinację liniową [1,–1] i [1,4];
b) Wektor [2,3] jako kombinację liniową [1,3] i [0,–1];
c) Wektor [2,3] jako kombinację liniową [1,5] i [1, –2].
Wyjaśnienie. Na rysunku 15 widzimy, że

$$[2,3] = \mathbf{1}\cdot[1,-1] + \mathbf{1}\cdot[1,4]$$

Zadanie 1.25. Przedstaw podane wektory w postaci kombinacji liniowej.
Narysuj d), f), g) , h), i) .

d) Wektor [–1,–5] jako kombinację liniową [2,3] i [–3,2];
e) Wektor [0,0] jako kombinację liniową [1,3] i [3,1];
f) Wektor [3,5] jako kombinację liniową [1,2] i [2,4];
g) Wektor [3,5] jako kombinację liniową [4,1] i [2,2];
h) Wektor [3,5] jako kombinację liniową [1,3] i [2,2];
i) Wektor [3,5] jako kombinację liniową [1,1] i [1, –1];
j) Wektor [3,5] jako kombinację liniową [1,0] i [0,1];
k) Wektor [745329, 647282] jako kombinację liniową **wektorów bazowych**
$\mathbf{e}_1 = [1,0]$ i $\mathbf{e}_2 = [0,1]$.

Zadanie 1.26. Wykaż, że na rysunku po lewej parabola „czerwona” nie jest kombinacją liniową „niebieskiej” i „zielonej”, a na prawym rysunku jest.



Rys. 16.

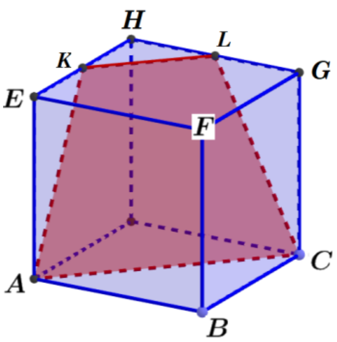
Zadanie 1.27. Czy funkcja $g(\mathrm{x}) = \sin x + \cos x$ jest kombinacją liniową funkcji $\mathrm{g}(x) = \sin x - 2\cos x$ i $\mathrm{h}(x) = 2\sin x + \cos x$?

Zadanie 1.28. Wyznacz współczynniki zależności funkcji $\mathrm{f}(x) = x^2 - 5x + 6$ od funkcji $\mathrm{g}(x) = x^2 + 5x$, $\mathrm{h}(x) = x^2 - 6$ i $\mathrm{k}(x) = x^2 - 5x - 6$.

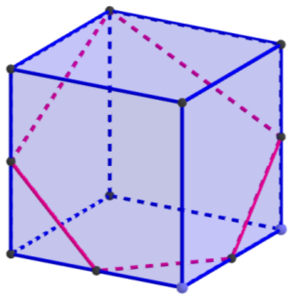
Zadanie 1.29. Wyznacz cosinusy kątów między bokami czworokąta (0,0), (2,3), (–2, 4), (–3,0) i między jego przekątnymi .

Zadanie 1.30. Znormalizuj wektory [1,1], [1,–1] , [2, 3], [3, –4] , [12, 5].

Zadanie 1.31. Krawędź widocznego sześcianu (rys. 17, rys. 18) ma długość 1. Stosując rachunek wektorowy, oblicz miary kątów i pole trapezu $ACLK$. To samo dla pięciokąta.



Rys. 17.



Rys. 18