W. KRYSICKI
J. BARTOS
W. DYCZKA
K. KRÓLIKOWSKA
M. WASILEWSKI

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

część II

STATYSTYKA MATEMATYCZNA

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Niniejszy dwuczęściowy podręcznik rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej przeznaczony jest przede wszystkim dla studentów uczelni technicznych; mogą z niego korzystać słuchacze innych kierunków studiów, jak również ci, którzy stosują metody probabilistyczne w swej pracy zawodowej. Poszczególne zagadnienia opracowane zostały teoretycznie z uwzględnieniem podstawowych definicji i twierdzeń, po czym podano szereg zadań rozwiązanych, o wzrastającym stopniu trudności oraz zadań do samodzielnego rozwiązywania wraz z odpowiedziami.

ISBN 83-01-11384-7

9 788301 113841

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

CZĘŚĆ II. Statystyka matematyczna

W. KRYSICKI, J. BARTOS, W. DYCZKA,
K. KRÓLIKOWSKA, M. WASILEWSKI

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

CZĘŚĆ II. Statystyka matematyczna

Wydanie VI

WARSZAWA 1999
WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Okładkę projektował: ANDRZEJ PILICH

Redaktor: ROMANA EHRENFEUCHT

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa
Tel.: 69 54 321, e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.com.pl

ISBN 83-01-11384-7

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie szóste
Arkuszy drukarskich 20,5
Druk ukończono w marcu 1999 r.
Drukarnia Wydawnictw Naukowych SA
Łódź, ul. Żwirki 2

1 ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

1.1. WSTĘP

Statystyka matematyczna zajmuje się opisywaniem i analizą zjawisk masowych przy użyciu metod rachunku prawdopodobieństwa.

Oznaczmy przez Z zbiór elementów podlegających badaniu ze względu na jedną albo więcej cech. Zbiór Z mający przynajmniej jedną właściwość (cechę) wspólną dla wszystkich jego elementów kwalifikującą je do tego zbioru oraz przynajmniej jedną właściwość, ze względu na którą elementy tego zbioru mogą się różnić między sobą, nazywamy *populacją* (*zbiorowością*) *generalną*. Elementami zbioru Z mogą być przedmioty albo wartości cechy.

Badać można wszystkie elementy zbioru Z albo tylko ich część. W pierwszym przypadku mówimy, że badanie jest *kompletne* (*całkowite*, *stuprocentowe*), w drugim, że jest *częściowe*. Badanie kompletne dostarcza pełnej informacji o badanej cesze populacji. Często jednak takie badanie jest niecelowe bądź też niewykonalne. Na przykład ma to miejsce w przypadku badań niszczących lub gdy zbiór Z zawiera nieskończenie wiele elementów. Również rezygnuje się z badania kompletnego, gdy jest ono bardzo kosztowne lub czasochłonne. Badaniami kompletnymi statystyka się nie zajmuje, głównym bowiem zadaniem statystyki jest wnioskowanie o właściwościach zbioru Z, na podstawie informacji o tych właściwościach elementów pewnego skończonego podzbioru Z_1 zbioru Z. Ten skończony podzbiór podlegający bezpośredniemu badaniu ze względu na interesujące nas właściwości populacji nazywamy *próbką*. Próbka powinna stanowić reprezentację populacji Z w tym sensie, że częstości występowania w próbce każdej z badanych cech nie powinny znacznie różnić się od częstości występowania tych cech w populacji generalnej. Aby to osiągnąć, elementy próbki zwykle losujemy spośród elementów zbioru Z. Otrzymany w ten sposób zbiór nazywamy *próbką losową*.

Próbka losowa prosta, n-elementowa, jest to próbka wylosowana z populacji w taki sposób, że przed jej pobraniem każdy podzbiór składający się z n elementów populacji generalnej ma takie same szanse (to samo prawdopodobieństwo) wylosowania.

W zależności od tego czy populacja jest zbiorem przedmiotów, czy zbiorem wartości, próbka jest podzbiorem przedmiotów albo podzbiorem wartości. W tym drugim przypadku elementy próbki nazywamy *wartościami próbki.*

W badaniu statystycznym może nas interesować jedna albo więcej cech populacji generalnej. Badaniu mogą podlegać zarówno cechy *mierzalne* – zwane też *ilościowymi* – (np. długość, wytrzymałość, ciężar) jak i *niemierzalne* – zwane też *jakościowymi* – (np. kolor, płeć, zawód). W przypadku cechy niemierzalnej zazwyczaj przypisuje się badanym elementom wartości liczbowe. Na przykład kolory można uporządkować według stopnia jasności nadając im tzw. *rangi* (p. 4.16), barwom można przypisać liczby wyrażające długości fal świetlnych itp. Po takim uporządkowaniu cechę niemierzalną można traktować dalej jako mierzalną.

Statystyka opisowa zajmuje się wstępnym opracowaniem próbki bez posługiwania się rachunkiem prawdopodobieństwa. Wstępnemu opracowaniu próbki przy badaniu ze względu na jedną cechę jest poświęcona dalsza część tego rozdziału.

1.2. SZEREG ROZDZIELCZY, HISTOGRAM, ŁAMANA CZĘSTOŚCI

Niech

$$x_1, \ldots, x_n \tag{1.2.1}$$

będzie n-elementową próbką.

Rozstępem badanej *cechy* X w próbce (1.2.1) nazywamy różnicę

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \tag{1.2.2}$$

gdzie $x_{\max}$ i $x_{\min}$ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą liczbę ciągu (1.2.1).

Rozstęp jest więc długością najkrótszego przedziału, w którym mieszczą się wszystkie wartości próbki.

Przy większej liczności próbki (od około 30 wzwyż), w celu ułatwienia analizy, wartości próbki grupuje się w *klasach*, tj. przedziałach, najczęściej jednakowej długości ([1]), przyjmując upraszczające założenie, że wszystkie wartości znajdujące się w danej klasie są identyczne ze środkiem klasy. Istnieje kilka reguł ustalania orientacyjnie liczby k klas w zależności od liczności n próbki. Oto one:

$$k \leqslant 5 \ln n, \qquad k = 1 + 3{,}322 \ln n, \qquad k = \sqrt{n}. \tag{1.2.3}$$

Można również korzystać z orientacyjnych danych zawartych w tablicy 1.1. Nawet przy dużo większej liczności próbki nie stosuje się większej liczby klas niż 30.

Jeżeli R jest rozstępem próbki, k zaś liczbą klas, to jako *długość klasy* przyjmuje się

$$b \approx \frac{R}{k},$$

([1]) Stosuje się również podział na klasy o różnych długościach (p. 3.3.C).

ale tak by $bk \geqslant R$, tzn. jeżeli bierze się przybliżoną wartość b, to musi to być przybliżenie z nadmiarem. Punkty stanowiące granice poszczególnych klas ustala się zwykle z dokładnością do $\frac{1}{2}\alpha$, gdzie α oznacza dokładność, z jaką wyznaczono wartości w próbce. Jeśli więc dla jednakowo dokładnych wartości próbki dane liczbowe są podawane jako całkowite wielokrotności największej liczby a (np. jeśli mamy 3,2, 4,7, 2,0,..., to są to całkowite wielokrotności liczby $a = 0{,}1$, a mianowicie $3{,}2 = 32 \cdot 0{,}1$, $4{,}7 = 47 \cdot 0{,}1$, $2{,}0 = 20 \cdot 0{,}1$ i nie istnieje liczba większa od 0,1 o żądanej własności, jeśli zaś wynikami są np. 3,5, 4,5, 6,0, 5,0,

Tablica 1.1

Liczba pomiarów n	Liczba klas k
30– 60	6– 8
60– 100	7–10
100– 200	9–12
200– 500	11–17
500–1500	16–25

to należy przyjąć $a = 0{,}5$), to jest pożądane przyjąć jako granice klas liczby postaci $la + \frac{1}{2}\alpha$, gdzie l są liczbami całkowitymi. Tak więc w przykładzie pierwszym jako lewą granicę pierwszej klasy należy przyjąć całkowitą wielokrotność liczby 0,1 zmniejszoną o 0,05. Jeżeli długość klasy obierzemy równą całkowitej wielokrotności liczby a, to granice wszystkich klas będą liczbami, których części ułamkowe będą się kończyły na 0,05. W przykładzie drugim jako lewą granicę pierwszej klasy należy przyjąć pewną całkowitą wielokrotność liczby $a = 0{,}5$ zmniejszoną o 0,25. Jeśli ponadto można przyjąć długość klasy równą nieparzystej wielokrotnści liczby a, to środki wszystkich klas będą całkowitymi wielokrotnościami liczby a. Zasada ta pozwala uniknąć kłopotów z zaliczaniem wartości próbki do poszczególnych klas.

Liczbę wartości próbki zawartych w i-tej klasie nazywamy *licznością* (*liczebnością*) *i-tej* klasy i oznaczamy symbolem n_i. Oczywiście $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

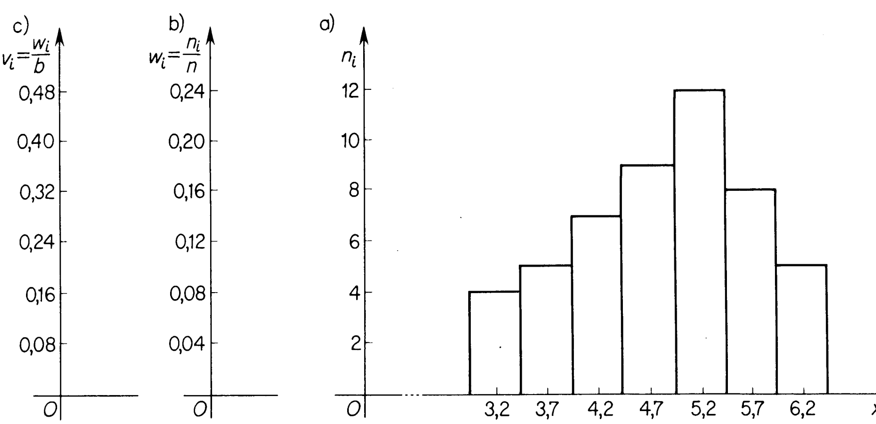
Jeżeli liczność n próbki $x_1, \ldots, x_n$ kwalifikuje ją do podziału na klasy, to dokonuje się grupowania, w wyniku czego otrzymuje się *szereg rozdzielczy*, który stanowią pary liczb: środki kolejnych klas $\bar{x}_i$ oraz ich liczności n_i, $i = 1, \ldots, k$.

Sposób, w jaki liczności n_i są rozłożone w poszczególnych klasach, nazywamy *rozkładem liczności badanej cechy przy danej liczbie k klas.*

Zadanie 1.1. Z populacji generalnej pobrano $n = 50$-elementową próbkę i przebadano ze względu na cechę X. Otrzymano wyniki: 3,6, 5,0, 4,0, 4,7, 5,2, 5,9, 4,5, 5,3, 5,5, 3,9, 5,6, 3,5, 5,4, 5,2, 4,1, 5,0, 3,1, 5,8, 4,8, 4,4, 4,6, 5,1, 4,7, 3,0, 5,5, 6,1, 3,8, 4,9, 5,6, 6,1, 5,9, 4,2, 6,4, 5,3, 4,5, 4,9, 4,0, 5,2, 3,3, 5,4, 4,7, 6,4, 5,1, 3,4, 5,2, 6,2, 4,4, 4,3, 5,8, 3,7. Sporządzić dla danej próbki szereg rozdzielczy.

Rozwiązanie. Z tablicy 1.1 odczytujemy orientacyjną liczbę klas przy liczności próbki $n = 50$. Przyjmujemy $k = 7$, znajdujemy $x_{\min} = 3{,}0$, $x_{\max} = 6{,}4$. Stąd $R = x_{\max} - x_{\min} = 3{,}4$, $R/k \approx 0{,}49$. Przyjmujemy długość klasy $b = 0{,}5$. Ponieważ tutaj dokładność $\alpha = 0{,}1$, więc jako dolną granicę pierwszej klasy przyjmujemy $x_{\min} - 0{,}05 = 2{,}95$. Grupowanie przeprowadza się zwykle metodą kreskową w tablicy:

Nr klasy i	Klasy	Grupowanie wartości próbki	Szereg rozdzielczy: Środki klas $\bar{x}_i$	Szereg rozdzielczy: Liczebności klas n_i
1	2,95–3,45	||||	3,2	4
2	3,45–3,95	|||||	3,7	5
3	3,95–4,45	||||| ||	4,2	7
4	4,45–4,95	||||| ||||	4,7	9
5	4,95–5,45	||||| ||||| ||	5,2	12
6	5,45–5,95	||||| |||	5,7	8
7	5,95–6,45	|||||	6,2	5



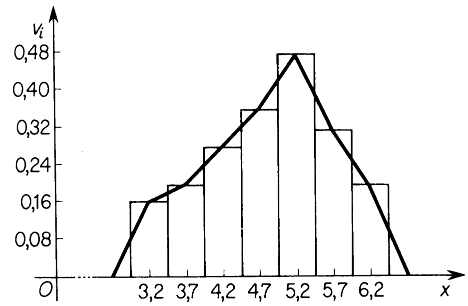
Rys. 1.1. Histogram szeregu rozdzielczego z zad. 1.1, z różnymi skalami na osi pionowej; w przypadku (c) pole histogramu jest równe 1

Otrzymany szereg można przedstawić graficznie w postaci tzw. *histogramu*. Na osi poziomej zaznacza się środki klas, albo też granice poszczególnych klas, a na osi pionowej liczności n_i (skala (a), rys. 1.1). Na osi pionowej można również odkładać inne wielkości. Zazwyczaj są to *częstości* (*frekwencje*) $w_i = n_i / n$, wyrażone zwykle w procentach (rys. 1.1.b), albo $v_i = w_i / b$ (rys. 1.1.c). W tym ostatnim przypadku pole histogramu równa się jedności:

$$\sum_{i=1}^{k} b v_i = \sum_{i=1}^{k} b \frac{w_i}{b} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i = 1.$$

Łącząc punkty o współrzędnych $(\bar{x}_1 - b, 0)$, $(\bar{x}_i, v_i)$ dla $i = 1, \ldots, k$, $(\bar{x}_k + b, 0)$ otrzymujemy tzw. *łamaną częstości* (rys. 1.2, albo łącznie z odcinkiem osi Ox: *wielobok częstości*). Jak łatwo zauważyć, w przypadku (c) pole wieloboku częstości również równa się jedności.

Rys. 1.2. Łamana częstości szeregu rozdzielczego z zad. 1.1; skala na osi pionowej jest tak dobrana, że pole wieloboku częstości równa się 1



1.3. ŚREDNIE KLASYCZNE

Średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę $\bar{x}$ określoną wzorem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.3.1}$$

Jeżeli w próbce wynik pomiaru x_i wystąpił n_i razy, $i = 1, \ldots, k$, gdzie $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, to średnią arytmetyczną oblicza się według równoważnego wzoru

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \tag{1:3.2}$$

Średnia ta bywa również nazywana *średnią arytmetyczną ważoną*. Liczności n_i pełnią tu rolę tzw. *wag*.

Średnią arytmetyczną ważoną można interpretować jako współrzędną środka masy układu punktów materialnych o masach n_i, umieszczonych na osi liczbowej w punktach o współrzędnych x_i, albo o dowolnych wprost proporcjonalnych do nich masach, np. n_i/n. Własnością charakterystyczną średniej arytmetycznej $\bar{x}$ liczb $x_1, \ldots, x_n$ jest, że suma wszystkich odchyleń $(x_i - \bar{x})$ jest równa zeru:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0. \tag{1.3.3}$$

Średnią geometryczną $\bar{g}$ dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}. \tag{1.3.4}$$

Jeśli wszystkie $x_i > 0$, to $\log \bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i$.

Przy analogicznych oznaczeniach jak w przypadku średniej arytmetycznej ważonej, *średnią geometryczną ważoną* obliczamy według wzoru

$$\bar{g} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}}, \qquad \text{gdzie} \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i. \tag{1.3.5}$$

Średnią harmoniczną $\overline{h}$, różnych od zera liczb $x_1, \ldots, x_n$, nazywamy odwrotność średniej arytmetycznej odwrotności tych liczb

$$\overline{h} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \neq 0. \tag{1.3.6}$$

Podobnie oblicza się *średnią harmoniczną ważoną*

$$\overline{h} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i} \right)^{-1}. \tag{1.3.7}$$

Średnią potęgową rzędu r dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_n$, którą oznaczamy $\overline{p}^{(r)}$, nazywamy

$$\overline{p}^{(r)} = \sqrt[r]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^r}. \tag{1.3.8}$$

Między średnimi $\overline{x}$, $\overline{g}$, $\overline{h}$, $\overline{p}^{(r)}$ dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_n$ zachodzą następujące związki:

$$\overline{p}^{(-1)} = \overline{h}, \quad \overline{p}^{(1)} = \overline{x}, \quad \lim_{r \to 0} \overline{p}^{(r)} = \overline{g} \tag{1.3.9}$$

oraz $\overline{h} \leqslant \overline{g} \leqslant \overline{x} \leqslant \overline{p}^{(2)} \leqslant \overline{p}^{(3)} \leqslant \ldots$, przy czym równości w ostatnim związku zachodzą jedynie wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_n$.

Średnie dla szeregu rozdzielczego oblicza się, stosując odpowiednie wzory na średnie ważone.

1.3.1. Zadania rozwiązane

Zadanie 1.2. Trzech robotników o różnych kwalifikacjach wykonuje tę samą pracę. W ciągu 8 h pracy pierwszy wykonuje 120 elementów, drugi – 80, a trzeci – 60. Wyrazić średni czas wykonania jednego elementu przez zespół, jako średnią czasów wykonania jednego elementu przez każdego z robotników, a następnie przeprowadzić obliczenia.

Rozwiązanie. Oznaczamy przez t_i, $i = 1, 2, 3$, czas (w minutach) wykonania jednego elementu przez i-tego robotnika:

$$t_1 = \frac{8 \cdot 60}{120} = 4 \text{ min}, \quad t_2 = \frac{8 \cdot 60}{80} = 6 \text{ min}, \quad t_3 = \frac{8 \cdot 60}{60} = 8 \text{ min},$$

przez $\overline{t}$ zaś – średni czas wykonania jednego elementu przez zespół. Wszystkich elementów wykonano

$$\frac{8 \cdot 60}{t_1} + \frac{8 \cdot 60}{t_2} + \frac{8 \cdot 60}{t_3}.$$

Tę samą liczbę otrzymamy zastępując w ostatniej sumie t_i, $i = 1, 2, 3$, przez $\overline{t}$, co daje następujące równanie:

$$\frac{3}{\overline{t}} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}.$$

Jak widać $\bar{t}$ jest średnią harmoniczną czasów t_i, $i=1, 2, 3$

$$\bar{t}=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]^{-1}=5\frac{7}{13}\ \text{min}.$$

Zadanie 1.3. Pojazd przebył drogę złożoną z trzech odcinków, każdy o długości s. Pierwszy odcinek ze stałą prędkością $v_1 = 50$ km/h, drugi ze stałą prędkością $v_2 = 60$ km/h i trzeci ze stałą prędkością $v_3 = 70$ km/h. Z jaką stałą średnią prędkością powinien poruszać się pojazd, aby całą drogę $3s$ przebyć w tym samym czasie?

Rozwiązanie. W zadaniu pada pytanie o prędkość średnią. Oznaczmy ją przez $\bar{v}$. Czas potrzebny na przebycie i-tego odcinka wynosi s/v_i, $i=1, 2, 3$, czas zaś potrzebny na przebycie całej drogi jest równy

$$\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}.$$

Tę samą sumę otrzymamy, zastępując w ostatniej sumie v_i, $i=1, 2, 3$, przez $\bar{v}$, co daje równanie

$$\frac{3s}{\bar{v}}=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}.$$

Średnia prędkość $\bar{v}$ jest więc średnią harmoniczną prędkości v_1, v_2, v_3. Obliczając, otrzymujemy $\bar{v}=\dfrac{6300}{107}\approx 58{,}88$ km/h.

Zadanie 1.4. Roczny wskaźnik wzrostu wydajności pracy, tj. stosunek wydajności w danym roku do wydajności w roku ubiegłym w pewnym przedsiębiorstwie w poszczególnych latach czteroletniego okresu, wynosił: 1,23, 1,15, 1,12, 1,07. Wyznaczyć średni roczny wskaźnik wzrostu wydajności pracy w tym okresie.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez w_i, $i=1,2,3,4$, zaobserwowane wartości omawianego wskaźnika, przez $\bar{w}$ zaś średni wskaźnik wzrostu wydajności pracy. Wskaźnik $\bar{w}$ powinien być tak dobrany, aby przy stałej jego wartości w całym czteroletnim okresie było

$$\bar{w}^4=w_1 w_2 w_3 w_4,$$

czyli

$$\bar{w}=\sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} w_i}.$$

Wskaźnik $\bar{w}$ jest równy średniej geometrycznej obserwowanych wskaźników w_i. Obliczając otrzymujemy $\bar{w}=1{,}141$.

Zadanie 1.5. Cztery naczynia w kształcie sześcianów o wymiarach krawędzi odpowiednio $a_1=1{,}5$ dm, $a_2=2{,}1$ dm, $a_3=3{,}3$ dm i $a_4=4{,}5$ dm należy zastąpić czterema jednakowymi naczyniami tego samego kształtu co poprzednio, tak by suma objętości naczyń w obu przypadkach była taka sama.

Rozwiązanie. Aby rozwiązać zadanie, należy odpowiedzieć na pytanie: jaka jest średnia długość krawędzi tych sześcianów? Oznaczmy ją przez $\bar{a}$. Z warunków zadania wynika, że w obu przypadkach suma objętości wszystkich sześcianów jest taka sama.

Mamy więc

$$4\bar{a}^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3.$$

Stąd

$$\bar{a} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i^3}.$$

Średnia długość krawędzi jest średnią potęgową $\bar{p}^{(3)}$ długości krawędzi danych sześcianów. Rozwiązując numerycznie otrzymujemy $\bar{a} \approx 3{,}27$ dm.

Zadanie 1.6. Mieszanka zawiera 50 kg składnika A w cenie 15 tys. zł za kilogram, 30 kg składnika B w cenie 20 tys. zł za kilogram i 20 kg składnika C w cenie 30 tys. zł za kilogram. Wyznaczyć cenę jednego kilograma mieszanki.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x_i, $i = 1, 2, 3$, ceny poszczególnych składników mieszanki, przez n_i zaś ich masy. Niech $\bar{x}$ oznacza poszukiwaną cenę jednego kilograma mieszanki. Wartość mieszanki obliczona za pomocą średniej ceny wynosi

$$n_1\bar{x} + n_2\bar{x} + n_3\bar{x} = x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3.$$

Stąd

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

Cena mieszanki jest więc średnią arytmetyczną ważoną cen poszczególnych składników, gdzie wagami są ilości n_i tych składników w mieszance. Obliczając otrzymujemy $\bar{x} = 19{,}5$ tys. zł za jeden kilogram.

Zadanie 1.7. Dobowe zużycie gazu w ciągu kolejnych dziesięciu dni w pewnym przedsiębiorstwie wynosiło w metrach sześciennych: 30, 43, 52, 35, 44, 41, 27, 33, 34, 51. Wyznaczyć średnie zużycie dobowe gazu w czasie tej dekady.

Rozwiązanie. Niech x_i, $i = 1, \ldots, n$, oznaczają stwierdzone zużycie dobowe w ciągu $n = 10$ dni, $\bar{x}$ zaś – zużycie średnie. Z warunków zadania mamy, że

$$n\bar{x} = x_1 + \ldots + x_n.$$

Stąd

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Wyznaczona średnia jest średnią arytmetyczną. Obliczając otrzymujemy $\bar{x} = 39$ m^3.

Zadanie 1.8. Wyznaczyć średnią arytmetyczną badanej cechy dla szeregu rozdzielczego z zadania 1.1.

Rozwiązanie. Aby rozwiązać zadanie, należy skorzystać ze wzoru (1.3.2) na średnią arytmetyczną ważoną. Jeśli $\bar{x}_i$, n_i, $i = 1, \ldots, k$, oznaczają odpowiednio środki i liczności klas, k – liczbę klas, $\bar{x}$ zaś – poszukiwaną średnią, to

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{3{,}2 \cdot 4 + 3{,}7 \cdot 5 + 4{,}2 \cdot 7 + 4{,}7 \cdot 9 + 5{,}2 \cdot 12 + 5{,}7 \cdot 8 + 6{,}2 \cdot 5}{4 + 5 + 7 + 9 + 12 + 8 + 5} = 4{,}84\,.$$

Obliczona w zadaniu 1.1 średnia arytmetyczna próbki wynosiła $\bar{x} = 4{,}844$.

Na marginesie tego zadania zwróćmy uwagę na pewne postępowanie, które upraszcza rachunki przy wyznaczaniu średniej dla szeregu rozdzielczego. Przekształcimy najpierw wzór (1.3.2). Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą, wówczas

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} [(\bar{x}_i - a) + a] n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - a) n_i + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i\,.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - a) n_i\,. \tag{1.3.10}$$

Istotne uproszczenie rachunków uzyskuje się wówczas, gdy jako a przyjmiemy środek środkowej klasy, gdy liczba ich jest nieparzysta, albo środek jednej z dwóch środkowych klas, gdy liczba ich jest parzysta. Rozwiążmy jeszcze raz zadanie 1.8, tym razem wykorzystując wzór (1.3.10). Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tablica 1.2.

Tablica 1.2

Nr klasy i	Środki klas $\bar{x}_i$	n_i	$\bar{x}_i - a$	$(\bar{x}_i - a) n_i$
1	3,2	4	$-1{,}5$	$-6{,}0$
2	3,7	5	$-1{,}0$	$-5{,}0$
3	4,2	7	$-0{,}5$	$-3{,}5$
4	$a = 4{,}7$	9	0	0
5	5,2	12	0,5	6,0
6	5,7	8	1,0	8,0
7	6,2	5	1,5	7,5
		$\Sigma n_i = 50$		$\Sigma (\bar{x}_i - a) n_i = 7$

Podstawiając do wzoru, otrzymujemy

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - a) n_i = 4{,}7 + \frac{7}{50} = 4{,}84\,,$$

dokładnie tyle ile w poprzednim rozwiązaniu.

Zadanie 1.9. Wykazać, że

$$\lim_{k \to 0} \sqrt[k]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

dla $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $L = \sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k}$. Wówczas $\ln L = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right]$. Prawa strona przy $k = 0$ staje się symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$, obliczamy więc iloraz pochodnych względem k, traktując k jako zmienną ciągłą, i otrzymujemy

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \ln x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k},$$

granicą tego ilorazu, gdy $k \to 0$, jest

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i},$$

a to dowodzi prawdziwości wzoru.

1.4. MEDIANA I MODA

Medianą lub *wartością środkową* – którą oznaczamy m_e – próbki $x_1, \ldots, x_n$, nazywamy środkową liczbę w uporządkowanej niemalejąco próbce

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)},$$

gdy n jest liczbą nieparzystą, albo średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb, gdy n jest liczbą parzystą, tzn.

$$m_e = \begin{cases} x_{(n+1)/2}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste}, \\ \frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}), & \text{gdy } n \text{ parzyste}. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Zadanie 1.10. Wyznaczyć medianę próbki z zadania 1.1.

Rozwiązanie. Porządkujemy próbkę niemalejąco, a następnie stosujemy wzór (1.4.1).

3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	4,3
4,4	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,7	4,7	4,8	4,9	$\underline{4,9}$	$\underline{5,0}$	5,0	5,1
5,1	5,2	5,2	5,2	5,2	5,3	5,3	5,4	5,4	5,5	5,5	5,6	5,6	5,7
5,8	5,9	5,9	6,1	6,1	6,2	6,4	6,4						

Ponieważ $n = 50$ jest liczbą parzystą, wyznaczymy $x_{(25)} = 4,9$ oraz $x_{(26)} = 5,0$. Stąd $m_e = 4,95$.

Wartością modalną (modą, dominantą) m_0 próbki $x_1, \ldots, x_n$ o powtarzających się wartościach nazywamy najczęściej powtarzającą się wartość, o ile istnieje, nie będącą $x_{\min}$ ani też $x_{\max}$.

Zadanie 1.11. Wyznaczyć wartości modalne podanych próbek:
Próbka I: 16, 13, 15, 17, 16, 16, 15, 14, 12, 17, 16, 18, 14, 15, 17, 16.
Próbka II: 27, 24, 28, 24, 25, 23, 29, 26, 29, 25.

R o z w i ą z a n i e. Ustalmy liczności poszczególnych wartości w każdej z próbek.

Próbka I

Wartość	Liczność
12	1
13	1
14	2
15	2
16	5
17	2
18	1

Próbka II

Wartość	Liczność
23	1
24	2
25	2
26	1
27	2
28	1
29	2

Próbka I ma wartość modalną $m_0 = 16$, natomiast próbka II wartości modalnej nie ma.

Sposób wyznaczania mediany dla szeregu rozdzielczego zilustruje następne zadanie.

Zadanie 1.12. Wyznaczyć medianę dla szeregu rozdzielczego.

Nr klasy i	Środek klasy $\bar{x}_i$	Liczność n_i
1	23	25
2	25	19
3	27	16
4	29	11
5	31	9
6	33	6
7	35	4
8	37	1

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ liczność próbki $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 91$ jest liczbą nieparzystą, więc mediana jest środkową wartością w uporządkowanej próbce $x_{(1)}, \ldots, x_{(91)}$, tzn. $m_e = x_{(46)}$. Mediana leży więc w trzeciej klasie, ponieważ $n_1 + n_2 = 44 < 46$, a $n_1 + n_2 + n_3 = 60 > 46$, a to oznacza, że $26 < m_e < 28$. Załóżmy, że wartości znajdujące się w trzeciej klasie rozłożone są w niej równomiernie. Ponieważ $46 - (n_1 + n_2) = 2$, a liczność przedziału zawierającego medianę jest równa 16, więc mediana jest większa od dolnej granicy trzeciej klasy, tj. od 26, o $(\frac{2}{16} - \frac{1}{32})$ długości klasy. Zatem

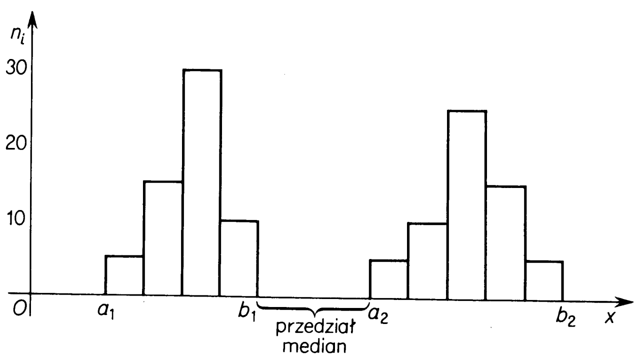
$$m_e = 26 + (\tfrac{2}{16} - \tfrac{1}{32}) \cdot 2 = 26{,}1875.$$

Ogólnie: medianę dla szeregu rozdzielczego wyznacza się według wzoru

$$m_e = x_l + \frac{b}{n_m}\left(\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} n_i\right), \tag{1.4.2}$$

gdzie x_l jest lewym końcem klasy zawierającej medianę, m — numerem klasy zawierającej medianę, n – licznością próbki, n_i – licznością i-tej klasy, b zaś – długością klasy.

Zdarzają się szeregi rozdzielcze, w których klasa pierwsza nie ma dolnego ograniczenia, tzn. zalicza się do niej wszystkie wartości próbki mniejsze od górnego ograniczenia tej klasy, w ostatniej zaś klasie brak górnego ograniczenia, tzn. zalicza się do niej wszystkie wartości próbki większe od dolnego ograniczenia tej klasy. Dla takiego szeregu rozdzielczego nie można obliczyć średniej arytmetycznej $\bar{x}$, natomiast można w pokazany wyżej sposób wyznaczyć medianę. Może się również zdarzyć przypadek szeregu rozdzielczego – jak na rys. 1.3 – charakteryzujący się tym, że badana cecha przyjmuje wartości z przedziałów (a_1, b_1) oraz (a_2, b_2) takich, że $a_2 - b_1 = rb$, $r = 1, 2, \ldots$, gdzie b jest długością klasy, a sumy liczności klas z przedziałów (a_1, b_1) i (a_2, b_2) są równe. Wówczas przedział (b_1, a_2) nazywamy *przedziałem median*, co oznacza, że każdą liczbę z tego przedziału można uważać za medianę, a więc, że mediana nie w każdym przypadku określona jest jednoznacznie. Pewne uzupełniające wiadomości znajdzie Czytelnik w cz. I, tabl. 2.1.



Rys. 1.3. Histogram szeregu rozdzielczego, w kórym każda liczba z przedziału $\langle b_1, a_2 \rangle$ jest medianą

Jak wyznaczać modę dla szeregu rozdzielczego w przypadku cechy ciągłej, objaśnimy najpierw na przykładzie.

ZADANIE 1.13. Wyznaczyć modę dla szeregu rozdzielczego zawierającego dane o wzroście (w cm) grupy 117 osób:

Nr klasy i	Środek klasy $\bar{x}_i$	Liczność n_i
1	150	2
2	155	7
3	160	15
4	165	21
5	170	32
6	175	18
7	180	11
8	185	7
9	190	3
10	195	1

R o z w i ą z a n i e. Klasą zawierającą wartość modalną jest klasa piąta, tzn. moda zawarta jest w przedziale $167{,}5 < m_0 < 172{,}5$. Gdyby liczności w sąsiednich klasach, tzn. czwartej i szóstej były jednakowe, wtedy za modę przyjęlibyśmy środek piątej klasy, czyli liczbę 170. W naszym przypadku liczności sąsiednich klas są różne i różnią się od liczności klasy piątej odpowiednio o 11 i o 14. Za wartość modalną przyjmujemy tę liczbę z klasy modalnej, która dzieli tę klasę w stosunku 11 : 14, a więc liczbę cm wzrostu równą

$$m_0 = 167{,}5 + \frac{11}{11+14} \cdot 5 = 167{,}5 + 2{,}2 = 169{,}7.$$

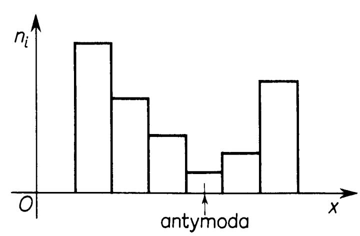
Podsumowując: *modą w szeregu rozdzielczym* nazywamy środek najliczniejszej klasy w przypadku, gdy liczności klas sąsiednich są identyczne, albo – w przypadku gdy liczności sąsiednich klas są różne – liczbę obliczoną ze wzoru

$$m_0 = x_l + \frac{n_1 - n_{l-1}}{(n_1 - n_{l-1}) + (n_l - n_{l+1})} b, \tag{1.4.3}$$

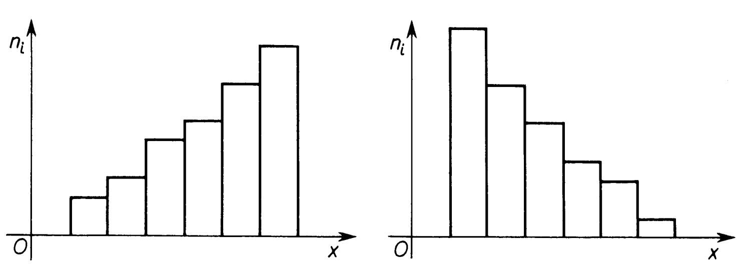
gdzie x_l jest dolną granicą, a n_l – licznością klasy modalnej, n_{l-1} i n_{l+1} zaś – licznościami sąsiednich klas, b – długością klasy.

Moda zależy od sposobu podziału na klasy.

Jeżeli w szeregu rozdzielczym najliczniejszymi są obie skrajne klasy (rys. 1.4), to szereg rozdzielczy nazywamy *antymodalnym typu U*, a środek najmniej licznej klasy *antymodą*.



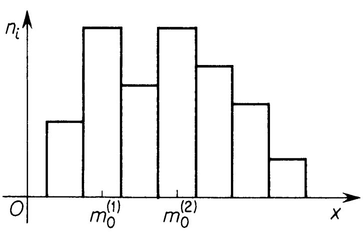
Rys. 1.4. Histogram szeregu rozdzielczego antymodalnego typu U



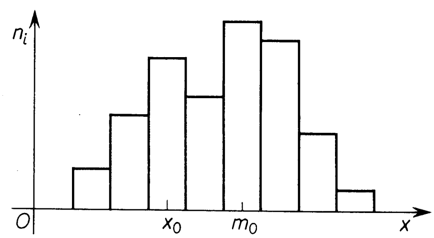
Rys. 1.5. Histogramy szeregów rozdzielczych antymodalnych typu J

Gdy najliczniejsza jest jedna ze skrajanych klas (rys. 1.5), wtedy szereg rozdzielczy nazywamy *antymodalnym typu J.*

Rysunki 1.6 i 1.7 przedstawiają jeszcze inne możliwości. Rysunek 1.6 przedstawia histogram szeregu rozdzielczego, w którym występują dwie jednakowo liczne i najliczniejsze klasy nie będące skrajnymi. W tym przypadku rozkład liczności n_i w tym szeregu rozdzielczym nazywamy *dwumodalnym*. Obie wartości modalne $m_0^{(1)}$ oraz $m_0^{(2)}$ zaznaczono na rysunku. Rysunek 1.7 przedstawia również histogram szeregu rozdzielczego, w którym występują dwie najliczniejsze klasy, które nie są jednakowo liczne i jednocześnie nie są klasami skrajnymi. Wówczas mówimy o rozkładzie *jednomodalnym* (moda m_0 zaznaczona na rys. 1.7), ale *dwuwierzchołkowym*. Tego rodzaju przypadki nie zachodzą zbyt często, okazało się przy tym, że zdarzają się one najczęściej wtedy, gdy badana zbiorowość, z której pobrano próbkę, nie jest jednorodna, powstała np. z połączenia dwóch zbiorowości. W jednej z nich najliczniejsze wartości cechy X zbliżone są do $m_0^{(1)}$, a w drugiej do $m_0^{(2)}$ dla przypadku z rys. 1.6 i odpowiednio do x_0 i do m_0 dla przypadku z rys. 1.7.



Rys. 1.6. Histogram szeregu rozdzielczego dwumodalnego



Rys. 1.7. Histogram szeregu rozdzielczego jednomodalnego, dwuwierzchołkowego

Jeżeli rozkład liczności badanej cechy w szeregu rozdzielczym jest jednomodalny i symetryczny, to średnia arytmetyczna $\bar{x}$, mediana m_e i moda m_0 albo antymoda w rozkładzie antymodalnym pokrywają się. W rozkładach asymetrycznych stosuje się często zależność wyznaczoną empirycznie

$$\bar{x} - m_0 \approx 3(\bar{x} - m_e). \tag{1.4.4}$$

Jeżeli w szeregu rozdzielczym lub w wykreślonym histogramie występują klasy puste, to świadczy to na ogół o tym, że liczba klas została wybrana zbyt duża, a tym samym długość klas jest zbyt mała. Zmniejszenie liczby klas zwykle likwiduje klasy puste. Nie dotyczy to oczywiście takiego – raczej rzadkiego w praktyce – przypadku, w którym badana cecha przyjmuje wartości z dwóch albo więcej przedziałów rozłącznych, jak np. na rys. 1.3.

Zadanie 1.14. Wyznaczyć medianę i modę dla szeregu rozdzielczego z zadania 1.1, a następnie porównać z wynikiem otrzymanym w zadaniu 1.8.

R o z w i ą z a n i e. Próbka zawiera $n = 50$ wartości. Zauważmy, że w rozpatrywanym szeregu rozdzielczym pierwsze 4 klasy zawierają 25 wartości i tyleż następne 3. Zatem za medianę dla szeregu rozdzielczego można przyjąć liczbę rozgraniczającą te klasy, czyli $m_e = 4{,}95$.

Klasą modalną jest klasa piąta o liczności $n_5 = 12$ i dolnej granicy 4,95, liczności sąsiednich klas wynoszą $n_4 = 9$ i $n_6 = 8$, długość klasy $b = 0{,}5$. Stosując wzór (1.4.3), otrzymujemy

$$m_0 = 4{,}95 + \frac{12-9}{(12-9)+(12-8)} \cdot 0{,}5 = 4{,}95 + 0{,}21 = 5{,}16.$$

Przekształcając wzór (1.4.4), otrzymujemy

$$\bar{x} = \frac{3m_e - m_0}{2} = \frac{3 \cdot 4{,}95 - 5{,}16}{2} = 4{,}845.$$

W zadaniu 1.8 obliczaliśmy średnią arytmetyczną tego szeregu rozdzielczego i otrzymaliśmy wynik $\bar{x} = 4{,}84$. Jak widać błąd nie jest zbyt duży, około 0,1%.

Wszystkie średnie klasyczne charakteryzują się tym, że każda z wartości $x_1, \ldots, x_n$ w próbce ma wpływ na obliczoną średnią, w odróżnieniu od średnich pozycyjnych, tj. mediany i mody, przy obliczaniu których decyduje pozycja określonej liczby (dla mediany jednej albo dwóch środkowych, dla mody – najczęstszej).

Zadanie 1.15. Dane są trzy próbki:

próbka I:	11,	19,	13,	9,	27,	30,	12,	8,	15,
próbka II:	15,	19,	6,	7,	13,	27,	10,	5,	30,
próbka III:	13,	6,	29,	7,	31,	12,	4,	14,	18.

Wyznaczyć medianę w każdej z próbek. Jakie zalety i wady mediany można tu zaobserwować?

Rozwiązanie. Każda z próbek zawiera 9 wartości. Zgodnie z określeniem, medianą jest wartość środkowa w uporządkowanej próbce. W naszym przypadku jest to piąta co do wielkości liczba. Porządkujemy próbki:

próbka I uporządkowana:	8,	9,	11,	12,	13,	15,	19,	27,	30,
próbka II uporządkowana:	5,	6,	7,	10,	13,	15,	19,	27,	30,
próbka III uporządkowana:	4,	6,	7,	10,	13,	14,	18,	29,	31.

Medianą w każdym z trzech przypadków jest $m_e = 13$. Zaletą mediany jest łatwość jej wyznaczania oraz fakt, że połowa liczb nie jest większa od m_e, a połowa liczb nie jest mniejsza od m_e. Tej własności nie ma żadna inna średnia. Zauważmy, że w drugiej próbce wszystkie wartości większe od m_e są identyczne jak w pierwszej, mniejsze zaś od m_e są inne, nie wywarło to jednak żadnego wpływu na medianę. Podobnie w próbce III. Zarówno liczby mniejsze jak i większe od m_e są inne niż w próbce I, a mediana jest taka sama. Ta nieczułość mediany na zmianę części wartości próbki jest jej wadą, w porównaniu z jakąkolwiek średnią klasyczną (p. 1.3), która reaguje na zmianę choćby jednej wartości próbki.

1.5. MIARY ROZPROSZENIA

Najprostszą miarą *rozproszenia* (*rozrzutu*, *rozsiania*) wartości próbki $x_1, \ldots, x_n$ jest zdefiniowany wcześniej (1.2.2) rozstęp R. Bezsprzecznym walorem tej charakterystyki jest łatwość jej wyznaczania. Nie informuje ona jednak jak w przedziale $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$ o długości R rozłożone są poszczególne wartości próbki. Czy np. mają tendencję do skupiania się w większym stopniu na jego krańcach, czy też np. w pobliżu jego środka. Rozstęp wykorzystuje bowiem informacje tylko z dwóch krańcowych wartości.

Wszystkie wartości próbki uwzględniają niżej podane charakterystyki: *wariancja* zwana również *dyspersją, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej, odchylenie przeciętne od mediany.*

Wariancją s^2 próbki $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń poszczególnych wartości x_i od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ próbki

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{1.5.1}$$

Stosuje się również wzory równoważne

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \quad \text{lub} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2, \tag{1.5.2}$$

przy dowolnym a.

Jeżeli w próbce wartość x_i występuje n_i razy, $i = 1, \ldots, k$, gdzie $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, to wzorem równoważnym wzorowi (1.5.1) jest

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i \tag{1.5.3}$$

oraz

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \bar{x}^2 \quad \text{lub} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - a)^2 n_i - (\bar{x} - a)^2, \tag{1.5.4}$$

gdzie a jest dowolną stałą

Jak wcześniej wspomniano, średnią arytmetyczną ważoną $\bar{x}$ można interpretować jako współrzędną środka masy układu k punktów materialnych o masach n_i umieszczonych na osi liczbowej w punktach o współrzędnych x_i. Widać więc, że wariancja s^2 określona wzorem (1.5.3) jest momentem bezwładności wspomnianego układu mas punktowych względem środka masy tego układu.

Mianem wariancji jest kwadrat miana badanej cechy. W wielu przypadkach wygodnie jest, aby mianowane charakterystyki badanej cechy miały miano identyczne z tą cechą. Dlatego też wprowadza się charakterystykę, którą jest pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywany *odchyleniem standardowym* (dawniej używano nazwy *odchylenie średnie*). Odchylenie standardowe próbki oznaczamy literą s.

Odchyleniem przeciętnym d_1 *od wartości średniej* $\bar{x}$ próbki $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną wartości bezwzględnych odchyleń poszczególnych wartości x_i od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ próbki:

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|. \tag{1.5.5}$$

Podobnie określa się odchylenie przeciętne od mediany.

Odchyleniem przeciętnym d_2 od mediany m_e próbki $x_1,\ldots,x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną wartości bezwzględnych odchyleń poszczególnych wartości x_i od mediany m_e próbki:

$$d_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - m_e|. \tag{1.5.6}$$

Odchylenie przeciętne od średniej i od mediany są przypadkami szczególnymi odchylenia przeciętnego wartości próbki od pewnej stałej a:

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|. \tag{1.5.7}$$

Można wykazać, że odchylenie przeciętne d danej próbki $x_1,\ldots,x_n$ osiąga minimum, gdy $a = m_e$.

Zadanie 1.16. Rozważmy parzystą liczbę $2k$ ($k \geqslant 2$) dowolnych liczb (a więc mogą to być wartości próbki) uporządkowanych niemalejąco

$$x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant x_{2k}$$

spełniających warunek, że dwie środkowe liczby są różne: $x_k \neq x_{k+1}$. Obierzmy dowolną liczbę a zawartą między nimi

$$x_k < a < x_{k+1}. \tag{1.5.8}$$

Wykazać, że odchylenie przeciętne tych $2k$ liczb obliczone od dowolnej liczby a spełniającej nierówności (1.5.8) nie zależy od wyboru tej liczby.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ pierwsze k liczb są mniejsze od a oraz następne k liczb są większe od a, więc

$$\sum_{i=1}^{2k} |x_i - a| = \sum_{i=1}^{k} |x_i - a| + \sum_{i=k+1}^{2k} |x_i - a| = \sum_{i=1}^{k} |a - x_i| + \sum_{i=k+1}^{2k} |x_i - a| =$$

$$= ak - \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{2k} x_i - ak = \sum_{i=k+1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Niech $x_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ oznacza uporządkowaną próbkę $x_1,\ldots,x_n$. Wartości w uporządkowanej próbce dzielimy na dwie grupy: do pierwszej zaliczamy wszystkie wartości mniejsze od mediany i medianę, do drugiej zaś medianę i wszystkie wartości większe od mediany. *Kwartylem dolnym Q_1* próbki $x_1,\ldots,x_n$ nazywamy medianę pierwszej grupy wartości, a *kwartylem górnym Q_3* – medianę drugiej grupy wartości.

Ostatnią z omawianych tu miar rozproszenia jest *odchylenie ćwiartkowe Q*, które określamy jako połowę różnicy między górnym i dolnym kwartylem

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}. \tag{1.5.9}$$

Odchylenie przeciętne i odchylenie ćwiartkowe są bardzo łatwe do obliczenia, mimo to najpoważniejsze znaczenie jako miara rozrzutu – zarówno praktyczne jak i teoretyczne – ma odchylenie standardowe. Jaką rolę spełnia odchylenie standardowe jako miara rozproszenia, wyjaśnia następujący przykład.

Punkt sprzedaży detalicznej chce zakupić w celach handlowych 10 000 kg pewnego produktu paczkowanego w jednokilogramowych opakowaniach. Dwóch producentów oferuje poszukiwany towar, przy czym w obu przypadkach masa 10 000 szt. opakowań tego produktu wynosi 10 000 kg. Oznacza to, że w każdej z partii średnia arytmetyczna masy jednego opakowania wynosi 1 kg. Przy bliższym badaniu okazało się jednak, że odchylenia standardowe mas w obu partiach są różne i wynoszą w pierwszej $s_1 = 0{,}011$ i w drugiej $s_2 = 0{,}032$. Stwierdzenie to może być podstawą do uznania przez kupującego pierwszej partii za „lepszą". Odchylenie masy pojedynczego opakowania od wartości średniej 1 kg w pierwszej partii jest przeciętnie mniejsze niż w drugiej. Dalsza sprzedaż zakupionej pierwszej partii towaru spowoduje mniejszą liczbę reklamacji niż zachodziłoby to w przypadku zakupienia drugiej partii.

Zadanie 1.17. Wyznaczyć wszystkie miary rozproszenia 25-elementowej próbki: 2,15, 2,31, 2,85, 2,29, 3,11, 2,62, 2,47, 2,97, 3,01, 2,52, 2,18, 2,73, 2,61, 2,41, 2,27, 2,54, 2,33, 2,81, 2,73, 2,19, 3,08, 2,75, 3,00, 2,43, 2,55.

R o z w i ą z a n i e. Stosując wzory (1.3.1) i (1.5.2), otrzymujemy kolejno

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}5964,$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = 0{,}0849,$$

stąd $s = 0{,}2913$.

Nim przystąpimy do wyznaczania dalszych charakterystyk uporządkujmy próbkę:

2,15, 2,18, 2,19, 2,27, 2,29, 2,31, 2,33, 2,41, 2,43, 2,47, 2,52, 2,54, 2,55, 2,61, 2,62, 2,73, 2,73, 2,75, 2,81, 2,85, 2,97, 3,00, 3,01, 3,08, 3,11.

Możemy teraz na podstawie wzoru (1.4.1) wyznaczyć medianę oraz dolny i górny kwartyl:

$$m_e = x_{(13)} = 2{,}55, \qquad Q_1 = x_{(7)} = 2{,}33, \qquad Q_3 = x_{(19)} = 2{,}81.$$

Ze wzoru (1.5.9) mamy

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{2{,}81 - 2{,}33}{2} = 0{,}24.$$

Aby wyznaczyć odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej $\bar{x}$, skorzystamy ze wzoru (1.5.5), zmieniając jego postać. Ponieważ $x_{(13)} < \bar{x} < x_{(14)}$, więc

$$d_1 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{25} [13\bar{x} - \sum_{i=1}^{13} x_i + \sum_{i=14}^{25} x_i - 12\bar{x}] =$$

$$= \frac{1}{25} (2{,}5964 - 30{,}64 + 34{,}27) = 0{,}2491.$$

Podobnie postępujemy przy obliczaniu odchylenia przeciętnego od mediany. Ponieważ $m_e = x_{(13)}$, więc mamy

$$d_2 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} |x_i - m_e| = \frac{1}{25}\left(-\sum_{i=1}^{13} x_i + \sum_{i=14}^{25} x_i\right) = \frac{1}{25}(-28{,}09 + 34{,}27) = 0{,}2472.$$

Poszukiwane miary rozproszenia są więc następujące: $s = 0{,}2913$, $d_1 = 0{,}2491$, $d_2 = 0{,}2472$, $Q = 0{,}24$.

Odchylenie przeciętne d_1 wynosi w przybliżeniu 0,8 odchylenia standardowego. W ostatnim zadaniu mamy $0{,}8s \approx 0{,}24 \approx d_1$. Dla rozkładu normalnego (cz. I, p. 2.8) $\frac{d_1}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}798$. Dla próbek o liczności $n \geqslant 3$ zachodzą nierówności

$$\frac{2}{n} \leqslant \frac{d_1}{s} \leqslant \begin{cases} \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste, } n \geqslant 3, \\ 1, & \text{gdy } n \text{ parzyste,} \end{cases}$$

przy czym znaki równości mogą być osiągnięte.

Jeżeli wartości próbki zgrupowane są w klasach o środkach $\bar{x}_i$ i licznościach n_i, $i = 1, \ldots, k$, to wprowadzone poprzednio miary rozproszenia wyrażają się wzorami:

wariancja:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i$$

lub

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^2 n_i - \bar{x}^2, \tag{1.5.10}$$

lub

$$s^2 = \frac{b^2}{n^2} \left[n \sum_{i=1}^{k} x_i'^2 n_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i' n_i\right)^2\right],$$

gdzie $x_i' = \dfrac{\bar{x}_i - a}{b}$, a jest środkiem środkowej klasy (lub jednej z dwóch środkowych klas, gdy liczba klas jest parzysta), b jest długością klasy;

odchylenie standardowe:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i}$$

lub (1.5.11)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^2 n_i - \bar{x}^2},$$

odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej:

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} |\bar{x}_i - \bar{x}| n_i, \tag{1.5.12}$$

odchylenie przeciętne od mediany:

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} |\bar{x}_i - m_e| n_i. \tag{1.5.13}$$

Odchylenie ćwiartkowe oblicza się jak poprzednio według wzoru (1.5.9).

Dla dowolnej liczby a mamy

$$\sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - a)^2 n_i = \sum_{i=1}^{k} [(\bar{x}_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^2 n_i = \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i + n(\bar{x} - a)^2,$$

czyli

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - a)^2 n_i = s^2 + (\bar{x} - a)^2. \tag{1.5.14}$$

Z powyższego wzoru wynika, że gdy $a \neq \bar{x}$, wtedy

$$s^2 < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - a)^2 n_i,$$

co oznacza, że suma kwadratów odchyleń od średniej $\bar{x}$ jest mniejsza niż suma kwadratów odchyleń od jakiejkolwiek innej liczby. Między innymi ta własność zadecydowała o przyjęciu wariancji jako jednej z miar rozproszenia wokół średniej arytmetycznej $\bar{x}$.

Jeżeli dla wartości $x_1, \ldots, x_n$ pewnej cechy ciągłej obliczymy np. wariancję, a następnie wartości te pogrupujemy i zbudujemy szereg rozdzielczy $\bar{x}_i$, n_i, $i = 1, \ldots, k$, i ponownie obliczymy wariancję, to w obu przypadkach otrzymamy na ogół różne wyniki. Gdy rozkład liczności badanej cechy ciągłej jest jednomodalny, liczności klas zaś maleją do zera w obu kierunkach, wtedy od wariancji obliczonej dla utworzonego szeregu rozdzielczego – w celu dokładniejszego jej obliczenia – odejmuje się pewną poprawkę uwzględniającą skutki grupowania w klasy. Poprawka ta – zwana *poprawką Shepparda* – równa się jednej dwunastej kwadratu długości klasy: $\frac{1}{12}b^2$. Wariancja s_*^2 uwzględniająca poprawkę wyraża się wzorem

$$s_*^2 = s^2 - \frac{1}{12} b^2, \tag{1.5.15}$$

gdzie s^2 jest wariancją dla szeregu rozdzielczego (bez poprawki), b zaś – długością klasy. Poprawkę Shepparda stosuje się w praktyce, gdy liczność próbki $n \geqslant 1000$, liczba zaś klas $k \geqslant 20$ [2]. Poprawki Shepparda nie stosuje się, gdy rozkład liczności badanej cechy jest antymodalny (typu U lub J) lub silnie asymetryczny ([1]).

([1]) O asymetrii rozkładu liczności i mierze tej asymetrii będzie mowa w następnym paragrafie.

Zadanie 1.18. Zmierzono długości 1736 włókien bawełny bułgarskiej i otrzymane wartości pogrupowano w klasy.

Nr klasy i	Środki klas $\bar{x}_i$	Liczności klas n_i	Nr klasy i	Środki klas $\bar{x}_i$	Liczności klas n_i
1	16,75	1	12	22,25	201
2	17,25	5	13	22,75	189
3	17,75	7	14	23,25	154
4	18,25	19	15	23,75	121
5	18,75	31	16	24,25	83
6	19,25	52	17	24,75	56
7	19,75	85	18	25,25	31
8	20,25	119	19	25,75	15
9	20,75	158	20	26,25	9
10	21,25	185	21	26,75	3
11	21,75	209	22	27,25	3

Wyznaczyć wariancję i odchylenie standardowe.

R o z w i ą z a n i e. Skorzystamy ze wzorów (1.3.10) i 1.5.10). Przyjmujemy $a = 21{,}75$ – jest to środek jedenastej klasy. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tablica 1.3.

T a b l i c a 1.3

Nr klasy i	Środki klas $\bar{x}_i$	Liczności klas n_i	$\bar{x}_i - a$	$x'_i = \frac{\bar{x}_i - a}{b}$	$x'_i n_i$	x'^2_i	$x'^2_i n_i$
1	16,75	1	−5,0	−10	−10	100	100
2	17,25	5	−4,5	−9	−45	81	405
3	17,75	7	−4,0	−8	−56	64	448
4	18,25	19	−3,5	−7	−133	49	931
5	18,75	31	−3,0	−6	−186	36	1116
6	19,25	52	−2,5	−5	−260	25	1300
7	19,75	85	−2,0	−4	−340	16	1360
8	20,25	119	−1,5	−3	−357	9	1071
9	20,75	158	−1,0	−2	−316	4	632
10	21,25	185	−0,5	−1	−185	1	185
11	$a = 21{,}75$	209	0,0	0	0	0	0
12	22,25	201	0,5	1	201	1	201
13	22,75	189	1,0	2	378	4	756
14	23,25	154	1,5	3	462	9	1386
15	23,75	121	2,0	4	484	16	1936
16	24,25	83	2,5	5	415	25	2075
17	24,75	56	3,0	6	336	36	2016
18	25,25	31	3,5	7	217	49	1519
19	25,75	15	4,0	8	120	64	960
20	26,25	9	4,5	9	81	81	729
21	26,75	3	5,0	10	30	100	300
22	27,25	3	5,5	11	33	121	363
					869		19789

$$\bar{x} = \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i' n_i + a = \frac{0{,}5 \cdot 869}{1736} + 21{,}75 = 22{,}0003,$$

$$s^2 = \frac{b^2}{n}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i'^2 n_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i' n_i\right)^2\right] = \frac{0{,}25}{1736}\cdot 19789 - \frac{869^2}{1736} = 2{,}7872.$$

Ponieważ liczność próbki $n = 1736$ przekracza tysiąc, a liczba klas $k = 22$ przekracza dwadzieścia, oraz pozostałe warunki stosowania poprawki Shepparda są spełnione, więc wprowadzamy tę poprawkę

$$\frac{b^2}{12} = \frac{0{,}5^2}{12} = 0{,}0417,$$

skąd

$$s_*^2 = s^2 - \tfrac{1}{12}b^2 = 2{,}7455$$

i odchylenie standardowe

$$s_* = \sqrt{s_*^2} = 1{,}6570.$$

Zdarza się, że z tej samej populacji pobiera się kilka próbek i dla każdej z nich wyznacza się podstawowe charakterystyki. Jeżeli mamy dane N_i, $\bar{x}_i$, s_i^2 dla $i = 1, \ldots, r$, gdzie N_i jest licznością, $\bar{x}_i$ – średnią arytmetyczną, a s_i^2 – wariancją i-tej próbki, to średnia arytmetyczna $\bar{x}$ i wariancja s^2 połączonych r próbek w jedną próbkę wyrażają się odpowiednio wzorami

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i N_i, \qquad N = \sum_{i=1}^{r} N_i, \tag{1.5.16}$$

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} s_i^2 N_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 N_i. \tag{1.5.17}$$

Pierwszy składnik wzoru (1.5.17), równy średniej arytmetycznej ważonej r wariancji poszczególnych próbek, nazywamy *wariancją wewnętrzną*, a drugi składnik, równy średniej ważonej kwadratów odchyleń poszczególnych średnich od ogólnej średniej, nazywamy *wariancją zewnętrzną*.

Zadanie 1.19. Obliczyć średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe połączonych pięciu próbek.

Nr próbki i	Liczność próbki N_i	Średnia arytm. próbki $\bar{x}_i$	Wariancja próbki s_i^2
1	15	3,3	1,25
2	20	3,7	1,10
3	30	3,6	1,15
4	15	3,9	1,05
5	20	3,5	1,20

Rozwiązanie. Najpierw za pomocą wzoru (1.5.16) obliczymy średnią arytmetyczną połączonych próbek, później według wzoru (1.5.17) wariancję. Wyniki obliczeń pomocniczych zawarte są w tablicy 1.4.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i N_i = 3{,}6,$$

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} s_i^2 N_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 N_i = \frac{115}{100} + \frac{3{,}10}{100} = 1{,}181,$$

skąd $s = 1{,}0867$.

Tablica 1.4

Nr próbki i	N_i	$\bar{x}_i$	s_i^2	$\bar{x}_i N_i$	$s_i^2 N_i$	$\bar{x}_i - \bar{x}$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 N_i$
1	15	3,3	1,25	49,5	18,75	−0,3	0,09	1,35
2	20	3,7	1,10	74,0	22,40	0,1	0,01	0,20
3	30	3,6	1,15	108,0	34,50	0,0	0	0
4	15	3,9	1,05	58,5	15,75	0,3	0,09	1,35
5	20	3,5	1,20	70,0	24,00	−0,1	0,01	0,20
	100			360,0	115,00			3,10

Zadanie 1.20. Na podstawie wzoru (1.5.17) wywnioskować, czy i kiedy wariancja całkowita może być równa: a) wariancji wewnętrznej s_w^2, b) wariancji zewnętrznej s_z^2.

Rozwiązanie. a) $s^2 = s_w^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie średnie arytmetyczne próbek $\bar{x}_i$ są równe, a więc równe średniej arytmetycznej $\bar{x}$;

b) $s^2 = s_z^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wariancje próbek $s_i^2 = 0$ dla $i = 1, \ldots, r$, tj. gdy w każdej próbce wszystkie wyniki są jednakowe.

1.6. MOMENTY I INNE CHARAKTERYSTYKI

Przy analizowaniu właściwości badanej cechy na podstawie próbki, prócz wymienionych dotychczas, używa się również innych charakterystyk. Do podstawowych należą tu tzw. momenty.

Momentem zwykłym m_l rzędu l próbki $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną l-tych potęg wartości x_i

$$m_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^l, \qquad l \in N. \tag{1.6.1}$$

Momentem centralnym M_l rzędu l próbki $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną l-tych potęg odchyleń wartości x_i od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ próbki:

$$M_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^l, \qquad l \in N. \tag{1.6.2}$$

Pierwszy moment centralny M_1 – zgodnie z własnością średniej arytmetycznej (1.3.3) – jest dla każdej próbki równy zeru. Jeżeli we wzorze (1.6.1) weźmiemy wartość bezwzględną wartości $|x_i|$, a we wzorze (1.6.2) wartość bezwzględną różnicy $|x_i - \bar{x}|$, to otrzymamy charakterystyki zwane *momentami absolutnymi* (*bezwzględnymi*).

Moment absolutny zwykły rzędu l próbki $x_1, \ldots, x_n$ wyraża się wzorem

$$a_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^l, \tag{1.6.3}$$

moment zaś *absolutny centralny* b_l *rzędu l* tejże próbki – wzorem

$$b_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^l. \tag{1.6.4}$$

Jak łatwo zauważyć, pierwszy moment zwykły jest średnią arytmetyczną, drugi moment centralny – wariancją, pierwszy zaś absolutny moment centralny jest odchyleniem przeciętnym od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ próbki.

Jeżeli wartości próbki pogrupowane są w k klasach o środkach $\bar{x}_i$ i licznościach n_i, $i = 1, \ldots, k$, to momenty wyrażają się wzorami:

moment zwykły rzędu l (grupowy):

$$m_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^l n_i, \tag{1.6.5}$$

moment centralny rzędu l (grupowy):

$$M_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^l n_i, \tag{1.6.6}$$

absolutny moment zwykły rzędu l (grupowy):

$$a_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} |\bar{x}_i|^l n_i, \tag{1.6.7}$$

absolutny moment centralny rzędu l (grupowy):

$$b_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} |\bar{x}_i - \bar{x}|^l n_i. \tag{1.6.8}$$

O potrzebie wprowadzenia innych charakterystyk niż średnia arytmetyczna i wariancja poucza następujące zadanie.

Zadanie 1.21. Wyznaczyć średnią arytmetyczną oraz pierwsze cztery momenty centralne dla czterech szeregów rozdzielczych.

Środki klas $\bar{x}_i$	Liczności n_i			
	szereg I	szereg II	szereg III	szereg IV
1	0	2	0	2
2	6	2	2	4
3	12	10	20	10
4	14	22	12	12
5	12	10	10	20
6	6	2	4	2
7	0	2	2	0

Tablica 1.5

Środki klas $\bar{x}_i$	Liczności n_i				$\bar{x}_i - \bar{x}$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^3$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^4$
	szer. I	szer. II	szer. III	szer. IV				
1	0	2	0	2	−3	9	−27	81
2	6	2	2	4	−2	4	−8	16
3	12	10	20	10	−1	1	−1	1
4	14	22	12	12	0	0	0	0
5	12	10	10	20	1	1	1	1
6	6	2	4	2	2	4	8	16
7	0	2	2	0	3	9	27	81
Σ	50	50	50	50	0	28	0	196

Rozwiązanie. Wyniki obliczeń pomocniczych zawarte są w tablicy 1.5.

$$\bar{x}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i = \frac{1}{50}(12 + 36 + 56 + 60 + 36) = 4,$$

$$\bar{x}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i = \frac{1}{50}(2 + 4 + 30 + 88 + 50 + 12 + 14) = 4,$$

$$\bar{x}_{\mathrm{III}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i = \frac{1}{50}(4 + 60 + 48 + 50 + 24 + 14) = 4,$$

$$\bar{x}_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i = \frac{1}{50}(2 + 8 + 30 + 48 + 100 + 12) = 4.$$

Dla każdego z szeregów pierwszy moment centralny $M_1 = 0$. Jest to ogólna prawidłowość ((1.3.3)). Drugi moment centralny M_2 jest wariancją s^2. Korzystając z pomocniczych obliczeń zawartych w tablicy 1.5 oraz ze wzoru

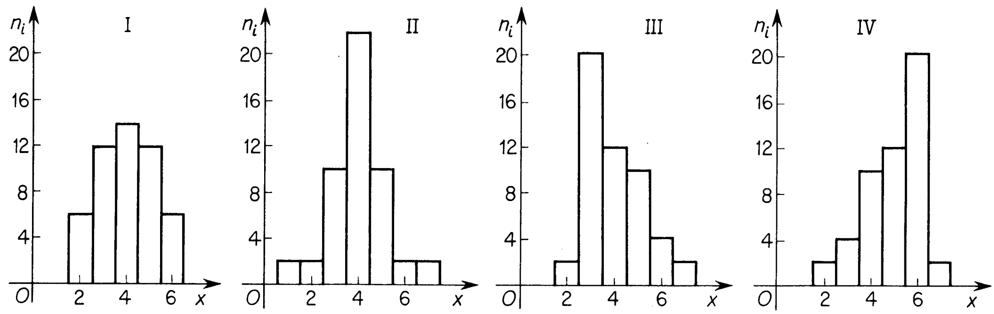
$$M_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^l n_i$$

dla $l = 2, 3, 4$, otrzymujemy:

szereg rozdz. I: $\bar{x} = 4$, $s^2 = 1{,}44$, $M_3 = 0$, $M_4 = 4{,}32$,
szereg rozdz. II: $\bar{x} = 4$, $s^2 = 1{,}44$, $M_3 = 0$, $M_4 = 8{,}16$,
szereg rozdz. III: $\bar{x} = 4$, $s^2 = 1{,}44$, $M_3 = 1{,}2$, $M_4 = 5{,}76$,
szereg rozdz. IV: $\bar{x} = 4$, $s^2 = 1{,}44$, $M_3 = -1{,}2$, $M_4 = 5{,}76$.

Mimo różnych rozkładów liczności badanej cechy w rozpatrywanych szeregach rozdzielczych – o czym przekonują nas histogramy tych szeregów (rys. 1.8) – średnia arytmetyczna i wariancja dla każdego z nich jest taka sama.

Rozkłady liczności badanej cechy w pierwszych dwóch szeregach rozdzielczych są symetryczne, lecz o różnych skupieniach, pozostałe dwa są niesymetryczne, przy czym asymetria w każdym z nich jest inna. Ponieważ dla rozkładów symetrycznych wszystkie momenty centralne rzędów nieparzystych są równe zeru, trzeci moment centralny wykorzy-



Rys. 1.8. Histogramy szeregów rozdzielczych I–IV z zadania 1.21

stano do skonstruowania *współczynnika asymetrii* (*skośności*)

$$g_1 = \frac{M_3}{s^3}, \tag{1.6.9}$$

gdzie s jest odchyleniem standardowym. Podobnie czwarty moment centralny posłużył do zbudowania *współczynnika koncentracji* (*skupienia*):

$$K = \frac{M_4}{s^4}. \tag{1.6.10}$$

Współczynnik ten bywa również nazywany *kurtozą.*

Jak łatwo zauważyć, zarówno współczynnik asymetrii jak i współczynnik koncentracji są wielkościami niemianowanymi. Dzięki temu możliwe jest porównywanie rozkładów liczności dwóch albo więcej cech o różnych mianach ze względu na asymetrię i skupienie.

Istnieje jeszcze jeden współczynnik wykorzystujący czwarty moment centralny, jest to tzw. *eksces* (*współczynnik spłaszczenia*)

$$g_2 = K - 3 = \frac{M_4}{s^4} - 3. \tag{1.6.11}$$

Więcej informacji na temat tego współczynnika znajdzie Czytelnik w cz. I, p. 2.8.

Wróćmy jeszcze do zadania 1.21 i wyznaczmy dla omawianych tam szeregów rozdzielczych współczynniki asymetrii g_1 i koncentracji K. Łącznie z poprzednimi wynikami mamy

szereg rozdz. I:	$\bar{x} = 4$,	$s = 1{,}2$,	$g_1^{I} = 0$,	$K \approx 2{,}08$,
szereg rozdz. II:	$\bar{x} = 4$,	$s = 1{,}2$,	$g_1^{II} = 0$,	$K \approx 3{,}94$,
szereg rozdz. III:	$\bar{x} = 4$,	$s = 1{,}2$,	$g_1^{III} = 0{,}69$,	$K \approx 2{,}78$,
szereg rozdz. IV:	$\bar{x} = 4$,	$s = 1{,}2$,	$g_1^{IV} = -0{,}69$,	$K \approx 2{,}78$.

Skonfrontujmy jeszcze otrzymane wyniki z rysunkiem 1.8. Rozkłady liczności w szeregach rozdzielczych I i II są symetryczne, więc ich współczynniki asymetrii są równe zeru. Asymetrię rozkładu III nazywamy dodatnią, a rozkładu IV – ujemną. Zrozumiałe jest również, dlaczego wartości bezwzględne współczynnika g_1 w szeregach III i IV są identyczne.

Skupienie w szeregu rozdzielczym II wokół średniej arytmetycznej jest większe niż w szeregu rozdzielczym I. Natomiast w szeregach rozdzielczych III i IV skupienia są identyczne, co było do przewidzenia.

Wprowadzone współczynniki g_1 i K obok $\bar{x}$ i s pozwalają pełniej różnicować rozkłady liczności badanej cechy.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na dwa współczynniki: *zmienności* v i *nierównomierności* H, określone wzorami

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%, \tag{1.6.12}$$

$$H = \frac{d_1}{\bar{x}} \cdot 100\%, \tag{1.6.13}$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną, s – odchyleniem standardowym, d_1 zaś – odchyleniem przeciętnym od średniej arytmetycznej $\bar{x}$.

Zadanie 1.22. Dane są dwie sześcioelementowe próbki:

próbka I:	80,	40,	40,	80,	40,	80,
próbka II:	40,	80,	120,	80,	120,	40.

Obliczyć i porównać współczynniki zmienności i współczynniki nierównomierności obu próbek.

Rozwiązanie. Dla pierwszej próbki mamy

$$\bar{x}_{\text{I}} = 60, \qquad s_{\text{I}} = \sqrt{\tfrac{1}{6} \cdot 6 \cdot 20^2} = 20, \qquad d'_1 = \tfrac{1}{6} \cdot 6 \cdot 20 = 20.$$

Dla drugiej próbki:

$$\bar{x}_{\text{II}} = 80, \qquad s_{\text{II}} = \sqrt{\tfrac{1}{6} \cdot 4 \cdot 40^2}, \qquad d''_1 = \tfrac{1}{6} \cdot 4 \cdot 40 = \tfrac{80}{3}.$$

Współczynniki zmienności:

$$v_{\text{I}} = \frac{s_{\text{I}}}{\bar{x}_{\text{I}}} \cdot 100\% = \frac{20}{60} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%,$$

$$v_{\text{II}} = \frac{s_{\text{II}}}{\bar{x}_{\text{II}}} \cdot 100\% = \frac{32{,}66}{80} \cdot 100\% = 40{,}83\%.$$

Współczynniki nierównomierności:

$$H_{\text{I}} = \frac{d'_1}{\bar{x}_{\text{I}}} \cdot 100\% = \frac{20}{60} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%,$$

$$H_{\text{II}} = \frac{d''_1}{\bar{x}_{\text{II}}} \cdot 100\% = \frac{80}{3 \cdot 80} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%.$$

Wartości drugiej próbki są bardziej rozproszone. Wskazuje na to porównanie odchyleń standardowych albo odchyleń przeciętnych. Mamy bowiem $s_{\text{II}} > s_{\text{I}}$, a także $d''_1 > d'_1$. Na większe rozproszenie wartości w drugiej próbce zareagował współczynnik zmienności zwiększając się prawie o 7,5% ($40{,}83 - 33\frac{1}{3} \approx 7{,}5$), natomiast wartość współczynnika nierównomierności nie uległa zmianie.

Jeżeli w trakcie ciągłego procesu technologicznego, co pewien czas – w celu kontroli – pobieramy próbki do badania, nie wskazane jest posługiwanie się jako charakterystyką współczynnikiem nierównomierności. Zwiększenie rozrzutu w kolejnych próbkach może nie zmieniać istotnie współczynnika nierównomierności i zjawisko to, mogące świadczyć o pewnym rozregulowaniu się procesu technologicznego, może pozostać niezauważone.

1.7. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1.23. Na produkcję przedsiębiorstwa wytwarzającego pewne odkuwki składa się produkcja pięciu jego oddziałów. Każdy z tych oddziałów wyprodukował taką samą liczbę odkuwek, jednak koszt jednostkowy produkcji w każdym z tych oddziałów jest inny i odpowiednio wynosi 17, 18, 17,5, 18,5, 17,5 tys. zł. Jaki jest średni koszt jednostkowy odkuwki w tym przedsiębiorstwie?

1.24. Stan zatrudnienia w pewnym przedsiębiorstwie na dzień 31 grudnia kształtował się następująco:

w roku 1960 – 1270 osób
w roku 1961 – 1321 osób
w roku 1962 – 1400 osób
w roku 1963 – 1526 osób
w roku 1964 – 1587 osób
w roku 1965 – 1666 osób.

Wyznaczyć wskaźniki wzrostu zatrudnienia w ciągu roku v_i, $i = 1, \ldots, 5$, dla lat 1961–1965, a następnie wyznaczyć średni wskaźnik v wzrostu zatrudnienia dla tego okresu.

U w a g a . Wskaźnik wzrostu zatrudnienia w ciągu roku jest równy stosunkowi liczby pracowników na dzień 31 grudnia danego roku do liczby pracowników na dzień 31 grudnia poprzedniego roku.

1.25. Pięć kul o promieniach $r_1 = 1{,}2$ cm, $r_2 = 1{,}4$ cm, $r_3 = 1{,}7$ cm, $r_4 = 2{,}1$ cm, $r_5 = 2{,}7$ cm zastąpić pięcioma jednakowymi kulami o promieniu r w ten sposób, by suma objętości wszystkich kul w obu przypadkach była taka sama. Wyrazić r w zależności od r_i, $i = 1, \ldots, 5$, a następnie obliczyć r.

1.26. Chromonikielina Glowray jest stopem oporowym zawierającym 65% niklu o gęstości $\mu_1 = 8{,}90$ g/cm^3, 20% żelaza o gęstości $\mu_2 = 7{,}87$ g/cm^3 i 15% chromu o gęstości $\mu_3 = 7{,}2$ g/cm^3. Wyrazić gęstość μ chromonikieliny jako pewną średnią gęstości μ_1, μ_2, μ_3, a następnie obliczyć wartość μ.

1.27. Dziesięć kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 220$ μF, $C_2 = C_3 = 50$ μF, $C_4 = C_5 = C_6 = 70$ μF, $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 150$ μF połączonych szeregowo należy zastąpić dziesięcioma kondensatorami o jednakowych pojemnościach C tak, by całkowita pojemność układu kondensatorów pozostała nie zmieniona. Wyznaczyć pojemność C jako pewną średnią pojemności C_i, $i = 1, \ldots, 10$, a następnie obliczyć wartość C.

1.28. W ciągu pierwszej godziny pojazd poruszał się ze stałą prędkością $v_1 = 50$ km/h, w ciągu dwóch następnych ze stałą prędkością $v_2 = 60$ km/h, w ciągu zaś kolejnych trzech ze stałą prędkością $v_3 = 70$ km/h. Z jaką stałą prędkością winien poruszać się pojazd wzdłuż całej drogi, aby przebyć ją w tym samym czasie? Jaka to średnia? Czy należy tu użyć średniej harmonicznej jak w zadaniu 1.3?

1.29. Pięć równolegle połączonych oporników o oporach $R_1 = R_2 = 3{,}3$ kΩ, $R_3 = 1{,}7$ kΩ, $R_4 = R_5 = 2{,}2$ kΩ należy zastąpić pięcioma opornikami o jednakowych oporach R tak, by całkowity opór układu oporników pozostał nie zmieniony. Wyrazić R jako pewną średnią oporów R_i, i $= 1, \ldots, 5$, a następnie obliczyć R.

1.30. Trzech robotników o różnych kwalifikacjach wykonuje tę samą pracę polegającą na wykonaniu przez każdego z nich 80 spawów. Pierwszy robotnik swoją normę wykonuje w ciągu 5 h i 20 min, drugi – w ciągu 8 h, a trzeci w czasie 10 h i 40 min. Wyrazić średni czas potrzebny na wykonanie jednego spawu przez jednego robotnika w tym zespole, w zależności od czasów wykonania jednego spawu przez każdego z robotników. Jaka to średnia? Obliczyć jej wartość. Czy należy użyć tu średniej harmonicznej jak w zadaniu 1.2?

1.31 Trzy oddziały kombinatu produkują te same urządzenia. Wartość miesięcznej produkcji w każdym z tych oddziałów jest taka sama, jednak cena jednostkowa urządzenia wyprodukowanego przez każdy z tych oddziałów jest inna i odpowiednio wynosi 256,5 mln zł, 225 mln zł i 240,6 mln zł. Jaka jest średnia cena jednego urządzenia wyprodukowanego przez ten kombinat?

1.32. Jeżeli dla próbki określone są jednoznacznie mediana, wartość modalna oraz średnia arytmetyczna i są one równe $m_e = m_0 = \bar{x}$, to czy z tej równości wynika symetria próbki względem wspólnej wartości tych trzech parametrów?

1.33. Zużycie papieru (w kg) w Polsce w latach 1960-1971 na jednego mieszkańca wynosiło ([1]): 2,2, 2,2, 2,1, 2,3, 2,3, 2,3, 2,3, 2,4, 2,4, 2,5, 2,4, 2,5, 2,5. Przyjmując upraszczające założenie, że liczba mieszkańców w Polsce w tym okresie była stała, obliczyć średnie zużycie papieru na jednego mieszkańca w tym okresie, odchylenie standardowe, modę, medianę, odchylenie ćwiartkowe oraz współczynnik zmienności.

1.34. Liczba koni (w mln szt.) w Polsce w kolejnych latach od 1947 do 1974 wynosiła ([1]): 2,0, 2,3, 2,7, 2,8, 2,9, 2,7, 2,7, 2,6, 2,6, 2,5, 2,6, 2,7, 2,8, 2,8, 2,7, 2,7, 2,6, 2,6, 2,6, 2,6, 2,6, 2,7, 2,6, 2,6, 2,5, 2,4, 2,4, 2,3. Obliczyć: średnią liczbę koni w tym okresie, medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od mediany, odchylenie ćwiartkowe, współczynnik zmienności oraz współczynnik asymetrii.

1.35. Na podstawie danych z poprzedniego zadania zbudować szereg rozdzielczy, przyjmując długość klasy $b = 0{,}19$, oraz jako początek pierwszej klasy liczbę 1,98. Dla otrzymanego szeregu rozdzielczego narysować histogram, a następnie obliczyć: średnią arytmetyczną, medianę, modę, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności oraz współczynnik asymetrii.

([1]) Rocznik statystyczny 1975 r.

1.36. Średnia temperatura w kolejnych miesiącach roku 1974 w Warszawie na Okęciu była następująca ([1]): – 1,2, 2,1, 4,6, 7,3, 11,3, 14,7, 15,8, 18,1, 13,4, 6,6, 3,4, 2,3. Obliczyć średnią temperaturę, medianę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej i od mediany, oraz współczynnik zmienności, nierównomierności, asymetrii i skupienia. Przy obliczeniach przyjąć, że wszystkie miesiące są tej samej długości.

1.37. Wykonano 40 pomiarów liczby skrętów przędzy na odcinkach o długościach 500 mm i otrzymano następujące wyniki: 405, 420, 411, 427, 479, 440, 378, 468, 437, 452, 421, 414, 402, 422, 462, 428, 431, 414, 437, 405, 390, 425, 425, 400, 432, 447, 385, 419, 400, 425, 458, 439, 360, 405, 369, 406, 431, 412, 387, 416. Zbudować szereg rozdzielczy przyjmując liczbę klas $k = 8$. Narysować histogram i łamaną częstości, tak dobierając skalę na osi pionowej, aby pole histogramu było równe 1. Obliczyć średnią arytmetyczną, medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej oraz współczynnik: zmienności, nierównomierności, asymetrii, skupienia i eksces.

1.38. Z partii bawełny pobrano próbkę złożoną z 64 włókien, a następnie zmierzono długości tych włókien (w mm). Otrzymano następujące wyniki: 23, 8, 15, 35, 21, 20, 10, 4, 28, 12, 9, 7, 24, 25, 31, 26, 23, 17, 13, 33, 29, 27, 24, 22, 32, 16, 9, 29, 22, 20, 8, 16, 21, 25, 31, 29, 23, 15, 32, 22, 23, 19, 24, 15, 21, 20, 29, 27, 23, 19, 16, 18, 24, 31, 28, 21, 8, 17, 24, 13, 12, 18, 23, 25. Zbudować szereg rozdzielczy, przyjmując liczbę klas $k = 8$, a jako początek pierwszej klasy liczbę 3,5. Narysować histogram i łamaną częstości, tak dobierając skalę na osi pionowej, aby pole histogramu było równe 1. Dla szeregu rozdzielczego obliczyć: średnią arytmetyczną, medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej oraz współczynniki: zmienności, nierównomierności, asymetrii, skupienia i eksces.

1.39 W pewnym punkcie sieci elektrycznej mierzono co godzinę istniejące napięcie w woltach. Otrzymano w ten sposób 25 następujących wyników: 225, 223, 224, 220, 221, 218, 215, 219, 220, 221, 222, 220, 222, 220, 219, 223, 224, 217, 218, 219, 216, 210, 218, 221, 225. Obliczyć średnie napięcie, medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej i od mediany oraz współczynniki: asymetrii, skupienia, zmienności i nierównomierności.

1.40. Z partii przędzy zgrzebnej wybrano 20 odcinków przędzy o długości 25 m każdy i wyznaczono ich masy w gramach: 1,60, 1,47, 1,16, 1,78, 1,31, 1,70, 1,25, 1,65, 1,69, 1,92, 1,75, 1,43, 1,33, 1,84, 1,36, 1,52, 1,55, 1,62, 1,57, 1,50. Obliczyć średnią masę jednego odcinka przędzy, wyznaczyć medianę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej i od mediany, odchylenie ćwiartkowe, oraz współczynniki: zmienności, nierównomierności, asymetrii, skupienia i eksces.

1.41. Wkładka topikowa bezpiecznika o natężeniu znamionowym 20 A winna – zgodnie z normą – wytrzymać bez przepalania się natężenie 28 A w ciągu 1 godziny. W celu sprawdzenia zgodności z normą, z partii wkładek topikowych tego typu pobrano losowo 40 sztuk i zanotowano czas przepalenia się wkładki przy natężeniu prądu 28 A. Otrzymano następujące wyniki w minutach: 51, 58, 64, 69, 61, 56, 41, 48, 56, 61, 75, 55, 46, 57, 70, 55, 47, 62, 55, 60, 54, 57, 65, 60, 53, 54, 49, 58, 62, 59, 53, 50, 58, 63, 64, 59, 52, 51, 65, 60.

([1]) Rocznik statystyczny 1975 r.

Dla przedstawionej próbki zbudować szereg rozdzielczy, przyjmując liczbę klas $k = 7$, oraz narysować histogram i łamaną częstości. Wyznaczyć dla szeregu rozdzielczego średnią arytmetyczną, medianę i modę, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej oraz współczynniki: zmienności, nierówności, asymetrii, skupienia i eksces.

1.42. Tablica 1.6 przedstawia procentową zawartość skrobi w każdym z 80 ziemniaków wylosowanych z partii ziemniaków.

Tablica 1.6

Zawartość procentowa skrobi	Liczba ziemniaków
9–11	1
11–13	2
13–15	7
15–17	20
17–19	30
19–21	16
21–23	3
23–25	1

Obliczyć średnią arytmetyczną dla przedstawionego szeregu rozdzielczego, jego medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej, oraz współczynniki: zmienności, nierównomierności, asymetrii, skupienia i eksces.

1.43. Tablica 1.7 przedstawia wyniki pomiarów siły zrywającej dla 125 odcinków przędzy wylosowanych z partii przędzy.

Tablica 1.7

Siła zrywająca w cN	Liczność
179,5–188,5	2
188,5–197,5	4
197,5–206,5	14
206,5–215,5	28
215,5–224,5	30
224,5–233,5	27
233,5–242,5	13
242,5–251,5	5
251,5–260,5	2

Obliczyć średnią arytmetyczną siły zrywającej, medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne od średniej arytmetycznej oraz współczynniki: zmienności, nierównomierności, asymetrii, skupienia i eksces.

1.44. Każda z pięciu hodowli owiec zespołu hodowlanego dostarczyła dane dotyczące swojej hodowli (tablica 1.8). Obliczyć średnią arytmetyczną i wariancję rocznej ilości wełny od 1 owcy w całym zespole hodowlanym.

Tablica 1.8

Liczba owiec w stadzie	Przeciętna roczna ilość wełny od 1 owcy w stadzie w kg	Wariancja rocznej ilości wełny od 1 owcy w stadzie
80	3,2	0,04
60	2,8	0,03
100	2,6	0,03
80	2,9	0,02
120	3,0	0,01

1.45. Z partii suchych kokonów jedwabnika pobrano niezależnie 3 próbki i wyznaczono masę każdego kokonu w gramach. Wyznaczyć średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe masy suchego kokonu jedwabnika w połączonych trzech próbkach na podstawie danych zawartych w tablicy 1.9.

Tablica 1.9

Nr próbki	Liczność próbki	Średnia masa suchego kokonu w próbce w g	Wariancja masy suchego kokonu w próbce
1	80	0,65	0,023
2	70	0,75	0,014
3	100	0,70	0,017

Odpowiedzi

1.23. Średni koszt w warunkach zadania jest średnią arytmetyczną kosztów poszczególnych oddziałów i wynosi 17,7 tys. zł.

1.24. Wskaźniki wzrostu zatrudnienia w zaokrągleniu wynoszą: w r. 1961 – 1,04, w r. 1962 – 1,06, w r. 1963 – 1,09, w r. 1964 – 1,04, w r. 1965 – 1,05. Średni wskaźnik wzrostu zatrudnienia jest średnią geometryczną wskaźników z lat 1961–1965 i wynosi 1,06.

1.25. $r = \sqrt[3]{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} r_i^3} \cong 1{,}97$ cm.

1.26. $\mu = 8{,}38$ g/cm^3. Jest to średnia harmoniczna ważona gęstości μ_i, gdzie wagami są udziały poszczególnych składników w stopie.

1.27. $C = 87{,}67$ μF. Jest to średnia harmoniczna pojemności C_i.

1.28. Średnia arytmetyczna ważona $v = 63\frac{1}{3}$ km/h.

1.29. Średnia harmoniczna ważona $R = 2{,}38$ kΩ.

1.30. Średnia arytmetyczna $t = 6$ min.

1.31. Średnia harmoniczna 240 mln zł.

1.32. Nie, np. dla liczb 3, 5, 7, 8, 8, 8, 17 zachodzi równość $m_e = m_0 = \bar{x}$, a symetrii nie ma.

1.33. $\bar{x} = 2{,}3385$, $s = 0{,}1211$, $m_0 = 2{,}3$, $m_e = 2{,}3$, $Q = 0{,}05$, $v = 5{,}18\%$.

1.34. $\bar{x}=2{,}59$, $m_e=2{,}6$, $m_0=2{,}6$, $s=0{,}1811$, $d_2=0{,}1214$, $Q=0{,}05$, $v=6{,}99\%$, $g_1=-1{,}26$.

1.35. $\bar{x}=2{,}60$, $m_e=2{,}50$, $m_0=2{,}64$, $s=0{,}1634$, $v=6{,}28\%$, $g_1=-1{,}28$.

Szereg rozdzielczy

$\bar{x}_i$	2,075	2,265	2,455	2,645	2,835
n_i	1	1	5	17	4

1.36. $\bar{x}=8{,}2$, $m_e=6{,}95$, $s=6{,}017$, $d_1=5{,}38$, $d_2=5{,}23$, $v=73{,}38\%$, $H=65{,}61\%$, $g_1=0{,}1642$, $K=1{,}695$.

1.37. Szereg rozdzielczy

$\bar{x}_i$	367	382	397	412	427	442	457	472
n_i	2	3	5	9	11	5	3	2

$\bar{x}=419{,}875$, $m_e=421{,}55$, $m_0=421{,}38$, $s=25{,}32$, $d_1=20{,}23$, $v=6{,}03\%$, $H=4{,}82\%$, $g_1=-0{,}043$, $K=2{,}73$, $g_2=-0{,}27$.

1.38. Szereg rozdzielczy

$\bar{x}_i$	5,5	9,5	13,5	17,5	21,5	25,5	29,5	33,5
n_i	2	6	7	9	16	11	9	4

$\bar{x}=21$, $m_e=21{,}625$, $m_0=21{,}83$, $s=7{,}16$, $d_1=5{,}75$, $v=34{,}09\%$, $H=27{,}38\%$, $g_1=-0{,}2371$, $K=2{,}338$, $g_2=-0{,}662$.

1.39. $\bar{x}=m_e=m_0=220$, $s=3{,}32$, $d_1=d_2=2{,}48$, $g_1=-0{,}8636$, $K=0{,}0349$, $v=1{,}51\%$, $H=1{,}13\%$.

1.40. $\bar{x}=1{,}55$, $m_e=1{,}56$, $s=0{,}1978$, $d_1=0{,}162$, $d_2=0{,}162$, $Q=0{,}13$, $v=12{,}76\%$, $H=10{,}45\%$, $g_1=-0{,}1114$, $K=2{,}278$, $g_2=-0{,}772$.

1.41. Szereg rozdzielczy

$\bar{x}_i$	43	48	53	58	63	68	73
n_i	1	5	10	12	9	2	1

$\bar{x}=57{,}125$, $m_e=57{,}375$, $m_0=57{,}5$, $s=6{,}31$, $d_1=1{,}52$, $v=11{,}05\%$, $H=2{,}66\%$, $g_1=0{,}108$, $K=2{,}83$, $g_2=-0{,}17$.

1.42. $\bar{x}=17{,}525$, $m_e=17{,}7$, $m_0=17{,}83$, $s=2{,}39$, $d_1=1{,}84$, $v=13{,}65\%$, $H=10{,}52\%$, $g_1=-0{,}3239$, $K=3{,}75$, $g_2=-0{,}75$.

1.43. $\bar{x}=220$, $m_e=220$, $m_0=219{,}1$, $s=14{,}13$, $d_1=10{,}94$, $v=6{,}42\%$, $H=4{,}97\%$, $g_1=-0{,}0372$, $K=2{,}9516$, $g_2=-0{,}0484$.

1.44. $\bar{x}=2{,}9$, $s^2=0{,}065$.

1.45. $\bar{x}=0{,}698$, $s^2=0{,}0196$, $s=0{,}14$.

2 BADANIA STATYSTYCZNE ZE WZGLĘDU NA JEDNĄ CECHĘ. ZAGADNIENIA ESTYMACJI

2.1. POJĘCIA WSTĘPNE

Statystyka matematyczna jest działem probabilistyki ściśle związanym z rachunkiem prawdopodobieństwa. Punkt widzenia statystyki jest jednakże inny. W rachunku prawdopodobieństwa mówiąc o zmiennej losowej zakłada się, że jej rozkład jest znany i, wykorzystując ten fakt, wyznacza się prawdopodobieństwa różnych zdarzeń.

W statystyce natomiast nie zakłada się pełnej znajomości rozkładu zmiennej losowej, interpretowanej w praktycznych zastosowaniach jako cecha statystyczna elementów badanej zbiorowości (populacji generalnej). Punktem wyjścia badania statystycznego jest wylosowanie (czasem wybór albo przeprowadzenie doświadczeń) z całej populacji pewnej skończonej liczby n elementów i zbadanie ich ze względu na zmienną losową (cechę) X. Uzyskane w ten sposób wartości $x_1, \ldots, x_n$ badanej cechy X są zaobserwowanymi wartościami n-elementowej próby.

W statystyce opisowej (R.1) ograniczyliśmy się do opisu uzyskanych wyników próby bez wyciągania wniosków o całej populacji.

W statystyce matematycznej natomiast, na podstawie wyników badania próbnego, będziemy się starali wyciągnąć wnioski dotyczące badanej cechy w całej populacji.

Do najważniejszych form wnioskowania statystycznego należą: estymacja (ocena) nieznanych parametrów bądź ich funkcji, które charakteryzują rozkład badanej cechy populacji oraz weryfikacja (badanie prawdziwości) postawionych hipotez statystycznych.

Wnioskowanie statystyczne jako oparte na częściowej informacji dostarcza jedynie wniosków wiarygodnych – a nie absolutnie prawdziwych. Dowolne dwie n-elementowe próbki z tej samej populacji są na ogół różne. Wygodnie jest zatem traktować ciąg liczbowy $x_1, \ldots, x_n$ jako realizację ciągu $X_1, \ldots, X_n$, gdzie X_i, $i = 1, \ldots, n$, jest zmienną losową, której zbiorem możliwych wartości są wartości i-tego spośród n wylosowanych elementów. Ciąg tych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ będziemy nazywali n-elementową próbą losową, natomiast jeśli zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i każda z nich ma rozkład taki, jak rozkład badanej cechy populacji, to próbę nazywamy *próbą prostą*. Ciąg liczb $x_1, \ldots, x_n$ będziemy nazywali *zaobserwowaną próbą losową* bądź po prostu *próbką*.

2.2. ESTYMACJA PUNKTOWA

2.2.1. Zasady estymacji punktowej i klasyfikacja estymatorów. W przypadku gdy rozkład badanej cechy mierzalnej nie jest znany, zachodzi często potrzeba oszacowania pewnych parametrów (bądź ich funkcji) tego rozkładu.

Niech rozkład badanej cechy X populacji zależy od nieznanego parametru θ. Parametr ten będziemy szacowali na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$ pobranej z tej populacji.

Funkcję $g(X_1, \ldots, X_n)$ będącą funkcją próby losowej $X_1, \ldots, X_n$ nazywamy *statystyką*. Statystyka – jako funkcja zmiennych losowych (dokładniej: funkcja borelowska) – jest także zmienną losową, mającą pewien własny rozkład zależny od postaci funkcji g i od rozkładu zmiennych $X_1, \ldots, X_n$. Każdą statystykę $\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$, której wartości przyjmujemy jako oceny nieznanego parametru θ nazywamy *estymatorem parametru* θ. Otrzymaną na podstawie jednej konkretnej realizacji próby (próbki) wartość estymatora nazywamy *oceną* (*oszacowaniem*) tego *parametru*. Dla danego parametru θ można utworzyć wiele estymatorów $\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ (zad. 2.25), ale dla uzyskania estymatora o możliwie „optymalnych" własnościach jest pożądane, żeby miał on z góry narzucone pewne własności. Zrozumiałe jest, że wymagamy, aby ze wzrostem liczności próbki wzrastała dokładność oszacowania parametru θ. Wymaganie to prowadzi do spełnienia dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ warunku

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \tag{2.2.1}$$

oznaczającego zbieżność w sensie prawdopodobieństwa (zbieżność stochastyczną) estymatora $\hat{\theta}_n$ do wartości θ. Estymator $\hat{\theta}_n$ spełniający warunek (2.2.1) nazywamy *estymatorem zgodnym* parametru θ.

Dla danego parametru θ można utworzyć nieskończenie wiele estymatorów zgodnych. Na przykład estymatorem zgodnym nieznanej wartości przeciętnej $\theta = EX < +\infty$ dowolnego rozkładu – jak to wynika z prawa wielkich liczb Chinczina – jest statystyka

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i.$$

Estymatorami zgodnymi parametru θ są także estymatory

$$\hat{\theta}_n = \alpha_n \bar{X},$$

jeśli tylko $\alpha_n \to 1$ przy $n \to \infty$.

Inną ważną własnością estymatora jest jego nieobciążoność. Estymator $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem nieobciążonym* parametru θ, jeśli dla każdego n mamy

$$E(\hat{\theta}_n) = \theta. \tag{2.2.2}$$

Jeśli natomiast istnieje $E(\hat{\theta}_n)$, lecz $E(\hat{\theta}_n) \neq \theta$, to $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem obciążonym* parametru θ, a różnicę

$$B_n(\theta) = E(\hat{\theta}_n) - \theta \tag{2.2.3}$$

– *obciążeniem estymatora*.

W przypadku gdy

$$\lim_{n\to\infty} B_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) - \theta = 0, \tag{2.2.4}$$

estymator $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem asymptotycznie nieobciążonym* parametru θ.

Zadanie 2.1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą pobraną z populacji, w której cecha X ma skończoną i różną od zera wariancję σ^2. Zbadać czy wariancja empiryczna

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \text{gdzie} \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i, \tag{2.2.5}$$

jest estymatorem nieobciążonym nieznanej wariancji σ^2.

Rozwiązanie. Przekształcając wzór (2.2.5), otrzymujemy

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n [(X_i - \mu) + (\mu - \bar{X})]^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X} - \mu)^2,$$

gdzie $\mu = EX$.

Ponieważ X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co badana cecha X populacji, więc mamy $E(X_i - \mu)^2 = E(X - EX)^2 = \sigma^2$ dla $i = 1, \ldots, n$, a na podstawie własności wariancji

$$E(\bar{X} - \mu)^2 = D^2\bar{X} = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D^2 \sum_1^n X_i = \frac{1}{n^2}\sum_1^n D^2X = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Zatem

$$E(S^2) = \frac{1}{n}\cdot n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2.$$

Rozpatrywany estymator jest więc obciążony o obciążeniu $B_n(\sigma^2) = -\frac{1}{n}\sigma^2$, a ponieważ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sigma^2 = 0$, więc estymator ten jest asymptotycznie nieobciążony.

Mnożąc ten estymator przez $\frac{n}{n-1}$ otrzymamy estymator S^{*2}:

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2, \tag{2.2.6}$$

który jest już nieobciążonym estymatorem σ^2, ponieważ

$$E(S^{*2}) = E\left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = \frac{n}{n-1} E(S^2) = \sigma^2.$$

Estymatory S^2 (2.2.5) i S^{*2} (2.2.6) są także estymatorami zgodnymi nieznanej wariancji σ^2. Zadanie 2.1 wyjaśnia więc, że estymator zgodny może być nieobciążony (np. S^{*2} jest zarówno zgodnym jak i nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2), jak i może być zgodny i obciążony (np. S^2). Może również istnieć estymator nieobciążony, który nie jest zgodny (zad. 2.27).

Dla danego parametru θ może istnieć więcej niż jeden estymator nieobciążony (zad. 2.23). Jeżeli zatem $\hat{\theta}_n^*$ i $\hat{\theta}_n^{**}$ są dwoma estymatorami nieobciążonymi parametru θ mającymi wariancje $D^2(\hat{\theta}_n^*)$ i $D^2(\hat{\theta}_n^{**})$ spełniające warunek

$$D^2(\hat{\theta}_n^*) < D^2(\hat{\theta}_n^{**})$$

(co oznacza, że skupienie wartości estymatora $\hat{\theta}_n^*$ wokół θ jest większe niż skupienie wartości $\hat{\theta}_n^{**}$), to mówimy, że $\hat{\theta}_n^*$ jest *estymatorem efektywniejszym* parametru θ niż estymator $\hat{\theta}_n^{**}$.

Estymator nieobciążony $\hat{\theta}_n$ parametru θ, który ma najmniejszą wariancję spośród wszystkich nieobciążonych estymatorów danego parametru θ wyznaczonych z prób n-elementowych, nazywamy *estymatorem efektywnym* (*najefektywniejszym* [5], [11]).

W przypadku estymowania jednego parametru, przy dość ogólnych założeniach ([11)] (które spełnione są dla wszystkich rozkładów zawartych w tablicy 27 z wyjątkiem rozkładu równomiernego), wariancja dowolnego nieobciążonego estymatora spełnia następującą nierówność zwaną *nierównością Rao-Cramera*

$$D^2\hat{\theta}_n \geqslant \frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2}, \tag{2.2.7}$$

gdzie f oznacza gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X w przypadku zmiennej typu ciągłego albo funkcję prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej typu skokowego. Jeżeli więc dla wariancji jakiegoś nieobciążonego estymatora $\hat{\theta}_n$ parametru θ we wzorze (2.2.7) zachodzi równość, wtedy estymator ten jest estymatorem efektywnym. Wyrażenie występujące w mianowniku prawej strony nierówności (2.2.7) nosi nazwę *informacji Fishera* zawartej w próbce, a nierówność Rao-Cramera bywa także nazywana *nierównością informacyjną*.

W przypadku gdy gęstość f ma punkty nieciągłości zależne od estymowanego parametru, wtedy nierówność informacyjna może nie być spełniona i wówczas może istnieć estymator nieobciążony, który ma mniejszą wariancję niż prawa strona nierówności (2.2.7) (zad. 2.24).

Oznaczmy przez $\tilde{\theta}_n$ estymator efektywny parametru θ (gdy on istnieje), a $\hat{\theta}_n$ niech będzie innym estymatorem nieobciążonym tego parametru. Miarą efektywności estymatora $\hat{\theta}_n$ jest liczba

$$\mathrm{ef}\,\hat{\theta}_n = \frac{D^2\tilde{\theta}_n}{D^2\hat{\theta}_n} \tag{2.2.8}$$

zwana *efektywnością estymatora* $\hat{\theta}_n$. Oczywiście zachodzi nierówność

$$0 < \mathrm{ef}\,\hat{\theta}_n \leqslant 1,$$

przy czym równość oznacza, że $\hat{\theta}_n$ jest estymatorem efektywnym. Asymptotyczną miarą efektywności estymatora jest granica (o ile istnieje)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ef}\,\hat{\theta}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{D^2\tilde{\theta}_n}{D^2\hat{\theta}_n}, \tag{2.2.9}$$

którą nazywamy *asymptotyczną efektywnością estymatora* $\hat{\theta}_n$. W przypadku gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ef}\,\hat{\theta}_n = 1$, wtedy $\hat{\theta}_n$ nazywamy *estymatorem asymptotycznie efektywnym* parametru θ.

ZADANIE 2.2. Wykorzystując nierówność Rao-Cramera, wyznaczyć nieobciążony estymator parametru θ o minimalnej wariancji na podstawie n-elementowej próby prostej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład $N(\theta, \sigma)$ o znanym σ.

Rozwiązanie. Ponieważ gęstością rozkładu badanej cechy populacji jest funkcja

$$f(x, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right],$$

więc

$$\ln f(x, \theta, \sigma) = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2},$$

$$\frac{\partial \ln f(x, \theta, \sigma)}{\partial\theta} = \frac{x-\theta}{\sigma^2},$$

$$D^2\hat{\theta}_n \geqslant \frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X, \theta, \sigma)\right]^2} = \frac{1}{nE\left(\frac{X-\theta}{\sigma^2}\right)^2} = 1 : \frac{n\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Tak więc minimalna wariancja estymatora nieobciążonego wartości przeciętnej $\theta = EX$ rozkładu $N(\theta, \sigma)$ wyznaczona z nierówności Rao-Cramera jest równa σ^2/n. Jeśli więc istnieje estymator nieobciążony parametru θ o wariancji równej σ^2/n, to estymator ten jest efektywny. Otóż mamy

$$D^2\bar{X} = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_1^n D^2 X_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Wykazaliśmy więc, że średnia arytmetyczna $\bar{X}$ jest estymatorem efektywnym nieznanej wartości przeciętnej θ rozkładu $N(\theta, \sigma)$ przy znanej wariancji σ^2.

ZADANIE 2.3. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$, gdzie μ jest znane, a σ nieznane. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie n-elementową próbą prostą pobraną z tej populacji. Dobrać tak liczbę k, aby zmienna losowa

$$V = k\sum_1^n |X_i - \mu|$$

była estymatorem nieobciążonym parametru σ oraz znaleźć efektywność tego estymatora.

Rozwiązanie. Aby zmienna losowa V była estymatorem nieobciążonym σ, musi zachodzić warunek $E(V) = \sigma$. Obliczmy zatem

$$EV = E\left[k\sum_1^n |X_i - \mu|\right] = k\sum_1^n E|X_i - \mu| = kn\,E|X_i - \mu| =$$

$$= \frac{kn}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$= \frac{2kn}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu}^{+\infty} (x-\mu) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Wykonując podstawienie $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = z$, otrzymujemy

$$EV = \frac{kn}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z/2}\, dz = \frac{2kn\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Z równości $EV = \sigma$ otrzymujemy $k = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Wariancja estymatora V jest natomiast równa

$$D^2 V = \frac{1}{n^2}\frac{\pi}{2} D^2 \sum_1^n |X_i - \mu| = \frac{\pi}{2n^2} n D^2 |X_i - \mu| =$$

$$= \frac{\pi}{2n}[E(X_i-\mu)^2 - E^2|X_i-\mu|].$$

Ponieważ $E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2$ oraz z poprzednich obliczeń mamy

$$E|X_i - \mu| = E\left(\frac{V}{nk}\right) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

więc

$$D^2 V = \frac{\pi}{2n}\left(\sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{\pi}\right) = \frac{1}{2n}(\pi - 2)\sigma^2.$$

Z nierówności Rao-Cramera znajdujemy następnie minimalną wariancję nieobciążonych estymatorów U parametru σ

$$D^2 U \geqslant 1 : n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\right]^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 3\sigma^4,$$

jako moment centralny rzędu czwartego rozkładu normalnego, więc po obliczeniu otrzymujemy

$$D^2 U \geqslant \frac{\sigma^2}{2n}.$$

Zatem efektywność estymatora V jest równa

$$\operatorname{ef} V = \frac{\sigma^2}{2n} : \frac{\pi - 2}{2n} \sigma^2 \approx 0{,}876.$$

2.2.2. Metody wyznaczania estymatorów.

A. Metoda największej wiarogodności. Niech rozkład badanej cechy X zależy od k nieznanych parametrów $\theta_1, \ldots, \theta_k$ $(k \in \mathbf{N})$, które chcemy oszacować na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$. Oznaczmy przez L tzw. *funkcję wiarogodności* daną wzorem

$$L = f(x_1; \theta_1, \ldots, \theta_k) \ldots f(x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k), \tag{2.2.10}$$

gdzie $f(x; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ w przypadku cechy typu ciągłego oznacza gęstość prawdopodobieństwa, w przypadku zaś cechy typu skokowego – funkcję rozkładu prawdopodobieństwa.

Metoda największej wiarogodności polega na tym, że jako estymatory parametrów θ_1, $\ldots, \theta_k$ przyjmujemy takie $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$, dla których funkcja wiarogodności przyjmuje wartość największą. Ponieważ funkcja $\ln L$ osiąga wartość największą dla tych samych wartości parametrów co funkcja L, więc zadanie sprowadza się do wyznaczenia maksimum funkcji $\ln L$. Wartości $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ *maksymalizujące* L (gdy jest ona różniczkowalna) muszą spełniać układ równań

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.2.11}$$

Poza tym aby w punkcie $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ występowało maksimum, potrzeba i wystarcza, aby forma kwadratowa

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_{\substack{\theta_i = \hat{\theta}_i \\ \theta_j = \hat{\theta}_j}} h_i h_j \tag{2.2.12}$$

była określona ujemnie; h_i i h_j są zmiennymi rzeczywistymi nie zerującymi się jednocześnie.

W przypadku gdy $k = 1$, warunek ten sprowadza się do warunku

$$\left(\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2} \right)_{\theta = \hat{\theta}} < 0.$$

Duże znaczenie tej metody w przypadku $k = 1$ polega na następującej własności: *jeśli istnieje estymator efektywny* $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ *parametru* θ_1, *to jedynym rozwiązaniem równania wiarogodności jest właśnie ten estymator.* Natomiast estymatory uzyskane metodą największej wiarogodności przy $k > 1$ mogą być nawet obciążone ($k = 2$, zad. 2.5.). O metodzie największej wiarogodności dla zgrupowanych danych mówi wzór (3.3.7).

ZADANIE 2.4. Na podstawie n-elementowej próby prostej pobranej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład Poissona

$$p(x;\lambda) = P(X = x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (x \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}),$$

wyznaczyć metodą największej wiarogodności estymator parametru λ tego rozkładu.

Rozwiązanie. Funkcja wiarogodności L przyjmuje tutaj postać

$$L = \prod_1^n p(X_i;\lambda) = \prod_1^n \frac{\lambda^{X_i}e^{-\lambda}}{X_i!} = \frac{\lambda^{\sum\limits_1^n X_i}e^{-n\lambda}}{\prod\limits_1^n X_i!},$$

więc

$$\ln L = \sum_1^n X_i \ln\lambda - n\lambda - \sum_1^n \ln X_i!.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{d\ln L}{d\lambda} = \frac{\sum\limits_1^n X_i}{\lambda} - n, \qquad \frac{d^2\ln L}{d\lambda^2} = -\frac{\sum\limits_1^n X_i}{\lambda^2} < 0,$$

więc estymatorem parametru λ uzyskanym metodą największej wiarogodności jest

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i = \bar{X}.$$

Czytelnik wykaże, że estymator ten jest estymatorem nieobciążonym i efektywnym.

ZADANIE 2.5. Na podstawie n-elementowej próby prostej pobranej z populacji, w której badana cechy X ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ wyznaczyć metodą największej wiarogodności estymatory parametrów μ i σ^2 tego rozkładu.

Rozwiązanie. Funkcją wiarogodności jest

$$L = \prod_1^n f(X_i;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left[-\frac{\sum\limits_1^n (X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (X_i-\mu)^2.$$

Układ równań wiarogodności przyjmuje postać

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (X_i-\mu) = 0, \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_1^n (X_i-\mu)^2 = 0.$$

Rozwiązaniem jego jest para $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i = \bar{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 = S^2.$$

Wykazaliśmy więc, że średnia arytmetyczna $\bar{X}$ wyników próby i wariancja próby S^2 są estymatorami największej wiarogodności nieznanych wartości przeciętnej μ i wariancji σ^2 rozkładu $N(\mu, \sigma)$, przy czym wiemy już (zad. 2.1, 2.2, 2.22), że $\bar{X}$ jest estymatorem zgodnym, nieobciążonym i efektywnym, a wariancja S^2 jest estymatorem zgodnym i asympotycznie nieobciążonym.

Estymatory uzyskane metodą największej wiarogodności mają wiele korzystnych własności. Przy zachodzeniu pewnych ogólnych warunków ([8]) (które spełnione są dla wszystkich rozkładów zawartych w tablicy 27 z wyjątkiem rozkładu równomiernego), estymatory te:

są estymatorami zgodnymi oszacowanych parametrów,

są estymatorami asymptotycznie nieobciążonymi i asymptotycznie efektywnymi,

mają rozkład asymptotycznie normalny, tzn. przy nieograniczonym wzroście liczności próby ($n \to \infty$) rozkład estymatora $\hat{\theta}$ parametru θ jest $N\left(\theta,\ 1\Big/\sqrt{nE\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2}\right)$ w przypadku jednego parametru oraz w przypadku gdy szacujemy k parametrów $\theta_1, \ldots, \theta_k$ – k-wymiarowy rozkład normalny $N(\Xi, [n\sigma_{ij}]^{-1})$ $(i,j = 1, \ldots, k)$, gdzie $\Xi = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ jest wektorem wartości przeciętnych, a macierz kowariancji $[\mu\sigma_{ij}]^{-1}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $[n\sigma_{ij}]$, gdzie

$$\sigma_{ij} = E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_i}\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_j}\right).$$

B. Metoda momentów. Metoda ta polega na przyrównaniu pewnej liczby – najczęściej kolejnych – momentów z próby do odpowiednich momentów rozkładu (będących funkcjami nieznanych parametrów). Wykorzystujemy tyle momentów (na ogół początkowych), ile jest szacowanych parametrów i rozwiązując otrzymane układy równań, uzyskujemy oceny tych parametrów.

Zadanie 2.6. Niech badana cecha X ma rozkład gamma z nieznanymi obu parametrami o gęstości

$$f(x; p, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad p, \beta > 0.$$

Na podstawie n-elementowej próby prostej, pobranej z populacji, w której cechy X ma dany rozkład, wyznaczyć metodą momentów estymatory $\hat{p}$ i $\hat{\beta}$ parametrów p i β.

R o z w i ą z a n i e. Pierwsze dwa momenty zwykłe tego rozkładu dane są wzorami

$$\alpha_1 = \frac{p}{\beta}, \qquad \alpha_2 = \frac{p(p+1)}{\beta^2}.$$

Stąd uzyskujemy równania

$$\frac{p}{\beta}=\bar{X}, \quad \frac{p(p+1)}{\beta^2}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2.$$

Wyznaczając z tych równań p i β, otrzymujemy

$$\hat{p}=\frac{\bar{X}^2}{S^2}, \quad \hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{S^2}.$$

Estymatory uzyskane metodą momentów na ogół nie mają dużej efektywności. Niemniej jednak metoda ta często jest stosowana ze względu na swoją prostotę. Niekiedy oceny otrzymane tą metodą można wykorzystać jako pierwsze przybliżenia, za pomocą których udaje się uzyskać następne o większej efektywności.

Warto zwrócić jeszcze uwagę na fakt, że jeśli estymator $\hat{\theta}_n$ parametru θ ma którąś z rozpatrywanych cech: zgodność, nieobciążoność czy efektywność, to nie wynika stąd jeszcze, że funkcja tego estymatora $g(\hat{\theta}_n)$ jest estymatorem funkcji $g(\theta)$, mającym odpowiednią własność. Wiadomo na przykład, że $S^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i-\bar{X})^2$ jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2, jednakże $E(S^*)\neq\sigma$. Przekształcenie funkcyjne g zachowuje zwykle zgodność estymatora. Mówi o tym *twierdzenie Słuckiego:*

Jeżeli $\hat{\theta}_n$ jest estymatorem zgodnym parametru θ, i jeżeli η jest innym parametrem związanym z θ przekształceniem wymiernym $\eta=g(\theta)$, to $g(\theta_n)$ jest estymatorem zgodnym parametru η.

2.2.3. Przegląd podstawowych estymatorów. Najczęściej stosowanymi estymatorami w badaniach statystycznych ze względu na jedną cechę są estymatory wartości przeciętnej i wariancji rozpatrywanej cechy populacji. Nie zawsze jednak badania prowadzone są ze względu na cechę mierzalną. Czasem badana cecha ma charakter niemierzalny, jakościowy. Wtedy zamiast wartości liczbowej badanej cechy z badania próbnego uzyskujemy jedynie informację o tym, czy dany element populacji ma wyróżnioną cechę jakościową, czy też jej nie ma. Podstawowym parametrem populacji szacowanym w tym przypadku jest *frakcja* θ (albo po pomnożeniu przez 100 – liczba procent) elementów wyróżnionych w populacji. Jest ona prawdopodobieństwem θ wylosowania z danej populacji jednostki mającej określoną własność – zwana także *wskaźnikiem struktury* badanej cechy populacji. Zadanie sprowadza się więc tutaj do estymacji parametru θ w rozkładzie dwumianowym

$$P(k;n,\theta)=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

W przypadku gdy szacujemy θ na podstawie n-elementowej próby prostej, estymatorem zgodnym, nieobciążonym i efektywnym jest częstość względna

$$\hat{\theta}=\frac{k}{n},$$

gdzie k jest liczbą elementów wyróżnionych, zaobserwowanych wśród n-elementowej próbki. Często także w praktyce statystycznej zachodzi potrzeba estymacji odchylenia standardowego oraz współczynnika zmienności.

Przedstawimy teraz w syntetycznym ujęciu najczęściej wykorzystywane estymatory parametrów lub ich funkcji, utworzone na podstawie n-elementowej próby prostej, przy założeniu ich istnienia w populacji generalnej.

Tablica 2.1

Nieznany parametr populacji	Estymator	Własności	Dla jakiej rodziny rozkładów
Wartość przeciętna (oczekiwana) μ	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$	zgodny, nieobciążony	rozkład dowolny; dla rozkładu $N(\mu,\sigma)$ również efektywny
	mediana z próby	zgodny, asymptotycznie nieobciążony	rozkład dowolny; dla rozkładu $N(\mu, \sigma)$ efektywność równa $\frac{2}{\pi} \cong 0{,}64$
Wariancja σ^2, gdy μ znane	$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \mu)^2$	zgodny, nieobciążony	rozkład dowolny; dla rozkładu $N(\mu,\sigma)$ również efektywny
Wariancja σ^2, gdy μ nieznane	$S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$	zgodny, asymptotycznie nieobciążony	rozkład dowolny
	$S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$	zgodny, nieobciążony	rozkład dowolny; dla rozkładu $N(\mu, \sigma)$ efektywność równa $\frac{n-1}{n}$ (asympt. efektywny)
Odchylenie standardowe σ	S_1, S, S^*	zgodny	rozkład dowolny
	$b_n S$, $c_n S^*$ (a)	zgodny, nieobciążony, asymptotycznie efektywny	rozkład normalny
	$Rd_n = (X_{\max} - X_{\min}) d_n$ (a)	zgodny, nieobciążony	rozkład normalny; asympt. efektywność = = 0 (dla małych n efektywność w tablicy 22)
Wskaźnik struktury	$\hat{\theta} = \frac{k}{n}$	zgodny, nieobciążony i efektywny	tylko dla rozkładu Bernoulliego
Współczynnik zmienności $v = \frac{\sigma}{\mu} (\mu \neq 0)$	$V = \frac{S}{\bar{X}}$	zgodny	rozkład dowolny

a) Ze względu na to, że estymatory S, S^* i R^* są estymatorami obciążonymi parametru σ, wprowadzono współczynniki b_n, c_n i d_n, które likwidują obciążoność tych estymatorów, tzn.

$$E(b_n S) = \sigma, \quad E(c_n S) = \sigma \quad \text{oraz} \quad E(Rd_n) = \sigma.$$

Współczynnik b_n jest równy

$$b_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \sqrt{\frac{n}{2}},$$

c_n natomiast

$$c_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}} b_n .$$

Współczynniki te oraz współczynnik d_n zależą tylko od liczności próby i dla małych n podano wartości współczynników b_n i d_n w tablicy 22, w której podano również efektywność estymatora Rd_n. Jak pokazuje tablica, efektywność estymatora Rd_n odchylenia standardowego σ maleje, toteż zazwyczaj korzysta się z niego w przypadku próby o liczności n nie przekraczającej 10; w przypadku n większego (rzędu kilkudziesięciu) dzieli się wyniki próby na kilka grup o licznościach około 10, dla każdej z tych j grup oblicza się $\hat{\sigma}_j = R_j d_k$, gdzie k jest licznością danej grupy, a następnie jako estymator $\hat{\sigma}$ populacji normalnej przyjmuje się średnią arytmetyczną estymatorów $\hat{\sigma}_j$. O innych estymatorach parametru σ traktuje praca [33].

2.3. ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

2.3.1. Pojęcie przedziału ufności. Metody estymacji, którymi zajmowaliśmy się dotychczas, pozwalają uzyskiwać oceny punktowe nieznanych parametrów rozkładu, przy czym nie potrafimy dać odpowiedzi na pytanie, jaka jest dokładność uzyskanej oceny.

Innym sposobem estymacji, dającym możliwość oceny tej dokładności, jest *metoda przedziałowa* polegająca na podaniu tzw. *przedziałów ufności dla nieznanych parametrów* (bądź ich funkcji) danego rozkładu.

Przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ nazywamy przedział (θ_1, θ_2) spełniający warunki:

– jego końce $\theta_1 = \theta_1(X_1, \ldots, X_n)$, $\theta_2 = \theta_2(X_1, \ldots, X_n)$ są funkcjami próby losowej i nie zależą od szacowanego parametru θ;

– prawdopodobieństwo pokrycia przez ten przedział nieznanego parametru θ jest równe $1-\alpha$, tzn.

$$P\big(\theta_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \theta_2(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1-\alpha. \tag{2.3.1}$$

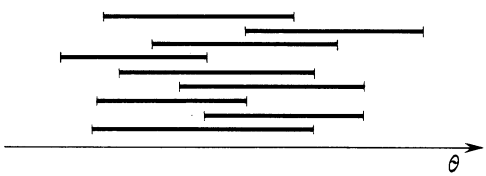
Liczbę $1-\alpha$ nazywamy także *współczynnikiem ufności.* Jak widać z definicji końce przedziału ufności są zmiennymi losowymi. Nieznana wartość parametru θ może więc być pokryta przez ten losowy przedział albo też nie. Jeżeli jednak dla różnych zaobserwowanych próbek losowych $x_1, \ldots, x_n$ znajdziemy wiele realizacji przedziału ufności, to częstość tych, które będą zawierać rzeczywistą wartość parametru θ w dużej liczbie tych realizacji, będzie w przybliżeniu równa $1-\alpha$ (rys. 2.1). Konstrukcję przedziału ufności pokażemy na przykładzie.

Zadanie 2.7. Znaleźć przedział ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ populacji, w której badana cecha ma rozkład $N(\mu, \sigma)$, w przypadku gdy σ jest znane, na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$.

R o z w i ą z a n i e. Wiemy, że statystyka $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$ ma rozkład $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, natomiast statystyka U otrzymana w wyniku standaryzacji

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

ma rozkład $N\,(0,\ 1)$. Statystykę tę, ponieważ jej rozkład nie zależy od szacowanego parametru μ, można wykorzystać do konstrukcji szukanego przedziału ufności.

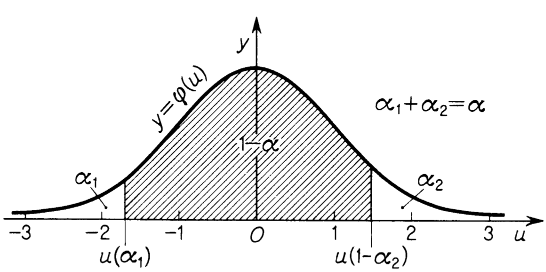


Rys. 2.1. $(1-\alpha)100$-procentowe realizacje przedziału ufności dla parametru θ utworzone dla różnych n-elementowych próbek

Dla danego $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ możemy znaleźć takie wartości u_1 i u_2, aby

$$P(u_1 < U < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = 1 - \alpha.$$

Wystarczy w tym celu obrać α_1 i α_2 spełniające warunki: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $0 < \alpha_1$, $\alpha_2 < \alpha$ i przyjąć $u_1 = u(\alpha_1)$, $u_2 = u(1-\alpha_2)$, gdzie $u(\alpha_1)$ i $u(1-\alpha_2)$ są kwantylami rozkładu zmiennej U rzędów α_1 i $1-\alpha_2$ odpowiednio (rys. 2.2).



Rys. 2.2.

$$P\left[u(\alpha_1) < (\bar{X} - \mu) : \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < u(1-\alpha_2)\right] = 1 - \alpha$$

Wynika to stąd, że

$$\Phi[u(1-\alpha_2)] - \Phi[u(\alpha_1)] = 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha.$$

Wobec powyższego mamy

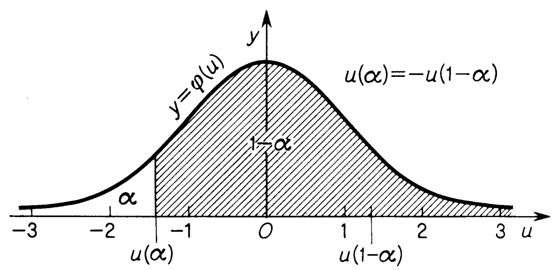
$$P\left[u(\alpha_1) < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < u(1-\alpha_2)\right] = 1 - \alpha.$$

Rozwiązując nierówność znajdującą się wewnątrz nawiasu względem μ, otrzymujemy szukany przedział ufności określony nierównością

$$\bar{X} - u(1-\alpha_2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - u(\alpha_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Widzimy, że nawet przy wykorzystaniu jednej statystyki U do wyznaczenia szukanego przedziału w zależności od sposobu wyboru wartości α_1 i α_2 możemy utworzyć nieskończenie wiele przedziałów ufności. Gdy przyjmiemy $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha$, wtedy $u(\alpha_1) = u(0) = -\infty$ oraz $u(1-\alpha_2) = u(1-\alpha)$ i uzyskujemy przedział postaci (rys. 2.3)

$$\left(\bar{X} - u(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right),$$



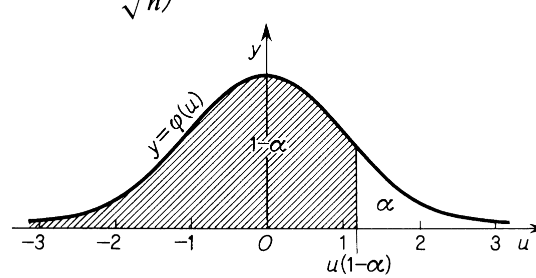
Rys. 2.3. $P\left[(\bar{X}-\mu):\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > u(\alpha)\right] = 1-\alpha$

który nazywamy *prawostronnym przedziałem ufności*. Gdy $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$, wtedy $u(\alpha_1) = u(\alpha)$, $u(1-\alpha_2) = u(1) = \infty$ i otrzymujemy *lewostronny przedział* postaci

$$\left(-\infty, \bar{X} - u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Wykorzystując symetrię rozkładu $N(0,1)$, mamy: $u(\alpha) = -u(1-\alpha)$ i przedział ten możemy zapisać w postaci (rys. 2.4)

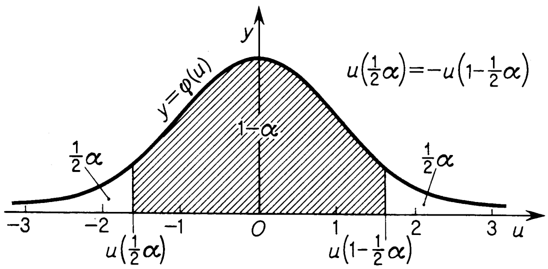
$$\left(-\infty, \bar{X} + u(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$



Rys. 2.4. $P\left[(\bar{X}-\mu):\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < u(1-\alpha)\right] = 1-\alpha$

Praktycznie najczęściej α_1 i α_2 wybieramy tak, aby $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$, otrzymując wówczas przedział

$$\left(\bar{X} - u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} - u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$



Rys. 2.5.
$$P\left[|\bar{X}-\mu|:\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=1-\alpha$$

Ze względu na symetrię rozkładu $N(0,1)$ przedział ten można zapisać w postaci (rys. 2.5)

$$\left(\bar{X}-u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

ponieważ wtedy $-u(\frac{1}{2}\alpha)=u(1-\frac{1}{2}\alpha)$.

W przypadku tym otrzymujemy przedział symetryczny względem $\bar{X}$ o długości $2u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Długość ta nie zależy od wartości x_i próby, lecz jest zależna od:

– obranego współczynnika ufności $1-\alpha$ (im większy współczynnik ufności, tym dłuższy przedział),

· liczności próby n (im większa liczność, tym krótszy przedział).

Przy danym współczynniku ufności i ustalonej liczności próby przedział symetryczny względem $\bar{X}$ jest przedziałem ufności o najkrótszej długości.

Niech $\sigma=2$, na podstawie próbki o liczności $n=16$ wyznaczono np. $\bar{x}=34{,}1$; przyjmijmy $\alpha=0{,}05$. Z tablicy 6 kwantyli rozkładu $N(0,1)$ odczytujemy, że $u(1-\frac{1}{2}\alpha)=$ $=u(0{,}975)=1{,}96$. Realizacją przedziału ufności, dla nieznanej wartości przeciętnej μ uzyskaną dla danej próbki przy poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$, jest $33{,}12<\mu<35{,}08$.

Należy tutaj przestrzec, że błędem jest twierdzić, że

$$P(33{,}12<\mu<35{,}08)=0{,}95.$$

Taki zapis jest błędny, bo wartość przeciętna μ badanej cechy populacji – aczkolwiek nieznana – jest stałą i nierówność $33{,}12<\mu<35{,}08$ albo jest spełniona, jeżeli wartość przeciętna μ zawiera się w tych granicach i wówczas prawdopodobieństwo jej spełnienia wynosi 1, albo sprzeczna i wtedy prawdopodobieństwo jest równe 0.

Gdybyśmy jednak z tej samej populacji pobrali nie jedną lecz wiele próbek 16-elementowych i na podstawie każdej z nich wyznaczyli odpowiadające im realizacje przedziałów ufności, to przeciętnie 95% tych przedziałów pokryłoby stałą, aczkolwiek nieznaną wartość μ (rys. 2.1).

Jaki jest wobec tego sens znalezionego przedziału ufności (realizacji przedziału ufności) na podstawie jednej próbki, jeżeli nie wiemy, czy pokryje ona nieznaną wartość μ, czy też nie?

Otóż kierujemy się tutaj praktyczną zasadą, według której zdarzenie o bardzo małym prawdopodobieństwie w jednym doświadczeniu praktycznie nie zachodzi, tak np. rzucając jeden raz pięcioma monetami nie jest niemożliwe wyrzucenie pięciu orłów, bo prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $(\frac{1}{2})^5 \cong 0{,}03$, jednakże z taką możliwością, przy jednokrotnym rzucie pięciu monetami, nie liczymy się w praktyce. Natomiast w dużej liczbie rzutów po pięć monet wynik pięć orłów będzie się realizował przeciętnie raz na 32 rzuty.

2.3.2. Przedziały ufności dla parametrów rozkładu badanej cechy populacji.

A. Przedziały ufności dla nieznanej wartości przeciętnej.

Model 1. Cecha X populacji generalnej ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanej wartości przeciętnej μ i znanym odchyleniu standardowym σ.

Jest to model, który rozpatrywaliśmy w zadaniu 2.7. Przy danej liczności n próby i danym współczynniku ufności $1-\alpha$ najkrótszym przedziałem ufności dla μ jest przedział

$$\left(\bar{X} - u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.3.2}$$

Model 2. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$, przy czym zarówno μ jak i σ nie są znane.

W teorii statystyki dowodzi się ([11]), że statystyka t [1]

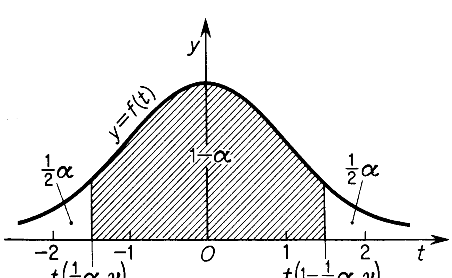
$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1}, \tag{2.3.3}$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$ ma rozkład o gęstości

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\,B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(n-1)\right)} \frac{1}{\left(1 + t^2/(n-1)\right)^{n/2}}, \qquad t \in \boldsymbol{R},$$

nazywany *rozkładem Studenta* o $v = n-1$ stopniach swobody. Ponieważ rozkład tej statystyki jest niezależny od nieznanych parametrów μ i σ (zależny tylko od liczności próby), statystykę tę można wykorzystać do konstrukcji przedziału ufności dla wartości przeciętnej μ.

Z tablic kwantyli rozkładu t Studenta przy $n-1$ stopniach swobody i przyjętym z góry poziomie ufności $1-\alpha$ (rys. 2.6) znajdujemy kwantyl rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ (tzn. taką wartość



Rys. 2.6. Kwantyle rzędów $\frac{1}{2}\alpha$ i $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu Studenta o v stopniach swobody

$t(1-\frac{1}{2}\alpha, v) = -t(\frac{1}{2}\alpha, v)$

[1] Wyjątkowo – ze względu na tradycję – oznaczona małą literą.

$t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)$ zmiennej losowej t, że jest spełniony warunek $P\big(t < t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)\big) = 1-\frac{1}{2}\alpha$ i wówczas

$$1-\alpha = P\big(|t| < t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\big) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\right| < t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\right).$$

Rozwiązując nierówność zawartą w ostatnim nawiasie względem μ, otrzymujemy $(1-\alpha)100\%$-owy przedział ufności

$$\bar{X} - t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}}. \tag{2.3.4}$$

Długość tego przedziału jest równa $2t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$, więc przy danym α i nie zmieniającej się liczności próby nie jest stała (jest zmienną losową), zależy bowiem jeszcze od odchylenia standardowego próby, które na ogół – mimo stałego n – przyjmuje dla różnych próbek różne wartości.

Zadanie 2.8. Zmierzono wytrzymałość 10 losowo wybranych gotowych elementów konstrukcji budowlanych i otrzymano następujące wyniki (w MPa): 383, 284, 339, 340, 305, 386, 378, 335, 344, 346.

Zakładając, że rozkład wytrzymałości tych elementów jest rozkładem $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych parametrach, wyznaczyć na podstawie tej próbki 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ badanej cechy populacji.

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i = 344{,}0$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 968{,}80$, skąd $s = 31{,}13$. Z tablicy kwantyli rozkładu Studenta (tabl. 7) odczytujemy, że $t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1) = t(0{,}975{,}9) = 2{,}26$. 95%-ową realizacją przedziału ufności dla μ, wyznaczoną na podstawie tej próbki, jest przedział określony podwójną nierównością

$$344 - 2{,}26\cdot\frac{31{,}13}{3} < \mu < 344{,}0 + 2{,}26\cdot\frac{31{,}13}{3},$$

czyli przedział (320,55, 367,45).

Zadanie 2.9. W celu wyznaczenia ładunku elektronu wykonano 26 pomiarów tego ładunku metodą Millikana, otrzymując (w C)

$$\bar{x} = 1{,}574\cdot 10^{-19}, \qquad s = 0{,}043\cdot 10^{-19}.$$

Zakładając, że wartość przeciętna μ_Y błędu Y przyrządu pomiarowego jest równa zeru i błędy pomiarów przy wyznaczaniu ładunku elektronu mają rozkład normalny o nieznanym σ, wyznaczyć na podstawie otrzymanych danych 99%-owy przedział ufności dla prawdziwej wartości wielkości ładunku elektronu.

R o z w i ą z a n i e. Oznaczmy przez a – rzeczywistą wartość ładunku elektronu, a przez Y_i błąd losowy i-tego pomiaru, wtedy i-ty pomiar $X_i = a + Y_i$, a jego wartość przeciętna $\mu_X = a + \mu_Y = a$. W takim razie przedziałem ufności dla μ_X, a tym samym dla a, jest przedział określony warunkiem

$$\bar{X} - t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{X} + t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}},$$

co po podstawieniu wartości liczbowych $\bar{x}$ i s oraz $t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1) = t(0{,}995, 25) = 2{,}79$ (odczytane z tablicy 7) daje realizację

$$1{,}550 \cdot 10^{-19} < a < 1{,}598 \cdot 10^{-19}.$$

M o d e l 3. Cecha X populacji generalnej ma rozkład dowolny o nieznanych: wartości przeciętnej i skończonej wariancji σ^2; próba o liczności $n \geqslant 100$.

Z centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego (cz. I, p. 6.1) wynika, że statystyka $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ ma asymptotyczny rozkład $N(0, 1)$. Dla dużych n można zatem rozkład statystyki U przybliżyć tym rozkładem. Ze względu na dużą liczność próbki nieznaną wartość σ zastępujemy oceną s^* obliczoną z próbki i, postępując jak w modelu 1, wyznaczamy dla danej próbki przedział ufności na poziomie ufności $1-\alpha$, określony nierównością

$$\bar{x} - u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\frac{s^*}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\frac{s^*}{\sqrt{n}}.$$

Zadanie 2.10. Z populacji włókien bawełny pobrano 300-elementową próbkę włókien i zmierzono ich długości, grupując dane w następujący szereg rozdzielczy

Przedział [mm]	(0, 5,5⟩	(5,5, 10,5⟩	(10,5, 15,5⟩	(15,5, 20,5⟩
Środek przedziału $\bar{x}_i$	2,75	7,75	12,75	17,75
Liczność n_i	2	5	11	19

Przedział [mm]	(20,5, 25,5⟩	(25,5, 30,5⟩	(30,5, 35,5⟩	(35,5, 40,5⟩
Środek przedziału $\bar{x}_i$	22,75	27,75	32,75	37,75
Liczność n_i	41	117	87	18

Znaleźć 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ długości włókna.

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{8} x_i n_i = 27{,}43$, $s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{8}(x_i-\bar{x})^2 n_i = 51{,}598$, skąd $s^* = 7{,}18$. Z tablicy kwantyli rozkładu $N(0,1)$ odczytujemy, że $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$. Zatem 95%-owa realizacja przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej

μ uzyskana dla tej próbki losowej jest określona nierównością

$$27{,}4 - 1{,}96 \cdot \frac{7{,}18}{\sqrt{300}} < \mu < 27{,}4 + 1{,}96 \cdot \frac{7{,}18}{\sqrt{300}},$$

co po wykonaniu rachunków daje rezultat $26{,}59 < \mu < 28{,}21$.

B. Przedziały ufności dla wariancji i odchylenia standardowego.

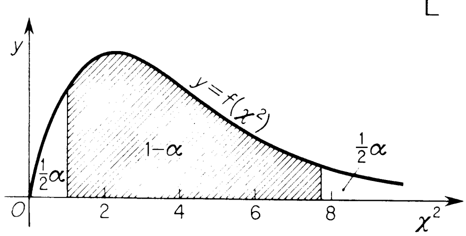
Model 1. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych μ i σ. Próba o liczności $n \leqslant 50$.

Konstrukcję przedziału oprzemy na statystyce

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \tag{2.3.5}$$

która ma rozkład chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody (tabl. 27). Rozkład ten dalej będziemy oznaczali $\chi^2(n-1)$. Niech jak zwykle $\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)$, $\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)$ oznaczają kwantyle rozkładu $\chi^2(n-1)$. Wtedy (rys. 2.7)

$$P[\chi^2(\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) < \chi^2 < \chi^2(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)] =$$
$$= P\left[\chi^2(\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\right] = 1-\alpha.$$



Rys. 2.7. Kwantyle rzędów $\frac{1}{2}\alpha$ i $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu χ^2 o $n-1$ stopniach swobody

Rozwiązując następnie nierówność zawartą w ostatnim nawiasie względem σ^2, otrzymujemy $(1-\alpha)100\%$-owy przedział ufności dla σ^2 określony warunkiem

$$\frac{nS^2}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}, \tag{2.3.6}$$

dla odchylenia standardowego σ natomiast

$$\sqrt{\frac{n}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)}}\, S < \sigma < \sqrt{\frac{n}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}}\, S. \tag{2.3.7}$$

Nierówności te, wykorzystując nieobciążony estymator wariancji S^{*2}

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

można również zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha,\, n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)} \tag{2.3.6'}$$

oraz

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha,\, n-1)}}\,S^* < \sigma < \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)}}\,S^*. \tag{2.3.7'}$$

Dla wygodnego wyznaczania przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ w tablicy 20 podano dla poziomów ufności $1-\alpha = 0{,}99$, $0{,}98$, $0{,}95$, $0{,}90$ wartości współczynników

$$g_1(\alpha, n-1) = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)}} \quad \text{oraz} \quad g_2(\alpha, n-1) = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha,\; n-1)}}$$

i wtedy przedział ufności dla σ można zapisać za pomocą warunku

$$g_1(\alpha, n-1)\,S^* < \sigma < g_2(\alpha, n-1)\,S^*. \tag{2.3.8}$$

Zadanie 2.11. Wykonano pomiary liczby skrętów dla losowo wybranych odcinków przędzy o długości 1 m, uzyskując wyniki: 87, 102, 119, 81, 97, 93, 100, 114, 99, 100, 113, 93, 95, 85, 123, 99. Zakładając, że liczba skrętów odcinków przędzy ma rozkład normalny, znaleźć 90%-owe realizacje przedziałów ufności dla wariancji i odchylenia standardowego liczby skrętów całej partii przędzy.

Rozwiązanie. Obliczamy $\bar{x} = 100$, $s^2 = \frac{1}{16}\sum_{1}^{16}(x_i-\bar{x})^2 = 134{,}2$, następnie, wykorzystując tablicę 8 kwantyli rozkładu χ^2 przy 15 stopniach swobody, odczytujemy

$$\chi^2(\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) = \chi^2(0{,}05, 15) = 7{,}26,$$
$$\chi^2(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1) = \chi^2(0{,}95, 15) = 25{,}00,$$

90%-ową realizacją przedziału ufności dla wariancji wyznaczoną dla danej próbki jest zatem przedział określony nierównością

$$\frac{16\cdot 134{,}2}{25{,}00} < \sigma^2 < \frac{16\cdot 134{,}2}{7{,}26}.$$

Stąd

$$85{,}97 < \sigma^2 < 296{,}04,$$

a dla odchylenia standardowego σ otrzymamy

$$9{,}3 < \sigma < 17{,}2.$$

Wynik ten można także uzyskać prościej przy wykorzystaniu tablicy 20, a mianowicie: odczytujemy z tej tablicy przy $n-1 = 15$ stopniach swobody i poziomie $1-\alpha = 0{,}90$, że

$$g_1(\alpha, n-1) = g_1(0{,}10,\ 15) = 0{,}775, \qquad g_2(0{,}10,\ 15) = 1{,}44.$$

Obliczamy $s^* = \sqrt{143{,}28} = 11{,}97$ i podstawiając do wzoru (2.3.8) uzyskujemy identyczny rezultat jak poprzednio.

M o d e l 2. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych μ i σ. Próba o liczności $n \geqslant 50$.

W przypadku tego modelu można wykorzystać fakt, że statystyka $\sqrt{2\chi^2} = \sqrt{2\frac{nS^2}{\sigma^2}} = \frac{S}{\sigma}\sqrt{2n}$ ma w przybliżeniu ([1]) rozkład $N(\sqrt{2n-3}, 1)$. Zatem

$$P\left(\sqrt{2n-3} - u(1-\tfrac{1}{2}\alpha) < \frac{S}{\sigma}\sqrt{2n} < \sqrt{2n-3} + u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\right) = 1-\alpha,$$

gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu $N(0, 1)$. Rozwiązując nierówność względem σ, otrzymujemy $(1-\alpha)\,100\%$-owy przedział ufności dla σ określony nierównością

$$\frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3} + u(1-\frac{1}{2}\alpha)} < \sigma < \frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3} - u(1-\frac{1}{2}\alpha)}. \tag{2.3.9}$$

Zadanie 2.12. W celu sprawdzenia dokładności skrawania za pomocą pewnego urządzenia, dokonano pomiarów wykonanych 50 części i otrzymano $s^2 = 0{,}00068$. Zakładając, że rozkład błędów wymiarów części jest normalny o nieznanym σ, na poziomie ufności 0,95 wyznaczyć na podstawie danych realizację przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$, zatem dla danych zadania z (2.3.9) otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{0{,}00068}\sqrt{100}}{\sqrt{97} + 1{,}96} < \sigma < \frac{\sqrt{0{,}00068}\sqrt{100}}{\sqrt{97} - 1{,}96}.$$

Tak więc 95%-ową realizacją przedziału ufności dla σ jest (0,0221, 0,0330).

C. Przedział ufności dla wskaźnika struktury populacji. Ocenę wskaźnika struktury (p. 2.2.3) wyznacza się w zależności od liczby K elementów wyróżnionych w losowej próbie prostej o liczności n. Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia takich dwóch funkcji $f_1(K, n, \alpha)$ i $f_2(K, n, \alpha)$, aby

$$P\big(f_1(K, n, \alpha) < p < f_2(K, n, \alpha)\big) = 1-\alpha. \tag{2.3.10}$$

Stosowanie efektywnych wzorów na funkcje f_1 i f_2 jest dość kłopotliwe, dlatego też stablicowano dla małych n wartości tych funkcji w zależności od liczb k i $n-k$ przy poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ (tabl. 21).

([1]) Można tutaj uzyskać dokładniejsze przybliżenie, wykorzystując fakt, że dla dużych n statystyka $\sqrt[3]{\frac{\chi^2}{n-1}}$ ma w przybliżeniu rozkład $N\left(1 - \frac{2}{9(n-1)}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$.

Model 1. Cecha populacji generalnej ma rozkład dwupunktowy z parametrem p (tzn. frakcja wyróżnionych elementów populacji jest równa p). Próbka o niewielkiej liczności n. Niech k oznacza liczbę wyróżnionych elementów próbki o liczności n. Z tablicy 21 odczytujemy przy 95%-owym poziomie ufności wartości $f_1(k, n, \alpha)$ i $f_2(k, n, \alpha)$ spełniające (2.3.10), otrzymując realizację przedziału ufności dla p postaci

$$\big(f_1(k, n, \alpha), f_2(k, n, \alpha)\big).$$

Zadanie 2.13. Z partii towaru sztukowego pobrano losowo 20 sztuk i wśród nich zaobserwowano 2 sztuki wadliwe. Podać 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji sztuk wadliwych całej partii towaru.

Rozwiązanie. Z tablicy 21 przy $k=2$, $n-k=18$ i poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ odczytujemy, że $f_1=0{,}012$, $f_2=0{,}317$. Zatem 95%-ową realizacją przedziału ufności frakcji sztuk wadliwych jest przedział określony nierównością $0{,}012<p<0{,}317$.

Model 2. Cecha populacji generalnej ma rozkład dwupunktowy z parametrem p. Próba o liczności $n \geqslant 100$.

Wykorzystujemy tu fakt, że statystyka $\hat{p}=\dfrac{K}{n}$ ma w przybliżeniu rozkład $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$. Po standaryzacji $\hat{p}$ otrzymujemy statystykę

$$U=\left(\frac{K}{n}-p\right):\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

która dla dużych n ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$. W takim razie

$$P\big(|U|<u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\big)=P\left(\left|\frac{K-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|<u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\right)=1-\alpha$$

gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu $N(0, 1)$. Rozwiązując ostatnią z wypisanych nierówności względem p, uzyskujemy szukany przedział ufności

$$A(B-C)<p<A(B+C), \tag{2.3.11}$$

gdzie

$$A=\frac{n}{n+u^2(1-\frac{1}{2}\alpha)}, \quad B=\frac{K}{n}+\frac{u^2(1-\frac{1}{2}\alpha)}{2n},$$

$$C=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{K(n-K)}{n}+\frac{u^2(1-\frac{1}{2}\alpha)}{4}}\,u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right). \tag{2.3.12}$$

Zadanie 2.14. Spośród 120 wylosowanych pracowników pewnego zakładu 17 nie wykonywało normy wydajności pracy. Wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji p pracowników tego zakładu, którzy nie wykonują normy.

Rozwiązanie. Mamy tutaj $n = 120$, $k = 17$. Z tablicy rozkładu normalnego odczytujemy kwantyl $u(1 - \frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$. Na podstawie wzorów (2.3.12) mamy

$$A = 0{,}969, \qquad B = 0{,}158, \qquad C = 0{,}064.$$

Podstawiając do (2.3.11), otrzymujemy 95%-ową realizację przedziału ufności dla p określoną nierównością $0{,}090 < p < 0{,}215$.

2.3.3. Uogólnienie pojęcia przedziału ufności w przypadku dwóch paremetrów. Obszar ufności. Niech $I(X_1, \ldots, X_n)$ będzie dwuwymiarowym zbiorem (zbiorem płaskim) zależnym od próby, tak dobranym, aby prawdopodobieństwo, że pokryje on parę parametrów (θ_1, θ_2), tzn. punkt o współrzędnych θ_1, θ_2, było równe $1 - \alpha$, to jest

$$P\big((\theta_1, \theta_2) \in I\big) = 1 - \alpha.$$

Każdy zbiór I spełniający powyższy warunek nazywamy $(1 - \alpha)$ 100%-owym obszarem ufności dla pary parametrów (θ_1, θ_2). Ze względu na to, że zbiór I można wyznaczyć na nieskończenie wiele sposobów, należy dokonać wyboru najodpowiedniejszego w pewnym – zależnym od zagadnienia – sensie.

Rozpatrzmy teraz dokładniej sytuację w przypadku, gdy wyznaczamy łączny dwuwymiarowy zbiór ufności dla wartości przeciętnej μ i wariancji σ^2, w przypadku gdy badana *cecha ma rozkład* $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych μ i σ.

Ponieważ statystyki $G_1 = \dfrac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$ i $G_2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ są niezależne ([4]) i mają rozkład χ^2 odpowiednio o jednym oraz $n - 1$ stopniach swobody, możemy je wykorzystać do budowy obszaru ufności. Możemy np. wyznaczyć takie wartości a, b, c, aby

$$P(G_1 < a,\ b < G_2 < c) = P(G_1 < a)P(b < G_2 < c) = 1 - \alpha.$$

Dla danego poziomu ufności $1 - \alpha$ można oczywiście wartości a, b, c wybrać na wiele sposobów. Najczęściej jednak wybieramy je tak, aby $P(G_1 < a) = \sqrt{1 - \alpha} \cong 1 - \frac{1}{2}\alpha$ oraz $P(b < G_2 < c) = \sqrt{1 - \alpha}$, ale tak, aby $P(G_2 > c) = P(G_2 < b)$.

Wystarczy wtedy przyjąć

$$a = \chi^2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha,\ 1), \qquad b = \chi^2(\tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1), \qquad c = \chi^2(1 - \tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1).$$

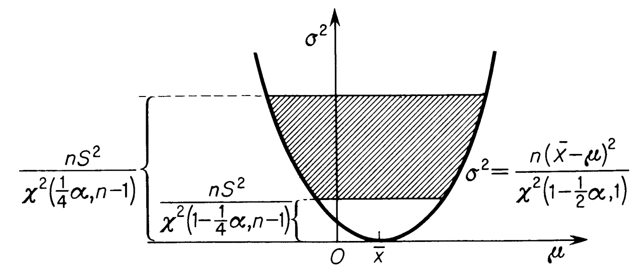
Rozwiązując następnie nierówności

$$G_1 = \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha,\ 1),$$

$$\chi^2(\tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1) < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2(1 - \tfrac{1}{4}\alpha,\ n - 1)$$

względem μ i σ, otrzymamy dwuwymiarowy obszar ufności dla tych parametrów, określony nierównościami (rys. 2.8)

$$\frac{nS^2}{\chi^2(1-\frac{1}{4}\alpha,\ n-1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2(\frac{1}{4}\alpha,\ n-1)}, \qquad \sigma^2 > \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha,\ 1)}. \quad (2.3.12a)$$



Rys. 2.8. $(1-\alpha)100$-procentowy obszar ufności dla parametrów μ i σ^2 rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma)$

ZADANIE 2.15. Wykonano 15 pomiarów czasu likwidowania zrywów przędzy na przędzarce obrączkowej, otrzymując rezultaty [w s]: 4,5, 3,6, 6,0, 7,9, 6,9, 6,1, 7,4, 4,3, 6,1, 4,9, 7,5, 5,8, 8,2, 6,4, 9,0. Zakładając, że rozkład czasu likwidacji zrywu jest normalny, wyznaczyć na podstawie tych danych 90%-ową realizację obszaru ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ i wariancji σ^2 czasu likwidacji zrywu.

R o z w i ą z a n i e. Wykonując obliczenia, otrzymujemy $\bar{x}=6{,}32$, $s^2=2{,}30$, $\sqrt{1-\alpha} \cong$ $\cong 1-\frac{1}{2}\alpha = 0{,}95$.

Z tablic rozkładu χ^2 odczytujemy odpowiednie kwantyle

$$\chi^2(1-\tfrac{1}{4}\alpha,\ 1) = \chi^2(0{,}95,\ 1) = 3{,}84,$$

$$\chi^2(\tfrac{1}{4}\alpha,\ n-1) = \chi^2(0{,}025,\ 14) = 5{,}63,$$

$$\chi^2(1-\tfrac{1}{4}\alpha,\ n-1) = \chi^2(0{,}975,\ 14) = 26{,}1.$$

Realizacją obszaru ufności na poziomie $1-\alpha=0{,}9$ dla μ i σ^2 uzyskanym dla tej próby losowej jest zatem zbiór określony nierównościami

$$\frac{15\cdot 2{,}30}{26{,}1} < \sigma^2 < \frac{15\cdot 2{,}30}{5{,}63},$$

$$\sigma^2 > \frac{15(6{,}32-\mu)^2}{3{,}84},$$

a po wykonaniu rachunków otrzymujemy

$$1{,}32 < \sigma^2 < 6{,}13, \qquad \sigma^2 > 3{,}91(6{,}32-\mu)^2.$$

Interpretacja uzyskanego zbioru ufności dla pary parametrów μ i σ^2 rozkładu $N(\mu,\sigma)$ jest analogiczna do interpretacji przedziału ufności dla jednego parametru (p. 2.3.1). Przestrzec więc trzeba, że w przypadku gdy zastąpimy zmienne losowe $\bar{X}$ i S^2 we wzorze (2.3.12a) konkretnymi liczbami $\bar{x}$ i s^2 obliczonymi dla danej próbki, wtedy uzyskujemy tylko realizację zbioru ufności i zapis

$$P\big(1{,}32 < \sigma^2 < 6{,}13 \cap \sigma^2 > 3{,}91(6{,}32-\mu)^2\big) = 0{,}90$$

jest błędny.

2.3.4. Wyznaczenie minimalnej liczności próby niezbędnej do uzyskania przedziału ufności o zadanej długości. Ponieważ wraz ze wzrostem liczności próby otrzymujemy na ogół – przy ustalonym poziomie ufności – przedziały o coraz mniejszej długości, więc chcemy często tak dobrać liczność próby, aby otrzymać przedział ufności nie przekraczający z góry obranej długości $2l$, bądź też, aby długość ta nie przekraczała p% wartości szacowanego parametru (długość względna).

Rozpatrzmy obecnie sposób wyznaczania takich przedziałów o wartości przeciętnej w przypadku następujących modeli.

M o d e l 1. Badana cecha populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o znanym σ. Szukana jest – dla danego poziomu ufności $1-\alpha$ – taka minimalna liczność próby, aby otrzymać przedział ufności dla wartości przeciętnej o długości nie większej niż $2l$.

Jak wiemy (zad. 2.7), długość najkrótszego przedziału ufności jest w tym przypadku równa $2u(1-\frac{1}{2}\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Ponieważ długość ta ma być nie większa od $2l$, więc

$$2u(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 2l.$$

Rozwiązując otrzymaną nierówność względem n, otrzymujemy

$$n \geqslant \left(\frac{u(1-\frac{1}{2}\alpha)\sigma}{l}\right)^2.$$

W przypadku, gdy prawa strona nierówności nie jest liczbą całkowitą, wtedy, aby otrzymać przedział o długości nie większej niż $2l$, wystarczy pobrać próbkę o liczności

$$n_0 = \left[\left(\frac{u(1-\frac{1}{2}\alpha)\sigma}{l}\right)^2\right] + 1, \tag{2.3.13}$$

gdzie $[x]$ oznacza całość z x.

Zadanie 2.16. Wykonuje się pomiary głębokości morza w pewnym określonym miejscu. Ilu niezależnych pomiarów należy dokonać, aby – przyjmując poziom ufności $1-\alpha=95\%$ – wyznaczyć głębokość z błędem nie większym niż 10 m, jeśli rozkład błędów pomiarów jest normalny o wariancji $\sigma^2 = 180$ m^2.

R o z w i ą z a n i e. Mamy tutaj $l=5$ m, $\sigma^2=180$ m^2 i $u(1-\frac{1}{2}\alpha)=u(0{,}975)=1{,}96$. A więc

$$n_0 = \left[\left(\frac{u(1-\frac{1}{2}\alpha)}{l}\right)^2\sigma^2\right] + 1 = \left[\left(\frac{1{,}96}{5}\right)^2\cdot 180\right] + 1 = 28.$$

Należy zatem wykonać nie mniej niż 28 pomiarów.

M o d e l 2. Badana cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o znanym współczynniku zmienności $v = \sigma/\mu$. Szukamy na danym poziomie ufności $1-\alpha$ takiej minimalnej liczności próby, aby otrzymać przedziały ufności dla wartości przeciętnej μ o długości nie większej niż $2\mu p$%, gdzie p jest ustalone.

Postępując podobnie jak w poprzednim modelu, mamy, że

$$2u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 2\mu\frac{p}{100}.$$

Stąd otrzymujemy

$$n \geqslant \left(u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\mu}\frac{100}{p}\right)^2 = \left(u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{v}{p}\cdot 100\right)^2.$$

W przypadku gdy prawa strona nie jest liczbą całkowitą, minimalną licznością próby jest

$$n_0 = \left[\left(u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{v}{p}100\right)^2\right] + 1. \tag{2.3.14}$$

Zadanie 2.17. Wiemy, że współczynnik zmienności wysokości plonów żyta w pewnym rejonie kraju jest równy $v = 0{,}5$. Zakładając, że wysokości plonów mają rozkłady normalne, znaleźć minimalną liczbę gospodarstw rolnych, jaką należy wylosować do badania, aby dla 95%-owego poziomu ufności otrzymać przedział ufności dla wartości przeciętnej badanej cechy o długości nie przekraczającej 10% tej wartości przeciętnej.

Rozwiązanie. Mamy tutaj $v = 0{,}5$, $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$, $2p = 10$, stąd minimalną licznością gospodarstw jest

$$n_0 = \left[\left(u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{v}{p}\right)^2\right] + 1 = [383{,}2] + 1 = 384.$$

Model 3. Badana cecha populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych parametrach. Szukamy na danym poziomie ufności $1-\alpha$ takiej minimalnej liczności próby, aby otrzymać przedział ufności dla wartości przeciętnej o długości nie większej niż $2l$.

W przypadku tego modelu przedziałem ufności dla μ jest jak wiemy przedział (2.3.4) określony nierównością

$$\bar{X} - t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}},$$

którego długość jest równa $2t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$.

Postępując analogicznie jak w poprzednim modelu, otrzymujemy

$$2t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}} \leqslant 2l.$$

Stąd

$$n \geqslant \left(t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{S}{l}\right)^2 + 1 = k.$$

Ze wzoru tego nie można jednak wyznaczyć liczności próby n, ponieważ wariancja S^2 – nawet przy ustalonym n – przyjmuje różne wartości dla różnych próbek.

W przypadku tym – jak pokazał Stein – aby otrzymać przedział ufności o długości nie większej od z góry założonej $2l$, należy zastosować następujące dwustopniowe postępowanie.

Z populacji pobieramy próbkę wstępną o liczności n_0 i obliczamy

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n_0}\sum_{1}^{n_0} x_i \quad \text{oraz} \quad s^2 = \frac{1}{n_0}\sum_{1}^{n_0}(x_i - \bar{x}_0)^2.$$

Z tablicy kwantyli rozkładu Studenta odczytujemy $t(1-\frac{1}{2}\alpha, n_0-1)$ i obliczamy

$$k = \left(t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n-1)\frac{s}{l}\right)^2 + 1. \tag{2.3.15}$$

Jeżeli $k-n_0 \leqslant 0$, to przedziałem ufności jest przedział określony wzorem (2.3.4), którego długość spełnia żądany warunek. Gdy $k-n_0>0$, wtedy do wstępnej próbki dobieramy jeszcze próbkę o liczności n_1 równej najmniejszej liczbie całkowitej większej od $k-n_0$, tzn. $n_1=[k]-n_0+1$.

Następnie obliczamy

$$\bar{x} = \frac{1}{n_0+n_1}\sum_{1}^{n_0+n_1} x_i$$

i realizacją przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej na poziomie ufności $1-\alpha$ o długości nie przekraczającej $2l$ jest przedział określony nierównością

$$\bar{x} - t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n_0-1)\frac{s}{\sqrt{n_0+n_1-1}} < \mu < \bar{x} + t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, n_0-1)\frac{s}{\sqrt{n_0+n_1-1}}, \tag{2.3.16}$$

gdzie s^2 jest obliczone z próbki wstępnej.

Zadanie 2.18. Zmierzono czasy wyładowania ośmiu losowo wybranych baterii z całej partii baterii. Otrzymano dane (w min): 212, 215, 205, 214, 216, 208, 210, 215. Zakładając, że czas wyładowania baterii ma rozkład normalny, zbadać, czy liczba 8 dokonanych pomiarów jest wystarczająca do wyznaczenia 95%-owego przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej czasu wyładowania baterii o długości nie większej niż 4. W przypadku, gdy próba okaże się niewystarczająca, obliczyć ile jeszcze należy dokonać pomiarów.

Rozwiązanie. Z obliczeń otrzymujemy, że $\bar{x}=211{,}875$, $s^2=8{,}313$. Odczytujemy z tablic kwantyli rozkładu Studenta $t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)=t(0{,}975, 7)=2{,}365$. Zatem $k=\left(t(0{,}975, 7)\frac{s}{l}\right)^2+1=12{,}62$.

Ponieważ $k-n_0=12{,}62-8>0$, należy – w celu wyznaczenia przedziału o żądanej długości – wykonać jeszcze $n_1=[k]-n_0+1=5$ pomiarów czasu wyładowania baterii.

Istotnym zagadniem, jakie tutaj należy rozważyć, jest sprawa liczności próbki wstępnej. Praktycznie liczność próbki wstępnej winno się dobierać tak, aby wartość przeciętna liczności obydwu próbek wymaganych do uzyskania przedziału żądanej długości była jak najmniejsza. Okazuje się, że ta wartość przeciętna $E(n)=E(n_0+n_1)$ jest zależna od

Tablica 2.2a

n_0-1	$1-\alpha=0{,}99$									
	c									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
240	674	241	–	–	–	–	–	–	–	–
120	685	171	121	–	–	–	–	–	–	–
80	696	174	84	81	–	–	–	–	–	–
60	708	177	79	61	61	–	–	–	–	–
50	717	179	80	53	51	51	–	–	–	–
40	731	183	82	48	41	41	–	–	–	–
30	756	189	84	48	34	31	31	–	–	–
20	809	202	90	51	33	25	22	21	21	–
10	1604	251	112	63	40	28	21	16	14	12
min $E(n)$	664	166	74	42	26	18	14	10	8	7

Tablica 2.2b

n_0-1	$1-\alpha=0{,}95$									
	c									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
240	388	241	–	–	–	–	–	–	–	–
120	392	121	–	–	–	–	–	–	–	–
80	396	101	81	–	–	–	–	–	–	–
60	400	100	61	61	–	–	–	–	–	–
50	403	101	53	51	–	–	–	–	–	–
40	408	102	48	41	41	–	–	–	–	–
30	417	104	47	32	31	–	–	–	–	–
20	435	109	48	28	22	21	–	–	–	–
10	496	124	55	31	20	15	12	11	–	–
5	661	165	73	41	46	18	14	11	9	8
min $E(n)$	664	96	43	24	15	11	8	6	5	4

liczności n_0 próbki wstępnej oraz od stosunku $c = l/\sigma$. W tablicach 2.2a i 2.2b dla dwóch poziomów ufności $1-\alpha=0{,}99$ i 0,95 podano wartości $E(n)$ w zależności od liczności n_0 próbki wstępnej oraz od wartości c [27].

Jeżeli na przykład pobraliśmy próbkę wstępną o liczności $n_0 = 31$, a $c = 0{,}3$, to przy poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ otrzymamy $E(n)=47$. Wartość ta nie różni się zbytnio od min $E(n) = 43$, co oznacza, że wybór liczności próbki wstępnej był dobry. Jeśli zaś wybieraliśmy liczność próbki wstępnej przy $c = 0{,}2$ i poziomie ufności 95%, to należałoby przyjąć $n_0 = 61$, ponieważ $E(n)$ przy tym n_0 – jako równe 100 – jest najbardziej zbliżone do min $E(n) = 96$ dla tego c.

Zadanie 2.19. Z populacji normalnej pobrano 21-elementową próbkę i otrzymano $\bar{x}=11{,}3$, $s^2=11{,}2$. Wyznaczyć na tej podstawie przybliżoną wartość przeciętną liczby obserwacji potrzebnych do wyznaczenia przedziału ufności o długości nie większej niż 2, przyjmując poziom ufności $1-\alpha=0{,}99$. Czy liczność próby wstępnej $n_0=21$ została wybrana sensownie?

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ $E(n)$ zależy od liczności $n_0 = 21$ oraz od $c = l/\sigma$, a σ nie znamy, przyjmijmy w przybliżeniu, że $\sigma \cong s$. Wtedy $c = 1/\sqrt{11{,}2} = 0{,}3$. Z tabeli dla $1-\alpha = 0{,}99$ oraz $n_0 - 1 = 20$ odczytujemy $E(n) = 90$. Ponieważ liczność ta wyraźnie różni się od min $E(n) = 74$, należy przyjąć inną liczność próby wstępnej, tak aby $E(n)$ zbliżone było do min $E(n)$. Ponieważ najbliższą liczby 74 jest $E(n) = 79$ (odczytane przy $c = 0{,}3$) odpowiadające $n_0 = 61$, więc jako liczność próbki wstępnej przyjmujemy n_0 około 60.

2.4. PRZEDZIAŁY TOLERANCJI

Bardzo często (np. przy kontroli jakości wyrobów) badanie populacji ze względu na mierzalną cechę X polega na klasyfikacji jej elementów na sztuki dobre i wadliwe. Element uznajemy za dobry, gdy wartość badanej cechy leży w pewnym przedziale wartości dopuszczalnych, za brak – gdy leży poza tym przedziałem.

Ważnym zagadnieniem przy ocenie jakości całej partii badanego wyrobu względem cechy X jest, aby liczba $100p$ procent (lub frakcja p) elementów, których dopuszczalne wartości leżą w rozpatrywanym przedziale, nie była zbyt mała, czyli inaczej, żeby wadliwość partii nie była zbyt wielka. Jeżeli rozkład badanej cechy jest znany, to łatwo można wyznaczyć tę frakcję elementów dobrych. W praktyce jednak tego rozkładu najczęściej nie znamy i wtedy postępujemy w ten sposób, że na podstawie próby, z pewnym ryzykiem błędu α (na poziomie ufności $1-\alpha$) wyznaczamy tzw. *przedział tolerancji*, którego pojęcie teraz sprecyzujemy.

Niech badana cecha X populacji ma rozkład o gęstości f. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie n-elementową próbą prostą z tej populacji. Jeśli istnieją takie dwie funkcje próby $L_1 = L_1(X_1, \ldots, X_n)$ i $L_2 = L_2(X_1, \ldots, X_n)$, że spełniony jest warunek

$$P\left(\int_{L_1}^{L_2} f(x)\,dx > p\right) = 1 - \alpha, \tag{2.4.1}$$

to przedział (L_1, L_2) nazywamy $100p$-procentowym przedziałem tolerancji zmiennej losowej X, na poziomie ufności $1 - \alpha$.

Zwróćmy tutaj uwagę na fakt, że końce tego przedziału są zmiennymi losowymi, a zatem także

$$W = \int_{L_1}^{L_2} f(x)\,dx = F(L_2) - F(L_1) \tag{2.4.2}$$

jest zmienną losową.

W jest więc frakcją elementów populacji zawartych między losowymi granicami L_1 i L_2.

Przedział tolerancji może być także przedziałem niewłaściwym $(L_1, +\infty)$ albo $(-\infty, L_2)$ i wtedy nazywamy go *jednostronnym przedziałem tolerancji.*

Rozkład statystyki W zależy na ogół od rozkładu badanej cechy X. Jednakże – jak wykazał Wilks ([31]) – można tak dobrać końce przedziału L_1 i L_2, aby rozkład tej statystyki był jednakowy dla wszystkich rozkładów typu ciągłego. Wtedy przedział tolerancji jest niezależny od rozkładu. Przedział taki można zbudować na podstawie statystyk pozycyjnych $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$, których wartościami są wyniki próbki uporządkowanej $x_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$.

Można mianowicie wykazać, że rozkład statystyki

$$W = F(X_{(k_2)}) - F(X_{(k_1)}), \quad \text{gdzie} \quad 1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$$

jest rozkładem beta, a wtedy

$$P(W > p) = \frac{n!}{(k_2 - k_1 - 1)!(n - k_2 + k_1)!} \int_p^1 x^{k_2 - k_1 - 1}(1 - x)^{n - k_2 + k_1}\, dx.$$

Prawdopodobieństwo to – jak widać – nie jest zależne od rozkładu zmiennej X, zależy tylko od n, k_1 i k_2. Jeżeli dla ustalonych wartości p i α $(0 < p, \alpha < 1)$ znajdziemy takie n, k_1 i k_2,

aby
$$P(W > p) = 1 - \alpha, \tag{2.4.3}$$

to przedział $(X_{(k_1)}, X_{(k2)})$ jest $100p$-procentowym, niezależnym od rozkładu, przedziałem tolerancji zmiennej losowej X na poziomie ufności $1 - \alpha$. Nosi on nazwę *nieparametrycznego przedziału tolerancji.*

W praktyce najczęściej przyjmujemy $k_1 = 1$, $k_2 = n$, otrzymując przedział $(X_{(1)}, X_{(n)})$. Nieznaną liczność próby, zgodnie z warunkiem (2.4.3) znajdujemy z relacji

$$P(W > p) = \frac{n!}{(n - 2)!} \int_p^1 x^{n-2}(1 - x)\, dx = 1 - np^{n-1} + (n - 1)p^n = 1 - \alpha.$$

Nie zawsze jednak istnieje taka całkowita wartość n, aby równość (2.4.3) była spełniona; wtedy szukamy takiej najmniejszej liczby n, aby $P(W > p) \geqslant 1 - \alpha$, tzn., aby

$$1 - np^{n-1} + (n - 1)p^n \geqslant 1 - \alpha. \tag{2.4.4}$$

Otrzymana liczba n będzie zatem minimalną licznością próby, jaką należy pobrać, aby otrzymać $100p$-procentowy przedział toleranacji postaci $(X_{(1)}, X_{(n)})$, na poziomie ufności nie mniejszym niż $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

Rozwiązanie nierówności (2.4.4) jest dość kłopotliwe i dlatego w tablicy 26 podano dla niektórych p i $1 - \alpha$ takie minimalne wartości n, które spełniają tę nierówność. W ogólnym przypadku, gdy za przedział tolerancji przyjmujemy przedział $(X_{(k_1)}, X_{(k_2)})$, wtedy minimalną liczność próby n_0 można obliczyć według przybliżonego wzoru podanego przez Scheffego i Tukeya, a mianowicie

$$n_0 = \frac{1}{4}\chi^2(1 - \alpha, 2(n - k_2 + k_1 - 1)\frac{1 + p}{1 - p} + \frac{n - k_2 + k_1}{2}. \tag{2.4.5}$$

Rozpatrzymy teraz konstrukcję przedziału tolerancji (L_1, L_2), w przypadku gdy rozkład badanej cechy jest $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych parametrach.

Jeśli za W przyjąć statystykę

$$W = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{X} - kS^*}^{\bar{X} + kS^*} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx,$$

to dla danych wartości α i p można znaleźć taką liczbę $k(\alpha, n, p)$ zależną także od n, żeby zachodził związek (2.4.3), a zatem przedział

$$(\bar{X} - k(\alpha, n, p)S^*, \bar{X} + k(\alpha, n, p)S^*) \tag{2.4.6}$$

przy dobranej odpowiednio wartości k jest $100p$-procentowym dwustronnym przedziałem tolerancji na poziomie ufności $1 - \alpha$. Dla wygodnego wyznaczenia przedziałów tolerancji w tablicy 25a podano dla niektórych p, α i n wartości $k(\alpha, n, p)$, przy których spełniony jest warunek (2.4.3).

W przypadku gdy jest szukany jednostronny przedział tolerancji postaci $(-\infty, L_2)$ albo $(L_2, +\infty)$, wtedy za W przyjmujemy statystykę

$$W = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{X}+k_1S^*} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

w przypadku pierwszego z przedziałów, oraz

$$W = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{X}-k_1S^*}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

w drugim z przypadków, otrzymując przedział postaci $(-\infty, \bar{X} + k_1S^*)$ albo $(\bar{X} - k_1S^*, +\infty)$, gdzie $k_1(\alpha, n, p)$ podano w tablicy 25b.

Przedziały te są $100p$-procentowymi jednostronnymi przedziałami tolerancji uzyskanymi przy poziomie ufności $1 - \alpha$.

Zadanie 2.20. W zakładzie mechanicznym są produkowane wałki o nominalnym wymiarze średnicy 15 mm. Z partii wałków wyprodukowanych przez ten zakład pobrano losowo 10 sztuk otrzymując rezultaty średnic wałków (w mm): 14,987, 15,004, 15,033, 14,985, 14,979, 14,995, 15,010, 15,012, 14,997, 15,019. Zakładając, że rozkład średnic produkowanych wałków jest normalny, na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ znaleźć 90%-owy przedział tolerancji odpowiadający pobranej próbie. Na podstawie uzyskanego rezultatu rozstrzygnąć poprawność przeprowadzania procesu technologicznego, jeśli norma przewiduje, że proces prowadzony jest poprawnie, gdy 90% wałków mieści się w granicach dopuszczalnych od 14,95 do 15,05.

Rozwiązanie. Wykonując obliczenia otrzymujemy $\bar{x}=15{,}0021$, $s^*=0{,}0168$. Z tablicy 25a przy $1-\alpha=0{,}95$ dla $p=0{,}90$ i $n=10$ odczytujemy $k=2{,}839$. Podstawiając otrzymane wartości do wzoru (2.4.6), uzyskujemy przedział (14,955, 15,050). Ponieważ wyznaczony przedział tolerancji zawiera się w przedziale dopuszczalnych wartości (14,95, 15,05), więc można uznać, że proces technologiczny prowadzony jest poprawnie.

Uwaga. Przedział (14,955, 15,050) jest realizacją 90%-owego przedziału tolerancji na poziomie ufności 95% wyznaczonym na podstawie 10-elementowej próbki o danych przytoczonych w zadaniu. Nie oznacza to bynajmniej, że z prawdopodobieństwem 95%

co najmniej 90% wyprodukowanych wałków ma średnice zawarte w przedziale (14,995, 15,050). Gdybyśmy bowiem wyznaczyli średnice wszystkich wyprodukowanych wałków i okazałoby się, że przynajmniej 90% miałoby średnice zawarte w wyznaczonym przedziale, to prawdopodobieństwo takiego zdarzenia byłoby równe 100%. Gdyby natomiast procent wałków, których średnice zawierają się w przedziale (14,995, 15,050), byłby mniejszy niż 90, to zdarzenie, że co najmniej 90% wałków ma średnice zawarte w tym przedziale, byłoby zdarzeniem niemożliwym. Wyjaśnienie sensu znalezionego przedziału jest następujące. Przypuśćmy, że w rozważanej populacji wałków pobieramy wiele prób 10-elementowych i dla każdej z nich znajdujemy przy tych samych p i α przedziały tolerancji. Otóż w dużej liczbie tych przedziałów przeciętnie 95 na 100 tych przedziałów będzie zawierało co najmniej 90% średnic wałków. W przypadku natomiast jednej próby, opierając się na „praktycznej niemożliwości" zajścia zdarzenia o małym prawdopodobieństwie w jednym doświadczeniu, z ufnością 95% możemy sądzić, że wyznaczony przedział tolerancji jest przedziałem, który pokryje co najmniej 90% średnic wałków tworzących rozważaną populację.

2.5. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

2.21. Wykazać, że $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$ nie jest estymatorem zgodnym parametru u rozkładu Cauchy'ego o gęstości

$$f(x,u) = \frac{1}{\pi[1+(x-u)^2]}.$$

2.22. Wykazać, że dla dowolnego rozkładu o skończonej wartości przeciętnej θ estymator

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$$

jest estymatorem nieobciążonym parametru θ.

2.23. Dla wariancji σ^2 cechy X mającej rozkład $N(\mu, \sigma)$ przy wykorzystaniu próby prostej $X_1, \ldots, X_n$ utworzono dwa estymatory

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \qquad S_1^2 = \frac{1}{2n}\sum_{1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2.$$

a) Wykazać, że estymator S_1^2 jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym wariancji σ^2.

b) Wyznaczyć wariancję estymatora efektywnego oraz efektywność estymatora S^{*2}.

2.24. a) Wykazać: $\tilde{\alpha} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$, gdzie $X_{(n)}$ jest zmienną losową przyjmującą największą wartość w próbie n-elementowej ($n > 1$), jest lepszym (w sensie posiadania mniejszej wariancji) estymatorem nieobciążonym paramatru α rozkładu równomiernego o gęstości

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{dla} \quad 0 < x < \alpha, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

niż estymator nieobciążony $\hat{\alpha} = \frac{2}{n}\sum_1^n X_i$.

b) Wykazać, że $D^2\tilde{\alpha}$ jest mniejsza niż prawa strona nierówności Rao-Cramera.

W s k a z ó w k a. Skorzystać z faktu, że jeśli dystrybuantą badanej zmiennej losowej X jest $F(x)$, to gęstością statystyki $X_{(n)}$ jest funkcja $g(x_{(n)}) = nF^{n-1}(x_{(n)})f(x_{(n)})$.

2.25. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają rozkład o tej samej wartości przeciętnej $EX_i = \mu$ i wariancjach $D^2 X_i = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$.

a) Wykazać, że estymatory postaci $T = \dfrac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ są przy wszelkich rzeczywistych a_i spełniających warunek $\sum_1^n a_i \neq 0$ nieobciążonymi estymatorami parametru μ.

b) Jak należy dobrać a_i, aby wariancja estymatora T była najmniejsza?

2.26. Wykazać, że estymator $\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{2n}\sum_1^n X_i^2$ wariancji rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right) & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

jest estymatorem nieobciążonym.

2.27. Wykazać, że $\hat{\alpha} = (n+1)X_{(1)}$, gdzie $X_{(1)}$ jest zmienną losową przyjmującą najmniejszą wartość w n-elementowych próbach, jest estymatorem nieobciążonym parametru α rozkładu równomiernego o gęstości danej w zad. 2.24 oraz wykazać, że estymator ten nie jest estymatorem zgodnym.

2.28. Metodą największej wiarogodności na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$ wyznaczyć estymator parametru λ rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x, \lambda)\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

2.29. Stosując metodę momentów na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$ znaleźć estymator parametru b^2 rozkładu Rayleigha o gęstości

$$f(x, b) = \begin{cases} \dfrac{x}{2b^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2b^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

2.30. Metodą największej wiarogodności na podstawie n-elementowej próby prostej $K_1, \ldots, K_n$ znaleźć estymator parametru p rozkładu geometrycznego o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(K=k)=pq^{k-1}, \qquad k\in\mathbf{N}.$$

2.31. W magazynie znajdują się wyroby pochodzące z dwóch różnych fabryk (populacja mieszana). Udział wyrobów pochodzących z pierwszej fabryki jest p $(0<p<1)$, z drugiej $1-p$. Rozkłady wytrzymałości tych wyrobów są $N(\mu_1, \sigma_1)$ dla pierwszej fabryki i $N(\mu_2, \sigma_2)$ dla drugiej. Na podstawie n-elementowej próby prostej pobranej z wyrobów magazynu oszacować metodą momentów:

a) udział p wyrobów pochodzących z pierwszej fabryki w przypadku, gdy μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 $(\mu_1 \neq \mu_2)$ są znane,

b) wartości przeciętne μ_1, μ_2 w przypadku, gdy p, σ_1, σ_2 są znane.

2.32. Stosując metodę momentów na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1 \dots, X_n$, wyznaczyć estymatory parametrów μ i σ^2 rozkładu logarytmiczno-normalnego o gęstości

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2\right] & \text{dla} \quad x>0, \\ 0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0. \end{cases}$$

W s k a z ó w k a. Wykorzystać fakt, że $EX = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$, $\operatorname{Var} X = \exp(2\mu + \delta^2) \times$ $\times (\exp \sigma^2 - 1)$.

2.33. Z partii kondensatorów wybrano losowo 12 kondensatorów i zmierzono ich pojemności otrzymując wyniki (w pF): 4,45, 4,40, 4,42, 4,38, 4,44, 4,36, 4,40, 4,39, 4,45, 4,35, 4,40, 4,35.

a) Znaleźć ocenę nieznanej wartości przeciętnej pojemności kondensatora pochodzącego z danej partii;

b) znaleźć ocenę frakcji kondensatorów, które nie spełniają wymagań technicznych, przyjmując, że kondensator nie spełnia tych wymagań, gdy jego pojemność jest mniejsza od 4,39 pF;

c) znaleźć ocenę nieobciążoną wariancji pojemności tych kondensatorów.

2.34. W celu oszacowania wartości przeciętnej czasu bezawaryjnej pracy maszyny pewnego typu z partii tych maszyn wybrano w sposób losowy 7 maszyn i obserwowano czasy ich pracy do momentu awarii. Uszkodzenia wystąpiły w chwilach (w h): 51, 115, 150, 190, 217, 228, 350. Wiedząc, że czas bezawaryjnej pracy maszyny ma rozkład wykładniczy o gęstości danej w zadaniu 2.28, znaleźć ocenę wartości przeciętnej czasu bezawaryjnej pracy maszyny oraz ocenę parametru λ tego rozkładu.

2.35. Pięciu strzelców strzelało do celu do momentu pierwszego trafienia. Pierwszy trafił za trzecim strzałem, drugi za czwartym, trzeci za trzecim, czwarty za drugim, piąty za siódmym strzałem. Przyjmując, że prawdopodobieństwo trafienia jednym strzałem do tego celu jest dla każdego strzelca jednakowe i równe p, na podstawie wyników tego strzelania znaleźć ocenę $\hat{p}$ nieznanej wartości p.

W s k a z ó w k a. Patrz zadanie 2.30.

2.36. W celu wyznaczenia dokładności przyrządu pomiarowego, dokonano 7 niezależnych pomiarów pewnej stałej wielkości uzyskując rezultaty: 171, 175, 182, 178, 173, 180, 179.

Wyznaczyć ocenę wariancji błędów tego przyrządu pomiarowego, jeśli:

a) wartość mierzonej wielkości jest znana i równa 176,

b) wartość mierzonej wielkości jest nieznana.

2.37. Z partii włókien wełny wylosowano 70 włókien i zmierzono ich długość (w mm), a wyniki pomiarów zgrupowano w następujący szereg rozdzielczy (p. 1.2)

Nr klasy	1	2	3	4	5	6	7	8
Środek przedziału	24	43	62	81	100	119	138	157
Liczność	9	13	12	15	12	5	3	1

Na podstawie wyników tej próby znaleźć ocenę wartości przeciętnej i wariancji nieznanego rozkładu długości włókien wełny tej partii.

2.38. Przeprowadzono 10 niezależnych pomiarów wartości przyspieszenia ziemskiego w pewnym punkcie, otrzymując wartości (w cm/s^2): 980,1, 978,9, 977,3, 979,2, 978,2, 981, 0, 980,5, 976,9, 979,3, 978,5. Zakładając, że przy wyznaczaniu wartości przyspieszenia nie popełniono błędów systematycznych tylko losowe, na podstawie tych wyników znaleźć:

a) ocenę nieznanej wartości przyspieszenia ziemskiego w tym punkcie,

b) nieobciążoną ocenę wariancji błędu przyrządu pomiarowego,

c) zakładając, że rozkład błędów popełnionych przy pomiarach jest normalny, znaleźć ocenę odchylenia standardowego błędów przyrządu przy wykorzystaniu rozstępu.

2.39. W losowy sposób z różnych wagonów węgla dostarczonego do elektrociepłowni pobrano 12 jednakowych próbek i określono wartość opałową węgla w tych próbkach uzyskując wyniki (w kJ/kg): 30354, 31338, 30680, 30509, 31443, 31372, 29936, 30769, 30396, 30777, 31045, 30480. Na podstawie uzyskanych wyników znaleźć ocenę wartości przeciętnej i wariancji opałowej węgla dostarczonego do elektrociepłowni.

2.40. W pewnym eksperymencie chemicznym bada się ilość czystej substancji wydzielającej się w toku doświadczenia. Jeden student przeprowadził $n_1 = 12$ niezależnych doświadczeń, uzyskując $\bar{x}_1 = 275$, $s_1^{*2} = 16{,}4$; drugi przeprowadził $n_2 = 25$ doświadczeń, otrzymując odpowiednio $\bar{x}_2 = 283$, $s_2^{*2} = 15{,}8$. Na podstawie wyników tych dwóch prób znaleźć ocenę wartości przeciętnej i nieobciążoną ocenę wariancji ilości czystej substancji wydzielającej się podczas przeprowadzania rozpatrywanego doświadczenia.

W s k a z ó w k a.

$$s^{*2} = \frac{1}{n_1+n_2-1}\sum_{1}^{n_1+n_2}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n_1+n_2-1}\sum_{1}^{n_1+n_2}x_i^2 - \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-1}\bar{x}^2 =$$

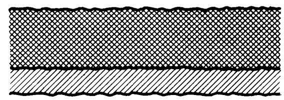
$$= \frac{1}{n_1+n_2-1}\Big[\sum_{1}^{n_1}x_i^2 + \sum_{n_1+1}^{n_1+n_2}x_i^2\Big] - \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-1}\bar{x}^2,$$

a $\sum_{1}^{n_1}x_i^2 = (n_1-1)s_1^{*2} + n_1\bar{x}_1^2$.

2.41. W celu wyznaczenia wartości przeciętnej oraz wariancji grubości powleczenia tkaniny żywicą syntetyczną (rys. 2.9) zmierzono grubości tkaniny w 100 wybranych losowo

punktach tkaniny oraz analogicznie zmierzono grubości tkaniny powleczonej, otrzymując:
dla tkaniny $\bar{x} = 0{,}11$, $s_x^2 = 0{,}020$,
dla tkaniny powleczonej $\bar{y} = 0{,}39$, $s_y^2 = 0{,}017$.
Znaleźć ocenę wartości przeciętnej μ i wariancji σ^2 grubości powleczenia tkaniny żywicą syntetyczną, zakładając niezależność X i Y.

Rys. 2.9. Do zadania 2.41



2.42. Zmierzono objętości V pięciu losowo wybranych kulek z partii kulek łożyskowych, otrzymując wyniki (w cm^3): 1,24, 1,38, 1,25, 1,17, 1,27.

a) Znaleźć ocenę wartości przeciętnej d średnicy kulki pochodzącej z tej partii;

b) wiedząc, że gęstość materiału, z którego wykonano kulki, jest stała i równa ρ, znaleźć ocenę wartości przeciętnej i wariancji masy M kulki.

2.43. W centrali telefonicznej dokonano 17 obserwacji długości losowo wybranych rozmów w ciągu jednego dnia i otrzymano (w min): $\bar{x} = 5{,}48$, $s = 1{,}2$; na tej podstawie – przy założeniu, że długości rozmów telefonicznych mają rozkład normalny – wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla wartości przeciętnej długości rozmowy telefonicznej przeprowadzonej za pośrednictwem tej centrali w danym dniu.

2.44. Z grupy robotników pewnego zakładu wykonujących taką samą pracę wybrano w sposób losowy 13 pracowników i dokonano badania pod względem wydajności pracy (w szt./h) uzyskując dane: 21, 12, 11, 15, 9, 10, 17, 8, 16, 13, 12, 9, 18. Na tej podstawie:

a) zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny, wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej wydajności pracy;

b) wiedząc, że norma wydajności ustalona została na 10 szt./h, znaleźć realizację przedziału ufności dla frakcji robotników, którzy nie wykonują normy.

2.45. W celu oszacowania czasu absencji chorobowej pracowników pewnego zakładu wybrano losowo grupę 100 pracowników i zanotowano liczby dni opuszczonych z powodu choroby w ciągu całego ostatniego roku. Otrzymano wyniki:

Liczba dni niezdolności do pracy	0	1–3	4–6	7–9	10–15	16–24	25–30
Liczba pracowników	13	37	22	17	8	2	1

Na podstawie wyników tego badania znaleźć 95%-wą realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej czasu absencji chorobowej wszystkich pracowników tego zakładu.

2.46. W losowo wybranej grupie 10 samochodów osobowych marki „Skoda 100S" przeprowadzono badanie zużycia benzyny na – tej samej dla wszystkich samochodów – trasie długości 100 km. Okazało się, że średnia zużycia benzyny (w l/100 km) dla tej grupy samochodów wynosiła 8,1; odchylenie standardowe 0,8. Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny, wyznaczyć 99%-ową realizację przedziału ufności dla wartości przeciętnej zużycia benzyny przez samochody tej marki na rozpatrywanej trasie.

2.47. Zważono 7 pojemników bułek poznańskich (po 30 sztuk bułek w każdym) wybranych losowo z partii pojemników otrzymując (w g): 2760, 2810, 2765, 2775, 2790, 2780, 2755. Na tej podstawie wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla wartości przeciętnej μ i wariancji σ^2 masy jednej bułki z tej partii pieczywa.

W s k a z ó w k a. Nieznany jest rozkład mas bułek; przyjmujemy, że średnia masa $\bar{X}$ pojemnika bułek ma, przy założeniu niezależności, w przybliżeniu rozkład $N(30\mu, \sigma\sqrt{30})$.

2.48. Cecha X elementów populacji ma rozkład logarytmiczno-normalny, tj. rozkład o gęstości danej w zad. 2.32 z parametrem $\sigma = 1$. Nieznany jest parametr μ. Z populacji pobrano 65-elementową próbkę uzyskując wyniki:

Przedział	0,3–0,5	0,5–0,7	0,7–1,0	1,0–1,5	1,5–2,5	2,5–5	5–10
Liczność	1	6	8	16	10	20	4

Na tej podstawie wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla parametru μ tego rozkładu.

W s k a z ó w k a. Wykorzystać fakt, że zmienna losowa $Y = \ln X$ ma rozkład $N(\mu, 1)$.

2.49. Wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału dla wartości przeciętnej i wariancji rozkładu długości partii włókien wełny na podstawie danych zadania 2.37.

2.50. W pewnej przychodni wśród losowo wybranych 980 ludzi poddanych prześwietleniu małoobrazkowemu stwierdzono zmiany chorobowe u 10 osób. Wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji osób chorych spośród wszystkich ludzi obsługiwanych przez tę przychodnię.

2.51. Wśród 350 wybranych losowo wyrobów znaleziono 31 wyrobów wadliwych. Wykorzystując wynik badania kontrolnego podać 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji wyrobów dobrych całej partii wyprodukowanych wyrobów.

2.52. Zmierzono średnice 51 drzew wybranych losowo z lasu sosnowego i otrzymano średnią średnicę równą 37,3 cm oraz wariancję $s^2 = 13{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Zakładając, że średnice drzew mają rozkłady normalne, wyznaczyć 90%-ową realizację zbioru ufności dla wartości przeciętnej i wariancji średnicy drzewa tego lasu.

2.53. Dwunastu tokarzy wykonuje takie same części. Ich średnie wydajności w sztukach na godzinę wynoszą odpowiednio: 4,6, 6,1, 10,3, 9,8, 6,7, 12,3, 14,5, 8,7, 9,0, 7,3, 8,8, 11,2. Znaleźć 98%-ową realizację zbioru ufności dla wartości przeciętnej i wariancji liczby sztuk wykonywanych w ciągu godziny przez jednego tokarza.

2.54. Wylosowano 48 ziaren pszenicy i zbadano w nich zawartość białka (w procentach). Otrzymano średnią równą 16,8% i odchylenie standardowe 2,1%. Znaleźć 98%-ową realizację zbioru ufności dla wartości przeciętnej i wariancji zawartości białka w ziarnach pszenicy całej partii.

2.55. Obliczyć niezbędną liczbę pomiarów, jaką należy wykonać w celu wyznaczenia 95%-wego przedziału ufności o długości nie przekraczającej 0,08 mm dla wartości przeciętnej grubości tkaniny, wiedząc, że błędy pomiarów mają rozkład normalny o odchyleniu standardowym $\sigma = 0{,}1$ mm.

2.56. Zmierzono teodolitem pięciokrotnie pewien kąt β, otrzymując następujące rezultaty: $15°40'15''$, $15°40'17''$, $15°40'02''$, $15°39'56''$, $15°40'07''$. Przyjmując, że błędy pomiarów mają rozkład normalny, rozstrzygnąć, czy na poziomie $1-\alpha=0{,}95$ można znaleźć przedział ufności dla rzeczywistej wartości tego kąta o długości nie przekraczającej $30''$.

2.57. Wiadomo, że współczynnik zmienności wysokości drzew lasów sosnowych nie przekracza 0,08, natomiast lasów brzozowych – 0,10. Wyznaczyć liczbę drzew, jaką należy wylosować do badania, aby otrzymać 99%-owy przedział ufności dla wartości przeciętnej wysokości drzewa: a) lasu sosnowego, b) lasu brzozowego, o długości nie przekraczającej 5% tej wartości przeciętnej.

2.58. Z populacji włókien bawełny wylosowano 60 włókien, otrzymując średnią długość włókna $\bar{x}=22{,}8$ mm, $s=6{,}3$ mm. Ilu elementową próbkę należy jeszcze pobrać, aby otrzymać 95%-wy przedział ufności dla wartości przeciętnej długości włókna bawełny o szerokości nie przekraczającej 2 mm?

2.59. W celu wyznaczenia wartości przeciętnej długości drogi hamowania samochodu na asfalcie przeprowadzono przy prędkości 40 km/h 12 prób i otrzymano wyniki w metrach: 17,8, 19,2, 22,0, 20,4, 19,8, 21,2, 20,7, 18,7, 21,1, 17,9, 20,6, 19,6. Czy liczba prób jest wystarczająca do wyznaczenia 95%-owego przedziału ufności dla tej wartości przeciętnej o długości nie większej niż 0,5 m? Jeśli nie, jaką liczbę prób należy jeszcze przeprowadzić?

2.60. Przy produkcji pewnych detali wydajności pracy (w sztukach na godzinę) wyznaczone na podstawie obserwacji w ciągu pewnego czasu T dla 7 wylosowanych robotników były następujące: 17,3, 18,5, 19,7, 21,0, 18,2, 14,5, 20,2. Zakładając, że wydajność ma rozkład normalny, na podstawie uzyskanych rezultatów ustalić normę (dolne ograniczenie wydajności) dla wszystkich robotników tego zakładu wykonujących ten detal w ten sposób, aby z 90%-wą ufnością można było twierdzić, że 95% robotników tego zakładu wykona tę normę. Czy procent robotników wykonujących normę byłby większy, gdybyśmy przyjęli, że jest ona równa lewemu krańcowi 90%-wego jednostronnego przedziału ufności dla wartości przeciętnej wydajności tych robotników? Która norma jest praktycznie sensowniejsza?

2.61. Ilu elementową próbkę należy pobrać, aby na poziomie $1-\alpha=0{,}99$ otrzymać 90%-owy nieparametryczny przedział tolerancji postaci: $(x_{(1)}, x_{(n)})$?

2.62. Badana cecha X ma dowolny rozkład typu ciągłego. Pokazać, że dla próby o liczności $n=10$ nie można znaleźć 100%-owego nieparametrycznego przedziału tolerancji postaci $(x_{(1)}, x_{(10)})$ na poziomie ufności $1-\alpha$ większym niż $1-p^9$.

2.63. Rozkład badanej cechy X jest $N(\mu(t), \sigma)$, przy czym wartość przeciętna μ tego rozkładu jest funkcją czasu postaci $\mu(t)=a+t$. Z populacji o danym rozkładzie cechy X pobrano próbę, przy czym elementy próby pobierano w różnych chwilach. Niech (t_i, x_i) oznacza i-ty element próby zaobserwowany w chwili t_i. Uzyskano rezultaty (1, 14,1), (5, 20,8), (7, 21,3), (11, 26,1), (15, 28,9), (18, 32,0). Znaleźć 90%-wy przedział tolerancji na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ dla badanej cechy X w chwili $t=20$.

Wskazówka. Zauważamy, że mamy znaleźć przedział tolerancji dla zmiennej $Y=X_i+(20-t_i)$, a jej rozkład jest $N(a+20, \sigma)$ i nie zależy od t.

Odpowiedzi

2.23. a) $E(S_1^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \underset{n\to\infty}{\to} \sigma^2$; b) $D^2(S^{*2}) = \frac{2\sigma^2}{n-1}$, $\operatorname{ef} S^{*2} = \frac{n-1}{n}$.

2.24. $D^2\tilde{\alpha} = \frac{1}{n(n+2)}\alpha^2$, $D^2\hat{\alpha} = \frac{\alpha^2}{3n}$, $\frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln f(x,\alpha)\right]^2} = \frac{\alpha^2}{n}$.

2.25. b) $a_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$, gdzie c jest dowolną stałą różną od zera.

2.27. W s k a z ó w k a . Gęstością $g(x_{(1)})$ statystyki $X_{(1)}$ jest $g(x_{(1)}) = n(1 - F(x_{(1)}))^{n-1} \cdot f(x_{(1)})$ dla $0 < x_{(1)} < \alpha$ oraz zero dla pozostałych $x_{(1)}$. Dla stwierdzenia, że estymator nie jest zgodny, należy wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} P[|(n+1)X_{(1)} - \alpha| < \varepsilon] \neq 1$.

Obliczyć więc najpierw $P[|(n+1)X_{(1)} - \alpha| < \varepsilon] = P\left[\frac{\alpha-\varepsilon}{n+1} < X_{(1)} < \frac{\alpha+\varepsilon}{n+1}\right]$ i następnie przejść do granicy przy $n \to \infty$.

2.28. $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{n}{\sum_1^n X_i}$. **2.29.** $\hat{b}^2 = \frac{2\bar{X}^2}{\pi}$. **2.30.** $\hat{p} = \frac{1}{\bar{K}} = \frac{n}{\sum_1^n K_i}$.

2.31. a) $\hat{p} = (\bar{X} - \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2)$; b) $\mu_{1,2} = \bar{X}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{Ap}{1-p}}\right)$, gdzie $A = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2 - p\sigma_1^2 - (1-p)\sigma_2^2$.

2.32. $\hat{\mu} = \ln\bar{X} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{S^2}{\bar{X}^2} + 1\right)$, $\hat{\sigma}^2 = \ln\left(\frac{S^2}{\bar{X}^2} + 1\right)$.

2.33. a) $\hat{\mu} = \bar{x} = 4{,}40$, b) $\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{1}{3}$; c) $\hat{\sigma}^2 = s^{*2} = 0{,}00144$.

2.34. $\hat{\mu} = \bar{x} = 185{,}9$, $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = 5{,}38 \cdot 10^{-3}$ (zad. 2.6).

2.35. $\hat{p} = \frac{5}{19}$. **2.36.** a) $\hat{\sigma}^2 = s_1^2 = 14{,}29$; b) $\hat{\sigma}^2 = s^{*2} = 15{,}81$.

2.37. $\hat{\mu} = \bar{x} = 72{,}9$, $\hat{\sigma}^2 = s^2 = 1068{,}3$.

2.38. a) $\hat{g} = 979{,}0$ b) $\hat{\sigma}^2 = s^{*2} = 1{,}754$; c) $\hat{\sigma} = R d_n = 1{,}332$.

2.39. $\hat{\mu} \doteq \bar{x} = 30758{,}2$, $\hat{\sigma}^2 = s^{*2} = 216439$;

2.40. $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = 280{,}4$, $\hat{\sigma}^2 = s^{*2} = 33{,}08$.

2.41. $\hat{\mu} = \bar{y} - \bar{x} = 0{,}28$, $\hat{\sigma}^2 = s_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2 = 0{,}037$.

2.42. a) $\hat{d} = 1{,}340$; b) $\hat{M} = 1{,}262\rho$, $\sigma_M^2 = 5{,}776 \cdot 10^{-3}\rho^2$.

2.43. $\mu \in (4{,}844,\ 6{,}126)$. **2.44.** $\mu \in (10{,}75,\ 15{,}56)$, $p \in (0{,}050,\ 0{,}538)$.

2.45. $\mu \in (3{,}75,\ 5{,}80)$, **2.46.** $\mu \in (7{,}23,\ 8{,}97)$. **2.47.** $\mu \in (91{,}96,\ 93{,}14)$.

2.48. $\mu \in (0{,}334,\ 0{,}820)$.

Przedział dla Y	$(-1{,}20,\ -0{,}69\rangle$	$(-0{,}69,\ -0{,}36\rangle$	$(-0{,}36,\ 0\rangle$	$(0,\ 0{,}41\rangle$	$(0{,}41,\ 0{,}92\rangle$	$(0{,}92,\ 1{,}41\rangle$	$(1{,}41,\ 2{,}30\rangle$
Środek przedziału	$-0{,}945$	$-0{,}525$	$-0{,}180$	0,205	0,665	1,265	1,955
Liczność	1	6	8	16	10	20	4

2.49. $\mu \in (65{,}1,\ 80{,}7)$, $\sigma^2 \in (28{,}3,\ 39{,}7)$.

2.50. $A = 0{,}996$, $B = 0{,}0122$, $C = 0{,}0066$, skąd $p \in (0{,}0075,\ 0{,}019)$.

2.51. $A = 0{,}989$, $B = 0{,}091$, $C = 0{,}030$, skąd $p \in (0{,}063,\ 0{,}123)$.

2.52. $9{,}64 < \sigma^2 < 20{,}94$, $\sigma^2 > 13{,}28(37{,}3 - \mu)^2$.

2.53. $1{,}19 < \sigma^2 < 12{,}23$, $\sigma^2 > 1{,}81(9{,}11 - \mu)^2$.

2.54. $3{,}31 < \sigma^2 < 6{,}56$, $\sigma^2 > 7{,}24(16{,}8 - \mu)^2$.

2.55. $n_0 = 29$. **2.56.** Tak. **2.57.** a) 69; b) 107.

2.58. $n_1 = 100$. **2.59.** Nie, $n_1 = 114$. **2.60.** 12,55. Nie. Pierwsza.

2.61. $n = 64$. **2.63.** $(30{,}83,\ 37{,}91)$.

3 BADANIA STATYSTYCZNE ZE WZGLĘDU NA JEDNĄ CECHĘ. WERYFIKACJA HIPOTEZ

3.1. UWAGI OGÓLNE I OKREŚLENIA

Obok zagadnień estymacji drugim podstawowym działem wnioskowania statystycznego jest weryfikacja (podejmowanie decyzji o prawdziwości albo fałszywości) hipotez statystycznych.

Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu badanej cechy populacji, o prawdziwości lub fałszywości którego wnioskuje się na podstawie pobranej próbki. Przypuszczenia te najczęściej dotyczą postaci rozkładu lub wartości jego parametrów.

Rozważmy następujące sytuacje:

a) Wiadomo, że badana cecha X ma rozkład wykładniczy o nieznanej wartości przeciętnej. Wysuwamy hipotezę, że wartość przeciętna $EX = 5$.

b) Niech T oznacza czas między dwoma kolejnymi zgłoszeniami do centrali telefonicznej. Wysuwamy hipotezę, że rozkład tego czasu jest wykładniczy.

c) Wiadomo, że badana cecha X ma rozkład $N(23, \sigma)$ o nieznanej wariancji σ^2; wysuwamy hipotezę, że wariancja σ^2 nie przekracza pewnej konkretnej wartości σ_0^2 (np. że $\sigma^2 \leqslant 4$).

d) Dane są dwa zbiory obserwacji (np. wyniki pomiarów tej samej cechy X elementów produkowanych przez dwie maszyny); wysuwamy hipotezę, że oba zbiory można traktować jako pochodzące z populacji o tym samym rozkładzie badanej cechy.

Hipotezy, które dotyczą wyłącznie wartości parametru (bądź parametrów) określonej klasy rozkładów nazywamy *hipotezami parametrycznymi* (hipotezy a, c); każdą hipotezę, która nie jest parametryczną nazywamy *hipotezą nieparametryczną* (hipotezy b, d).

Jeżeli hipoteza parametryczna precyzuje dokładne wartości wszystkich nieznanych parametrów rozkładu badanej cechy nazywamy ją *prostą* (hipoteza a), w przeciwnym przypadku mamy do czynienia z *hipotezą złożoną* (hipoteza c).

Weryfikację postawionych hipotez statystycznych przeprowadzamy na podstawie wyników próby losowej. Metodę postępowania, która każdej możliwej realizacji próbki

$x_1, \ldots, x_n$ przyporządkowuje – z ustalonym prawdopodobieństwem – decyzję przyjęcia albo odrzucenia sprawdzanej hipotezy, nazywamy *testem statystycznym.*

W praktyce przy weryfikacji hipotez postępuje się w ten sposób, że oprócz weryfikowanej hipotezy H wyróżnia się jeszcze inną hipotezę K (prostą albo złożoną), która najczęściej wynika z celu badania statystycznego (jest zależna od konkretnych warunków rozwiązywanego problemu), zwaną *hipotezą alternatywną.* Hipoteza K jest taką hipotezą, którą w danym zagadnieniu skłonni jesteśmy przyjąć, jeśli weryfikowaną hipotezę H należy odrzucić.

Jak już wiemy, możemy utworzyć różne funkcje obserwowanych w próbie zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ (np. $\bar{X}$, S^2 i wiele innych). W celu zbudowania testu do weryfikacji postawionej hipotezy H, spośród tych funkcji należy wybrać najbardziej odpowiednią ([1]); oznaczmy ją przez $\delta(X_1, \ldots, X_n)$. Funkcję tę będziemy nazywali *statystyką testową.*

Przy pobieraniu różnych próbek, nawet o tej samej liczności n – funkcja ta przyjmuje na ogół różne wartości, z których jedne będą świadczyły raczej o zgodności z weryfikowaną hipotezą, a inne mogą przemawiać przeciw tej hipotezie. Zachodzi więc konieczność podziału zbioru wszystkich wartości, które może przyjąć statystyka testowa $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ na dwa dopełniające się zbiory W i W', takie, że:

gdy $\delta(x_1, \ldots, x_n) \in W$ – hipotezę odrzucamy,

gdy $\delta(x_1, \ldots, x_n) \in W'$ – hipotezę przyjmujemy.

Zbiór W nazywamy *zbiorem krytycznym* lub *zbiorem odrzuceń hipotezy,* a zbiór W' – *zbiorem przyjęć.*

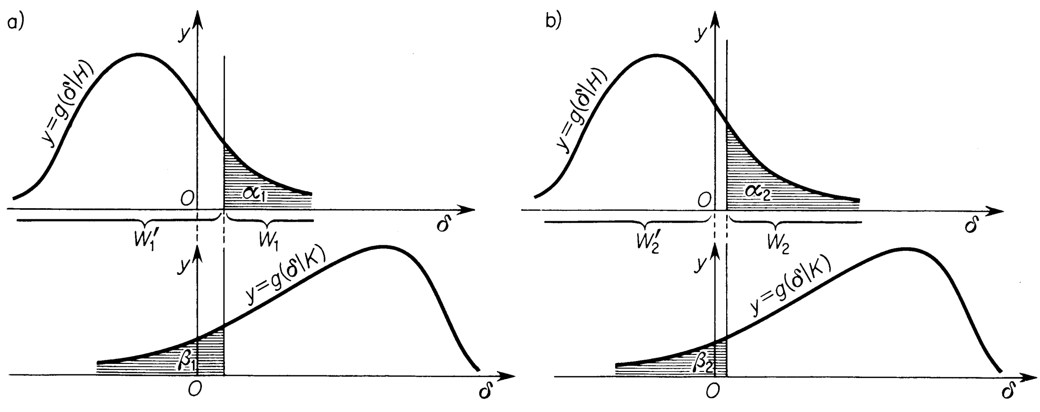
Weryfikując daną hipotezę statystyczną H na podstawie zaobserwowanych wyników próbki – ponosimy zawsze pewne ryzyko podjęcia błędnej decyzji. Wynika to stąd, że na podstawie próbki nigdy nie mamy całkowitej informacji o zbiorowości, z której pobrana została próbka. W wyniku testowania hipotezy statystycznej możemy więc podjąć poprawną decyzję, albo też popełnić jeden z dwóch następujących błędów: 1) możemy odrzucić weryfikowaną hipotezę H wtedy, gdy jest ona w rzeczywistości prawdziwa (*błąd pierwszego rodzaju*); 2) możemy przyjąć weryfikowaną hipotezę H jako prawdziwą, podczas gdy jest ona fałszywa, czyli jeśli prawdziwa jest hipoteza alternatywna K (*błąd drugiego rodzaju*).

Sytuację wobec jakiej stoimy przy weryfikacji hipotezy można zilustrować tabelką:

Decyzja	Hipoteza H	
	jest prawdziwa	jest fałszywa
przyjąć weryfikowaną hipotezę H	decyzja poprawna	decyzja błędna (błąd drugiego rodzaju)
odrzucić hipotezę H	decyzja błędna (błąd pierwszego rodzaju)	decyzja poprawna

Pożądane jest, by prawdopodobieństwa błędów obu rodzajów uczynić możliwie małe. Nie można jednak zmniejszać jednocześnie obydwu rodzajów błędów przy ustalonej liczności próby (rys. 3.1). Wobec tego postępujemy w ten sposób, że ustalamy z góry

([1]) Uwzględniającą wiadomości *a priori* dotyczące rozkładu badanej cechy i będącej miernikiem rozbieżności między wynikami próby a postacią hipotetyczną rozkładu.



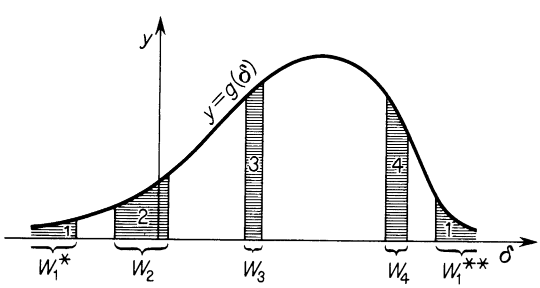
Rys. 3.1. Gęstości rozkładów warunkowych $g(\delta|H)$ i $g(\delta/K)$ statystyki testowej δ przy założeniu prawdziwości H albo K

jakieś małe prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju, które nazywamy *poziomem istotności testu*; wybór tego prawdopodobieństwa jest w zasadzie dowolny, ale zwykle przyjmuje się jedną z wartości $\alpha = 0{,}01$ albo $\alpha = 0{,}05$. Następnie dla ustalonego poziomu istotności α – przy wykorzystaniu statystyki testowej $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ – wyznaczamy taki zbiór krytyczny W, aby w przypadku, gdy prosta hipoteza H jest prawdziwa – spełniony był warunek

$$P\big(\delta(X_1, \ldots, X_n) \in W \mid H\big) = \alpha. \tag{3.1.1a}$$

Gdy mamy do czynienia ze zmienną typu skokowego albo też w przypadku, gdy hipoteza H nie jest prosta, wtedy wybór takiego W, aby we wzorze (3.1.1a) zachodził dokładnie znak równości, nie zawsze jest możliwy, dlatego podany warunek zastępujemy w tych przypadkach warunkiem

$$P\big(\delta(X_1, \ldots, X_n) \in W \mid H\big) \leqslant \alpha. \tag{3.1.1b}$$



Rys. 3.2. Różne zbiory krytyczne testu uzyskane dla poziomu istotności α

Zadanie 3.1. Wykazać, że wybór zbioru krytycznego zgodnie z warunkiem (3.1.1a) może być dokonany na nieskończenie wiele sposobów.

R o z w i ą z a n i e. Wykonajmy wykres gęstości $g(\delta)$ statystyki testowej $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ (rys. 3.2). Ponieważ za α przyjmuje się zazwyczaj małą liczbę (najczęściej $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$), więc łatwo zrozumieć, że można wyznaczyć wiele zbiorów np. $W_1^* \cup W_1^{**}$, W_2,

W_3, W_4 tak dobranych, że pola pod gęstością odpowiadające tym zbiorom (w naszym przypadku pola oznaczone przez „2", „3", „4" oraz dwa pola „1") będą równe α. Za zbiór krytyczny możemy więc przyjąć albo sumę przedziałów $W_1^* \cup W_1^{**}$, albo każdy z przedziałów W_2, W_3, W_4.

Wobec wielu możliwości wyboru zbioru krytycznego najbardziej celowy byłby więc wybór zbioru W w taki sposób, aby minimalizował on prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju. Niech alternatywną (konkurencyjną) względem hipotezy H będzie prosta hipoteza K. Wtedy prawdopodobieństwo β błędu drugiego rodzaju jest równe

$$\beta = P(\delta \in W' | K) = 1 - P(\delta \in W | K), \tag{3.1.2}$$

a zatem zbiór W należy wybrać tak, żeby $P(\delta \in W | K)$ było maksymalne (czyli minimalne β).

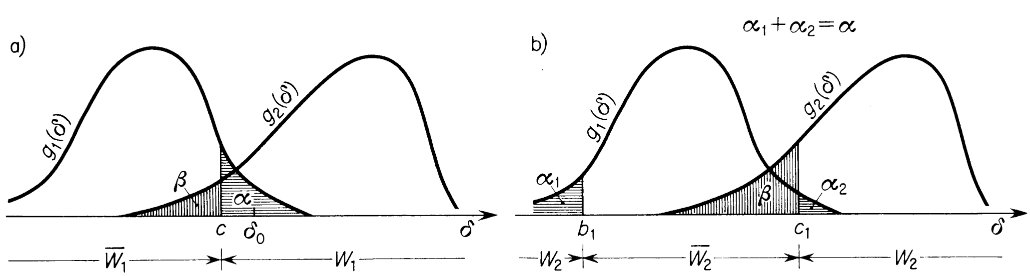
Test, który przy ustalonym prawdopodobieństwie błędu pierwszego rodzaju minimalizuje prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju nazywamy *testem najmocniejszym* dla hipotezy H względem prostej hipotezy alternatywnej K. Jeśli natomiast test jest najmocniejszy względem każdej hipotezy alternatywnej ze zbioru hipotez K – a więc w przypadku hipotezy złożonej – nazywamy go *testem jednostajnie najmocniejszym* względem K.

W celu ilustracji poprzednich rozważań rozpatrzmy następującą sytuację: przypuśćmy, że pobraliśmy próbkę n-elementową o wynikach $x_1, \ldots, x_n$ i dla niej obliczyliśmy wartość statystyki testowej $\delta_0 = \delta(x_1, \ldots, x_n)$. Załóżmy, że próbka ta może pochodzić z rozkładu o gęstości $f_1(x)$ albo z rozkładu o gęstości $f_2(x) \neq f_1(x)$. Możemy zatem rozważyć dwie hipotezy:

H: próbka pochodzi z rozkładu o gęstości $f_1(x)$,

K: próbka pochodzi z rozkładu o gęstości $f_2(x)$.

W przypadku gdy prawdziwa jest hipoteza H, wtedy statystyka testowa $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ ma rozkład $g_1(\delta)$, natomiast gdy jest prawdziwa hipoteza K – rozkład $g_2(\delta)$ (rys. 3.3a, b).



Rys. 3.3. Prawdopodobieństwo β błędu drugiego rodzaju przy różnych zbiorach krytycznych testu uzyskanych dla tego samego poziomu istotności α

Rozpatrzymy teraz dwa sposoby konstrukcji zbioru krytycznego W.

1. W przypadku prawdziwości hipotezy H, przy założonym poziomie istotności α, za zbiór krytyczny W_1 przyjmiemy przedział $\langle c, +\infty)$, przy spełnieniu warunku $\int\limits_c^\infty g_1(\delta) d\delta = \alpha$.

Jeśli hipoteza H jest prawdziwa (a tym samym hipoteza alternatywna K fałszywa), to możliwe jest jednak otrzymanie z próby takiej wartości δ_0 statystyki δ (rys. 3.3a), która „wpadnie" do zbioru W_1 odrzuceń hipotezy H (co prawda prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest małe i wynosi α). Uznajemy więc tę hipotezę za fałszywą (mimo, że w rzeczywistości jest prawdziwa), a przyjmiemy tym samym hipotezę alternatywną K, mimo, że jest ona fałszywa. Prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju β wynosi

$$\beta = \int_{-\infty}^{c} g_2(\delta)\,d\delta$$

i jest równe polu obszaru zakreskowanego poziomo (rys. 3.3a). Warto zwrócić jeszcze uwagę na fakt, że gdybyśmy zmniejszyli prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju α (większe c), wówczas zwiększyłby się błąd drugiego rodzaju β.

2. Przy tym samym poziomie istotności α za zbiór krytyczny W_2 przyjmijmy sumę przedziałów $(-\infty, b_1\rangle \cup \langle c_1, +\infty)$ spełniających warunek

$$\int_{-\infty}^{b_1} g_1(\delta)\,d\delta + \int_{c_1}^{+\infty} g_1(\delta)\,d\delta = \alpha.$$

Wtedy $\beta = \int_{b_1}^{c_1} g_2(\delta)\,d\delta$ i – jak widać z rysunku 3.3b – jest większe niż w poprzednim przypadku.

Porównując oba przypadki stwierdzamy, że test dla przypadku 1 jest mocniejszy niż w przypadku 2, bo przy tym samym poziomie istotności α daje mniejsze prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju.

Aby skonstruować test statystyczny pozwalający weryfikować hipotezę H, należy zatem określić następujące elementy:

a) wybrać statystykę testową stosownie do treści postawionej hipotezy H,

b) ustalić dopuszczalne prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju (poziom istotności testu),

c) określić hipotezę alternatywną,

d) wyznaczyć zbiór krytyczny tak, aby – przy wybranym poziomie istotności α – zminimalizować prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju.

Dotychczas rozważaliśmy przypadek konstrukcji testu, gdy hipoteza alternatywna była hipotezą prostą. Zagadnienie komplikuje się, gdy hipoteza alternatywna jest hipotezą złożoną.

Rozważmy przypadek hipotezy dotyczącej pewnego parametru θ w rozkładzie badanej cechy populacji. Niech zbiorem krytycznym testu dla hipotezy $H{:}\theta = \theta_0$ będzie taki zbiór W, że

$$P(\delta(X_1, \ldots, X_n) \in W | \theta_0) = \alpha.$$

Oznaczmy symbolem $M(\theta; W)$ prawdopodobieństwo tego, że funkcja testowa $\delta \in W$, przy założeniu, że nieznany parametr jest równy θ, czyli

$$M(\theta, W) = P(\delta \in W | \theta). \tag{3.1.3}$$

Prawdopodobieństwo to traktowane jako funkcja zmiennej θ nazywamy *mocą testu*. Wartość tej funkcji w punkcie θ_0 jest równa poziomowi istotności α $\left(M(\theta_0, W) = \alpha\right)$, natomiast jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza prosta K: $\theta = \theta_1$, to wartość tej funkcji w punkcie θ_1, jest równa $1 - \beta$ $\left(M(\theta_1, W) = 1 - \beta\right)$, gdzie β jest prawdopodobieństwem błędu drugiego rodzaju. Jeśli hipotezą alternatywną do H jest K: $\theta = \theta_1$, gdzie θ_1 może przyjmować dowolne wartości należące do pewnego zbioru $A(\theta_1 \in A)$, to zbiór krytyczny W winien być tak dobrany, aby moc testu dla wartości parametrów $\theta \in A$ była możliwie największa. W praktyce często zamiast mocy testu wykorzystuje się inną funkcję (ściśle z mocą związaną) zwaną *funkcją operacyjno-charakterystyczną* (OC) lub *charakterystyką testu*, którą oznaczamy $L(\theta, W)$ i określamy wzorem

$$L(\theta, W) = P(\delta \in W' | \theta). \tag{3.1.4}$$

Między mocą testu a funkcją OC zachodzi więc oczywisty związek

$$L(\theta, W) = 1 - M(\theta, W), \tag{3.1.5}$$

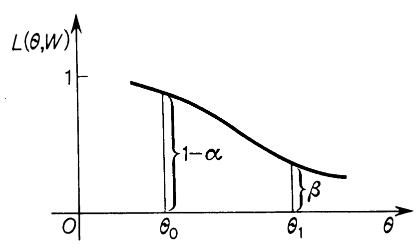
w szczególności zaś mamy (rys. 3.4)

$$L(\theta_0, W) = 1 - \alpha, \qquad L(\theta_1, W) = \beta. \tag{3.1.6}$$

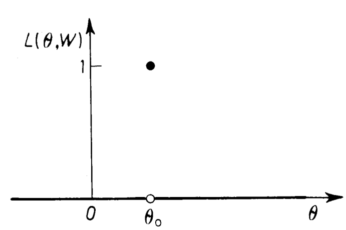
Oczywiście idealnym testem byłby taki, którego funkcja OC byłaby postaci (rys. 3.5)

$$L(\theta, W) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \theta = \theta_0, \\ 0 & \text{dla} \quad \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Jednakże testu takiego dla żadnej próbki o skończonej liczności nie można zbudować.



Rys. 3.4. Typowa krzywa operacyjno-charakterystyczna testu



Rys. 3.5. Krzywa operacyjno-charakterystyczna testu idealnego

Przeanalizujmy jeszcze sposób takiego wyboru zbioru krytycznego testu, aby moc testu dla wszystkich wartości parametru θ ze zbioru hipotez alternatywnych K była możliwie największa.

Zadanie 3.2. Badana cecha ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o znanej wariancji σ^2. Weryfikujemy hipotezę $H: \mu = \mu_0$ na podstawie 25-elementowej próby, przy wykorzystaniu jako funkcji testowej statystyki

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{5(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}.$$

Dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ wyznaczyć moc testu w przypadku gdy:

a) zbiorem krytycznym W jest przedział $\langle c, +\infty)$, gdzie c spełnia warunek $P(U \geqslant c \mid \mu_0) = \alpha$;

b) zbiorem krytycznym W_1 jest suma przedziałów $(-\infty, -c_1\rangle \cup \langle c_1, +\infty)$, gdzie $c_1 > 0$ spełnia warunek

$$P(U \leqslant -c_1 \mid \mu_0) + P(U \geqslant c_1 \mid \mu_0) = P(|U| \geqslant c_1 \mid \mu_0) = \alpha.$$

Rozwiązanie. a) Odczytując z tablic rozkładu normalnego przy $\alpha = 0{,}05$ liczbę c, otrzymujemy $c = 1{,}64$; a zatem zbiorem krytycznym jest przedział $W = \langle 1{,}64, +\infty)$.

Moc testu można wyrazić następująco:

$$M_1(\mu, W) = P(U \geqslant 1{,}64 \mid \mu) = P\left(\frac{5(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \geqslant 1{,}64 \mid \mu\right) =$$

$$= P\left(\frac{5(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \geqslant 1{,}64 + \frac{5(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1{,}64 + \lambda),$$

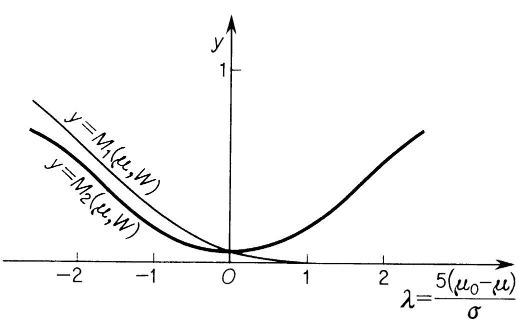
gdzie $\lambda = \dfrac{5(\mu_0 - \mu)}{\sigma}$, a Φ jest dystrybuantą rozkładu $N(0, 1)$.

b) Wyznaczając z tablic rozkładu normalnego wartość c_1 spełniającą warunek $P(|U|) \geqslant c_1 \mid \mu_0) = 0{,}05$, otrzymujemy $c_1 = 1{,}96$ i zbiór $W_1 = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$.

Natomiast moc testu jest wówczas równa

$$M_2(\mu, W_1) = P(|U| \geqslant 1{,}96 \mid \mu) = P\left(\frac{5|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma} \geqslant 1{,}96 \mid \mu\right) =$$

$$= 1 - \Phi(\lambda + 1{,}96) + \Phi(\lambda - 1{,}96).$$



Rys. 3.6. Krzywe mocy testu do zadania 3.2

Wykresy mocy testów dla obydwu przypadków pokazano na rysunku 3.6. Jak widać z rysunku dla $\lambda < 0$ test z pkt. a ma moc większą niż test z pkt. b, natomiast dla $\lambda > 0$ mniejszą. Jeżeli zatem hipotezę H będziemy weryfikowali wobec hipotezy alternatywnej K: $\mu < \mu_0$ (czyli inaczej $\lambda > 0$), to należy korzystać z pierwszego z tych testów. Jeżeli jednak hipotezą alternatywną będzie hipoteza K: $\mu \neq \mu_0$, to należy korzystać z drugiego z tych testów. Wynika to stąd, że przy uwzględnieniu wszystkich możliwych wartości μ stanowiących treść hipotezy K (tzw. *wartości alternatywnych*), a więc zarówno $\mu < \mu_0$ jak i $\mu > \mu_0$ test ten wyraźnie zmniejsza błąd drugiego rodzaju w przypadku $\lambda > 0$, a dla $\lambda < 0$ prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju jest nieznacznie większe niż dla pierwszego z tych testów.

3.2. PARAMETRYCZNE TESTY ISTOTNOŚCI

W testach wykorzystywanych w praktyce bardzo często nie oblicza się błędu drugiego rodzaju, natomiast przy założeniu prawdziwości weryfikowanej hipotezy budujemy zbiór krytyczny w ten sposób, aby zagwarantować małe prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości statystyki testowej należącej do tego zbioru, równe z góry obranemu poziomowi istotności α. Jeżeli zatem wartość statystyki testowej wpadnie do wyznaczonego uprzednio zbioru krytycznego, to można twierdzić, że zaszło zdarzenie o małym prawdopodobieństwie, a więc „praktycznie niemożliwe" do zrealizowania się w przypadku jednej próby i wówczas weryfikowaną hipotezę należy odrzucić. Jeżeli jednak wartość statystyki testowej nie znajdzie się w zbiorze krytycznym, a prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest większe niż α, to można jedynie twierdzić, że nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy, albowiem wnioskowanie o prawdziwości hipotezy na podstawie jednej próby, której wyniki nie przeczą tej hipotezie, nie ma podstaw logicznych.

Konstrukcja tych testów jest stosunkowo prosta, jednakże za tę prostotę płacimy tę cenę, że nie podejmujemy nigdy decyzji o przyjęciu weryfikowanej hipotezy, co jest następstwem nieuwzględniania konsekwencji prawdopodobieństwa błędu drugiego rodzaju.

Opisany powyżej rodzaj testów nosi nazwę *testów istotności*. Pożądane jest w testach istotności postawienie takiej hipotezy H, co do której mamy większe podejrzenie o jej fałszywości niż o prawdziwości.

3.2.1. Weryfikacja hipotezy dotyczącej wartości przeciętnej. W testach do weryfikacji hipotezy o wartości przeciętnej H: $\mu = \mu_0$, tzn. hipotezy, że wartość przeciętna badanej cechy populacji jest równa danej liczbie μ_0, wykorzystujemy statystykę $\bar{X}$, czyli *średnią arytmetyczną próby*. W zależności od informacji jakie mamy o populacji, rozróżniamy następujące modele.

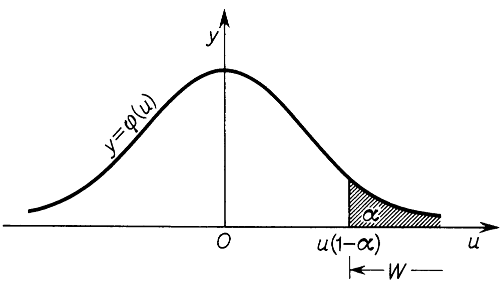
M o d e l 1. Badana cecha X populacji generalnej ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ przy σ znanym. Weryfikujemy hipotezę H: $\mu = \mu_0$, wobec hipotezy alternatywnej: a) K: $\mu = \mu_1 < \mu_0$, b) K: $\mu = \mu_1 > \mu_0$, c) K: $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$. Poziom istotności: $\alpha (0 < \alpha < 1)$.

Do weryfikacji tej hipotezy w tym modelu wykorzystujemy, opartą na zmiennej losowej $\bar{X}$, statystykę testową U określoną wzorem

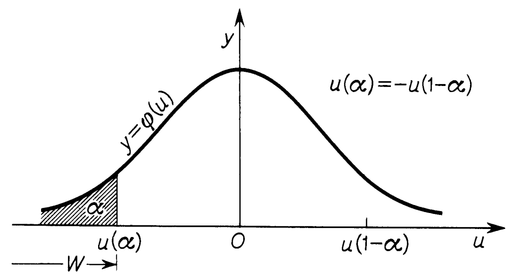
$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, \tag{3.2.1}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H: $\mu = \mu_0$ jest standaryzowaną zmienną losową normalną i jako taka ma rozkład $N(0, 1)$.

Zbiór krytyczny testu, który przy danym poziomie istotności α, minimalizuje prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju (tzw. *zbiór krytyczny jednostajnie najlepszy*) wyznacza się – jeśli istnieje – w zależności od wartości μ_1 określonej hipotezą alternatywną. Można wykazać, że najmocniejszy test do zweryfikowania hipotezy H: $\mu = \mu_0$ przy alternatywnej hipotezie K: $\mu = \mu_1$ jest taki sam dla wszystkich hipotez K (jest ich nieskończenie wiele), w których $\mu_1 > \mu_0$, a jednostajnie najlepszym zbiorem krytycznym jest przedział $\langle u(1-\alpha), +\infty)$, gdzie $u(1-\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu $N(0,1)$ (rys. 3.7). Test nazywamy *testem jednostronnym z prawostronnym przedziałem krytycznym.*



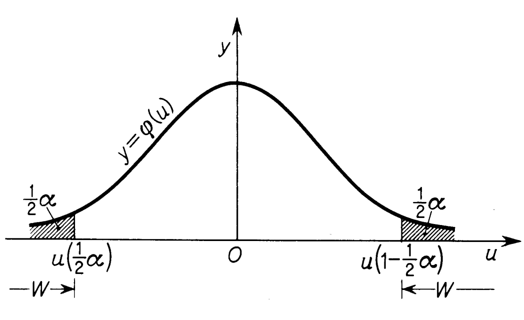
Rys. 3.7. Konstrukcja zbioru krytycznego (prawostronnego) testu do weryfikacji hipotezy H: $\mu = \mu_0$ przeciw K: $\mu > \mu_0$ przy poziomie istotności α



Rys. 3.8. Konstrukcja zbioru krytycznego (lewostronnego) testu do weryfikacji hipotezy H: $\mu = \mu_0$ przeciw K: $\mu < \mu_0$ przy poziomie istotności α

Gdy hipotezą alternatywną jest K: $\mu = \mu_1 < \mu_0$, wtedy jednostajnie najlepszym zbiorem krytycznym jest przedział $(-\infty, u(\alpha)\rangle$, gdzie $u(\alpha)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu $N(0,1)$ (rys. 3.8). Test ten nazywamy *testem jednostronnym z lewostronnym przedziałem krytycznym.*

Z symetrii rozkładu $N(0,1)$ wynika oczywiście, że $u(\alpha) = -u(1-\alpha)$ i przedział krytyczny można zapisać w postaci $(-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$. Natomiast w przypadku, gdy hipotezą alternatywną jest K: $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$, wtedy zbiorem krytycznym jest suma przedziałów $(-\infty, -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha), +\infty)$, gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu $N(0,1)$ (rys. 3.9). Test nosi w tym przypadku nazwę *testu dwustronnego*. Hipotezę H: $\mu = \mu_0$ odrzucamy, gdy obliczona z próby wartość statystyki testowej U (3.2.1) należy do zbioru krytycznego. W przeciwnym przypadku natomiast twierdzimy tylko, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\mu = \mu_0$, co nie oznacza bynajmniej, że hipoteza H jest prawdziwa. Oznacza to tylko, że wyniki tej jednej próby, na podstawie której weryfikujemy hipotezę H



Rys. 3.9. Konstrukcja zbioru krytycznego (dwustronnego) testu do weryfikacji hipotezy H: $\mu = \mu_0$ przeciw K: $\mu \neq \mu_0$ przy poziomie is-

przy przyjętym „ryzyku błędu" α, nie przeczą tej hipotezie. Jeśli hipoteza H jest prawdziwa, to błędna decyzja odrzucenia jej zdarza się w dużej liczbie takich decyzji przeciętnie 100α razy (np. $100 \cdot 0{,}05 = 5$ razy) na sto decyzji. Do podjęcia decyzji przyjęcia hipotezy H nie wystarcza więc znajomość – przyjętego przecież przed weryfikacją – poziomu istotności α, ale konieczna byłaby informacja dotycząca prawdopodobieństwa przyjęcia weryfikowanej hipotezy H w przypadku, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa, tj. należałoby jeszcze znać prawdopodobieństwo β błędu drugiego rodzaju.

Zadanie 3.3. Z populacji, w której badana cecha ma rozkład $N(\mu, 4)$ wylosowano próbkę złożoną z 9 obserwacji. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $\mu = 2$ przy alternatywie K: $\mu = \mu_1 < 2$, jeśli średnia z próbki wynosi $\bar{x} = 1{,}4$.

Rozwiązanie. Obliczmy najpierw wartość statystyki testowej

$$u_{\text{obl}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{1{,}4 - 2}{4} \sqrt{9} = -0{,}45.$$

Wobec $\mu_1 < \mu_0 = 2$ zbiorem krytycznym jest przedział $(-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$. Z tablic kwantyli rozkładu $N(0, 1)$ odczytujemy, że $u(1-\alpha) = u(0{,}95) = 1{,}64$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $W = (-\infty, -1{,}64\rangle$. Ponieważ wartość $u_{\text{obl}} = -0{,}45 \notin W$, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że wartość przeciętna jest równa 2.

Model 2. Badana cecha X populacji generalnej ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o obu parametrach nieznanych. Weryfikujemy hipotezę H: $\mu = \mu_0$ wobec hipotezy alternatywnej: a) K: $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$, b) K: $\mu = \mu_1 > \mu_0$, c) K: $\mu = \mu_1 < \mu_0$. Poziom istotności α. Do weryfikacji tej hipotezy stosujemy test oparty na statystyce

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n-1}, \tag{3.2.2}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H ma rozkład t Studenta (2.3.3) o $n-1$ stopniach swobody.

Zbiór krytyczny testu – analogicznie jak w poprzednim modelu – wyznacza się w zależności od wartości μ_1.

Gdy $\mu_1 > \mu_0$, wtedy zbiorem krytycznym (prawostronnym) jest przedział $\langle t(1-\alpha, n-1), +\infty)$, gdzie $t(1-\alpha, n-1)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu t Studenta przy $n-1$ stopniach swobody.

Gdy $\mu_1 < \mu_0$, wtedy zbiorem krytycznym (lewostronnym) jest przedział $(-\infty, -t(1-\alpha, n-1)\rangle$.

Gdy $\mu_1 \neq \mu_0$, wtedy zbiorem krytycznym (dwustronnym) jest suma przedziałów $(-\infty, -t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)\rangle \cup \langle t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1), +\infty)$, gdzie $t(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu t Studenta przy $n-1$ stopniach swobody.

W przypadku gdy wartość t_{obl} statystyki t obliczona według wzoru (3.2.2) należy do zbioru krytycznego, wtedy hipotezę H: $\mu = \mu_0$ odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K na poziomie istotności α, w przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H.

ZADANIE 3.4. W celu ustalenia, czy dotychczasowa norma okresu użytkowania ubrań ochronnych – wynosząca 150 dni – nie jest zbyt wysoka, zbadano faktyczny okres użytkowania ich na przykładzie 65 losowo wybranych robotników pracujących w normalnych warunkach. Otrzymano średnią długość okresu użytkowania 139 dni oraz odchylenie standardowe 9,8 dni. Zakładając, że czas użytkowania ubrań ma rozkład normalny, stwierdzić, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$, czy uzyskane wyniki stanowią podstawę do zmiany (zmniejszenia) normy.

R o z w i ą z a n i e. Obliczając wartość statystyki testowej otrzymujemy

$$t_{\mathrm{obl}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n-1} = \frac{139-150}{9{,}8}\cdot 8 = -8{,}98.$$

Ponieważ hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu < 150$, więc zbiorem krytycznym testu jest przedział $(-\infty, -t(1-\alpha, n-1)\rangle$. Z tablicy kwantyli rozkładu t Studenta odczytujemy $t(1-\alpha, n-1) = t(0{,}99, 64) = 2{,}389$. Ponieważ wartość $t_{\mathrm{obl}} = -8{,}98 \in (-\infty, -2{,}389\rangle$, więc hipotezę H na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej, a zatem uzyskane rezultaty świadczą o tym, że norma była zbyt wysoka.

M o d e l 3. Badana cecha ma rozkład dowolny o nieznanej wartości przeciętnej μ i o skończonym – ale nieznanym – odchyleniu standardowym σ. Weryfikujemy hipotezę H: $\mu = \mu_0$ wobec hipotezy alternatywnej: a) K: $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$, b) K: $\mu = \mu_1 < \mu_0$, c) K: $\mu = \mu_1 > \mu_0$. Liczność próby $n \geqslant 100$. Weryfikację hipotezy H w tym modelu przeprowadzamy testem analogicznym jak w modelu 1. Wobec dużej wartości n, jako nieznaną wartość σ przyjmuje się wtedy wartość s wyznaczoną z próbki.

ZADANIE 3.5. Zmierzono długości 198 włókien bawełny, a wyniki pomiarów zgrupowano w następującym szeregu rozdzielczym:

Nr klasy	1	2	3	4	5	6	7
Środek przedziału	8	13	18	23	28	33	38
Liczność	4	9	18	70	75	19	3

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że średnia długość włókna dla całej badanej parti włókien jest równa $\mu = 24$, wobec hipotezy alternatywnej K: $\mu \neq 24$.

R o z w i ą z a n i e. Obliczone wartości $\bar{x}$ i s^2 z szeregu rozdzielczego ((1.3.2), (1.5.3)) są odpowiednio równe $\bar{x} = 24{,}82$, $s^2 = 28{,}25$, natomiast wartość statystyki U jest równa

$$u_{\mathrm{obl}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{24{,}82 - 24}{5{,}32}\cdot 14{,}07 = 2{,}17.$$

Zbiorem krytycznym – wobec hipotezy K – jest $W = \left(-\infty, -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\right\rangle \cup \left\langle u(1-\frac{1}{2}\alpha), +\infty\right)$, gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ rozkładu $N(0, 1)$. Odczytując z tablicy 6, otrzymujemy $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}995) = 2{,}58$. Ponieważ $u_{\mathrm{obl}} = 2{,}17 \notin W$, zatem nie mamy podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na przyjętym poziomie istotności.

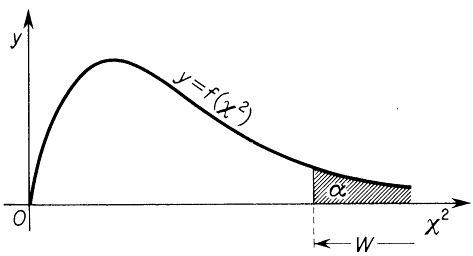
3.2.2. Testy istotności dla wariancji. Analogicznie jak w przypadku weryfikacji hipotez dotyczących wartości przeciętnych, rozpatrzymy teraz testy do weryfikacji hipotez o wariancji dla różnych (w zależności od przyjętych założeń) modeli.

M o d e l 1. Badana cecha populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych parametrach μ i σ. Weryfikujemy hipotezę H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ wobec hipotezy alternatywnej: a) K: $\sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$, b) K: $\sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$, c) K: $\sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$. Do weryfikacji hipotezy H wykorzystuje się statystykę

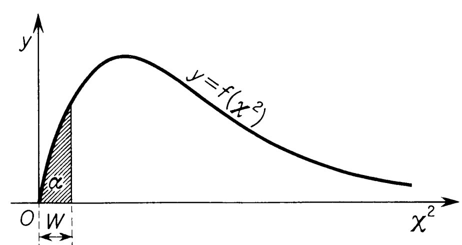
$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}, \tag{3.2.3}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy ma rozkład $\chi^2(n-1)$.

W przypadku gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, wtedy zbiorem krytycznym W jest przedział $\langle \chi^2(1-\alpha, n-1), +\infty)$, gdzie $\chi^2(1-\alpha, n-1)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody (rys. 3.10).



Rys. 3.10. Konstrukcja zbioru krytycznego (prawostronnego) do weryfikacji hipotezy H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, wobec hipotezy alternatywnej K: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ przy poziomie istotności α

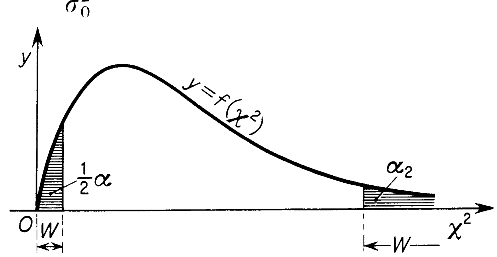


Rys. 3.11. Konstrukcja zbioru krytycznego (lewostronnego) do weryfikacji hipotezy H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, wobec hipotezy alternatywnej K: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ przy poziomie istotności α

Gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, wtedy zbiorem krytycznym jest przedział $(0, \chi^2(\alpha, n-1))$ (rys. 3.11).

Gdy natomiast hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, wtedy zbiorem krytycznym jest suma dwóch przedziałów $(0, \chi^2(\alpha_1, n-1)\rangle \cup \langle \chi^2(1-\alpha_2, n-1), +\infty)$, gdzie $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. W praktyce zazwyczaj przyjmuje się $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$ i wtedy zbiorem krytycznym jest suma przedziałów $(0, \chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n-1)\rangle \cup \langle \chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha, n-1), +\infty)$ (rys. 3.12). Jeżeli obliczona z próby wartość statystyki $\chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}$ należy do zbioru krytycznego, to

Rys. 3.12. Konstrukcja zbioru krytycznego (dwustronnego) do weryfikacji hipotezy H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, wobec hipotezy alternatywnej K: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ przy poziomie istotności α



hipotezę H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ odrzucamy na przyjętym poziomie istotności i przyjmujemy hipotezę alternatywną. W przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do jej odrzucenia. Ponieważ tablice podają tylko wartości krytyczne dla $n \leqslant 50$, więc w przypadku większej liczności próby wykorzystujemy model 2.

Zadanie 3.6. W celu oszacowania dokładności pomiarów wykonywanych pewnym przyrządem dokonano 8 pomiarów pewnej wielkości i otrzymano: 18,17, 18,21, 18,05, 18,14, 18,19, 18,22, 18,06, 18,08. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę H: $\sigma^2 = 0{,}06$ dotyczącą wariancji σ^2 wskazań przyrządu, wobec hipotezy alternatywnej $K: \sigma^2 \neq 0{,}06$.

Rozwiązanie. Obliczona wartość wariancji z próby $s^2 = 0{,}0575$, a zatem wartość statystyki $\chi^2_{\text{obl}} = \frac{ns^2}{\sigma_0^2} = \frac{8 \cdot 0{,}0575}{0{,}06} = 7{,}667$. Z tablic kwantyli rozkładu χ^2 (tabl. 8) odczytujemy, że $\chi^2(\frac{1}{2}\alpha,\ n-1) = \chi^2(0{,}025,\ 7) = 1{,}69$ oraz $\chi^2(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n-1) = \chi^2(0{,}975,\ 7) = 16{,}013$.

Zbiorem krytycznym testu jest zatem suma przedziałów

$$(0,\ 1{,}69\rangle \cup \langle 16{,}013,\ +\infty).$$

Ponieważ obliczona wartość statystyki $\chi^2_{\text{obl}} = 7{,}667$ nie należy do zbioru krytycznego, więc nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\sigma^2 = 0{,}06$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Model 2. Badana cecha populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanych parametrach μ i σ. Weryfikujemy hipotezę H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ przeciw hipotezie alternatywnej: a) K: $\sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$, b) $\sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$, c) $\sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$.

Model ten wykorzystujemy wtedy, gdy liczność próby $n \geqslant 50$. W przypadku tego modelu do weryfikacji hipotezy H wykorzystujemy (tak jak w modelu poprzednim) statystykę $\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ oraz fakt, że statystyka $\sqrt{\frac{2nS^2}{\sigma_0^2}}$ ma w przybliżeniu rozkład $N(\sqrt{2n-3},\ 1)$ (p. 2.3.2, punkt B). Z faktu tego wynika, że statystyka U otrzymana w wyniku standaryzacji statystyki $\sqrt{\frac{2nS^2}{\sigma_0^2}}$

$$U = \sqrt{\frac{2nS^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3} \tag{3.2.4}$$

ma w przybliżeniu rozkład $N(0,1)$.

Zbiory krytyczne testu wyznacza się w zależności od hipotezy alternatywnej, a mianowicie:

1) gdy hipotezą alternatywną jest K: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, wtedy zbiorem krytycznym jest przedział $\langle u\,(1-\alpha),\ +\infty)$, gdzie $u\,(p)$ oznacza jak zwykle kwantyl rzędu p rozkładu $N(0,\ 1)$ (rys. 3.7),

2) gdy hipotezą alternatywną jest K: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, wtedy zbiorem krytycznym jest przedział $(-\infty,\ -u(1-\alpha)\rangle$ (rys. 3.8),

3) gdy hipotezą alternatywną jest K: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, wtedy zbiorem krytycznym jest suma przedziałów $(-\infty,\ -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha),\ +\infty)$ (rys. 3.9).

Zadanie 3.7. Do tarczy oddano 50 strzałów, mierząc odległości trafień od środka tarczy. Okazało się, że wariancja tych odległości jest równa $s^2 = 107{,}3\ \text{cm}^2$. Zakładając, że te odległości mają rozkład normalny na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, zweryfikować hipotezę H, że wariancja odległości trafień od środka tarczy przy tego rodzaju strzelaniu jest równa $\sigma^2 = 100\ \text{cm}^2$, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\sigma^2 > 100\ \text{cm}^2$.

R o z w i ą z a n i e. Obliczamy wartość statystyki (3.2.3), otrzymując $\chi^2_{\text{obl}} = 53{,}65$ oraz wartość statystyki U, otrzymując

$$u_{\text{obl}} = \sqrt{2\frac{nS^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3} = \sqrt{2\cdot 53{,}65} - \sqrt{97} = 0{,}510.$$

Ponieważ alternatywną jest hipoteza K: $\sigma^2 > 100$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $\langle u(1-\alpha), +\infty)$. Z tablicy 6 otrzymujemy $u(1-\alpha) = u(0{,}95) = 1{,}64$, więc zbiorem krytycznym jest $W = \langle 1{,}64, +\infty)$. Ponieważ wartość $u_{\text{obl}} = 0{,}510 \notin W$, więc nie ma powodu do odrzucenia hipotezy H na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

M o d e l 3. Badana cecha populacji ma rozkład dowolny o skończonej wariancji $\sigma^2 > 0$. Weryfikujemy hipotezę H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ przeciw hipotezie alternatywnej: a) K: $\sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$, b) K: $\sigma = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$, c) K: $\sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$. Liczność próby $n \geqslant 100$.

W przypadku tym weryfikację hipotezy H opieramy na statystyce

$$U = \frac{S^{*2} - \sigma_0^2}{\sigma_0^2}\sqrt{\frac{n}{2}}, \tag{3.2.5}$$

która – przy założeniu prawdziwości hipotezy H – ma dla dużych n w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$. Zbiory krytyczne określone są więc identycznie jak w modelu 2.

Zadanie 3.8. Z populacji pobrano 450-elementową próbkę i otrzymano $s^{*2} = 14{,}9$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $\sigma^2 = 16$, jeśli hipotezą alternatywną jest K: $\sigma^2 < 16$.

R o z w i ą z a n i e. Obliczmy wartość statystyki U

$$u_{\text{obl}} = \frac{s^{*2} - \sigma^2}{\sigma^2}\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{14{,}9 - 16}{16}\sqrt{225} = -1{,}03.$$

Zbiór krytyczny ma tutaj postać $(-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$. Z tablicy 6 odczytujemy, że $u(1-\alpha) = u(0{,}95) = 1{,}64$. Zbiorem krytycznym jest zatem $W = (-\infty, -1{,}64\rangle$; ponieważ wartość $u_{\text{obl}} = -1{,}03 \notin W$, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H na przyjętym poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

3.2.3. Weryfikacja hipotezy o równości wariancji dwóch populacji. W praktyce statystycznej, gdy prowadzimy badania ze względu na pewną cechę w dwóch populacjach, wtedy zachodzi często potrzeba weryfikacji hipotezy o jednakowym stopniu rozproszenia wartości badanej cechy w tych populacjach. Musimy wtedy zweryfikować hipotezę o równości wariancji badanej cechy w tych populacjach. Rozpatrzmy tutaj test do weryfikacji takiej hipotezy w przypadku następującego modelu.

M o d e l. Dane są dwie populacje, w których badana cecha X ma rozkłady $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$ odpowiednio o nieznanych parametrach. Weryfikujemy hipotezę H: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ wobec hipotezy alternatywnej K: a) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, b) $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, c) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Weryfikację hipotezy H będziemy przeprowadzali na podstawie wyników dwóch niezależnych prób prostych o licznościach odpowiednio równych n_1 i n_2 pobranych z tych populacji. W teście do weryfikacji hipotezy H wykorzystuje się statystykę

$$F = \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} = \frac{\frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2}{\frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2} = \frac{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_1^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{\frac{1}{n_2 - 1} \sum_1^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}, \tag{3.2.6}$$

która – przy założeniu prawdziwości hipotezy H – ma rozkład F Snedecora o $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ stopniach swobody.

Tablica 9 podaje dla pary (v_1, v_2) stopni swobody kwantyle $F(p, v_1, v_2)$ rzędu $p = 0{,}95$, $0{,}975$, $0{,}99$ i $0{,}995$. Ponieważ jednak statystyka

$$F' = \frac{1}{F} = \frac{S_2^{*2}}{S_1^{*2}} \tag{3.2.7}$$

ma także rozkład F Snedecora o (v_2, v_1) stopniach swobody (zad. 3.60), więc można wyznaczyć kwantyle rzędów $p = 0{,}05, 0{,}025, 0{,}01, 0{,}005$, ponieważ zachodzi oczywisty warunek

$$F(p, v_1, v_2) = 1/F(1 - p, v_2, v_1). \tag{3.2.8}$$

Zbiór krytyczny testu obieramy w zależności od hipotezy alternatywnej, a mianowicie:

a) gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, wtedy zbiorem krytycznym jest przedział $\langle (1 - \alpha, n_1 - 1, n_2 - 1), +\infty)$,

b) gdy hipotezą alternatywną jest K: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, wtedy jako statystykę testową wykorzystujemy $F' = 1/F$ ((3.2.7)) i zbiorem krytycznym jest przedział $\langle F(1-\alpha, n_2 - 1, n_1 - 1), +\infty)$,

c) gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, wtedy test w praktyce opieramy na statystyce

$$F_1 = \max(F, F') = \frac{\max(S_1^{*2}, S_2^{*2})}{\min(S_1^{*2}, S_2^{*2})}, \tag{3.2.9}$$

otrzymując jako zbiór krytyczny przedział $\langle F(1 - \frac{1}{2}\alpha, n_l - 1, n_m - 1), +\infty)$, gdzie n_l jest licznością próbki, dla której obliczono wariancję licznika, a n_m – mianownika.

Zadanie 3.9. Wykonano dwiema różnymi metodami pomiary średnicy włókien wełny, otrzymując (w mm): 1 metodą $n_1 = 20$, $s_1^2 = 3{,}8$; 2 metodą $n_2 = 8$, $s_2^2 = 4{,}1$. Przy założeniu normalności zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę, że obydwie metody pomiaru średnicy włókna są jednakowo dokładne (hipoteza H: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), wobec hipotezy alternatywnej K: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

R o z w i ą z a n i e. Ze względu na hipotezę alternatywną zbiór krytyczny tworzymy dla statystyki (3.2.7) i jest nim przedział $\langle F(1 - \alpha, v_2, v_1), +\infty)$.

Z tablic kwantyli rozkładu F Snedecora odczytujemy, że $F(1 - \alpha, n_2 - 1, n_1 - 1) =$

$= F(0{,}95,\ 7{,}19) = 2{,}63$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $\langle 2{,}63,\ +\infty)$. Obliczona wartość statystyki $F'_{\text{obl}} = \dfrac{s_2^{*2}}{s_1^{*2}} = 1{,}08$ nie należy do tego przedziału, nie mamy wobec tego podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy H na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

3.2.4. Weryfikacja hipotezy o równości wartości przeciętnych badanej cechy dwóch populacji.

M o d e l 1. Badana cecha X ma w dwóch populacjach rozkłady $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$ odpowiednio o znanych σ_1, σ_2 i nieznanych μ_1 i μ_2.

Weryfikujemy hipotezę H: $\mu_1 = \mu_2$. Oznaczamy poziom istotności przez α. Z obu populacji pobieramy dwie niezależne próbki, o licznościach odpowiednio równych n_1 i n_2. Do weryfikacji hipotezy H stosujemy test oparty na statystyce

$$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \tag{3.2.10}$$

gdzie $\bar{X}_1$ i $\bar{X}_2$ są odpowiednio średnimi arytmetycznymi pobranych próbek. Statystyka ta przy założeniu prawdziwości hipotezy H ma rozkład $N(0, 1)$. Zbiorami krytycznymi testu są przedziały:

$(-\infty,\ -u(1-\alpha)\rangle$ – gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1 < \mu_2$,

$\langle u(1-\alpha),\ +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1 > \mu_2$,

$(-\infty,\ -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha),\ +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Zadanie 3.10. Na dwóch różnych wagach zważono po 10 odcinków 100 m przędzy i uzyskano rezultaty (w g) na 1 wadze: 5,25, 5,98, 5,83, 5,58, 5,35, 5,59, 5,41, 5,81, 5,95, 5,72; na 2 wadze: 5,31, 5,13, 5,64, 5,89, 5,17, 5,18, 5,27, 5,73, 5,08, 5,24. Wiadomo, że wariancja mas stumetrowych odcinków przędzy dla pierwszej wagi jest równa $\sigma_1^2 = 0{,}06$, a dla drugiej $\sigma_2^2 = 0{,}07$. Zakładając, że rozpatrywana cecha (masa stumetrowego odcinka) ma rozkład normalny na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, zweryfikować hipotezę H, że wartości przeciętne mas odcinków przędzy uzyskiwane przez te wagi są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej K: $\mu_1 \neq \mu_2$.

R o z w i ą z a n i e. Obliczmy najpierw wartości średnie mas uzyskanych na obydwu wagach: otrzymujemy $\bar{x}_1 = 5{,}65$, $\bar{x}_2 = 5{,}36$, a następnie obliczmy wartość statystyki U w myśl wzoru (3.2.10):

$$u_{\text{obl}} = \frac{5{,}65 - 5{,}36}{\sqrt{\dfrac{0{,}06}{10} + \dfrac{0{,}07}{10}}} = 2{,}54.$$

Ze względu na hipotezę alternatywną zbiorem krytycznym jest suma przedziałów $(-\infty,\ -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha),\ +\infty)$. Z tablicy kwantyli rozkładu $N(0,1)$ odczytujemy $u(1-\frac{1}{2}\alpha = u(0{,}95) = 1{,}96$, więc zbiorem krytycznym jest $(-\infty,\ -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96,\ +\infty)$. Ponieważ $u_{\text{obl}} = 2{,}54 \in \langle 1{,}96,\ +\infty)$, więc hipotezę o równości wartości przeciętnych na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ należy odrzucić.

M o d e l 2. Badana cecha X ma w dwóch populacjach rozkłady $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$ o nieznanych ale jednakowych σ_1 i σ_2 $(\sigma_1 = \sigma_2)$. Weryfikujemy hipotezę H: $\mu_1 = \mu_2$.

Założenia o równości odchyleń standardowych można uczynić np. w takim przypadku: jeżeli z dwóch próbek – pobieranych co kilka godzin z bieżącej produkcji – oblicza się w laboratoriach wariancję jakości cechy mierzalnej jednakowego wyrobu wykonywanego przez dwa aparaty i okazują się one przez dłuższy czas praktycznie jednakowe. Najczęściej jednak nie wiemy, czy założenie to jest spełnione, wobec tego, należy najpierw zweryfikować hipotezę o równości wariancji (p. 3.2.3) i dopiero – gdy hipoteza o równości wariancji $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ na przyjętym poziomie istotności nie będzie odrzucona – wówczas stosować poniższy test. Jeśli liczności prób są jednak niewielkie – ponieważ z nie odrzucenia hipotezy nie można wnioskować o jej prawdziwości – pożądane jest bez testowania H: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ stosować *test Cochrona-Coxa* (model 3). Do weryfikacji hipotezy H: $\mu_1 = \mu_2$ w przypadku modelu 2 wykorzystujemy test t oparty na statystyce.

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}, \tag{3.2.11}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy H ma rozkład t Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

Zbiorami krytycznymi testu są przedziały:

$(-\infty, -t(1-\alpha, n_1+n_2-2)\rangle$ – gdy hipotezą alternatywną jest K: $\mu_1 < \mu_2$,

$\langle t(1-\alpha, n_1+n_2-2), +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest K: $\mu_1 > \mu_2$,

$(-\infty, -t(1-\frac{1}{2}\alpha, n_1+n_2-2)\rangle \cup \langle t(1-\frac{1}{2}\alpha, n_1+n_2-2), +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest K: $\mu_1 \neq \mu_2$, gdzie $t(p, v)$ oznacza kwantyl rzędu p rozkładu Studenta o v stopniach swobody.

Zadanie 3.11. Wysunięto hipotezę, że stopień wyprania tkaniny wełnianej płatkami mydlanymi jest wyższy od stopnia wyprania sulfapolem. W celu sprawdzenia tej hipotezy wykonano pomiary stopnia wyprania 10 wycinków tkaniny pranej płatkami, otrzymując w procentach wyniki: 74,8, 75,1, 73,0, 72,8, 76,2, 74,6, 76,0, 73,4, 72,9, 71,6 oraz 7 wyników prania sulfapolem, otrzymując: 56,9, 57,8, 54,6, 59,0, 57,1, 58,2, 57,6. Zakładając, że stopień wyprania tkaniny ma rozkład normalny na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować wysuniętą hipotezę.

R o z w i ą z a n i e. Hipotezę badaną o wyższym przeciętnie stopniu wyprania tkaniny płatkami zamieniamy na hipotezę, że wartości przeciętne stopni wyprania są jednakowe i raczej spodziewamy się odrzucenia tej hipotezy. Formalnie zatem stawiamy hipotezę H: $\mu_p = \mu_s$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $\mu_p > \mu_s$. Z obliczeń otrzymujemy dla płatków $\bar{x}_1 = 74,0$, $s_1^2 = 2,08$, $n_1 = 10$, dla sulfapolu $\bar{x}_2 = 57,3$, $s_2^2 = 1,65$, $n_2 = 7$.

Ponieważ nie wiemy, czy jest spełnione założenie o równości wariancji, zweryfikujemy najpierw hipotezę H_1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, wobec hipotezy alternatywnej K_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Obliczając wartość statystyki F_1, otrzymujemy

$$F_{1\,\text{obl}} = \frac{10}{9} \cdot 2,08 : (\tfrac{7}{6} \cdot 1,65) = 1,20.$$

Z tablicy kwantyli rozkładu F Snedecora otrzymujemy, że $F(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n_1-1,\ n_2-1)=$ $=F(0{,}975, 9, 6)=5{,}52$, więc zbiorem krytycznym jest $W=\langle 5{,}52, +\infty)$. Ponieważ $1{,}20 \notin W$, więc nie ma podstawy do odrzucenia hipotezy o równości wariancji na przyjętym poziomie istotności. W celu weryfikacji hipotezy H: $\mu_1 = \mu_2$ obliczamy wartość statystyki t według wzoru (3.2.11), otrzymując

$$t_{\text{obl}} = \frac{74{,}0 - 57{,}3}{\sqrt{\dfrac{10\cdot 2{,}08 + 7\cdot 1{,}65}{10+7-2}\cdot\dfrac{17}{70}}} = 23{,}07.$$

Z tablic kwantyli rozkładu Studenta otrzymujemy $t(1-\alpha,\ n_1+n_2-2)=t(0{,}95,\ 15)=1{,}75$. Zbiorem krytycznym testu – wobec hipotezy K: $\mu_1>\mu_2$ jest zatem $W=\langle 1{,}75, +\infty)$. Ponieważ obliczona wartość statystyki $t=23{,}07 \in W$, więc hipotezę H należy – przy przyjętym poziomie istotności – odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej, według której stopień wyprania płatkami jest wyższy niż sulfapolem.

M o d e l 3. Badana cecha X ma w dwóch populacjach rozkłady $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$ odpowiednio o nieznanych σ_1, σ_2. Weryfikujemy hipotezę H: $\mu_1=\mu_2$.

Test oparty jest na statystyce (*Cochrana* i *Coxa*)

$$C = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1-1} + \dfrac{S_2^2}{n_2-1}}}. \tag{3.2.12}$$

Rozkład tej statystyki jest zależny od liczności próbek oraz od stosunku σ_1/σ_2, którego nie znamy, jednakże dla danych n_1 i n_2 można znaleźć przybliżoną wartość $c(p,\ n_1,\ n_2)$ kwantyla rzędu p rozkładu zmiennej C, a mianowicie

$$c(p,n_1,n_2) \cong \left(\frac{s_1^2}{n_1-1}t(p,\ n_1-1) + \frac{s_2^2}{n_2-1}t(p,\ n_2-1)\right) : \left[\frac{s_1^2}{n_1-1} + \frac{s_2^2}{n_2-1}\right]. \tag{3.2.13}$$

Zbiory krytyczne testu wyznacza się analogicznie jak w poprzednich modelach, tzn. zbiorami krytycznymi są przedziały:

$(-\infty,\ -c(1-\alpha,\ n_1,\ n_2)\rangle$ – gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1<\mu_2$,

$\langle c(1-\alpha,\ n_1,\ n_2),\ +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1>\mu_2$,

$(-\infty,\ -c(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n_1,\ n_2)\rangle \cup \langle c(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n_1,\ n_2),\ +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Zadanie 3.12. W pewnym przedsiębiorstwie opracowano dwie metody produkcji wyrobu. Dla sprawdzenia, czy obie metody są jednakowo materiałochłonne, zbadano dane o zużyciu surowca dla każdej z metod (w przybliżeniu na jednostkę gotowego produktu), otrzymując wyniki: przy metodzie 1: 3,9, 3,7, 2,7, 2,9, 3,8; przy metodzie 2: 3,9, 1,8, 5,2, 1,7. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ hipotezę, że wartości przeciętne zużycia surowca nie różnią się istotnie, tzn. H: $\mu_1=\mu_2$, jeśli hipotezą alternatywną jest K: $\mu_1 \neq \mu_2$.

R o z w i ą z a n i e. Otrzymujemy: $\bar{x}_1=3{,}40$, $s_1^2=0{,}248$, $n_1=5$; $\bar{x}_2=3{,}15$, $s_2^2=2{,}172$, $n_2=4$. Zweryfikujmy najpierw hipotezę H: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ o równości wariancji zużycia surowca dla obydwu metod w celu stwierdzenia, czy nie można wykorzystać do weryfikacji hipotezy H

testu Studenta. Wartość statystyki $F_{obl}=9{,}34$, a zbiór krytyczny testu przy poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ jest przedziałem $\langle 6{,}59, +\infty)$; hipotezę H_1 o równości wariancji należy zatem odrzucić. Wobec niemożności stosowania statystyki t (3.2.11) należy zastosować test C; obliczmy więc wartość statystyki C według wzoru (3.2.12), otrzymując

$$c_{obl} = \frac{3{,}40 - 3{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}248}{4} + \frac{2{,}172}{3}}} = 0{,}28.$$

Z tablic kwantyli rozkładu t Studenta otrzymujemy $t(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n_1-1)=t(0{,}975,\ 4)=2{,}776$, $t(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n_2-1)=t(0{,}975,\ 3)=3{,}182$, a ze wzoru (3.2.13) otrzymujemy $c(1-\frac{1}{2}\alpha,\ n_1,\ n_2)=$ $=c(0{,}975,\ 5,\ 4)\cong 3{,}150$. Zbiorem krytycznym testu jest $(-\infty,\ -3{,}15\rangle \cup \langle 3{,}15,\ +\infty)$, a ponieważ obliczona wartość $c_{obl}=0{,}28$ nie należy do zbioru krytycznego, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

M o d e l 4. Badana cecha X ma w dwóch populacjach rozkłady $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$ odpowiednio o nieznanych σ_1, σ_2. Weryfikujemy hipotezę H: $\mu_1=\mu_2$ na podstawie prób o dużych licznościach n_1 i n_2 ($n_1, n_2 \geqslant 100$). Test istotności dla sprawdzanej hipotezy H budujemy analogicznie jak w modelu 1, z tą tylko różnicą, że przy obliczaniu wartości statystyki (3.2.10) zamiast nieznanych wariancji σ_1^2 i σ_2^2 przyjmujemy wartości s_1^2 i s_2^2 uzyskane z próbek.

Zadanie 3.13. Średnia prędkość tramwaju (w km/h) obliczona na podstawie zmierzonych w środę prędkości 200 tramwajów była równa 15,1, natomiast średnia prędkość obliczona dla 120 tramwajów w niedzielę wynosiła 16,4. Wariancja prędkości obliczona na podstawie tych wyników wynosiła odpowiednio $s_1^2=6{,}8$, $s_2^2=4{,}3$. Na podstawie uzyskanych danych zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ hipotezę H: $\mu_1=\mu_2$, że średnie prędkości tramwaju we środę i w niedzielę nie różniły się, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu_1<\mu_2$, że średnia prędkość tramwaju we środę jest mniejsza niż w niedzielę.

R o z w i ą z a n i e. Obliczmy wartość u_{obl} statystyki U

$$u_{obl} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{-1{,}3}{0{,}28} = -4{,}64.$$

Ponieważ zbiorem krytycznym jest w tym przypadku przedział $(-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$, a $u(1-$ $-\alpha)=u(0{,}95)=1{,}64$, więc – ze względu na to, że $u_{obl}= -4{,}64 \in (-\infty,\ -1{,}64\rangle$ – hipotezę H należy na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej.

M o d e l 5. *Metoda zmiennych połączonych.* Model ten dotyczy takiego przypadku, gdy przed wykonaniem jakiejś operacji na n elementach próby dokonujemy pomiarów $x_1,\dots,x_n$ pewnej cechy X o rozkładzie normalnym, a następnie po operacji mierzymy tę samą cechę, otrzymując – w tej samej kolejności elementów – wyniki $y_1,\dots,y_n$. Hipotezę dotyczącą równości wartości przeciętnych μ_1 i μ_2 badanej cechy w populacji przed i po operacji zastępujemy hipotezą równoważną H: $\mu_1-\mu_2=0$. Jeśli więc badaną cechę przed operacją oznaczymy przez X, a po operacji przez Y oraz różnicę tych zmiennych losowych oznaczymy przez Z, skąd

$$X - Y = Z \Rightarrow \mu_z = 0,$$

to weryfikacja hipotezy H: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ sprowadza się do weryfikacji równoważnej hipotezy H: $\mu_z = 0$; weryfikujemy ją za pomocą testu t dla wartości przeciętnej (p. 3.2.1, model 2). Statystyką testową jest więc tutaj statystyka

$$t = \frac{\bar{Z}}{S_z}\sqrt{n-1}, \tag{3.2.14}$$

gdzie $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_1^n Z_i = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - Y_i)$, $S_z^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (Z_i - \bar{Z})^2$, która przy założeniu prawdziwości hipotezy H ma rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Zadanie 3.14. Zmierzono ciśnienie tętnicze wśród losowo wybranej grupy chorych na pewną chorobę przed i po podaniu takiego samego leku każdemu z badanych pacjentów. Otrzymano następujące wyniki:

Pacjent		1	2	3	4	5	6	7
Ciśnienie	przed podaniem leku	210	180	260	270	190	250	180
	po podaniu leku	180	160	220	260	200	230	180

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że stosowany lek nie powoduje spadku ciśnienia u pacjentów, wobec hipotezy alternatywnej K, że wartość przeciętna ciśnienia przed podaniem leku jest wyższa niż po podaniu.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez z_i różnicę ciśnień przed i po podaniu leku i-tego pacjenta. Otrzymamy następujące wartości z_i: 30, 20, 40, 10, -10, 20, 0. Weryfikacja hipotezy H: $\mu_1 = \mu_2$ sprowadzi się zatem do weryfikacji hipotezy H: $\mu_z = 0$. Obliczmy $\bar{z}$ oraz s_z: $\bar{z} = 15{,}7$, $s_z = 15{,}9$. Wartość statystyki t obliczona według wzoru (3.2.14) jest równa

$$t_{\text{obl}} = \frac{15{,}7}{15{,}9}\sqrt{6} = 2{,}24.$$

Ze względu na hipotezę K zbiorem krytycznym jest przedział $\langle 1{,}64, +\infty)$. Ponieważ $t_{\text{obl}} = 2{,}42 \in \langle 1{,}64, +\infty)$, więc hipotezę H należy – na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ – odrzucić, czyli wyniki badań przemawiają za tym, że podanie tego leku zmniejsza ciśnienie tętnicze u pacjentów.

3.2.5. Weryfikacja hipotezy o wskaźniku struktury (procencie wyróżnionych sztuk) populacji.

Model. Badana cecha X populacji ma rozkład dwupunktowy zero-jedynkowy z nieznanym parametrem θ. Weryfikujemy hipotezę H: $\theta = \theta_0$ przeciw hipotezie alternatywnej: a) K: $\theta \neq \theta_0$, b) K: $\theta > \theta_0$, c) K: $\theta < \theta_0$.

Test do weryfikacji hipotezy H opieramy na wskaźniku struktury z próby M/n, gdzie M jest liczbą elementów wyróżnionych w próbie o liczności n. Rozpatrzmy tutaj dwa przypadki:

1. Gdy liczność próby $n \geqslant 100$, wtedy do weryfikacji hipotezy H stosujemy test oparty na statystyce

$$U = \frac{M - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}. \tag{3.2.15}$$

Statystyka ta przy założeniu słuszności hipotezy H ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$, przy czym przybliżenie jest wystarczająco dokładne, gdy $n\theta_0 \geqslant 50$.

2. Gdy liczność próbki n nie jest dostatecznie duża, wtedy należy zastosować przekształcenie

$$2 \text{ arc sin} \sqrt{\frac{M}{n}} = \varphi, \tag{3.2.16}$$

wówczas przy założeniu prawdziwości hipotezy H zmienna przekształcona φ, w przypadku gdy $M \neq 0$ i $M \neq n$, ma w przybliżeniu rozkład $N\left(2 \text{ arc sin} \sqrt{\theta_0}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Jako statystykę testową przyjmujemy

$$U = \left(2 \text{ arc sin} \sqrt{\frac{M}{n}} - 2 \text{ arc sin} \sqrt{\theta_0}\right)\sqrt{n} \tag{3.2.17}$$

uzyskaną w wyniku przybliżonej standaryzacji statystyki φ. Wobec tego statystyka ta ma oczywiście w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$. Tablica 2 podaje dla odpowiednich p wartości φ spełniające warunek $\varphi = 2 \text{ arc sin} \sqrt{p}$.

Ponieważ w obydwu przypadkach rozkład statystyki testowej jest identyczny, więc zbiory krytyczne i procedura testowa w obydwu przypadkach są jednakowe. Zbiory krytyczne są następujące:

gdy $K: \theta \neq \theta_0$ – suma przedziałów $(-\infty, -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha), +\infty)$,
gdy $K: \theta < \theta_0$ – przedział $(-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$,
gdy $K: \theta > \theta_0$ – przedział $\langle u(1-\alpha), +\infty)$,

gdzie $u(1-\frac{1}{2}\alpha)$ i $u(1-\alpha)$ są kwantylami rozkładu $N(0, 1)$ rzędów $1-\frac{1}{2}\alpha$ i $1-\alpha$ odpowiednio.

Jeżeli u_{obl} należy do zbioru krytycznego, to hipotezę H – na przyjętym poziomie istotności α – odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, w przeciwnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Zadanie 3.15. Wylosowano 300 mieszkań w Łodzi, w 54 przypadkach mieszkania te były wyposażone w telefon. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H, że wskaźnik struktury (frakcja) θ mieszkań w Łodzi mających telefon jest równy 0,4, wobec hipotezy alternatywnej $K: \theta \neq 0{,}4$.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ próba jest liczna i $n\theta = 120 > 50$ (przypadek 1) stosujemy test oparty na statystyce (3.2.15). Jej wartość jest równa

$$u_{\text{obl}} = \frac{54 - 120}{\sqrt{300 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = -7{,}78.$$

Odczytana z tablicy wartość $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$, więc zbiorem krytycznym jest $W = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$. Ponieważ $u_{\text{obl}} = -7{,}78 \in W$, więc hipotezę H należy odrzucić na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ na korzyść hipotezy alternatywnej K.

ZADANIE 3.16. W celu stwierdzenia czy dana moneta jest symetryczna (w tym sensie, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia reszki), wykonano 20 rzutów tą monetą, otrzymując 12 orłów. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że moneta jest symetryczna $H: \theta = \frac{1}{2}$, wobec hipotezy alternatywnej $K: \theta \neq \frac{1}{2}$.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ liczność próby jest mała, więc korzystamy z przypadku 2. Obliczmy zatem wartość u_{obl} statystyki U(3.2.17). Mamy $\frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}6$; z tabl. 2 odczytujemy, że $2 \arcsin\sqrt{0{,}6} = 1{,}772$ oraz $2 \arcsin\sqrt{0{,}5} = 1{,}571$, a zatem

$$u_{\text{obl}} = (1{,}772 - 1{,}571)\sqrt{20} = 0{,}901.$$

Z tablicy kwantyli rozkładu $N(0,\ 1)$ odczytujemy, że $u(1-\alpha) = u(0{,}995) = 2{,}58$, więc zbiorem krytycznym jest $W = (-\infty,\ -2{,}58\rangle \cup \langle 2{,}58,\ +\infty)$. Ponieważ $u_{\text{obl}} \notin W$, więc nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H na przyjętym poziomie istotności.

3.2.6. Weryfikacja hipotezy o równości wskaźników struktury dwóch populacji.

M o d e l. Badana cecha X w dwóch populacjach ma rozkład dwupunktowy z parametrami θ_1 i θ_2 odpowiednio. Weryfikujemy hipotezę $H: \theta_1 = \theta_2$ przeciw hipotezie alternatywnej: a) $K: \theta_1 \neq \theta_2$, b) $K: \theta_1 > \theta_2$, c) $K: \theta_1 < \theta_2$. Rozpatrzmy tutaj następujące przypadki:

1. Obie próby o liczności $n_1,\ n_2 \geqslant 100$. Oznaczmy przez M_1 i M_2 zmienne losowe przyjmujące wartości równe liczbie elementów wyróżnionych w tych próbach oraz niech $\theta_1^* = \frac{M_1}{n_1}$, $\theta_2^* = \frac{M_2}{n_2}$, $\theta^* = \frac{M_1 + M_2}{n_1 + n_2}$. Wtedy statystyka

$$U = \frac{\theta_1 - \theta_2^*}{\sqrt{\frac{\theta^*(1-\theta)}{n}}}, \quad \text{gdzie} \quad n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}, \tag{3.2.18}$$

ma – przy założeniu prawdziwości hipotezy H – rozkład asymptotycznie normalny $N(0,\ 1)$.

Statystykę wykorzystujemy do budowy testu, przyjmując następujące zbiory krytyczne:

sumę przedziałów $(-\infty,\ -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha), +\infty)$ w przypadku, gdy hipotezą alternatywną jest hipoteza $K: \theta_1 \neq \theta_2$,

przedział $(-\infty,\ -u(1-\alpha)\rangle$ w przypadku, gdy hipotezą alternatywną jest $K: \theta_1 < \theta_2$,

przedział $\langle u(1-\alpha),\ +\infty)$ – gdy hipotezą alternatywną jest $K: \theta_1 > \theta_2$.

Hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, jeśli

$$u_{\text{obl}} = \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right) : \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}\left(1 - \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n\ _2}\right) : n}$$

znajdzie się w zbiorze krytycznym testu; w przeciwnym przypadku test nie przeczy hipotezie H na danym poziomie istotności.

2. W przypadku gdy liczności prób nie są wystarczająco duże, wykorzystujemy statystykę

$$U = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{M_1}{n_1}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{M_2}{n_2}}\right) \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \tag{3.2.19}$$

która – przy założeniu prawdziwości hipotezy H – ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$; procedura testowa jest więc taka sama jak w poprzednim przypadku.

ZADANIE 3.17. Zbadano opony samochodowe typu 11.00-20/14PR/ produkowane przez dwóch producentów, które zostały wycofane z eksploatacji. Spośród zbadanych 1582 opon producenta A otrzymano 1250 opon wycofanych z powodu zużycia bieżnika, a spośród 589 zbadanych opon producenta B wycofanych z powodu tego defektu otrzymano 421 sztuk. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę H, że procent opon wycofanych z ekspoatacji na skutek zużycia się bieżnika jest jednakowy dla obu producentów, przeciw hipotezie alternatywnej, że nie jest on jednakowy.

R o z w i ą z a n i e. Ze względu na dużą liczność obu próbek wykorzystujemy pierwszy przypadek modelu. Obliczamy zatem wartości statystyk $\theta^*_{1\,\mathrm{obl}} = \frac{1250}{1582} = 0{,}790$, $\theta^*_{2\,\mathrm{obl}} = \frac{421}{589} = 0{,}715$, $\theta^*_{\mathrm{obl}} = \frac{1671}{2171} = 0{,}770$ oraz $n = \dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} = 429{,}20$, $u_{\mathrm{obl}} = (\theta^*_{1\mathrm{obl}} - \theta^*_{2\mathrm{obl}}) : \sqrt{\dfrac{\theta^*_{\mathrm{obl}}(1-\theta^*_{\mathrm{obl}})}{n}} = 3{,}69$.

Z tablicy kwantyli rozkładu $N(0, 1)$ odczytujemy, że $u(1 - \frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}995) = 2{,}58$, więc zbiorem krytycznym jest suma przedziałów $(-\infty, -2{,}58\rangle \cup \langle 2{,}58, +\infty)$.

Ponieważ $u_{\mathrm{obl}} = 3{,}69$ należy do zbioru krytycznego, więc hipotezę o jednakowym stopniu zużycia bieżnika dla opon różnych producentów należy odrzucić przy obranym poziomie istotności, na korzyść hipotezy alternatywnej.

ZADANIE 3.18. Spośród sprzedanych 50 telewizorów pewnego typu w okresie gwarancyjnym, 8 spośród nich wymagało naprawy, natomiast spośród 35 telewizorów drugiego typu naprawy gwarancyjnej wymagało 5. Czy można na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ uznać za słuszną hipotezę H, że procenty napraw gwarancyjnych telewizorów tych dwóch typów są jednakowe, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza, że procent telewizorów naprawczych w okresie gwarancyjnym dla pierwszego typu jest wyższy niż dla drugiego?

R o z w i ą z a n i e. Ze względu na zbyt małą liczność próbek wykorzystujemy drugi przypadek modelu. Obliczamy zatem wartości statystyki $\dfrac{M_1}{n_1}$ i $\dfrac{M_2}{n_2}$, otrzymując $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{8}{50} = 0{,}160$, $\dfrac{m_2}{n_2} = \dfrac{5}{35} = 0{,}143$ oraz przy wykorzystaniu tablicy 2 wartość u_{obl} statystyki U określonej wzorem (3.2.19)

$$u_{\mathrm{obl}} = (0{,}823 - 0{,}776)\sqrt{\frac{50 \cdot 35}{50 + 35}} = 0{,}213.$$

Z tablicy kwantyli rozkładu $N(0, 1)$ odczytujemy, że $u(1-\alpha) = u(0{,}95) = 1{,}64$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $\langle 1{,}64, +\infty)$. Ponieważ wartość $u_{\mathrm{obl}} = 0{,}213 \notin \langle 1{,}64, +\infty)$, więc na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy H.

3.2.7. Weryfikacja hipotezy o równości wielu wariancji. Uogólnieniem testu omawianego w p. 3.2.3 są testy do weryfikacji hipotezy o równości wariancji badanej cechy w kilku populacjach, które rozpatrzymy dla następującego modelu.

M o d e l 1. Badana cecha X w k ($k \geqslant 3$) populacjach ma rozkład $N(\mu_i, \sigma_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Weryfikacja hipotezy $H: \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2$ przeciw hipotezie alternatywnej, że nie wszystkie wariancje są równe.

Weryfikację hipotezy H będziemy opierali na wynikach k próbek o licznościach $n_1, \ldots, n_k$, pobranych losowo odpowiednio z tych populacji. Rozważymy dalej przypadki trzech różnych testów do jej weryfikacji.

1. *Test Bartletta.* Oznaczmy przez x_{ij} j-tą obserwację i-tej populacji oraz niech

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \qquad (n_i - 1) s_i^{*2} = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_1^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k} \right), \quad \text{gdzie} \quad n = \sum_1^k n_i. \tag{3.2.20}$$

Hipotezę H weryfikujemy za pomocą testu opartego na statystyce

$$\chi^2 = \frac{2{,}303}{c} \left[(n-k) \log \frac{\sum_1^k (n_i - 1) S_i^{*2}}{n-k} - (n_i - 1) \log S_i^{*2} \right]. \tag{3.2.21}$$

Jak wykazał Bartlett ([2]), statystyka ta ma w przybliżeniu – nawet dla niezbyt licznych prób ($n_i \geqslant 6$) – rozkład $\chi^2(k-1)$. Zbiorem krytycznym testu jest przedział $\langle \chi^2(1-\alpha, k-1), +\infty)$, gdzie $\chi^2(1-\alpha, k-1)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu $\chi^2(k-1)$. Test Bartletta jest bardzo czuły na odchylenia od normalności rozkładów.

U w a g a. Często kłopotliwe jest obliczenie wartości c. W przypadku jednakowych liczności wszystkich prób łatwo wykazać, że $c = 1 + \dfrac{k+1}{3(n-k)}$. Jednakże w pewnych przypadkach można tego uniknąć; zauważmy bowiem, że $c > 1$, jeśli więc wartość χ^2 obliczona z ostatniego wzoru przy $c = 1$ nie wpadnie do zbioru krytycznego, to tym bardziej jest to niemożliwe przy $c > 1$, a więc wówczas nie ma potrzeby obliczać wartości c.

2. *Test Hartleya.* W przypadku gdy liczności próbek pobranych z tych k populacji są równe, tzn. $n_1 = \ldots = n_k = n \geqslant 5$, wtedy do weryfikacji hipotezy H można także wykorzystać test Hartleya oparty na statystyce

$$H = \frac{\max(S_i^2)}{\min(S_i^2)} = \frac{\max(S_i^{*2})}{\min(S_i^{*2})}. \tag{3.2.22}$$

Zbiorem krytycznym testu jest przedział $\langle H(1-\alpha, k, n), +\infty)$, gdzie $H(1-\alpha, k, n)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu statystyki H przy danych k i n (tabl. 11).

3. *Test Cochrana.* Przy tym samym ograniczeniu, co przy teście Hartleya, do weryfikacji hipotezy H można wykorzystać test Cochrana oparty na statystyce

$$G = \frac{\max(S_i^2)}{\sum_1^k S_i^2} = \frac{\max(S_i^{*2})}{\sum_1^k S_i^{*2}}. \tag{3.2.23}$$

Zbiorem krytycznym tego testu jest przedział $\langle G(1-\alpha, k, n), +\infty)$, gdzie $G(1-\alpha, k, n)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu statystyki G przy danych k i n (tabl. 10).

Zadanie 3.19. W celu stwierdzenia czy wariancje ocen uzyskanych na egzaminie z pewnego przedmiotu przez studentów trzech wydziałów pierwszego roku pewnej uczelni są jednakowe, dla losowo wybranej z każdego wydziału grupy 30 studentów obliczono wariancje ocen, otrzymując: $s_1^2=1{,}4$, $s_2^2=0{,}9$, $s_3^2=1{,}1$. Zakładając, że rozkłady ocen są normalne, na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę o równości wariancji ocen dla wszystkich studentów pierwszego roku tych trzech wydziałów.

Rozwiązanie. Do weryfikacji tej hipotezy wykorzystajmy najpierw test Bartletta. Obliczmy zatem

$$s_1^{*2} = \frac{n}{n-1}s_1^2 = 1{,}448, \quad s_2^{*2} = \frac{n}{n-1}s_2^2 = 0{,}931, \quad s_3^{*2} = \frac{n}{n-1}s_3^2 = 1{,}138,$$

$$\sum_1^3 s_i^{*2} = 3{,}517, \quad \log s_1^{*2} = 0{,}1608, \quad \log s_2^{*2} = -0{,}0311,$$

$$\log s_3^{*2} = 0{,}0561, \quad \sum_1^3 \log s_i^{*2} = 0{,}1858,$$

następnie według wzoru (3.2.21) obliczamy

$$\chi^2_{\text{obl}} = \frac{2{,}303}{c}\left[87\log\frac{29\cdot 3{,}517}{87} - 29\cdot 0{,}1858\right] = \frac{1{,}426}{c}.$$

Z tablic kwantyli rozkładu (tabl. 8) odczytujemy $\chi^2(1-\alpha, k-1) = \chi^2(0{,}95, 2) = 5{,}991$, więc zbiorem krytycznym testu jest $W = \langle 5{,}991, +\infty)$, a ponieważ $1{,}426 \notin W$, więc tym bardziej $\frac{1{,}426}{c} \notin W$ – wobec $c>1$ – więc nie ma powodu do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na przyjętym poziomie istotności. Ponieważ liczności prób były równe, więc możemy wykorzystać także test Hartleya oraz test Cochrana.

Dla testu Hartleya otrzymamy wartość statystyki

$$H_{\text{obl}} = \frac{s^2_{\max}}{s^2_{\min}} = 1{,}556,$$

a z tabeli 11 kwantyli rozkładu H odczytujemy, że $H(1-\alpha, k, n) = H(0{,}95, 3, 30) = 2{,}40$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $\langle 2{,}40, +\infty)$. Ponieważ $H_{\text{obl}} = 1{,}556 \notin \langle 2{,}40, +\infty)$, więc brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na przyjętym poziomie istotności.

Dla testu Cochrana natomiast otrzymujemy

$$G_{\text{obl}} = \frac{s_{\max}^2}{\sum\limits_{1}^{3} s_i^2} = 0{,}412,$$

a z tablicy 10 kwantyli rozkładu G odczytujemy, że $G(1-\alpha, k, n) = G(0{,}95, 3, 30) = 0{,}497$, więc zbiorem krytycznym jest $W = \langle 0{,}497, +\infty)$, a ponieważ $G_{\text{obl}} \notin W$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy na poziomie $\alpha = 0{,}05$.

3.3. TESTY ZGODNOŚCI

Niech

$$x_1, \ldots, x_n \tag{3.3.1}$$

będą wartościami próbki pobranej ze zbiorowości generalnej, w której dystrybuanta zmiennej losowej X (badanej cechy) jest nieznana.

Na podstawie np. wykonanych histogramów (p. 1.2) lub też innych danych wysuwamy hipotezę

$$H: \{\text{dystrybuantą badanej cechy jest } F_0(x)\}, \tag{3.3.2}$$

albo też równoważną jej w przypadku cechy ciągłej

$$H: \{\text{gęstością prawdopodobieństwa badanej cechy jest } f_0(x)\}.$$

W przypadku cechy skokowej wysuwamy hipotezę

$$H: \{\text{funkcją prawdopodobieństwa jest } P[X = x_i] = p_i, \quad i \in \mathbf{N}\}.$$

W hipotezach tych F_0, f_0, P mogą być funkcjami całkowicie określonymi albo też zależnymi od nieznanych parametrów.

Testem zgodności nazywamy test do weryfikacji hipotezy prostej albo złożonej (p. 3.1), dotyczącej zgodności pomiędzy rozkładem zbioru wartości w próbie i rozkładem teoretycznym, tj. hipotezy postaci (3.3.2).

Najbardziej znanymi testami zgodności są: 1) test χ^2 (chi-kwadrat) Pearsona oraz 2) test Kołmogorowa. Prócz nich omówimy jeszcze nowsze wyniki, dotyczące jednak wyłącznie normalności rozkładu: test Shapiro-Wilka [28] dla próbek o liczności $n \leqslant 50$ oraz test Kołmogorowa-Lillieforsa [18] oparty na danych uzyskanych przez maszyny cyfrowe (dla $n > 30$).

3.3.1. Test χ^2 Pearsona.

A. Weryfikacja hipotezy H: $F_0(x)$ (3.3.2), gdy F_0 jest całkowicie określona (hipoteza prosta). Poniższe rozważania dotyczą zmiennej losowej (cechy) X ciągłej albo skokowej.

W rozdziale 1 omówiono sposób tworzenia szeregu rozdzielczego z próbki (3.3.1), w rezultacie czego otrzymujemy następujący podział próbki na k klas:

Nr klasy	Granice klas	Liczności n_i doświadczalne
1	$g_0\ g_1$	n_1
2	$g_1\ g_2$	n_2
....	....	....
k	$g_{k-1}\ g_k$	n_k
		$\sum n_i = n$

Wybór liczby i granic klas w testach zgodności omówiono niżej.

Jeżeli hipoteza H jest prawdziwa, to prawdopodobieństwo p_i „sukcesu", że X przyjmie wartość należącą do i-tej klasy ($i=1,\ldots,k$), można obliczyć z zależności

$$p_i = F_0(g_i) - F_0(g_{i-1}). \tag{3.3.3}$$

Tak więc wartość przeciętna liczby sukcesów spośród n niezależnych doświadczeń, które „wpadną" do i-tej klasy jest równa np_i; wartości te dla $i=1,\ldots,k$ nazywamy *licznościami hipotetycznymi* w odróżnieniu od *liczności doświadczalnych* n_i. Zestawmy obecnie obie grupy liczności w tabelce.

Nr klasy	Liczności n_i doświadczalne	Liczności np_i hipotetyczne
1	n_1	np_1
2	n_2	np_2
....	....	....
k	n_k	np_k
	$\sum n_i = n$	$\sum np_i = n$

Za miarę rozbieżności pomiędzy obu grupami liczności, tzn. pomiędzy wynikami z doświadczenia i z hipotezy przyjął Pearson wartość χ_d^2 (czytaj: *chi-kwadrat doświadczalne*)

$$\chi_d^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{3.3.4}$$

statystyki

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{3.3.5}$$

zależnej od zmiennych losowych N_i, których wartości n_i w innej próbce mogą być inne, spełniających warunek $\sum N_i = n$.

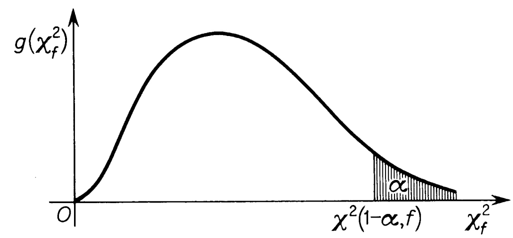
Zasadnicze znaczenie tej statystyki polega na tym, że jej rozkład – przy ustalonym k i założeniu prawdziwości hipotezy – gdy $n \to \infty$ ma rozkład $\chi^2(k-1)$, tzn, o $(k-1)$ stopniach swobody (tabl. 8).

Przy weryfikowaniu hipotezy (3.3.2) na poziomie istotności α korzystamy z tablicy 8, która podaje kwantyle $\chi^2(1-\alpha, f)$ przy $f=k-1$ stopniach swobody, tj. takie krytyczne wartości statystyki (3.3.5) (rys. 3.13), że

$$P\big(\chi^2 \geqslant \chi^2(1-\alpha, f)\big) = \alpha. \tag{3.3.6}$$

Obszarem krytycznym testu jest przedział $\langle\chi^2(1-\alpha, f), +\infty)$. Jeśli więc obliczone z (3.3.4) $\chi_d^2 \in \langle\chi^2(1-\alpha, f), +\infty)$, to hipotezę H odrzucamy na poziomie istotności α, w przeciwnym przypadku próbka nie przeczy hipotezie przy danym α. W praktyce przez porównanie χ_d^2 z odczytanym kwantylem (nazywanym często *wartością krytyczną*), sprawdzamy, która z nierówności zachodzi:

Jeśli $\chi_d^2 < \chi^2(1-\alpha, f)$, to pobrana próbka nie przeczy hipotezie weryfikowanej na poziomie istotności α, jeżeli zaś $\chi_d^2 \geqslant \chi^2(1-\alpha, f)$, to hipotezę odrzucamy na tym samym poziomie istotności.



Rys. 3.13. Wykres gęstości $g(\chi_f^2)$ przy f stopniach swobody

Zadanie 3.20. Z populacji, w której badana cecha ma nieznaną dystrybuantę F, pobrano próbkę o liczności 200. Otrzymane wyniki po podziale na 10 równych klas zawarto w dwóch pierwszych kolumnach poniższej tabeli. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $\{F(x)$ jest dystrybuantą rozkładu równomiernego na przedziale $(45, 50)\}$.

Rozwiązanie. Jeśli H jest prawdziwa, to – wobec $k=10$ – wszystkie $p_i = 0{,}1$, więc wszystkie liczności hipotetyczne są równe $np_i = 20$. Szczegółowe obliczenia w tabeli.

Środki klas	n_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$(n_i - np_i)^2/np_i$
45,25	23	20	9	0,45
45,75	19	20	1	0,05
46,25	25	20	25	1,25
46,75	18	20	4	0,20
47,25	17	20	9	0,45
47,75	24	20	16	0,80
48,25	16	20	16	0,80
48,75	22	20	4	0,20
49,25	20	20	0	0,00
49,75	16	20	16	0,80
$\sum n_i = 200$,	$\sum np_i = 200$			$\chi_d^2 = 5{,}00$

Tak więc $\chi_d^2 = 5$. Z tablicy 8 odczytujemy $\chi^2\,(1-\alpha,\ k-1) = \chi^2(0{,}95,\ 9) = 16{,}919$. Ponieważ obliczona wartość χ_d^2 jest mniejsza od wartości krytycznej, więc pobrana próbka nie przeczy weryfikowanej hipotezie na poziomie istotności 0,05.

Zdarzają się również przypadki w różnych rodzajach doświadczalnictwa, że z pewnych rozważań teoretycznych można ustalić prawdopodobieństwa p_i, z jakimi winny zachodzić zdarzenia $A_1, \dots, A_k$, wówczas, pobierając próbkę o dostatecznej liczności n, można obliczyć liczności doświadczalne n_i : mamy więc wszystkie dane, aby nawet w przypadku cechy niemierzalnej zastosować test χ^2. Zadanie 3.22 ilustruje taki przypadek.

Zadanie 3.21. Wykazać, że równoważną postacią wzoru (3.3.4) jest

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_1^k \frac{n_i^2}{p_i} - n.$$

Rozwiązanie. Wykonujemy w (3.3.4) podniesienie do kwadratu:

$$\chi_d^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{n}\sum_1^k \frac{n_i^2}{p_i} - 2\sum_1^k n_i + n\sum_1^k p_i,$$

a po redukcji otrzymujemy postać równoważną.

Zadanie 3.22. W klasycznych doświadczeniach dotyczących selekcji grochu, Mendel obserwował liczności występowania różnych rodzajów nasion otrzymanych przy krzyżowaniu roślin z okrągłymi i żółtymi nasionami oraz roślin z pomarszczonymi i zielonymi nasionami, a oto wyniki:

Pomarszczone i zielone	32	Pomarszczone i żółte	101
Okrągłe i zielone	108	Okrągłe i żółte	315

Według teoretycznych rozważań prawdopodobieństwa występowania wymienionych rodzajów nasion winny być w stosunku 1 : 3 : 3 : 9. Zweryfikować hipotezę

$$H : \{\text{stosunek liczby czterech rodzajów nasion} = 1 : 3 : 3 : 9\}$$

na poziomie istotności 0,05.

Rozwiązanie. Teoretyczne prawdopodobieństwa wynoszą więc $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{9}{16}$. Wartość statystyki χ_d^2 obliczonej według wyniku zad. 3.21 jest następująca:

$$\chi_d^2 = \frac{1}{556}\left(\frac{32^2}{1} + \frac{108^2}{3} + \frac{101^2}{3} + \frac{315^2}{9}\right)\cdot 16 - 556 = 0{,}47.$$

Ponieważ nie należy ona do obszaru krytycznego $\langle\chi^2(0{,}95,\ 3),\ +\infty) = \langle 7{,}815,\ +\infty)$, więc doświadczenie Mendla nie przeczy hipotezie weryfikowanej na przyjętym poziomie istotności α (a nawet na żadnym poziomie istotności α nie przekraczającym 0,90). Tak więc zgodność między wynikami doświadczeń a wysuniętą hipotezą jest tutaj bardzo dobra.

Zadanie 3.23. Wykonano n niezależnych doświadczeń, wśród których dane zdarzenie A zaszło r razy. Zweryfikować hipotezę H: $\{A$ zachodzi w każdym doświadczeniu z jednakowym prawdopodobieństwem p (danym liczbowo)$\}$ na poziomie istotności α.

Rozwiązanie. Potraktujemy dane jako próbkę o wartościach n zmiennych losowych o rozkładach dwupunktowych: $P(A=1)=p$, $P(A=0)=q$. Są więc dwie grupy o licznościach doświadczalnych r oraz $n-r$ oraz licznościach hipotetycznych np i nq. Obliczamy

$$\chi^2 = \frac{(r-np)^2}{np} + \frac{(n-r-nq)^2}{nq} = \left(\frac{r-np}{\sqrt{npq}}\right)^2.$$

Ta zmienna losowa dla dużych n ma w przybliżeniu rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody (bo $k-1=1$). Jeśli więc obliczona wartość χ_d^2 jest mniejsza od kwantyla $\chi^2(1-\alpha, 1)$, to próbka nie przeczy hipotezie na przyjętym poziomie istotności, w przeciwnym przypadku hipotezę odrzucamy przy tym samym α.

Zadanie 3.24. Wykazać, że w przypadku hipotezy prostej statystyka

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}, \quad \sum N_i = n \tag{1}$$

ma asymptotycznie przy $n \to \infty$ rozkład χ^2 z $k-1$ stopniami swobody.

Rozwiązanie. Składniki statystyki χ^2 są kwadratami zmiennych losowych X_i postaci

$$X_i = \frac{N_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Przy $n \to \infty$ można traktować n_i jako wartości niezależnych zmiennych losowych N_i o rozkładzie Poissona z parametrami $\lambda_i = np_i$, skąd $EN_i = np_i$, $D^2 N_i = np_i$, spełniających warunek $\sum N_i = n$. Wobec tego (2) są standaryzowanymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami np_i. Ale przy $n \to \infty$ parametry te rosną nieograniczenie, więc rozkłady zmiennych losowych X_i dążą przy $n \to \infty$ do rozkładów $N(0, 1)$.

Ponieważ z (1) i (2) wynika, że

$$\chi^2 = \sum_1^k X_i^2,$$

tzn. χ^2 jest sumą kwadratów k zmiennych losowych o rozkładach $N(0, 1)$ spełniających jeden warunek liniowy $\sum (np_i)^{1/2} X_i = 0$, więc liczba niezależnych X_i^2 wynosi $k-1$, skąd teza.

B. Weryfikacja hipotezy H: $F(x) = F(x; \theta_1, \ldots, \theta_l)$, gdy dystrybuanta F o znanej postaci zależy od l nieznanych parametrów $\theta_1, \ldots, \theta_l$ (hipoteza złożona). Dokonujemy podziału – jak w przypadku A – na klasy, których liczbę oznaczymy przez k. Jeżeli dystrybuanta F zależy od l parametrów, $l < k-1$, to, aby móc obliczyć p_i z (3.3.3), należy estymować nieznane parametry, od których p_i zależą. Zastosujemy tutaj metodę największej wiarogodności (p. 2.2). Funkcja wiarogodności w przypadku zgrupowanych danych przyjmuje postać

$$L = p_1^{n1}(\theta_1, \ldots, \theta_l) \ldots p_k^{nk}(\theta_1, \ldots, \theta_l) \tag{3.3.7}$$

zwaną *wielomianową funkcją wiarogodności*. Po zlogarytmowaniu, zróżniczkowaniu względem θ_i oraz przyrównaniu do zera, otrzymamy układ l równań wiarogodności po zgrupowaniu danych

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{3.3.8}$$

którego rozwiązania $\hat{\theta}_j(g_0, \ldots, g_k)$ przyjmujemy jako estymatory nieznanych parametrów

θ_i. Wówczas jak wykazał Fisher [7] statystyka

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i(\theta_1, \ldots, \theta_l))^2}{np_i(\theta_1, \ldots, \theta_l)} \tag{3.3.9}$$

ma przy $n \to \infty$ rozkład χ^2 z $k-1-l$ stopniami swobody.

Efektywne rozwiązanie układu (3.3.8) w ogólnym przypadku nie jest możliwe; przykładem efektywnego rozwiązania przy $l=1$ jest zad. 3.25. Dlatego w praktyce jako estymatory parametrów przyjmuje się rozwiązania układu równań wiarogodności, dla niezgrupowanych danych ((2.2.11)). Wówczas jednak statystyka χ^2 przy $n \to \infty$ nie ma rozkładu χ^2, ale ma pewien rozkład, którego wartości krytyczne, tj. kwantyle 95% zawierają się między kwantylami χ^2 (95%, $k-1-l$) a χ^2(95%, $k-1$); to samo dotyczy 99%. Ponieważ rzadko estymuje się z próbki więcej niż $l=2$ parametry, więc ze wzrostem liczby k klas wartości krytyczne obu rozkładów – przy danym α – coraz mniej się różnią (tabl. 8).

Gdy liczba klas wynosi co najmniej 20 i estymujemy nie więcej niż 2 parametry zwykłą metodą największej wiarogodności, wtedy można korzystać z wartości krytycznych (kwantyli) rozkładu χ^2 z $k-1-l$ stopniami swobody, jeśli jednak liczba klas jest mniejsza, to stosowanie powyższej metody może prowadzić do błędnej decyzji.

W przypadku weryfikowania hipotezy dotyczącej normalności rozkładu pożądane jest korzystanie przy $n \leqslant 50$ z testu Shapiro-Wilka; gdy $n > 30$, wtedy można również korzystać z testu Kołmogorowa-Lillieforsa.

Zadanie 3.25. Wyznaczyć estymator parametru λ w rozkładzie Poissona wielomianową metodą największej wiarogodności, tzn. dla zgrupowanych danych.

R o z w i ą z a n i e . Niech w próbie n-elementowej zdarzenie $X=i$ zrealizuje się n_i razy dla $i=0,1,\ldots,k$, wówczas funkcja wiarogodności L dla zgrupowanych danych jest

$$L = \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right)^{n_0} \ldots \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right)^{n_k} = \prod_0^k \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\right)^{n_i},$$

a logarytmem jej

$$\ln L = -\lambda \sum_0^k n_i + \sum_0^k in_i \ln\lambda - \sum_0^k n_i \ln(i!).$$

Stąd równaniem wiarogodności (3.3.8) jest

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_0^k in_i = 0,$$

a pierwiastkiem jego $\hat{\lambda}$ jest poszukiwany estymator

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_0^k in_i.$$

Zadanie 3.26. Obserwowano pod mikroskopem zawiesinę drożdży i liczono komórki, które znalazły się w 400 kwadratach na jakie był podzielony 1 mm^2 na szkiełku. Dane zawarto w pierwszych dwóch kolumnach tabeli. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że rozkład liczby komórek drożdży jest rozkładem Poissona.

Liczba komórek i	Liczności doświadczalne n_i	Liczności hipotetyczne np_i	$(n_i - np_i)^2/np_i$
0	0	3,7	3,7000
1	20	17,4	0,3885
2	43	40,6	0,1419
3	53	63,4	1,7060
4	86	74,2	1,8765
5	70	69,4	0,0052
6	54	54,2	0,0007
7	37	36,2	0,0177
8	18	21,2	0,4830
9	10	11,0	0,0909
10	5	5,2	0,0077
11	2	2,2	0,0182
$\geqslant 12$	2	1,3	0,3769
Razem	$n = 400$	$\sum np_i = 400$	$\chi_d^2 = 8{,}8132$

R o z w i ą z a n i e. Jak wiadomo (zad. 3.25) estymatorem parametru λ w rozkładzie Poissona, uzyskanym metodą największej wiarogodności dla zgrupowanych danych, jest średnia ważona $\bar{X}$. Obliczamy z danych $\bar{x} = \frac{1}{400}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 43 + \ldots + 12 \cdot 2) = 4{,}68$ i wartość tę przyjmujemy jako oszacowanie parametru λ. Wartości $p_i = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ dla $i = 0, \ldots, 12$ ustalamy na podstawie tabl. 4 cz. I. Mnożąc przez $n = 400$, otrzymujemy liczności hipotetyczne zawarte w trzeciej kolumnie, w czwartej kolumnie obliczone są składniki, których sumą jest $\chi_d^2 \approx 8{,}813$. Ponieważ estymowano 1 parametr wielomianowej funkcji wiarogodności, tzn. dla zgrupowanych danych, więc liczba stopni swobody wynosi $13 - 1 - 1 = 11$. Z tablicy 8 odczytujemy $\chi^2(0{,}95,\ 11) = 19{,}675$. Ponieważ $\chi_d^2 < \chi^2(0{,}95,\ 11)$, więc wyniki próby nie przeczą hipotezie na poziomie istotności 0,05.

C. Dobór granic i liczby klas. Stosuje się dwa sposoby podziału na klasy:

1) podział na klasy jednakowej długości,

2) podział na klasy o jednakowym prawdopodobieństwie.

1. Sposób pierwszy, łącznie z doborem granic klas, omówiono w rozdz. 1. Przy stosowaniu testu χ^2 wartość obliczanej statystyki χ^2 (3.3.4) zależy oczywiście zarówno od doboru liczby k klas jak i od wyboru granic klas przy danych wynikach próbki. Ponieważ jednak przy określonej liczbie k klas graniczny rozkład (tj. przy $n \to \infty$) statystyki χ^2 (3.3.5) jest rozkładem χ^2 z odpowiednią liczbą stopni swobody, więc nie zależy on od wyboru granic klas. Przy ustalonej jednak liczności próbki n rozkład statystyki χ^2 jest zależny – przy danym k – od doboru granic klas w sposób dokładnie dotychczas nie zbadany, dlatego konieczna jest duża liczność próbki $n \geqslant 100$ oraz to, aby liczności np_i hipotetyczne w poszczególnych klasach nie były na ogół mniejsze od 5. Mniejsze liczności hipotetyczne w rozkładach jednomodalnych, przy podziale na klasy jednakowej długości, występują w klasach skrajnych; Cochran (czyt. Kokren) wykazał, że gdy liczba stopni swobody wynosi nie mniej

niż 6, wtedy dopuszczalne jest, aby liczności hipotetyczne nawet w dwóch klasach były niższe od 5 nie mniej jednak niż 1, zarówno przy poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ jak i $\alpha = 0{,}01$.

Często weryfikujemy hipotezę dotyczącą zgodności wyników doświadczalnych z rozkładem $N(m, \sigma)$ o nieznanych obu parametrach. Powstaje wówczas zagadnienie doboru granic klas. Tak np. przy wyborze $k=12$ najbardziej sensowne wydaje się obliczenie $\bar{x}$ i s z próbki i jako długość klasy przyjęcie $0{,}5s$, a jako klasy $(-\infty, \bar{x}-2{,}5s\rangle$, $(\bar{x}-2{,}5s, \bar{x}-2s\rangle$, $(\bar{x}-2s, \bar{x}-1{,}5s\rangle$, $(\bar{x}-1{,}5s, \bar{x}-s\rangle$, $(\bar{x}-s, \bar{x}-0{,}5s\rangle$, $(\bar{x}-0{,}5s, \bar{x}\rangle$ i 5 następnych kolejnych klas długości $0{,}5s$, a szóstą jest $(\bar{x}+2{,}5s, +\infty)$.

W przypadku gdy liczności klas nie spełniają podanych warunków, należy sąsiednie (najczęściej skrajne) klasy połączyć i oczywiście – przy obliczaniu liczby stopni swobody – jako liczbę klas przyjąć liczbę klas po połączeniu, ale należy zdawać sobie sprawę, że wówczas zmieniają się granice klas, a więc także $\bar{x}$, s, skutkiem czego zmienią się zarówno n_i jak i np_i, a w konsekwencji wartości χ_d^2, co może doprowadzić do innej końcowej decyzji.

2. Drugi sposób podziału na określoną liczbę k klas polega na takim ich doborze, aby wszystkie p_i były jednakowe, tzn. by było

$$p_i = \frac{1}{k}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Wówczas – jak łatwo widzieć – znikają wszystkie niedogodności związane z wyborem długości klas i ustaleniem początku pierwszej klasy, zarówno bowiem granice klas jak i ich niejednakowe długości (z wyjątkiem rozkładu równomiernego) są wyznaczone jednoznacznie. Aby jednak można było stosować ten sposób, należy mieć do dyspozycji tablice dystrybuanty (albo kwantyli) danego rozkładu. Jeśli rozkład jest skoncentrowany na przedziale (a, b) (dopuszcza się przy tym $a = -\infty$ lub $b = +\infty$), to prawą granicę g_1 pierwszej klasy szukamy jako taką wartość argumentu, dla której wartość $F(g_1)$ dystrybuanty jest równa $1/k$. Kolejne więc prawe granice g_1 odczytujemy z tablic jako spełniające równości

$$F(g_i) = \frac{i}{k}, \qquad i = 1, \ldots, k-1. \tag{3.3.10}$$

Prawą granicą k-tej klasy jest oczywiście b. Należy więc posługiwać się tablicami możliwie dokładnymi. W przypadku tym liczności np_i hipotetyczne we wszystkich klasach są jednakowe i równe n/k. Gdy liczność próbki n wynosi co najmniej 200, wtedy liczbę k klas należy wyznaczyć w przybliżeniu równą:

Liczba obserwacji n	Liczba k klas
200–400	15–20
400–600	20–24
600–800	24–27
800–1000	27–30
1000–1500	30–35
1500–2000	35–40

Gdy liczność n próbki wzrasta $\approx$ 5, 6 razy, wtedy liczbę klas podwaja się. Statystyka χ^2(3.3.5) w tym przypadku przyjmuje postać (zad. 3.21 przy $p_i = 1/k$)

$$\chi^2 = \frac{k}{n}\sum_{1}^{k} n_i^2 - n. \tag{3.3.11}$$

Z przeprowadzonych badań wynika, że przy takim sposobie podziału na klasy, w porównaniu z pierwszym, moc testu jest na ogół większa względem tych samych hipotez alternatywnych.

Zadanie 3.27. Wyniki pomiarów 400 wartości badanej cechy X zgrupowano w 20 klas o jednakowym prawdopodobieństwie, przy hipotezie, że rozkład badanej cechy X jest rozkładem wykładniczym o gęstości $f(x) = e^{-x}$ dla $x > 0$, a poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

Rozwiązanie. Posługując się tablicą 1 wartości funkcji wykładniczej e^u dla $u < 0$, wyznaczono łatwo przybliżone granice dwudziestu klas, dla których prawdopodobieństwo $p_i = 0{,}05$, $i = 1, \ldots, 20$ (rys. 3.14). Granice te jak i liczności zaobserwowane (doświadczalne) oraz hipotetyczne podano w następującej tabelce:

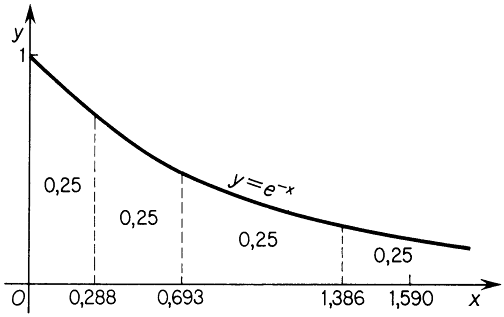
Granice klas	Liczności n_i	Liczności np_i	$(n_i - np_i)^2$
0–0,051	18	20	4
–0,106	25	20	25
–0,163	22	20	4
–0,223	19	20	1
–0,288	23	20	9
–0,357	20	20	0
–0,431	16	20	16
–0,510	15	20	25
–0,598	22	20	4
–0,694	21	20	1
–0,798	17	20	9
–0,916	15	20	25
–1,05	20	20	0
–1,20	22	20	4
–1,38	23	20	9
–1,59	16	20	16
–1,90	18	20	4
–2,30	23	20	9
–3,00	15	20	25
3,00 – $+\infty$	30	20	100
	$\sum n_i = 400$	$\sum np_i = 400$	290

Wartość statystyki χ_d^2 wynosi (wobec tego, że $np_i = 20$ dla $i = 1, \ldots, 20$) $\chi_d^2 = \frac{1}{20} \cdot 290 = 14{,}5$.

Z tablicy 8 odczytujemy kwantyl $\chi^2(1-\alpha, k-1) = \chi^2(0{,}95,\ 19) = 30{,}14$. Wobec nierówności $14{,}5 < 30{,}14$, pobrana próbka nie przeczy hipotezie przy $\alpha = 0{,}05$.

D. Wskazówki przy stosowaniu testu χ^2.

1. Jeżeli weryfikujemy hipotezę dotyczącą rozkładu, którego wartości są stablicowane (a więc normalnego, wykładniczego, gamma ewentualnie innych) pożądane jest dokonanie podziału na klasy o jednakowych prawdopodobieństwach.



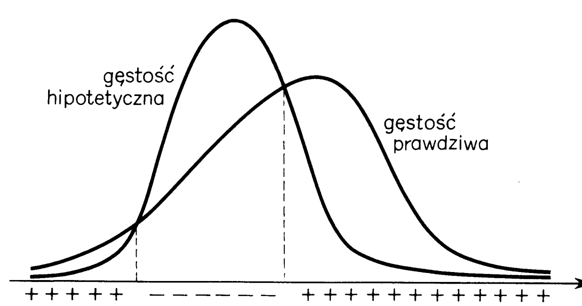
Rys. 3.14. Podział na 4 klasy o jednakowych $p_i = 0{,}25$ dla rozkładu wykładniczego o parametrze $\lambda = 1$

2. Przy liczności próby $n \geqslant 200$ przyjąć liczbę klas zgodnie z podaną tabelką na stronie 110.

3. Przy weryfikacji hipotezy złożonej (p. 3.1), a więc gdy estymuje się parametry na podstawie próbki – należy przestrzegać warunku, aby było co najmniej 20 klas oraz by spełnione były warunki dotyczące liczności poszczególnych klas podane wcześniej.

4. Jeżeli hipotetyczny rozkład, jednomodalny, typu ciągłego, zależy tylko od parametru skali lub przesunięcia (np. rozkład normalny, gamma z nieznanym parametrem skali itp.), to, w przypadku weryfikacji hipotezy prostej (A) testem χ^2, jest pożądane wcześniejsze zastosowanie testu serii (p. 3.4.1) do znaków kolejnych różnic $n_i - np_i$ dla $i = 1, \ldots, k$. (rys. 3.15). Jeżeli hipoteza o losowości serii tych znaków – przy danym α – nie będzie odrzucona, to można stosować test χ^2, przy odrzuceniu hipotezy o losowości znaków należy wnieść poprawkę do weryfikowanej hipotezy prostej tak, by liczbę serii zwiększyć. W przypadku hipotezy złożonej, testu serii stosować nie należy.

Rys. 3.15. Mała liczba serii znaków + i – różnic $n_i - np_i$ sugeruje, że wybór hipotezy nie jest trafny



3.3.2. Test Kołmogorowa.

A. Weryfikacja hipotezy H, że cecha X typu ciągłego ma dystrybuantę $F_0(x)$ całkowicie określoną. Jako statystykę testową Kołmogorow przyjął

$$D_n = \sup_x |F_0(x) - S_n(x)|, \tag{3.3.12}$$

w której $S_n(x)$ jest dystrybuantą empiryczną (doświadczalną) ustaloną na podstawie uporządkowanej próbki

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$$

w sposób następujący:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < x_{(1)}, \\ \frac{k}{n} & \text{dla} \quad x_{(k)} \leqslant x < x_{(k+1)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant x_{(n)}. \end{cases} \tag{3.3.13}$$

Sens wyboru statystyki D_n jako miary „rozbieżności” między F_0 a S_n wyjaśnia *twierdzenie Gliwienki*, którego treścią jest równość

$$\bigwedge_x P\big(\lim_{n\to\infty} S_n(x) = F_0(x) \mid H \textit{ jest prawdziwa}\big) = 1. \tag{3.3.14}$$

Statystyka D_n – w przypadku prawdziwości hipotezy – ma rozkład niezależny od przyjętej hipotezy. Na podstawie tego rozkładu sporządza się tablice kwantyli $d_n(1-\alpha)$ (tabl.12) statystyki D_n; spełniają one więc oczywistą równość

$$P\big(D_n \geqslant d_n(1-\alpha)\big) = \alpha. \tag{3.3.15}$$

W praktycznych zastosowaniach postępuje się jak niżej:

1) porządkujemy wyniki pomiarów według wielkości

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)};$$

2) obliczamy wszystkie różnice

$$\frac{i}{n} - F_0(x_{(i)}) \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n$$

i największą z ich wartości bezwzględnych oznaczamy przez d_n^+

$$d_n^+ = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \frac{i}{n} - F_0(x_{(i)}) \right|;$$

3) obliczamy wszystkie różnice

$$F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}$$

i największą z ich wartości bezwzględnych oznaczamy przez d_n^-

$$d_n^- = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right|;$$

4) wybieramy większą z liczb d_n^+, d_n^-

$$d_n = \max(d_n^+, d_n^-); \tag{3.3.16}$$

5) przy danym poziomie istotności α oraz n odczytujemy z tablicy 12 taką krytyczną wartość $d_n(1-\alpha)$ statystyki Kołmogorowa D_n, która spełnia równość (3.3.15). Obszarem krytycznym jest wówczas przedział $\langle d_n(1-\alpha), 1\rangle$. Jeżeli obliczona w p. 4 wartość $d_n < d_n(1-\alpha)$, to próbka nie przeczy weryfikowanej hipotezie na poziomie istotności α. Jeżeli zaś $d_n \geqslant d_n(1-\alpha)$, to weryfikowaną hipotezę odrzucamy na przyjętym poziomie istotności.

Zadanie 3.28. Wynikami pięcioelementowej próby są: 0,18, 0,56, 0,87, 1,37, 2,46. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ testem Kołmogorowa zweryfikować hipotezę, że próbka została pobrana z populacji, w której dystrybuantą badanej cechy X jest $F(x) = 1 - e^{-x}$ dla $x > 0$, tzn. że rozkładem jest rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda = 1$.

Rozwiązanie. Wartości dystrybuanty hipotetycznej $F(x_i)$ dla $i = 1, \ldots, 5$ ustalono na podstawie tablicy 1 i podano w kolumnie czwartej. Pozostałe kolumny zawierają obliczenia konieczne do wyznaczenia d_n^+ oraz d_n^-:

i	$x_{(i)}$	$\frac{i}{n}$	$F_0(x_{(i)})$	$\frac{i-1}{n}$	$\left\lvert\frac{i}{n} - F_0(x_{(i)})\right\rvert$	$\left\lvert F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right\rvert$
1	0,18	0,2	0,1647	0	0,0353	0,1647
2	0,56	0,4	0,4288	0,2	0,0288	0,2288
3	0,87	0,6	0,5810	0,4	0,0190	0,1810
4	1,37	0,8	0,7456	0,6	0,0544	0,1456
5	2,46	1	0,9145	0,8	0,0855	0,1145

Z tablicy odczytujemy $d_5^+ = 0{,}0855$, $d_5^- = 0{,}2288$, $d_5 = 0{,}2288$. Wartość tę porównujemy z odczytaną z tablicy 12 wartością $d_5(0{,}95) = 0{,}563$ i – wobec tego, że $d_5 < d_5(0{,}95)$ – wnioskujemy, że próbka nie przeczy hipotezie przy $\alpha = 0{,}05$.

B. Weryfikacja hipotezy, że badana cecha ciągła X ma rozkład o dystrybuancie należącej do klasy dystrybuant $F(x, \theta_1, \ldots, \theta_l)$. Jeśli dystrybuanta hipotetyczna F (nazywana często *teoretyczną*) jest zależna od nieznanych parametrów, które estymuje się na podstawie próbki, to rozkład statystyki D_n zależy zarówno od hipotetycznej dystrybuanty F jak i w ogólnym przypadku od prawdziwych, ale nieznanych wartości parametrów.

Grupowanie w klasy również wpływa na rozkład D_n, jeśli jednak długości klas są możliwie małe, a liczność próbki n duża – rzędu kilkuset – można posługiwać się rozkładem granicznym statystyki D_n (3.3.12) (tabl. 13):

$$P(\sqrt{n}D_n \geqslant \lambda(1-\alpha)) = \alpha. \tag{3.3.17}$$

Wartości kwantyli $\lambda\ (1-\alpha)$ dla kilku wartości α podaje tabelka:

Kwantyle granicznego ($n \to \infty$) rozkładu Kołmogorowa

$$P(\sqrt{n}D_n \geqslant \lambda(1-\alpha)) = \alpha$$

$1-\alpha$	0,90	0,95	0,99
$\lambda(1-\alpha)$	1,224	1,354	1,628

Jeśli więc obliczona wartość $\sqrt{n}d_n$ iloczynu $\sqrt{n}$ i wartości statystyki D_n (3.3.11) jest większa albo równa od krytycznej wartości (kwantylu) $\lambda\ (1-\alpha)$, to hipotezę na poziomie istotności α odrzucamy, w przeciwnym przypadku próbka nie przeczy weryfikowanej hipotezie przy poziomie istotności α.

Zadanie 3.29. Przebadano próbkę o liczności $n = 1000$, a wyniki, zgrupowane w 10 wąskich klas, zawarto w kolumnach pierwszej i drugiej. Wysunąć sensowną hipotezę prostą dotyczącą rozkładu i zweryfikować ją na poziomie istotności 0,05.

Granice klas g_i	Liczności n_i	$S_n(g_i)$	Standaryzowane prawe granice klas	$F(g_i)$	$\lvert S_n(g_i)-F(g_i)\rvert$
– 63,0	25	0,025	– 2,0	0,0228	0,0022
63 – 63,5	65	0,090	– 1,5	0,0668	0,0232
63,5 – 64,0	88	0,178	– 1	0,1587	0,0193
64 – 64,5	131	0,309	– 0,5	0,3085	0,0005
64,5 – 65,0	163	0,472	0	0,5000	0,0280
65 – 65,5	208	0,680	0,5	0,6915	0,0115
65,5 – 66,0	149	0,829	1	0,8413	0,0123
66 – 66,5	98	0,927	1,5	0,9332	0,0062
66,5 – 67,0	54	0,981	2,0	0,9772	0,0038
67 –	19	1	$+\infty$	1	0
	$n=1000$				

Rozwiązanie. Rozkład liczności jest zbliżony do symetrycznego, jest jednomodalny z maksimum w jednej ze środkowych klas, co nasuwa hipotezę, że rozkład badanej cechy jest $N(\mu, \sigma)$. Jeśliby w wysuniętej hipotezie przyjąć $\mu = 65$, to w przedziale $\langle 63{,}0,\ 67{,}0\rangle$, a więc o długości 4, mieściłoby się $1000-(25+19)=956$ wyników, co stanowi 95,6%; ale z własności rozkładu normalnego wiemy, że prawdopodobieństwo przyjęcia wartości z przedziału o końcach $\mu-1{,}96\sigma$ i $\mu+1{,}96\sigma$ wynosi 95%, zatem wartość przeciętna przy liczebności 1000 wynosi 950, mało więc różni się od 956. Długość przedziału wynosi $3{,}92\sigma$, a w zadaniu wynosi 4; stąd sensowną hipotezą (bez obliczania $\bar{x}$ i s) jest

$$H\colon \{\text{badana cecha ma rozkład } N(65,\ 1)\}.$$

W trzeciej kolumnie umieszczamy wartości dystrybuanty empirycznej dla zgrupowanych danych obliczone według wzoru

$$S_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<g_0,\\ \dfrac{n_1}{n} & \text{dla} \quad g_0 \leqslant x < g_1,\\ \dfrac{n_1+n_2}{n} & \text{dla} \quad g_1 \leqslant x < g_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant g_k, \end{cases}$$

w czwartej – standaryzowane końce prawych klas $(g_i - 65)\colon 1$, w piątej odczytane z tablicy 5 wartości dystrybuanty $F(g_i)$ rozkładu $N(0, 1)$, a w ostatniej wartości bezwzględne różnic między dystrybuantami, z których największą jest $d_n = 0{,}0280$. Następnie obliczamy $\sqrt{n}d_n = \sqrt{1000}\cdot 0{,}0280 \approx 0{,}886$. Kwantylem rzędu $1-\alpha = 0{,}95$ granicznego rozkładu Kołmogorowa jest $\lambda_{(0,95)} = 1{,}354$. Ponieważ

$$\sqrt{n}d_n = 0{,}886 < 1{,}354 = \lambda_{(0,95)},$$

więc wyniki próbki na poziomie ufności 0,05 nie przeczą hipotezie, że badana cecha ma w całej populacji rozkład $N(65,\ 1)$.

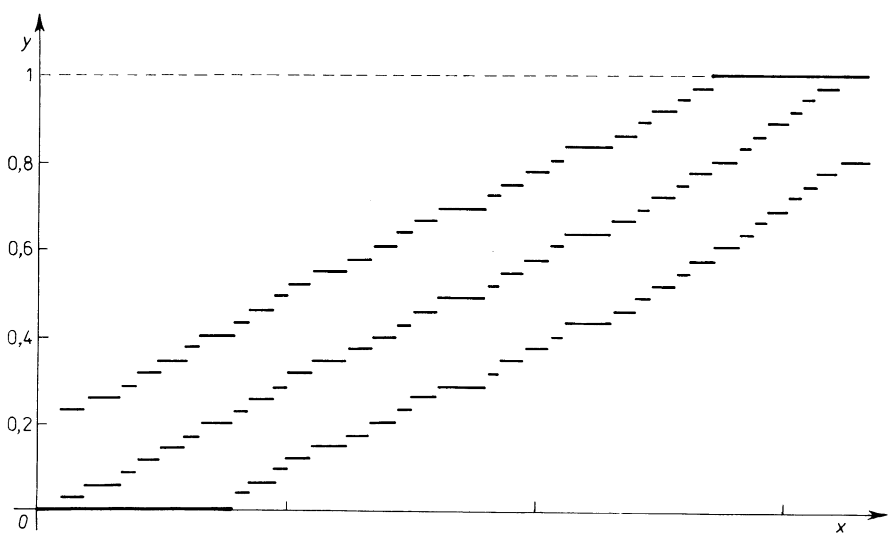
C. Granice ufności dla dystrybuanty. Z definicji D_n (3.3.12) i wzoru (3.3.15) otrzymujemy

$$P\Big(D_n = \sup_x |F_0(x) - S_n(x)| \geqslant d_n(1-\alpha)\Big) = \alpha.$$

Z rozwiązania nierówności wewnątrz nawiasu wynika, że dla ciągłej $F_0(x)$ mamy

$$P\big(S_n(x) - d_n \leqslant F_0(x) \leqslant S_n(x) + d_n \text{ dla wszystkich } x\big) = 1-\alpha, \qquad (3.3.18)$$

gdzie $d_n = d_n(1-\alpha)$. Nierówność ta wyznacza granice ufności, między którymi obszar z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ pokrywa prawdziwą dystrybuantę F. Rysunek 3.16 przedstawia jedną z realizacji granic ufności dystrybuanty dla próbki o liczności $n = 35$. Z rozważań dla dużych wartości n wynika, że dystrybuanta empiryczna S_{100} z prawdopodobieństwem 0,95 różni się od prawdziwej dystrybuanty F nie więcej niż o 0,1385 dla każdego x; natomiast, aby z prawdopodobieństwem 0,95 różniła się wszędzie nie więcej niż o 0,05, to należałoby pobrać próbkę prostą o liczności n nie mniejszej niż 738 [16].



Rys. 3.16. Realizacja granic ufności dla dystrybuanty hipotetycznej F na podstawie próbki o liczności $n = 35$

Interesujące są próby – dotychczas nie zakończone – zastosowania tego testu do rozkładów skokowych: wykazano np., że dla tego typu rozkładów należy w (3.3.18) zastąpić znak równości znakiem $\geqslant$.

D. Porównanie testów χ^2 i Kołmogorowa.

1. Jeżeli liczność n próbki jest mała – nawet rzędu kilku – oraz badana cecha jest ciągła, to należy stosować wyłącznie test Kołmogorowa i korzystać z tablicy 13 dla danego n.

2. W przypadku podziału na klasy o jednakowych prawdopdobieństwach, przy możliwości zastosowania obu testów (więc cecha ciągła i odpowiednia liczność), test Kołmogorowa, w porównaniu z testem χ^2, wymaga mniej licznej próby, przy tej samej mocy

względem tej samej hipotezy alternatywnej i przy tym samym poziomie istotności α (dla dużych n stosunek ten wynosi $n^{4/5}: n$).

3. Jeżeli rozkład badanej cechy jest skokowy, to należy stosować test χ^2 (zad. 3.26).

4. Przy alternatywnej hipotezie $H_1\{F(x) = F_1(x)\}$ oznaczmy $\sup_x |F_1(x) - F_0(x)| = \delta$. Z porównania wielkości δ, przy których asymptotyczna moc obu testów χ^2 i Kołmogorowa jest równa 0,50 na poziomie $\alpha = 0{,}05$, wynika, że δ – przy tej samej liczności próbek – w przypadku testu Kołmogorowa jest około 2 razy mniejsze niż δ odpowiadające testowi χ^2: oznacza to oczywiście, że test Kołmogorowa jest znacznie czulszy.

5. Test Kołmogorowa jest jedynym spośród wszystkich testów zgodności, przy stosowaniu którego można – dla ciągłej $F(x)$ – wyznaczyć łącznie dla wszystkich x granice ufności dla nieznanej, ale całkowicie określonej dystrybuanty $F(x)$ na danym poziomie ufności $1-\alpha$ ((3.3.18) i rys. 3.16).

6. Istnieją możliwości stosowania testu χ^2 również do cech niemierzalnych (zad. 3.22).

3.3.3. Test Kołmogorowa-Lillieforsa. Weryfikacja hipotezy H, że rozkład badanej cechy ciągłej X jest $N(\bar{x}, s)$, gdzie $\bar{x}$, s są oszacowaniami nieznanych parametrów m, σ na podstawie n-elementowej próbki ($n > 30$).

A oto sposób postępowania:

1) obliczamy $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$;

2) wyznaczamy dystrybuantę empiryczną $S_n(x)$ zgodnie z (3.3.13);

3) obliczamy wartości bezwzględne różnic

$$|F(x_i) - S_n(x_i)|, \qquad i = 1, \dots, n,$$

w których F jest dystrybuantą rozkładu $N(\bar{x}, s)$; stąd

$$F(x_i) = P(X < x_i) = P\left(\frac{X - \bar{x}}{s} < \frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) = P(U < u_i) = \Phi(u_i),$$

gdzie $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$, a Φ jest dystrybuantą $N(0, 1)$ (tabl. 5);

spośród wszystkich n obliczonych różnic wybieramy największą d'_n:

$$d'_n = \max_{x_i} |F(x_i) - S_n(x_i)|;$$

4) na koniec porównujemy wartość d'_n z wartością krytyczną $k_n(1-\alpha)$ odczytaną z tablicy 15 przy danym n oraz przyjętym poziomie istotności α.

Jeżeli $d'_n \in \langle 0, k_n(1-\alpha))$, to próbka – przy przyjętym poziomie istotności α – nie przeczy hipotezie, że pochodzi ona z populacji, w której X ma rozkład $N(\bar{x}, s)$.

Jeżeli $d'_n \in \langle k_n(1-\alpha), 1\rangle$, to hipotezę odrzucamy na poziomie istotności α.

Wartości krytyczne $k_n(1-\alpha)$ zamieszczone w tablicy 15 dla $n = 31(1)55(5)100$ obliczono według wzorów podanych przez Lillieforsa [18]. Porównanie wykazuje, że krytyczne wartości $k_n(1-\alpha)$ są mniejsze o około 30% od kwantyli $d_n(1-\alpha)$ z tablicy 12.

Zadanie 3.30. W wyniku pomiarów ładunków elektrycznych e w cgsE Millikan otrzymał 40 następujących wyników, które – pomnożone przez 10^{10} – według wielkości z uwzględnieniem liczności podajemy niżej:

$x_{(i)}$	n_i	$x_{(i)}$	n_i
4,764	4	4,778	2
4,767	2	4,779	2
4,769	2	4,781	2
4,771	2	4,782	2
4,772	4	4,789	6
4,774	2	4,791	2
4,775	2	4,792	2
4,776	2	4,795	2

Testem Kołmogorowa-Lillieforsa na poziomie istotności $\alpha=0,05$ zweryfikować hipotezę, że rozkład ładunków elektronów jest $N(\bar{x}, s)$.

R o z w i ą z a n i e 1. Obliczamy z próbki

$$\bar{x} = 4,7785, \qquad s^2 = 0,00008873, \qquad s = 0,00942.$$

2. Tak więc skoki dystrybuanty S_{40} równe $2\cdot(1:40)=0,05$ występują we wszystkich punktach x_i, którym odpowiada liczność 2, przy liczności 4 albo 6 skoki są odpowiednio równe 0,10 i 0,15.

Dystrybuantą hipotetyczną F jest dystrybuanta rozkładu $N(4,7785, 0,00942)$; wartości jej w punktach $x_{(i)}$ obliczymy stosując standaryzację. Tak więc dla najmniejszej wartości $x_{(i)}$

$$F(4,764) = P\left(\frac{X-4,7785}{0,00942} < \frac{4,764-4,7785}{0,00942}\right) = P(U < -1,54) =$$
$$= \Phi(-1,54) = 1-\Phi(1,54) \approx 1-0,938 = 0,062,$$

gdzie wartość $\Phi(1,54)$ odczytano z tablicy 5.

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla kolejnych wartości x_i; wartości S_n, F oraz wartości bezwzględne różnic zestawiono w tabeli:

$x_{(i)}$	$S_n(x_{(i)})$	$F(x_{(i)})$	$\lvert S_n(x_{(i)})-F(x_{(i)})\rvert$
4,764	0,10	0,062	0,038
4,767	0,15	0,111	0,039
4,769	0,20	0,156	0,044
4,771	0,25	0,212	0,038
4,772	0,35	0,246	0,104
4,774	0,40	0,316	0,084
4,775	0,45	0,356	0,094
4,776	0,50	0,394	0,106
4,778	0,55	0,480	0,070
4,779	0,60	0,520	0,080
4,781	0,65	0,603	0,047
4,782	0,70	0,645	0,055
4,789	0,85	0,867	0,017
4,791	0,90	0,908	0,008
4,792	0,95	0,924	0,026
4,795	1,00	0,960	0,040

3. Tak więc obliczona wartość d_{40} statystyki (3.3.11) wynosi 0,106.

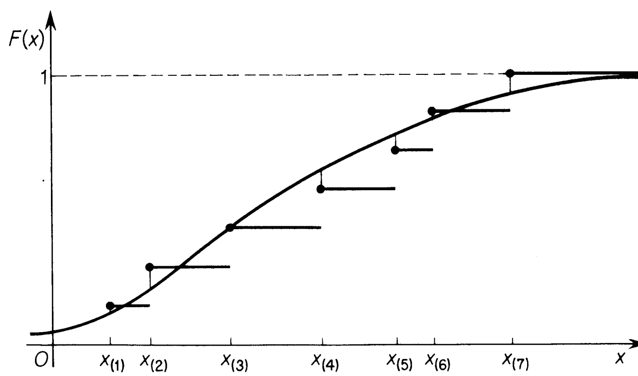
4. Z tablicy 15 przy $n=40$ oraz $\alpha=0{,}05$ odczytujemy krytyczną wartość $k_{40}(0{,}95)=$ $=0{,}1401$. Ponieważ

$$d_{40} = 0{,}106 \in \langle 0,\ 0{,}1401\,) = k_{40}(0{,}95),$$

więc próbka nie przeczy weryfikowanej hipotezie na poziomie istotności 0,05.

Poznaliśmy już podobieństwa i różnice testów zgodności χ^2 i Kołmogorowa. Obecnie zwrócimy uwagę na fakt, że żaden z tych testów nie jest oparty na pełnej informacji, jaką można otrzymać z próbki: w teście χ^2 strata informacji polega na 1) grupowaniu obserwacji w klasy oraz 2) na nieuwzględnieniu znaków różnic n_i-np_i, a test Kołmogorowa oparty jest na jednej tylko największej różnicy D_n.

Testem wykorzystującym pełną informację z próbki jest następujący test odnoszący się jednak jedynie do normalności rozkładu.



Rys. 3.17. Przykład dystrybuanty hipotetycznej i empirycznej ($n=7$) z zaznaczeniem wartości statystyki D_n

3.3.4. Test Shapiro-Wilka, [28]. Jako statystykę testową przyjęto w nim zmienną losową

$$W = \frac{\left(\sum\limits_i a_i(n)(X_{(n-i+1)} - X_{(i)})\right)^2}{\sum\limits_1^n (X_j - \bar{X})^2},$$

gdzie $i = 1, 2, \dots [\frac{n}{2}]$, a różnice $x_{(n-i+1)} - x_i$ są tzw. quasi-rozstępami rzędu i; dla $i=1$ otrzymujemy rozstęp R (p. 1.2); $a_i(n)$ są stałymi zależnymi zarówno od liczności n próbki, jak i od i. Wartości tych stałych podano w tablicy 16 dla $n=2(1)50$.

Hipotezę o normalności odrzuca się na poziomie istotności α, jeśli wartość W_d statystyki W obliczona na podstawie niezgrupowanej próbki leży poza przedziałem $\langle W(\frac{1}{2}\alpha,\ n),$ $W(1-\frac{1}{2}\alpha, n)\rangle$, którego końcami są kwantyle rozkładu W podane w tablicy 17 dla wartości α najczęściej używanych w zastosowaniach. Szczegółowy sposób postępowania podaje następujące zadanie:

Zadanie 3.31. Pobrano próbkę dotyczącą cechy mierzalnej X o liczności $n=19$; wyniki uporządkowano według wielkości: 12,4, 14,2, 14,9, 15,6, 16,1, 16,8, 17,3, 17,9, 18,2, 18,6, 19,3, 19,7, 20,4, 21,9, 22,8, 23,7, 25,2, 25,9, 27,4.

Na poziomie istotności $\alpha=0{,}10$ zweryfikować testem Shapiro-Wilka hipotezę o normalności rozkładu badanej cechy X w populacji generalnej.

i	$x_{(n-i+1)}-x_{(i)}$	$a_i(n)$	$a_i(n)(x_{(n-i+1)}-x_{(i)})$
1	27,4 − 12,4 = 15,0	0,4808	7,21200
2	25,9 − 14,2 = 11,7	0,3232	3,78144
3	25,2 − 14,9 = 10,3	0,2561	2,63783
4	23,7 − 15,6 = 8,1	0,2059	1,66779
5	22,8 − 16,1 = 6,7	0,1641	1,09947
6	21,9 − 16,8 = 5,1	0,1271	0,64821
7	20,4 − 17,3 = 3,1	0,0932	0,28892
8	19,7 − 17,9 = 1,8	0,0612	0,11016
9	19,3 − 18,2 = 1,1	0,0303	0,03333
			17,47915

Rozwiązanie. Obliczamy kolejne różnice $x_{19}-x_1$, $x_{18}-x_2, \ldots$, aż do $x_{11}-x_9$ umieszczone w drugiej kolumnie. W kolumnie trzeciej z tablicy 16 wypisujemy przy $n=19$ wartości $a_1, \ldots, a_9$, a w kolumnie czwartej umieszczamy iloczyny liczb z kolumn drugiej i trzeciej. Następnie obliczamy sumę liczb kolumny czwartej równą 17,47915. Kwadrat tej liczby równy 305,52 jest licznikiem wartości W_d statystyki W. Mianownik tego ułamka obliczamy według wzoru

$$\sum_1^n (x_j-\bar{x})^2 = \sum_1^n x_j^2 - n\bar{x}^2.$$

Z obliczenia otrzymujemy

$$\begin{array}{rl} \sum_1^{19} x_j^2 = 7869{,}77, & \quad \bar{x} = 19{,}3842 \\ - \quad n\bar{x}^2 = 7139{,}20 & \\ \hline \sum_1^{19} (x_j-\bar{x})^2 = 730{,}57. & \end{array}$$

Tak więc

$$W_d = \frac{305{,}52}{730{,}57} = 0{,}418.$$

Następnie z tablicy 17 przy $n=19$ dla $\alpha=0{,}10$ odczytujemy wartości kwantyli $W(\frac{1}{2}\alpha, n) = W(0{,}05,\ 19)=0{,}901$, $W(1-\frac{1}{2}\alpha, n)=W(0{,}95,\ 19)=0{,}982$. Ponieważ obliczona wartość $W_d=0{,}418$ leży poza przedziałem (0,901, 0,982), więc hipotezę o normalności cechy X na podstawie pobranej próbki odrzucamy przy poziomie istotności 0,10.

3.4. TESTY DO WERYFIKACJI HIPOTEZY O IDENTYCZNOŚCI ROZKŁADÓW BADANEJ CECHY DWÓCH (ALBO KILKU) POPULACJI

Model. Dane są dwie niezależne próbki proste, licznościach n_1, n_2 odpowiednio, z populacji, w których dystrybuanty F_1 i F_2 badanej cechy X są ciągłe. Weryfikujemy hipotezę H: $F_1(x) \equiv F_2(x)$, wobec hipotezy alternatywnej $F_1(x) \not\equiv F_2(x)$.

3.4.1. Test serii. Wyniki obu próbek ustawiamy w jeden ciąg $n_1 + n_2$ elementów według wartości rosnących, a następnie oznaczamy elementy próbki z jednej populacji symbolem x, drugiej – symbolem y otrzymując np. ciąg $xxyyyxyyx$. Statystyką testową jest liczba serii K tego ciągu, gdzie *serią* nazywamy każdy maksymalny podciąg składający się z kolejnych elementów tego samego rodzaju. W naszym przypadku mamy następujące serie xx, yyy, x, yy, x, a wartością statystyki K jest $k = 5$.

Zbyt mała liczba k serii świadczy oczywiście na niekorzyść weryfikowanej hipotezy, a więc za zbiór krytyczny testu przyjmujemy zbiór liczb całkowitych k, które należą do przedziału $\langle 2, k(\alpha, n_1, n_2)\rangle$, gdzie $k(\alpha, n_1, n_2)$ spełnia warunek

$$P\big(K \leqslant k(\alpha, n_1, n_2)\big) \leqslant \alpha,$$

a α jest poziomem istotności testu.

Jeżeli wyznaczona wartość k statystyki K należy do przedziału $\langle 2, k(\alpha, n_1, n_2)\rangle$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej; w przeciwnym przypadku nie ma podstaw do jej odrzucenia na danym poziomie istotności α.

Liczby $k(\alpha, n_1, n_2)$ przy danych licznościach n_1 i n_2 obu próbek dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}01$ i $\alpha = 0{,}05$ odczytujemy z tabl. 18.

Zadanie 3.32. Zmierzono czasy wykonywania pewnego detalu dla wylosowanej grupy robotników pewnej fabryki, dla zmiany pierwszej otrzymując w minutach: 12, 13, 18, 25, 42, 19, 22, 35 oraz dla zmiany drugiej otrzymując: 23, 30, 27, 17, 21, 33, 31.

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ testem serii zweryfikować hipotezę, że czasy wykonywania rozpatrywanego detalu na obydwu zmianach mają te same rozkłady przeciw hipotezie alternatywnej, że rozkłady te różnią się między sobą.

Rozwiązanie. Uporządkujmy wartości obu próbek w niemalejący ciąg i przypiszmy elementom pierwszej próbki symbol x, drugiej – y, otrzymując:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 12, & 13, & 17, & 18, & 19, & 21, & 22, & 23, & 25, & 27, & 30, & 31, & 33, & 35, & 42. \\ x & x & y & x & x & y & x & y & x & y & y & y & y & x & x \end{array}$$

Liczba serii w tym ciągu wynosi $k = 9$. Z tablic odczytujemy, że $k(\alpha, n_1, n_2) = k(0{,}05, 8, 7) = 4$, więc zbiorem krytycznym jest $\langle 2, 4\rangle$. Ponieważ $k = 9 \notin \langle 2, 4\rangle$, więc nie ma powodu do odrzucenia hipotezy H na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

3.4.2. Test Smirnowa-Kołmogorowa. Oznaczmy przez $S_{n1}(x)$ i $S_{n2}(x)$ dystrybuanty empiryczne $\big((3.3.13)\big)$ odpowiednio dla pierwszej i drugiej próby. Statystyką testową jest

$$D_{n_1, n_2} = \sup_x |S_{n_1}(x) - S_{n_2}(x)|. \tag{3.4.1}$$

Oczywiste jest, że zbyt duże wartości tej statystyki świadczą na niekorzyść hipotezy H i wobec tego zbiorem krytycznym testu jest przedział $\langle d(\alpha, n_1, n_2), 1\rangle$. Wartości krytyczne $d(\alpha, n_1, n_2)$ pomnożone przez $n_1 n_2$ dla $\alpha = 0{,}01$ i $\alpha = 0{,}05$ podano w tabl. 14. W przypadku dużych liczności próbek n_1 i n_2 $(n_1, n_2 > 20)$ korzystamy z tego, że asymptotyczny rozkład statystyki

$$\lambda = \sqrt{n}\, D_{n_1, n_2}, \quad \text{gdzie} \quad n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}, \tag{3.4.2}$$

jest rozkładem Kołmogorowa, który jest niezależny od liczności próbek n_1 i n_2 ((3.3.17)). Zbiorem krytycznym testu jest przedział $\left\langle \frac{\lambda(\alpha)}{\sqrt{n}}, 1 \right\rangle$, gdzie punkty krytyczne $\lambda(\alpha)$ spełniające warunek $K(\lambda(\alpha)) = 1 - \alpha$ odczytujemy z tabl. 13.

Zadanie 3.33. Z dwóch różnych partii włókien bawełny wylosowano próbki i zmierzono długości wylosowanych włókien, otrzymując w milimetrach:

1 próbka: 18, 22, 7, 12, 25, 19, 17, 10, 18, 23, 9, 7, 24, 30, 23, 22, 17, 8, 19,

2 próbka: 8, 14, 21, 7, 19, 23, 4, 19, 15, 13, 28, 18, 24, 33, 28, 28, 17, 19, 20, 18.

Testem Smirnowa na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że rozkłady długości tych partii włókien bawełny są identyczne, wobec hipotezy alternatywnej, że rozkłady te różnią się między sobą.

R o z w i ą z a n i e. Uporządkujmy otrzymane rezultaty w następującej tabelce:

x_i	Liczności		Liczności skumulowane		$S_{n_1}^{(1)}(x_i)$	$S_{n_2}^{(2)}(x_i)$	$\lvert S_{n_1}^{(1)}(x_i) - S_{n_2}^{(2)}(x_i)\rvert$
	1 próba	2 próba	1	2			
1	2	3	4	5	6	7	8
4	–	1	–	1	0	0,050	0,050
7	2	1	2	2	0,105	0,100	0,005
8	1	1	3	3	0,158	0,150	0,008
9	1	–	4	3	0,211	0,150	0,061
10	1	–	5	3	0,263	0,150	0,113
12	1	–	6	3	0,316	0,150	$\underline{0{,}166}$
13	–	1	6	4	0,316	0,200	0,116
14	–	1	6	5	0,316	0,250	0,066
15	–	1	6	6	0,316	0,300	0,016
17	2	1	8	7	0,421	0,350	0,071
18	2	2	10	9	0,526	0,450	0,076
19	2	3	12	12	0,632	0,600	0,032
20	–	1	12	13	0,632	0,650	0,018
21	–	1	12	14	0,632	0,700	0,068
22	2	–	14	14	0,737	0,700	0,037
23	2	1	16	15	0,842	0,750	0,092
24	1	1	17	16	0,895	0,800	0,095
25	1	–	18	16	0,947	0,800	0,147
28	–	3	18	19	0,947	0,950	0,003
30	1	–	19	19	1	0,950	0,050
31	–	1	19	20	1	1	0
$\sum$	19	20					

Stąd wybierając maksymalną z wartości ostatniej kolumny otrzymujemy wartość $d_{n_1 n_2 \text{obl}} = 0{,}166$.

Z tablicy 14 otrzymujemy, że $n_1 n_2 d(\alpha, n_1, n_2) = 19 \cdot 20 d(0{,}05,\ 19,\ 20) = 160$, skąd $d(0{,}05,\ 19,\ 20) = 0{,}421$. Wobec tego, że $0{,}166 \notin \langle 0{,}421,\ 1\rangle$, nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

3.4.3 Test Wilcoxona. Uporządkujmy – tak samo jak w p. 3.4.1 – elementy obydwu próbek w ciąg złożony z symboli x i y. Statystyką testową jest tu liczba tzw. *inwersji elementów* x ze względu na elementy y (abo też elementów y ze względu na x). Jeżeli w uporządkowanym ciągu x-ów i y-ów element x poprzedza k elementów y, to temu elementowi x przypisujemy k inwersji. Oznaczamy przez U zmienną losową równą sumie wszystkich inwersji elementów x, a U_1 niech oznacza sumę wszystkich inwersji elementów y. Można wykazać, że spełniony jest warunek

$$U + U_1 = n_1 n_2.$$

Jeżeli z próbek otrzymamy zbyt małą albo zbyt dużą wartość statystyki U, to świadczy to na niekorzyść hipotezy H i wobec tego jako zbiór krytyczny testu przyjmujemy sumę przedziałów $\langle 0,\ u(\alpha,\ n_1,\ n_2)\rangle \cup \langle u'(\alpha,\ n_1,\ n_2),\ n_1 n_2\rangle$, przy czym w praktyce przyjmujemy, że

$$P\big(U \leqslant u(\alpha,\ n_1,\ n_2)\big) = P\big(U \geqslant u'(\alpha,\ n_1,\ n_2)\big) \leqslant \tfrac{1}{2}\alpha$$

i wtedy $u'(\alpha,\ n_1,\ n_2) = n_1 n_2 - u(\alpha,\ n_1,\ n_2)$. Wykorzystując statystykę U_1, otrzymujemy ten sam zbiór krytyczny.

Wartości krytyczne $u(\alpha, n_1, n_2)$ podano dla danych liczności próbek $n_1,\ n_2 = 3(1)\ 16$ dla dwóch poziomów istotności $\alpha = 0{,}01$ i $\alpha = 0{,}05$ (tabl. 19). W przypadku próbek o dużych licznościach, statystyka U ma rozkład w przybliżeniu $N\left(\frac{1}{2} n_1 n_2,\ \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}\right)$, przy czym przybliżenie jest już wystarczająco dokładne, gdy $n_1,\ n_2 \geqslant 4$ i $n_1 + n_2 \geqslant 20$.

Zadanie 3.34. Wykonano pomiary mocy czynnej punktu transformatorowego przypadającej na jednego mieszkańca dla dwóch miast, Piły i Zgierza. Otrzymano wyniki (w W), które uporządkowano według wielkości: Piła: 82,4, 90,7, 95,6, 98,9, 103,8, 105,5, 115,4, 123,8, 129,4, 130,8, 132,2, 137,9, Zgierz: 70,1, 103,6, 107,7, 110,1, 113,4,115,0,115,8, 122,4.

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że badany wskaźnik mocy czynnej w obu miastach ma ten sam rozkład, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza, że rozkłady te są różne.

R o z w i ą z a n i e. Uporządkujemy wyniki obu próbek w jeden ciąg w kolejności wzrastającej, otrzymując

70,1,	82,4,	90,7,	95,6,	98,9,	103,6	103,8,	105,5,	107,7	110,1,
y	x	x	x	x	y	x	x	y	y

113,4,	115,0,	115,4,	115,8,	122,4,	123,8,	129,4,	130,8,	132,2,	137,9.
y	y	x	y	y	x	x	x	x	x

Ponieważ obojętne jest czy wykorzystujemy statystykę U, czy U_1, więc obliczmy sumę inwersji elementów próbki o mniejszej liczności (y). Pierwszy z y nie jest poprzedzony żadnym z x-ów, więc tworzy 0 inwersji, drugi – poprzedzony jest 4-ma x-ami – tworzy zatem 4 inwersje itd. Otrzymujemy więc

$$u_{1\,\text{obl}} = 0+4+6+6+6+6+7+7=42.$$

Z tablicy 19 otrzymujemy, że

$$u(\alpha, n_1, n_2) = u(0{,}05,\ 12,\ 8) = 22,$$

więc zbiorem krytycznym jest suma przedziałów $\langle 0,\ 22\rangle \cup \langle 74,\ 96\rangle$, a ponieważ $u_{1\,\text{obl}}$ nie należy do zbioru krytycznego, nie ma na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ powodu do odrzucenia hipotezy o jednakowych rozkładach.

3.4.4. Test sumy rang do weryfikacji hipotezy o identyczności rozkładów dla wielu populacji.

Model. Danych jest k populacji, w których badana cecha ma rozkłady typu ciągłego o nieznanych dystrybuantach $F_1, \ldots, F_k$ odpowiednio. Weryfikacja hipotezy H: $F_1 = \ldots = F_k$ wobec hipotezy alternatywnej, że rozkład badanej cechy nie we wszystkich populacjach jest taki sam, opartej na próbkach o licznościach $n_i (i = 1, \ldots, k)$ pobranych z tych populacji. Poziom istotności jest równy α.

Sposób postępowania jest następujący. Wszystkie wyniki k próbek w liczbie $n = \sum_1^k n_i$ ustawione od najmniejszej do największej numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi (nadajemy rangi); przy jednakowej wartości kilku kolejnych wyników przypisujemy każdemu z nich rangę będącą średnią arytmetyczną przypisanych im liczb naturalnych. Następnie dla każdej próbki oddzielnie wyznaczamy sumę rang $R_i (i = 1, \ldots, k)$. Do konstrukcji testu wykorzystujemy *statystykę Kruskala-Wallisa*:

$$\chi^2 = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{3} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1), \tag{3.4.3}$$

która w przypadku $k = 3$, przy założeniu prawdziwości hipotezy H, ma asymptotyczny (przy $n_1, n_2, n_3 \to \infty$) rozkład χ^2 o $k-1 = 2$ stopniach swobody. Praktycznie test można stosować przy licznościach $n_1, n_2, n_3 \geqslant 10$. W przypadku ogólnym, gdy $k > 3$, wykorzystujemy statystykę:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{12\left[R_i - \dfrac{n_i(n+1)}{2}\right]^2}{n_i(n-n_i)(n+1)}, \tag{3.4.4}$$

która także – przy założeniu prawdziwości hipotezy – ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(k-1)$. Gdy natomiast $n_1 = \ldots = n_2$, wtedy do weryfikacji hipotezy H stosujemy *statystykę Friedmana*

$$\chi^2 = \frac{12}{n_1 k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n_1(k+1), \tag{3.4.5}$$

która ma ten sam rozkład graniczny co statystyka Kruskala-Wallisa.

Zbiorem krytycznym testu opartego na którejkolwiek z rozważanych statystyk na poziomie α jest przedział $\langle\chi^2(1-\alpha,\ k-1),\ +\infty)$.

Jeżeli zatem obliczona z próbek wartość χ^2_{obl} statystyki χ^2 należy do zbioru krytycznego, to hipotezę H należy – na poziomie istotności α – odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej; w przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do jej odrzucenia.

Zadanie 3.35. W pewnym doświadczeniu rolniczym bada się plony nowej odmiany pszenicy w zależności od różnych sposobów nawożenia na poletkach doświadczalnych. Otrzymano następujące plony w [q/ha] dla poszczególnych poletek w każdym z trzech różnych sposobów nawożenia:

1) 30,8, 32,6, 31,7, 33,1, 31,2, 28,3, 29,8, 32,0, 27,9, 28,5,
2) 33,1, 31,8, 29,7, 29,0, 32,2, 33,1, 33,7, 30,4, 33,0, 28,9, 30,0,
3) 32,5, 34,8, 34,6, 35,2, 33,4, 33,1, 32,8, 35,0, 34,2, 34,8, 33,9.

Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ testem sumy rang zweryfikować hipotezę, że rozkłady plonów dla każdego ze sposobów nawożenia są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że nie wszystkie z tych rozkładów są jednakowe.

Rozwiązanie. Ogólna liczba wszystkich poletek $n=32$. W celu łatwiejszego nadania rang uporządkujmy wyniki każdej z grup w kolejności rosnącej i przyporządkujmy im kolejno rangi od 1 do 32. Wyniki w tabelce.

Metoda nawożenia					
1		2		3	
wynik	ranga	wynik	ranga	wynik	ranga
27,9	1	28,9	4	32,5	16
28,3	2	29,0	5	32,8	18
28,5	3	29,7	6	33,1	21,5
29,8	7	30,0	8	33,4	24
30,8	10	30,4	9	33,9	26
31,2	11	31,8	13	34,2	27
31,7	12	32,2	15	34,6	28
32,0	14	33,0	19	34,8	29,5
32,6	17	33,1	21,5	34,8	29,5
33,1	21,5	33,1	21,5	35,0	31
		33,7	25	35,2	32
Suma	98,5	Suma	147	Suma	282,5

Obliczamy następnie wartości statystyki χ^2 ((3.4.3))

$$\chi^2_{\text{obl}}=\frac{12}{32\cdot 33}\left(\frac{98{,}5^2}{10}+\frac{147^2}{11}+\frac{282{,}5^2}{11}\right)-3\cdot 33=$$

$$=0{,}0114(970{,}225+1964{,}454+7255{,}114)-99=17{,}164.$$

Z tablic kwantyli rozkładu χ^2 mamy $\chi^2(1-\alpha,\ k-1)=\chi^2(0{,}95,\ 2)=5{,}991$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $\langle 5{,}991,\ +\infty)$. Wobec tego na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ należy odrzucić weryfikowaną hipotezę H, tzn. że wpływ nawożenia dla badanej odmiany pszenicy jest istotny przy $\alpha=0{,}05$.

3.5. TESTY SEKWENCYJNE

3.5.1. Wstęp. Sekwencyjna metoda weryfikacji hipotez parametrycznych polega na tym, że elementy próby pobiera się stopniowo, po jednym w każdym etapie postępowania. W każdym etapie postępowania podejmujemy jedną z trzech wyłączających się decyzji:

a) przyjmujemy weryfikowaną hipotezę H,

b) odrzucamy hipotezę H na korzyść hipotezy alternatywnej K,

c) odkładamy decyzję o przyjęciu H albo K i prowadzimy dalej badanie, dobierając następny element.

Jak z tego widać, liczność próby nie jest z góry ustalona (jest zmienną losową).

Niech $f(x, \theta)$ oznacza znaną postać gęstości (w przypadku cechy typu ciągłego), albo funkcji prawdopodobieństwa (w przypadku cechy typu skokowego) o nieznanym parametrze θ. Niech weryfikacji podlega hipoteza H: $\theta = \theta_0$, przeciw hipotezie alternatywnej K: $\theta = \theta_1 \neq \theta_0$. Jako stytystykę testową przyjmujemy funkcję Q_n postaci

$$Q_n = \prod_1^k \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} \quad \text{dla } n \in \boldsymbol{N}. \tag{3.5.1.}$$

Postępowanie sekwencyjne trwa do takiego etapu n, w którym wartość rozpatrywanej statystyki Q_n spełni jedną z dwóch nierówności $q_n < A$ albo $q_n > B$, gdzie A i B są odpowiednio dobranymi (w zależności od prawdopodobieństwa błędów pierwszego i drugiego rodzaju) stałymi takimi, że $0 < A < B$. W przypadku gdy $q_n < A$, wtedy badanie kończy się przyjęciem hipotezy H, gdy natomiast $q_n > B$, wtedy przyjmujemy hipotezę alternatywną K. Jeżeli jednak zachodzi nierówność $A \leqslant q_n \leqslant B$, postępowanie sekwencyjne trwa nadal i po dobraniu następnego elementu przechodzimy od n-tego do $(n+1)$-go etapu postępowania.

Wald wykazał, że przy danych prawdopodobieństwach błędów pierwszego i drugiego rodzaju (p. 3.1), równych odpowiednio α i β, z wystarczającym dla praktyki przybliżeniem można przyjąć, że

$$A = \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad B = \frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{3.5.2}$$

W praktyce zamiast posługiwania się zmienną losową Q_n, wygodniej wykorzystać zmienną

$$Z_n = \log Q_n \tag{3.5.3}$$

i wówczas jeśli jej wartość

$$\begin{aligned} z_n &< \log A - \text{przyjmujemy hipotezę } H; \\ z_n &> \log B - \text{przyjmujemy hipotezę } K; \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

jeśli $\log A \leqslant z_n \leqslant \log B -$ przechodzimy do następnego etapu badania.

Powstaje pytanie, czy postępowanie sekwencyjne zakończy się po skończonej liczbie etapów? Wykazano, że jeśli zmienna losowa

$$Z = \log\theta = \log\frac{f(X,\ \theta_1)}{f(X,\ \theta_0)}$$

ma dodatnią wariancję, to prawdopodobieństwo, że postępowanie zakończy się po skończonej liczbie kroków jest równe 1. Poza tym wykazano, że wartość przeciętna liczby obserwacji N niezbędnych w postępowaniu do podjęcia jednej z dwóch decyzji (przyjąć H albo przyjąć K), jest równa

$$E(N|\theta) = \begin{cases} \dfrac{M(\theta)\log B + [1 - M(\theta)]\log A}{E(Z|\theta)}, & \text{gdy} \quad E(Z|\theta) \neq 0, \\[2ex] \dfrac{\log A \log B}{E(Z^2|\theta)}, & \text{gdy} \quad E(Z|\theta) = 0, \end{cases} \tag{3.5.5}$$

gdzie $M(\theta)$ jest mocą testu.

3.5.2. Sekwencyjny test do weryfikacji hipotezy o nieznanym wskaźniku struktury populacji, tzn. procentu wadliwych sztuk w populacji. Oznaczamy przez X zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy element populacji ma wyróżnioną własność oraz wartość 0, gdy jej nie ma. Weryfikujemy wtedy hipotezę dotyczącą wartości parametru θ rozkładu zero-jedynkowego.

Model 1. Badana cecha X ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem θ. Testem sekwencyjnym weryfikujemy hipotezę $H: \theta = \theta_0$ przeciw hipotezie alternatywnej $K: \theta = \theta_1$.

A. Test sekwencyjny przy pobieraniu kolejnych sztuk. Niech α i β będą odpowiednio ustalonymi prawdopodobieństwami błędów pierwszego i drugiego rodzaju ((3.5.2)). Wartość z_n statystyki Z_n ((3.5.3)) w n-tym etapie postępowania jest równa

$$z_n = \log\frac{\theta_1^k(1-\theta_1)^{n-k}}{\theta_0^k(1-\theta_0)^{n-k}} = k\log\frac{\theta_1}{\theta_0} + (n-k)\log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0},$$

gdzie k jest zaobserwowaną liczbą elementów wyróżnionych w n-tym etapie postępowania.

Rozwiązując nierówności (3.5.4) względem k widzimy, że

gdy $k < an + b_1$ – przyjmujemy hipotezę H,

gdy $k > an + b_2$ – przyjmujemy hipotezę K,

gdy $an + b_1 \leqslant k \leqslant an + b_2$ – do badania pobieramy następny element,

gdzie

$$\begin{aligned} a &= \log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} : \left(\log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} - \log\frac{\theta_1}{\theta_0}\right), \\ b_1 &= \log A : \left(\log\frac{\theta_1}{\theta_0} - \log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right), \\ b_2 &= \log B : \left(\log\frac{\theta_1}{\theta_0} - \log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

ZADANIE 3.36. Wadliwość produkcji pewnych wyrobów wynosiła 10%. W celu zmniejszenia wadliwości zastosowano nową technologię produkcji i wykonano serię doświadczalną $n = 8$ sztuk, otrzymując kolejno: 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0 (1 – brak, 0 – sztuka dobra). Producent twierdzi, że wadliwość wyprodukowanych tą technologią wyrobów jest równa 2% (H: $\theta = 0{,}02$). Stosując test sekwencyjny zweryfikować tę hipotezę, przyjmując K: $\theta = 0{,}10$ oraz $\alpha = \beta = 0{,}05$. Czy dane wystarczają do zakończenia testu przyjęciem którejś z hipotez?

Rozwiązanie. Wykonując obliczenia otrzymujemy

$$A = \beta/(1-\alpha) = 0{,}05/0{,}95 = 0{,}0526 \qquad B = (1-\beta)/\alpha = 0{,}95/0{,}05 = 19.$$

Wykorzystując wzór (3.5.6), mamy

$$a = 0{,}0503, \quad b_1 = -1{,}738, \quad b_2 = 1{,}738.$$

Pozostałe obliczenia w tabelce

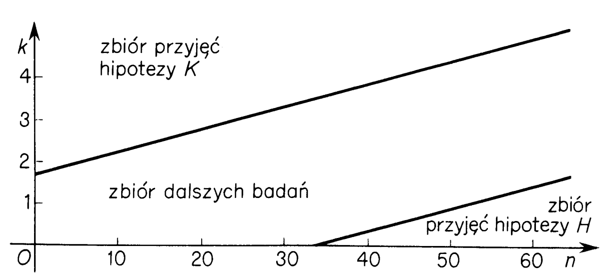
Etap badania n	Obserwacja x_i	$k = \sum_{1}^{n} x_i$	$an + b_1$	$an + b_2$	Decyzja
1	0	0	$-1{,}678$	1,788	badać dalej
2	0	0	$-1{,}627$	1,839	badać dalej
3	1	1	$-1{,}577$	1,889	badać dalej
4	0	1	$-1{,}527$	1,939	badać dalej
5	1	2	$-1{,}477$	1,990	przyjąć K
6	0	–	–	–	–
7	0	–	–	–	–
8	0	–	–	–	–

Procedurę weryfikacji kończymy zatem na piątym etapie postępowania przyjęciem hipotezy K, albowiem zaobserwowana liczba elementów wadliwych $k = 2 > 1{,}990 = 5a + n_2$.

Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, że test – bez względu na wynik doświadczenia – nie mógł zakończyć się w pierwszym etapie. Mógł natomiast zakończyć się w drugim etapie przyjęciem hipotezy K (gdyby obydwie sztuki były wadliwe), natomiast do przyjęcia hipotezy H potrzeba byłoby minimum 35 doświadczeń w przypadku, gdyby wszystkie sztuki okazały się dobre, bo wtedy $0 = k < an + b_1$.

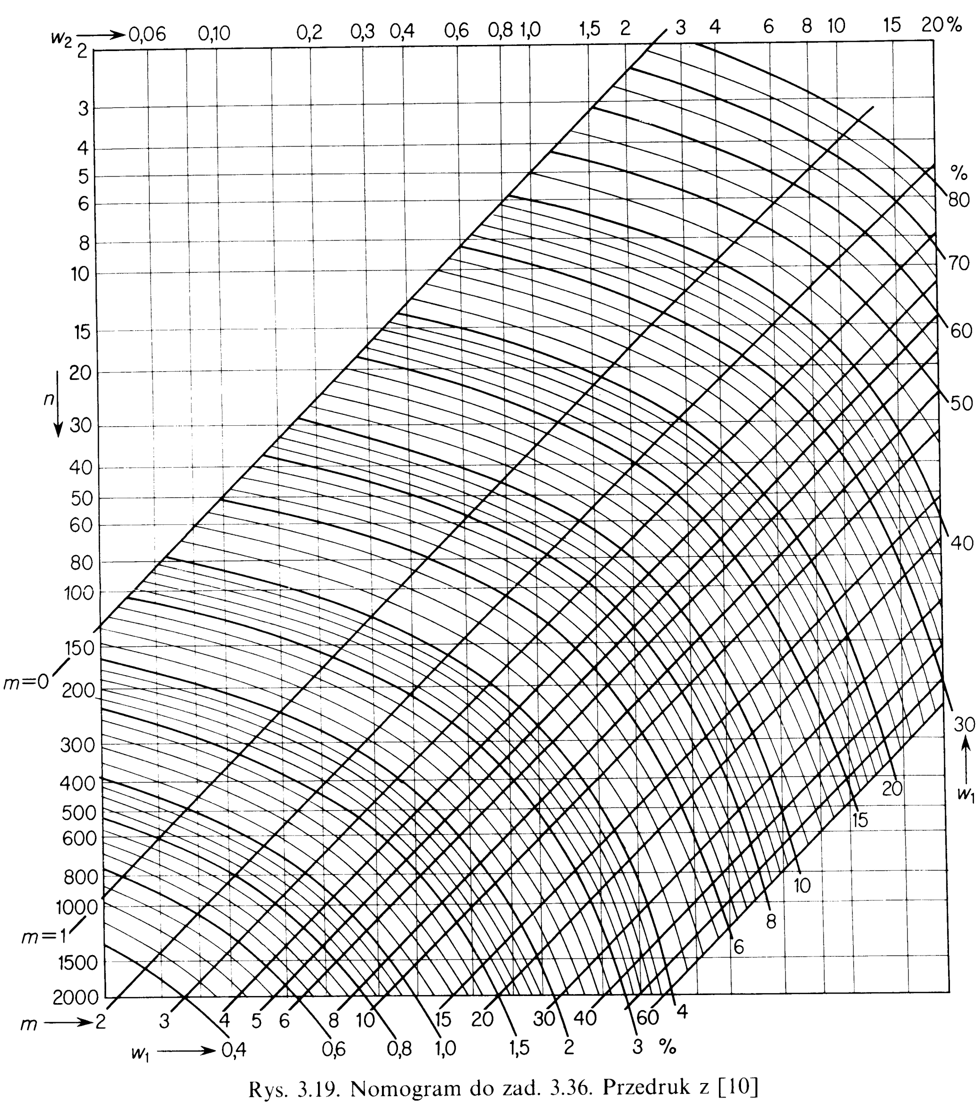
Bardzo często w praktyce zamiast wykonywać obliczenia w tabelce wygodnie jest przedstawić procedurę weryfikacji graficznie, jak to pokazano na rysunku 3.18 dla danych zadania 3.36.

Rys. 3.18. Do zad. 3.36



W przypadku weryfikacji hipotezy H przeciw K testem o ustalonej z góry liczności próby przy tych samych prawdopodobieństwach błędów α i β, należałoby pobrać próbę o znacznie większej liczności n, przy czym przyjmowalibyśmy hipotezę H w przypadku, gdy liczba k sztuk wadliwych byłaby mniejsza od k_0 i hipotezę K, gdy $k \geqslant k_0$. Liczność n oraz krytyczną wartość dla danych θ_0 i θ_1 określonych hipotezami H i K można dla $\alpha = \beta = 0{,}05$ odczytać z poniżej podanego nomogramu (rys. 3.19). W przypadku naszego zadania należałoby pobrać próbę o liczności $n = 80$.

B. Test sekwencyjny przy postępowaniu wielostopniowym. Często ze względów organizacyjnych (szczególnie w statystycznej kontroli jakości) rozpatrywane badanie sekwencyjne zastępujemy postępowaniem sekwencyjnym innego rodzaju, tak zwanym



Rys. 3.19. Nomogram do zad. 3.36. Przedruk z [10]

postępowaniem wielostopniowym lub tylko *dwustopniowym*. Postępowanie to polega na tym, że nie podejmujemy decyzji po każdym wylosowanym elemencie próby, lecz pobieramy w kolejnych etapach próby o licznościach $n_1, \ldots, n_l$ i decyzję podejmujemy po pobraniu każdej z tych prób.

Praktycznie postępujemy w ten sposób, że liczność n potrzebną do weryfikacji hipotezy H przeciw K przy z góry ustalonej liczności (odczytanej np. z nomogramu) dzielimy na l grup – jeśli to możliwe – o równych licznościach $n_1 = \ldots = n_l$. Następnie z populacji pobieramy najpierw próbę o liczności n_1 (pierwszy etap postępowania) i jeśli liczba elementów wyróżnionych w tej grupie k jest mniejsza od $an_1 + b_1$ przyjmujemy hipotezę H, gdy większa od $an_1 + b_2$ – przyjmujemy K; gdy żaden z tych warunków nie jest spełniony, pobieramy następną próbę o liczności n_2. Na tym etapie decyzję podejmujemy w zależności od tego, czy łączna liczba elementów wyróżnionych k jest

$$k < a(n_1 + n_2) + b_1 \quad \text{albo} \quad k > a(n_1 + n_2) + b_2,$$

albo też

$$a(n_1 + n_2) + b_1 \leqslant k \leqslant a(n_1 + n_2) + b_2.$$

Tego rodzaju postępowanie decyzyjne gwarantuje zakończenie weryfikacji przyjęciem hipotezy H albo K po co najwyżej l krokach, a bardzo często pozwala wyraźnie zmniejszyć liczbę przebadanych elementów, koniecznych do powzięcia decyzji.

Model 2. Badana cecha X ma rozkład zero-jedynkowy z nieznanym parametrem θ. Testem sekwencyjnym weryfikujemy hipotezę $H: \theta \leqslant \theta_0$ przeciw hipotezie $K: \theta > \theta_0$.

Tak samo jak w poprzednim modelu (punkt A) do badania pobieramy kolejno po jednym elemencie i w każdym etapie postępowania wyznaczamy liczbę k sztuk wyróżnionych. Następnie obliczamy liczby określone wzorami

$$n_1(k) = \left[\frac{\chi^2(1-\beta, 2(k+1))}{2\theta_0}\right] + 1, \tag{3.5.7}$$

$$n_2(k) = \left[\frac{\chi^2(\alpha, 2k)}{2\theta_0}\right], \tag{3.5.8}$$

gdzie liczniki są odpowiednimi kwantylami rozkładu χ^2, a $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Jeśli w n-tym etapie postępowania mamy

a) $n < n_2(k)$ – hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy K,

b) $n > n_1(k)$ – przyjmujemy hipotezę H,

c) $n_2(k) \leqslant n \leqslant n_1(k)$ – do próby dobieramy następny element.

Najmniejszą licznością próbki, przy której jest możliwe przyjęcie hipotezy H, jest $n > n_1(0)$. Przyjmując np. $\beta = 0{,}05$, otrzymamy

$$n > \frac{\chi^2(1-\beta, 2)}{2\theta_0} \cong \frac{3}{\theta_0}.$$

Zgodnie z tym warunkiem, gdy np. hipotezą H jest $\theta \leqslant 0{,}1$, wtedy trzeba pobrać próbkę o liczności co najmniej 30 sztuk, a dla wykazania hipotezy $H: \theta \leqslant 0{,}02$ potrzeba już próbki o liczności nie mniejszej niż 150 sztuk.

Zadanie 3.37. Automat produkuje pewne detale, przy czym nieznana jest wadliwość θ produkcji tej maszyny. Przyjmując $\alpha = \beta = 0{,}05$, wyznaczyć wartości $n_1(k)$ i $n_2(k)$ dla $k = 0, 1, 2, 3$, jeśli weryfikowaną jest hipoteza $H: \theta \leqslant 0{,}1$, a hipotezą alternatywną jest hipoteza $K: \theta > 0{,}1$.

Rozwiązanie. Korzystamy z (3.5.7) i (3.5.8)

$$n_1(k) = \left[\frac{\chi^2(0{,}95,\ 2(k+1))}{0{,}2}\right] + 1, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

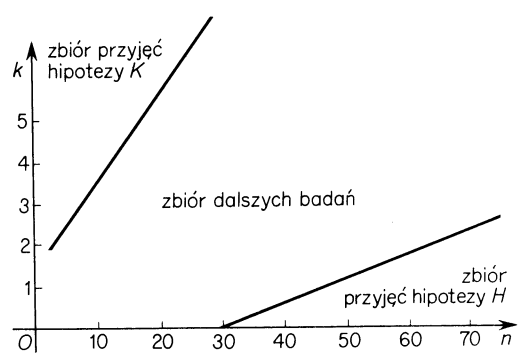
$$n_2(k) = \left[\frac{\chi^2(0{,}05,\ 2k)}{0{,}2}\right], \qquad k = 1, 2, 3.$$

Odczytajmy najpierw z tablicy 8 odpowiednie kwantyle rozkładu χ^2, otrzymując

$$\chi^2(0{,}95,\ 2) = 5{,}99, \quad \chi^2(0{,}95,\ 4) = 9{,}49, \quad \chi^2(0{,}95,\ 6) = 12{,}6,$$
$$\chi^2(0{,}95,\ 8) = 15{,}5, \quad \chi^2(0{,}05,\ 2) = 0{,}103, \quad \chi^2(0{,}05,\ 4) = 0{,}711,$$
$$\chi^2(0{,}05,\ 6) = 1{,}64.$$

Podstawiając otrzymane kwantyle do wypisanych wzorów otrzymujemy wyniki zebrane w tabelce:

k	0	1	2	3
$n_1(k)$	30	48	63	78
$n_2(k)$	–	0	3	8



Rys. 3.20. Do zad. 3.37

Jeśli więc np. wszystkie wyprodukowane sztuki do 25 były dobre, to nie możemy przyjąć żadnej z hipotez, ponieważ $25 < n_1(0) = 30$ i należy elementy pobierać dalej. Gdybyśmy dalej obserwowali produkcję tej maszyny, a pierwszą sztuką wadliwą byłaby np. sztuka 26-ta, wtedy, w przypadku gdyby następna wadliwa pojawiła się później niż przy 48 numerze, należałoby przyjąć hipotezę H, ponieważ $49 > n_1(l) = 48$. Przedstawienie graficzne wartości $n_1(k)$ i $n_2(k)$ oraz tę przykładową weryfikację ilustruje rysunek 3.20.

3.5.3. Sekwencyjny test do weryfikacji hipotez dotyczących parametrów rozkładu normalnego.

M o d e l 1. Badana cecha X ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o znanym σ i nieznanym μ. Testem sekwencyjnym weryfikujemy hipotezę H: $\mu = \mu_0$ przeciw hipotezie K: $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$.

Niech α i β będą odpowiednio ustalonymi prawdopodobieństwami błędów pierwszego i drugiego rodzaju. Wtedy $A = \beta/(1-\alpha)$, $B = (1-\beta)/\alpha$, a wartość statystyki testowej Z_n jest równa

$$z_n = \ln \prod_1^n \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu_1)^2\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu_0)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2 - \sum_1^n (x_i - \mu_1)^2\right) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\sum_1^n x_i + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\sigma^2} n.$$

Hipotezę H będziemy przyjmowali w n-tym etapie postępowania wówczas, gdy

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\sum_1^n x_i + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\sigma^2} n < \ln A$$

lub co na jedno wychodzi, gdy

$$\sum_1^n x_i < h_1 + \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} n, \qquad \text{gdzie} \qquad h_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln A.$$

Gdy natomiast

$$\sum_1^n x_i > h_2 + \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} n, \qquad \text{gdzie} \qquad h_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln B,$$

wtedy przyjmujemy hipotezę K, a gdy nie zachodzi żaden z dwu poprzednich warunków, wtedy przechodzimy do następnego etapu postępowania.

Dla wygody w poniższej tabelce podano wartości $\ln A = \ln \beta/(1-\alpha)$ (górny wiersz) oraz $\ln B = \ln(1-\beta)/\alpha$ (dolny wiersz).

α	β		
	0,01	0,05	0,10
0,01	−4,595 4,595	−2,986 4,554	−2,293 4,500
0,05	−4,554 2,986	−2,944 2,944	−2,251 2,890
0,10	−4,500 2,293	−2,980 2,251	−2,197 2,197

Zadanie 3.38. Badana cecha X ma rozkład $N(\mu, 2)$. Zweryfikować hipotezę H: $\mu = \mu_0 = 0$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $\mu = \mu_1 = 1$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ przy $\beta = 0{,}10$, jeśli kolejnymi wartościami próbki pobranej z tej populacji są liczby: 1,3, 2,5, −0,3, 2,7,

$-0{,}1$, $2{,}3$. Czy przy tej próbce weryfikacja zakończy się przyjęciem którejś z hipotez? Obliczyć wartość przeciętną liczności próby potrzebną do przyjęcia hipotezy H.

Rozwiązanie. Obliczamy najpierw

$$h_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} = 2 \cdot (-2{,}251) = -4{,}502,$$

$$h_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} = 2 \cdot 2{,}890 = 5{,}780, \qquad \frac{\mu_0 - \mu_1}{2} = \frac{1}{2},$$

a pozostałe obliczenia wykonajmy w tabelce

Etap badania n	Obserwacja x_i	$\sum x_i$	$h_1 + \frac{1}{2}n$	$h_2 + \frac{1}{2}n$	Decyzja
1	1,3	1,3	−4,00	6,28	Badać dalej
2	2,5	3,8	−3,50	6,78	Badać dalej
3	−0,3	3,5	−3,00	7,28	Badać dalej
4	2,7	6,2	−2,50	7,78	Badać dalej
5	−0,1	6,1	−2,00	8,28	Badać dalej
6	2,3	8,4	−1,50	8,78	Badać dalej

Dana sześcioelementowa próbka nie wystarczy zatem do przyjęcia żadnej z rozważanych hipotez, badania należy prowadzić więc dalej. Wartość przeciętna liczby obserwacji potrzebnych do przyjęcia hipotezy H jest równa

$$E(N|\mu = 0) = \frac{(1-\alpha)\ln \beta/(1-\alpha) + \alpha \ln (1-\beta)/\alpha}{E(Z|\mu = 0)},$$

natomiast do przyjęcia K wynosi

$$E(N|\mu = 1) = \frac{\beta \ln \beta/(1-\alpha) + (1-\beta)\ln(1-\beta)/\alpha}{E(Z|\mu = 1)},$$

Wykorzystując fakt, że

$$Z = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} X + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\sigma^2},$$

mamy

$$E(Z|\mu = \mu_0) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\mu_0 + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{8}$$

oraz

$$E(Z|\mu = \mu_1) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2}\mu_1 + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{8}.$$

Stąd otrzymujemy

$$E(N|\mu = 0) = 15{,}9, \qquad E(N|\mu = 1) = 19{,}0.$$

Można wykazać, że przeciętne zmniejszenie liczności próbki przy stosowaniu testu sekwencyjnego wynosi około 50%, w porównaniu z najmocniejszym testem klasycznym przy tych samych błędach pierwszego i drugiego rodzaju. Jest to szczególnie ważne wtedy, gdy koszt badania elementów jest duży, albo gdy badania są niszczące bądź długotrwałe.

Model 2. Badana cecha X ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o znanym μ i σ nieznanym. Testem sekwencyjnym weryfikujemy hipotezę $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$, wobec hipotezy alternatywnej $K: \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

Postępując analogicznie jak w poprzednim modelu, otrzymujemy

$$Z_n = \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sum_1^n (X_i - \mu)^2 \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right),$$

przy czym przyjmujemy hipotezę H, gdy wartość z_n statystyki Z_n spełnia warunek

$$z_n < \ln A = \ln\frac{\beta}{1-\alpha},$$

hipotezę K, gdy

$$z_n > \ln B = \ln\frac{1-\beta}{\alpha},$$

albo prowadzimy dalej badania.

Oznaczając

$$h_0 = 2\sigma_1^2\sigma_0^2 \ln\frac{\beta}{1-\alpha} / (\sigma_1^2 - \sigma_2^2), \qquad h_1 = 2\sigma_1^2\sigma_0^2 \ln\frac{1-\beta}{\alpha} / (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)$$

oraz

$$D = \sigma_0^2\sigma_1^2 \ln\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} / (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)$$

i rozwiązując rozważane nierówności względem $\sum (x_i - \mu)^2$, otrzymujemy, że gdy

$$\sum (x_i - \mu)^2 < h_0 + nD - \text{przyjmujemy hipotezę } H,$$

gdy

$$\sum (x_i - \mu)^2 > h_1 + nD - \text{przyjmujemy hipotezę } K,$$

gdy natomiast $h_0 + nD \leqslant \sum (x_i - \mu)^2 \leqslant h_1 + nD$, prowadzimy dalej badania.

3.6. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

3.39. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą wynikami n-elementowej próbki prostej pobranej z populacji, w której cecha X ma rozkład równomierny na przedziale $(0, \theta)$. Do weryfikacji hipotezy $H: \theta = \theta_0$ przy alternatywie $K: \theta > \theta_0$ zaproponowano następujący test:

gdy $\max(x_1, \ldots, x_n) = x_{(n)} < c$ – gdzie c jest pewną stałą dodatnią, wtedy przyjmujemy hipotezę H,

gdy $\max(x_1, \ldots, x_n) \geqslant c$, hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy K. Wykorzystując fakt, że statystyka $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ ma rozkład określony przez dystrybuantę

$$F(z)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad z \leqslant 0, \\ \left(\dfrac{z}{\theta}\right)^n & \text{dla} \quad 0<z<\theta, \\ 1 & \text{dla} \quad z \geqslant 0, \end{cases}$$

wyznaczyć:

a) taką wartość c, aby poziom istotności α był równy 0,10,

b) moc testu,

c) liczność próby n, przy której prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju będzie mniejsze od 0,09, jeżeli hipotezą alternatywną jest hipoteza $K_1: \theta = 1{,}2\theta_0$.

3.40. Weryfikację hipotezy o wadliwości p pewnej partii towaru przeprowadzamy na podstawie wyników 5-elementowej próby prostej za pomocą następującego testu: jeśli w próbie zaobserwujemy więcej niż jedną sztukę wadliwą, to hipotezę odrzucamy, w przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do jej odrzucenia. Znaleźć poziom istotności testu oraz prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, jeśli weryfikowaną hipotezą jest hipoteza H: $p = 0{,}2$, alternatywną zaś hipoteza K: $p = 0{,}3$.

3.41. Rozwiązać zadanie poprzednie w przypadku, gdy próba nie jest prosta, lecz elementy próby wybieramy na skutek losowania bezzwrotnego, jeśli populacja ma 120 elementów. Porównać wyniki z zadaniem poprzednim.

3.42. Wytwórnia cukierków paczkuje mieszankę złożoną z dwóch rodzajów cukierków w torebki po około 200 sztuk, przy czym paczkowane są dwa typy mieszanek. Mieszanka typu A zawiera 40% cukierków pierwszego rodzaju i 60% drugiego rodzaju, natomiast mieszanka typu B zawiera jednakowe liczby cukierków obydwu rodzajów. Do weryfikacji hipotezy, że mieszanka jest typu A (H: $p = 40\%$), wobec hipotezy alternatywnej (K: $p = 50\%$) zaproponowano następującą procedurę: jeśli wśród 5 cukierków wylosowanych z torebki znajdujemy więcej niż 3 cukierki pierwszego rodzaju odrzucamy hipotezę H na korzyść alternatywy K. W przeciwnym przypadku przyjmujemy hipotezę H. Znaleźć, przy tak określonej procedurze testowej, prawdopodobieństwa błędów obydwu rodzajów.

3.43. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, 1)$. Do weryfikacji hipotezy H: $\mu = 0$ przy alternatywie k: $\mu = 1$ zastosowano dwie następujące procedury testowe:

1. Z populacji pobieramy próbkę 4-elementową i jeśli średnia $\bar{x} \geqslant \dfrac{2{,}58}{\sqrt{4}}$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K; w przeciwnym przypadku przyjmujemy hipotezę H.

2. Rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł, pobieramy próbkę 2-elementową i hipotezę H odrzucamy na korzyść K, gdy $\bar{x} \geqslant \dfrac{2{,}58}{\sqrt{2}}$; gdy wypadnie reszka, pobieramy próbkę 6-elementową (czyli liczność próby N jest zmienną losową) i hipotezę H odrzucamy, gdy $\bar{x} \geqslant \dfrac{2{,}58}{\sqrt{6}}$.

a) Jaka jest wartość przeciętna liczności próby przy weryfikacji drugą procedurą?

b) Znaleźć prawdopodobieństwa błędów α i β obydwu procedur testowych. Porównać wyniki.

3.44. Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, 2)$. Do weryfikacji hipotezy $H: \mu = -1$ przy alternatywie K: $\mu = 1$ zastosowano test: jeśli średnia z próbki n-elementowej $\bar{x} > C$ – gdzie C jest pewną stałą – hipotezę H odrzucamy na korzyść alternatywy K. W przeciwnym przypadku przyjmujemy hipotezę H.

a) Wyznaczyć tak liczbę $C(n)$, aby poziom istotności testu $\alpha = 0{,}05$.

b) Jak liczną próbę należy pobrać, aby przy $\alpha = 0{,}05$ prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju $\beta \leqslant 0{,}05$?

3.45. Wykonano badania liczby cykli przy wielokrotnym rozciąganiu do momentu zerwania przędzy wełnianej dla 40 odcinków przędzy i otrzymano średnią wytrzymałość w odcinku przędzy (w liczbie cykli) 4147 oraz wariancję 9800. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H, że średnia liczba cykli potrzebna do zerwania przędzy tego gatunku jest równa 4000, wobec hipotezy alternatywnej, że średnia jest różna od 4000 przy założeniu, że wytrzymałość odcinka przędzy ma rozkład normalny.

3.46. Wylosowano niezależnie 12 indywidualnych gospodarstw rolnych w pewnej wsi i otrzymano dla nich następujące wielkości uzyskanych plonów owsa (w q/ha): 23,3, 22,1, 21,8, 19,9, 23,7, 22,3, 22,6, 21,5 21,9, 22,8, 23,0, 22,2. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że wartość przeciętna plonu owsa w całej wsi wynosi 22,6 q/ha, jeśli alternatywną jest hipoteza, że wartość przeciętna plonu owsa jest wyższa niż w roku ubiegłym, w którym wynosiła 22,6 q/ha.

3.47. Zbadano przebiegi 200 opon samochodowych pewnego typu wycofanych z eksploatacji i otrzymano wyniki

Przebiegi opon (tys. km)	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	Razem
Liczby opon n_i	20	40	95	25	15	5	200

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że wartość przeciętna przebiegu opon tego typu jest równa $\mu = 35$ tys. km wobec hipotezy alternatywnej $K: \mu < 35$.

3.48. Dzienne zużycie wody w fabryce podlega wahaniom losowym. Na podstawie obserwacji $n = 315$ dni roku stwierdzono, że średnie dzienne zużycie wody wynosi $\bar{x} = 1029$ m^3, a wariancja $s^2 = 191$ m^6. Zweryfikować hipotezę H: $\mu = 1000$ m^3, przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ i hipotezę alternatywną K: $\mu > 1000$ m^3.

3.49. Zbadano 10 kawałków stali ze względu na granicę plastyczności (w kG/cm^2) i otrzymano następujące wyniki: 3570, 3700, 3650, 3590, 3720, 3710, 3550, 3720, 3580, 3630. Zakładając, że granica plastyczności stali ma rozkład normalny, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę H, że wartość przeciętna granicy plastyczności jest równa 3600, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza K: $\mu \neq 3600$.

3.50. Zmierzono czasy pracy (w h) 15 wylosowanych bateryjek radiowych i otrzymano rezultaty: 29, 39, 33, 34, 37, 14, 40, 35, 37, 30, 34, 36, 38, 33, 30. Zakładając, że czasy pracy mają rozkład normalny na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, zweryfikować hipotezę, że wartość przeciętna czasu pracy tego typu bateryjek jest równa 35 h (H: $\mu = 35$), jeśli alternatywną jest hipoteza K: $\mu < 35$.

3.51. Maszyna jest nastawiona tak, aby produkowała kulki łożyskowe mające średnicę równą 1 cm. Próba dziesięciu wyprodukowanych kulek przez tę maszynę miała średnią średnicę równą 1,004 cm oraz $s = 0{,}003$ cm.

Czy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ jest powód do podejrzeń, że maszyna produkuje kulki łożyskowe o wartości przeciętnej średnicy większej niż 1 cm?

3.52. Maszyna mieszająca nawóz jest tak nastawiona, aby w każdych 100 kg nawozu było 10 kg azotanu. Zbadano dziesięć 100-kilogramowych worków. Procentowa zawartość azotanu była następująca: 9, 12, 11, 10, 11, 9, 11, 12, 9, 10. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ można uważać za słuszną hipotezę, że wartość przeciętna zawartości azotanu w worku jest równa 10%, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza, że ta wartość przeciętna jest wyższa niż 10%?

3.53. Wykonano 15 pomiarów czasu likwidowania zrywów na przędzarce obrączkowej, otrzymując (w s): 4,5, 3,6, 6,0, 6,4, 7,9, 6,9, 6,1, 7,4, 9,0, 4,3, 6,1, 8,2, 4,9, 7,5, 5,8. Zakładając, że rozkład czasu likwidacji zrywu jest normalny, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H, że wariancja czasu likwidacji zrywów jest równa 2, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza $K: \sigma^2 > 2$.

3.54. W celu sprawdzenia dokładności wskazań pewnego przyrządu pomiarowego dokonano $n = 6$ pomiarów tej samej wielkości i uzyskano następujące wyniki (w cm): 1,017, 1,021, 1,015, 1,019, 1,022, 1,019. Zakładając, że wyniki pomiarów mają rozkład normalny na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$, zweryfikować hipotezę H, że wariancja pomiarów $\sigma^2 = 0{,}001$, jeśli alternatywną jest hipoteza $K: \sigma^2 \neq 0{,}001$.

3.55. Fabryka produkuje pewien towar sztukowy, dla którego badana cecha ma rozkład $N(\mu, \sigma)$. Norma technologiczna przewiduje, że $\sigma^2 \leqslant 3$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę H: $\sigma^2 = 3$, wobec hipotezy alternatywnej $K: \sigma^2 > 3$, jeśli w wyniku zbadania 100-elementowej próbki tego towaru otrzymano $s^2 = 3{,}7$.

3.56. W pewnym zakładzie objęto badaniem 200 robotników pod względem procentu wykonania normy i wyniki zebrano w następującym szeregu rozdzielczym:

Procent wykonania normy	70	80	90	100	110	120	130	140	150
liczba robotników	3	15	29	70	50	17	12	3	1

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że odchylenie standardowe procentu wykonania normy jest równe 10%, wobec hipotezy alternatywnej $K: \sigma < 10\%$.

3.57. Dla sprawdzenia stabilności pracy maszyny pobrano dwie próbki: pierwszą w początkowym okresie eksploatacji oraz drugą po miesięcznym okresie pracy tej maszyny i wykonano pomiary wylosowanych produktów. Otrzymano:

dla pierwszej próbki: $n_1 = 25$, $s_1^{*2} = 0{,}1447$,

dla drugiej próbki: $n_2 = 19$, $s_2^{*2} = 0{,}1521$.

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę o równości wariancji wymiarów wykonanych produktów w badanych okresach (tzn. hipotezę o nierozregulowaniu się maszyny w sensie stabilności rozproszenia mierzonego wymiaru produktów), przeciw hipotezie alternatywnej, że wariancje te nie są równe.

3.58. Dla porównania regularności uzyskiwanych wyników sportowych dwóch zawodników (skok w dal) w pewnym okresie wylosowano 12 wyników skoków dla pierwszego zawodnika oraz 9 wyników drugiego, otrzymując rezultaty (w m): dla pierwszego zawodnika: 7,60, 7,81, 8,01, 7,95, 7,15, 8,06, 7,90, 7,91, 7,56, 7,62, 7,85, 8,02; dla drugiego zawodnika: 7,50, 7,90, 8,00, 7,17, 7,28, 7,35, 7,73, 7,20, 7,98. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę o jednakowej regularności uzyskiwanych wyników dla obydwu zawodników (tzn. hipotezę, że wariancje rezultatów obydwu zawodników są równe), wobec hipotezy alternatywnej, że regularność pierwszego zawodnika jest wyższa.

3.59. W celu sprawdzenia czy wariancje miesięcznych płac pracowników Sektora A i Sektora B pewnego kombinatu są jednakowe, obliczono wariancje płac miesięcznych dla 17 wylosowanych pracowników Sektora A, otrzymując $s_1^{*2} = 250\,000$ zł^2 oraz wariancję dla 25 wylosowanych pracowników Sektora B, otrzymując $s_2^{*2} = 202\,000$ zł^2. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ przeciw hipotezie alternatywnej, że wariancje miesięcznych płac tych grup pracowników są różne.

3.60. Wykorzystując fakt, że zmienna losowa F ma rozkład określony przez gęstość (rozkład F Snedecora o (k_1, k_2) stopniach swobody)

$$f_F(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2} x^{k_1/2-1}\left(1+\dfrac{k_1}{k_2}x\right)^{-(k_1+k_2)/2} & \text{dla} \quad x>0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

wykazać, że zmienna losowa $F' = 1/F$ ma także rozkład F Snedecora o (k_2, k_1) stopniach swobody.

3.61. W celu porównania średniego stażu pracy w dwóch zakładach wylosowano z każdego z tych zakładów grupę pracowników i zbadano ją pod względem długości stażu pracy w danym zakładzie. Otrzymano następujące rezultaty:

Zakład 1 – liczba badanych pracowników 36, średni staż pracy 6,8, odchylenie standardowe 1,7.

Zakład 2 – liczba badanych pracowników 40, średni staż pracy 8,2, odchylenie standardowe 2,5.

Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę, że średnie staże pracy dla wszystkich pracowników każdego z tych zakładów są równe, jeśli alternatywą jest hipoteza, że średni staż pracy w pierwszym zakładzie jest krótszy niż w drugim.

3.62. Z partii włókien wełny wylosowano dwie próbki włókien i w każdej z tych próbek zmierzono średnicę włókien wełny różnymi metodami. Otrzymano: 1 próbka $n = 50$, średnia średnica włókna 22,9 μm, odchylenie standardowe 4,16 μm, 2 próbka $n = 120$, średnia średnica włókna 23,2 μm, odchylenie standardowe 5,87 μm. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że obydwie metody dają taką samą ocenę wartości przeciętnej średnicy włókna, wobec hipotezy alternatywnej, że metody te dają wyniki różniące się między sobą.

3.63. Dwóm grupom robotników zlecono wykonanie tej samej pracy z tym jednak, że robotnicy grupy pierwszej przeszli wcześniej odpowiednie przeszkolenie. Zaobserwowana wydajność pracy w pierwszej grupie kształtowała się następująco (w szt/h): 18,6, 17,9, 18,1 17,0, 18,7, 18,3, podczas gdy w drugiej grupie zaobserwowano następujące wydajności: 17,3, 17,6, 17,1, 16,0, 17,8. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H, że średnia wydajność pracy nie zależy od uprzedniego przeszkolenia, jeśli alternatywną jest hipoteza, że średnia wydajność pracy robotników przeszkolonych jest wyższa.

3.64. Spośród uczniów pewnego liceum wylosowano 15 z klas pierwszych oraz 12 z klas drugich i obliczono średnią ocen uzyskanych w semestrze dla każdego z uczniów. Otrzymano rezultaty:

dla uczniów klas pierwszych: 3,71, 4,28, 2,95, 3,20, 3,38, 4,05, 4,07, 4,98, 3,20, 3,43, 3,09, 4,50, 3,12, 3,68, 3,90,

– dla uczniów klas drugich: 3,10, 3,38, 4,06, 3,60, 3,81, 4,50, 4,00, 3,25, 4,11, 4,85, 2,80, 4,00.

Zakładając, że średnie wyniki ocen mają rozkłady normalne, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę, że wartości przeciętne ocen uzyskiwanych przez uczniów klas pierwszej i drugiej tej szkoły są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że wartość przeciętna ocen uzyskiwanych przez uczniów klasy drugiej jest większa.

3.65. W celu stwierdzenia czy istotny jest wpływ temperatury na dokładność wskazań pewnego rodzaju zegarków dla 10 losowo wybranych z partii zegarków po jednodniowym ich umieszczeniu w temperaturze 5°C wyznaczono różnicę pomiędzy czasem dokładnym a czasem wskazywanym przez zegarek, a następnie przeprowadzono dla tych samych zegarków analogiczne doświadczenie przy temperaturze 25°C. Otrzymano rezultaty (w s):

Zegar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5°C	−10	45	−30	−10	20	50	−30	−25	0	15
25°C	5	50	−30	0	15	60	−10	−20	20	30

Zakładając, że odchylenia pokazywanych czasów od czasu dokładnego mają rozkład normalny, na poziomie $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę o równości wartości przeciętnych wskazywanych czasów przez zegarki tego typu w temperaturach 5°C i 25°C, jeśli hipotezą jest, że wartość przeciętna pokazywanych czasów w temperaturze 25°C jest wyższa.

3.66. Dla 7 wybranych losowo roślin chmielu wykonano następujące doświadczenie. Zapylono jedną połowę każdej rośliny, druga natomiast połowa była niezapylona. Plon nasion roślin chmielu przedstawiono w tabeli

Nr rośliny		1	2	3	4	5	6	7
Masa nasion (w g na 10 g chmielu)	zapylona	0,78	0,76	0,43	0,92	0,86	0,59	0,68
	niezapylona	0,21	0,12	0,32	0,29	0,30	0,20	0,14

Czy na 5%-owym poziomie istotności można uznać, że zapylona część rośliny daje wyższy plon niż niezapylona?

3.67. Z partii butelek dostarczonych do mleczarni sprawdzono 900 butelek i znaleziono wśród nich 18 butelek wybrakowanych. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że procent butelek wybrakowanych jest równy $\theta = 3\%$, wobec hipotezy alternatywnej K: $\theta > 3\%$.

3.68. Spośród 200 zbadanych pacjentów pewnego szpitala 8% miało grupę krwi „AB", a spośród nich 25% miało czynnik „Rh –". Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę H, że procent osób o krwi „AB – Rh –" jest równy 3 przeciw hipotezie alternatywnej K: $\theta < 3\%$.

3.69. W celu zbadania wadliwości partii pewnych urządzeń poddano kontroli 15 wylosowanych urządzeń i okazało się, że 3 z nich nie spełniały żądanych wymagań kontroli. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że liczba sztuk nie spełniających żądanych wymagań nie przekracza 6% liczby wszystkich urządzeń tej partii.

3.70. W celu wyznaczenia siły kiełkowania ziarna siewnego żyta wykonano doświadczenie polegające na zasianiu 500 ziaren i zbadaniu, ile ziaren wykiełkuje. Wykiełkowały 492 ziarna. Czy na tej podstawie można uznać, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, hipotezę, że procent kiełkujących ziaren jest nie mniejszy niż 97?

3.71. W grupie 194 chorych na pewną chorobę przeprowadzono badania ze względu na liczbą granulocytów i otrzymano

Grupa chorych	Liczba granulocytów	Liczba zmarłych w ciągu jednego roku	Liczba wszystkich chorych
A	0–750	19	82
B	powyżej 750	6	112

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

a) H_1 : {procenty zmarłych w obydwu grupach chorych na tę chorobę są jednakowe}, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza, że w pierwszej grupie śmiertelność jest wyższa niż w drugiej,

b) H_2 : {procent chorych pierwszej grupy zmarłych w ciągu jednego roku wynosi 25%}, wobec hipotezy alternatywnej, że jest on wyższy niż 25%.

3.72. Przez okres 4 tygodni stawiano prognozy meteorologiczne dwiema różnymi metodami. Prognozy stawiane pierwszą metodą okazały się trafne w 21 dniach, drugą zaś w 17. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ można twierdzić, że pierwsza z metod jest lepsza od drugiej?

3.73. Na egzaminie wstępnym z matematyki na wyższą uczelnię spośród 705 absolwentów techników 450 nie rozwiązało pewnego zadania, natomiast na 1320 absolwentów liceów ogólnokształcących nie rozwiązało tego zadania 517 kandydatów. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę o jednakowym stopniu opracowania tej części materiału, którego dotyczyło zadanie, przez absolwentów obu typów szkół, jeśli hipotezą alternatywną jest hipoteza, że absolwenci techników byli słabiej przgotowani z tej partii materiału.

3.74. W celu porównania siły kiełkowania ziaren fasoli przechowywanej dwoma różnymi sposobami, z każdej partii tych ziaren wylosowano po 200 ziaren i zbadano, ile ziaren wykiełkuje. Sprawdzono, że wykiełkowało 195 ziaren przechowywanych sposobem 1 i 191 ziaren przechowywanych sposobem 2. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że siły kiełkowania ziaren fasoli przechowywanych tymi różnymi metodami są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że siły te są różne.

3.75. Są dwa baseny do konserwacji jaj. Najpierw załadowano pierwszy, a nieco później drugi. W toku kontroli pobrano z każdego basenu po 10 jaj. W pierwszej próbie znaleziono 7 jaj dobrych, a w drugiej 9 jaj. Uzasadnione jest przypuszczelnie, że frakcja jaj dobrych w pierwszym basenie – jako wcześniej załadowanych – jest mniejsza niż w drugim. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ rozstrzygnąć, czy wyniki kontroli potwierdzają to przypuszczenie.

3.76. Dwie grupy chorych, z których każda liczy 20 osób, poddano leczeniu dwoma lekami, pierwszą lekiem A, drugą – B. W pierwszej grupie nastąpiła wyraźna poprawa u 11 chorych, w drugiej u 17. Przypuszcza się, że lek B jest skuteczniejszy od leku A. Czy wyniki tych kuracji potwierdzają to przypuszczenie? Poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

3.77. Z produkcji dzianin trzech rodzajów: wiskozy, poliamidu i anilany pobrano wycinki o wielkości 1m^2 i wyznaczono ich masy (w g)

wiskoza: 122,4, 118,0, 120,0, 116,0, 120,8;
poliamid: 73,6, 73,4, 79,4, 73,9;
anilana: 254,7, 243,2, 248,6, 236,0, 245,6.

Zakładając, że rozkłady mas wycinków (1m^2) dzianin w każdym z trzech rodzajów surowca są normalne, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że wariancje tych rozkładów są jednakowe.

3.78. Poddano badaniu na zginanie trzy różne rodzaje prętów stalowych i otrzymano rezultaty (w liczbie cykli zginających potrzebnych do złamania pręta):

1) 19, 16, 22, 20, 23, 18, 16;
2) 24, 21, 18, 24, 35, 33, 15;
3) 54, 74, 43, 47, 60, 67, 52.

Przyjmując, że rozkład liczby cykli potrzebny do złamania pręta jest rozładem logarytmiczno-normalnym na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ testem Hartleya oraz testem Cochrana, zweryfikować hipotezę, że wariancje liczby cykli tych rodzajów prętów są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że wariancje te są różne.

W s k a z ó w k a. Jeśli zmienna X ma rozkład logarytmiczno-normalny, to zmienna $\ln X$ ma rozkład normalny.

3.79. Liczby ocen niedostatecznych uzyskanych na egzaminie z pewnego przedmiotu przez jednakowo liczne grupy studenckie I roku Wydziału Włókienniczego Politechniki Łódzkiej były następujące:

Grupa k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Liczba ocen niedostat.	7	9	14	6	2	11	7	8	5	4	9	3	6

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ testem χ^2 zweryfikować hipotezę, że prawdopodobieństwa występowania ocen niedostatecznych w tych grupach są jednakowe.

3.80. Na pewnej drodze w godzinach od 8 do 9 policzono liczbę przejeżdżających pojazdów w kolejnych dniach tygodnia i wyniki zebrano w tabeli

Pon.	Wt.	Śr.	Czw.	Piąt.	Sob.	Niedz.
17	26	19	30	28	35	13

Na podstawie tych wyników zweryfikować testem χ^2 hipotezę, że liczby pojazdów poruszających się po tej drodze w ciągu tego czasu są jednakowe w każdym z dni tygodnia. Poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

3.81. Zmierzono maksymalną pojemność 40 kondensatorów, uzyskując następujące wyniki (w pF): 55,1, 67,3, 54,6, 52,2, 58,4, 50,4, 70,1, 55,3, 57,6, 62,5, 65,2, 68,4, 54,5, 56,7, 53,5, 61,6, 59,6, 49,0, 63,7, 58,1, 56,7, 57,8, 63,6, 69,2, 60,8, 62,9, 54,3, 61,0, 58,2, 64,3, 57,4, 39,3, 59,0, 60,1, 60,7, 59,9, 70,5, 57,2, 61,8, 46,0. Testem Kołmogorowa zweryfikować hipotezę, że rozkład pojemności kondensatorów jest $N(60, 2{,}5)$. Poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

3.82. Wykorzystując dane zadania 3.53, testem Kołmogorowa zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę, że czas likwidacji zrywu przędzy jest $N(6{,}3, 1{,}5)$.

3.83. Wykonano 300 pomiarów wytrzymałości przędzy na rozrywanie i otrzymano wyniki

Wytrzymałość G	116–135	136–155	156–175	176–195	196–215	216–235	236–255	256–275	276–295	296–315	316–335	336–355	356–375	376–395
Liczność	1	2	2	7	36	68	66	54	35	21	3	2	2	1

Testem χ^2 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że rozkład wytrzymałości przędzy badanej partii jest rozkładem $N(245, 30)$.

3.84. Wyznaczono liczby błędów przy korekcie 500-stronicowej książki i otrzymano:

Liczba błędów	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba stron	67	139	134	90	44	15	6	4	1

Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, że liczba błędów na stronicy ma rozkład Poissona.

3.85. Z populacji pobrano 1000-elementową próbkę i wyniki jej badania ze względu na cechę X zebrano w tabeli

Przedział	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8
Liczność	120	273	280	192	92	34	7	2

Testem χ^2 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że badana cecha ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x^2/2}, & x > 0. \end{cases}$$

3.86. W pewnej miejscowości sprawdzono w 200 losowo wybranych chwilach czerwca stopień zachmurzenia i otrzymano

Stopień zachmurzenia	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
Liczba chwil	43	20	15	14	13	16	15	22	42

Testem χ^2 na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że stopień zachmurzenia w danym miesiącu w tej miejscowości ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arc\sin\frac{x-4{,}5}{4{,}5} + \frac{1}{2}.$$

3.87. Pobrano próbkę o liczności $n=20$ pewnej cechy X. Wartościami uporządkowanymi według kolejności są:

15,790, 15,843, 16,286, 16,331, 16,383, 16,411, 16,757,

16,874, 16,985, 17,006, 17,009, 17,355, 17,481, 17,560,

17,980, 18,129, 18,284, 18,287, 18,328, 18,532.

Testem Shapiro-Wilka zweryfikować hipotezę dotyczącą normalności badanej cechy X w populacji generalnej, na poziomie istotności $\alpha=0{,}10$.

3.88. Mierzony w h czas zużycia pobranych losowo 10 żarówek tego samego typu dał wyniki: 1345, 1127, 1925, 2028, 1276, 1053, 2034, 1857, 925, 1430. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}10$ zweryfikować testem Shapiro-Wilka hipotezę H: {czas zużycia żarówki badanego typu jest normalny}.

3.89. Przeprowadzono pomiary wytrzymałości próbek poliestru poddanych działaniu: a) wody destylowanej, b) 10% roztworu NaOH, otrzymując wyniki (w $\mathrm{kG/cm^2}$):

a) 171, 194, 162, 210, 171, 160, 176, 185, 203, 222, 129, 167, 168,

b) 152, 114, 151, 174, 149, 161, 153, 163, 156.

Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że rozkłady wytrzymałości próbek poddanych działaniu tych środków są jednakowe wobec hipotezy alternatywnej, że nie są jednakowe. Wykorzystać testy a) serii, b) Smirnowa-Kołmogorowa, c) Wilcoxona.

3.90. W celu stwierdzenia, która kapusta biała czy czerwona zawiera więcej witaminy C, pobrano po 10 próbek 100-gramowych z każdego gatunku kapusty i wyznaczono ilość witaminy C dla każdej próbki. Otrzymano w miligramach: kapusta biała: 45, 50, 64, 38, 66, 43, 49, 58, 31, 49; kapusta czerwona: 70, 68, 55, 61, 62, 74, 52, 71, 56, 61. Testem a) Wilcoxona, b) serii, c) Smirnowa zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ hipotezę, że rozkłady zawartości witaminy C w obu gatunkach kapusty są identyczne, wobec hipotezy alternatywnej, że nie są identyczne.

3.91. Wykonano 5 serii doświadczalnych pewnych wyrobów, każda o liczności 7 sztuk przy zastosowaniu innej technologii dla każdej serii. Wartości obserwowanej cechy X podano w tabelce:

Nr sztuki	Seria				
	1	2	3	4	5
1	63	35	75	69	44
2	39	54	62	58	46
3	66	38	42	40	25
4	65	25	43	68	59
5	60	24	27	51	31
6	43	22	81	25	38
7	37	37	66	23	32

Testem Kruskala-Wallisa oraz testem Friedmana zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ hipotezę, że rozkłady cechy X przy różnych technologiach są identyczne, wobec hipotezy alternatywnej, że nie są identyczne.

3.92. Z partii wyrobów pobierano w sposób losowy próbkę, otrzymując kolejne wyniki: 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1 (1 – brak, 0 – sztuka dobra). Niech p oznacza procent sztuk wadliwych w całej partii towaru. Przyjmując $\alpha=0{,}05$, $\beta=0{,}10$, testem sekwencyjnym zweryfikować:

a) hipotezę H: $p=3\%$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $p=9\%$.

b) hipotezę H: $p\leqslant 5\%$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $p>5\%$.

c) Czy do zakończenia procedury weryfikacyjnej przyjęciem H lub K w obydwu przypadkach musimy wykorzystać wszystkie elementy próby?

3.93. Kontrolowano nawoje nici szwalnych z przewijarki, przyjmując za dobry nawój o masie od 0,45 do 0,55 kg. Pobierano w tym celu kolejne próbki o liczności $n=10$ nawoi każda i zanotowano liczności k_1 sztuk niedobrych, w każdej z kolejnych próbek otrzymując: 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 2. Przyjmując $\alpha=\beta=0{,}10$, testem sekwencyjnym zweryfikować hipotezę, że procent p sztuk nawoi nici w całej partii jest równy 8, jeśli hipotezą alternatywną jest $K{:}\,p=15\%$.

3.94. Pewne wyroby scharakteryzowane są przez dwie cechy (X, Y), przy czym wyrób uznawany jest za dobry, jeśli $|X-3Y|<1$. Z partii tych wyrobów pobrano próbkę, otrzymując kolejne wyniki (17,5, 6,0), (19,2, 6,3), (14,4, 5,8), (18,2, 5,9), (16,8, 4,3), (20,1, 7,1), (19,3, 7,1), (19,3, 5,8), (17,7, 6,2), (17,7, 7,0), (19,2, 6,4), (20,7, 6,9). Przyjmując $\alpha=0{,}05$, $\beta=0{,}10$, testem sekwencyjnym zweryfikować hipotezę, że wadliwość produkcji tych wyrobów jest równa $p=5\%$, wobec hipotezy alternatywnej K: $p=15\%$.

3.95. Z populacji, w której badana cecha ma rozkład normalny $N(\mu, 0{,}2)$, pobrano próbkę, otrzymując wyniki: 1,98, 2,04, 2,01, 1,97, 2,00. Przy $\alpha=0{,}01$, $\beta=0{,}05$ testem sekwencyjnym weryfikujemy hipotezę H: $\mu=2{,}0$ przeciw hipotezie K: $\mu=2{,}1$. Jaką wartość badanej cechy musiałby mieć następny element próbki, abyśmy mogli:

a) przyjąć weryfikowaną hipotezę H,

b) odrzucić hipotezę H na korzyść hipotezy K?

3.96. Automat rozdziela pewien produkt na porcje o masie X_1, które następnie pakowane są w opakowanie o masie X_2. Wiemy, że zmienna losowa X_1 ma rozkład $N(1, \sigma)$, a zmienna X_2 rozkład $N(0{,}04, 0{,}006)$. Zważono 17 losowo wybranych opakowanych porcji, otrzymując kolejno: 1,042, 1,039, 1,047, 1,041, 1,044, 1,039, 1,045, 1,040, 1,038, 1,046, 1,041, 1,039, 1,040, 1,044, 1,043, 1,039, 1,038. Zakładając niezależność X_1 i X_2 i przyjmując

$\alpha=\beta=0{,}05$, testem sekwencyjnym zweryfikować hipotezę, że wariancja mas produktu (netto) jest równa 0,004 ($H\colon \sigma^2=0{,}004$) przeciw hipotezie alternatywnej $K\colon \sigma^2=0{,}0094$.

W s k a z ó w k a. Ponieważ nie znamy mas porcji netto tylko brutto, zamiast weryfikować hipotezę H będziemy weryfikować hipotezę $H_1\colon \sigma_B^2=\sigma_{X_1}^2+\sigma_{X_2}^2=0{,}004036$ przeciw K_1: $\sigma_B^2=0{,}009436$.

Odpowiedzi

3.39. a) $c=\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}=\theta_0\sqrt[n]{0{,}9}$; b) $M(\theta, W)=1-(1-\alpha)\left(\dfrac{\theta_0}{\theta}\right)^n$; c) $n>12$.

3.40. $\alpha=P(K>1\mid p=0{,}2)=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5-\binom{5}{1}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4\cong 0{,}26$,

$\beta=P(K\leqslant 1\mid p=0{,}3)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^5+\binom{5}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^4\cong 0{,}53$.

3.41. $$\alpha=P(K>1\mid p=0{,}2)=1-\frac{\binom{24}{0}\binom{96}{5}}{\binom{120}{5}}-\frac{\binom{24}{1}\binom{96}{4}}{\binom{120}{5}}\cong 0{,}26,$$

$$\beta=P(K\leqslant 1\mid p=0{,}3)=\frac{\binom{36}{0}\binom{84}{5}}{\binom{120}{5}}+\frac{\binom{36}{1}\binom{84}{4}}{\binom{120}{5}}\cong 0{,}24.$$

3.42. $$\alpha=P(K\geqslant 4\mid p=40\%)=\frac{\binom{80}{4}\binom{120}{1}}{\binom{200}{5}}+\frac{\binom{80}{5}\binom{120}{0}}{\binom{200}{5}}\cong 0{,}084,$$

$$\beta=P(K<4\mid p=50\%)=1-\frac{\binom{100}{4}\binom{100}{1}}{\binom{200}{5}}-\frac{\binom{100}{5}\binom{100}{0}}{\binom{200}{5}}\cong 0{,}815.$$

3.43. a) $EN=2\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{2}=4$; b) $\alpha_1=\alpha_2=0{,}01$, $\beta_1=P\left(\bar{X}<\dfrac{2{,}58}{\sqrt{4}}\,\middle|\,\mu=1\right)=0{,}719>$ $>\beta_2=\dfrac{1}{2}\left[P\left(\bar{X}<\dfrac{2{,}58}{\sqrt{2}}\,\middle|\,\mu=1\right)+P\left(\bar{X}<\dfrac{2{,}58}{\sqrt{6}}\,\middle|\,\mu=1\right)\right]\cong 0{,}716$.

3.44. a) $\alpha=P(\bar{X}\geqslant C\mid\theta=-1)=P\left(\dfrac{\bar{X}+1}{2}\sqrt{n}\geqslant\dfrac{C+1}{2}\sqrt{n}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{C+1}{2}\sqrt{n}\right)=0{,}05$, skąd $C=3{,}28/\sqrt{n}-1$; b) $\beta=P(\bar{X}<C\mid\theta=1)=\Phi\left(\dfrac{C-1}{2}\sqrt{n}\right)\leqslant 0{,}05$; $n>11$.

3.45. $t_{\text{obl}}=9{,}27\in\langle 2{,}023, +\infty)$, przyjąć hipotezę alternatywną.

3.46. $\bar{x}=22{,}26$, $s=0{,}94$, $t_{\text{obl}}=-1{,}20\notin(-\infty, -1{,}782\rangle$; nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.47. $\bar{x} = 37{,}25$, $s = 5{,}63$, $u_{\text{obl}} = 5{,}65$, brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

3.48. $u_{\text{obl}} = 37{,}25$, hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy K.

3.49. $\bar{x} = 3642$, $s = 63{,}7$, $t_{\text{obl}} = 2{,}08 \notin (-\infty, -2{,}262\rangle \cup \langle 2{,}262, +\infty)$; nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.50. $\bar{x} = 32{,}27$, $s = 6{,}06$, $t_{\text{obl}} = 1{,}68 \in (-\infty, -1{,}761\rangle$; nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.51. $t_{\text{obl}} = 4 \in \langle 1{,}833, \infty)$; tak, przyjmujemy hipotezę, że maszyna produkuje kulki łożyskowe o średnicy większej niż 1 cm.

3.52. $\bar{x} = 10{,}4$, $s = 1{,}11$, $t_{\text{obl}} = 1{,}077 \notin \langle 1{,}833, +\infty)$; brak podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.53. $s^2 = 2{,}22$, $\chi^2_{\text{obl}} = 1{,}11 \notin \langle 23{,}69, +\infty)$; brak podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.54. $s^2 = 5{,}47 \cdot 10^{-6}$, $\chi^2_{\text{obl}} = 0{,}033 \in (0, 0{,}675\rangle \cup \langle 18{,}55, +\infty)$; odrzucamy hipotezę H.

3.55. $u_{\text{obl}} = \sqrt{\dfrac{2ns^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3} = 1{,}68 \notin \langle 2{,}33, +\infty)$; brak podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.56. $s^{*2} = 13{,}99$, $u_{\text{obl}} = \dfrac{s^{*2} - \sigma_0^2}{\sigma_0^2}\sqrt{\dfrac{n}{2}} = 9{,}572 \notin (-\infty, -1{,}64\rangle$; brak podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.57. $F_{\text{obl}} = \dfrac{s^{*2}_{\max}}{s^{*2}_{\min}} = 1{,}05 \notin \langle 3{,}40, +\infty)$; nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

3.58. $s_1^{*2} = 0{,}0686$, $s_2^{*2} = 0{,}1043$, $F_{\text{obl}} = 1{,}52 \notin \langle 3{,}60, +\infty)$; brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.59. $F_{\text{obl}} = 1{,}238 \notin \langle 2{,}56, +\infty)$; brak podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.61. $F_{\text{obl}} = 2{,}16 \in \langle 1{,}88, +\infty)$ – hipotezę o równości wariancji odrzucamy; $c_{\text{obl}} = -2{,}84 \in (-\infty, -1{,}66\rangle$ – hipotezę o równości średnich odrzucamy.

3.62. $F_{\text{obl}} = 1{,}97 \in \langle 1{,}95, +\infty)$ – hipotezę o równości wariancji odrzucamy; $c_{\text{obl}} = -0{,}374 \notin (-\infty, -2{,}650\rangle \cup \langle 2{,}650, +\infty)$ nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

3.63. $\bar{x}_1 = 18{,}10$, $s_1 = 0{,}563$, $\bar{x}_2 = 17{,}16$, $s_2 = 0{,}573$, $F_{\text{obl}} = 1{,}06 \notin \langle 5{,}19, +\infty)$, więc nie ma podstaw do odrzucena hipotezy o równości wariancji; $t = 1{,}86 \in \langle 1{,}833, +\infty)$ – hipotezę o równości średnich należy odrzucić.

3.64. $\bar{x}_1 = 3{,}70$, $s_1 = 0{,}569$, $\bar{x}_2 = 3{,}79$, $s_2 = 0{,}566$, $F_{\text{obl}} = 1{,}005$, brak podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji; $t_{\text{obl}} = -0{,}058$, brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

3.65. $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = -9{,}5$, $s_z = 7{,}89$, $t_{\text{obl}} = -3{,}612 \in (-\infty, -2{,}820\rangle$; wartość przeciętna czasów w temperaturze 25°C jest wyższa.

3.66. $\bar{z} = 0{,}49$, $s_z = 0{,}173$, $t_{\text{obl}} = 7{,}49$, tak.

3.67. $u_{\text{obl}} = -1{,}76 \notin \langle 1{,}64, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.68. $u_{\mathrm{obl}} = 0{,}905 \notin (-\infty, -2{,}33\rangle$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy H.

3.69. $u_{\mathrm{obl}} = 1{,}67 \in \langle 1{,}64, +\infty)$ – hipotezę odrzucamy.

3.70. $u_{\mathrm{obl}} = 1{,}84 \notin (-\infty, -1{,}64\rangle$ – dane doświadczalne nie przeczą hipotezie.

3.71. a) Wartość statystyki testowej (3.2.19): $u_{\mathrm{obl}} = 3{,}33 \in \langle 2{,}33, +\infty)$ – hipotezę H_1 odrzucamy; b) wartość statystyki (3.2.17): $u_{\mathrm{obl}} = 1{,}46 \notin \langle 2{,}33, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_2.

3.72. $u_{\mathrm{obl}} = 1{,}16 \notin \langle 1{,}64, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.73. $u_{\mathrm{obl}} = 11{,}18$, hipotezę o jednakowym stopniu opanowania materiału należy odrzucić.

3.74. $u_{\mathrm{obl}} = 1{,}09 \notin (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$; nie ma powodu do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

3.75. $u_{\mathrm{obl}} = -0{,}33 \notin (-\infty, -1{,}64\rangle$ – Nie.

3.76. $u_{\mathrm{obl}} = -1{,}07 \notin (-\infty, -1{,}64\rangle$ – Nie.

3.77. $\chi^2_{\mathrm{obl}} = \dfrac{5{,}559}{c} \notin \langle 5{,}991, +\infty)$ nie ma powodu do odrzucenia hipotezy.

3.78. Wariancje logarytmów: $s_1^2 = 3{,}306 \cdot 10^{-3}$, $s_2^2 = 15{,}105 \cdot 10^{-3}$, $s_3^2 = 5{,}985 \cdot 10^{-3}$, $H_{\mathrm{obl}} = 4{,}57 \notin \langle 6{,}94, +\infty)$, $G_{\mathrm{obl}} = 0{,}617 \notin \langle 0{,}653, +\infty)$, w obu przypadkach brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.79. $\chi_d^2 = 18{,}57 \notin \langle 21{,}026, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}05$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.80. $\chi_d^2 = 53{,}143 \in \langle 16{,}812, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}01$ – hipotezę odrzucamy.

3.81. $d_{40} = 0{,}245 \notin \langle 0{,}252, 1\rangle$, więc – przy $\alpha = 0{,}05$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.82. $d_{15} = 0{,}104$.

3.83. $\chi_d^2 = 23{,}618 \notin \langle 27{,}688, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}01$ – hipotezy nie odrzucamy.

3.84. $\bar{x} = 2 = \hat{\lambda}$, $\chi_d^2 = 3{,}823 \notin \langle 12{,}592, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}05$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.85. $\chi_d^2 = 1{,}205 \notin \langle 14{,}067, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}05$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.86. $\chi_d^2 = 1{,}324 \notin \langle 15{,}507, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}05$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.87. $W = \dfrac{13{,}388}{13{,}106} \approx 1{,}0215 \in (0,\ 0{,}905) \cup (0{,}983, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}10$ – próbka przeczy hipotezie.

3.88. $\bar{x} = 1500$, $\sum(x_i - \bar{x})^2 = 1620500$. $W = 0{,}894$, nie należy do obszaru krytycznego $(0,\ 0{,}842) \cup (0{,}978, \infty)$, więc – przy $\alpha = 0{,}10$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

3.89. a) $k = 10 \notin \langle 2, 8\rangle$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.
b) $d_{n_1, n_2 \mathrm{obl}} = 0{,}658 \notin \langle 0{,}667, 1\rangle$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.
c) $u_{\mathrm{obl}} = 17 \in \langle 0{,}28\rangle$ – hipotezę odrzucamy.

3.90. a) $u_{\text{obl}} = 85 \in \langle 0, 23 \rangle \cup \langle 67, 100 \rangle$ – hipotezę odrzucamy. b) $k_{\text{obl}} = 6 \in \langle 2, 6 \rangle$ – hipotezę odrzucamy, c) $d_{n_1, n_2 \text{obl}} = 0{,}7 \in \langle 0, 7, 1 \rangle$ – hipotezę odrzucamy.

3.91. $\chi^2_{\text{obl}} = 12{,}10 \in \langle 9{,}49, +\infty)$ – hipotezę odrzucamy.

3.92. a) $a = 0{,}118$, $b_1 = -1{,}806$, $b_2 = 2{,}320$ ((3.5.5)); hipotezę H należy odrzucić w 12 etapie postępowania, b) $n_2(2) = 7$ ((3.5.7)); hipotezę H należy odrzucić w 4 etapie postępowania.

3.93. $a = 0{,}111$, $b_1 = -3{,}107$, $b_2 = 3{,}107$ ((3.5.5)); hipotezę H należy przyjąć w 9 etapie postępowania.

3.94. $a = 0{,}064$, $b_1 = -1{,}309$, $b_2 = 1{,}680$ ((3.5.5)); hipotezę H należy odrzucić w 6 etapie postępowania.

3.95. $\sum_1^5 x_i = 10$, $h_1 = -1{,}194$; $h_2 = 1{,}823$. a) Hipotezę H przyjmujemy, gdy $\sum_1^6 x_i < -1{,}194 + 2{,}05 \cdot 6$, skąd $x_6 < 1{,}11$; b) hipotezę H odrzucimy, gdy $\sum_1^6 x_i > 1{,}823 + 2{,}05 \cdot 6$, skąd $x_6 > 4{,}12$.

3.96. $D = 0{,}599$, $h_o = -4{,}150$, $h_1 = 4{,}150$; należy przyjąć hipotezę H w 7 etapie postępowania.

4 BADANIE STATYSTYCZNE ZE WZGLĘDU NA DWIE CECHY

4.1. DIAGRAM KORELACYJNY; TABLICA KORELACYJNA

Dana jest populacja generalna, w której interesują nas cechy mierzalne (X, Y), traktowane jako zmienne losowe. Jeżeli są nieznane pewne parametry rozkładu dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), to powstaje problem wyznaczenia ich oszacowań. Podobnie jak przy badaniu ze względu na jedną cechę, oszacowania te wyznacza się z próbki. Przy badaniu ze względu na dwie cechy, próbkę stanowi n par liczb (x_i, y_i), $i=1,\ldots,n$, z których pierwsza jest zaobserwowaną wartością cechy X, druga zaś – cechy Y. Traktując (x_i, y_i) jako współrzędne punktu na płaszczyźnie, można próbkę przedstawić graficznie w postaci tzw. *diagramu korelacyjnego.* Dla próbek o liczności od około 30 wzwyż buduje się zwykle tzw. *tablicę korelacyjną* [32], zwaną również *tablicą dwudzielczą.*

Zadanie 4.1. Z dwuwymiarowej populacji pobrano pięćdziesięcioelementową próbkę, której wyniki zawiera tablica 4.1. Sporządzić diagram korelacyjny i tablicę korelacyjną.

Tablica 4.1

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	38,5	5,5	11	39,5	5,4	21	40,0	5,7	31	40,5	5,5	41	39,5	6,0
2	41,1	4,8	12	42,1	5,2	22	36,5	5,4	32	37,2	5,0	42	38,1	3,9
3	37,8	5,0	13	38,0	5,2	23	38,8	5,1	33	34,5	4,8	43	35,7	4,6
4	36,0	4,9	14	36,5	5,1	24	34,5	4,6	34	38,5	4,5	44	39,5	6,0
5	32,2	5,1	15	40,0	4,5	25	36,1	4,2	35	34,0	4,1	45	35,5	4,6
6	36,8	4,3	16	36,5	4,4	26	34,2	3,6	36	33,5	4,0	46	40,5	6,1
7	33,5	4,5	17	34,0	4,4	27	39,1	5,1	37	32,5	4,5	47	37,5	4,3
8	35,3	3,8	18	34,5	3,9	28	37,5	4,9	38	36,4	4,5	48	33,5	5,2
9	31,1	3,4	19	44,5	6,6	29	35,5	5,0	39	37,5	5,6	49	42,5	6,6
10	42,5	5,7	20	38,0	5,9	30	36,6	4,1	40	41,5	5,3	50	38,0	4,4

R o z w i ą z a n i e. Diagram korelacyjny przedstawia rys. 4.1.

Aby sporządzić tablicę korelacyjną, dla każdej z badanych cech budujemy szereg rozdzielczy według zasad opisanych w p. 1. Dla każdej z cech wyznaczamy rozstęp:

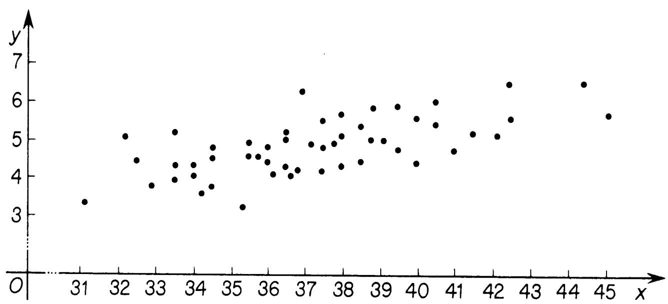
$$R_X = x_{\max} - x_{\min} = 44{,}5 - 31{,}1 = 13{,}4,$$

$$R_Y = y_{\max} - y_{\min} = 6{,}6 - 3{,}4 = 3{,}2.$$

Ponieważ $n = 50$, więc przyjmujemy liczbę klas $k = 7$. Wyznaczamy długość klasy

$$\text{dla cechy } X: \quad d_X = \frac{R_X}{k} = \frac{13{,}4}{7} \approx 2,$$

$$\text{dla cechy } Y: \quad d_Y = \frac{R_Y}{k} = \frac{3{,}2}{7} \approx 0{,}5.$$



Rys. 4.1. Diagram korelacyjny dla próbki z zad. 4.1

Jako dolną granicę pierwszej klasy dla cechy X przyjmujemy 31,0, dla cechy Y zaś 3,25. Klasyfikację przeprowadzamy w tablicy, ze względu na dwie cechy jednocześnie. Otrzymujemy w ten sposób tablicę korelacyjną (tabl. 4.2) cech X i Y na podstawie pobranej próbki.

Liczności poszczególnych dwuwymiarowych klas tablicy korelacyjnej oznaczymy n_{ik}, gdzie $\sum_i \sum_k n_{ik} = n$. Ponadto oznaczamy $\sum_i n_{ik} = n_{\cdot k}$, oraz $\sum_k n_{ik} = n_{i\cdot}$. Podobnie jak przy ba-

T a b l i c a 4.2

	Nr klasy i	1	2	3	4	5	6	7	
Nr klasy k	Y	X							$n_{\cdot k}$
		31–33	33–35	35–37	37–39	39–41	41–43	43–45	
1	3,25–3,75	1	1	–	–	–	–	–	2
2	3,75–4,25	1	3	3	1	–	–	–	8
3	4,25–4,75	1	3	5	3	1	–	–	13
4	4,75–5,25	1	2	3	5	2	1	–	14
5	5,25–5,75	–	–	1	2	3	2	–	8
6	5,75–6,25	–	–	–	1	2	1	–	4
7	6,25–6,75	–	–	–	–	–	–	1	1
	$n_{i\cdot}$	4	9	12	12	8	4	1	$n = 50$

daniu ze względu na jedną cechę, przez $\bar{x}_i$ i $\bar{y}_k$ oznaczamy odpowiednio środki klas cech X i Y tablicy korelacyjnej. Liczby $n_{i\cdot}$ są licznościami klas przy badaniu ze względu na cechę X, bez uwzględniania cechy Y. Analogicznie interpretuje się $n_{\cdot k}$.

4.2. OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKA KORELACJI LINIOWEJ Z PRÓBKI

Miarą korelacji liniowej zmiennych losowych X i Y w dwuwymiarowym rozkładzie jest *współczynnik korelacji liniowej* ρ określony wzorem

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Estymatorem zgodnym współczynnika ρ jest *współczynnik korelacji liniowej R z próby*

$$R = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S_X S_Y}. \tag{4.2.1}$$

Estymator jest obciążony, gdyż $E(R) \neq \rho$. Asymptotycznie nieobciążonym estymatorem ρ jest

$$R + \frac{R(1-R^2)}{2(n-2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dla danych niezgrupowanych (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, kowariancję z próbki obliczamy ze wzoru

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}, \tag{4.2.2}$$

wartość zaś r współczynnika korelacji R obliczamy według jednego ze wzorów

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_1^2 - \bar{x}^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_1^2 - \bar{y}^2\right)}}. \tag{4.2.3}$$

Dla danych zgrupowanych w tablicę korelacyjną wartość r współczynnika R obliczamy według wzorów

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} \bar{x}_i \bar{y}_k n_{ik} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i\cdot} - \bar{x}^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{\cdot k} - \bar{y}^2\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \overline{x}_i\left(\sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k n_{ik}\right) - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \overline{x}_i^2 n_{i\cdot} - \overline{x}^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k^2 n_{\cdot k} - \overline{y}^2\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k\left(\sum_{i=1}^{l} \overline{x}_i n_{ik}\right) - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \overline{x}_i^2 n_{i\cdot} - \overline{x}^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k^2 n_{\cdot k} - \overline{y}^2\right)}}. \tag{4.2.4}$$

ZADANIE 4.2. Z partii towaru wylosowano 10 egzemplarzy i przebadano ze względu na cechy X i Y.

x_i	3,5	3,4	2,1	5,4	1,1	5,1	6,9	4,0	4,5	2,5
y_i	1,6	2,9	1,5	3,5	0,6	2,5	7,1	3,5	2,1	2,6

Wyznaczyć zaobserwowaną wartość r współczynnika korelacji liniowej R (4.2.1).

Rozwiązanie. Stosujemy drugi ze wzorów (4.2.3). Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tabl. 4.3.

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{y}^2\right)}} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 129{,}86 - 3{,}85 \cdot 2{,}79}{\sqrt{(17{,}471 - 3{,}85^2)(10{,}591 - 2{,}79^2)}} = 0{,}8232.$$

Tablica 4.3

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	3,5	1,6	5,60	12,25	2,56
2	3,4	2,9	9,86	11,56	8,41
3	2,1	1,5	3,15	4,41	2,25
4	5,4	3,5	18,90	29,16	12,25
5	1,1	0,6	0,66	1,21	0,36
6	5,1	2,5	12,75	26,01	6,25
7	6,9	7,1	48,99	47,61	50,41
8	4,0	3,5	14,00	16,00	12,25
9	4,5	2,1	9,45	20,25	4,41
10	2,5	2,6	6,50	6,25	6,76
$\sum$	38,5	27,9	129,86	174,71	105,91

$\overline{x} = 3{,}85$, $\overline{y} = 2{,}79$.

Tablica 4.4

	i	1	2	3	4	5	6	7						
k	$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$												
		32	34	36	38	40	42	44	$n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k^2$	$\bar{y}_k^2 n_{\cdot k}$	$\sum_i \bar{x}_i n_{ik}$	$\bar{y}_k \sum_i \bar{x}_i n_{ik}$
1	3,5	1	1	–	–	–	–	–	2	7,0	12,25	24,50	66	231
2	4,0	1	3	3	1	–	–	–	8	32,0	16,00	128,00	280	1120
3	4,5	1	3	5	3	1	–	–	13	58,5	20,25	263,25	468	2106
4	5,0	1	2	3	5	2	1	–	14	70,0	25,00	350,00	520	2600
5	5,5	–	–	1	2	3	2	–	8	44,0	30,25	242,00	316	1738
6	6,0	–	–	–	1	2	1	–	4	24,0	36,00	144,00	160	960
7	6,5	–	–	–	–	–	–	1	1	6,5	42,25	42,25	44	286
	$n_{i\cdot}$	4	9	12	12	8	4	1	50	242,0		1194,00		9041
$\bar{x}_i n_{i\cdot}$		128	306	432	456	320	168	44	1854					
$\bar{x}_i^2$		1024	1156	1296	1444	1600	1764	1936						
$\bar{x}_i^2 n_{i\cdot}$		4096	10404	15552	17328	12800	7056	1936	69172					
$\sum_k \bar{y}_k n_{ik}$		17	39	55	595	43	22	6,5						
$\bar{x}_i \sum_k \bar{y}_k n_{ik}$		544	1326	1980	2261	1720	924	286	9041					

Zadanie 4.3. Wyznaczyć wartość współczynnika korelacji R (4.2.1) według danych tablicy korelacyjnej z zadania 4.1.

Rozwiązanie. Zastosujemy jeden ze wzorów (4.2.4). Wyniki obliczeń pomocniczych w tabl. 4.4.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i n_{i.} = 37{,}08, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} y_k n_{.k} = 4{,}84,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i.} - \bar{x}^2 = 8{,}5136, \qquad s_X = 2{,}9178,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{.k} - \bar{y}^2 = 0{,}4544, \qquad s_Y = 0{,}6741,$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k \left(\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{ik}\right) - \bar{x}\,\bar{y}}{s_X s_Y} = \frac{0{,}02\cdot 9041 - 37{,}08\cdot 4{,}84}{2{,}9178\cdot 0{,}6741} = 0{,}6878.$$

Zwróćmy jeszcze uwagę na dwie ostatnie kolumny i dwa ostatnie wiersze tablicy 4.4. Zawierają one pomocnicze rachunki do obliczania w dwojaki sposób wartości wyrażenia $\sum_k \sum_i \bar{x}_i \bar{y}_k n_{ik}$. Przeprowadzono je jedynie w celu zademonstrowania dwu sposobów obliczania sumy

$$\sum_i \sum_k \bar{x}_i \bar{y}_k n_{ik} = \sum_k \bar{y}_k \left(\sum_i \bar{x}_i n_{ik}\right) = \sum_i \bar{x}_i \left(\sum_k \bar{y}_k n_{ik}\right).$$

Przy rozwiązywaniu zadań wystarczy przeprowadzić obliczenia tylko raz.

4.3. PROSTE REGRESJI

Dana jest populacja generalna, w której cechy (X, Y) mają pewien dwuwymiarowy rozkład. Niech $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ będzie prostą regresji drugiego rodzaju cechy Y względem cechy$X$. Wówczas

$$\mathbf{a} = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \qquad \mathbf{b} = EY - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}EX,$$

a nazywamy *współczynnikiem regresji liniowej* cechy Y względem X, **b** – *współczynnikiem przesunięcia* lub *wyrazem wolnym*. Jeżeli rozkład cech (X, Y) jest nieznany, parametry **a** i **b** szacuje się z próby (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, metodą najmniejszych kwadratów. Dowodzi się [11], że nieobciążonymi i zgodnymi estymatorami parametrów **a** i **b** są odpowiednio

$$A = R\frac{S_Y}{S_X}, \tag{4.3.1}$$

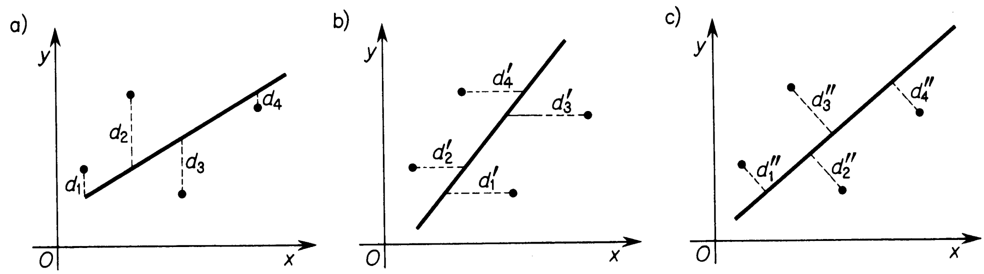
$$B = \bar{Y} - A\bar{X}. \tag{4.3.2}$$

Prosta $y = Ax + B$ jest oszacowaniem metodą najmniejszych kwadratów prostej regresji cechy Y względem cechy X na podstawie próbki. Oznacza to, że funkcja

$$F(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\alpha X_i + \beta)]^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

osiąga minimum, gdy $\alpha = A$ i $\beta = B$. Wartości d_i dla danej próbki przedstawia rys. 4.2a. Podobnie wyznacza się *oszacowanie prostej regresji $x = A_1 y + B_1$ cechy X względem cechy Y.* W tym przypadku funkcja

$$F_1(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - (\alpha Y_i + \beta)]^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i'^2$$



Rys. 4.2. Minimalizując sumę $\sum\limits_{1}^{n} d_i^2$ wyznaczamy prostą regresji: a) cechy Y względem X, b) cechy X względem Y, c) ortogonalnej

osiąga minimum, gdy $\alpha = A_1$ i $\beta = B_1$. Wartości d_i' dla danej próbki przedstawia rys. 4.2b. Prostą regresji cechy X względem cechy Y zapisuje się również w postaci $y = A'x + B'$. Współczynniki A' i B' wyznacza się ze wzorów

$$A' = \frac{1}{R}\frac{S_Y}{S_X}, \tag{4.3.3}$$

$$B' = \bar{Y} - A'\bar{X}. \tag{4.3.4}$$

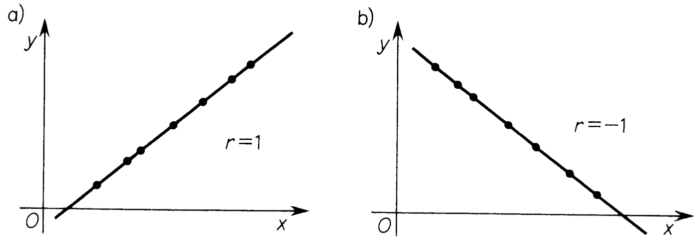
Równości (4.3.2) i (4.3.4) wykazują, że obie proste regresji przechodzą przez punkt $(\bar{X}, \bar{Y})$; fakt ten ilustrują rysunki 4.4 i 4.5. Jeżeli prostą regresji wyznacza się według danych tablicy korelacyjnej, to średnie występujące we wzorach (4.3.1)–(4.3.4) należy zastąpić średnimi ważonymi (zad. 4.4).

Jeżeli $|r| = 1$, to zależność między cechami X i Y w próbce jest liniowa i obie proste regresji pokrywają się (rys. 4.3).

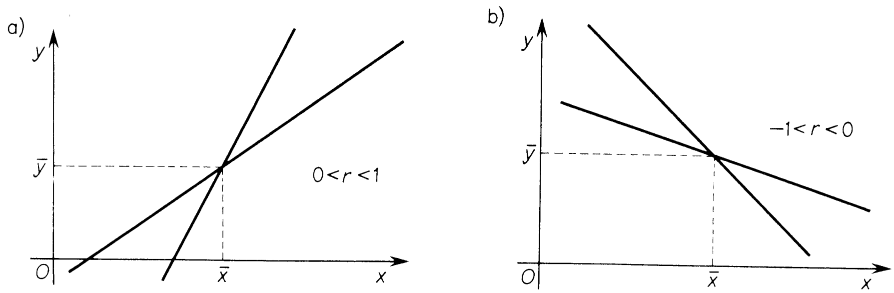
Jeżeli $0 < |r| < 1$, to proste regresji (rys. 4.4) tworzą z sobą pewien kąt, którego oszacowaniem na podstawie próbki jest

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{|1 - r^2| s_X s_Y}{|r|(s_X^2 + s_Y^2)} = \operatorname{arc\,tg}\left|\frac{\operatorname{cov}^2(x,y) - s_X^2 s_Y^2}{\operatorname{cov}(x,y)(s_X^2 + s_Y^2)}\right|. \tag{4.3.5}$$

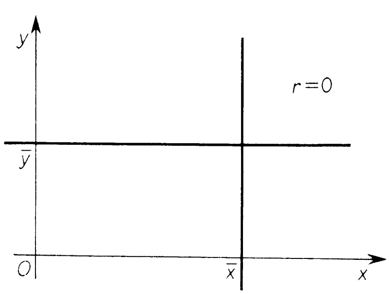
Jakie kąty ostre czy też rozwarte mogą tworzyć proste regresji z dodatnim zwrotem osi Ox, objaśnia rozwiązanie zadania 4.7.



Rys. 4.3. Gdy $|r| = 1$, wtedy wszystkie punkty diagramu korelacyjnego leżą na jednej prostej; proste regresji wyznaczone na podstawie próbki pokrywają się



Rys. 4.4 Proste regresji wyznaczone na podstawie próbki, w przypadku gdy: a) $0<r<1$, b) $-1<r<0$



Rys. 4.5. Proste regresji wyznaczone na podstawie próbki w przypadku, gdy $r=0$

Jeżeli $r = 0$, to proste regresji (rys. 4.5) mają równania $y = \bar{y}$ i $x = \bar{x}$.

Duża wartość bezwzględna współczynnika korelacji świadczy o dużej współzależności liniowej pomiędzy cechami X i Y, nie może jednak być dowodem związku przyczynowego między tymi cechami. Tak np. współczynnik korelacji pomiędzy wydatkami na ochronę przeciwpożarową w małych miasteczkach, a stratami wynikłymi na skutek pożarów jest wyraźnie wysoki. Wyjaśnienie tego paradoksu – oczywiście pozornego – jest proste: małe sumy na ochronę przeciwpożarową przeznacza się w małych miasteczkach, w których również straty z powodu pożarów są stosunkowo małe w porównaniu ze stratami z tego samego powodu w dużych miastach, w których na ochronę przeciwpożarową wydaje się znacznie więcej.

Prócz omówionych dotychczas prostych regresji stosuje się czasami tzw. *prostą regresji ortogonalnej* wyznaczaną również metodą najmniejszych kwadratów. *Prostą regresji* *ortogonalnej* nazywamy taką prostą, dla której suma kwadratów odległości punktów empirycznych od tej prostej

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(A^*x_i - y_i + B^*)^2}{A^{*2}+1} = \sum_{i=1}^{n} (d_i'')^2$$

jest minimalna (rys. 4.2c).

Równanie prostej regresji orotogonalnej wyznaczonej na podstawie próbki (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,n$ jest postaci (zad. 4.8)

$$y = \frac{s_Y^2 - s_X^2 + \sqrt{(s_Y^2 - s_X^2)^2 + 4\operatorname{cov}^2(x, y)}}{2\operatorname{cov}(x, y)}(x - \bar{x}) + \bar{y}. \tag{4.3.6}$$

4.3.1. Zadania rozwiązane.

Zadanie 4.4. Wyznaczyć równania prostych regresji oraz kąt między nimi, według danych zgrupowanych w tablicy korelacyjnej:

Y	X				
	9,5 – 10,5	10,5 – 11,5	11,5 – 12,5	12,5 – 13,5	13,5 – 14,5
0,5 – 1,0	—	—	—	1	1
1,0 – 1,5	—	1	2	3	2
1,5 – 2,0	1	2	6	2	1
2,0 – 2,5	2	3	2	1	—
2,5 – 3,0	1	1	—	—	—

R o z w i ą z a n i e. Aby wyznaczyć współczynniki prostych regresji oraz kąt φ, należy obliczyć $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_X^2, s_Y^2 i cov (x, y). Wyniki obliczeń pomocniczych w tabl. 4.5.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{i.} = 12, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{.k} = 1{,}75,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i.} - \bar{x}^2 = 1{,}4375, \qquad s_Y^2 = \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{.k} - \bar{y}^2 = 0{,}25,$$

Tablica 4.5

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$										
	10	11	12	13	14	$n_{.k}$	$\bar{y}_k n_{.k}$	$\bar{y}_k^2$	$\bar{y}_k^2 n_{.k}$	$\sum_i \bar{x}_i n_{ik}$	$\bar{y}_k \sum_i \bar{x}_i n_{ik}$
0,75	—	—	—	1	1	2	1,5	0,5625	1,125	27	20,25
1,25	—	1	2	3	2	8	10,0	1,5625	12,500	102	127,50
1,75	1	2	6	2	1	12	21,0	3,0625	36,750	144	252,00
2,25	2	3	2	1	—	8	18,0	5,0625	40,500	90	202,50
2,75	1	1	—	—	—	2	5,5	7,5625	15,125	21	57,75
$n_{i.}$	4	7	10	7	4	32	56,0		106,000		660,00
$\bar{x}_i n_{i.}$	40	77	120	91	56	384					
$\bar{x}_i^2$	100	121	144	169	196						
$\bar{x}_i^2 n_{i.}$	400	847	1440	1183	784	4654					

$$a=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\overline{y}_k\sum_{i=1}^{l}\overline{x}_i n_{ik}-\overline{x}\,\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\overline{x}_i^2 n_{i.}-\overline{x}^2}=\frac{\frac{1}{32}\cdot 660-12\cdot 1{,}75}{\frac{1}{32}\cdot 4654-12^2}=-0{,}2609,$$

$$b=\overline{y}-a\overline{x}=1{,}75+0{,}2609\cdot 12=4{,}8804.$$

Rownanie prostej regresji cechy Y względem cechy X na podstawie próbki ma postać

$$y=-0{,}2609x+4{,}8804.$$

$$a'=\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\overline{y}_k\sum_{i=1}^{l}\overline{x}_i n_{ik}-\overline{x}\,\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\overline{y}_k^2 n_{.k}-\overline{y}^2}\right]^{-1}=\left[\frac{\frac{1}{32}\cdot 660-12\cdot 1{,}75}{\frac{1}{32}\cdot 106-1{,}75^2}\right]^{-1}=-0{,}6667,$$

$$b'=\overline{y}-a'\overline{x}=1{,}75+0{,}6667\cdot 12\doteq 9{,}75.$$

Równanie prostej regresji cechy X względem cechy Y na podstawie próbki ma postać

$$y=-0{,}6667x+9{,}75.$$

Nim przystąpimy do obliczenia φ wyznaczmy jeszcze

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\overline{y}_k\sum_{i=1}^{l}\overline{x}_i n_{ik}-\overline{x}\,\overline{y}=\frac{1}{32}\cdot 660-12\cdot 1{,}75=-0{,}375.$$

Z drugiego ze wzorów (4.3.5) otrzymujemy

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left|\frac{0{,}375^2-1{,}4375\cdot 0{,}25}{-0{,}375(1{,}4375+0{,}25)}\right|\cong\operatorname{arctg}0{,}3457\cong 0{,}3328.$$

Zadanie 4.5. Wykazać, że iloczyn współczynników a i a_1 prostych regresji cechy Y względem cechy X, $y-\overline{y}=a(x-\overline{x})$ i cechy X względem cechy Y, $x-\overline{x}=a_1(y-\overline{y})$ jest równy kwadratowi współczynnika korelacji z próbki.

Rozwiązanie. Ze wzoru (4.3.1) mamy $a=r\frac{s_Y}{s_X}$, ze wzoru (4.3.3) zaś $a'=\frac{1}{r}\frac{s_Y}{s_X}$. Ponieważ $a_1=\frac{1}{a'}$, więc mamy $a_1=r\frac{s_X}{s_Y}$, a stąd $aa_1=r^2$.

Zadanie 4.6. Wyznaczyć kąt φ (ostry) pomiędzy prostymi regresji.

Rozwiązanie. Jeżeli proste regresji tworzą z dodatnim zwrotem osi Ox kąty α i β, to tangens kąta między nimi jest równy

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{(r^2-1)s_X s_Y}{r(s_X^2+s_Y^2)}.$$

Jeśli $0 \neq |r| \neq 1$, a kąt ostry przecięcia oznaczymy przez φ, to

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(1-r^2)s_X s_Y}{|r|(s_X^2 + s_Y^2)} > 0.$$

Zadanie 4.7. Czy z dwóch prostych regresji Y względem X oraz X względem Y jedna może tworzyć kąt ostry, a druga kąt rozwarty z dodatnim zwrotem osi Ox?

Rozwiązanie. Współczynniki regresji prostych regresji są równe tangensowi kątów nachylenia tych prostych względem dodatniego zwrotu osi Ox.

$$\operatorname{tg}\alpha = a = r\frac{s_Y}{s_X}, \qquad \operatorname{tg}\beta = a' = \frac{s_Y}{rs_X}.$$

Ponieważ $s_X > 0$, $s_Y > 0$, więc oba tangensy mają jednakowy znak, zgodny ze znakiem r, stąd wniosek: jeśli $0 < r < 1$, to oba tangensy są dodatnie, więc każda z prostych regresji tworzy kąty ostry, jeśli zaś $-1 < r < 0$, to każda z prostych regresji tworzy kąt rozwarty z dodatnim zwrotem osi Ox. Ilustrują to rys. 4.4a i rys. 4.4b.

Zadanie 4.8. Stosując metodę najmniejszych kwadratów, wyznaczyć równanie prostej regresji ortogonalnej na podstawie n-elementowej próbki (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$.

Rozwiązanie. Niech $y = a^*x + b^*$ będzie poszukiwaną prostą. Z definicji prostej regresji ortogonalnej i wzoru na odległość punktu od prostej wynika, że funkcja

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ax_i - y_i + b)^2}{a^2+1}$$

osiąga minimum w punkcie (a^*, b^*). Aby wyznaczyć ten punkt, należy rozwiązać układ równań

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Zajmijmy się najpierw drugim równaniem, które w naszym przypadku ma postać

$$\frac{2}{a^2+1}\sum_{i=1}^{n}(ax_i - y_i + b) = 0.$$

Stąd otrzymujemy $a\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i + nb = 0$ i dalej po podzieleniu przez n

$$\bar{y} = a\bar{x} + b.$$

Oznacza to, że poszukiwana prosta przechodzi przez punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, a więc ma postać $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$. Gdy uwzględnimy ostatni wynik, wtedy zobaczymy, że wystarczy wyznaczyć minimum funkcji

$$F_1(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[a(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})]^2}{a^2+1}.$$

Różniczkując ją i przyrównując pochodną do zera, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2[a(x_i-\bar{x})-(y_i-\bar{y})](x_i-\bar{x})(a^2+1)-[a(x_i-\bar{x})-(y_i-\bar{y})]^2 2a}{(a^2+1)^2}=0.$$

Stosując proste przekształcenia, otrzymujemy kolejno

$$(a^3+a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-(a^2+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})-a^3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+$$
$$+2a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})-a\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=0,$$

$$a^2\operatorname{cov}(x,y)-a(s_Y^2-s_X^2)-\operatorname{cov}(x,y)=0. \tag{4.3.7}$$

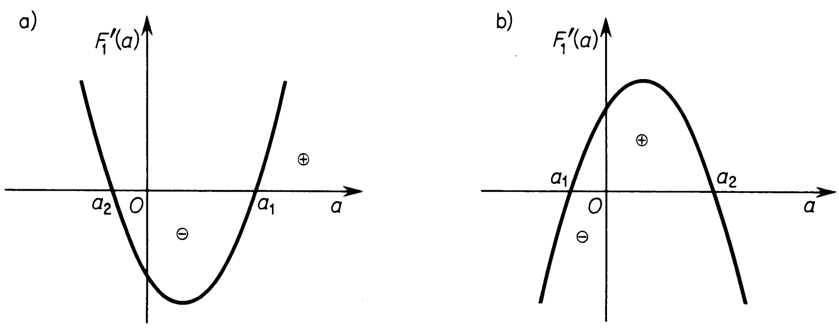
Równanie to ma zawsze rzeczywiste pierwiastki

$$a_1=\frac{s_Y^2-s_X^2+\sqrt{(s_Y^2-s_X^2)^2+4\operatorname{cov}^2(x,y)}}{2\operatorname{cov}(x,y)},$$

$$a_2=\frac{s_Y^2-s_X^2-\sqrt{(s_Y^2-s_X^2)^2+4\operatorname{cov}^2(x,y)}}{2\operatorname{cov}(x,y)}.$$

Aby rozstrzygnąć, w którym z punktów a_1, a_2 funkcja F osiąga minimum, wystarczy stwierdzić, w którym z nich pochodna tej funkcji zmienia znak z ujemnego na dodatni. Zauważmy, że liczby a_1 i a_2 mają różne znaki. Pochodna funkcji F_1, to lewa strona równania (4.3.7).

Gdy $\operatorname{cov}(x,y)>0$, wtedy $a_1>0$ i $a_2<0$ i minimum jest w punkcie a_1.



Rys. 4.6. Do zad. 4.8

Gdy $\operatorname{cov}(x,y)<0$, wtedy $a_1<0$ i $a_2>0$ i minimum jest również w punkcie a_1. Jak więc widać, funkcja F_1 osiąga zawsze minimum w punkcie a_1 (rys. 4.6). Stąd poszukiwane równanie prostej regresji ortogonalnej

$$y-\bar{y}=\frac{s_Y^2-s_X^2+\sqrt{(s_Y^2-s_X^2)^2+4\operatorname{cov}^2(x,y)}}{2\operatorname{cov}(x,y)}(x-\bar{x}).$$

Zadanie 4.9. Korzystając z danych zadania 4.4, wyznaczyć prostą regresji ortogonalnej.

R o z w i ą z a n i e. W poprzednim rozwiązaniu wyznaczono $\bar{x} = 12$, $\bar{y} = 1{,}75$, $s_X^2 = 1{,}4375$, $s_Y^2 = 0{,}25$ i $\operatorname{cov}(x,y) = -0{,}375$. W celu rozwiązania zadania zastosujemy wzór (4.3.6). Najpierw obliczymy współczynnik kierunkowy a^* poszukiwanej prostej

$$a^* = \frac{0{,}25-1{,}4375+\sqrt{(0{,}25-1{,}4375)^2+4(-0{,}375)^2}}{2(-0{,}375)} = \frac{-1{,}1875+1{,}4045}{-0{,}75} = -0{,}2893.$$

Wstawiając do równania $y = a^*(x-\bar{x})+\bar{y}$, ostatecznie mamy

$$y = -0{,}2893(x-12)+1{,}75,$$

a po uporządkowaniu

$$y = -0{,}2893x+5{,}2216.$$

4.4. PRZEDZIAŁY UFNOŚCI DLA PEWNYCH CHARAKTERYSTYK DWUWYMIAROWYCH POPULACJI

Dana jest populacja generalna, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny. Nieznany jest współczynnik korelacji ρ oraz współczynniki **a** i **b** prostej regresji $y = \mathbf{a}x+\mathbf{b}$ cechy Y względem cechy X. Z n-elementowej próbki (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ wyznaczono odpowiednio według wzorów (4.2.3), (4.3.1) i (4.3.2) oszacowanie tych współczynników: r, a, b.

4.4.1. Przedział ufności dla współczynnika korelacji ρ.

A. Liczność próbki $n \geqslant 100$. Jeśli są spełnione założenia dotyczące typu rozkładu i liczność próbki $n \geqslant 100$[1], to statystyka R (4.2.1) ma w przybliżeniu rozkład $N\left(\rho, \frac{(1-\rho^2)^2}{n}\right)$, więc statystyka

$$U = \frac{R-\rho}{1-R^2}\sqrt{n}$$

ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Na podstawie danej próbki *realizację przedziału ufności dla* ρ na poziomie ufności $1-\alpha$ wyznacza się ze wzoru

$$r-u\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\frac{1-r^2}{\sqrt{n}} < \rho < r+u\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}, \tag{4.4.1}$$

gdzie r jest wartością statystyki R (4.2.1), $u(p)$ zaś – kwantylem rzędu p rozkładu $N(0, 1)$, wyznaczonym z tablicy 6.

---

[1] W przypadku, gdy statystyka R (4.2.1) przyjmuje wartości bliskie -1 lub 1, wtedy jest pożądana liczność próbki $n \geqslant 500$.

B. Liczność próbki $n \geqslant 10$. Jeżeli podane na początku założenia są spełnione, to – zaproponowana przez R. A. Fishera – statystyka

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R}{1-R}, \qquad |R| < 1, \tag{4.4.2}$$

gdzie R jest statystyką określoną wzorem (4.2.1), ma w przybliżeniu rozkład normalny o wartości oczekiwanej $EZ \approx \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$ i wariancji $D^2Z \approx \frac{1}{n-3}$. W praktyce drugi składnik wartości oczekiwanej zwykle jest pomijany, tzn. przyjmuje się, że statystyka Z ma w przybliżeniu rozkład $N\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)$, a – w konsekwencji – statystyka

$$U = \left(Z - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)\sqrt{n-3}$$

– rozkład $N(0, 1)$. Gdy $n \geqslant 10$, wtedy przybliżenie jest zazwyczaj zadowalające.

Na podstawie danej próbki *realizację przedziału ufności dla* $E(Z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}$ na poziomie ufności $1-\alpha$ wyznacza się ze wzoru

$$z - s_Z u\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right) < \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} < z + s_Z u\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right), \tag{4.4.3}$$

gdzie $z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$ dla danego r wyznacza się z tablicy 3, $s_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$, $u(p)$ zaś jest kwantylem rzędu p rozkładu $N(0, 1)$ wyznaczonym z tablicy 6. Oznaczmy przez z_1 i z_2 odpowiednio dolną i górną granicę otrzymanego przedziału. Realizację przedziału ufności dla ρ

$$\rho_1 < \rho < \rho_2 \tag{4.4.4}$$

oblicza się według wzoru $\rho_i = \frac{e^{2z_i}-1}{e^{2z_i}+1}$, $i = 1, 2$, albo też wyznacza się z tablicy 4.

C. Zastosowanie nomogramów do wyznaczania przedziału ufności. Jeśli próba (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, pobrana jest z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny, to można wyznaczyć dokładny rozkład statystyki R (4.2.1), który zależy tylko od ρ i n. Za pomocą tego rozkładu skonstruowano nomogramy, pozwalające wyznaczyć realizację przedziału ufności w zależności od liczności próbki n oraz od obliczonej z próbki wartości r statystyki R (4.2.1), na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ – tablica 24a i dla $1-\alpha = 0{,}99$ – tablica 24b. Sposób korzystania z nomogramów objaśnia zadanie 4.10.

Zadanie 4.10. Z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym parametrze ρ, pobrano $n = 20$-elementową próbkę i obliczono $r = 0{,}45$. Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}99$ wyznaczyć realizację przedziału ufności dla parametru ρ populacji.

R o z w i ą z a n i e. Korzystamy z tablicy 24b. Na osi poziomej znajdujemy punkt odpowiadający $r = 0{,}45$. W punkcie tym wystawiamy prostopadłą do osi poziomej i znajdujemy punkty przecięcia z krzywymi odpowiadającymi liczności $n = 20$. Na osi pionowej odczytujemy współrzędne tych punktów $\rho_1 = -0{,}14$ i $\rho_2 = 0{,}79$. Ostatecznie $(-0{,}14,\ 0{,}79)$ jest realizacją przedziału ufności wyznaczoną na podstawie danej próbki na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}99$.

ZADANIE 4.11. Z populacji, w której cechy $(X,\ Y)$ mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym parametrze ρ, pobrano próbkę o liczności $n = 900$ i na jej podstawie obliczono $r = 0{,}89$. Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ wyznaczyć realizację przedziału ufności dla współczynnika korelacji ρ tej populacji.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ liczność próbki $n = 900$ jest duża, więc możemy zastosować wzór (4.4.1). Z tablicy 6 wyznaczamy kwantyl $u(0{,}975) = 1{,}96$. Otrzymujemy

$$0{,}89 - 1{,}96\frac{1-0{,}89^2}{\sqrt{900}} < \rho < 0{,}89 + 1{,}96\frac{1-0{,}89^2}{\sqrt{900}},$$

czyli

$$0{,}8764 < \rho < 0{,}9036.$$

Realizacją przédziału ufności na podstawie danej próbki na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ jest więc $(0{,}8764,\ 0{,}9036)$.

ZADANIE 4.12. Na podstawie próbki liczącej 25 par obserwacji pobranej z populacji, w której badane cechy $(X,\ Y)$ mają dwuwymiarowy rozkład normalny, wyznaczono współczynnik korelacji $r = 0{,}6124$. Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ wyznaczyć realizację przedziału ufności dla współczynnika korelacji ρ populacji, na podstawie danych próbki.

R o z w i ą z a n i e. Zastosujemy postępowanie opisane w punkcie B. Dla $r = 0{,}6124$ z tablicy 3 wyznaczamy $z = 0{,}7127$. Ponieważ $n = 25$, więc $s_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0{,}2132$. Z tablicy 6 wyznaczamy kwantyl $u(0{,}975) = 1{,}96$. Obliczamy z_1 i z_2:

$$z_1 = z - s_Z u(0{,}975) = 0{,}7127 - 1{,}96 \cdot 0{,}2132 = 0{,}29,$$
$$z_2 = z + s_Z u(0{,}975) = 0{,}7127 + 1{,}96 \cdot 0{,}2132 = 1{,}13.$$

Dla obliczonych z_1 i z_2 z tablicy 4 wyznaczamy $\rho_1 = 0{,}2821$, $\rho_2 = 0{,}8110$, zatem $(0{,}2821,\ 0{,}8110)$ jest poszukiwaną realizacją przedziału ufności na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ dla ρ, na podstawie danej w zadaniu próbki.

4.4.2. Przedział ufności dla współczynnika kierunkowego a prostej regresji $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ cechy Y względem cechy X. Jeżeli są spełnione wymienione na początku założenia, to statystyka

$$A = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \tag{4.4.5}$$

ma w przybliżeniu rozkład $N(\mathbf{a}, S_A)$, gdzie

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_i')^2}{(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]} = \frac{S_Y^2(1-R^2)}{S_X^2(n-2)}, \tag{4.4.6}$$

$Y_i' = AX_i + B$ zaś są rzędnymi prostej regresji cechy Y względem cechy X obliczonymi dla wartości X_i w próbie, więc statystyka

$$t = \frac{A - \mathbf{a}}{S_A} \tag{4.4.7}$$

ma rozkład t Studenta z $v = n-2$ stopniami swobody.

Na podstawie danej próbki *realizację przedziału ufności dla współczynnika* **a**, na poziomie ufności $1-\alpha$, wyznacza się ze wzoru

$$a - s_A t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, v) < \mathbf{a} < a + s_A t(1-\tfrac{1}{2}\alpha, v), \tag{4.4.8}$$

gdzie a jest zaobserwowaną wartością statystyki A (4.4.5), s_A – wartością statystyki S_A (4.4.6), $t(p, v)$ zaś – kwantylem rzędu p rozkładu Studenta przy v stopniach swobody, wyznaczonym z tablicy 7.

Licznik

$$s_Y^2(1-r^2) = V_r \tag{4.4.9}$$

wzoru (4.4.6) jest tzw. *wariancją resztkową* Y względem X (por. zad. 4.14). Zauważmy, że gdy $|r| \to 1$, wtedy wariancja resztkowa maleje do zera. Z tego powodu wariancję resztkową uważa się za miarę rozrzutu punktów (x_i, y_i) dookoła prostej regresji; gdy wariancja resztkowa jest mała w porównaniu z odpowiednią wariancją, świadczy to o dużym skupieniu punktów wokół prostej regresji.

ZADANIE 4.13. Z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny, pobrano próbkę:

(3, 3), (5, 3), (6, 4), (5, 8), (7, 5), (8, 6), (8, 9), (5, 4), (6, 5),

(6, 6), (7, 6), (4, 7), (2, 2), (4, 4), (6, 8), (5, 7), (7, 7), (8, 8),

(4, 5), (5, 6), (5, 5), (6, 7), (7, 9), (9, 9), (4, 6), (3, 5), (3, 4).

Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$, na podstawie przedstawionej próbki wyznaczyć realizację przedziału ufności dla nieznanego współczynnika kierunkowego **a** prostej regresji.

R o z w i ą z a n i e. Wynik obliczeń pomocniczych zawiera tablica 4.6. Znajdujemy kolejno

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i n_{i.} = 5{,}8519, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} y_k n_{.k} = 5{,}4815,$$

Tablica 4.6

y_k	x_i													
	2	3	4	5	6	7	8	9	$n_{.k}$	$y_k n_{.k}$	y_k^2	$y_k^2 n_{.k}$	$\sum_i x_i n_{ik}$	$y_k \sum_i x_i n_{ik}$
2	1								1	2	4	4	2	4
3		1	1	1					3	9	9	27	12	36
4			1	1	1	1			4	16	16	64	22	88
5		1	1	1	1	1	1		6	30	25	150	33	165
6			1	1	1	1	1		5	30	36	180	30	180
7				1	1	1		1	4	28	49	188	27	189
8					1		1	1	3	29	64	192	23	184
9								1	1	9	81	81	9	81
$n_{i.}$	1	2	4	5	5	4	3	3	27	148		886		927
$x_i n_{i.}$	2	6	16	25	30	28	24	27	158					
x_i^2	4	9	16	25	36	49	64	81						
$x_i^2 n_{i.}$	4	18	64	125	180	196	192	243	1022					

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i^2 n_{i.} - \overline{x}^2 = \tfrac{1}{27}\cdot 1022 - 5{,}8519^2 = 3{,}6071, \qquad s_X = 1{,}8992,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 n_{.k} - \overline{y}^2 = \tfrac{1}{27}\cdot 886 - 5{,}4815^2 = 2{,}7679, \qquad s_Y = 1{,}6637,$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} y_k \sum_{i=1}^{l} x_i n_{ik} - \overline{x}\,\overline{y} = \tfrac{1}{27}\cdot 927 - 5{,}8519\cdot 5{,}4815 = 2{,}2561,$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X s_Y} = \frac{2{,}2561}{1{,}8992\cdot 1{,}6637} = 0{,}7140,$$

$$a = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X^2} = \frac{2{,}2561}{3{,}6071} = 0{,}6255.$$

$$s_A^2 = \frac{s_Y^2(1-r^2)}{s_X^2(n-2)} = \frac{2{,}7679\cdot(1-0{,}7140^2)}{3{,}6071\cdot(27-2)} = 0{,}01505, \qquad s_A = 0{,}1227.$$

Z tablicy 7 dla $v = n-2 = 25$ stopni swobody i poziomu ufności $1-\alpha = 0{,}95$, znajdujemy kwantyl $t(0{,}975,\ 25) = 2{,}0595$. Dalej stosujemy wzór (4.4.8) i otrzymujemy

$$0{,}6255 - 2{,}0595\cdot 0{,}1227 < \mathbf{a} < 0{,}6255 + 2{,}0595\cdot 0{,}1227.$$

Ostatecznie

$$0{,}3728 < \mathbf{a} < 0{,}8782.$$

Jest to realizacja przedziału ufności wyznaczona na podstawie próbki na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$.

ZADANIE 4.14. Uzasadnić wzór na wariancję resztkową

$$V_r = s_Y^2(1-r^2).$$

Rozwiązanie. Z p. 4.3

$$\frac{1}{n}\sum_1^n d_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

W nawiasie odejmujemy $\bar{y} - a\bar{x} - b = 0$, gdzie a jest wartością statystyki A (4.3.1)

$$\frac{1}{n}\sum_1^n (y_i - ax_i - b)^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n \left[(y_i - \bar{y}) - \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_X^2}(x_i - \bar{x})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_1^n (y_i-\bar{y})^2 - \frac{2\operatorname{cov}(x,y)}{s_X^2}\frac{1}{n}\sum_1^n (y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x}) + \frac{\operatorname{cov}^2(x,y)}{s_X^4}\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2 =$$

$$= s_Y^2 - \frac{2\operatorname{cov}^2(x,y)}{s_X^2} + \frac{\operatorname{cov}^2(x,y)}{s_X^4}s_X^2 = s_Y^2\left(1 - \frac{\operatorname{cov}^2(x,y)}{s_X^2 s_Y^2}\right).$$

Odjemnik w nawiasie, zgodnie ze wzorem (4.2.1), jest równy kwadratowi współczynnika korelacji, tj. r^2, co kończy uzasadnienie wzoru.

4.4.3. Przedział ufności dla współczynnika przesunięcia b prostej regresji $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ **cechy** Y **względem cechy** X. Jeżeli wymienione na początku założenia są spełnione, to statystyka

$$B = \bar{Y} - A\bar{X} \tag{4.4.10}$$

ma w przybliżeniu rozkład $N(\mathbf{b}, S_B)$, gdzie

$$S_B^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^n (Y_i - Y_i')^2 \sum\limits_{i=1}^n X_i^2}{(n-2)\left[n\sum\limits_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)^2\right]} = \frac{S_Y^2(1-R^2)}{S_X^2(n-2)}(S_X^2 + \bar{X}^2) = S_A^2\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2, \tag{4.4.11}$$

zaś $Y_i' = AX_i + B$ są rzędnymi prostej regresji obliczonymi dla wartości X_i w próbie, więc statystyka

$$t = \frac{B - \mathbf{b}}{S_B} \tag{4.4.12}$$

ma rozkład t Studenta z $v = n-2$ stopniami swobody. Na podstawie danej próbki realizację przedziału ufności dla współczynnika $\mathbf{b}$, na poziomie ufności $1-\alpha$, wyznacza się ze wzoru

$$b - s_B t(1-\tfrac{1}{2}\alpha,\ v) < \mathbf{b} < b + s_B t(1-\tfrac{1}{2}\alpha,\ v), \tag{4.4.13}$$

gdzie b jest wartością statystyki B (4.4.10), s_B – pierwiastkiem z wartości statystyki S_B^2 (4.4.11) obliczonymi z próbki, $t(p, v)$ zaś – kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody, wyznaczonym z tablicy 7.

Zadanie 4.15. Na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ wyznaczyć realizację przedziału ufności dla nieznanego współczynnika **b** prostej regresji według danych z zadania 4.13.

Rozwiązanie. Korzystając z obliczeń pomocniczych w rozwiązaniu poprzedniego zadania i wzorów (4.4.10), (4.4.11), otrzymujemy

$$b=\bar{y}-a\bar{x}=5{,}4815-0{,}6255\cdot 5{,}8519=1{,}8211,$$

$$s_B^2=s_A^2\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0{,}01505\cdot\tfrac{1022}{27}=0{,}5697,$$

$$s_B=0{,}7548.$$

Z tablicy 7 dla $v=n-2=25$ stopni swobody i poziomu ufności $1-\alpha=0{,}95$ znajdujemy kwantyl $t(0{,}975,\ 25)=2{,}0595$. Dalej stosujemy wzór (4.4.13) i otrzymujemy

$$1{,}8211-0{,}7548\cdot 2{,}0595<\mathbf{b}<1{,}8211+0{,}7548\cdot 2{,}0595.$$

Ostatecznie mamy

$$0{,}2668<\mathbf{b}<3{,}376.$$

Jest to realizacja przedziału ufności dla współczynika **b** wyznaczona na podstawie próbki, na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$.

4.4.4. Łączny obszar ufności dla współczynników prostej regresji. W zadaniach 4.13 i 4.15 wyznaczono niezależnie, na podstawie tej samej próbki, realizacje przedziałów ufności dla współczynników **a** i **b** prostej regresji $y=\mathbf{a}x+\mathbf{b}$ cechy Y względem cechy X. Jeżeli wyznaczone realizacje przedziałów ufności przedstawimy łącznie w układzie współrzędnych Oab_0 (gdzie związek między b i b_0 określa wzór (4.4.14)) otrzymamy prostokąt (rys. 4.7). Prostokąt ten nie jest jednak realizacją łącznego obszaru ufności (2.3.3) dla współczynników **a** i **b** na poziomie ufności $1-\alpha$, ponieważ zmienne losowe A i B nie są niezależne.

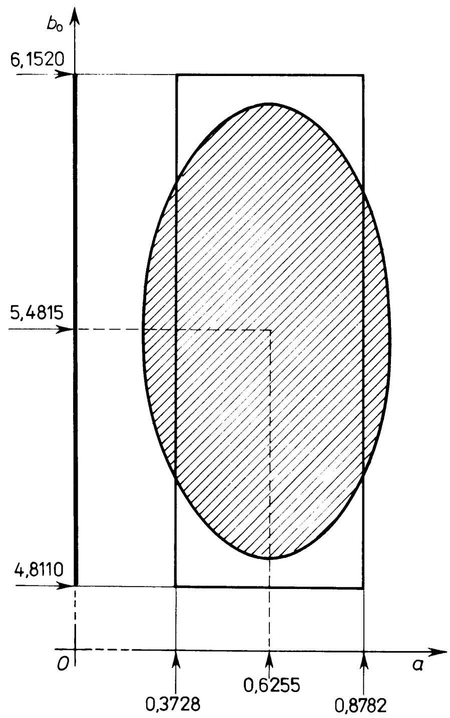
Jeżeli nieznanej prostej regresji Y względem X nada się postać $y=\mathbf{a}(x-EX)+\mathbf{b}_0$, to *jej oszacowaniem na podstawie próby jest prosta* $y=A(x-\bar{X})+B_0$, gdzie A określa wzór (4.4.5),

$$B_0=B+A\bar{X}=\bar{Y}, \tag{4.4.14}$$

B zaś jest określone wzorem (4.4.10). Wykazuje się [9], że – przy podanych na początku 4.4 założeniach – zmienne losowe A i B_0 są niezależne i realizacja łącznego obszaru ufności, na podstawie n-elementowej próbki (x_i, y_i), $i=1,\dots,n$, dla współczynników **a** i $\mathbf{b}_0$ na poziomie ufności $1-\alpha$ określona jest wzorem

$$(\mathbf{a}-a)^2 s_X^2+(\mathbf{b}_0-b_0)^2\leqslant\frac{2}{n-2}V_r F(1-\alpha,\ 2,\ n-2), \tag{4.4.15}$$

gdzie a i b_0 są odpowiednio wartościami statystyk A (4.4.5) i B_0 (4.4.14), V_r – wariancją resztkową obliczoną dla prostej regresji według wzoru (4.4.9), $F(p,\ v_1,\ v_2)$ zaś – kwantylem rzędu p rozkładu Snedecora z v_1, v_2 stopniami swobody, wyznaczonym z tablicy 9. Jak



Rys. 4.7. Realizacja łącznego obszaru ufności dla współczynników **a** i $\mathbf{b}_0$ prostej regresji z zadania 4.16 (pole zakreskowane); na osiach zaznaczono realizacje wyznaczonych niezależnie przedziałów ufności dla **a** i $\mathbf{b}_0$ oraz odpowiadający im prostokąt

widać, realizacja łącznego obszaru ufności dla współczynników **a** i $\mathbf{b}_0$ składa się z elipsy i jej wnętrza.

Zadanie 4.16. Na podstawie danych z zadania 4.13 na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ wyznaczyć realizację łącznego obszaru ufności dla współczynników **a** i $\mathbf{b}_0$.

R o z w i ą z a n i e. Z rozwiązań zadań 4.13 i 4.15 mamy

$$\bar{x}=5{,}8519, \quad s_X^2=3{,}6071, \quad s_Y^2=2{,}7679, \quad \bar{y}=5{,}4815,$$
$$a=0{,}6255, \quad r=0{,}7140.$$

Na podstawie wzoru (4.4.14) mamy

$$b_0=\bar{y}=5{,}4815,$$

na podstawie zaś wzoru (4.4.9)

$$V_r=s_Y^2(1-r)^2=2{,}7679\cdot(1-0{,}714)^2=1{,}3568.$$

Z tablicy 9 wyznacza się kwantyl $F\,(0{,}95,\ 25)=3{,}39$, a następnie według wzoru (4.4.15) poszukiwaną realizację obszaru ufności

$$(a-0{,}6255)^2\cdot 3{,}6071+(b_0-5{,}4815)^2\leqslant \tfrac{2}{25}\cdot 1{,}3568\cdot 3{,}39.$$

Po uporządkowaniu dostajemy

$$\frac{(\mathbf{a}-0{,}6255)^2}{0{,}1020}+\frac{(\mathbf{b}_0-5{,}4815)^2}{0{,}3680}\leqslant 1.$$

Wyznaczony obszar przedstawia rys. 4.7. Na rysunku tym przedstawiono również prostokąt, odpowiadający wyznaczonym niezależnie realizacjom przedziałów ufności dla **a** i $\mathbf{b}_0$. Przedział ufności (4,811, 6,152) dla $\mathbf{b}_0 = EY$ wyznaczono według wzoru (2.3.4).

4.4.5. Obszar ufności dla prostej regresji $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$. Sporządźmy dla danej próbki (x_j, y_j), $j = 1,\ldots,n$, tablicę korelacyjną o środkach $(\bar{x}_i, \bar{y}_k)$ dwuwymiarowych klas i licznościach n_{ik}, $i = 1,\ldots,l$, $k = 1,\ldots,m$, $\sum\limits_{i,k} n_{ik} = n$. Oznaczmy przez $\bar{Y}(\bar{X}_i)$ wartość przeciętną zmiennej losowej $(Y|\bar{X}_i)$ z próby. Oznaczmy jeszcze

$$Y_i' = AX_i + B. \tag{4.4.16}$$

Jeżeli są spełnione założenia wymienione na początku, to dla ustalonego X_i

$$t = \frac{Y_i' - \bar{Y}(\bar{X}_i)}{S_{Y_i'}}, \tag{4.4.17}$$

gdzie

$$S_{Y_i'} = \sqrt{\frac{S_Y^2(1-R^2)}{S_X^2(n-2)}[S_X^2 + (\bar{X}_i - \bar{X})^2]} \tag{4.4.18}$$

ma rozkład Studenta z $v = n-2$ stopniami swobody. Można więc dla każdego ustalonego X_i, $i = 1,\ldots,l$ i poziomu ufności $1-\alpha$ wyznaczyć przedział ufności dla $\bar{Y}(\bar{X}_i)$. Realizację przedziału ufności dla $\bar{Y}(\bar{X}_i)$, na poziomie ufności $1-\alpha$, na podstawie próbki wyznacza się według wzoru

$$y_i' - s_{Y_i'}\, t(1-\tfrac{1}{2}\alpha,\, v) < \bar{Y}(\bar{X}_i) < y_i' + s_{Y_i'}\, t(1-\tfrac{1}{2}\alpha,\, v), \tag{4.4.19}$$

gdzie $y_i' = a\bar{x}_i + b$ i $s_{Y_i'}$ są wartościami statystyk Y_i' (4.4.16) i $S_{Y_i'}$ (4.4.18) obliczonymi z próbki, $t\,(p, v)$ zaś jest kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody, wyznaczonym z tabl. 7.

Wyznaczmy dla każdego $\bar{X}_i = \bar{x}_i$, $i = 1,\ldots,l$, według (4.4.19) realizację przedziału ufności, a następnie w układzie Oxy dla x_i, $i = 1,\ldots,l$, zaznaczmy punkty odpowiadające wyznaczonym przedziałom. Jeżeli połączymy punkty odpowiadające dolnym krańcom przedziałów i podobnie połączymy punkty odpowiadające górnym krańcom przedziałów, otrzymamy dwie linie zwane krzywymi *ufności.* Obszar zawarty między krzywymi ufności nazywamy *realizacją obszaru ufności dla prostej regresji*, na poziomie ufności $1-\alpha$, na podstawie próbki.

Zadanie 4.17. Korzystając z danych zadania 4.13, wyznaczyć równanie prostej regresji cechy Y względem cechy X i realizację obszaru ufności dla prostej regresji na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.

Tablica 4.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{x}_i$	$a\bar{x}_i$	y'_i	$\bar{x}_i - \bar{x}$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$s_X^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$\sqrt{s_X^2 + (x_i - \bar{x})^2}$	$s_{Y'_i}$	$t_0 s_{Y'_i}$	$y'_i - t_0 s_{Y'_i}$	$y'_i + t_0 s_{Y'_i}$
2	1,2510	3,0721	−3,8519	14,8371	18,4442	4,2947	0,5270	1,0854	1,9867	4,1575
3	1,8765	3,6976	−2,8519	8,1333	11,7404	3,4264	0,4204	0,8658	2,8318	4,5634
4	2,5020	4,3231	−1,8519	3,4295	7,0366	2,6527	0,3255	0,6704	3,6527	4,9955
5	3,1275	4,9486	−0,8519	0,7257	4,3328	2,0815	0,2554	0,5260	4,4226	5,4746
6	3,7530	5,5741	0,1481	0,0219	3,6290	1,9050	0,2337	0,4813	5,0928	6,0554
7	4,3785	6,1996	1,1481	1,3181	4,9252	2,2193	0,2723	0,5608	5,6388	6,7604
8	5,0040	6,8251	2,1481	4,6143	8,2214	2,8673	0,3518	0,7245	6,1006	7,5496
9	5,6295	7,4506	3,1481	9,9105	13,5176	3,6766	0,4511	0,9290	6,5216	8,3796

R o z w i ą z a n i e. Na podstawie wcześniej przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy równanie prostej regresji

$$y = 0{,}6255\,x + 1{,}8211.$$

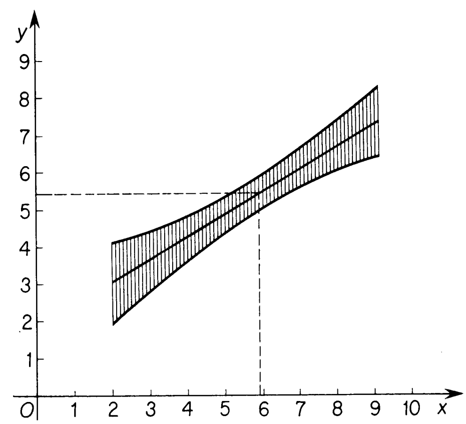
Aby ułatwić obliczenia wartości wyrażenia

$$s_{Y'_i} = \sqrt{\frac{s_Y^2(1-r^2)}{s_X^2(n-2)}}\sqrt{s_X^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2},$$

obliczmy najpierw pierwszy czynnik jednakowy dla wszystkich x_i:

$$\frac{s_Y}{s_X}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \frac{1{,}6637}{1{,}8992}\sqrt{\frac{1-0{,}714^2}{25}} = 0{,}1227.$$

Z tablicy 7 dla $1-\alpha=0{,}95$ i $\nu=25$ stopni swobody wyznaczamy kwantyl $t(0{,}975,\ 25)=$ $=2{,}0595$. Wyniki obliczeń pomocniczych w tabl. 4.7.



Rys. 4.8. Obszar ufności dla prostej regresji z zadania 4.17.

Kolumna druga zawiera $a\bar{x}_i = 0{,}6255\bar{x}_i$, trzecia $y'_i = a\bar{x}_i + b = 0{,}6255\bar{x}_i + 1{,}8211$, kolumna ósma $0{,}1227\sqrt{s_X^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2}$, ostatnie zaś dwie – realizację granic przedziałów ufności dla kolejnych wartości x_i, $t_0 = t(0{,}975,\ 25) = 2{,}0595$.

Ilustracja rozwiązania jest przedstawiona na rys. 4.8.

4.5. TESTY ISTOTNOŚCI DLA WSPÓŁCZYNNIKA KORELACJI

4.5.1. Weryfikacja hipotezy H: $\rho = 0$, o braku korelacji liniowej między badanymi cechami. Badane cechy $(X,\ Y)$ populacji generalnej mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym współczynniku korelacji ρ. Z populacji tej pobrano n-elementową próbkę i na jej podstawie obliczono wartość r statystyki R (4.2.1). Wysuwamy hipotezę H: $\rho = 0$, tzn. że *badane cechy są nieskorelowane* w populacji generalnej. Przedstawioną hipotezę – w zależności od liczności n próby – można weryfikować za pomocą różnych testów.

1. L i c z n o ś ć $n \geqslant 3$.

Sposób pierwszy. Gdy są spełnione podane założenia i hipoteza H: $\rho = 0$ jest prawdziwa, wtedy statystyka

$$t = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2}}\sqrt{n-2} \tag{4.5.1}$$

ma rozkład Studenta z $v = n - 2$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki t (4.5.1) weryfikujemy hipotezę H: $\rho = 0$ na poziomie istotności α przeciw hipotezie alternatywnej:

a) K: $\rho \neq 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\frac{1}{2}\alpha, v)\rangle \cup \langle t(1-\frac{1}{2}\alpha, v), +\infty)$,

b) K: $\rho > 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle t(1-\alpha, v), +\infty)$,

c) K: $\rho < 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\alpha, v)\rangle$, gdzie $t(p, v)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody wyznaczanym z tablicy 7.

Na podstawie próbki wyznaczamy wartość t_d statystyki t (4.5.1). Jeśli $t_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α.

Jeżeli $t_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

Sposób drugi. Tablica 23 zawiera, obliczone ze wzoru (4.5.1), wartości krytyczne $r(p, v)$ odpowiadające kwantylom rozkładu Studenta. Pozwala to wyznaczyć zbiór krytyczny dla R.

Jeżeli weryfikujemy hipotezę H: $\rho = 0$ na poziomie istotności α przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $\rho \neq 0$, to zbiorem krytycznym jest: $I = (-\infty, -r(\alpha, v)\rangle \cup \langle r(\alpha, v), +\infty)$,

b) K: $\rho > 0$, to zbiorem krytycznym jest: $I = \langle r(2\alpha, v), +\infty)$,

c) K: $\rho < 0$, to zbiorem krytycznym jest: $I = (-\infty, -r(2\alpha, v)\rangle$, gdzie wartości $r(p, v)$ odczytano z tablicy 23, zaś $v = n - 2$.

Na podstawie próbki wyznaczamy wartość r ze wzoru (4.2.3). Jeżeli $r \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K na poziomie istotności α. Jeżeli $r \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

2. L i c z n o ś ć $n \geqslant 50$.

Gdy hipoteza H: $\rho = 0$ jest prawdziwa, wtedy statystyka

$$\chi^2 = nR^2 \tag{4.5.2}$$

ma rozkład χ^2 z $v = 1$ stopniami swobody ([1]). W tym teście hipotezę H: $\rho = 0$ weryfikujemy jedynie przy hipotezie alternatywnej K: $\rho \neq 0$. Zbiorem krytycznym jest tu przedział $I = \langle \chi^2(1-\alpha, 1), +\infty)$, gdzie α jest poziomem istotności, $\chi^2(p, 1)$ zaś kwantylem rzędu p rozkładu χ^2 z jednym stopniem swobody, odczytanym z tablicy 8.

([1]) Założenie, że (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny, nie jest w tym przypadku konieczne (zad. 4.25).

Na podstawie próbki wyznaczamy wartość χ_d^2 statystyki χ^2 (4.5.2). Jeżeli $\chi_d^2 \in I$, to hipotezę H: $\rho = 0$ odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K: $\rho \neq 0$, na poziomie istotności α. Jeżeli $\chi_d^2 \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H: $\rho = 0$, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

3. Liczność $n \geqslant 100$.

Gdy są spełnione podane na początku założenia i hipoteza H: $\rho = 0$ jest prawdziwa, wtedy statystyka

$$U = \frac{R}{1 - R^2}\sqrt{n} \tag{4.5.3}$$

ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Jeżeli za pomocą statystyki U (4.5.3) ([1]) weryfikujemy hipotezę H: $\rho = 0$ na poziomie istotności α przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $\rho \neq 0$, to zbiorem krytycznym jest: $I = (-\infty, -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha), +\infty)$,

b) K: $\rho > 0$, to zbiorem krytycznym jest: $I = \langle u(1-\alpha,) + \infty)$,

c) K: $\rho < 0$, to zbiorem krytycznym jest: $I = (-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$, gdzie $u(p)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu $N(0, 1)$ wyznaczonym z tablicy 6.

Na podstawie próbki wyznaczamy wartości u statystyki U (4.5.3). Jeżeli $u \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $u \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

4.5.2. Weryfikacja hipotezy H: $\rho = \rho_0$. W populacji generalnej badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym współczynniku korelacji ρ. Z populacji tej pobrano n-elementową próbkę i na jej podstawie obliczono wartość r statystyki R (4.2.1). Zakładamy, że $|r| \neq 1$. Wysuwamy hipotezę H: $\rho = \rho_0$, tzn. że współczynnik korelacji ρ w badanej populacji jest równy danej liczbie ρ_0.

Jeżeli są spełnione podane założenia oraz hipoteza H: $\rho = \rho_0$ jest prawdziwa, to statystyka

$$U = (Z - z_0)\sqrt{n - 3}, \tag{4.5.4}$$

gdzie $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R}{1-R}$, a $z_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$, już dla niedużych $n(n \geqslant 10)$ ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Jeżeli za pomocą statystyki U (4.5.4) weryfikujemy hipotezę H: $\rho = \rho_0$ na poziomie istotności α, przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $\rho \neq \rho_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -u(1-\frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1-\frac{1}{2}\alpha), +\infty)$,

b) K: $\rho > \rho_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle u(1-\alpha), +\infty)$,

c) K: $\rho < \rho_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -u(1-\alpha)\rangle$, gdzie $u(p)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu $N(0, 1)$ wyznaczonym z tablicy 6.

([1]) Oczywiście można również stosować test opisany w punkcie 2.

Z tablicy 3 odczytujemy – odpowiadającą r – wartość z statystyki Z oraz z_0 odpowiadającą liczbie ρ_0, a następnie wyznaczamy wartość u statystyki U (4.5.4). Jeżeli $u \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $u \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie, a więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H na poziomie istotności α.

4.5.3. Zadania rozwiązane.

Zadanie 4.18. Z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanych parametrach pobrano 25-elementową próbkę.

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$				
	5	10	15	20	25
5	–	–	1	–	–
6	–	1	3	2	–
7	1	3	3	3	1
8	–	2	3	1	–
9	–	–	1	–	–

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $\rho = 0$, tzn. że badane cechy X i Y są liniowo nieskorelowane, przeciw hipotezie alternatywnej K: $\rho \neq 0$.

Rozwiązanie. Współczynnik korelacji liniowej r w próbce określony jest wzorem (4.2.3). Aby go wyznaczyć, obliczymy kolejno $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_X, s_Y i cov (x, y). Wyniki obliczeń pomocniczych są zawarte w tablicy 4.8.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{i\cdot} = \frac{375}{25} = 15, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{\cdot k} = \frac{175}{25} = 7,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i\cdot} - \bar{x}^2 = \frac{6125}{25} - 225 = 20, \qquad s_X = 4{,}4721,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{\cdot k} - \bar{y}^2 = \frac{1245}{25} - 49 = 0{,}8, \qquad s_Y = 0{,}8944,$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{ik} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{2615}{25} - 15 \cdot 7 = -0{,}4.$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X s_Y} = \frac{-0{,}4}{4{,}4721 \cdot 0{,}8944} = -0{,}1000.$$

Ponieważ $n = 25 < 50$, więc zastosujemy test opisany w p. 1. Weryfikację przeprowadzimy przykładowo każdą z podanych metod.

1. Wyznaczamy wartość t_d statystyki t (4.5.1)

$$t_d = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\sqrt{n - 2} = \frac{-0{,}1}{\sqrt{0{,}99}}\sqrt{23} = -0{,}4820.$$

Tablica 4.8

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$										
	5	10	15	20	25	$n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k^2$	$\bar{y}_k^2 n_{\cdot k}$	$\sum_{i=1}^{5} \bar{x}_i n_{ik}$	$\bar{y}_k \sum_{i=1}^{5} \bar{x}_i n_{ik}$
5	–	–	1	–	–	1	5	25	25	15	75
6	–	1	3	2	–	6	36	36	216	895	570
7	1	3	3	3	1	11	77	49	539	165	1155
8	–	2	3	1	–	6	48	64	384	85	680
9	–	–	1	–	–	1	9	81	81	15	135
$n_{i\cdot}$	1	6	11	6	1	25	175		1245		2615
$\bar{x}_i n_{i\cdot}$	5	60	165	120	25	375					
$\bar{x}_i^2$	25	100	225	400	625						
$\bar{x}_i^2 n_{i\cdot}$	25	600	2475	2400	625	6125					

Z tablicy 7 dla poziomu istotności $\alpha=0{,}05$ i $\nu=23$ stopni swobody znajdujemy kwantyl $t(0{,}975,\ 23)=2{,}069$. Zbiorem krytycznym jest $I=(-\infty,\ -2{,}069\rangle\cup\langle 2{,}069,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d=-0{,}4820\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho=0$ na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$. Oznacza to jednocześnie, że brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że cechy X i Y są nieskorelowane.

Dla cech X i Y mających dwuwymiarowy rozkład normalny oznacza to ponadto, że brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że cechy X i Y są niezależne.

2. Z tablicy 23 dla $\alpha=0{,}05$ i $\nu=23$ znajdujemy wartość krytyczną $r(0{,}05,\ 23)=0{,}3976$. Zbiorem krytycznym jest $I=(-\infty,\ -0{,}3976\rangle\cup\langle 0{,}3976,\ +\infty)$. Ponieważ obliczone z próbki $r=-0{,}1\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho=0$, na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

Zadanie 4.19. Z populacji generalnej, w której cechy $(X,\ Y)$ mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym parametrze ρ, pobrano próbkę o liczności $n=20$ i obliczono wartość $r=0{,}41$ statystyki R (4.2.1). Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $\rho=0$, przeciw hipotezie alternatywnej K: $\rho\neq 0$.

Rozwiązanie. Z tablicy 23 wyznaczamy dla $\alpha=0{,}05$ i $\nu=n-2=18$ stopni swobody wartość krytyczną $r(0{,}05,\ 18)=0{,}4438$, a następnie zbiór krytyczny $I=(-\infty,\ -0{,}4438\rangle\cup\langle 0{,}4438,\ +\infty)$. Ponieważ $r=0{,}41\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

Zadanie 4.20. Dane jak w zadaniu 4.19. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $p=0$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $\rho>0$.

Rozwiązanie. Dla $\alpha=0{,}05$ i $\nu=n-2=18$ stopni swobody, z tablicy 23 wyznaczamy wartość krytyczną $r(2\alpha,\ \nu)=r(0{,}1,\ 18)=0{,}3783$, a następnie zbiór krytyczny $I=\langle 0{,}3783,\ +\infty)$. Ponieważ $r=0{,}41\in I$, więc hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K: $\rho>0$ na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

Zadanie 4.21. Na podstawie próbki pobranej z populacji, w której badane cechy $(X,\ Y)$ mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym parametrze ρ, obliczono wartość

$r = 0{,}45$ statystyki R (4.2.1). Jak liczna powinna być próbka, aby na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ uznać, że współczynnik korelacji ρ dla całej populacji jest a) różny od zera, b) dodatni?

R o z w i ą z a n i e. a) Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ weryfikujemy hipotezę $H\colon \rho = 0$ przeciw hipotezie $K\colon \rho \neq 0$. Liczność n próbki winna być tak dobrana, by liczba $r = 0{,}45$ należała do zbioru krytycznego $(-\infty, \ -r(\alpha, v)\rangle \cup \langle r(\alpha, v), \ +\infty)$, wówczas hipotezę $H\colon \rho = 0$ odrzucimy na korzyść hipotezy alternatywnej $K\colon \rho \neq 0$. W tablicy 23 znajdujemy taką największą wartość krytyczną $r(\alpha, v)$, by było $r\ (0{,}05, v) < 0{,}45$. Jest to $r(0{,}05,\ 18) = = 0{,}4438$. Ponieważ $v = n - 2 = 18$, więc $n = 20$. Hipotezę $H\colon \rho = 0$ odrzucimy na korzyść hipotezy alternatywnej $K\colon \rho \neq 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, jeżeli wartość $r = 0{,}45$ została obliczona z próbki o liczności co najmniej 20.

b) Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ weryfikujemy hipotezę $H\colon \rho = 0$ przeciw hipotezie $K\colon \rho > 0$. Aby hipotezę $H\colon \rho = 0$ odrzucić na korzyść hipotezy $K\colon \rho > 0$, na poziomie istotności α, liczność próbki musi być tak dobrana, by liczba $r = 0{,}45$ należała do zbioru krytycznego $\langle r(2\alpha, v), +\infty)$. W tablicy 23 znajdujemy największą wartość krytyczną $r(2\alpha, v)$ taką, by $r(0{,}1, v) < 0{,}45$. Jest to $r(0{,}1, 13) = 0{,}4409$. Ponieważ $v = n - 2 = 13$, więc $n = 15$. Hipotezę $H\colon \rho = 0$ odrzucimy na korzyść hipotezy $K\colon \rho > 0$, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, jeżeli wartość $r = 0{,}45$ została obliczona z próbki o liczności co najmniej 15.

Zadanie 4.22. Z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanych parametrach, pobrano 80-elementową próbkę.

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$						
	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
0,1	1	–	–	–	–	–	–
0,3	3	2	–	–	–	–	–
0,5	3	3	3	–	–	–	–
0,7	–	5	3	4	–	–	–
0,9	–	–	5	3	4	4	–
1,1	–	–	–	6	6	4	8
1,3	–	–	–	–	7	4	2

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H\colon \rho = 0$, tzn. że badane cechy są liniowo nieskorelowane ([1]), wobec hipotezy alternatywnej $K\colon \rho \neq 0$.

R o z w i ą z a n i e. Wyznaczymy najpierw $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_X, s_Y i $\operatorname{cov}(x,y)$. Wyniki obliczeń pomocniczych są w tabl. 4.9.

$$\bar{x} = \frac{1}{80} \sum_{i=1}^{7} \bar{x}_i n_{i.} = \frac{1}{80} \cdot 2295 = 28{,}6875, \qquad \bar{y} = \frac{1}{80} \sum_{k=1}^{7} \bar{y}_k n_{.k} = \frac{1}{80} \cdot 72{,}2 = 0{,}9025,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{80} \sum_{i=1}^{7} \bar{x}_i^2 n_{i.} - \bar{x}^2 = \frac{1}{80} \cdot 72450 - 28{,}6875^2 = 82{,}6524, \qquad s_X = 9{,}0913,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{80} \sum_{k=1}^{7} \bar{y}_k^2 n_{.k} - \bar{y}^2 = \frac{1}{80} \cdot 72{,}56 - 0{,}9025^2 = 0{,}0925, \qquad s_Y = 0{,}3041,$$

([1]) A więc w tym przypadku niezależne.

Tablica 4.9

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$							$n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k n_k$	$\bar{y}_k^2$	$\bar{y}_k^2 n_{\cdot k}$	$\sum_t \bar{x}_i n_{ik}$	$\bar{y}_k \sum_t \bar{x}_i n_{ik}$
	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5						
0,1	1							1	0,1	0,01	0,01	12,5	1,25
0,3	3	2						5	1,5	0,09	0,45	72,5	21,75
0,5	3	3	3					9	4,5	0,25	2,25	157,5	78,75
0,7		5	3	4				12	8,4	0,49	5,88	265,0	185,50
0,9			5	3	4	4		16	14,4	0,81	12,96	475,0	427,50
1,1				6	6	4	8	24	26,4	1,21	29,04	850,0	935,00
1,3					7	4	2	13	16,9	1,69	21,97	462,5	601,25
$n_{i\cdot}$	7	10	11	13	17	12	10	80	72,2		72,56		2 251,00
$\bar{x}_i n_{i\cdot}$	87,5	175,0	247,5	357,5	552,5	450,0	425,0	2295					
$\bar{x}_i^2$	156,25	306,25	506,25	756,25	1 056,25	1 406,25	1 806,25						
$\bar{x}_i^2 n_{i\cdot}$	1 093,75	3 062,50	5 568,75	9 831,25	17 956,25	16 875,00	18 062,50	72450					

$$\operatorname{cov}(x, y) = \tfrac{1}{80} \sum_{k=1}^{7} \bar{y}_k \sum_{i=1}^{7} \bar{x}_i n_{ik} - \bar{x}\bar{y} = \tfrac{1}{80} \cdot 2251 - 28{,}6875 \cdot 0{,}9025 = 2{,}2470,$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X s_Y} = \frac{2{,}2470}{9{,}0913 \cdot 0{,}3041} = 0{,}8200.$$

Ponieważ liczność próbki $n = 80 > 50$, więc stosujemy test opisany w p. 2. Wyznaczamy wartość χ_d^2 statystyki χ^2 (4.5.2):

$$\chi_d^2 = nr^2 = 80 \cdot 0{,}82^2 = 53{,}792.$$

Z tablicy 8 dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ i jednego stopnia swobody znajdujemy kwantyl $\chi^2(0{,}95,\ 1) = 3{,}841$, a następnie wyznaczamy zbiór krytyczny $I = \langle 3{,}841,\ +\infty)$. Ponieważ $\chi_d^2 = 53{,}792 \in I$, więc hipotezę $H\colon \rho = 0$ odrzucamy na korzyść hipotezy $K\colon \rho \neq 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Zadanie 4.23. W 120 zakładach przemysłowych zebrano dane o wzroście wydajności pracy i wzroście produkcji w stosunku do poprzedniego roku. Przez X oznaczono procentowy wzrost wydajności pracy, przez Y zaś procentowy wzrost produkcji.

Y	X						
	80–90	90–100	100–110	110–120	120–130	130–140	140–150
80–90	2	2	2	–	–	–	–
90–100	3	3	5	2	1	–	–
100–110	–	5	18	7	2	–	–
110–120	–	3	14	12	3	2	–
120–130	2	1	5	6	5	–	–
130–140	–	2	2	3	3	2	3

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H\colon \rho = 0$, tzn. że między badanymi cechami brak korelacji liniowej, przeciw hipotezie alternatywnej $K\colon \rho > 0$.

Rozwiązanie. Podobnie jak w poprzednich zadaniach wyznaczymy najpierw $\bar{x}, \bar{y}$, s_X, s_Y i $\operatorname{cov}(x, y)$. Wyniki obliczeń pomocniczych są w tablicy 4.10.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{i\cdot} = \tfrac{13120}{120} = 109{,}3333, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{\cdot k} = \tfrac{13510}{120} = 112{,}5833,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i.} - \bar{x}^2 = \tfrac{1453600}{120} - 109{,}3333^2 = 159{,}5630, \qquad s_X = 12{,}6318,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{.k} - \bar{y}^2 = \tfrac{1542400}{120} - 112{,}5833^2 = 178{,}334, \qquad s_Y = 13{,}3542,$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{ik} - \bar{x}\bar{y} = \tfrac{1486650}{120} - 109{,}3333 \cdot 112{,}5833 = 79{,}6470,$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X s_Y} = \frac{79{,}6470}{12{,}6318 \cdot 13{,}3542} = 0{,}4722.$$

Ponieważ liczność próbki $n = 120 > 100$, więc zastosujmy test opisany w p. 3.

Tablica 4.10

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$: 85	95	105	115	125	135	145	$n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k^2$	$\bar{y}_k^2 n_{\cdot k}$	$\sum_t \bar{x}_i n_{ik}$	$\bar{y}_k \sum_t \bar{x}_i n_{ik}$
85	2	2	2	–	–	–	–	6	510	7 225	43 350	570	48 450
95	3	3	5	2	1	–	–	14	1 330	9 025	126 350	1 420	134 900
105	–	5	18	7	2	–	–	32	3 360	11 025	352 800	3 420	359 100
115	–	3	14	12	3	2	–	34	3 910	13 225	449 650	3 780	434 700
125	2	1	5		5	–	–	19	2 375	15 625	296 875	2 105	263 125
135	–	2	2	3	3	2	3	15	2 025	18 225	273 375	1 825	246 375
$n_{i\cdot}$	7	16	46	30	14	4	3	120	13 510		1 542 400		1 486 650
$\bar{x}_i n_{i\cdot}$	595	1 520	4 830	3 450	1 750	540	435	13 120					
$\bar{x}_i^2$	7 225	9 025	11 025	13 225	15 625	18 225	21 025						
$\bar{x}_i^2 n_{i\cdot}$	50 575	144 400	507 150	396 750	218 750	72 900	63 075	1 4536 000					

Wyznaczamy wartość u statystyki U (4.5.3)

$$u = \frac{r}{1-r^2}\sqrt{n} = \frac{0{,}4722}{1-0{,}4722^2}\sqrt{120} = 6{,}6570.$$

Z tablicy 6 dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ znajdujemy kwantyl $u(1-\alpha) = u(0{,}95) = 1{,}6449$, a następnie wyznaczamy zbiór krytyczny $I = \langle 1{,}6449, +\infty)$. Ponieważ $u = 6{,}6570 \in I$, więc hipotezę $H: \rho = 0$ odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej $K: \rho > 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Zadanie 4.24. Na podstawie danych z zadania 4.23, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę $H: \rho = 0{,}65$ przeciw hipotezie alternatywnej $K: \rho < 0{,}65$.

R o z w i ą z a n i e. Postępujemy w sposób opisany w p. 2. Z rozwiązania poprzedniego zadania mamy, że $r = 0{,}4722$. Z tablicy 3 wyznaczamy wartości z i z_0 statystyki Z (4.4.2) odpowiadające wartościom $r = 0{,}4722$ i $\rho_0 = 0{,}65$: $z = 0{,}5129$ i $z_0 = 0{,}7753$, a następnie wartość u statystyki U (4.5.4)

$$u = (z - z_0)\sqrt{n-3} = (0{,}5129 - 0{,}7753)\sqrt{117} = -2{,}8383.$$

Z tablicy 6 wyznaczamy kwantyl $u(1-\alpha) = u(0{,}99) = 2{,}3263$, a następnie zbiór krytyczny $I = (-\infty, -2{,}3263\rangle$. Ponieważ $u = -2{,}8383 \in I$, więc hipotezę $H: \rho = 0{,}65$ odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej $K: \rho < 0{,}65$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$.

Zadanie 4.25. Wykazać, że w tzw. dużej próbie (o liczności n rzędu kilkuset) przy założeniu niezależności X i Y oraz dowolnym rozkładzie (X, Y), statystyka nR^2, gdzie

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{nS_X S_Y}, \tag{*}$$

ma asymptotycznie przy $n \to \infty$ rozkład χ^2 z jednym stoniem swobody.

R o z w i ą z a n i e. Dla dużych n można przyjąć $\bar{X} \approx m_X$, $\bar{Y} \approx m_Y$, wówczas licznik (*) przyjmie postać $\sum_{1}^{n}(X_i - m_X)(Y_i - m_Y)$. Jest to suma dużej liczby n niezależnych zmiennych losowych o wspólnej wartości przeciętnej zero i jednakowym dla wszystkich odchyleniu standardowym $\sigma_X \sigma_Y$, więc z centralnego tw. granicznego (cz. I, p. 6.1) wynika, że suma ta ma w przybliżeniu rozkład $N(0, \sqrt{n}\,\sigma_X \sigma_Y)$. Mianownik: $nS_X S_Y$ dla dużych n jest w przybliżeniu równy $n\sigma_X \sigma_Y$, tak więc zmienna losowa R ma w przybliżeniu rozkład asymptotycznie normalny $N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, bez względu na łączny rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), przy uczynionym już założeniu niezależności X i Y. Zatem $\sqrt{n}\,R$ ma rozkład asymptotycznie normalny $N(0, 1)$, a więc kwadrat tej zmiennej nR^2 ma rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody.

4.6. TESTY JEDNORODNOŚCI DLA WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI LINIOWEJ. WERYFIKACJA HIPOTEZ: H: $\rho_1 = \rho_2$ ORAZ H: $\rho_1 = \ldots = \rho_k (k > 2)$

4.6.1. Przypadek dwóch populacji. Dane są dwie populacje, w których badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowe rozkłady normalne o nieznanych współczynnikach korelacji ρ_1 i ρ_2. Z każdej z populacji pobrano n_j-elementową próbkę $(n_j > 10)$ i obliczono wartość r_j statystyki R_j (4.2.1), $j = 1, 2$. Wysuwamy hipotezę H: $\rho_1 = \rho_2$, tzn. że współczynniki korelacji w obu populacjach są równe.

Jeżeli hipoteza H: $\rho_1 = \rho_2$ jest prawdziwa, to statystyka

$$U = (Z_1 - Z_2)\sqrt{\frac{(n_1 - 3)(n_2 - 3)}{n_1 + n_2 - 6}}, \tag{4.6.1}$$

gdzie statystyka Z_j, $j = 1, 2$, jest określona wzorem (4.4.2), ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Jeżeli za pomocą statystyki U(4.6.1) weryfikujemy hipotezę H: $\rho_1 = \rho_2$ na poziomie istotności α, przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $\rho_1 \neq \rho_2$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -u(1 - \frac{1}{2}\alpha)\rangle \cup \langle u(1 - \frac{1}{2}\alpha), +\infty)$,

b) K: $\rho_1 > \rho_2$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle u(1 - \alpha), +\infty)$,

c) K: $\rho_1 < \rho_2$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, u(1 - \alpha)\rangle$, gdzie $u(p)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu $N(0, 1)$ obliczonym z tablicy 6.

Dla obliczonych z próbek współczynników korelacji r_j wyznaczamy z tablicy 3 wartości z_j, $j = 1, 2$, statystyki Z (4.4.2), a następnie wartość u statystyki U (4.6.1). Jeżeli $u \in \mathrm{I}$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $u \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbek nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

W przypadku gdy brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że $\rho_1 = \rho_2$ i – po uwzględnieniu również innych okoliczności – hipotezę tę przyjęto, wówczas za oszacowanie na podstawie obu próbek wspólnej wartości współczynnika korelacji ρ w obu populacjach przyjmuje się odczytaną z tablicy 4 wartość r odpowiadającą liczbie

$$z = \frac{(n_1 - 3)z_1 + (n_2 - 3)z_2}{(n_1 - 3) + (n_2 - 3)}, \tag{4.6.2}$$

która jest wartością statystyki Z będącej najlepszą funkcją liniową statystyk Z_1 i Z_2 w sensie minimalnej wariancji.

4.6.2. Przypadek $k > 2$ populacji. Dane jest $k (k > 2)$ populacji, w których badane cechy mają dwuwymiarowe rozkłady normalne o nieznanych współczynnikach korelacji ρ_i, $i = 1, \ldots, k$; z każdej z populacji pobrano n_i-elementową próbkę i na jej podstawie obliczono wartości r_i statystyki R (4.2.1). Wysuwamy hipotezę H: $\rho_1 = \ldots = \rho_k$, tzn. że w każdej z populacji współczynnik korelacji jest taki sam.

Jeżeli hipoteza ta jest prawdziwa, to statystyka

$$\chi^2 = \sum_1^k (n_i - 3)(Z_i - Z)^2 = \sum_1^k (n_i - 3) Z_i^2 - \frac{[\sum_1^k (n_i - 3) Z_i]^2}{\sum_1^k (n_i - 3)} =$$

$$= \sum_1^k (n_i - 3) Z_i^2 - [\sum_1^k (n_i - 3) Z_i] Z, \tag{4.6.3}$$

gdzie

$$Z = \frac{\sum_1^k (n_i - 3) Z_i}{\sum_1^k (n_i - 3)} \tag{4.6.4}$$

– Z_i zaś jest statystyką określoną wzorem (4.4.2) – ma rozkład χ^2 z $v = k - 1$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki χ^2 (4.6.3) weryfikujemy hipotezę H: $\rho_1 = \ldots = \rho_k$, na poziomie istotności α, przeciw hipotezie alternatywnej K: $\sim(\rho_1 = \ldots = \rho_k)$ (¹), to zbiorem krytycznym jest $I = \langle \chi^2(1-\alpha, v), +\infty)$, gdzie $\chi^2(1-\alpha, v)$ odczytano z tablicy 8.

Dla obliczonych z próbek współczynników korelacji r_i wyznaczamy z tablicy 3 wartości z_i, $i = 1, \ldots, k$, statystyki Z (4.4.2), a następnie wartość χ_d^2 statystyki χ^2 (4.6.3). Jeżeli $\chi_d^2 \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $\chi_d^2 \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbek nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia, na poziomie istotności α.

Jeżeli brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że $\rho_1 = \ldots = \rho_k$ i – po uwzględnieniu również innych przesłanek – hipoteza ta została przyjęta, to za oszacowanie na podstawie wszystkich próbek wspólnej wartości współczynnika korelacji ρ w rozpatrywanych populacjach, przyjmuje się odczytaną z tablicy 4 wartość r, odpowiadającą wartości z statystyki Z (4.6.4).

Zadanie 4.26. Z dwu dwuwymiarowych populacji normalnych o współczynnikach korelacji ρ_i pobrano n_i-elementowe próbki i wyznaczono r_i, $i = 1, 2$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: $\rho_1 = \rho_2$ przeciw hipotezie K: $\rho_1 \neq \rho_2$ na podstawie danych:

a) $n_1 = 58$, $r_1 = 0{,}49$, $n_2 = 65$, $r_2 = 0{,}17$,
b) $n_1 = 10$, $r_1 = -0{,}23$, $n_2 = 20$, $r_2 = -0{,}55$.

Rozwiązanie. a) Z tablicy 3 wyznaczamy wartości $z_1 = 0{,}5369$ i $z_2 = 0{,}1717$, a następnie obliczamy wartość u statystyki U (4.6.1)

$$u = (z_1 - z_2)\sqrt{\frac{(n_1-3)(n_2-3)}{n_1+n_2-6}} = 0{,}3652\sqrt{\frac{62 \cdot 55}{117}} = 1{,}97.$$

(¹) Gdzie „$\sim$" oznacza negację.

Z tablicy 6 dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ wyznaczamy kwantyl $u(1-\frac{1}{2}\alpha) = u(0{,}975) = 1{,}96$. Zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$.

Ponieważ $u = 1{,}97 \in I$, więc hipotezę $\rho_1 = \rho_2$ odrzucamy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, na korzyść hipotezy $\rho_1 \neq \rho_2$.

b) Postępując jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy kolejno: $z_1 = 0{,}2342$, $z_2 = 0{,}6184$,

$$u = (z_1 - z_2)\sqrt{\frac{(n_1-3)(n_2-3)}{n_1+n_2-6}} = -0{,}3842\sqrt{\frac{7\cdot 17}{24}} = -0{,}8555.$$

Z tablicy 6 dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ wyznaczamy kwantyl $u(0{,}975) = 1{,}96$ oraz zbiór krytyczny $I = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$. Ponieważ $u = -0{,}8555 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy $\rho_1 = \rho_2$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Ponieważ współczynniki korelacji obu populacji nie różnią się istotnie, więc wyznaczamy oszacowanie r wspólnej wartości współczynnika korelacji ρ w badanych populacjach. W tym celu wyznaczamy najpierw wartość z statystyki Z określonej wzorem (4.6.4)

$$z = \frac{7\cdot 0{,}2342 + 17\cdot 0{,}6184}{7+17} = 0{,}5063,$$

a następnie z tablicy 4 odczytujemy $r = 0{,}467$. Ponieważ współczynniki r_1 i r_2 były ujemne, więc ostatecznie przyjmujemy $r = -0{,}467$ jako oszacowanie wspólnej wartości ρ dla obu populacji.

Zadanie 4.27. Z pięciu dwuwymiarowych populacji normalnych o współczynnikach korelacji ρ_i pobrano n_i-elementowe próbki, a następnie wyznaczono współczynniki korelacji r_i, $i = 1, \ldots, 5$.

Nr próbki	1	2	3	4	5
liczność próbki n_i	21	35	15	42	32
wsp. korel. liniowej r_i	0,773	0,688	0,832	0,712	0,805

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_5$ przeciw hipotezie $K: \sim(\rho_1 = \ldots = \rho_5)$ (¹).

Rozwiązanie. Wyznaczamy wartość statystyki χ^2 określonej wzorem (4.6.3). Wyniki obliczeń pomocniczych są w tabl. 4.11.

$$\chi_d^2 = \sum_{i=1}^{5}(n_i-3)z_i^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{5}(n_i-3)z_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{5}(n_i-3)} = 125{,}8397 - \frac{126{,}8807^2}{130} = 2{,}0035.$$

(¹) Symbol „$\sim$” oznacza negację.

Tablica 4.11

i	n_i	r_i	z_i	n_i-3	$(n_i-3)z_i$	$(n_i-3)z_i^2$
1	21	0,773	1,0275	18	18,4950	19,0036
2	35	0,688	0,8441	32	27,0112	22,8002
3	15	0,832	1,1950	12	14,3400	17,1363
4	42	0,712	0,8912	39	34,7568	30,9753
5	32	0,805	1,1130	29	32,2777	35,9243
				130	126,8807	125,8397

Z tablicy 8 dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ i $v = k-1 = 4$ stopni swobody wyznaczamy kwantyl $\chi^2(0{,}95, 4) = 9{,}488$, a następnie zbiór krytyczny $I = \langle 9{,}448, +\infty)$. Ponieważ $\chi_d^2 = 2{,}0035 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że $\rho_1 = \ldots = \rho_5$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Aby wyznaczyć oszacowanie r wspólnej wartości współczynnika korelacji ρ w badanych populacjach, obliczamy wartość z statystyki Z (4.6.4)

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{5}(n_i-3)z_i}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-3)} = \frac{126{,}8807}{130} = 0{,}976,$$

a następnie z tablicy 4 odczytujemy $r = 0{,}751$.

4.7. TESTY ISTOTNOŚCI DLA WSPÓŁCZYNNIKÓW PROSTEJ REGRESJI. WERYFIKACJA HIPOTEZ H: $\mathbf{a} = a_0$, H: $\mathbf{b} = b_0$

Dana jest populacja generalna, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanych parametrach.

Przypuśćmy, że prostą regresji cechy Y względem cechy X w tej populacji jest $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$. Z populacji tej pobrano n-elementową próbkę (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, i na jej podstawie, korzystając ze wzorów (4.4.5) i (4.4.10), wyznaczono oszacowania a i b współczynników $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

4.7.1. Test istotności dla współczynnika regresji liniowej a. Weryfikacja hipotezy H: $\mathbf{a} = a_0$. Jeżeli są spełnione podane założenia oraz hipoteza H: $\mathbf{a} = a_0$ jest prawdziwa, to statystyka

$$t = \frac{A - a_0}{S_A}, \tag{4.7.1}$$

gdzie statystyki A i S_A są określone wzorami (4.4.5) i (4.4.6), ma rozkład Studenta z $v = n-2$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki t (4.7.1) weryfikujemy hipotezę H: $\mathbf{a} = a_0$, na poziomie istotności α, przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $\mathbf{a} \neq a_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\frac{1}{2}\alpha, v)\rangle \cup \langle t(1-\frac{1}{2}\alpha, v), +\infty)$,
b) K: $\mathbf{a} > a_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle t(1-\alpha, v), +\infty)$,
c) K: $\mathbf{a} < a_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\alpha, v)\rangle$,

gdzie $t(p, v)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody, wyznaczonym z tablicy 7.

Dla wyznaczonych z próbki wartości a i s_A statystyk A (4.4.5) i S_A (4.4.6) obliczamy wartość t_d statystyki t (4.7.1). Jeżeli $t_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K na poziomie istotności α. Jeżeli $t_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

4.7.2. Test istotności dla współczynnika b prostej regresji. Weryfikacja hipotezy H: $\mathbf{b} = b_0$. Jeżeli podane na początku założenia są spełnione oraz hipoteza $H: \mathbf{b} = b_0$ jest prawdziwa, to statystyka

$$t = \frac{B - b_0}{S_B}, \tag{4.7.2}$$

– gdzie statystyki B i S_B są określone wzorami (4.4.10) i (4.4.11) – ma rozkład Studenta z $v = n - 2$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki t (4.7.2) weryfikujemy hipotezę $H: \mathbf{b} = b_0$ na poziomie istotności α, przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $\mathbf{b} \neq b_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\frac{1}{2}\alpha, v)\rangle \cup \langle t(1-\frac{1}{2}\alpha, v), +\infty)$,

b) K: $\mathbf{b} > b_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle t(1-\alpha, v), +\infty)$,

c) K: $\mathbf{b} < b_0$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\alpha, v)\rangle$,

gdzie $t(p, v)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody, wyznaczonym z tablicy 7.

Na podstawie wyznaczonych z próbki wartości b i s_B statystyk B (4.4.10) i S_B (4.4.11) obliczamy wartość t_d statystyki t (4.7.2). Jeżeli $t_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $t_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia, na poziomie istotności α.

Zadanie 4.28. Z dwuwymiarowej populacji, w której cechy (X, Y) mają rozkład zbliżony do dwuwymiarowego normalnego, o nieznanych parametrach, pobrano 75-elementową próbkę:

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1,15	–	–	–	1	1
1,20	–	–	3	3	2
1,25	–	3	3	5	2
1,30	1	5	7	8	4
1,35	2	5	8	2	–
1,40	3	2	2	–	–
1,45	3	–	–	–	–

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że prosta regresji cechy Y względem cechy X ma równanie $y = -0{,}4x + 1{,}35$.

R o z w i ą z a n i e. Aby zweryfikować postawioną hipotezę, należy zweryfikować hipotezę H: $\mathbf{a} = -0{,}4$ wobec K_1: $\mathbf{a} \neq -0{,}4$ i, w przypadku gdy nie zostanie ona odrzucona, zweryfikować hipotezę H_2: $\mathbf{b} = 1{,}35$ wobec K_2: $\mathbf{b} \neq 1{,}35$. Odrzucenie jednej z przedstawionych hipotez H_1, H_2 powoduje odrzucenie hipotezy, że prosta regresji cechy Y względem cechy X ma równanie $y = -0{,}4x + 1{,}35$. Stosujemy postępowanie opisane w p. 4.7.1 i p. 4.7.2. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tabl. 4.12.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{i.} = 0{,}3053, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{.k} = 1{,}3033,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i.} - \bar{x}^2 = \frac{1}{75} \cdot 8{,}05 - 0{,}3053^2 = 0{,}0141, \qquad s_X = 0{,}1188,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{.k} - \bar{y}^2 = \frac{1}{75} \cdot 127{,}7375 - 1{,}3033^2 = 0{,}0046, \qquad s_Y = 0{,}0676,$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{ik} - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{75} 29{,}495 - 0{,}3053 \cdot 1{,}3033 = -0{,}0046,$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X s_Y} = \frac{-0{,}0046}{0{,}1188 \cdot 0{,}0676} = -0{,}5728,$$

$$a = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_X^2} = \frac{-0{,}0046}{0{,}0141} = -0{,}3262,$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1{,}3033 + 0{,}3262 \cdot 0{,}3053 = 1{,}4029.$$

Prosta regresji cechy Y względem cechy X wyznaczona na podstawie próbki ma równanie $y = -0{,}3262x + 1{,}4029$. Stosujemy postępowanie opisane w p. 4.7.1. Na podstawie wzoru (4.4.6) wyznaczamy s_A

$$s_A^2 = \frac{s_Y^2(1-r^2)}{s_X^2(n-2)} = \frac{0{,}0046(1-0{,}5728^2)}{0{,}0141 \cdot 73} = 0{,}0030, \qquad s_A = 0{,}0548.$$

Wyznaczamy wartość t_a statystyki t (4.7.1)

$$t_a = \frac{a - a_0}{s_A} = \frac{-0{,}3262 - (-0{,}4)}{0{,}0548} = 1{,}3467.$$

Dla $v = 73$ stopni swobody i poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ z tablicy 7 wyznaczamy kwantyl $t(0{,}975,\ 73) = 1{,}9931$, a następnie zbiór krytyczny $I = (-\infty,\ -1{,}9931\rangle \cup \langle 1{,}9931,\ +\infty)$. Ponieważ $t_a = 1{,}3467 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1: $\mathbf{a} = -0{,}4$.

Możemy zatem przystąpić do weryfikacji hipotezy H_2: $\mathbf{b} = 1{,}35$ wobec K_2: $\mathbf{b} \neq 1{,}35$. Na podstawie wzoru (4.4.11) wyznaczamy s_B

$$s_B^2 = s_A^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^2 n_{i.} = 0{,}0030 \cdot \frac{1}{75} 8{,}05 = 0{,}000322, \qquad s_B = 0{,}0179,$$

Tablica 4.12

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$					$n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k^2$	$\bar{y}_k^2 n_{\cdot k}$	$\sum_i \bar{x}_i n_{ik}$	$\bar{y}_k \sum_i \bar{x}_i n_{ik}$
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5						
1,15	–	–	–	1	1	2	2,30	1,3225	2,6450	0,9	1,035
1,20	–	–	3	3	2	8	9,60	1,4400	11,5200	3,1	3,720
1,25	–	3	3	5	2	13	16,25	1,5625	20,3125	4,5	5,625
1,30	1	5	7	8	4	25	32,50	1,6900	42,2500	8,4	10,920
1,35	2	5	8	2	–	17	22,95	1,8225	30,9825	4,4	5,940
1,40	3	2	2	–	–	7	9,80	1,9600	13,7200	1,3	1,820
1,45	3	–	–	–	–	3	4,35	2,1025	6,3075	0,3	0,435
$n_{i\cdot}$	9	15	23	19	9	75	97,75		127,7375		29,495
$\bar{x}_i n_{i\cdot}$	0,9	3,0	6,9	7,6	4,5	22,9					
$\bar{x}_i^2$	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,55					
$\bar{x}_i^2 n_{i\cdot}$	0,09	0,60	2,07	3,04	2,25	8,05					

następnie wartość t_d statystyki t (4.7.2)

$$t_d = \frac{\mathbf{b} - b_0}{s_B} = \frac{1{,}4029 - 1{,}35}{0{,}0179} = 2{,}9553.$$

Ponieważ kwantyl nie zmienił się, więc i zbiór krytyczny jest taki sam jak poprzednio. Ponieważ $t_d = 2{,}9553 \in I$, więc hipotezę $H_2\colon \mathbf{b} = 1{,}35$ odrzucamy na korzyść hipotezy $K_2\colon \mathbf{b} \neq 1{,}35$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Tym samym należy odrzucić hipotezę, że w badanej populacji prosta regresji cechy Y względem cechy X ma równanie $y = -0{,}4x + 1{,}35$.

4.8. TESTY RÓWNOŚCI DLA $k\,(k \geqslant 3)$ WSPÓŁCZYNNIKÓW REGRESJI. WERYFIKACJA HIPOTEZ $H\colon \mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_k$ ORAZ $H\colon \mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_k$

Dane jest k populacji generalnych o interesujących nas cechach (X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, k$. Nieznane są współczynniki a_j i b_j prostych regresji cechy Y_j względem X_j, $j = 1, \ldots, k$. Z każdej z tych populacji pobrano n_j-elementową próbkę (x_{ji}, y_{ji}), $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, k$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$n = \sum_{1}^{k} n_j, \tag{4.8.1}$$

$$E_{X_j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}^2 - \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ji})^2, \tag{4.8.2}$$

$$E_{Y_j} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}^2 - \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ji})^2, \tag{4.8.3}$$

$$X_{X_j Y_j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji} Y_{ji} - \frac{1}{n_j} \left(\sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}\right)\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}\right), \tag{4.8.4}$$

$$E_X = \sum_{j=1}^{k} E_{X_j}, \qquad E_Y = \sum_{j=1}^{k} E_{Y_j}, \qquad E_{XY} = \sum_{j=1}^{k} E_{X_j Y_j}, \tag{4.8.5}$$

$$E = E_Y - \frac{E_{XY}^2}{E_X}, \tag{4.8.6}$$

$$E_j = E_{Y_j} - \frac{E_{X_j Y_j}^2}{E_{X_j}}, \tag{4.8.7}$$

$$E' = \sum_{j=1}^{k} E_j, \tag{4.8.8}$$

$$G_X = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}\right)^2, \tag{4.8.9}$$

$$G_Y = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}\right)^2, \tag{4.8.10}$$

$$G_{XY} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji} Y_{ji} - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji} \right) \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji} \right), \tag{4.8.11}$$

$$G = G_Y - \frac{G_{XY}^2}{G_X}. \tag{4.8.12}$$

4.8.1. Weryfikacja hipotezy H: $\mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_k$. Jeżeli hipoteza H: $\mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_k$ jest prawdziwa, to statystyka

$$F = \frac{E - E'}{E'} \frac{n - 2k}{k - 1}, \quad n > 2k, \tag{4.8.13}$$

gdzie n, E i E' są określone odpowiednio wzorami (4.8.1), (4.8.6) i (4.8.8), ma rozkład F Snedecora z $v_1 = k - 1$ i $v_2 = n - 2k$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki F (4.8.13) weryfikujemy hipotezę H: $\mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_k$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $\sim(\mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_k)$[1] na poziomie istotności α, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle F(1-\alpha, v_1, v_2), +\infty)$, gdzie $F(p, v_1, v_2)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu F Snedecora z v_1 i v_2 stopniami swobody, odczytanym z tablicy 9.

Dla danych próbek obliczamy n (4.8.1) oraz wartości statystyk E (4.8.6) i E' (4.8.8), a następnie wartość F_d statystyki F (4.8.13).

Jeżeli $F_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $F_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbek nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

Jeżeli hipoteza H: $\mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_k$ została przyjęta z jakichkolwiek względów (niekoniecznie matematycznych), to oszacowanie wspólnej wartości współczynnika regresji $\mathbf{a}$ we wszystkich populacjach można uzyskać, łącząc wszystkie próbki i stosując wzór (4.3.1), lub też ze wzoru

$$A = \frac{E_{XY}}{E_X}. \tag{4.8.14}$$

4.8.2 Weryfikacja hipotezy H: $\mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_k$. Jeżeli hipoteza o równości współczynników kierunkowych prostych regresji w badanych populacjach została przyjęta, zachodzi pytanie, czy dla wszystkich populacji można wyznaczyć wspólną prostą regresji? Aby było to możliwe, współczynniki przesunięcia prostych regresji nie mogą różnić się istotnie. Należy więc zweryfikować hipotezę H: $\mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_k$. Jeżeli hipoteza ta jest prawdziwa, to statystyka

$$F = \frac{G - E}{E} \frac{n - k - 1}{k - 1}, \tag{4.8.15}$$

gdzie n, E i G są określone odpowiednio wzorami (4.8.1), (4.8.6) i (4.8.12), ma rozkład F Snedecora z $v_1 = k - 1$ i $v_2 = n - k - 1$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki F(4.8.15) weryfikujemy zapowiedzianą hipotezę H przeciw hipotezie alternatywnej K: $\sim(\mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_k)$ na poziomie istotności α, to zbiorem krytycz-

---

[1] Symbol „$\sim$” oznacza negację.

nym jest $I = \langle F(1-\alpha, v_1, v_2), +\infty)$, gdzie $F(p, v_1, v_2)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu F Snedecora z v_1 i v_2 stopniami swobody odczytanym z tabl. 9.

Dla danych próbek obliczamy wartości statystyk E (4.8.6) i G (4.8.12), a następnie wartość F_d statystyki F (4.8.15). Jeżeli $F_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $F_d \in I$, to oznacza to, że wyniki próbek nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

Jeżeli hipoteza $H: \mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_k$, wobec braku podstaw do jej odrzucenia, została przyjęta, to można wyznaczyć równanie wspólnej prostej regresji

$$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

dla wszystkich populacji, gdzie $\bar{x}$ i $\bar{y}$ oznaczają średnie obliczone na podstawie wszystkich próbek, a zaś jest obliczone ze wzoru (4.8.14).

Zadanie 4.29. Każde z pięciu laboratoriów badających pewne populacje o cechach X i Y, jako wynik swego badania przedstawiło 20-elementową próbkę (tabl. 4.13). Na podstawie każdej z próbek wyznaczono równanie prostej regresji cechy Y względem cechy X.

Tablica 4.13

Nr pom.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Próbka I	x_{1i}	3,4	7,4	3,9	4,9	4,4	5,4	2,4	5,9	2,9	6,9	3,9	7,4	4,4	5,4	1,9	5,9	2,4	6,4	2,9	6,9
	y_{1i}	2,2	4,5	2,5	3,0	3,0	3,5	1,5	4,0	1,5	4,1	2,0	5,0	2,5	3,0	2,0	3,6	1,0	4,0	2,0	4,6
Próbka II	x_{2i}	3,0	7,0	2,5	6,5	2,0	6,0	3,5	7,5	4,0	7,5	2,5	6,0	4,5	5,5	3,0	7,0	4,0	5,0	4,5	5,5
	y_{2i}	2,0	4,5	1,0	4,0	2,0	3,5	2,0	4,5	2,0	5,0	1,5	4,0	3,0	3,5	1,5	4,0	2,5	3,0	2,5	3,0
Próbka III	x_{3i}	4,1	6,1	3,1	5,6	2,6	7,6	2,1	7,1	4,6	6,6	4,1	6,1	3,6	5,6	3,1	5,1	2,4	7,6	4,6	7,1
	y_{3i}	2,0	3,5	1,8	3,0	1,0	4,8	2,0	4,5	2,3	4,0	2,3	4,0	2,0	3,5	1,4	3,0	1,4	4,5	3,0	4,0
Próbka IV	x_{4i}	3,0	5,5	2,5	4,9	2,0	7,5	4,5	7,0	4,0	5,9	3,4	6,0	2,8	5,5	2,3	7,5	4,5	6,8	3,9	6,5
	y_{4i}	1,9	3,4	0,9	2,9	1,9	4,4	2,4	3,9	1,9	3,9	1,9	3,4	1,4	2,9	1,4	4,9	2,9	4,4	2,4	3,9
Próbka V	x_{5i}	4,2	7,0	4,7	7,5	5,0	2,8	2,5	5,5	3,2	6,0	3,6	6,5	4,2	7,2	5,5	2,5	6,0	3,0	7,5	4,6
	y_{5i}	2,1	4,1	2,6	4,6	3,1	2,1	1,1	3,6	2,1	4,1	2,1	4,1	2,6	4,6	3,1	1,6	3,6	1,6	5,1	3,1

Współczynniki regresji a_j j-tej prostej regresji wyznaczono według wzoru (4.3.1), a b_j według wzoru (4.3.2):

$$\begin{array}{ll} \text{próbka I} & y = 0{,}6287x - 0{,}0114, \\ \text{próbka II} & y = 0{,}6240x - 0{,}0764, \\ \text{próbka III} & y = 0{,}6272x - 0{,}1984, \\ \text{próbka IV} & y = 0{,}6175x - 0{,}1140, \\ \text{próbka V} & y = 0{,}6606x - 0{,}2204. \end{array}$$

Stawiamy hipotezę, że proste regresji w badanych populacjach są równoległe. Weryfikację przeprowadzić na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Rozwiązanie. Aby rozwiązać zadanie, należy zweryfikować hipotezę $H: \mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_5$ przeciw hipotezie alternatywnej $K: \sim(\mathbf{a}_1 = \ldots = \mathbf{a}_5)$ (1) na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

(1) Symbol „$\sim$" oznacza negację.

Tablica 4.14

i	Próbka I					Próbka II					Próbka III				
	x_{1i}	y_{1i}	x_{1i}^2	y_{1i}^2	$x_{1i}y_{1i}$	x_{2i}	y_{2i}	x_{2i}^2	y_{2i}^2	$x_{2i}y_{2i}$	x_{3i}	y_{3i}	x_{3i}^2	y_{3i}^2	$x_{3i}y_{3i}$
1	3,4	2,2	11,56	4,84	7,48	3,0	2,0	9,00	4,00	6,00	4,1	2,0	16,81	4,00	8,20
2	7,4	4,5	54,76	20,25	33,30	7,0	4,5	49,00	20,25	31,50	6,1	3,5	37,21	12,25	21,35
3	3,9	2,5	15,21	6,25	9,75	2,5	1,0	6,25	1,00	2,50	3,1	1,8	9,61	3,24	5,58
4	4,9	3,0	24,01	9,00	14,70	6,5	4,0	42,25	16,00	26,00	5,6	3,0	31,36	9,00	16,80
5	4,4	3,0	19,36	9,00	13,20	2,0	2,0	4,00	4,00	4,00	2,6	1,0	6,76	1,00	2,60
6	5,4	3,5	29,16	12,25	18,90	6,0	3,5	36,00	12,25	21,00	7,6	4,8	57,76	23,04	36,48
7	2,4	1,5	5,76	2,25	3,60	3,5	2,0	12,25	4,00	7,00	2,1	2,0	4,41	4,00	4,20
8	5,9	4,0	34,81	16,00	23,60	7,5	4,5	56,25	20,25	33,75	7,1	4,5	50,41	20,25	31,95
9	2,9	1,5	8,41	2,25	4,35	4,0	2,0	16,00	4,00	8,00	4,6	2,3	21,16	5,29	10,58
10	6,9	4,1	47,61	16,81	28,29	7,5	5,0	56,25	25,00	37,50	6,6	4,0	43,56	16,00	26,40
11	3,9	2,0	15,21	4,00	7,80	2,5	1,5	6,25	2,25	3,75	4,1	2,3	16,81	5,29	9,43
12	7,4	5,0	54,76	25,00	37,00	6,0	4,0	36,00	16,00	24,00	6,1	4,0	37,21	16,00	24,40
13	4,4	2,5	19,36	6,25	11,00	4,5	3,0	20,25	9,00	13,50	3,6	2,0	12,96	4,00	7,20
14	5,4	3,0	29,16	9,00	16,20	5,5	3,5	30,25	12,25	19,25	5,6	3,5	31,36	12,25	19,60
15	1,9	2,0	3,61	4,00	3,80	3,0	1,5	9,00	2,25	4,50	3,1	1,4	9,61	1,96	4,34
16	5,9	3,6	34,81	12,96	21,24	7,0	4,0	49,00	16,00	28,00	5,1	3,0	26,01	9,00	15,30
17	2,4	1,0	5,76	1,00	2,40	4,0	2,5	16,00	6,25	10,00	2,4	1,4	5,76	1,96	3,36
18	6,4	4,0	40,96	16,00	25,60	5,0	3,0	25,00	9,00	15,00	7,6	4,5	57,76	20,25	34,20
19	2,9	2,0	8,41	4,00	5,80	4,5	2,5	20,25	6,25	11,25	4,6	3,0	21,16	9,00	13,80
20	6,9	4,6	47,61	21,16	31,74	5,5	3,0	30,25	9,00	16,50	7,1	4,0	50,41	16,00	28,40
$\sum$	95,0	59,5	510,30	202,27	319,75	97,0	59,0	529,50	199,00	323,00	98,8	58,0	548,10	193,78	324,17

i	Próbka IV					Próbka V				
	x_{4i}	y_{4i}	x_{4i}^2	y_{4i}^2	$x_{4i}y_{4i}$	x_{5i}	y_{5i}	x_{5i}^2	y_{5i}^2	$x_{5i}y_{5i}$
1	3,0	1,9	9,00	3,61	5,70	4,2	2,1	17,64	4,41	8,82
2	5,5	3,4	30,25	11,56	18,70	7,0	4,1	49,00	16,81	28,70
3	2,5	0,9	6,25	0,81	2,25	4,7	2,,6	22,09	6,76	12,22
4	4,9	2,9	24,01	8,41	14,21	7,5	4,6	56,25	21,16	34,50
5	2,0	1,9	4,00	3,61	3,80	5,0	3,1	25,00	9,61	15,50
6	7,5	4,4	56,25	19,36	33,00	2,8	2,1	7,84	4,41	5,88
7	4,5	2,4	20,25	5,76	10,80	2,5	1,1	6,25	1,21	2,75
8	7,0	3,9	49,00	15,21	27,30	5,5	3,6	30,25	12,96	19,80
9	4,0	1,9	16,00	3,61	7,60	3,2	2,1	10,24	4,41	6,72
10	5,9	3,9	34,81	15,21	23,01	6,0	4,1	36,00	16,81	24,60
11	3,4	1,9	11,56	3,61	6,46	3,6	2,1	12,96	4,41	7,56
12	6,0	3,4	36,00	11,56	20,40	6,5	4,1	42,25	16,81	26,65
13	2,8	1,4	7,84	1,96	3,92	4,2	2,6	17,64	6,76	10,92
14	5,5	2,9	30,25	8,41	15,95	7,2	4,6	51,84	21,16	33,12
15	2,3	1,4	5,29	1,96	3,22	5,5	3,1	30,25	9,61	17,05
16	7,5	4,9	56,25	24,01	36,75	2,5	1,6	6,25	2,56	4,00
17	4,5	2,9	20,25	8,41	13,05	6,0	3,6	36,00	12,96	21,60
18	6,8	4,4	46,24	19,36	29,92	3,0	1,6	9,00	2,56	4,80
19	3,9	2,4	15,21	5,76	9,36	7,5	5,1	56,25	26,01	38,25
20	6,5	3,9	42,25	15,21	25,35	4,6	3,1	21,16	9,61	14,26
$\sum$	96,0	57,0	520,96	187,,40	310,75	99,0	61,0	544,16	211,00	337,70

Ze wzorów (4.8.2) – (4.8.7) dla każdej z próbek wyznaczamy wartość statystyk E_{X_j}, E_{Y_j}, $E_{X_jY_j}$, oraz E_j. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tablica 4.14.

D l a p r ó b k i I:

$$E_{X_1} = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 - \frac{1}{n_1}(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i})^2 = 510{,}30 - \tfrac{1}{20}\cdot 95^2 = 59{,}05,$$

$$E_{Y_1} = \sum_{i=1}^{n_1} y_{1i}^2 - \frac{1}{n_1}(\sum_{i=1}^{n_1} y_{1i})^2 = 202{,}27 - \tfrac{1}{20}\cdot 59{,}5^2 = 25{,}2575,$$

$$E_{X_iY_1} = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}y_{1i} - \frac{1}{n_1}\Big(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n_1} y_{1i}\Big) = 319{,}75 - \tfrac{1}{20}\cdot 95\cdot 59{,}5 = 37{,}125,$$

$$E_1 = E_{Y_1} - \frac{E_{X_1Y_1}^2}{E_X} = 25{,}2575 - \frac{37{,}125^2}{59{,}05} = 1{,}9168.$$

Podobnie dla pozostałych próbek. Wyniki obliczeń pomocniczych znajdują się w tabl. 4.15.

Tablica 4.15

Nr próbki j	E_{X_j}	E_{Y_j}	$E_{X_iY_j}$	E_j
1	59,05	25,26	37,13	1,9168
2	59,05	24,95	37,85	0,6888
3	60,03	25,58	37,65	1,9656
4	60,16	24,95	37,15	2,0091
5	54,11	24,95	35,75	1,3303
	$E_X = 292{,}40$	$E_Y = 125{,}69$	$E_{XY} = 185{,}53$	$E' = 7{,}9106$

Ze wzoru (4.8.6) wyznaczamy

$$E = E_Y - \frac{E_{XY}^2}{E_X} = 125{,}69 - \frac{185{,}53^2}{292{,}40} = 7{,}9698.$$

Znajdujemy wartość F_d statystyki F (4.8.13)

$$F_d = \frac{E-E'}{E'}\cdot\frac{n-2k}{k-1} = \frac{7{,}9698 - 7{,}9106}{7{,}9106}\cdot\frac{100-10}{4} = 0{,}1684.$$

Z tablicy 9 dla $\alpha = 0{,}05$ i $v_1 = k-1 = 4$ i $v_2 = n-2k = 90$ interpolując, znajdujemy kwantyl $F(0{,}95,\ 4{,}90) = 2{,}475$; stąd zbiór krytyczny $\boldsymbol{I} = \langle 2{,}475,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d = 0{,}1684 \notin \boldsymbol{I}$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy o równości współczynników regresji na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Zadanie 4.30. Podjęto decyzję o przyjęciu hipotezy o równości współczynników kierunkowych prostych regresji w badanych populacjach. Na podstawie danych i częściowych obliczeń z poprzedniego zadania wyznaczyć oszacowanie wspólnej wartości współczynnika kierunkowego a prostej regresji w badanych populacjach, a następnie na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ stwierdzić, czy można wyznaczyć wspólną prostą regresji dla badanych populacji.

Rozwiązanie. Oszacowanie wspólnej wartości współczynnika a wyznaczamy ze wzoru (4.8.14)

$$a = \frac{E_{XY}}{E_X} = \frac{185{,}53}{292{,}40} = 0{,}6364.$$

Aby odpowiedzieć na pytanie, czy można wyznaczyć wspólną prostą regresji cechy Y względem cechy X dla badanych pięciu populacji, należy zweryfikować hipotezę H: $\mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_5$ przeciw hipotezie K: $\sim(\mathbf{b}_1 = \ldots = \mathbf{b}_5)$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Tablica 4.16

Nr próbki j	$\sum_{i=1}^{20} x_{ji}$	$\sum_{i=1}^{20} y_{ji}$	$\sum_{i=1}^{20} x_{ji}^2$	$\sum_{i=1}^{20} y_{ji}^2$	$\sum_{i=1}^{20} x_{ji}y_{ji}$
1	95,0	59,5	510,30	202,27	319,75
2	97,0	59,0	529,50	199,00	323,00
3	98,8	58,0	548,10	193,78	324,17
4	96,0	57,0	520,96	187,40	310,75
5	99,0	61,0	544,16	211,00	337,70
$\sum$	485,8	294,5	2653,02	993,45	1615,37

Ze wzorów (4.8.9) – (4.8.11) w2yznaczamy G_X, G_Y i G_{XY}. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tablica 4.16.

$$G_X = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} x_{ji}^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} x_{ji}\Big)^2 = 2653{,}02 - \tfrac{1}{100}\cdot 485{,}8^2 = 293{,}0036,$$

$$G_Y = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} y_{ji}^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} y_{ji}\Big)^2 = 993{,}45 - \tfrac{1}{100}\cdot 294{,}5^2 = 126{,}1475,$$

$$G_{XY} = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} x_{ji}y_{ji} - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} x_{ji}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{20} y_{ji}\Big) =$$
$$= 1615{,}37 - \tfrac{1}{100}\cdot 485{,}8 \cdot 294{,}5 = 184{,}689,$$

$$G = G_Y - \frac{G_{XY}^2}{G_X} = 126{,}1475 - \frac{184{,}689^2}{293{,}0036} = 9{,}7325.$$

Wyznaczamy wartość F_d statystyki F (4.8.15)

$$F_d = \frac{G-E}{E}\cdot\frac{n-k-1}{k-1} = \frac{9{,}7325-7{,}9698}{7{,}9698}\cdot\frac{94}{4} = 5{,}1976.$$

Z tablicy 9 dla $\alpha = 0{,}05$ $v_1 = k-1 = 4$ i $v_2 = n-k-1 = 94$ interpolując zajdujemy kwantyl F (0,95, 4, 94) = 2,466, a następnie zbiór krytyczny $\boldsymbol{I} = \langle 2{,}466, +\infty)$. Ponieważ $F_d = 5{,}1976 \in \boldsymbol{I}$, więc hipotezę o równości współczynników przesunięcia prostych regresji odrzucamy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

4.9. REGRESJA KRZYWOLINIOWA

Empiryczną linią regresji cechy Y względem cechy X na podstawie próbki (x_i, y_{ij}), $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n_i$, nazywamy zbiór punktów $(x_i, \bar{y}(x_i))$, $i = 1,\ldots,n$, dla próbki zaś (y_k, x_{kl}), $k = 1,\ldots,m$, $l = 1,\ldots,m_k$, *empiryczną linią regresji cechy X względem Y* – zbiór punktów $(y_k, \bar{x}(y_k))$, $k = 1,\ldots,m$.

Linie regresji pierwszego rodzaju cechy Y względem cechy X

$$y(x) = E(Y|X = x)$$

oraz cechy X względem cechy Y

$$x(y) = E(X \mid Y = y)$$

są – w przypadku dwuwymiarowego rozkładu normalnego cech (X, Y) – liniami prostymi. Dla rozkładów dwuwymiarowych, innych niż normalny, nie są to na ogół linie proste. Do wyznaczenia linii regresji pierwszego rodzaju niezbędna jest znajomość łącznego rozkładu cech (X, Y), a tego zazwyczaj nie znamy. W takim przypadku – jako oszacowaniem na podstawie próbki – posługujemy się liniami regresji drugiego rodzaju, wyznaczonymi metodą najmniejszych kwadratów. Jeżeli w populacji badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny, to poszukujemy – w podany wcześniej sposób – prostych regresji ([1]). Jeśli wiadomo, że łączny rozkład badanych cech nie jest dwuwymiarowy normalny, to linie regresji drugiego rodzaju mogą należeć do różnych rodzin linii: hiperbol, linii wykładniczych, trygonometrycznych i wielu innych. Możemy więc jedynie z przyjętej z góry rodziny linii wyznaczyć „najlepszą" w sensie metody najmniejszych kwadratów. Nie istnieje ścisła metoda, która wskazywałaby, wśród jakiej rodziny poszukiwać interesującej nas linii regresji. Decyzję o wyborze rodziny linii eksperymentator podejmuje subiektywnie, na podstawie zarówno układu punktu diagramu korelacyjnego, jak i innych danych. Tak np. jeśli badane cechy X, Y są tego rodzaju, że przy zwiększaniu wartości cechy X wiadomo, że wartości cechy Y na ogół rosną, ale nigdy nie przekroczą pewnej wartości granicznej $Y = a$, to „najlepszej linii" nie należy szukać wśród rodziny linii prostych (mimo że taka istnieje), ale wśród takich rodzin linii krzywych, które mają asymptotę o równaniu $y = a$; takimi rodzinami linii przykładowo są:

jednoparametrowe rodziny linii

$$y = \frac{2a}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x, \qquad y = a(1 - e^{-x}), \qquad a > 0,$$

dwuparametrowe rodziny

$$y = \frac{ax}{x+b}, \quad b > 0, \qquad y = \frac{2a}{\pi}\operatorname{arc\,tg} b^2 x, \qquad y = a(1 - e^{-b^2 x}), \qquad a > 0,$$

trójparametrowe rodziny

$$y = \frac{ax^2}{x^2 + bx + c}, \qquad y = \frac{2a}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(b^2 x + c), \qquad y = a - ce^{-b^2 x}, \qquad abc \neq 0.$$

Przypuśćmy, że metodą najmniejszych kwadratów, poszukujemy linii regresji drugiego rodzaju wśród linii rodziny $y = f(x, c_1, \ldots, c_j)$, na podstawie próbki (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ $(n > j)$. Aby zadanie rozwiązać, należy tak dobrać parametry $c_1, \ldots, c_j$, by funkcja

$$F(c_1, \ldots, c_j) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, c_1, \ldots, c_j)]^2 \tag{4.9.1}$$

([1]) Proste regresji drugiego rodzaju można wyznaczyć z próbki niezależnie od rozkładu badanych cech w populacji. Jednak tylko w przypadku dwuwymiarowego rozkładu normalnego są one właściwymi oszacowaniami linii regresji pierwszego rodzaju.

osiągnęła minimum. Wartości parametrów spełniających ten warunek wyznaczamy rozwiązując tzw. *układ równań normalnych*

$$\frac{\partial F}{\partial c_m} = 0 \quad \text{dla} \quad m = 1, \ldots, j,$$

który stanowi warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji (4.9.1).

Rozwiązanie tego układu przy większej liczbie parametrów jest zazwyczaj kłopotliwe, a w wielu przypadkach uzyskanie efektywnych rozwiązań jest niemożliwe. Najlepiej skorzystać z metod elektronicznej techniki obliczeniowej, maszyny cyfrowe bowiem mają gotowe programy do przybliżonego rozwiązywania tego typu zagadnień. Rozwiązanie to można jednak uprościć w przypadku pewnych dwuparametrowych rodzin. Na przykład

$$y = A\Phi(x) + B, \qquad y = Ax^B, \qquad y = AB^x.$$

W pierwszym przypadku stosujemy przekształcenie $u = \Phi(x)$, co daje

$$y = Au + B.$$

W drugim przypadku logarytmujemy równość stronami

$$\ln y = \ln A + B \ln x, \qquad A > 0, \qquad x > 0$$

i stosujemy przekształcenie $\ln y = v$, $\ln A = A'$, $\ln x = u$, co daje

$$v = B'u + A'.$$

W ostatnim przypadku równanie logarytmujemy stronami

$$\ln y = \ln A + x \ln B, \qquad A > 0, \qquad B > 0$$

i stosujemy przekształcenie $\ln y = v$, $\ln A = A'$, $\ln B = B'$, co daje

$$v = B'x + A'.$$

W każdym przypadku należy dla nowych zmiennych zbudować tablicę korelacyjną, a następnie wyznaczyć prostą regresji, po czym można powrócić do pierwotnych oznaczeń. Należy jednak podkreślić, że wyznaczona np. w pierwszym przypadku (podobnie zresztą jak w pozostałych) linia minimalizuje sumę $\sum_i [y_i - (Au_i + B)]^2$, natomiast nie minimalizuje sumy $\sum_i \{y_i - [A\Phi(x_i) + B]\}^2$. Formalnie nie jest to więc poszukiwana linia regresji. Ponieważ jednak odchylenia od właściwego rozwiązania bywają często nieznaczne, stosujemy przedstawioną tu metodę ze względu na uproszczenie rachunków.

Czasami zdarza się, że otrzymane po przekształceniu zmienne mają dwuwymiarowy rozkład normalny lub zbliżony do niego. Można wówczas np. dla współczynników regresji wyznaczyć przedział ufności lub zweryfikować hipotezę o wartości tego współczynnika (pp. 4.4., 4.5).

Zadanie 4.31. Z populacji generalnej, w której cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład, inny niż dwuwymiarowy normalny, pobrano próbkę (x_i, y_i), $i=1,\ldots,n$. Wyznaczyć parabolę regresji stopnia drugiego.

Rozwiązanie. Z rodziny parabol stopnia drugiego $y=Ax^2+Bx+C$ należy wyznaczyć tę, która dla danej próbki minimalizuje funkcję

$$F(A, B, C)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(Ax_i^2+Bx_i+C)]^2.$$

Nieznane parametry A, B i C wyznaczymy, rozwiązując układ równań normalnych

$$\frac{\delta F}{\delta A}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial B}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial C}=0,$$

który w naszym przypadku ma postać

$$\begin{aligned}
A\sum x_i^4+B\sum x_i^3+C\sum x_i^2 &=\sum x_i^2 y_i,\\
A\sum x_i^3+B\sum x_i^2+C\sum x_i &=\sum x_i y_i,\\
A\sum x_i^2+B\sum x_i+nC &=\sum y_i.
\end{aligned}$$

Z ostatniego równania wyznaczamy

$$C=\frac{1}{n}\sum y_i-B\frac{1}{n}\sum x_i-A\frac{1}{n}\sum x_i^2$$

i podstawiamy do pozostałych równań. Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$A\left[\sum x_i^4-\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right)^2\right]+B\left[\sum x_i^3-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^2\right)\right]=\sum x_i^2 y_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right),$$

$$A\left[\sum x_i^3-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^2\right)\right]+B\left[\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right]=\sum x_i y_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right).$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\alpha=\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2, \quad \beta=\sum x_i^2 y_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right), \quad \gamma=\sum x_i^3-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^2\right),$$

$$\delta=\sum x_i y_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right), \quad \varepsilon=\sum x_i^4-\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right)^2. \tag{4.9.2}$$

Ostatni układ równań ma teraz postać

$$\varepsilon A+\gamma B=\beta,$$

$$\gamma A+\alpha B=\delta.$$

Skąd przy warunku $\alpha\varepsilon-\gamma^2\neq 0$, otrzymujemy rozwiązanie

$$A=\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha\varepsilon-\gamma^2}, \quad B=\frac{\delta\varepsilon-\beta\gamma}{\alpha\varepsilon-\gamma^2}, \quad C=\frac{1}{n}\sum y_i-B\frac{1}{n}\sum x_i-A\frac{1}{n}\sum x_i^2. \tag{4.9.3}$$

Jeżeli równanie regresji jest równaniem liniowym względem współczynników, to *model* *regresji nazywa się liniowym*, a wykładnik najwyższej potęgi zmiennej (-ych) niezależnej (-ych) występującej w modelu – *stopniem modelu*. Przykładowo

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \varepsilon$$

jest modelem regresyjnym liniowym (względem a_0, a_1, a_2) drugiego stopnia (względem X).

Niektóre modele nieliniowe jak np.

$$Y = aX_1^{\alpha} X_2^{\beta} \varepsilon, \qquad a, X_1, X_2, \varepsilon > 0$$

można przekształcić na model liniowy

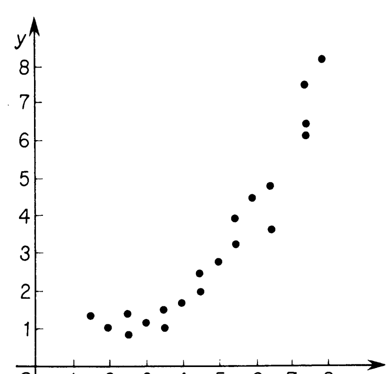
$$\log Y = \log a + \alpha \log X_1 + \beta \log X_2 + \log \varepsilon$$

(patrz również p. 4.9).

Otrzymane powyżej wzory (4.9.3) można wykorzystać przy wyznaczaniu paraboli regresji drugiego stopnia, bez potrzeby wyznaczania i rozwiązywania układu równań normalnych. Układ równań normalnych można również rozwiązać, stosując wzory Cramera.

Zadanie 4.32. Z populacji, w której cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład, inny niż dwuwymiarowy normalny, pobrano dwudziestoelementową próbkę i sporządzono diagram korelacyjny (rys. 4.9).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	5,5	3,5	6,5	4,5	5,0	7,5	5,5	4,5	1,5	4,0	6,5	8,0	6,0	2,0	2,5	7,5	7,5	3,5	2,5	3,0
y_i	3,3	1,5	3,7	2,5	2,8	6,5	4,0	2,0	1,3	1,7	4,8	8,2	4,5	1,0	0,8	7,5	6,2	1,0	1,4	1,2



Rys. 4.9. Diagram korelacyjny dla próbki z zadania 4.32

Ze względu na układ punktów diagramu korelacyjnego zadecydowano, by oszacowania linii regresji drugiego rodzaju cechy Y względem cechy X szukać metodą najmniejszych kwadratów wśród paraboli stopnia drugiego. Wyznaczyć tę parabolę.

R o z w i ą z a n i e. Z rodziny paraboli $y = Ax^2 + Bx + C$ należy wyznaczyć tę, która dla danej próbki minimalizuje funkcję

$$F(A, B, C) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (Ax_i^2 + Bx_i + C)]^2.$$

Tablica 4.17

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	5,5	3,3	30,25	166,375	915,0625	18,15	99,825
2	3,5	1,5	12,25	52,875	150,0625	5,25	18,375
3	6,5	3,7	42,25	274,625	1 785,0625	37,05	240,825
4	4,5	2,5	20,25	91,125	410,0625	11,25	50,625
5	5,0	2,8	25,00	125,000	625,0000	14,00	70,000
6	7,5	6,5	56,25	421,875	3 164,0625	48,75	365,625
7	5,5	4,0	30,25	166,375	915,0625	22,00	121,000
8	4,5	2,0	20,25	91,125	410,0625	9,00	40,500
9	1,5	1,3	2,25	3,375	5,0625	1,95	2,925
10	4,0	1,7	16,00	64,000	256,0000	6,80	27,200
11	6,5	4,8	42,25	274,625	1 785,0625	31,20	202,800
12	8,0	8,2	64,00	512,000	4 096,0000	65,60	524,800
13	6,0	4,5	36,00	216,000	1 296,0000	27,00	162,000
14	2,0	1,0	4,00	8,000	16,0000	2,00	4,000
15	2,5	0,8	6,25	15,625	39,0625	2,00	5,000
16	7,5	7,5	56,25	421,875	3 164,0625	56,25	421,875
17	7,5	6,2	56,25	421,875	3 164,0625	46,50	348,750
18	3,5	1,0	12,25	42,875	150,0625	3,50	12,250
19	2,5	1,4	6,25	15,625	39,0625	3,50	8,750
20	3,0	1,2	9,00	27,000	81,0000	3,60	10,800
$\sum$	97,0	67,9	547,50	3 402,250	22 465,8750	415,35	2 737,925

Z rozwiązania poprzedniego zadania wynika, że zachodzi to wówczas, gdy współczynniki A, B, C wyrażają się wzorami (4.9.3). W celu rozwiązania zadania wystarczy zastosować te wzory. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tablica 4.17.

Ze wzorów (4.9.2) wyznaczamy

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = 547{,}50 - \tfrac{1}{20}\cdot 97^2 = 77{,}05,$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i = 2737{,}925 - \tfrac{1}{20}\cdot 547{,}50\cdot 67{,}9 = 879{,}1625,$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \tfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3402{,}25 - \tfrac{1}{20}\cdot 547{,}5\cdot 97 = 746{,}875,$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) = 415{,}35 - \tfrac{1}{20}\cdot 97\cdot 67{,}9 = 86{,}035,$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^2 = 22465{,}875 - \tfrac{1}{20}\cdot 547{,}5^2 = 7478{,}063.$$

Stosując wzory (4.9.3), otrzymujemy

$$A = \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha\varepsilon - \gamma^2} = \frac{77{,}05\cdot 879{,}1625 - 746{,}875\cdot 86{,}035}{77{,}05\cdot 7478{,}063 - 746{,}875^2} = 0{,}1896,$$

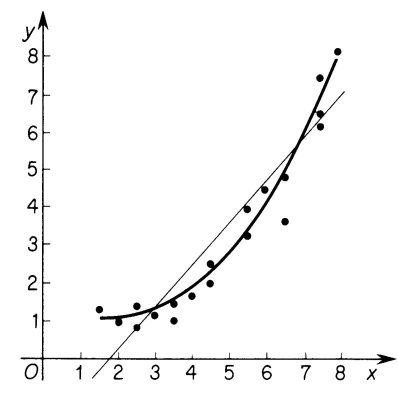
$$B = \frac{\delta\varepsilon - \beta\gamma}{\alpha\varepsilon - \gamma^2} = \frac{86{,}035 \cdot 7478{,}063 - 879{,}1625 \cdot 746{,}875}{77{,}05 \cdot 7478{,}063 - 746{,}875^2} = -0{,}7215,$$

$$C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - B\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - A\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \tfrac{1}{20}(67{,}9 + 0{,}7215 \cdot 97 - 0{,}1896 \cdot 547{,}5) = 1{,}7034.$$

Parabola regresji ma więc równanie

$$y = 0{,}1896x^2 - 0{,}7215x + 1{,}7034.$$

Rysunek 4.10 przedstawia znalezioną parabolę oraz – dla porównania – prostą regresji cechy Y względem cechy X, która dla danych zadania ma równanie $y = 1{,}1166x - 2{,}0206$.



Rys. 4.10. Parabola regresji i prosta regresji wyznaczona dla danych z zadania 4.32

ZADANIE 4.33. Z pewnej populacji, w której badamy cechy (X, Y) pobrano 50-elementową próbkę i sporządzono dla niej następującą tablicę korelacyjną:

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$						
	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
0,1	—	—	—	3	4	4	4
0,3	—	4	5	1	—	—	—
0,5	5	4	—	—	—	—	—
0,7	8	—	—	—	—	—	—
0,9	8	—	—	—	—	—	—

Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć funkcję regresji cechy Y względem cechy X postaci $y = \dfrac{A}{x} + B$.

R o z w i ą z a n i e. Dokonujemy przekształcenia $z = \dfrac{1}{x}$. Zagadnienie wyznaczenia hiperbolicznej funkcji regresji zostało sprowadzone do wyznaczenia prostej regresji $y = Az + B$ cechy Y względem cechy Z. Dla zmiennych (Z, Y) budujemy tablicę korelacyjną, a następnie stosujemy wzory (4.3.1), (4.3.2). Wyniki obliczeń pomocniczych są w tablicy 4.18.

Tablica 4.18

$\overline{y}_k$	$\overline{z}_i$							$n_{.k}$	$\overline{y}_k n_{.k}$	$\overline{y}_k^2$	$\overline{y}_k^2 n_{.k}$	$\sum_i \overline{z}_i n_{ik}$	$\overline{y}_k \sum_i \overline{z}_i n_{ik}$
	0,67	0,40	0,29	0,22	0,18	0,15	0,13						
0,1	—	—	—	3	4	4	4	15	1,5	0,01	0,15	2,50	0,250
0,3	—	4	5	1	—	—	—	10	3,0	0,09	0,90	3,27	0,981
0,5	5	4	—	—	—	—	—	9	4,5	0,25	2,25	4,95	2,475
0,7	8	—	—	—	—	—	—	8	5,6	0,49	3,92	5,36	3,752
0,9	8	—	—	—	—	—	—	8	7,2	0,81	6,48	5,36	4,824
$n_{i.}$	21	8	5	4	4	4	4	50	21,8		13,7		12,282
$\overline{z}_i n_{i.}$	14,07	3,20	1,45	0,88	0,72	0,60	0,52	21,44					
$\overline{z}_i^2$	0,4489	0,16	0,0841	0,0484	0,0324	0,0225	0,0169						
$\overline{z}_i^2 n_{i.}$	9,4269	1,28	0,4205	0,1936	0,1296	0,0900	0,0676	11,6082					

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{z}_i n_{i.} = \frac{1}{50}\cdot 21{,}44 = 0{,}4288, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{.k} = \frac{1}{50}\cdot 21{,}8 = 0{,}436,$$

$$s_Z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{z}_i^2 n_{i.} - \bar{z}^2 = \frac{1}{50}\cdot 11{,}6082 - 0{,}4288^2 = 0{,}0483, \qquad s_Z = 0{,}2198,$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^2 n_{.k} - \bar{y}^2 = \frac{1}{50}\cdot 13{,}7 - 0{,}436^2 = 0{,}0839, \qquad s_Y = 0{,}2897,$$

$$\operatorname{cov}(z, y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{z}_i n_{ik} - \bar{y}_k \sum_{i=1}^{l} \bar{z}\,\bar{y} = \frac{1}{50}\cdot 12{,}282 - 0{,}4288\cdot 0{,}436 = 0{,}0587,$$

$$a = \frac{\operatorname{cov}(z, y)}{s_Z^2} = \frac{0{,}0587}{0{,}0483} = 1{,}2153,$$

$$b = \bar{y} - a\bar{z} = 0{,}436 - 1{,}2153\cdot 0{,}4288 = -0{,}0851.$$

Równanie prostej regresji Y względem Z jest

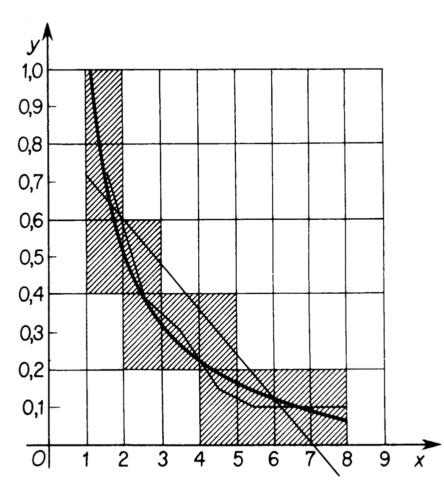
$$y = 1{,}2153z - 0{,}0851.$$

Stąd poszukiwane równanie funkcji regresji założonej postaci

$$y = \frac{1{,}2153}{x} - 0{,}0851.$$

Rysunek 4.11 przedstawia wyznaczoną linię regresji z rodziny linii $y = \dfrac{A}{x} + B$, empiryczną linię regresji oraz prostą regresji cechy Y względem cechy X, która dla danych zadania ma równanie $y = -0{,}1202x + 0{,}8326$.

Rys. 4.11. Hiperbola regresji, prosta regresji oraz empiryczna linia (łamana) regresji pierwszego rodzaju wyznaczone dla danych z zadania 4.33; zaciemnione prostokąty odpowiadają niepustym klasom tablicy korelacyjnej.



4.10. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI KRZYWOLINIOWEJ, STOSUNEK KORELACYJNY

Gdy linie regresji pierwszego rodzaju nie są prostymi, wtedy wprowadzony poprzednio współczynnik korelacji, określający stopień zależności liniowej między zmiennymi (X, Y) nie jest dobrą miarą współzależności X i Y.

Jeżeli $y=f(x)$ jest linią regresji drugiego rodzaju wyznaczoną na podstawie próbki (x_i, y_i), $i=1,\dots,n$, to wielkość

$$\varphi^2 = \frac{\sum_1^n [y_i - f(x_i)]^2}{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2} \tag{4.10.1}$$

nazywamy *współczynnikiem zgodności*, a

$$\mathscr{R} = \sqrt{1-\varphi^2} \tag{4.10.2}$$

współczynnikiem korelacji krzywoliniowej lub *wskaźnikiem korelacji*. Wykazuje się, że $0 \leqslant \varphi^2 \leqslant 1$.

Współczynnik φ^2 określa zgodność wyznaczonej linii regresji $y=f(x)$ z wartościami empirycznymi zawartymi w próbce. Zgodność jest tym lepsza, im wartość współczynnika mniejsza. Dla danych tablicy korelacyjnej współczynnik zgodności φ^2 wyraża się wzorem

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} [y_k - f(x_i)]^2 n_{ik}}{\sum_{k=1}^{m} (y_k - \bar{y})^2 n_{.k}}, \tag{4.10.3}$$

gdzie l i m oznaczają odpowiednio liczbę klas cechy X i cechy Y.

Gdy $f(x) = ax + b$, wtedy $\mathscr{R}^2 = r^2$ (zad 4.38). Współczynnik korelacji krzywoliniowej $\mathscr{R}$ jest więc uogólnieniem współczynnika korelacji liniowej r. Współczynnik $\mathscr{R}$ można obliczyć dopiero po wyznaczeniu linii regresji $y=f(x)$, co może stanowić pewną niedogodność. Wady tej nie ma wprowadzony przez K. Pearsona współczynnik określający stopień współzależności między badanymi cechami tzw. *stosunek korelacyjny*.

Stosunkiem korelacyjnym cechy Y względem cechy X, wyznaczonym na podstawie próby (X_j, Y_j), $j=1,\dots,n$, dla której sporządzono tablicę korelacyjną o środkach $(\bar{X}_j, \bar{Y}_k)$ dwuwymiarowych klas i licznościach n_{ik}, $i=1,\dots l$, $k=1,\dots,m$, $\sum_{i,k} n_{ik} = n$, nazywamy statystykę

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\sum_{i=1}^{l} [\bar{Y}(\bar{X}_i) - \bar{\bar{Y}}]^2 n_{i.}}{\sum_{k=1}^{m} (\bar{Y}_k - \bar{\bar{Y}})^2 n_{.k}}, \tag{4.10.4}$$

gdzie $\bar{Y}(\bar{X}_i)$ jest wartością przeciętną zmiennej losowej $(Y|\bar{X}_i)$. Stosunek korelacyjny

$\eta^2_{Y|X}$ można również wyrazić równoważnym wzorem (zad. 4.37)

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} [\bar{Y}_k - \bar{Y}(\bar{X}_i)]^2 n_{ik}}{\sum_{k=1}^{m} (\bar{Y}_k - \bar{Y})^2 n_{.k}}. \tag{4.10.5}$$

Podobnie określa się *stosunek korelacyjny cechy X względem cechy Y*

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{\sum_{k=1}^{m} [\bar{X}(\bar{Y}_k) - \bar{X}]^2 n_{.k}}{\sum_{i=1}^{l} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 n_{i.}} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} [\bar{X}_i - \bar{X}(\bar{Y}_k)]^2 n_{ik}}{\sum_{i=1}^{l} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 n_{i.}}. \tag{4.10.6}$$

Stosunek korelacyjny spełnia nierówności

$$0 \leqslant \eta^2_{Y|X} \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \eta^2_{X|Y} \leqslant 1 \tag{4.10.7}$$

(uzasadnienie patrz zad. 4.39).

Weźmy pod uwagę pierwszą nierówność. Ze wzoru (4.10.4) wynika, że $\eta^2_{Y|X} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{Y}(\bar{X}_i) = \bar{Y}$ dla $i = 1, \ldots, l$, tzn. gdy linią regresji cechy Y względem cechy X jest prosta o równaniu $y = \bar{Y}$. Mówimy wówczas, że cecha Y jest nieskorelowana z cechą X. Ze wzoru (4.10.5) mamy natomiast, że $\eta^2_{Y|X} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla i oraz k takich, że $n_{ik} \neq 0$ jest $\bar{Y}_k = \bar{Y}(\bar{X}_i)$. Zachodzi to wówczas, gdy dla każdego X_i cecha Y przyjmuje tylko jedną wartość. W takim przypadku między cechami X i Y w danej próbie można ustalić ścisłą zależność funkcyjną postaci $Y_i = f(X_i)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Nie oznacza to wcale, że w całej zbiorowości istnieje zależność funkcyjna postaci $Y = f(X)$ (patrz zadanie 4.34).

Między stosunkami korelacyjnymi $\eta^2_{X|Y}$ i $\eta^2_{Y|X}$, a współczynnikiem korelacji R, zachodzą relacje

$$R^2 \leqslant \eta^2_{X|Y} \quad \text{i} \quad R^2 \leqslant \eta^2_{Y|X}. \tag{4.10.8}$$

Jeżeli więc choć jeden ze stosunków korelacyjnych jest równy zeru, to $R = 0$.

Wykażemy, że nawet w przypadku zależności funkcyjnej odwracalnej, np. dla funkcji $Y = 1/X, X > 0$ – a więc wtedy, gdy zarówno $\eta^2_{Y|X} = 1$, jak i $\eta^2_{X|Y} = 1$ – współczynnik korelacji ρ może być dowolnie bliski zera. Niech rozkład prawdopodobieństwa X określa tabelka przy pewnym $k \geqslant 3$

x_i	$\frac{1}{k}$	1	k
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{(k-1)^2}$	$1 - \frac{2}{(k-1)^2}$	$\frac{1}{(k-1)^2}$

Oczywiście, że rozkład $Y = \frac{1}{X}$ jest dokładnie taki sam. Obliczmy EX, σ_X oraz cov (X, Y).

$$EX = EY = \left(\frac{1}{k} + k\right)\frac{1}{(k-1)^2} + 1\left(1 - \frac{2}{(k-1)^2}\right) = 1 + \frac{(k-1)^2}{k(k-1)^2} = 1 + \frac{1}{k},$$

$$D^2X = D^2Y = EX^2 - E^2X = \frac{1}{k^2}\frac{1}{(k-1)^2} + 1^2\left(1 - \frac{2}{(k-1)^2}\right) + k^2\frac{1}{(k-1)^2} - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = 1,$$

a stąd $\sigma_X = 1 = \sigma_Y$.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY =$$
$$= \frac{1}{k}k\frac{1}{(k-1)^2} + 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{(k-1)^2}\right) +$$
$$+ k\frac{1}{k}\frac{1}{(k-1)^2} - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = -\frac{1+2k}{k^2}.$$

Na koniec $\rho = -\frac{1+2k}{k^2}$ i przy rosnących nieograniczenie wartościach k współczynnik korelacji ρ może stać się dowolnie bliski zera. Obie proste regresji przechodzą przez punkt $(EX, EY) = \left(1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right)$ leżący na dwusiecznej kąta pierwszej ćwiartki, a położenie ich – przy $k \to \infty$ – zbliża się nieograniczenie do położenia równoległego do osi współrzędnych odpowiednio (rys. 4.5).

Przykład ten ma znaczenie raczej teoretyczne, w praktycznych bowiem zastosowaniach – przy badaniu na dwie cechy i jednakowo dokładnych pomiarach – przypadek taki: $\eta^2_{X|Y} = 1$, $\eta^2_{Y|X} = 1$ oraz ρ dowolnie bliskie zera zdarzyć się nie może.

Między stosunkami korelacyjnymi $\eta^2_{X|Y}$ i $\eta^2_{Y|X}$ nie istnieje żadna zależność, mogą się one różnić nawet krańcowo. Ilustrują to następujące zadania.

4.10.1. Zadania rozwiązane.

Zadanie 4.34. Wyznaczyć stosunek korelacyjny $\eta^2_{Y|X}$ i $\eta^2_{X|Y}$ według danych tablicy korelacyjnej

y_k	x_i		
	1	2	3
1	3	—	—
2	—	2	—
3	—	—	1
4	—	2	—
5	3	—	—

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\bar{y}(1) = \bar{y}(2) = \bar{y}(3) = \bar{y} = 3$. Zatem ze wzoru (4.10.4) wynika, że $\eta^2_{Y|X} = 0$. Ponieważ dla każdego i oraz k, dla których $n_{ik} \neq 0$ jest $\bar{x}_i = \bar{x}(y_k)$, więc na podstawie drugiego ze wzorów (4.10.6) mamy, że $\eta^2_{X|Y} = 1$.

Wynik $\eta^2_{X|Y} = 0$ oznacza, że dla rozważanych danych cecha Y jest nieskorelowana z cechą X, natomiast $\eta^2_{X|Y} = 1$ oznacza, że między cechą X i Y w próbce można ustalić zależność funkcyjną. W naszym przypadku może to być np. funkcja $x = 3 - |y - 3|$ dla $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, albo funkcja $x = \frac{1}{6}y^4 - 2y^3 + \frac{47}{6}y^2 - 11y + 6$ dla $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

ZADANIE 4.35. Na podstawie danych zadania 4.33 wyznaczyć stosunki korelacyjne $\eta^2_{Y|X}$ i $\eta^2_{X|Y}$.

R o z w i ą z a n i e. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tabl. 4.19.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i n_{i.} = \tfrac{1}{50}\cdot 165 = 3{,}3, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{k.} = \tfrac{1}{50}\cdot 21{,}8 = 0{,}436,$$

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} [\bar{y}(x_i) - \bar{y}]^2 n_{i.}}{\sum\limits_{k=1}^{m} (\bar{y}_k - \bar{y})^2 n_{.k}} = \frac{3{,}5828}{4{,}1953} = 0{,}8540,$$

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} [\bar{x}(y_k) - \bar{x}]^2 n_{.k}}{\sum\limits_{i=1}^{l} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_{i.}} = \frac{186{,}0787}{210} = 0{,}8861.$$

ZADANIE 4.36. Korzystając z danych zadania 4.32 i zadania 4.33, wyznaczyć współczynnik zgodności dla prostej regresji i wyznaczonej linii regresji cechy Y względem cechy X i porównać je.

R o z w i ą z a n i e. Aby wyznaczyć współczynniki zgodności dla danych zad. 4.32, zastosujemy wzór (4.10.1). Wprowadźmy oznaczenia

$$y' = 1{,}1166x - 2{,}0206,$$

$$\hat{y} = 0{,}1896x^2 - 0{,}7215x + 1{,}7034.$$

Wyniki obliczeń pomocniczych są zawarte w tabl. 4.20

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 3{,}395.$$

Współczynnik zgodności dla prostej regresji:

$$\varphi^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - y'(x_i)]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{9{,}4240}{107{,}289} = 0{,}0878.$$

Współczynnik zgodności dla paraboli:

$$\varphi^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}(x_i)]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{2{,}2412}{107{,}289} = 0{,}0209.$$

Jak było do przewidzenia, wyznaczona funkcja kwadratowa wykazuje większą zgodność z wynikami próbki niż prosta regresji.

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$						
	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
0,1				3	4	4	4
0,3		4	5	1			
0,5	5	4					
0,7	8						
0,9	8						
$n_{i.}$	21	8	5	4	4	4	4
$\bar{x}_i n_{i.}$	31,5	20,0	17,5	18,0	22,0	26,0	30,0
$\bar{x}_i - \bar{x}$	−1,8	−0,8	0,2	1,2	2,2	3,2	4,2
$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	3,24	0,64	0,04	1,44	4,84	10,24	17,64
$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_{i.}$	68,04	5,12	0,2	5,76	19,36	40,96	70,56
$\bar{y}(x_i)$	0,7286	0,4000	0,3000	0,1500	0,1000	0,1000	0,1000
$\bar{y}(x_i) - \bar{y}$	0,2926	−0,0360	−0,1360	−0,2860	−0,3360	−0,3360	−0,3360
$[\bar{y}(x_i) - \bar{y}]^2$	0,0856	0,0013	0,0185	0,0818	0,1129	0,1129	0,1129
$[\bar{y}(x_i) - \bar{y}]^2 n_{i.}$	1,7979	0,0104	0,0925	0,3272	0,4516	0,4516	0,4516

Wyznaczymy teraz współczynniki zgodności dla linii z zadania 4.33. Zastosujemy wzór (4.10.1).Podobnie jak poprzednio oznaczamy

$$y' = -0{,}1202x + 0{,}8326,$$

$$\hat{y} = \frac{1{,}215}{x} + 0{,}085.$$

Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tabl. 4.21.

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k n_{.k} = \tfrac{1}{50}\cdot 21{,}8 = 0{,}436,$$

$$\sum_{k=1}^{m} (\bar{y}_k - \bar{y})^2 n_{.k} = 4{,}1953.$$

Wyniki obliczeń pomocniczych sumy $\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{l} [y_k - y'(x_i)]^2 n_{ik}$ zawiera tabl. 4.22. Górna liczba w klatkach tablicy korelacyjnej oznacza n_{ik}, dolna zaś – $[y_k - y'(x_i)]^2$.

Współczynnik zgodności dla prostej regresji $y_i = -0{,}1202x + 0{,}8326$

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{l} [\bar{y}_k - y'(x_i)]^2 n_{ik}}{\sum_{k=1}^{m} (\bar{y}_k - \bar{y})^2 n_{.k}} = \frac{1{,}1435}{4{,}1953} = 0{,}2726.$$

Tablica 4.19

$n_{.k}$	$\bar{y}_k n_{.k}$	$\bar{y}_k - \bar{y}$	$(\bar{y}_k - \bar{y})^2$	$(\bar{y}_k - \bar{y})^2 n_{.k}$	$\bar{x}(y_k)$	$\bar{x}(y_k) - \bar{x}$	$[\bar{x}(y_k) - \bar{x}]^2$	$[\bar{x}(y_k) - \bar{x}]^2 n_{.k}$
15	1,5	−0,336	0,1129	1,6934	6,1000	2,8000	7,8400	117,6000
10	3,0	−0,136	0,0185	0,1850	3,2000	−0,1000	0,0100	0,1000
9	4,5	0,064	0,0041	0,0369	1,9444	−1,3556	1,8377	16,5387
8	5,6	0,264	0,0697	0,5576	1,5000	−1,8000	3,2400	25,9200
8	7,2	0,464	0,2153	1,7224	1,5000	−1,8000	3,2400	25,9200
50	21,8			4,1953				186,0787
165								
210								
3,5828								

Tablica 4.20

i	x_i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$y'(x_i)$	$y_i - y'(x_i)$	$[y_i - y'(x_i)]^2$	$\hat{y}(x_i)$	$y_i - \hat{y}(x_i)$	$[y_i - \hat{y}(x_i)]^2$
1	5,5	3,3	−0,095	0,0090	4,1207	−0,8207	0,6735	3,4706	−0,1706	0,0291
2	3,5	1,5	−1,895	3,5910	1,8875	−0,3875	0,1502	1,5008	−0,0008	0,0000
3	6,5	5,7	2,305	5,3130	5,2373	0,4627	0,2141	5,0243	0,6757	0,0457
4	4,5	2,5	−0,895	0,8010	3,0041	−0,5041	0,2541	2,2961	0,2039	0,0416
5	5,0	2,8	−0,595	0,3540	3,5624	−0,7624	0,5813	2,8359	−0,0359	0,0013
6	7,5	6,5	3,105	9,6410	6,3539	0,1461	0,0213	6,9572	−0,4572	0,2090
7	5,5	4,0	0,605	0,3660	4,1207	−0,1207	0,0146	3,4706	0,5294	0,2803
8	4,5	2,0	−1,395	1,9460	3,0041	−1,0041	1,0082	2,2961	−0,2961	0,0877
9	1,5	1,3	−2,095	4,3890	0,3457	0,9543	0,9107	1,0478	0,2522	0,0636
10	4,0	1,7	−1,695	2,8730	2,4458	−0,7458	0,5562	1,8510	−0,1510	0,0228
11	6,5	4,8	1,405	1,9740	5,2373	−0,4373	0,1912	5,0243	−0,2243	0,0503
12	8,0	8,2	4,805	23,0880	6,9122	1,2878	1,6584	8,0658	0,1342	0,0180
13	6,0	4,5	1,105	1,2210	4,6790	−0,1790	0,0320	4,2000	0,3000	0,0900
14	2,0	1,0	−2,395	5,7360	0,2126	0,7874	0,6200	1,0188	−0,0188	0,0004
15	2,5	0,8	−2,595	6,7340	0,7709	0,0291	0,0008	1,0847	−0,2847	0,0811
16	7,5	7,5	4,105	16,851	6,3539	1,1461	1,3135	6,9572	0,5428	0,2946
17	7,5	6,2	2,805	7,868	6,3539	−0,1539	0,0237	6,9572	−0,7572	0,5734
18	3,5	1,0	−2,395	5,736	1,8875	−0,8875	0,7877	1,5008	−0,5008	0,2508
19	2,5	1,4	−1,995	3,980	0,7709	0,6291	0,3958	1,0847	0,3153	0,0994
20	3,0	1,2	−2,195	4,818	1,3292	−0,1292	0,0167	1,2453	0,0453	0,0021
		67,9		107,289			9,4240			2,2412

T a b l i c a 4.21

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$											
	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	n_{ik}	$\bar{y}_k n_{\cdot k}$	$\bar{y}_k - \bar{y}$	$(\bar{y}_k - \bar{y})^2$	$(\bar{y}_k - \bar{y})^2 n_{\cdot k}$
0,1	–	–	–	3	4	4	4	15	1,5	−0,336	0,1129	1,6934
0,3	–	4	5	1	–	–	–	10	3,0	−0,136	0,0185	0,1850
0,5	5	4	–	–	–	–	–	9	4,5	0,064	0,0041	0,0369
0,7	8	–	–	–	–	–	–	8	5,6	0,264	0,0697	0,5576
0,9	8	–	–	–	–	–	–	8	7,2	0,464	0,2153	1,7224
$n_{i\cdot}$	21	8	5	4	4	4	4	50	21,8			4,1953
$y'(x_i)$	0,6523	0,5321	0,4119	0,2917	0,1715	0,0513	−0,0689					
$\hat{y}(x_i)$	0,725	0,401	0,2621	0,185	0,1359	0,1019	−0,077					

Tablica 4.22

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$							
	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	$\sum_{i=1}^{l}[\bar{y}_k-y'(x_i)]^2 n_{ik}$
0,1				3 0,0367	4 0,0005	4 0,0024	4 0,0285	0,2357
0,3		4 0,0539	5 0,0125	1 0,0001				0,2782
0,5	5 0,0232	4 0,0010						0,1200
0,7	8 0,023							0,0184
0,9	8 0,0614							0,4912
$y'(x_i)$	0,6523	0,5321	0,4119	0,2917	0,1715	0,0513	−0,0689	1,1435

Tablica 4.23

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$							
	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	$\sum_{i=1}^{l}[\bar{y}_k-\hat{y}(x_i)]^2 n_{ik}$
0,1				3 0,0072	4 0,0013	4 0	4 0,0313	0,1520
0,3		4 0,0102	5 0,0014	1 0,0132				0,0610
0,5	5 0,0506	4 0,0098						0,2922
0,7	8 0,0006							0,0048
0,9	8 0,0306							0,2448
$\hat{y}(x_i)$	0,7250	0,4010	0,2621	0,1850	0,1359	0,1019	−0,0770	0,7548

Podobnie obliczamy sumę $\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}[\bar{y}_k-\hat{y}(x_i)]^2 n_{ik}$. (Tabl. 4.23). Współczynnik zgodności dla hiperboli

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}[\bar{y}_k-\hat{y}(x_i)]^2 n_{ik}}{\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-\bar{y})^2 n_{\cdot k}} = \frac{0,7548}{4,1953} = 0,1799.$$

Wnioski z porównania obu współczynników zgodności zechce Czytelnik wysnuć samodzielnie.

ZADANIE 4.37. Wykazać równoważność obu wzorów (4.10.4) i (4.10.5) określających stosunek korelacyjny.

Rozwiązanie. W zad. 5.20, cz. I, wykazano, że w dowolnym dwuwymiarowym rozkładzie (X, Y) zachodzi równość

$$D^2 Y = E[D^2(Y|X)] + D^2[E(Y|X)]$$

przy założeniu istnienia wszystkich występujących w niej momentów.

Ostatnia równość dla tablicy korelacyjnej przy stosowanych oznaczeniach ma postać

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}(\bar{Y}_k-\bar{Y})^2 n_{.k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}[\bar{Y}_k-\bar{Y}(X_i)]^2 n_{ik} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}[\bar{Y}(X_i)-\bar{Y}]^2 n_{i.} \tag{4.10.9}$$

Po wykonaniu odejmowania po prawej stronie wzoru (4.10.5) i wykorzystaniu powyższej równości, otrzymujemy natychmiast (4.10.4).

ZADANIE 4.38. Wykazać, że jeżeli $f(x) = ax + b$ jest prostą regresji drugiego rodzaju wyznaczoną na podstawie próbki (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,n$, to kwadrat współczynnika $\mathscr{R}$ korelacji krzywoliniowej jest równy kwadratowi współczynnika r korelacji.

Rozwiązanie. Gdy $f(x) = ax + b$, wtedy licznik wzoru (4.10.1) jest wariancją resztkową (zad. 4.14), jest więc równy $s_Y^2(1-r^2)$, a mianownik jest równy wariancji s_Y^2, więc

$$\varphi^2 = 1 - r^2.$$

Ze wzoru (4.10.2) wynika natychmiast, że $\mathscr{R}^2 = r^2$.

ZADANIE 4.39. Uzasadnić obie nierówności (4.10.7) dotyczące stosunków korelacyjnych.

Rozwiązanie. Dzieląc obustronnie (4.10.9) z odpowiednią zmianą oznaczeń przez s_Y^2, otrzymujemy, uwzględniając (4.10.4),

$$1 = \frac{1}{s_Y^2 n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 n_{ik} + \eta_{Y|X}^2.$$

Ponieważ pierwszy składnik prawej strony jest nieujemny, więc otrzymujemy pierwszą z nierówności (4.10.7), dowód drugiej jest analogiczny.

4.11. TEST ISTOTNOŚCI DLA STOSUNKU KORELACYJNEGO

Badane cechy (X, Y) populacji generalnej mają pewien dwuwymiarowy rozkład o nieznanych *stosunkach korelacyjnych*

$$H_{Y|X}^2 = \frac{E[E(Y|X)-E(Y)]^2}{D^2 Y}, \qquad H_{X|Y}^2 = \frac{E[E(X|Y)-E(X)]^2}{D^2 X}.$$

Z populacji tej pobrano n-elementową próbkę i sporządzono dla niej tablicę korelacyjną o l klasach dla cechy X i m klasach dla cechy Y.

4.11.1. Weryfikacja hipotezy H: $H^2_{Y|X}=0$. Jeżeli są spełnione podane wyżej założenia i hipoteza H: $H^2_{Y|X}=0$ jest prawdziwa, to statystyka

$$F=\frac{\eta^2_{Y|X}}{1-\eta^2_{Y|X}}\,\frac{n-1}{l-1}, \tag{4.11.1}$$

gdzie statystyka $\eta^2_{Y|X}$ jest określona wzorem (4.10.4), ma rozkład F Snedecora z $\nu_1=l-1$ i $\nu_2=n-l$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki F(4.11.1) weryfikujemy hipotezę H: $H^2_{Y|X}=0$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $H^2_{Y|X}\neq 0$ na poziomie istotności α, to zbiorem krytycznym jest przedział $I=\langle F(1-\alpha,\ \nu_1,\ \nu_2),\ +\infty)$, gdzie $F(p,\ \nu_1,\ \nu_2)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu F Snedecora z ν_1 i ν_2 stopniami swobody, odczytanym z tablicy 9.

Na podstawie próbki wyznaczamy wartość statystyki $\eta^2_{Y|X}$ (4.10.4), a następnie wartość F_d statystyki F(4.11.1)(1). Jeżeli $F_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $F_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak jest podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

4.11.2. Weryfikacja hipotezy H: $H^2_{X|Y}=0$. Jeżeli są spełnione założenia podane na początku i hipoteza H: $H^2_{X|Y}=0$ jest prawdziwa, to statystyka

$$F=\frac{\eta^2_{X|Y}}{1-\eta^2_{X|Y}}\,\frac{n-m}{m-1}, \tag{4.11.2}$$

gdzie statystyka $\eta^2_{X|Y}$ określona jest wzorem (4.10.6), ma rozkład F Snedecora z $\nu_1=m-1$ i $\nu_2=n-m$ stopniami swobody.

Weryfikację hipotezy H: $H^2_{X|Y}=0$ przeciw hipotezie K: $H^2_{X|Y}\neq 0$, na poziomie istotności α, za pomocą statystyki F(4.11.2) przeprowadza się identycznie jak w p. 4.11.1.

Zadanie 4.40. Z populacji, o której wiadomo, że badane cechy $(X,\ Y)$ mają rozkład zbliżony do dwuwymiarowego normalnego pobrano $n=50$-elementową próbkę i sporządzono dla niej tablicę korelacyjną o $l=7$ klasach dla cechy X i $m=5$ klasach na cechy Y. Dalej wyznaczono stosunki korelacyjne $\eta^2_{Y|X}=0{,}1535$ i $\eta^2_{X|Y}=0{,}1313$. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę o braku korelacji między badanymi cechami.

R o z w i ą z a n i e. I. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ należy zweryfikować hipotezę H: $H^2_{Y|X}=0$ przeciw hipotezie K: $H^2_{Y|X}\neq 0$. Wyznaczamy wartość F_d statystyki F(4.11.1):

$$F_d=\frac{\eta^2_{Y|X}}{1-\eta^2_{Y|X}}\,\frac{n-l}{l-1}=\frac{0{,}1535}{0{,}8465}\,\frac{43}{6}=1{,}2996.$$

Z tablicy 9 dla poziomu istotności $\alpha=0{,}05$ i $\nu_1=l-1=6$, $\nu_2=n-l=43$ stopni swobody interpolując, wyznaczamy kwantyl $F(0{,}95,\ 6,\ 43)=2{,}33$, a następnie zbiór krytyczny

(1) Gdyby okazało się, że wyznaczona wartość statystyki F(4.11.1) jest mniejsza od jedności, za F_d należy przyjąć odwrotność obliczonej wartości statystyki F(4.11.1), przy jednoczesnym przestawieniu stopni swobody.

$I = \langle 2{,}33, +\infty)$. Ponieważ $F_d = 1{,}2996 \notin I$, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o braku korelacji między badanymi cechami na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

II. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ należy zweryfikować hipotezę H: $H^2_{X|Y} = 0$ przeciw hipotezie K: $H^2_{X|Y} \neq 0$. Znajdujemy wartość F_d statystyki F(4.11.2)

$$F_d = \frac{\eta^2_{X|Y}}{1-\eta^2_{X|Y}} \frac{n-m}{m-1} = \frac{0{,}1313}{0{,}8687} \frac{45}{4} = 1{,}7004.$$

Podobnie jak poprzednio z tablicy 9 dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ i $v_1 = m-1$, $v_2 = n-m = 45$ stopni swobody wyznaczamy kwantyl $F(0{,}95, 4, 45) = 2{,}59$, a następnie zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}59, +\infty)$. Ponieważ $F_d = 1{,}7004 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

4.12. TEST LINIOWOŚCI REGRESJI. WERYFIKACJA HIPOTEZY H: $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$ PRZECIW HIPOTEZIE K: $H^2_{Y|X} - \rho^2 \neq 0$

Dowodzi się, że równość $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy linia regresji pierwszego rodzaju cechy Y względem cechy X jest linią prostą. Jako wskaźnik odchylenia regresji Y względem X od liniowości można więc przyjąć różnicę $H^2_{Y|X} - \rho^2$. Jeżeli różnica ta jest bliska zera, to regresja pierwszego rodzaju Y względem X jest w przybliżeniu prostoliniowa. Jeżeli rozkład (X, Y) jest nieznany, stosunek korelacyjny i współczynnik korelacji szacuje się z próby. Różnica $\eta^2_{Y|X} - R^2$ jest zmienną losową. Powstaje pytanie: czy zaobserwowana na podstawie próby realizacja tej zmiennej losowej jest spowodowana losowością próby, czy też regresja Y względem X w badanej populacji nie jest prostoliniowa?

Niech dana będzie populacja generalna, w której badane cechy (X, Y) mają pewien dwuwymiarowy rozkład, o nieznanym współczynniku korelacji ρ i nieznanym stosunku korelacyjnym $H^2_{Y|X}$. Z populacji tej pobrano n-elementową próbkę i sporządzono dla niej tablicę korelacyjną o l klasach dla cechy X i m klasach dla cechy Y. Wysuwamy hipotezę H: $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$. Jeżeli są spełnione podane założenia i hipoteza H jest prawdziwa, to statystyka

$$F = \frac{\eta^2_{Y|X} - R^2}{1-\eta^2_{Y|X}} \frac{n-l}{l-2}, \tag{4.12.1}$$

gdzie $\eta^2_{Y|X}$ i R są określone wzorami (4.10.4) i (4.2.1), ma rozkład F Snedecora z $v_1 = l-2$ i $v_2 = n-l$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki F(4.12.1) weryfikujemy hipotezę H: $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$ przeciw hipotezie alternatywnej K: $H^2_{Y|X} - \rho^2 \neq 0$, na poziomie istotności α, to zbiorem krytycznym jest przedział $I \langle F(1-\alpha, v_1, v_2), +\infty)$, gdzie $F(p, v_1, v_2)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu F Snedecora z v_1 i v_2 stopniami swobody, wyznaczonym z tablicy 9.

Dla danej próbki wyznaczamy wartości statystyk $\eta^2_{Y|X}$ (4.10.4) i R (4.2.1), a następnie wartość F_d statystyki F (4.12.1). Jeżeli $F_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K na poziomie istotności α. Jeżeli $F_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na przyjętym poziomie istotności.

Zadanie 4.41. Z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają rozkład zbliżony do dwuwymiarowego normalnego, pobrano próbkę o liczności $n = 50$ i sporządzono dla niej tablicę korelacyjną o $l = 7$ klasach dla cechy X i $m = 5$ klasach dla cechy Y.

Obliczono następnie $\eta^2_{Y|X} = 0{,}67$ i $r = 0{,}75$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, na podstawie danych z próbki zweryfikować hipotezę, że w badanej populacji regresja Y względem X jest prostoliniowa.

R o z w i ą z a n i e. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ weryfikujemy hipotezę H: $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$ przeciw hipotezie K: $H^2_{Y|X} - \rho^2 \neq 0$. Wyznaczamy wartość F_d statystyki F (4.12.1)

$$F_d = \frac{0{,}67 - 0{,}75^2}{1 - 0{,}67} \, \frac{50 - 7}{7 - 2} = 2{,}80.$$

Z tablicy 9 dla $\alpha = 0{,}05$ i stopni swobody $v_1 = l - 2 = 5$, $v_2 = n - l = 43$ wyznaczamy kwantyl $F(0{,}95,\ 5,\ 43) = 2{,}48$, a następnie zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}48,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d = 2{,}80 \in I$, więc należy odrzucić hipotezę H na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Zadanie 4.42. Z próbki o liczności $n = 320$, przy liczbie klas $l = 7$ dla cechy X oraz $m = 9$ dla cechy Y, obliczono: $r = 0{,}230$, $\eta_{Y|X} = 0{,}252$, $\eta_{X|Y} = 0{,}279$. Na podstawie danych z próbki, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezy o prostoliniowości regresji: a) Y względem X oraz b) X względem Y w populacji, z której pobrano próbkę.

R o z w i ą z a n i e. a) Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ weryfikujemy hipotezę H: $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$ przeciw hipotezie K: $H^2_{Y|X} - \rho^2 \neq 0$. Wyznaczamy wartość F_d statystyki F(4.12.1)

$$F_d = \frac{0{,}252^2 - 0{,}230^2}{1 - 0{,}252^2} \, \frac{320 - 7}{7 - 2} = \frac{3{,}32}{4{,}68} = 0{,}7088 < 1.$$

Ponieważ obliczona wartość jest mniejsza od 1, więc jako F_d należy przyjąć odwrotność otrzymanej liczby, czyli $F_d = 1{,}4107$, przy jednoczesnej zmiane kolejności liczby stopni swobody na $v_1 = n - l = 320 - 7 = 313$, $v_2 = l - 2 = 7 - 2 = 5$. Z tablicy 9 wyznaczamy kwantyl $F(0{,}95,\ 313,\ 5) = 2{,}24$, a następnie zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}24,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d = 1{,}4107 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy o prostoliniowej regresji Y względem X, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

b) Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ weryfikujemy hipotezę H: $H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$ przeciw hipotezie K: $H^2_{Y|X} - \rho^2 \neq 0$. Wprowadzając odpowiednią zmianę oznaczeń, wyznaczamy wartość F_d statystyki F (4.12.1)

$$F_d = \frac{0{,}279^2 - 0{,}230^2}{1 - 0{,}279^2} \, \frac{320 - 9}{9 - 2} = 1{,}202.$$

Z tablicy 9 wyznaczamy kwantyl $F\,(0{,}95,\ 7,\ 311) = 3{,}25$, a następne zbiór krytyczny $I = \langle 3{,}25,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d = 1{,}202 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy o prostoliniowej regresji X względem Y na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

4.13. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI CZĄSTKOWEJ I WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI WIELORAKIEJ

4.13.1 Wyjaśnienia wstępne. Niech dany będzie rozkład k-wymiarowej zmiennej losowej $(X_1, \ldots, X_k)$ ciągłej albo skokowej. Dla każdej pary zmiennych losowych (X_i, X_j), $i,j=1, \ldots, k$, przy założeniu istnienia i skończoności wszystkich momentów drugiego rzędu można wyznaczyć ze wzoru (str. 151) współczynnik korelacji ρ_{ij}. Otrzymamy w ten sposób k^2 liczb takich, że $\rho_{ij}=1$ dla $i=j$ oraz $\rho_{ij}=\rho_{ji}$ dla $i \neq j$. Wyznaczone współczynniki są elementami tzw. *macierzy korelacyjnej*

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1k} \\ & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2k} \\ & & 1 & \cdots & \rho_{3k} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.13.1}$$

Jest to macierz symetryczna, zakładamy, że nieosobliwa. W rozkładach k-wymiarowych $(k>2)$, ρ_{ij} nazywamy *współczynnikiem korelacji zupełnej* (*całkowitej*) zmiennych losowych X_i i X_j Współczynnik ten nie eliminuje wpływu pozostałych zmiennych losowych na współzależność między X_i i X_j. Dlatego też wprowadza się tzw. *współczynnik korelacji cząstkowej* (*częściowej*) pozbawiony tej wady (dokładniej o tym po zad. 4.46)

$$\rho_{ij.1\ldots(i-1)(i+1)\ldots(j-1)(j+1)\ldots k}=\frac{-C_{ij}}{(C_{ii}C_{jj})^{1/2}}, \tag{4.13.2}$$

gdzie C_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu ρ_{ij} wyznacznika C macierzy (4.13.1).

Używa się również współczynników korelacji cząstkowej w stosunku do mniejszej od k liczby t zmiennych losowych; wówczas rzędem współczynnika korelacji cząstkowej nazywamy *liczbę wskaźników następujących po kropce*. Tak więc najwyższy rząd może wynosić $t-2$ (wzór (4.13.2)), przy $t=2$ rząd jest równy zeru i te właśnie współczynniki korelacji ρ_{ij} nazywamy – w odróżnieniu do cząstkowych – *współczynnikami korelacji zupełnej* (*całkowitej*).

ZADANIE 4.43. Dana jest macierz korelacyjna $\mathbf{C}$ trójwymiarowej zmiennej losowej (X_1, X_2, X_3), wyznaczyć współczynniki korelacji cząstkowej.

Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem (4.13.1) macierz korelacyjna $\mathbf{C}$ jest postaci

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć współczynniki korelacji cząstkowej stosujemy wzór (4.13.2)

$$\rho_{12.3}=\frac{-C_{12}}{(C_{11}C_{22})^{1/2}}=\frac{-(-1)^3\begin{vmatrix} \rho_{12} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & 1 \end{vmatrix}}{\left(\begin{vmatrix} 1 & \rho_{23} \\ \rho_{23} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \rho_{13} \\ \rho_{13} & 1 \end{vmatrix}\right)^{1/2}}=\frac{\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}},$$

$$\rho_{13.2} = \frac{-C_{13}}{(C_{11}C_{33})^{1/2}} = \frac{-(-1)^4 \begin{vmatrix} \rho_{12} & 1 \\ \rho_{13} & \rho_{23} \end{vmatrix}}{\left(\begin{vmatrix} 1 & \rho_{23} \\ \rho_{23} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{vmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{23}^2)}}, \tag{4.13.3}$$

$$\rho_{23.1} = \frac{-C_{23}}{(C_{22}C_{33})^{1/2}} = \frac{-(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{13} & \rho_{23} \end{vmatrix}}{\left(\begin{vmatrix} 1 & \rho_{13} \\ \rho_{13} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{vmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2)}}.$$

Zadanie 4.44. Z trzeciego ze wzorów (4.13.3) wyznaczyć granice zmienności dla współczynnika korelacji ρ_{23}, traktując ρ_{12} i ρ_{13} jako znane.

R o z w i ą z a n i e. Ze związku $|\rho_{23.1}| \leqslant 1$ otrzymujemy poszukiwane granice

$$\rho_{12}\rho_{13} - \sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2)} \leqslant \rho_{23} \leqslant \rho_{12}\rho_{13} + \sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2)}. \tag{4.13.4}$$

Interesujące konsekwencje w następnym zadaniu.

Zadanie 4.45. Czy współczynniki korelacji zupełnej ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23} mogą być: a) wszystkie trzy równe 1, b) dwa równe 1, a trzeci równy -1, c) jeden równy 1, a dwa pozostałe równe -1, d) wszystkie trzy równe -1?

R o z w i ą z a n i e I (bez korzystania ze wzoru (4.13.4)). Jeżeli $|\rho_{12}| = |\rho_{23}| = 1$, a zmienne losowe oznaczymy przez X, Y, Z, to – jak wiadomo (cz. I, p. 5.3) – z prawdopodobieństwem równym 1 zachodzą równości

$$Y = aX + b, \quad a \neq 0,$$
$$Y = cZ + d, \quad c \neq 0,$$

przy czym sgn a = sgn ρ_{12}, sgn c = sgn ρ_{23}. Z obu równań wynika, że

$$X = \frac{c}{a}Z + \frac{d-b}{a}.$$

Jeśli więc a i c są tego samego znaku, tzn. $\rho_{12} = 1 = \rho_{23}$. albo $\rho_{12} = -1 = \rho_{23}$, to $c/a > 0$, więc $\rho_{13} = 1$, a jeśli a i c są przeciwnego znaku, to $\rho_{13} = -1$ i jeden z pozostałych współczynników korelacji jest równy 1, a drugi – 1. Tak więc możliwe są tylko takie przypadki: wszystkie trzy są równe $+1$, dwa są równe -1, trzeci $+1$.

R o z w i ą z a n i e II. We wszystkich przypadkach korzystać z nierówności (4.13.4) w ostatnim zadaniu: a) tak, b) nie, c) tak, d) nie.

Zadanie 4.46. Zbadano wzajemny wpływ trzech różnych cech X_1, X_2, X_3 w pewnej populacji, przy czym okazało się, że zarówno X_1 i X_2 jak X_3 i X_1 są nieskorelowane. Co można wnioskować o współczynniku korelacji zupełnej ρ_{23} między X_2 i X_3?

R o z w i ą z a n i e. Z założenia $\rho_{12} = 0$, $\rho_{13} = 0$. Na podstawie granic ustalonych w zadaniu 4.44 otrzymujemy $-1 \leqslant \rho_{23} \leqslant 1$. Zatem współczynnik ten może być zupełnie dowolny, a więc żadnych dodatkowych informacji dane nie dostarczyły.

Istotne jest rozróżnienie znaczeń współczynników korelacji zupełnej i cząstkowej. Wyjaśnimy to na przykładzie trzech cech X_1, X_2, X_3. Współczynnik korelacji cząstkowej $\rho_{12.3}$, który określa się jako miarę współzależności (mówi się również: liniowej zależności) między X_1 i X_2 po wyeliminowaniu wpływu X_3, w przypadku łącznego niezdegenerowanego rozkładu trójwymiarowego normalnego zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 wyraża się wzorem (4.13.3).

Ponieważ w zagadnieniach praktycznych najczęściej nie wiemy, czy łączny rozkład X_1, X_2, X_3 jest normalny, więc wzór (4.13.3) służy za definicję współczynnika korelacji cząstkowej $\rho_{12.3}$ i dlatego nie możemy twierdzić, że w każdym przypadku wpływ X_3 został wyeliminowany. Próbka w tym przypadku składa się z trójek (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}), $i=1,\ldots,n$ i po obliczeniu r_{12}, r_{13}, r_{23} wyznacza się $r_{12.3}$. Otóż współczynnik korelacji cząstkowej $r_{12.3}$ z próbki nie jest oszacowaniem współczynnika korelacji między X_1, X_2 ani po wyeliminowaniu X_3 (bo wszystkie wartości x_{3i}, $i=1,\ldots,n$ były wykorzystane w obliczeniach), ani też – przy ustalonej wartości X_3; natomiast jest – wobec tego, że wartości $x_{3i},\ldots,x_{3n}$ są na ogół różne – jakby uśrednioną wartością różnych wartości $r_{12.3}$, jakie można by otrzymywać zachowując wartości pierwszych dwóch zmiennych i zmieniając w pewnym zakresie wartości trzeciej zmiennej.

Współzależność pomiędzy jedną z k zmiennych losowych, np. X_i, a zespołem pozostałych zmiennych, wyraża *współczynnik korelacji wielorakiej* (*wielokrotnej*, *wielowymiarowej*) określony wzorem

$$R_{i[12\ldots(i-1)(i+1)\ldots]} = \sqrt{1-\frac{C}{C_{ii}}}, \tag{4.13.5}$$

gdzie C jest wyznacznikiem macierzy korelacyjnej $\mathbf{C}$, C_{ii} zaś dopełnieniem algebraicznym elementu ρ_{ii} wyznacznika C. Współczynnik korelacji wielorakiej można również przedstawić w innej postaci równoważnej poprzedniej, a mianowicie

$$R_{i[12\ldots(i-1)(i+1)\ldots k]} = \\ = \sqrt{1-(1-\rho_{i1}^2)(1-\rho_{i2.1}^2)\ldots(1-\rho_{i\,i-1.12\ldots(i-2)}^2)(1-\rho_{i\,i+1.12\ldots(i-1)}^2)\ldots(1-\rho_{ik.12\ldots,(i-1)(i+1)\ldots(k-1)}^2)} \tag{4.13.6}$$

W przypadku trzech zmiennych losowych współczynniki korelacji wielorakiej wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} R_{1(23)} &= \sqrt{1-(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13.2}^2)}, \\ R_{2(13)} &= \sqrt{1-(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{23.1}^2)}, \\ R_{3(12)} &= \sqrt{1-(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23.1}^2)}. \end{aligned} \tag{4.13.7}$$

Dla każdego $i=1,\ldots,k$ zachodzi oczywista nierówność

$$0 \leqslant R_{i[1\ldots(i-1)(i+1)\ldots k]} \leqslant 1.$$

Współczynnik korelacji wielorakiej pomiędzy zmienną losową X_i, $i=1,\ldots,k$, a zespołem $l \leqslant k-1$ zmiennych np. $X_{j1},\ldots,X_{jl}$ o wszystkich wskaźnikach różnych między sobą i różnych od i, określamy wzorem

$$R_{i(j_1\ldots j_l)} = \sqrt{1-(1-\rho_{ij_1}^2)(1-\rho_{ij_2.j_1}^2)(1-\rho_{ij_3.j_1j_2}^2)(1-\rho_{ij_l.j_1\ldots j_{l-1}}^2)}.$$

Przypadek $l=1$ prowadzi do równości

$$R_{i(j)}=\sqrt{1-(1-\rho_{ij}^2)}=|\rho_{ij}|=|\rho_{ji}|=R_{j(i)}, \tag{4.13.8}$$

z której wynika, że współczynnik korelacji wielorakiej pomiędzy dwiema różnymi zmiennymi $X_i \neq X_j$ spośród $k>2$ zmiennych jest równy bezwzględnej wartości współczynnika korelacji zupełnej ρ_{ij} między tymi zmiennymi.

Ze wzoru (4.13.6) na współczynnik korelacji wielorakiej łatwo wynika nierówność, w której – dla uproszczenia zapisu – jako pierwszy wkaźnik przyjmiemy 1

$$|\rho_{1j.u}| \leqslant R_{1(2...k)}. \tag{4.13.9}$$

$\rho_{1j.u}$ oznacza dowolny współczynnik korelacji cząstkowej o pierwszym wskaźniku równym 1, u oznacza tutaj dowolny zbiór wskaźników (sensownych). Wynika stąd natychmiast że:

Jeżeli jakiś współczynnik korelacji wielorakiej R_i jest równy zeru, to wszystkie współczynniki korelacji cząstkowej o tym samym pierwszym wskaźniku i są również równe zeru, tzn. że zmienna X_i jest nieskorelowana z żadną z pozostałych zmiennych.

Jeżeli zaś $R_{1(2...k)}=1$, to

1) *– jak wynika ze wzoru* (4.13.6) *– co najmniej jeden ze współczynników korelacji cząstkowej $\rho_{1j.u}$ musi mieć wartość bezwzględną równą* 1;

2) *X_1 jest liniową funkcją pozostałych zmiennych $X_2,\ldots,X_k$.*

Na koniec porównanie wszystkich współczynników korelacji wielorakiej o tym samym pierwszym wskaźniku i różnych dalszych wskaźnikach – nazywanych odpowiednio *współczynnikami korelacji wielorakiej rzędu pierwszego* ,..., ($k-1$)*-go* – ujmuje nierówność (przykładowo przyjęto pierwszy wskaźnik równy 1)

$$R_{1(2)} \leqslant R_{1(23)} \leqslant R_{1(234)} \leqslant \ldots \leqslant R_{1(23...k)}.$$

Wyraża ona, że przez dołączenie do zbioru zmiennych, wśród których bada się współzależność ze zmienną X_1 innych zmiennych, nie można osiągnąć zmniejszenia współczynnika korelacji wielorakiej $R_{1(2)}$.

4.13.2. Szacowanie współczynników korelacji z próbki. Jeżeli rozkład zmiennej losowej $(X_1,\ldots,X_k)$ jest nieznany – a tak zazwyczaj jest w praktyce – parametry szacuje się na podstawie próbki. *Oszacowanie r_{ij} współczynnika korelacji zupełnej ρ_{ij} zmiennych losowych X_i i X_j*, z próbki dla $i,j=1,\ldots,k$, $i \neq j$ wyznacza się ze wzoru

$$r_{ij}=\frac{\operatorname{cov}(x_i,\, x_j)}{s_i s_j} \tag{4.13.10}$$

analogicznego do wzoru (4.2.3).

Aby wyznaczyć oszacowania współczynników korelacji cząstkowej w przypadku $k \geqslant 3$ zmiennych losowych, znajdujemy najpierw macierz korelacyjną na podstawie wyników próbki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ & & & \dots\dots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.13.11}$$

Oszacowanie z próbki współczynnika korelacji cząstkowej rzędu k – 2 zmiennych losowych X_i i X_j względem wszystkich pozostałych zmiennych wyraża się wzorem

$$r_{ij.1\dots(i-1)(i+1)\dots(j-1)(j+1)\dots k} = \frac{-A_{ij}}{(A_{ii}A_{jj})^{1/2}}, \tag{4.13.12}$$

gdzie A_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu r_{ij} wyznacznika A macierzy **A** (4.13.11).

W przypadku trzech zmiennych losowych, oszacowania z próbki współczynników korelacji cząstkowej wyrażają się wzorami

$$r_{12.3} = \frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}, \quad r_{13.2} = \frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}, \quad r_{23.1} = \frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}, \tag{4.13.13}$$

gdzie r_{ij} określa wzór (4.13.10).

Oszacowanie współczynnika koleracji wielorakiej na podstawie próbki wyznacza się ze wzoru

$$\mathscr{R}_{i[1\dots(i-1)(i+1)\dots k]} = \sqrt{1-\frac{A}{A_{ii}}}, \tag{4.13.14}$$

gdzie A_{ii} jest dopełnieniem algebraicznym elementu r_{ii} wyznacznika A macierzy **A** (4.13.11), lub też z równoważnego wzoru

$$\mathscr{R}_{i[1\dots(i-1)(i+1)\dots k]} =$$
$$= \sqrt{1-(1-r_{i1}^2)(1-r_{i2.1}^2)\dots(1-r_{i(i-1)1\dots(i-2)}^2)(1-r_{i(i+1).1\dots(i-1)}^2)\dots(1-r_{ik.1\dots(i-1)(i+1)\dots(k-1)}^2)}, \tag{4.13.15}$$

gdzie r_{i1} określa wzór (4.13.10), pozostałe zaś współczynniki wzór (4.13.12).

W przypadku trzech zmiennych losowych oszacowania z próbki współczynników korelacji wielorakiej wyrażają się wzorami

$$\mathscr{R}_{1(23)} = \sqrt{1-(1-r_{12}^2)(1-r_{13.2}^2)}, \quad \mathscr{R}_{2(13)} = \sqrt{1-(1-r_{12}^2)(1-r_{23.1}^2)},$$
$$\mathscr{R}_{3(12)} = \sqrt{1-(1-r_{13}^2)(1-r_{23.1}^2)}. \tag{4.13.16}$$

Zadanie 4.47. W wylosowanych siedmiu rodzinach o różnych wysokościach rocznych dochodów na członka rodziny, zbadano wysokość wydatków w pewnym okresie na przetwory zbożowe (X_1), ziemniaki (X_2) i tłuszcze zwierzęce (X_3). Wyniki umieszczono w tablicy 4.24. Wyznaczyć oszacowania współczynników: koleracji zupełnej, korelacji cząstkowej i korelacji wielorakiej.

Tablica 4.24

	1	2	3	4	5	6	7
X_1	658	696	701	705	736	777	754
X_2	251	222	214	212	199	196	170
X_3	155	209	192	162	149	138	117

R o z w i ą z a n i e. W celu rozwiązania zadania wyznaczymy kolejno, $\bar{x}_i$, s_i^2, s_i dla $i=1$, 2, 3, $\operatorname{cov}(x_i, x_j)$, a następnie według wzorów (4.13.10), (4.13.13), (4.13.16) nieznane współczynniki. Wyniki obliczeń pomocniczych zawiera tabl. 4.25.

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \tfrac{1}{7}\cdot 5027 = 718{,}1429, \qquad \bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \tfrac{1}{7}\cdot 1464 = 209{,}1429,$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{3i} = \tfrac{1}{7}\cdot 1122 = 160{,}2857,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 - \bar{x}_1^2 = \tfrac{1}{7}\cdot 3619747 - 718{,}1429^2 = 1377{,}56, \qquad s_1 = 37{,}1155,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 - \bar{x}_2^2 = \tfrac{1}{7}\cdot 309942 - 209{,}1429^2 = 536{,}697, \qquad s_2 = 23{,}1667,$$

$$s_3^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2 - \bar{x}_3^2 = \tfrac{1}{7}\cdot 185748 - 160{,}2857^2 = 843{,}91, \qquad s_3 = 29{,}0503,$$

$$\operatorname{cov}(x_1, x_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} - \bar{x}_1\bar{x}_2 = \tfrac{1}{7}\cdot 1046080 - 718{,}1429\cdot 209{,}1429 = -754{,}48,$$

$$\operatorname{cov}(x_1, x_3) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{3i} - \bar{x}_1\bar{x}_3 = \tfrac{1}{7}\cdot 801364 - 718{,}1429\cdot 160{,}2857 = -627{,}46,$$

$$\operatorname{cov}(x_2, x_3) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i} - \bar{x}_2\bar{x}_3 = \tfrac{1}{7}\cdot 237324 - 209{,}1429\cdot 160{,}2857 = 380{,}812.$$

Tablica 4.25

	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{1i}^2	x_{2i}^2	x_{3i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}x_{3i}$	$x_{2i}x_{3i}$
1	658	251	155	432 964	63 001	24 025	165 158	101 990	38 905
2	696	222	209	484 416	49 284	43 681	154 512	145 464	46 398
3	701	214	192	491 401	45 796	36 864	150 014	134 592	41 088
4	705	212	162	497 025	44 944	26 244	149 460	114 210	34 344
5	736	199	149	541 696	39 601	22 201	146 464	109 664	29 651
6	777	196	138	603 729	38 416	19 044	152 292	107 226	27 048
7	754	170	117	568 516	28 900	13 689	128 180	88 218	19 890
$\sum$	5 027	1 464	1 122	3 619 747	309 942	185 748	1 046 080	801 364	237 324

Współczynniki korelacji zupełnej obliczamy według wzoru (4.13.10):

$$r_{12}=\frac{\operatorname{cov}(x_1,\ x_2)}{s_1 s_2}=\frac{-754{,}48}{37{,}1155\cdot 23{,}1667}=-0{,}8775,$$

$$r_{13}=\frac{\operatorname{cov}(x_1,\ x_3)}{s_1 s_3}=\frac{-627{,}46}{37{,}1155\cdot 29{,}0503}=-0{,}5819,$$

$$r_{23}=\frac{\operatorname{cov}(x_2,\ x_3)}{s_2 s_3}=\frac{380{,}812}{23{,}1667\cdot 29{,}0503}=0{,}5658.$$

Współczynniki korelacji cząstkowej obliczamy według wzorów (4.13.13):

$$r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}=\frac{-0{,}8775+0{,}5819\cdot 0{,}5658}{\sqrt{(1-0{,}5819^2)(1-0{,}5658^2)}}=-0{,}8176,$$

$$r_{13.2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}=\frac{-0{,}5819+0{,}8775\cdot 0{,}5658}{\sqrt{(1-0{,}8775^2)(1-0{,}5658^2)}}=-0{,}2160,$$

$$r_{23.1}=\frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}=\frac{0{,}5658-0{,}8775\cdot 0{,}5819}{\sqrt{(1-0{,}8775^2)(1-0{,}5819^2)}}=0{,}1415.$$

Współczynniki korelacji wielorakiej wyznaczymy ze wzorów (4.13.16):

$$\mathscr{R}_{1(23)}=\sqrt{1-(1-r_{12}^2)(1-r_{13.2}^2)}=\sqrt{1-(1-0{,}8775^2)(1-0{,}216^2)}=0{,}8836,$$

$$\mathscr{R}_{2(13)}=\sqrt{1-(1-r_{12}^2)(1-r_{23.1}^2)}=\sqrt{1-(1-0{,}8775^2)(1-1415^2)}=0{,}8801,$$

$$\mathscr{R}_{3(12)}=\sqrt{1-(1-r_{13}^2)(1-r_{23.1}^2)}=\sqrt{1-(1-0{,}5819^2)(1-0{,}1415^2)}=0{,}5932.$$

Porównajmy otrzymane wyniki

Współczynniki korelacji zupełnej	Współczynniki korelacji cząstkowej
$r_{12}=-0{,}8775$	$r_{12.3}=-0{,}8176$
$r_{13}=-0{,}5819$	$r_{13.2}=-0{,}2160$
$r_{23}=\ 0{,}5658$	$r_{23.1}=\ 0{,}1415$

Największe różnice występują między współczynnikami r_{13} i $r_{13.2}$ oraz r_{23} i $r_{23.1}$. Można zauważyć, że współzależność między wydatkami na przetwory zbożowe i tłuszcze zwierzęce przed wyeliminowaniem wpływu wydatków na ziemniaki znacznie zmalała, gdy z rozważań usunięto wpływ wydatków na ziemniaki (oczywiście chodzi o to, że $|r_{13}|>|r_{13.2}|$; dokładniej o tym patrz tekst po zad. 4.46). Jeszcze drastyczniej zmienia się współczynnik korelacji między wydatkami na ziemniaki i tłuszcze zwierzęce, po wyeliminowaniu wpływu wydatków na przetwory zbożowe. Porównując współczynniki korelacji wielorakiej widać, że wydatki na przetwory zbożowe oraz wydatki na ziemniaki są silnie związane z wydatkami na pozostałe artykuły, z którymi o wiele słabiej są skorelowane wydatki na tłuszcze zwierzęce.

Identyczny wniosek można wysunąć z porównania współczynników korelacji cząstkowej $r_{13.2}$ i $r_{23.1}$.

4.14. REGRESJA W PRZYPADKU $k \geq 3$ ZMIENNYCH

Dla rozkładów k-wymiarowych rozpatruje się zagadnienie *regresji jednej ze zmiennych losowych względem pozostałych*. Podobnie jak w przypadku dwóch zmiennych losowych funkcję regresji pierwszego rodzaju określa warunkowa wartość przeciętna.

Funkcją regresji pierwszego rodzaju zmiennej losowej X_i względem pozostałych zmiennych losowych jest funkcja

$$x_i = E(X_i | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_k = x_k),$$

której obrazem jest zbiór punktów przestrzeni k-wymiarowej (w przypadku rozkładu ciągłego jest to pewna hiperpowierzchnia).

Hiperpłaszczyzną regresji drugiego rodzaju zmiennej losowej X_i względem pozostałych zmiennych losowych nazywamy hiperpłaszczyznę

$$X_i = a_{i0} + a_{i1} X_1 + \dots + a_{i(i-1)} X_{i-1} + a_{i(i+1)} X_{i+1} + \dots + a_{ik} X_k \tag{4.14.1}$$

taką, że wartość przeciętna $E\{[X_i - \varphi(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k)]^2\}$, (gdzie φ jest funkcją liniową swoich argumentów) osiąga minimum, gdy

$$\varphi(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k) =$$
$$= a_{i0} + a_{i1} X_1 + \dots + a_{i(i-1)} X_{i-1} + a_{i(i+1)} X_{i+1} + \dots + a_{ik} X_k.$$

Współczynniki a_{ij} nazywamy *współczynnikami regresji X_i względem X_j*.

W większości praktycznych zagadnień nie znamy rozkładu wielowymiarowego badanych cech $X_1, \dots, X_k$. Ponieważ jedyną informacją są dla nas wyniki pobranej próby $(X_{1i}, \dots, X_{ki})$, $i = 1, \dots, n$, więc oszacowania A_{ij} współczynników regresji a_{ij} wyznacza się z próby metodą najmniejszych kwadratów.

Zadanie 4.48. Z populacji generalnej, w której zmienna losowa (X_1, X_2, X_3) ma pewien nieznany rozkład, pobrano n-elementową próbę (X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}), $i = 1, \dots, n$. Stosując metodę najmniejszych kwadratów, wyznaczyć na podstawie pobranej próby równanie płaszczyzny regresji X_1 względem pozostałych zmiennych.

R o z w i ą z a n i e. Niech poszukiwana płaszczyzna ma równanie

$$x_1 = A_{10} + A_{12} x_2 + A_{13} x_3.$$

Współczynniki A_{10}, A_{12} i A_{13} należy tak dobrać, aby dla danej próby, funkcja

$$F(A_{10}, A_{12}, A_{13}) = \sum_{i=1}^{n} [X_{1i} - (A_{10} + A_{12} X_{2i} + A_{13} X_{3i})]^2 \tag{4.13.2}$$

osiągała minimum. W tym celu należy rozwiązać układ równań normalnych

$$\frac{\partial F}{\partial A_{10}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_{12}} = 0, \quad \frac{\partial F}{A_{13}} = 0.$$

Zajmiemy się najpierw pierwszym z równań. W warunkach zadania jest ono następujące:

$$\sum_{i=1}^{n} [X_{1i}-(A_{10}+A_{12}X_{2i}+A_{13}X_{3i})] = 0.$$

Po przekształceniu mamy

$$\bar{X}_1 = A_{10}+A_{12}\bar{X}_2+A_{13}\bar{X}_3, \tag{4.14.3}$$

co oznacza, że poszukiwana płaszczyzna regresji przechodzi przez punkt $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$. Wyznaczając z (4.14.3) A_{10} i podstawiając do (4.14.2), otrzymujemy sumę (4.14.2) już jako funkcję dwóch zmiennych

$$F_1(A_{12}, A_{13}) = \sum_{i=1}^{n} \{(X_{1i}-\bar{X}_1)-[A_{12}(X_{2i}-\bar{X}_2)+A_{13}(X_{3i}-\bar{X}_3)]\}^2.$$

Tworzymy nowy układ równań normalnych

$$\frac{\partial F_1}{\partial A_{12}}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F_1}{\partial A_{13}}=0.$$

Jest on następujący:

$$\sum_{i=1}^{n} \{(X_{1i}-\bar{X}_1)-[A_{12}(X_{2i}-\bar{X}_2)+A_{13}(X_{3i}-\bar{X}_3)]\}(X_{2i}-\bar{X}_2)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{(X_{1i}-\bar{X}_1)-[A_{12}(X_{2i}-\bar{X}_2)+A_{13}(X_{3i}-\bar{X}_3)]\}(X_{3i}-\bar{X}_3)=0.$$

Po drobnych przekształceniach dostajemy

$$\begin{cases} S_2^2 A_{12}+\operatorname{cov}(X_2, X_3)A_{13} = \operatorname{cov}(X_1, X_2), \\ \operatorname{cov}(X_2, X_3)A_{12}+S_3^2 A_{13} = \operatorname{cov}(X_1, X_3). \end{cases}$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy wyznacznik współczynników przy niewiadomych A_{12} i A_{13} jest różny od zera, czyli gdy

$$\begin{vmatrix} S_2^2 & \operatorname{cov}(X_2, X_3) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_3) & S_3^2 \end{vmatrix} = S_2^2 S_3^2 - \operatorname{cov}^2(X_2, X_3) = S_2^2 S_3^2(1-R_{23}^2) \neq 0.$$

Zachodzi to wówczas, gdy rozkłady brzegowe X_2 i X_3 nie są jednopunktowe, a także gdy X_2 i X_3 nie są liniowo skorelowane. Stosując dalej np. wzory Cramera, otrzymujemy

$$A_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \operatorname{cov}(X_2, X_3) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_3) & S_3^2 \end{vmatrix}}{S_2^2 S_3^2(1-R_{23}^2)} = \frac{R_{12}-R_{13}R_{23}}{1-R_{23}^2}\cdot\frac{S_1}{S_2}, \tag{4.14.4}$$

$$A_{13} = \frac{\begin{vmatrix} S_2^2 & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_3) & \operatorname{cov}(X_1, X_3) \end{vmatrix}}{S_2^2 S_3^2(1-R_{23}^2)} = \frac{R_{13}-R_{12}R_{23}}{1-R_{23}^2}\cdot\frac{S_1}{S_3}.$$

Poszukiwane równanie płaszczyzny regresji zmiennej losowej X_1 względem pozostałych zmiennych na podstawie próby jest więc następujące:

$$x_1 - \bar{X}_1 = A_{12}(x_2 - \bar{X}_2) + A_{13}(x_3 - \bar{X}_3), \tag{4.14.5}$$

gdzie A_{12} i A_{13} są określone wzorami (4.14.4).

ZADANIE 4.49. Korzystając z danych i częściowych obliczeń zadania 4.47 oraz ze wzorów wyprowadzonych w poprzednim zadaniu, wyznaczyć równania płaszczyzn regresji każdej ze zmiennych losowych względem pozostałych.

Rozwiązanie. Każda z poszukiwanych płaszczyzn regresji przechodzi przez punkt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, gdzie $\bar{x}_1 = 718{,}1429$, $\bar{x}_2 = 209{,}1429$, $\bar{x}_3 = 160{,}2857$.

Aby wyznaczyć oszacowania z próbki współczynników regresji X_1 względem X_2 i X_1 względem X_3, według wzorów (4.14.4), obliczamy wartości a_{12} statystyki A_{12} i a_{13} statystyki A_{13}:

$$a_{12} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \cdot \frac{s_1}{s_2} = \frac{-0{,}8775 + 0{,}5819 \cdot 0{,}5658}{1 - 0{,}5658^2} \cdot \frac{37{,}1155}{23{,}1667} = -1{,}2920,$$

$$a_{13} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \cdot \frac{s_1}{s_3} = \frac{-0{,}5819 + 0{,}8775 \cdot 0{,}5658}{1 - 0{,}5658^2} \cdot \frac{37{,}1155}{29{,}0503} = -0{,}1605.$$

Na podstawie wzoru (4.14.5) otrzymujemy

$$x_1 - 718{,}1429 = -1{,}2920(x_2 - 209{,}1429) - 0{,}1605(x_3 - 160{,}2857).$$

Po uporządkowaniu mamy

$$x_1 = -1{,}2920x_2 - 0{,}1605x_3 + 1014{,}0813.$$

Podobnie wyznaczamy pozostałe dwa równania płaszczyzn regresji: cechy X_2 względem X_1 i X_3

$$a_{21} = \frac{r_{21} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2} \cdot \frac{s_2}{s_1} = \frac{-0{,}8775 + 0{,}5819 \cdot 0{,}5658}{1 - 0{,}5819^2} \cdot \frac{23{,}1667}{37{,}1155} = -0{,}5174,$$

$$a_{23} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{1 - r_{13}^2} \cdot \frac{s_2}{s_3} = \frac{0{,}5658 - 0{,}8775 \cdot 0{,}5819}{1 - 0{,}5819^2} \cdot \frac{23{,}1667}{29{,}0503} = 0{,}0665,$$

$$x_2 = -0{,}5174x_1 + 0{,}0665x_3 + 570{,}0510$$

oraz cechy X_3 względem X_1 i X_2

$$a_{31} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{12}^2} \cdot \frac{s_3}{s_1} = \frac{-0{,}5819 + 0{,}8775 \cdot 0{,}5658}{1 - 0{,}8775^2} \cdot \frac{29{,}0503}{37{,}1155} = -0{,}2907,$$

$$a_{32} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{1 - r_{12}^2} \cdot \frac{s_3}{s_2} = \frac{0{,}5658 - 0{,}8775 \cdot 0{,}5819}{1 - 0{,}8775^2} \cdot \frac{29{,}0503}{23{,}1667} = 0{,}3009,$$

$$x_3 = -0{,}2907x_1 + 0{,}3009x_2 + 306{,}1188.$$

4.15. ZMODYFIKOWANE ZAGADNIENIE REGRESJI WIELORAKIEJ. PRZEDZIAŁY UFNOŚCI I TESTY ISTOTNOŚCI DLA WSPÓŁCZYNNIKÓW REGRESJI WIELORAKIEJ

4.15.1. Model liniowy pierwszego stopnia. Dana jest populacja generalna, w której badamy $k+1$ cech mierzalnych. Jedną wyróżnioną cechę Y nazywamy *zmienną zależną*, pozostałe zaś $X_1, \ldots, X_k$ – *zmiennymi niezależnymi.* Zmienna zależna Y (w naukach ekonomicznych nazywana *zmienną objaśnianą*) jest zmienną losową, natomiast zmienne niezależne $X_1, \ldots, X_k$ (zwane również *zmiennymi objaśniającymi*) nie są zmiennymi losowymi i traktowane są jak parametry. Dla uproszczenia rozważań zakładamy, że zależność między Y a $X_1, \ldots, X_k$ jest liniowa postaci

$$Y = a_1 X_1 + \ldots + a_k X_k + a_{k+1} + \varepsilon, \tag{4.15.1}$$

gdzie ε jest składnikiem losowym o rozkładzie $N(0, \sigma)$ (¹), współczynniki a_i zaś, $i = 1, \ldots$ $\ldots, k$ – zwane *współczynnikami regresji* – są nieznane. Współczynniki a_i należy oszacować na podstawie próbki.

Przedstawione tu zagadnienie jest modyfikacją omawianego wcześniej zagadnienia regresji wielorakiej. Zauważmy, że jeżeli X_i, $i = 1, \ldots, k$ są parametrami, to

$$E(Y) = a_1 X_1 + \ldots + a_k X_k + a_{k+1}.$$

Funkcja ta jest identyczna co do postaci, ale oczywiście nie pod względem treści z funkcją regresji pierwszego rodzaju Y względem $X_1, \ldots, X_k$, gdy $X_1, \ldots, X_k$ są zmiennymi losowymi.

Współczynniki regresji wielorakiej a_i, $i = 1, \ldots, k+1$, szacuje się metodą najmniejszych kwadratów. Przy określonych wartościach $x_{1i}, \ldots, x_{ki}$, $i = 1, \ldots, n$, wyznaczamy odpowiadające wartości y_i, a następnie poszukujemy minimum sumy $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$, tj. minimum funkcji

$$F(A_1, \ldots, A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (A_1 x_{1i} + \ldots + A_k x_{ki} + A_{k+1})]^2.$$

Rozwiązując układ równań normalnych $\dfrac{\partial F}{\partial A_i} = 0$, $i = 1, \ldots, k+1$, wyznaczamy estymatory A_i parametrów a_i, $i = 1, \ldots, k+1$.

Jak widać przedstawione tu postępowanie pod względem rachunkowym jest takie samo jak w przypadku, gdy wszystkie $(k+1)$ zmiennych traktujemy jako zmienne losowe i wyznaczamy hiperpłaszczyznę regresji Y względem $X_1, \ldots, X_k$.

Omawiane zagadnienie można również przedstawić w zapisie macierzowym. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \ldots x_{k1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} \ldots x_{k2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & x_{2n} \ldots x_{kn} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \tag{4.15.2}$$

(¹) Najczęściej przyjmuje się, że błąd losowy pomiaru ma rozkład $N(0, \sigma)$.

Zakładamy przy tym, że macierz $\mathbf{X}$ o wymiarach $n \times (k+1)$ ma rząd $r(\mathbf{X}) = k+1 \leqslant n$. Zakładamy również, że dla $m = 1, 2, \ldots, n$, ε_m ma rozkład $N(0, \sigma)$ oraz że zmienne losowe ε_l i ε_m dla l, $m = 1, 2, \ldots, n$ i $l \neq m$ są nieskorelowane, czyli $E(\varepsilon_l \varepsilon_m) = 0$.

Z założenia, że X_i, $i = 1, \ldots, k$, są parametrami oraz ze wzoru (4.15.1) wynika, że dla każdego $m = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi równość

$$y_m = a_1 x_{1m} + a_2 x_{2m} + \ldots + a_k x_{km} + a_{k+1} + \varepsilon_m.$$

Układ tych n równości można przedstawić za pomocą równania macierzowego:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Model tej postaci nazywamy *modelem liniowym pierwszego stopnia.*

Dowodzi się, że w opisanym modelu nieobciążonym estymatorem macierzy kolumnowej współczynników regresji wielorakiej $\mathbf{a}$, uzyskanym z próbki metodą najmniejszych kwadratów, jest macierz kolumnowa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k+1} \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} \tag{4.15.3}$$

($\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ oznacza macierz transponowaną macierzy $\mathbf{M}$, a $\mathbf{M}^{-1}$ – macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{M}$).

Nieobciążoność oznacza tu, że dla $i = 1, \ldots, k+1$ jest $E(A_i) = a_i$.

Macierz kowariancji estymatora $\mathbf{A}$ wyraża się wzorem:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{A}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}. \tag{4.15.4}$$

Nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2 składnika losowego jest statystyka S^2, której wartość na podstawie próbki oblicza się ze wzoru

$$s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - y_i')^2}{n-k-1} = \frac{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}}{n-k-1}, \tag{4.15.5}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{A}. \tag{4.15.6}$$

Oszacowanie wariancji S_{Ai}^2 estymatora A_i współczynika a_i otrzymujemy ze wzoru

$$S_{A_i}^2 = S^2 c_{ii}, \tag{4.15.7}$$

gdzie c_{ii} jest i-tym elementem diagonalnym macierzy $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$.

Współczynnik korelacji wielorakiej Y względem pozostałych zmiennych $X_1, \ldots, X_k$ (gdy $X_1, \ldots, X_k$ są zmiennymi losowymi) na podstawie próbki oblicza się według wzoru (4.13.14) lub równoważnych mu wzorów

$$\mathscr{R} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{1}^{n} (y_i - y_i')^2}{\sum_{1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}, \tag{4.15.8}$$

$$\mathscr{R} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{A}^T\mathbf{X}^T\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \frac{1}{n}(\mathbf{1}^T\mathbf{Y})^2}}, \tag{4.15.9}$$

gdzie y_i' określa wzór (4.15.6), $\mathbf{1}^T$ zaś jest macierzą – wierszem o n elementach, wszystkich równych 1.

4.15.2 Przedziały ufności dla współczynników regresji wielorakiej. Jeżeli spełnione są założenia dotyczące rozpatrywanego modelu, to statystyka

$$t = \frac{A_i - a_i}{S_{A_i}} \tag{4.15.10}$$

– gdzie statystyki A_i i S_{Ai} określone są odpowiednio wzorami (4.15.3) i (4.15.7) – dla każdego $i = 1, \ldots, k+1$ ma rozkład Studenta z $v = n-k-1$ stopniami swobody.

Na podstawie danej próbki $(y_m, x_{1m}, \ldots, x_{km})$, $m = 1, \ldots, n$, *granice przedziału ufności dla współczynnika regresji wielorakiej* a_i, na poziomie ufności $1-\alpha$, wyznacza się ze wzoru

$$A_i - t(1 - \tfrac{1}{2}\alpha, v)\, s_{Ai} < a_i < A_i + t(1 - \tfrac{1}{2}\alpha, v)\, s_{Ai}, \tag{4.15.11}$$

$$\text{dla } i = 1, \ldots, k+1,$$

gdzie A_i oblicza się z próbki według wzoru (4.15.3), s_{A_i} jest obliczoną z próbki wartością statystyki S_{A_i} (4.15.7), $t(p, v)$ zaś – kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody wyznaczonym z tablicy 7.

4.15.3. Test istotności dla współczynników regresji wielorakiej. Weryfikacja hipotezy H: $a_i = a_i^*$. Jeżeli założenia dotyczące rozpatrywanego modelu są spełnione i hipoteza H: $a_i = a_i^*$ jest prawdziwa, to statystyka

$$t = \frac{A_i - a_i^*}{S_{Ai}}, \tag{4.15.12}$$

– gdzie statystyki A_i i S_{Ai} określone są odpowiednio wzorami (4.15.3) i (4.15.7) – dla każdego $i = 1, \ldots, k$ ma rozkład Studenta z $v = n-k-1$ stopniami swobody.

Jeżeli za pomocą statystyki t (4.15.12) weryfikujemy hipotezę H: $a_i = a_i^*$ na poziomie istotności α, przeciw hipotezie alternatywnej

a) K: $a_i \neq a_i^*$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\frac{1}{2}\alpha, v)\rangle \cup \langle t(1-\frac{1}{2}\alpha, v), +\infty)$,

b) K: $a_i > a_i^*$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle t(1-\alpha, v), +\infty)$,

c) K: $a_i < a_i^*$, to zbiorem krytycznym jest $I = (-\infty, -t(1-\alpha, v)\rangle$, gdzie $t(p, v)$ jest kwantylem rzędu p rozkładu Studenta z v stopniami swobody wyznaczonym z tablicy 7.

Na podstawie próbki wyznaczamy wartość t_d statystyki t (4.15.12). Jeżeli wartość $t_d \in I$, to hipotezę H odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej K, na poziomie istotności α. Jeżeli $t_d \notin I$, to oznacza to, że wyniki próbki nie przeczą hipotezie H, a więc brak podstaw do jej odrzucenia na poziomie istotności α.

ZADANIE 4.50. Zbadano wpływ trzech różnych domieszek X_1, X_2 i X_3 na twardość Y stopu. Wyniki w tablicy: 1 – oznacza zastosowanie domieszki, 0 – jej brak.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_1	0	1	0	0	1	1	0	1
X_2	0	0	1	0	1	0	1	1
X_3	0	0	0	1	0	1	1	1
Y	1	2	6	2	7	3	3	2

Wyznaczyć równanie hiperpłaszczyzny regresji cechy Y względem X_1, X_2, X_3, a następnie na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ wyznaczyć granice przedziałów ufności dla współczynników regresji wielorakiej.

R o z w i ą z a n i e. W celu rozwiązania zadania zastosujemy wzór (4.15.3): $\mathbf{A}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{Y}$. W naszym przypadku mamy

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}1\\2\\6\\2\\7\\3\\3\\2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

Obliczmy najpierw

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&2&4\\2&4&2&4\\2&2&4&4\\4&4&4&8\end{bmatrix}.^{(1)}$$

(1) W przypadku dużej liczby obserwacji wyznaczanie iloczynu macierzy $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ jest bardzo żmudne. Można wykazać, że macierz $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ jest macierzą współczynników przy niewiadomych A_i układu równań normalnych, o którym mowa na str. 224. W przypadku trzech zmiennych niezależnych mamy

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{3i}\\ \sum_{i=1}^{n}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{3i}\\ \sum_{i=1}^{n}x_{3i} & \sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{3i} & \sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{3i} & \sum_{i=1}^{n}x_{3i}^2\\ n & \sum_{i=1}^{n}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n}x_{3i}\end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik macierzy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

$$\det(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = \det\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} = 64,$$

a następnie wyznaczamy macierz odwrotną do $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dalej obliczamy

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Możemy teraz zastosować wzór (4.15.3)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}.$$

Poszukiwana hiperpłaszczyzna regresji ma więc równanie

$$y = 0{,}5x_1 + 2{,}5x_2 - 1{,}5x_3 + 2{,}5.$$

Ze wzoru (4.15.5) wyznaczymy teraz s^2. Obliczymy najpierw

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} = [1\ 2\ 6\ 2\ 7\ 3\ 3\ 2]\ [1\ 2\ 6\ 2\ 7\ 3\ 3\ 2]^T = 116,$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{Y}) = [0{,}5\ \ 2{,}5\ \ -1{,}5\ \ 2{,}5]\ [14\ 18\ 10\ 26]^T = 102.$$

Zatem

$$s^2 = \frac{\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{A}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{Y})}{n-k-1} = \frac{116-102}{8-3-1} = 3{,}5.$$

Ze wzoru (4.15.7) wyznaczamy s_{Ai}^2. Ponieważ w macierzy $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ wszystkie elementy diagonalne c_{ii} są równe 0,5, więc

$$s_{A_i}^2 = s^2 c_{ii} = 3{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}75, \qquad s_{A_i} = 1{,}3229 \qquad \text{dla} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Z tablicy 7 dla poziomu ufności $1-\alpha = 0{,}95$ i $v = n-k-1 = 4$ stopni swobody odczytujemy kwantyl $t(0{,}975,\ 4) = 2{,}776$.

Stosując dla każdego ze współczynników wzór (4.15.11), otrzymujemy poszukiwane realizacje przedziałów ufności na podstawie danych

$$0{,}5-2{,}776\cdot 1{,}3229<a_1<0{,}5+2{,}776\cdot 1{,}3229,$$
$$-3{,}1724<a_1<4{,}1724,$$
$$-1{,}1724<a_2<6{,}1724,$$
$$-5{,}1724<a_3<2{,}1724,$$
$$-1{,}1724<a_4<6{,}1724.$$

Zadanie 4.51. Na podstawie danych z zadania 4.50 i częściowych obliczeń zawartych w jego rozwiązaniu, wyznaczyć oszacowanie współczynnika korelacji wielorakiej oraz na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$ zweryfikować:

hipotezę $H_1: a_1=0$ przeciw $K_2: a_1\neq 0$,
hipotezę $H_2: a_2=0$ przeciw $K_2: a_2>0$,
hipotezę $H_3: a_3=0$ przeciw $K_2: a_3<0$.

Rozwiązanie. W celu wyznaczenia współczynnika korelacji wielorakiej zastosujemy wzór (4.15.9)

$$\mathscr{R}=\sqrt{1-\frac{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}-\frac{1}{n}(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y})^2}}.$$

Z rozwiązania zadania 4.50 mamy $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=116$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=102$. Należy jeszcze obliczyć

$$\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}=[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]\ [1\ 2\ 6\ 2\ 7\ 3\ 3\ 2]^{\mathrm{T}}=26.$$

Mamy więc

$$\mathscr{R}=\sqrt{1-\frac{116-102}{116-\frac{1}{8}26^2}}=0{,}7554.$$

Przejdźmy teraz do drugiej części zadania.

1. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$ weryfikujemy hipoteę H: $a_1=0$ przeciw hipotezie K: $a_1\neq 0$. Z tablicy 7, przy $\alpha=0{,}1$ i $v=n-k-1=4$, wyznaczamy kwantyl $t(1-\frac{1}{2}\alpha,\ v)=$ $=t(0{,}95,\ 4)=2{,}132$, a następnie zbiór krytyczny $I=(-\infty,\ -2{,}132\rangle\cup\langle 2{,}132,\ +\infty)$. Obliczamy z próbki wartość t_d statystyki t(4.15.12), $t_d=\dfrac{0{,}5-0}{1{,}75}=0{,}2857$. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1 na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$.

Weryfikacja pozostałych hipotez przebiega dokładnie w ten sam sposób, dlatego też ograniczymy się jedynie do podania wartości liczbowych i wniosku końcowego.

2. Weryfikujemy $H_2: a_2=0$ przeciw $K_2: a_2>0$; poziom istotności $\alpha=0{,}1$. Statystyka testowa t(4.15.12); kwantyl $t(1-\alpha,\ v)=t(0{,}9,\ 4)=1{,}533$, zbiór krytyczny $I=\langle 1{,}533,\ +\infty)$. Obliczona z próbki wartość t_d statystyki t(4.15.12), $t_d=1{,}4286\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_2 na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$.

3. Weryfikujemy H_3: $a_3=0$ przeciw K_3: $a_3<0$; poziom istotności $\alpha=0{,}1$. Statystyka testowa t(4.15.12); kwantyl $t(1-\alpha, v)=t(0{,}9, 4)=1{,}533$, zbiór krytyczny $I=(-\infty, -1{,}533\rangle$. Obliczona z próbki wartość t_d statystyki t(4.15.12), $t_d=-0{,}8571 \notin I$, zatem brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_3, na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$.

4.16. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI RANG

Jeżeli badaniu statystycznemu podlegają cechy niemierzalne (jakościowe) populacji, powstaje problem przypisania im wartości liczbowych. Nauczyciel mający ocenić w punktach od 1 do 100 uzdolnienia matematyczne uczniów swojej klasy uczyni to z konieczności subiektywnie. Ocena tej samej klasy w oczach innego nauczyciela może znacznie się różnić od poprzedniej. O wiele łatwiej jest ustawić rozpatrywany zespół uczniów w ciąg: od ucznia najmniej uzdolnionego do najbardziej uzdolnionego. Takie uszeregowanie jest również subiektywne, ale zazwyczaj mniej kontrowersyjne od poprzedniego. Ustawienie badanych elementów w ciąg rosnący według narastającej „wartości" interesującej nas cechy nazywamy *nadaniem rang*. Numer miejsca jakie element zajmuje w tym ciągu nazywamy *rangą* tego elementu. Dla próbki n-elementowej rangami są liczby $1,\dots,n$.

Rangi będziemy traktowali jako zaobserwowane wartości zmiennej losowej skokowej X o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa, tzn. dla próbki n-elementowej

$$P(X=k)=\frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad k=1,\dots,n.$$

Nadawanie rang jest zazwyczaj operacją bardzo prostą i z tego powodu bywa również wykorzystywane przy badaniu cech mierzalnych. Na przykład zamiast mierzyć wzrost uczniów danej klasy można ustawić ich według wzrostu, co odpowiada nadaniu rang.

Jeżeli badanie jest przeprowadzone ze względu na dwie cechy X i Y i kolejnym obserwacjom każdej z cech z osobna nadano odpowiednie rangi, można wyznaczyć *współczynnik korelacji rang* (*kolejności*) tych cech.

Zadanie 4.52. Przeprowadzono badanie ze względu na dwie cechy X i Y, dokonując n obserwacji i nadając rangi: dla cechy X: $X_1,\dots,X_n$ oraz dla cechy Y: $Y_1,\dots,Y_n$. Korzystając ze wzoru na współczynnik korelacji (4.2.3), wyznaczyć współczynnik korelacji rang w prezentowanym zagadnieniu.

Rozwiązanie. Aby można było zastosować wspomniany wzór, należy najpierw wyznaczyć wartości przeciętne rang cechy X i cechy Y. Ponieważ w jednym i drugim przypadku mamy do czynienia ze zmienną losową, która z prawdopodobieństwami $1/n$ przyjmuje wartości $1,\dots,n$, zatem wartości przeciętne rang cechy X i cechy Y będą identyczne i równe średniej arytmetycznej rang, czyli $\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{2}(n+1)$. Zastosujemy teraz wzór (4.2.3)

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{1}{2}(n+1)\right)\left(Y_i-\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{1}{2}(n+1)\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\frac{1}{2}(n+1)\right)^2}}.$$

Zauważmy, że sumy występujące w mianowniku są identyczne, a różnią się co najwyżej porządkiem składników. Korzystając ze wzorów na sumę kwadratów n początkowych liczb naturalnych

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

oraz na sumę n początkowych liczb naturalnych

$$1+2+\ldots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1),$$

otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\left(\tfrac{1}{2}(n+1)\right)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{4}=\frac{n}{12}(n^2-1).$$

Ponieważ

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)-\left(Y_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)^2-2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)\left(Y_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)=$$
$$=\tfrac{1}{6}(n^3-n)-2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)\left(Y_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right),$$

więc licznik

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)\left(Y_i-\tfrac{1}{2}(n+1)\right)=\tfrac{1}{12}(n^3-n)-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2.$$

Uwzględniając otrzymane wyniki, mamy ostatecznie

$$r=\frac{\tfrac{1}{12}(n^3-n)-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2}{\tfrac{1}{12}(n^3-n)}=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2}{n^3-n}.$$

Wielkość r_s określona wzorem

$$r_s=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2}{n(n^2-1)} \tag{4.16.1}$$

nosi nazwę *współczynnika korelacji rang* (*kolejności*) *Spearmana* (czyt. Spirmena). Ponieważ został on uzyskany ze wzoru (4.2.3), a zatem

$$-1\leqslant r_s\leqslant 1.$$

Jeżeli pary obserwacji (x_i, y_i) ustawimy w kolejności naturalnej $1,\ldots,n$ według rang cechy X i okaże się że:

a) jest to również ustawienie w kolejności naturalnej według rang cechy Y, wówczas $X_i-Y_i=0$ dla $i=1,\ldots,n$ i $r_s=1$,

b) jest to ustawienie w kolejności odwrotnej do naturalnej $n, n-1,\ldots,1$ według rang cechy Y, można wykazać, że wówczas $r_s=-1$.

Zadanie 4.53. Dziesięciu kierowców samochodowych startuje w kolejnych zawodach zbierając punkty, których suma określa ich lokatę w tabeli. Interesuje nas odpowiedź na pytanie: jaka jest współzależność między „wartością” kierowcy ocenianą na podstawie miejsca zajmowanego w tabeli np. po sześciu wyścigach (cecha X) a „wartością” kierowcy – na podstawie miejsca zajętego w następnym siódmym wyścigu? A oto dane:

– miejsce w tabeli po sześciu wyścigach: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
– miejsce w siódmym wyścigu: 3 1 6 2 8 5 4 10 9 7

R o z w i ą z a n i e. Miejsca zajmowane przez kierowców w tabeli po sześciu wyścigach możemy traktować jako rangi cechy X, miejsca zaś zajęte w siódmym wyścigu jako rangi cechy Y. Miarą współzależności może być współczynnik korelacji rang Spearmana. Wyznaczamy najpierw różnice rang $X_i - Y_i$, $i=1,\ldots,10$, a następnie sumę ich kwadratów podstawiamy do wzoru (4.16.1). Otrzymujemy kolejno

$$X_i - Y_i\colon\ -2,\ 1,\ -3,\ 2,\ -3,\ 1,\ 3,\ -2,\ 0,\ 3,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2 = 4+1+9+4+9+1+9+4+0+9 = 50,$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\cdot 50}{10(100-1)} = 0{,}6970.$$

Prócz współczynnika korelacji rang Spearmana konstruuje się również *współczynnik korelacji rang Kendalla*. Zasadę konstrukcji tego współczynnika objaśni zadanie.

Zadanie 4.54. Przeprowadzono badanie ze względu na dwie cechy X i Y, dokonując dziesięciu obserwacji. Rangi tych obserwacji są następujące:

rangi cechy X: 4 7 2 1 5 3 9 10 6 8
rangi cechy Y: 8 3 10 6 9 5 4 2 1 7

Wyznaczyć współczynnik korelacji rang Kendalla.

R o z w i ą z a n i e. Próbkę porządkujemy tak, aby rangi jednej z cech ustawione były w kolejności naturalnej, np.

rangi cechy X: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10,
rangi cechy Y: 6 10 5 8 9 1 3 7 4 2.

Następnie dla każdej z rang cechy Y tworzymy pary z następującymi po niej rangami. Dla rangi 6 pary są następujące: (6, 10), (6, 5), (6, 8), (6, 9), (6, 1), (6, 3), (6, 7), (6, 4), (6, 2), dla rangi 10: (10, 5), (10, 8), (10, 9), (10, 1) itd. dla rangi 5: (5, 8), (5, 9), (5, 1) itd. Jeżeli w tak utworzonej parze poprzednik jest mniejszy niż następnik, to parze stawiamy notę $+1$, jeżeli poprzednik jest większy niż następnik, to notę -1. Wyznaczamy następnie sumę wszystkich not. Gdyby uporządkowanie rang cechy Y było naturalne, każda para otrzymałaby notę $+1$. Ponieważ wszystkich par jest $C_{10}^2 = 45$, zatem maksymalna suma not wynosi 45.

Współczynnik korelacji rang Kendalla oblicza się jako stosunek wyznaczonej sumy not do maksymalnej sumy not

$$r_k = \frac{\text{wyznaczona suma not}}{\text{maksymalna suma not}}. \qquad (4.16.2)$$

W zadaniu noty dla par z poprzednikiem 6 są następujące: $+1$, -1, $+1$, $+1$, -1, -1, $+1$, -1, -1, a ich suma jest równa -1. Suma not dla par z poprzednikiem 10 wynosi -8. Wyznaczona suma not dla wszystkich par wynosi

$$-1-8-1-4-5+4+1-2-1 = -17.$$

Ponieważ maksymalna suma not jest 45, więc

$$r_k = \frac{-17}{45} = -0{,}3778.$$

Ponieważ dla n-elementowej próbki liczba wszystkich par, a tym samym maksymalna suma not jest $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{1}{2}n(n-1)$, więc oznaczając przez U wyznaczoną sumę not, wzór (4.16.2) możemy zapisać w postaci

$$r_k = \frac{2U}{n(n-1)}. \qquad (4.16.3)$$

Wzorowi (4.16.3) można nadać wygodniejszą do zastosowań postać. Jeżeli przez V oznaczymy sumę not $(+1)$, to

$$r_k = \frac{U}{\frac{1}{2}n(n-1)} + 1 - 1 = \frac{U + \frac{1}{2}n(n-1)}{\frac{1}{2}n(n-1)} - 1 = \frac{2V}{\frac{1}{2}n(n-1)} - 1.$$

Ostatecznie mamy

$$r_k = \frac{4V}{n(n-1)} - 1. \qquad (4.16.4)$$

Tak więc, aby obliczyć współczynnik korelacji rang Kendalla, wystarczy obliczyć sumę not $(+1)$ i zastosować wzór (4.16.4).

Łatwo zauważyć, że jeżeli uporządkowaniu naturalnemu rang cechy X odpowiada naturalne uporządkowanie rang cechy Y, to noty wszystkich par są $(+1)$ i ich suma jest maksymalna, więc $r_k = 1$. Jeżeli naturalnemu uporządkowaniu rang cechy X odpowiada odwrotne do naturalnego uporządkowanie rang cechy Y, to noty wszystkich par są -1 i $r_k = -1$. A więc jak poprzednio mamy

$$-1 \leqslant r_k \leqslant 1.$$

4.17. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

ZADANIA **4.55–4.64.** Dla daždej z niżej podanych próbek – pobranych z dwuwymiarowych populacji, w których badaniu podlegały cechy X i Y – zbudować diagram korelacyjny, a następnie wyznaczyć średnie arytmetyczne $\bar{x}$ i $\bar{y}$, wariancje s_X^2, s_Y^2, odchylenia standardowe s_X, s_Y, kowariancję cov (x, y), współczynnik korelacji r, równania prostych regresji (Y względem X, X względem Y i ortogonalnej), kąt między prostymi regresji oraz wykreślić proste regresji.

4.55.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	27	26	29	27	29	25	30	28	26	28
y_i	0,13	0,11	0,15	0,12	0,13	0,12	0,14	0,14	0,12	0,13

4.56.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	7,5	6,0	5,0	8,0	5,5	7,0	6,0	8,5	6,5	5,5
y_i	3,0	3,5	3,0	2,5	2,5	4,0	3,0	3,5	2,0	4,0

4.57.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,45	0,60	0,30	0,70	0,35	0,65	0,20	0,40	0,80	0,55
y_i	0,30	0,45	0,25	0,35	0,40	0,55	0,30	0,15	0,40	0,25

4.58.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,4	0,6	0,2	0,1	0,7	0,9	0,1	0,3	0,8	0,5
y_i	2,0	1,0	4,0	9,0	1,0	0,5	6,0	3,0	0,5	1,0

4.59.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	4,0	7,0	2,5	5,0	2,0	8,5	2,0	10,0	6	3
y_i	5,5	7,0	3,0	6,0	1,0	7,0	2,0	7,5	6,5	4,5

4.60.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	14,4	2,6	6	10,5	1,0	11	17,0	3,3	16	16,2	2,5	21	19,0	3,6
2	16,5	3,0	7	15,6	3,1	12	12,0	2,0	17	18,5	3,9	22	13,0	1,5
3	13,1	2,1	8	17,4	3,4	13	15,0	2,5	18	11,5	1,5	23	16,5	3,5
4	15,9	3,4	9	14,5	2,0	14	19,5	4,1	19	14,0	3,2	24	14,0	2,0
5	15,1	2,9	10	17,0	2,8	15	18,5	2,9	20	17,5	2,5	25	15,0	3,0

4.61.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	11,5	1,5	6	15,0	2,0	11	12,0	2,5	16	13,0	2,0	21	17,0	1,0
2	13,5	4,0	7	13,0	3,5	12	15,5	2,5	17	11,0	3,5	22	14,5	1,5
3	16,5	3,0	8	17,5	1,5	13	13,0	0,5	18	10,0	3,5	23	16,0	0,5
4	14,0	3,0	9	13,5	1,0	14	16,0	1,5	19	15,0	1,0	24	12,0	3,5
5	10,5	4,0	10	15,0	3,5	15	14,0	4,5	20	12,0	4,5	25	11,0	2,5

4.62.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	13,0	3,0	6	14,5	3,0	11	12,5	2,5	16	13,5	2,5	21	13,5	3,5
2	11,5	1,5	7	11,0	0,5	12	13,0	4,0	17	10,5	2,0	22	12,0	2,0
3	14,5	1,5	8	14,0	4,5	13	12,5	1,5	18	13,5	0,5	23	11,5	2,5
4	11,5	3,5	9	11,0	3,0	14	10,5	4,0	19	11,5	4,5	24	13,5	1,5
5	13,0	2,0	10	14,0	2,0	15	12,0	0,5	20	12,5	4,0	25	12,0	3,0

4.63.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	5,5	1,5	6	8,0	5,0	11	0,5	1,0	16	2,0	1,5	21	7,5	7,0
2	8,5	4,0	7	8,5	8,5	12	8,5	6,5	17	8,0	9,0	22	5,0	0,5
3	4,0	2,0	8	3,5	1,0	13	7,5	3,5	18	7,5	5,5	23	4,5	1,5
4	8,0	7,5	9	6,5	2,5	14	1,5	1,0	19	9,0	5,5	24	5,5	2,5
5	2,5	0,5	10	9,0	8,0	15	8,5	9,5	20	7,0	1,5	25	6,5	4,0

4.64.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	7,5	5,0	6	9,0	7,5	11	2,5	5,5	16	2,0	4,0	21	6,0	1,5
2	7,5	3,0	7	8,0	6,5	12	8,0	4,0	17	9,5	8,0	22	8,5	5,5
3	3,0	4,5	8	1,5	7,0	13	9,0	9,0	18	6,0	3,5	23	2,5	2,0
4	1,0	8,5	9	1,0	5,5	14	3,5	3,0	19	2,5	7,0	24	7,0	1,0
5	4,0	1,5	10	9,0	4,0	15	5,0	2,0	20	5,0	0,5	25	6,5	2,5

Zadania **4.65–4.67**. Dla każdej z podanych próbek sporządzić diagram korelacyjny oraz zbudować tablicę korelacyjną o l klasach dla cechy X i m klasach dla cechy Y.

4.65. $l=m=5$.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	14,0	3,8	9	12,1	4,3	17	14,7	3,5	25	14,4	3,2	33	16,5	3,6
2	13,4	3,6	10	13,2	3,1	18	12,5	4,7	26	16,1	2,5	34	13,4	3,2
3	15,3	3,2	11	14,0	3,4	19	15,5	4,3	27	14,1	3,5	35	15,2	3,3
4	14,5	3,7	12	14,8	3,0	20	13,8	3,6	28	13,8	4,1	36	14,5	4,7
5	12,6	3,9	13	14,7	4,2	21	16,3	3,4	29	15,8	3,1	37	15,5	3,1
6	14,2	4,3	14	15,3	2,7	22	15,4	3,8	30	13,0	3,5	38	13,2	4,2
7	15,5	3,5	15	13,3	4,9	23	12,8	4,2	31	15,1	3,6	39	14,2	3,0
8	14,2	3,9	16	13,1	3,8	24	13,7	4,6	32	13,6	4,0	40	14,0	4,0

4.66. $l=7$, $m=5$.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	7,0	2,7	11	9,0	3,8	21	9,7	4,5	31	7,2	3,3	41	7,8	3,2
2	9,3	4,2	12	7,5	3,0	22	7,5	2,5	32	12,1	4,6	42	11,2	4,5
3	8,4	2,5	13	11,5	4,2	23	10,8	4,5	33	9,0	4,0	43	10,0	4,0
4	10,3	3,8	14	6,8	1,5	24	8,6	3,0	34	8,0	3,8	44	6,7	3,0
5	7,5	2,0	15	9,3	3,3	25	11,8	4,7	35	9,5	3,8	45	10,7	4,0
6	8,9	3,2	16	8,5	3,8	26	8,7	4,2	36	8,8	4,7	46	9,1	4,5
7	8,3	4,0	17	7,5	3,8	27	7,3	2,5	37	7,0	2,0	47	8,3	3,3
8	6,5	2,5	18	12,0	4,0	28	9,5	4,9	38	10,4	4,4	48	10,0	3,5
9	10,5	4,7	19	12,7	4,7	29	12,3	4,2	39	7,8	4,0	49	7,5	3,5
10	8,0	3,2	20	7,8	2,7	30	8,5	2,7	40	8,4	4,4	50	9,8	4,0

4.67. $l = 5$, $m = 7$.

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	3,4	3,7	11	2,0	2,7	21	4,9	5,0	31	3,1	4,4	41	4,5	5,5
2	2,7	4,7	12	3,9	5,0	22	3,0	1,8	32	3,4	5,4	42	3,5	5,0
3	4,4	4,6	13	2,5	1,5	23	3,6	4,3	33	3,4	2,3	43	4,8	5,3
4	2,6	2,5	14	2,5	4,3	24	5,7	4,9	34	2,5	2,9	44	3,1	2,5
5	5,2	5,3	15	3,6	3,0	25	3,0	1,0	35	5,3	5,0	45	2,7	4,1
6	3,1	4,6	16	6,4	5,1	26	4,1	4,1	36	4,1	4,6	46	3,0	3,3
7	2,2	3,5	17	2,8	3,7	27	5,0	4,8	37	3,0	5,0	47	4,2	5,0
8	3,3	4,1	18	4,3	5,8	28	2,2	2,0	38	2,8	2,3	48	3,3	2,2
9	6,0	5,3	19	5,7	5,5	29	3,7	3,4	39	3,0	3,9	49	3,6	3,9
10	4,0	5,4	20	2,5	3,2	30	5,0	5,7	40	2,4	3,9	50	3,4	4,7

4.68. Czy z diagramu korelacyjnego można wysnuć wnioski o istnieniu i „sile" współzależności między badanymi cechami? Odpowiedź uzasadnić posługując się rysunkami 4.17–4.19.

Zadania **4.69–4.71.** Korzystając z danych zgrupowanych w tablicy korelacyjnej, wyznaczyć dla każdej z cech X i Y: średnią arytmetyczną, wariancję, odchylenie standardowe oraz kowariancję, współczynnik korelacji, równania prostych regresji i kąt między nimi.

4.69.

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$				
	12,5	13,4	14,3	15,2	16,1
2,7	1	2	1	–	–
3,2	2	3	3	1	–
3,7	1	4	5	3	1
4,2	–	2	3	4	2
4,7	–	–	–	1	1

4.70.

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$						
	6,9	7,8	8,7	9,6	10,5	11,4	12,3
1,8	2	1	–	–	–	–	–
2,5	3	2	2	–	–	–	–
3,2	2	4	3	2	–	–	–
3,9	–	3	5	4	2	1	2
4,6	–	–	3	2	3	2	2

4.71

$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$				
	2,4	3,3	4,2	5,1	6,0
1,3	1	1	–	–	–
2,0	2	2	–	–	–
2,7	3	2	–	–	–
3,4	3	4	–	–	–
4,1	3	5	1	–	–
4,8	1	4	4	3	2
5,5	–	1	3	3	2

ZADANIA **4.72–4.84.** Z populacji generalnej, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym parametrze ρ oraz nieznanych współczynnikach prostej regresji Y względem X, $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, pobrano n-elementową próbkę i na jej podstawie obliczono $\bar{x}$, s_X^2, s_Y^2, r, a i b. Na poziomach ufności $1-\alpha = 0{,}95$ i $1-\alpha = 0{,}99$ wyznaczyć przedziały ufności dla ρ, $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Nr zad.	$\bar{x}$	s_X^2	s_Y^2	n	r	a	b
4.72	27,5	2,25	0,000129	10	0,7924	0,0060	−0,0360
4.73	6,55	1,2225	0,39	10	−0,0072	−0,0410	3,1268
4.74	0,5	0,033	0,0119	10	0,5046	0,3030	0,1885
4.75	0,46	0,0744	7,11	10	−0,8566	−8,3737	6,6519
4.76	5	7,15	4,7	10	0,8884	0,7203	1,3986
4.77	15,488	5,3459	0,583	25	0,8472	0,2798	−1,6010
4.78	13,68	4,2576	1,4896	25	−0,4552	−0,2693	6,1635
4.79	12,5	1,38	1,3896	25	−0,0217	−0,0217	2,7917
4.80	6,12	6,2256	8,3896	25	0,7884	0,9152	−1,5810
4.81	5,4	7,78	5,8496	25	0,0649	0,0563	4,1760
4.82	14,255	1,0510	0,2744	40	0,5429	0,2773	−0,2773
4.83	9,042	2,4264	0,6695	50	0,6658	0,3498	0,4293
4.84	3,642	1,1952	1,4161	50	0,6382	0,6947	1,4999

4.85. Na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}95$ i $1-\alpha = 0{,}99$ wyznaczyć i narysować obszary ufności dla prostej regresji Y względem X, na podstawie danych tablicy korelacyjnej i rozwiązania zadań: a) 4.69, b) 4.70, c) 4.71.

4.86. W celu zbadania czy istnieje korelacja między krotnością dawki pewnego preparatu – cecha X, a masą wątroby szczura w gramach – cecha Y, przeprowadzono badania i otrzymano wyniki

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3,25	4,50	3,75	4,75	5,50	4,25	3,50	5,00	5,25	4,00

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę o braku korelacji między krotnością dawki preparatu, a masą wątroby szczura.

4.87. Aby zbadać czy istnieje korelacja między wielkością produkcji pewnego artykułu (w milionach metrów) – cecha X, a zużyciem pary technologicznej (w tysiącach ton) – cecha Y, zebrano dane z dziesięciu wylosowanych zakładów produkujących ten artykuł

x_i	1,5	3,0	2,0	3,5	1,5	4,5	2,5	4,0	4,5	3,0
y_i	4,5	7,0	7,5	6,5	6,5	7,5	5,5	4,5	5,5	5,0

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że istnieje dodatnia korelacja między wielkością produkcji danego artykułu a zużyciem pary technologicznej.

4.88. Wylosowano 10 rodzin i zbadano miesięczny dochód przypadający na jednego członka rodziny (w mln zł) – cecha X, oraz wyrażoną w procentach część budżetu rodzinnego przeznaczoną na zakup artykułów żywnościowych – cecha Y. Otrzymano następujące wyniki:

x_i	2,00	3,00	1,50	2,25	1,75	3,50	1,50	2,50	3,25	2,50
y_i	70	80	95	75	90	60	60	65	85	90

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że istnieje ujemna korelacja między dochodem przypadającym na jednego członka rodziny a wydatkami na artykuły żywnościowe w tej rodzinie.

4.89. W celu zbadania jaki wpływ ma długość czasu pracy pewnego urządzenia (w miesiącach) – cecha X na przeciętny czas bezawaryjnej pracy tego urządzenia (w miesiącach) – cecha Y, zestawiono w tablicy dane z kilku przedsiębiorstw mających te urządzenia:

x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
y_i	9,5	8,5	8,0	7,5	6,5	6,0	4,5	5,0	5,5	5,0

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że współczynnik korelacji między czasem pracy a przeciętnym czasem bezawaryjnej pracy omawianego urządzenia nie różni się istotnie od $-0{,}8$.

4.90. W kilku przedsiębiorstwach zebrano dane dotyczące wielkości produkcji przypadającej na jednego pracownika w ciągu roku (w mld zł) – cecha X, oraz liczby pracowników (jako procent załogi), którzy ulegli w ciągu tego roku wypadkom przy pracy – cecha Y. Dane zawiera tablica:

x_i	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75
y_i	3	1	2	5	4	3	2	6	4	5

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że współczynnik korelacji między badanymi cechami jest istotnie większy niż 0,3.

4.91. W pewnym gospodarstwie wiejskim w ciągu kolejnych dziesięciu lat badano przeciętne dzienne spożycie ziemniaków (w kg) – cecha X i wielkość spożycia artykułów zbożowych (w kg) – cecha Y, przypadające na jednego członka rodziny. Otrzymano wyniki

x_i	0,70	0,60	0,80	0,85	0,55	0,65	0,90	1,00	0,75	0,50
y_i	0,50	0,70	0,50	0,40	0,75	0,60	0,30	0,20	0,55	0,70

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że współczynnik korelacji między spożyciem ziemniaków a spożyciem artykułów zbożowych przez jednego członka w badanej rodzinie jest istotnie mniejszy od $-0{,}5$.

4.92. Wylosowaną grupę sześćdziesięciu studentów zbadano ze względu na dwie cechy: wzrost i przyrost obwodu klatki piersiowej przy wdechu. Współczynnik korelacji między badanymi cechami wyniósł $r = 0{,}3819$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że badane cechy są liniowo nieskorelowane.

4.93. Z dziennej produkcji zespołu automatycznych obrabiarek produkujących sworznie wylosowano 300-elementową próbkę i przebadano ze względu na dwie cechy, tzn. dwa podstawowe wymiary tych sworzni. Współczynnik korelacji między badanymi cechami wyniósł $r=0{,}105$. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że badane cechy są liniowo nieskorelowane.

4.94. Przeprowadzono badanie 280 próbek przędzy określonego rodzaju, ze względu na skręt i skurcz i wyznaczono współczynnik korelacji między tymi cechami $r=0{,}1754$. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że między tymi cechami istnieje korelacja dodatnia.

4.95. W pewnym przedsiębiorstwie produkującym unikalne narzędzia zebrano dane dotyczące wielkości produkowanych partii narzędzi i jednostkowego kosztu produkcji narzędzia w partii. Współczynnik korelacji między badanymi wielkościami wyniósł $r=-0{,}21$. Wiadomo, że w badanym okresie przedsiębiorstwo wyprodukowało 121 partii narzędzi. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że między badanymi cechami istnieje korelacja ujemna.

Zadania **4.96–4.105.** Z populacji generalnej, w której badane cechy mają dwuwymiarowy rozkład normalny, pobrano n-elementową próbkę i na jej podstawie obliczono r. Na poziomie istotności α zweryfikować hipotezę H przeciw hipotezie K.

Nr zad.	n	r	α	H	K
4.96	20	0,3205	0,05	$\rho=0$	$\rho\neq 0$
4.97	32	0,012	0,01	$\rho=0$	$\rho>0$
4.98	62	$-0{,}18$	0,05	$\rho=0$	$\rho<0$
4.99	70	$-0{,}23$	0,05	$\rho=0$	$\rho\neq 0$
4.100	120	0,27	0,01	$\rho=0$	$\rho\neq 0$
4.101	250	0,08	0,05	$\rho=0$	$\rho>0$
4.102	400	$-0{,}07$	0,05	$\rho=0$	$\rho<0$
4.103	60	0,6832	0,01	$\rho=0{,}75$	$\rho\neq 0{,}75$
4.104	70	0,4351	0,01	$\rho=0{,}60$	$\rho>0{,}60$
4.105	80	$-0{,}8321$	0,05	$\rho=-0{,}75$	$\rho<-0{,}75$

4.106. Z każdej z dwu populacji, w których badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny pobrano próbkę.

Próbka z pierwszej populacji:

x_i	7,5	9,0	10,0	6,0	11,5	7,5	5,5	11,0	8,0	10,0
y_i	1,5	3,0	3,5	2,0	4,0	2,5	1,0	3,0	2,0	2,5

Próbka z drugiej populacji:

x_i	7,5	9,0	5,5	7,0	10,0	12,0	9,0	8,5	10,5	9,0	11,0	8,0	10,5	5,0	7,5
y_i	2,0	3,5	2,0	3,0	3,0	4,0	1,5	3,0	2,5	2,5	3,5	2,5	3,5	1,0	1,5

Współczynniki korelacji między cechami (X, Y) w obu populacjach są nieznane. Wykazać, że na podstawie przedstawionych próbek na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ brak podstaw, by odrzucić hipotezę, że współczynniki korelacji w obu populacjach nie różnią się istotnie, a następnie wyznaczyć oszacowanie współczynnika korelacji obu populacji.

4.107. Na podstawie niżej podanych trzech próbek na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę H: {współczynniki korelacji nie różnią się istotnie w populacjach, z których pobrano te próbki}. Jeżeli hipoteza H nie zostanie odrzucona, wyznaczyć oszacowanie wspólnej wartości współczynnika korelacji we wszystkich populacjach.

próbka I	x_i	1,5	3,0	3,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,0	2,5	4,5	6,0	4,0	5,5	3,0	5,5
	y_i	1,5	2,5	6,5	9,5	8,5	6,0	5,0	3,5	5,0	7,5	7,0	3,5	7,5	4,0	5,5
próbka II	x_i	4,0	4,0	7,0	2,0	1,0	3,0	6,5	4,5	6,0	2,0	3,0	1,5	5,5	5,0	4,0
	y_i	4,0	6,0	8,5	4,5	2,5	5,5	6,5	7,0	8,0	2,5	3,5	3,5	6,0	5,0	6,0
próbka III	x_i	3,5	2,0	4,5	5,5	3,0	2,5	4,5	3,0	6,0	2,0	4,5	3,5	5,5	6,0	4,5
	y_i	5,5	4,0	8,5	10,0	5,0	1,0	5,0	3,0	9,0	1,5	3,5	7,0	7,0	8,5	6,5

ZADANIA **4.108-4.115.** Badaniu podlega k populacji, w każdej z których badane cechy mają dwuwymiarowy rozkład normalny o nieznanym współczynniku korelacji ρ_i, $i=1,\ldots,k$. Z każdej z populacji pobrano n_i-elementową próbkę i obliczono r_i, $i=1,\ldots,k$. Na poziomie istotności α zweryfikować hipotezę H przeciw hipotezie alternatywnej K.

Nr zadania	Liczba populacji k	Liczności próbek n_i	Wsp. korelacji z próbki r_i	Poziom istotności α	Hipoteza H	Hipoteza alternatywna K
4.108	2	$n_1=30$ $n_2=41$	$r_1=0{,}56$ $r_2=0{,}63$	0,05	$\rho_1=\rho_2$	$\rho_2\neq\rho_2$
4.109	2	$n_1=84$ $n_2=125$	$r_1=0{,}52$ $r_2=0{,}35$	0,05	$\rho_1=\rho_2$	$\rho_1>\rho_2$
4.110	2	$n_1=275$ $n_2=312$	$r_1=0{,}73$ $r_2=0{,}82$	0,01	$\rho_1=\rho_2$	$\rho_1<\rho_2$
4.111	3	$n_1=64$ $n_2=51$ $n_3=73$	$r_1=0{,}37$ $r_2=0{,}51$ $r_3=0{,}49$	0,05	$\rho_1=\rho_2=\rho_3$	$\sim(\rho_1=\rho_2=\rho_3)$
4.112	3	$n_1=133$ $n_2=97$ $n_3=118$	$r_1=-0{,}78$ $r_2=-0{,}86$ $r_3=-0{,}71$	0,05	$\rho_1=\rho_2=\rho_3$	$\sim(\rho_1=\rho_2=\rho_3)$
4.113	3	$n_1=341$ $n_2=278$ $n_3=305$	$r_1=0{,}51$ $r_2=0{,}57$ $r_3=0{,}63$	0,01	$\rho_1=\rho_2=\rho_3$	$\sim(\rho_1=\rho_2=\rho_3)$
4.114	5	$n_1=185$ $n_2=230$ $n_3=205$ $n_4=258$ $n_5=310$	$r_1=0{,}79$ $r_2=0{,}89$ $r_3=0{,}81$ $r_4=0{,}83$ $r_5=0{,}91$	0,01	$\rho_1=\rho_2=\rho_3=$ $=\rho_4=\rho_5$	$\sim(\rho_1=\rho_2=\rho_3=$ $=\rho_4=\rho_5)$
4.115	5	$n_1=123$ $n_2=101$ $n_3=145$ $n_4=160$ $n_5=132$	$r_1=0{,}63$ $r_2=0{,}68$ $r_3=0{,}58$ $r_4=0{,}73$ $r_5=0{,}70$	0,05	$\rho_1=\rho_2=\rho_3=$ $=\rho_4=\rho_5$	$\sim(\rho_1=\rho_2=\rho_3=$ $=\rho_4=\rho_5)$

Zadania **4.116-4.127**. Na podstawie danych z zadania numer N na poziomie istotności α zweryfikować hipotezę H przeciw hipotezie K. **a** i **b** oznaczają nieznane współczynniki prostej regresji $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, Y względem X w badanej populacji.

Nr zad.	N	α	hipoteza H	hipoteza K
4.116	4.55	0,05	$\mathbf{a}=0{,}01$	$\mathbf{a}\neq 0{,}01$
4.117	4.56	0,05	$\mathbf{a}=-0{,}05$	$\mathbf{a}<-0{,}05$
4.118	4.57	0,01	$\mathbf{a}=-0{,}37$	$\mathbf{a}>-0{,}37$
4.119	4.57	0,01	$\mathbf{b}=0{,}5$	$\mathbf{b}\neq 0{,}5$
4.120	4.58	0,05	$\mathbf{b}=5$	$\mathbf{b}>5$
4.121	4.59	0,01	$\mathbf{b}=3{,}6$	$\mathbf{b}<3{,}6$
4.122	4.69	0,01	$\mathbf{a}=0{,}15$	$\mathbf{a}\neq 0{,}15$
4.123	4.70	0,01	$\mathbf{a}=0{,}20$	$\mathbf{a}>0{,}20$
4.124	4.71	0,05	$\mathbf{a}=0{,}85$	$\mathbf{a}<0{,}85$
4.125	4.69	0,05	$\mathbf{b}=-2{,}46$	$\mathbf{b}\neq -2{,}46$
4.126	4.70	0,05	$\mathbf{b}=-0{,}56$	$\mathbf{b}>-0{,}56$
4.127	4.71	0,01	$\mathbf{b}=1{,}73$	$\mathbf{b}<1{,}73$

Zadania **4.128-4.145**. Z populacji, w której badane cechy (X, Y) mają dwuwymiarowy rozkład normalny pobrano n-elementową próbkę i obliczono $\bar{x}, \bar{y}, s_X^2, s_Y^2$ i r. Na poziomie istotności α zweryfikować hipotezę H przeciw hipotezie K. **a** i **b** oznaczają nieznane współczynniki prostej regresji $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, Y względem X w badanej populacji.

Nr zad.	n	$\bar{x}$	$\bar{y}$	s_X^2	s_Y^2	r	α	H	K
4.128	30	3,1	5,3	0,49	1,21	−0,8	0,05	$\mathbf{a}=-1$	$\mathbf{a}\neq -1$
4.129							0,01	$\mathbf{b}=8{,}5$	$\mathbf{b}\neq 8{,}5$
4.130	24	12,2	7,8	0,81	2,25	−0,6	0,01	$\mathbf{a}=-0{,}8$	$\mathbf{a}\neq -0{,}8$
4.131							0,05	$\mathbf{b}=13$	$\mathbf{b}>13$
4.132	20	5,4	10,1	3,61	0,64	−0,4	0,05	$\mathbf{a}=0{,}06$	$\mathbf{a}\neq 0{,}06$
4.133							0,01	$\mathbf{b}=12$	$\mathbf{b}<12$
4.134	24	19,3	3,1	0,16	6,25	−0,2	0,01	$\mathbf{a}=-4{,}7$	$\mathbf{a}>-4{,}7$
4.135							0,05	$\mathbf{b}=-27$	$\mathbf{b}\neq -27$
4.136	20	0,7	6,2	1,96	0,36	0,1	0,05	$\mathbf{a}=-0{,}08$	$\mathbf{a}>-0{,}08$
4.137							0,01	$\mathbf{b}=5{,}9$	$\mathbf{b}>5{,}9$
4.138	18	8,3	0,5	0,01	0,25	0,3	0,01	$\mathbf{a}=-0{,}4$	$\mathbf{a}>-0{,}4$
4.139							0,01	$\mathbf{b}=16$	$\mathbf{b}<16$
4.140	22	9,2	1,1	1,44	0,09	0,5	0,05	$\mathbf{a}=0{,}23$	$\mathbf{a}<0{,}23$
4.141							0,05	$\mathbf{b}=0{,}5$	$\mathbf{b}\neq 0{,}5$
4.142	17	15,7	22,1	0,04	1,00	0,7	0,01	$\mathbf{a}=6$	$\mathbf{a}<6$
4.143							0,05	$\mathbf{b}=-63$	$\mathbf{b}>-63$
4.144	20	6,2	18,3	1,69	2,56	0,9	0,05	$\mathbf{a}=1{,}25$	$\mathbf{a}<1{,}25$
4.145							0,05	$\mathbf{b}=12$	$\mathbf{b}<12$

ZADANIA **4.146-4.148.** W celu zbadania, czy w każdej z badanych k populacji wyróżnione cechy (X_i, Y_i), $i=1,\dots,k$, są podobnie skorelowane, z każdej z populacji pobrano próbkę.

a) Na poziomie istotności α zweryfikować hipotezę H_1, że współczyniki regresji cechy Y_i względem X_i, $i=1,\dots,k$, w badanych populacjach nie różnią się istotnie, przeciw hipotezie K_1, że współczynniki te różnią się istotnie.

b) Jeżeli hipoteza H_1 nie została odrzucona, to na poziomie istotności α zweryfikować hipotezę H_2, że współczynniki przesunięcia prostych regresji cechy Y_i względem X_i, $i=1,\dots,k$, w badanych populacjach nie różni się istotnie, przeciw hipotezie K_2, że współczynniki te różnią się istotnie.

c) Jeżeli hipotezy H_1 i H_2 nie zostały odrzucone, wyznaczyć oszacowanie wspólnej prostej regresji cechy Y_i względem X_i dla wszystkich populacji.

4.146. $\alpha=0{,}05$.

Próbka 1	x_{1i}	1,0	7,0	3,5	6,5	3,0	8,0	6,5	4,5	4,0	6,0
	y_{1i}	1,5	5,5	2,5	6,0	3,0	5,5	4,5	3,5	3,5	4,5
Próbka 2	x_{2i}	5,0	7,0	6,0	1,0	2,0	5,0	2,0	3,0	5,0	4,0
	y_{2i}	4,0	6,0	5,0	2,0	2,0	4,5	2,5	2,5	3,5	4,0
Próbka 3	x_{3i}	3,0	4,0	1,0	5,0	6,0	3,0	6,0	7,0	2,0	8,0
	y_{3i}	2,5	3,5	2,0	4,5	5,0	2,5	4,5	5,5	2,0	6,0

4.147. $\alpha=0{,}01$.

Próbka 1	x_{1i}	2,0	3,0	1,0	3,0	5,0	2,0	4,0	5,0	1,0	4,0
	y_{1i}	2,5	3,5	0,5	2,5	5,5	1,5	4,5	4,5	1,5	3,5
Próbka 2	x_{2i}	0,5	2,0	1,0	4,0	3,5	2,0	4,5	5,0	3,0	1,5
	y_{2i}	1,0	2,0	1,5	3,5	3,5	2,5	4,0	4,5	2,5	2,0
Próbka 3	x_{3i}	2,0	3,5	2,5	1,0	3,0	1,5	4,0	4,5	5,0	5,0
	y_{3i}	2,0	3,5	2,5	1,5	2,5	2,0	3,0	4,0	3,5	4,5
Próbka 4	x_{4i}	2,0	2,5	1,0	3,0	3,5	1,5	4,0	5,0	0,5	4,0
	y_{4i}	1,5	3,0	0,5	3,0	3,0	1,5	5,0	5,0	0,5	4,0
Próbka 5	x_{5i}	2,5	3,0	4,0	1,0	3,5	2,0	3,0	4,0	3,5	1,5
	y_{5i}	2,5	4,0	5,0	0,5	4,5	1,5	3,0	4,5	4,0	0,5

4.148. $\alpha=0{,}05$.

Próbka 1	x_{1i}	2,5	4,5	7,5	1,0	2,5	11,0	1,0	7,5	11,0	4,5
	y_{1i}	3,0	4,0	7,5	2,0	4,0	7,5	3,0	5,5	9,5	3,5
Próbka 2	x_{2i}	4,5	7,5	2,5	11,0	1,0	4,5	2,5	1,0	11,0	7,5
	y_{2i}	5,5	6,0	4,5	9,0	3,5	4,5	3,5	2,5	7,5	7,0
Próbka 3	x_{3i}	4,5	2,5	7,5	11,0	1,0	11,0	2,5	4,5	1,0	7,5
	y_{3i}	3,5	2,5	7,0	10,0	1,5	8,0	3,5	5,0	2,5	5,0
Próbka 4	x_{4i}	4,5	2,5	1,0	11,0	7,5	4,5	1,0	7,5	2,5	11,0
	y_{4i}	5,5	3,5	1,5	10,0	6,0	3,5	2,5	7,0	2,5	8,0
Próbka 5	x_{5i}	7,5	1,0	11,0	2,5	4,5	1,0	4,5	2,5	7,5	11,0
	y_{5i}	8,0	2,0	8,0	4,5	4,5	3,0	6,0	3,5	6,0	10,0

4.149. Do upraw pewnej rośliny użyto nawozów sztucznych o różnej zawartości jednego składnika. Podana niżej tablica zawiera dane dotyczące zawartości tego składnika w nawozie sztucznym w procentach (cecha X) i przeciętnej masy zielonej jednej rośliny w gramach (cecha Y), uprawianej tym nawozem.

x_i	1,1	2,1	3,0	3,8	5,3	6,1	7,0	8,0
y_i	2,6	4,4	3,9	6,1	5,8	7,1	6,6	7,1

Wyznaczyć linie regresji cechy Y względem cechy X postaci: a) $y=Ax+B$, b) $y=Ax^2+$ $+Bx+C$, c) $y=A\frac{1}{x}+B$, d) $y = A\log x+B$, ponadto wyznaczyć dla każdej linii wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.150. Zebrano dane dotyczące liczby mikroorganizmów (w mln) – cecha Y w kolejnych dniach trwania hodowli (cecha X).

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,6	1,2	1,4	3,1	6,9

Wyznaczyć linie regresji cechy Y względem cechy X postaci: a) $y=Ax+B$, b) $y=Ax^2+$ $+Bx+C$, c) $y=Ax^B$, d) $y = AB^x$, ponadto wyznaczyć dla każdej linii wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.151. W celu stwierdzenia szybkości rozpuszczenia pewnej substancji w wodzie w ustalonych warunkach mieszania i temperatury mierzono co 5 sekund czas – cecha X, ilość nierozpuszczonej substancji w gramach – cecha Y. Dane w tabeli

x_i	5	10	15	20	25	30
y_i	14,1	13,8	12,7	12,3	11,5	11,0

Wyznaczyć linie regresji cechy Y względem cechy X postaci: a) $y=Ax+B$, b) $y=Ax^2+$ $+Bx+C$, c) $y=Ae^{Bx}$, d) $y=A\frac{1}{x}+B$, a następnie dla każdej linii wyznaczyć wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.152. Zebrano dane dotyczące stażu pracy – cecha X i osiąganej wydajności pracy – cecha Y przez przodowników pracy pewnego wydziału.

x_i	1	3	5	10	15
y_i	1,01	1,08	1,03	1,11	1,19

Wyznaczyć linie regresji cechy Y względem cechy X postaci: a) $Ax+B$, b) $y=A\log x+$ $+B$, c) $y=Ax^B$, d) $y=A\frac{1}{x}+B$, a następnie dla każdej linii wyznaczyć wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.153. Podana niżej tabelka zawiera dane dotyczące przeciętnej liczby błędów przy rozwiązywaniu testu – cecha Y – przez zespół pracowników w kolejnych godzinach pracy – cecha X

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2,9	1,9	0,6	2,1	3,1	4,4	4,5	3,0

Wyznaczyć linię regresji cechy Y względem cechy X postaci $y=A\sin\frac{\pi(x+2{,}5)}{3{,}5}+B$, a następnie wyznaczyć wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.154. Na podstawie danych z zadania: a) 4.63, b) 4.64 wyznaczyć linię regresji cechy Y względem cechy X postaci $y=Ax^2+Bx+C$, a następnie wyznaczyć wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.155. Na podstawie danych z zadania 4.70 wyznaczyć linie regresji cechy Y względem cechy X postaci: a) $y=Ax+B$, b) $y=Ax^2+Bx+C$, c) $y=A\log x+B$, d) $y=Ax^B$, a następnie dla każdej linii wyznaczyć wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.156. Na podstawie danych z zadania 4.71 wyznaczyć linie regresji cechy Y względem cechy X postaci: a) $y=Ax+B$, b) $y=Ax^2+Bx+C$, c) $y=A\log x+B$, d) $y=A\frac{1}{x}+B$, a następnie dla każdej linii wyznaczyć wariancję resztkową V_r, współczynnik zgodności oraz współczynnik korelacji krzywoliniowej.

4.157. Na podstawie danych zadania: a) 4.69, b) 4.70, c) 4.71 wyznaczyć stosunki korelacyjne $\eta^2_{Y|X}$ i $\eta^2_{X|Y}$, a następnie

1) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H_1: H^2_{Y|X}=0$ przeciw $K_1: H^2_{Y|X}\neq 0$,

2) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H_2: H^2_{X|Y}=0$ przeciw $K_2: H^2_{X|Y}\neq 0$,

3) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę $H_3: H^2_{Y|X}-\rho^2=0$ przeciw $K_3: H^2_{Y|X}-\rho^2\neq 0$.

4.158. Aby ocenić rozkład jazdy autobusów miejskich, dla sześciu linii autobusowych wyznaczono rzeczywisty – X_i i planowany – Y_i, $i=1,\ldots,6$, odstęp czasu między dwoma autobusami, a następnie otrzymanym wynikom nadano rangi. W ten sposób otrzymano pary (x_i, y_i): (3, 2), (5, 6), (1, 3), (6, 5), (2, 1), (4, 4). Wyznaczyć współczynniki korelacji rang Spearmana i Kendalla.

4.159. Istnieje przypuszczenie, że odległość X od szkoły studenta studiów zaocznych ma wpływ na wyniki Y w nauce. Zebrano dane o ośmiu studentach, nadając tym danym odpowiednie rangi (x_i, y_i): (1, 6), (2, 4), (3, 8), (4, 2), (5, 1), (6, 7), (7, 3), (8, 5). Wyznaczyć współczynniki korelacji rang Spearmana i Kendalla.

4.160. W celu porównania dwu testów przeprowadzono kontrolne badanie każdym z nich dziesięciu osób, a następnie zanotowano rangi: (1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (5, 6), (6, 5), (7, 10), (8, 7), (9, 8), (10, 9). Wyznaczyć współczynniki korelacji rang Spearmana i Kendalla.

4.161. Rozważmy n cech: $X_1,\ldots,X_n$. a) Ile jest wszystkich współczynników korelacji zupełnej ρ_{ij}, $i,j=1,\ldots,n$, $i\neq j$? b) Ile jest wszystkich współczynników korelacji pierwszego rzędu $\rho_{ij.k}$, $i,j,k=1,\ldots,n$, $i\neq j\neq k$, $i\neq k$? c) Ile jest wszystkich współczynników korelacji drugiego rzędu $\rho_{ij.kl}$, d) ogólnie rzędu $t\leqslant -2$? e) Ile jest więc współczynników korelacji zupełnej wszystkich rzędów łącznie z zerowym?

4.162. Współczynnik korelacji cząstkowej $\rho_{12.3}=0$, czy wynika stąd, że współczynnik korelacji ρ_{12}, a więc przed wyeliminowaniem wpływu X_3 też jest równy zeru?

4.163. Przy badaniu trzech cech X_1, X_2, X_3 o nieznanym łącznym rozkładzie współczynnik korelacji zupełnej ρ_{12} okazał się różny od zera. Po wyznaczeniu pozostałych dwóch współczynników korelacji zupełnej ρ_{13}, ρ_{23} w celu wyeliminowania wpływu X_3 obliczono współczynnik korelacji cząstkowej $\rho_{12.3}$; czy może on być znaku przeciwnego do ρ_{12}?

4.164. Korzystając ze wzoru wiążącego współczynnik korelacji zupełnej w przypadku trzech cech ze wszystkimi współczynnikami korelacji cząstkowej

$$\rho_{12}=\frac{\rho_{12.3}-\rho_{13.2}\rho_{23.1}}{\sqrt{(1-\rho_{13.2}^2)(1-\rho_{23.1}^2)}},$$

wyznaczyć granice współczynnika korelacji cząstkowej $\rho_{23.1}$, traktując $\rho_{12.3}$, $\rho_{13.2}$ jako znane.

4.165. Czy współczynniki korelacji cząstkowej $\rho_{12.3}$, $\rho_{23.1}$, $\rho_{13.2}$ mogą być: a) wszystkie trzy równe 1, b) dwa równe 1, trzeci -1, c) jeden równy 1, dwa pozostałe -1, d) wszystkie trzy równe -1?

4.166. Dwa spośród trzech współczynników korelacji zupełnej $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ są równe $d\neq 0$.

a) Czy przy dowolnej ich wspólnej wartości trzeci współczynnik korelacji zupełnej może być przeciwnego znaku?

b) W jakich granicach może się on zmieniać, gdy wspólną wartością dwóch współczynników jest $d=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c) Rozważyć przypadek, gdy jeden jest równy $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, a drugi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4.167. Cechy X_1, X_2 są w populacji nieskorelowane: $\rho_{12}=0$. Dla każdej z nich znane są współczynniki korelacji z trzecią cechą X_3: ρ_{13} i ρ_{23}. Czy wynika stąd, że po wyeliminowaniu wpływu X_3 obliczony współczynnik korelacji cząstkowej $\rho_{12.3}$ też będzie równy zeru?

4.168. Rozważmy n zmiennych losowych $X_1,\ldots,X_n$. Obliczyć: a) liczbę możliwych współczynników korelacji wielorakiej rzędu t, b) liczbę wszystkich współczynników korelacji wielorakiej dowolnego rzędu, c) czy wszystkie one są równe?

4.169. Dane(1) dotyczące pieców martenowskich w Polsce: przeciętny czas trwania jednego wytopu w godzinach – cecha X_1, przeciętna masa jednego wytopu w tonach – cecha X_2, zużycie paliwa i energii na produkcję jednej tony stali z pieców martenowskich w Gcal – cecha X_3, przedstawiają się następująco:

Lata	X_1	X_2	X_3
1965	8,30	92,7	1,488
1970	7,98	100,2	1,475
1971	7,98	99,2	1,463
1972	8,00	100,0	1,452
1973	7,89	101,2	1,485
1974	7,94	102,8	1,465

(1) Rocznik Statystyczny 1975.

Wyznaczyć współczynniki korelacji zupełnej, cząstkowej, wielorakiej oraz równania płaszczyzny regresji każdej z badanych cech względem pozostałych.

4.170. Z jednej tony węgla wsadowego suchego w latach 1970–1974 uzyskiwano([1])

Lata	Smoła w kg X_1	Benzol w kg X_2	Siarczan amonu w kg X_3
1970	35,9	11,0	8,7
1971	36,2	10,8	8,6
1972	35,8	10,9	8,6
1973	36,3	11,1	8,7
1974	36,2	11,0	8,6

Wyznaczyć współczynniki korelacji zupełnej, cząstkowej, wielorakiej oraz równania paszczyzn regresji każdej z cech względem pozostałych.

4.171. W latach 1970–1974 produkcja włókien sztucznych, jedwabiu wiskozowego włókienniczego oraz procentowy udział I gatunku w ogólnej produkcji jedwabiu wiskozowego włókienniczego przedstawiały się w Polsce następująco([1]):

Lata	Produkcja włókien sztucznych w tys. ton X_1	Produkcja jedwabiu wiskozowego włókienniczego X_2	Procentowy udział I gat. w ogólnej produkcji jedwabiu wiskozowego włókienniczego X_3
1970	138,1	20,6	65,2
1971	150,9	20,9	63,8
1972	162,2	21,2	66,6
1973	177,9	21,8	69,2
1974	195,8	21,9	72,1

Wyznaczyć współczynniki korelacji zupełnej, cząstkowej, wielorakiej oraz równania płaszczyzn regresji każdej z cech względem pozostałych.

4.172. Liczba kopalń, wydobycie węgla i zatrudnienie w kopalniach węgla brunatnego w Polsce w latach 1960, 1965 oraz 1970–1974 były następujące([1]):

Lata	Liczba kopalń X_1	Wydobycie węgla w mln ton X_2	Zatrudnienie w tys. X_3
1960	7	9,3	5,6
1965	9	22,6	13,2
1970	8	32,8	13,1
1971	9	34,5	13,7
1972	8	38,2	14,5
1973	8	39,2	13,7
1974	6	38,8	12,7

([1]) Rocznik Statystyczny 1975.

Wyznaczyć współczynnik korelacji zupełej, cząstkowej, wielorakiej oraz równania płaszczyzn regresji każdej z badanych cech względem pozostałych.

4.173. Roczne spożycie niektórych artykułów konsumpcyjnych na jednego mieszkańca Polski w poszczególnych latach podaje tablica ([1])

Lata	Ziarno 4 zbóż w przeliczeniu na przetwory w kg X_1	Ziemniaki w kg X_2	Mięso i podroby w kg X_3	Tłuszcze jadalne w przeliczeniu na 100% tłuszczu w kg X_4
1950	166	270	36,5	9,7
1960	145	223	42,5	13,6
1965	141	215	49,2	15,1
1970	131	190	53,0	18,0
1971	128	189	56,1	18,0
1972	127	187	59,3	18,3
1973	125	183	62,1	19,3
1974	123	177	65,6	19,5

Wyznaczyć współczynniki korelacji zupełnej, cząstkowej, wielorakiej oraz równania płaszczyzn regresji każdej z badanych cech względem pozostałych.

4.174. Przypuszcza się, że istnieje zależność liniowa między zużyciem węgla Y w kotłowni pewnego zakładu a panującą w danym dniu temperaturą X_1 i ilością wyprodukowanej pary technologicznej X_2. Na podstawie danych zawartych w tablicy

Temperatura powietrza w °C X_1	Ilość wyprod. pary w tonach X_2	Zużycie węgla w tonach Y
15	8	5
5	6	4
0	8	6
-5	10	8
15	12	12

wyznaczyć: a) liniową funkcję regresji cechy Y względem pozostałych cech,

b) na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ wyznaczyć granice przedziałów ufności dla współczynników regresji wielorakiej,

c) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezy H_i: $A_i=0$ przeciw K_i: $A_i \neq 0$, $i=1, 2$,

d) obliczyć współczynnik korelacji wielorakiej.

([1]) Rocznik Statystyczny 1975.

4.175. Istnieje przypuszczenie, że koszt Y wyprodukowania jednego detalu na pewnych automatach jest funkcją liniową „wieku" automatu X_1 i wielkości dziennej produkcji X_2 tego automatu. Na podstawie danych zawartych w tablicy

X_1	X_2	Y
1	2,5	1
1	3,5	1,5
2	1,5	2,0
3	2,5	2,5
5	3,5	2,0

wyznaczyć: a) liniową funkcję regresji cechy Y względem pozostałych cech,

b) na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$, granice przedziałów ufności dla współczynników regresji wielorakiej,

c) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezy $H_1: A_1=0$ przeciw $K_1: A_1>0$ oraz $H_2: A_2=0$ przeciw $K_2: A_2<0$,

d) obliczyć współczynnik korelacji wielorakiej.

4.176. Aby zbadać przyczyny zaniedbań w nauce studentów studiów zaocznych, zebrano dane dotyczące ośmiu studentów: stopień zaniedbania studenta w nauce Y (stopień zaniedbania $=5-$ przeciętna ocena studenta w semestrze), czy student ma dzieci X_1 (tak – 1, nie – 0), czy student dojeżdża do szkoły X_2 (tak – 1, nie – 0), płeć studenta X_3 (kobieta – 1, mężczyzna – 0).

X_1	X_2	X_3	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	2
1	0	0	1
0	1	1	2
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3

Na podstawie przytoczonych danych wyznaczyć:

a) równanie liniowej funkcji regresji cechy Y względem pozostałych cech X_1, X_2, X_3,

b) na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$, granice przedziałów ufności dla współczynników regresji wielorakiej,

c) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezy $H_i: A_i=0$ przeciw $K_i: A_i\neq 0$ dla $i=1, 2, 3$,

d) obliczyć współczynnik korelacji wielorakiej.

4.177. Zebrano dane liczbowe dotyczące zarobków, wykształcenia, stażu i wydajności pewnej grupy pracowników (X_1 – wykształcenie: brak – 0, zasadnicze – 1, średnie 2;

X_2 – staż : poniżej roku – 0, od 1–3 lat – 1, od 3–5 lat – 2; X_3 – wydajność: poniżej normy – 0, w normie – 1, powyżej normy – 2; Y – zarobki w mln złotych):

X_1	X_2	X_3	Y
0	1	1	2,7
1	2	2	3,8
1	0	1	3,0
2	1	2	4,3
2	2	2	4,5

Wyznaczyć: a) liniową funkcję regresji cechy Y względem pozostałych cech, b) na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$ wyznaczyć granice przedziałów ufności dla współczynników regresji wielorakiej, c) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezy H_1: $A_1=0{,}5$ przeciw K_1: $A_1>0{,}5$, H_2: $A=0{,}2$ przeciw K_2: $A\neq 0{,}2$, H_3: $A_3=0{,}45$ przeciw K_3: $A_3<0{,}45$; f) obliczyć współczynnik korelacji wielorakiej.

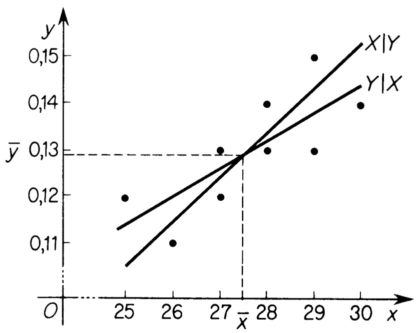
4.178. W celu zbadania przydatności pracownika do wykonywania pewnej pracy skonstruowano sprawdzian złożony z trzech zadań kontrolnych. Poddano sprawdzianowi grupę pracowników, notując osiągnięte przez nich wyniki (X_i – wynik i-tego zadania, 1 – pozytywny, 0 – negatywny, $i=1, 2, 3$), a następnie przydzielono im właściwą pracę i zanotowano liczbę błędów Y przy jej wykonaniu.

X_1	X_2	X_3	Y
0	0	0	6
1	0	0	3
0	1	0	2
0	0	1	5
1	1	0	0
1	0	1	2
0	1	1	3
1	1	1	1

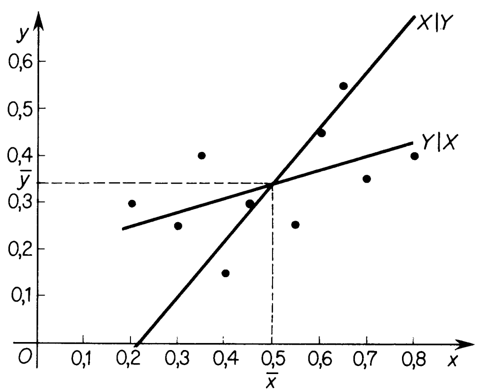
Założono przy tym, że Y jest liniową funkcją zmiennych X_1, X_2, X_3. Ponieważ układający sprawdzian mają wątpliwości, czy trafnie dobrano zadania kontrolne, więc należy: a) wyznaczyć liniową funkcję regresji Y względem pozostałych zmiennych, b) na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ przeprowadzić weryfikację hipotez dotyczących istotności każdego ze współczynników regresji wielorakiej, c) w przypadku stwierdzenia braku podstaw do odrzucenia którejś z hipotez odpowiednią zmienną pominąć i ponownie wyznaczyć liniową funkcję regresji Y względem pozostałych zmiennych, a następnie na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezy o istotności nowych współczyników regresji wielorakiej, d) w przypadku, gdy wszystkie współczynniki okażą się istotnie różne od zera, wtedy na poziomie ufności $1-\alpha=0{,}05$ wyznaczyć dla nich realizacje przedziałów ufności oraz wyznaczyć współczynnik korelacji wielorakiej.

Odpowiedzi

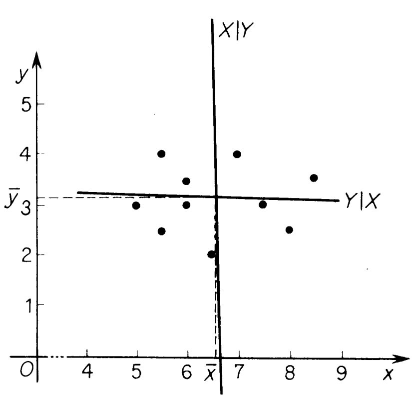
Odpowiedzi do zadań **4.55–4.64**



Rys. 4.12. Do zad. 4.55

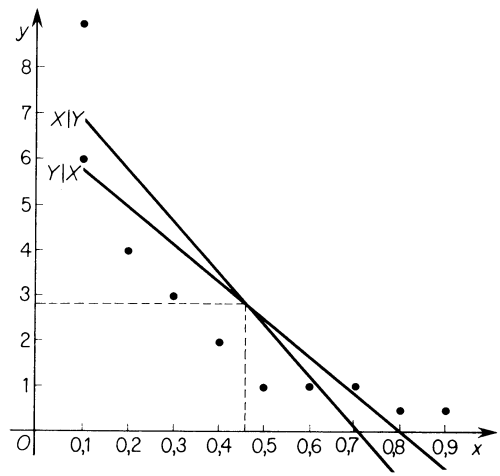


Rys. 4.13. Do zad. 4.56

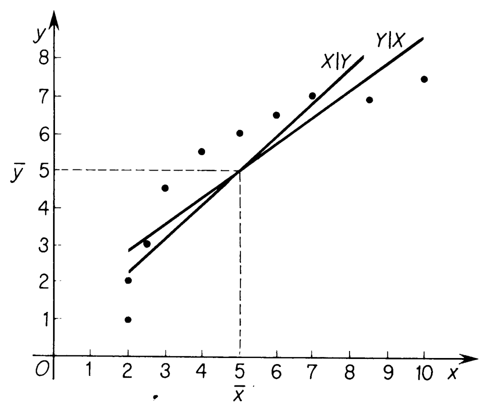


Rys. 4.14. Do zad. 4.57

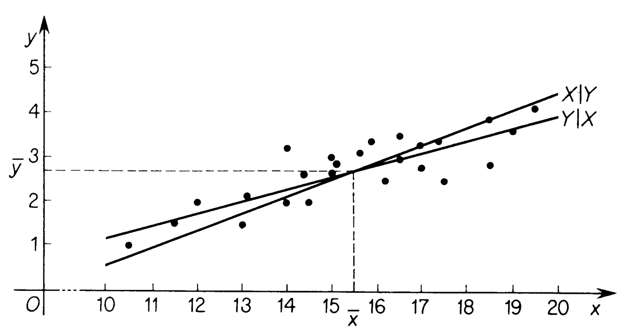
Nr zadania	Diagram Nr rys.	$\bar{x}$	$\bar{y}$	s_X^2	s_Y^2	s_X	s_Y	cov (x, y)	r	Proste regresji			φ
										Y względem X	X względem Y	ortogonalnej	
4.55	4.12	27,5	0,129	2,25	0,000129	1,5	0,0114	0,0135	0,7924	$y=0{,}006x-0{,}036$	$y=0{,}0096x-0{,}1338$	$y=0{,}005996x-0{,}0359$	12′
4.56	4.13	6,55	3,1	1,2225	0,39	1,1057	0,6245	−0,005	−0,0072	$y=-0{,}0041x+3{,}1268$	$y=-78x+514$	$y=-0{,}006x+3{,}1393$	89°3′
4.57	4.14	0,5	0,34	0,033	0,0119	0,1817	0,1091	0,01	0,5046	$y=0{,}3030x+0{,}1885$	$y=1{,}19x-0{,}255$	$y=0{,}3986x+0{,}1407$	41°10′
4.58	4.15	0,46	2,8	0,0744	7,11	0,2728	2,6665	−0,623	−0,8566	$y=-8{,}3737x+6{,}6519$	$y=-11{,}4125x+8{,}0498$	$y=-11{,}3810x+8{,}0352$	1°48′
4.59	4.16	5	5	7,15	4,7	2,6739	2,1679	5,15	0,8884	$y=0{,}7203x+1{,}3986$	$y=0{,}9126x+0{,}4369$	$y=0{,}7900x+1{,}0498$	6°37′
4.60	4.17	15,488	2,732	5,3459	0,5830	2,3121	0,7635	1,4956	0,8472	$y=0{,}2798x-1{,}6010$	$y=0{,}3898x-3{,}3054$	$y=0{,}2880x-1{,}7281$	5°40′
4.61	4.18	13,68	248	4,2576	1,4896	2,0634	1,2205	−1,1464	−0,4552	$y=-0{,}2693x+6{,}1635$	$y=-1{,}2994x+20{,}2554$	$y=-0{,}3604x+7{,}4099$	37°21′
4.62	4.19	12,5	2,52	1,38	1,3896	1,1747	1,1788	−0,03	−0,0217	$y=-0{,}0217x+2{,}7917$	$y=-46{,}32x+581{,}52$	$y=-1{,}1727x+17{,}1790$	87°31′
4.63	4.20	6,12	4,02	6,2256	8,3896	2,4951	2,8965	5,6976	0,7884	$y=0{,}9152x-1{,}5810$	$y=1{,}4725x-4{,}9916$	$y=1{,}2078x-3{,}3716$	13°21′
4.64	4.21	5,4	4,48	7,78	5,8496	2,7893	2,4186	0,438	0,0649	$y=0{,}0563x+4{,}1760$	$y=13{,}3553x-67{,}6384$	$y=-0{,}2163x+3{,}3121$	82°30′



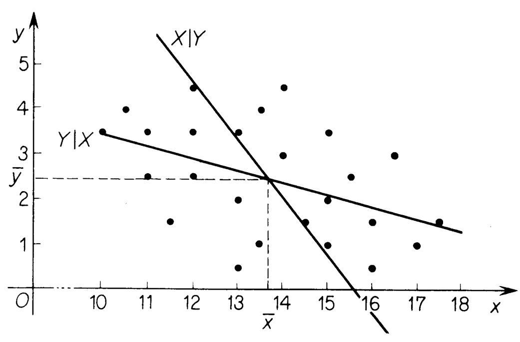
Rys. 4.15. Do zad. 4.58



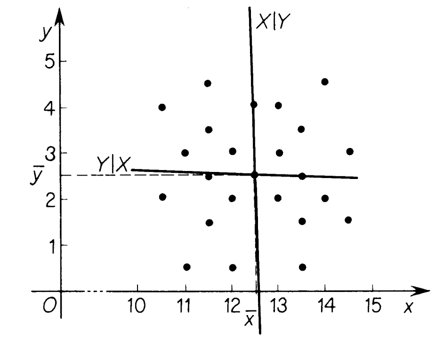
Rys. 4.16. Do zad. 4.59



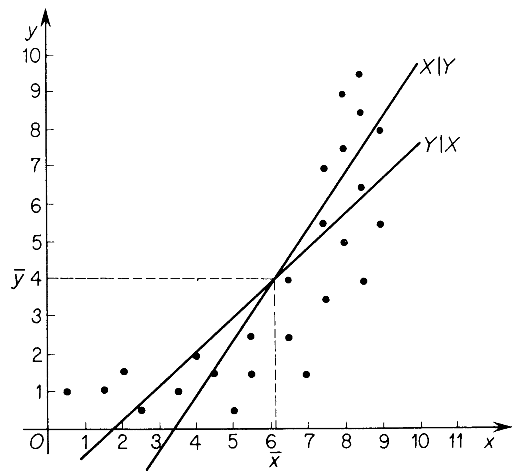
Rys. 4.17. Do zad. 4.60



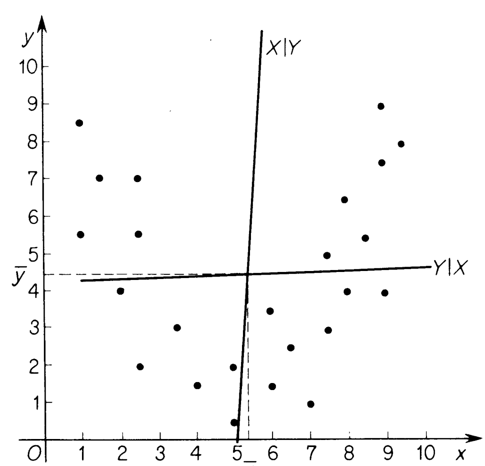
Rys. 4.18. Do zad. 4.61



Rys. 4.19. Do zad. 4.62



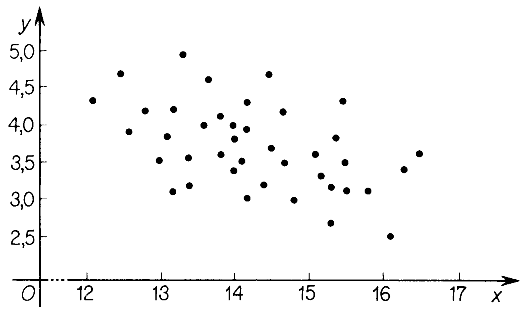
Rys. 4.20. Do zad. 4.63



Rys. 4.21. Do zad. 4.64

4.65.

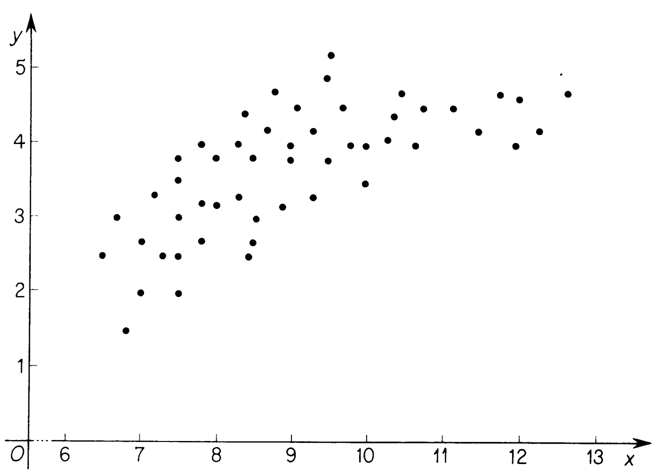
$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$				
	12,5	13,4	14,3	15,2	16,1
2,7	—	—	—	1	1
3,2	—	2	3	4	2
3,7	1	4	5	3	1
4,2	2	3	3	1	—
4,7	1	2	1	—	—



Rys. 4.22. Do zad. 4.65

4.66.

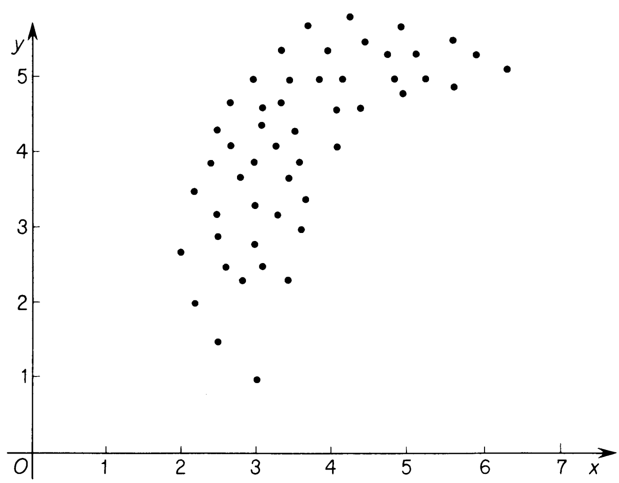
$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$						
	6,9	7,8	8,7	9,6	10,5	11,4	12,3
1,8	2	1	—	—	—	—	—
2,5	3	2	2	—	—	—	—
3,2	2	4	3	2	—	—	—
3,9	—	3	5	4	2	1	2
4,6	—	—	3	2	3	2	2



Rys. 4.23. Do zad. 4.66

4.67.

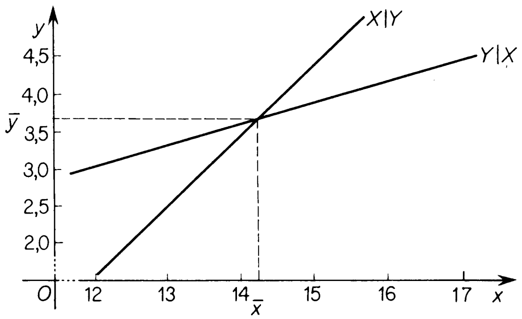
$\bar{y}_k$	$\bar{x}_i$				
	2,4	3,3	4,2	5,1	6,0
1,3	1	1	—	—	—
2,0	2	2	—	—	—
2,7	3	2	—	—	—
3,4	3	4	—	—	—
4,1	3	5	1	—	—
4,8	1	4	4	3	2
5,5	—	1	3	3	2



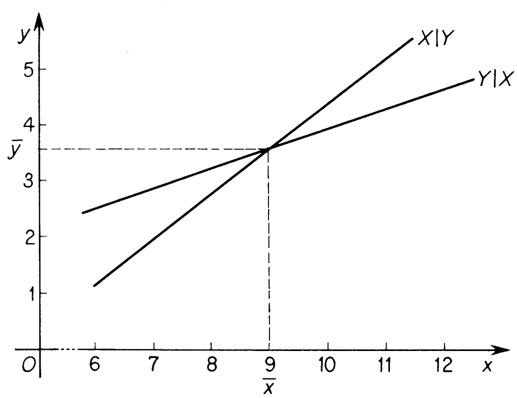
Rys. 4.24. Do zad. 4.67

4.68. Tak. Diagram korelacyjny na rys. 4.17 wskazuje na istnienie związków korelacyjnych o współczynniku korelacji bliskim jedności. Diagram z rys. 4.18, w porównaniu z poprzednim, sugeruje, że wartość bezwzględna współczynnika korelacji jest mniejsza niż poprzednio i że jest on ujemny. Ostatni rysunek 4.19 pozwala przypuszczać, że brak związków korelacyjnych między badanymi cechami.

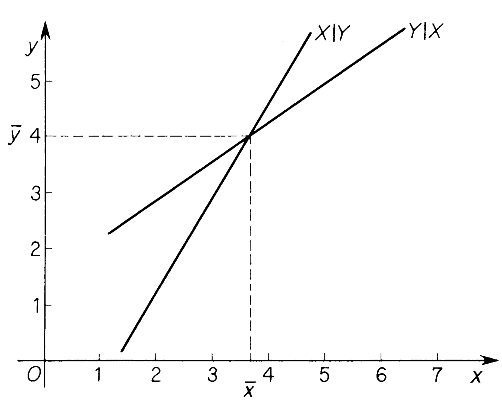
Odpowiedzi do zadań **4.69–4.71**



Rys. 4.25. Do zad. 4.69



Rys. 4.26. Do zad. 4.70



Rys. 4.27. Do zad 4.71

Nr zadania	Nr rys.	$\bar{x}$	$\bar{y}$	s_X^2	s_Y^2	s_X	s_Y	cov (x,y)	r	Proste regresji			φ
										Y względem X	X względem Y	ortogonalnej	
4.69	4.25	14,225	3,675	1,0510	0,2744	1,0252	0,5238	0,2914	0,5426	$y=0,2773x-0,2773$	$y=0,9417x-9,7484$	$y=0,3335x-1,0789$	27°47′
4.70	4.26	9,042	3,592	2,4264	0,6695	1,5577	0,8183	0,8487	0,6658	$y=0,3498x+0,4293$	$y=0,7889x-3,5408$	$y=0,4042x-0,0624$	18°59′
4.71	4.27	3,642	4,03	1,1952	1,4161	1,0933	1,19	0,8303	0,6382	$y=0,6947x+1,4999$	$y=1,7055x-2,1815$	$x=1,1418x-0,1286$	24°50′

Odpowiedzi do zadań **4.72–4.84**

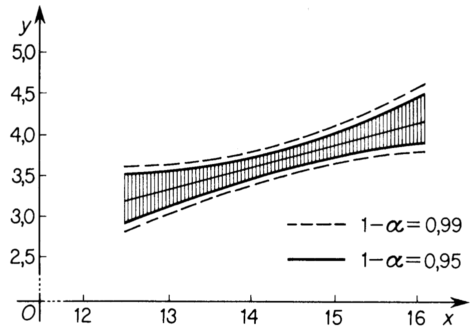
U góry realizacje przedziałów (ρ_1, ρ_2) ufności dla $1-\alpha=0{,}95$; u dołu – dla $1-\alpha=0{,}99$

Nr zad.	$\rho_1<\rho<\rho_2$		$a_1<\mathbf{a}<a_2$		$b_1<\mathbf{b}<b_2$	
	ρ_1	ρ_2	a_1	a_2	b_1	b_2
4.72	0,3248 0,1039	0,9487 0,9919	$2{,}2343\cdot10^{-3}$ $5{,}2063\cdot10^{-4}$	$9{,}7657\cdot10^{-3}$ 0,0115	−0,1398 −0,1870	0,0678 0,1150
4.73	−0,6340 −0,7534	0,6253 0,7471	−0,5015 −1,3811	0,4195 1,2991	0,0679 −1,3241	6,1857 7,5777
4.74	−0,1833 −0,3953	0,8608 0,9103	−0,1197 −0,3120	0,7257 0,9180	−0,0363 −0,1387	0,4133 0,5157
4.75	−0,9655 −0,9782	−0,4927 −0,2976	−12,4862 −14,3577	−4,2612 −2,3897	4,4527 3,4519	8,8511 9,8519
4.76	0,5873 0,4142	0,9735 0,9833	0,4168 0,2787	1,0238 1,1619	−0,3219 −1,1049	3,1191 3,9021
4.77	0,6795 0,6025	0,9308 0,9463	0,2041 0,1771	0,3555 0,3825	−2,7862 −3,2093	−0,4158 $7{,}3022\cdot10^{-3}$
4.78	−0,7207 −0,7811	−0,0732 0,0579	−0,4964 −0,5775	−0,0422 0,0389	3,0205 1,8984	9,3065 10,4286
4.79	−0,4133 −0,5160	0,3767 0,4834	−0,4545 −0,6090	0,4111 0,5656	−2,6415 −4,5814	8,2249 10,1648
4.80	0,5712 0,4762	0,9024 0,9241	0,6072 0,4972	1,2232 1,3332	−3,6168 −4,3437	0,4548 1,1817
4.81	−0,3389 −0,4496	0,4485 0,5470	−0,3169 −0,4501	0,4295 0,5627	1,9075 1,0975	6,4445 7,2545
4.82	0,2781 0,1823	0,7306 0,7744	0,1364 0,0886	0,4182 0,4660	−2,2918 −2,9756	1,7372 2,4210
4.83	0,4756 0,4032	0,7965 0,8271	0,2360 0,1980	0,4636 0,5016	−0,6142 −0,9628	1,4728 1,8214
4.84	0,4376 0,3622	0,7783 0,8113	0,4514 0,3702	0,9380 1,0192	0,5752 0,2664	2,4246 2,7334

4.85. Realizacje: $g_1(\bar{x}_i)$ granica dolna, $g_2(\bar{x}_i)$ granica górna. U góry granice przy $1-\alpha=0{,}95$, u dołu – przy $1-\alpha=0{,}99$.

a)

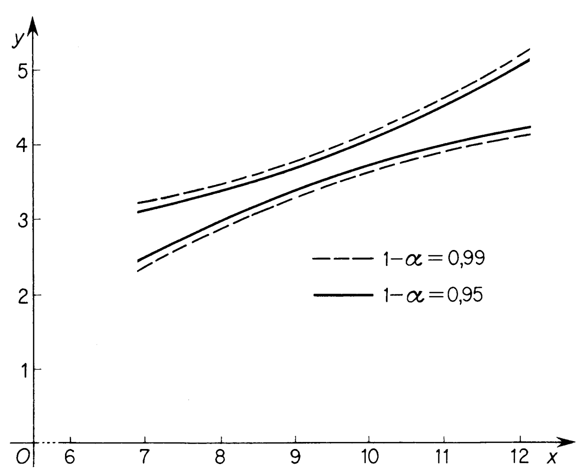
$\bar{x}_i$	$g_1(\bar{x}_i)$	$g_2(\bar{x}_i)$
12,5	2,9025 2,8053	3,4755 3,5727
13,4	3,2503 3,1865	3,6267 3,6905
14,3	3,5435 3,4944	3,8327 3,8818
15,2	3,7412 3,6745	4,1342 4,2009
16,1	3,8897 3,7886	4,4847 4,5858



Rys. 4.28. Do zad. 4.85 a)

b)

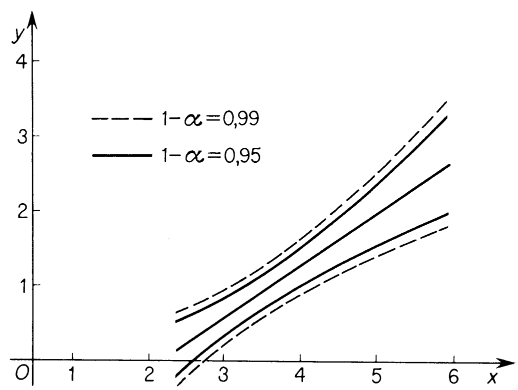
$\bar{x}_i$	$g_1(\bar{x}_i)$	$g_2(\bar{x}_i)$
6,9	2,5355 2,4349	3,1379 3,2385
7,8	2,9241 2,8484	3,3773 3,4530
8,7	3,2833 3,2174	3,6461 3,7120
9,6	3,5905 3,5276	3,9669 4,0298
10,5	3,8501 3,7691	4,3355 4,4165
11,4	4,0854 3,9779	4,7828 4,8357
12,3	4,3101 4,1728	5,1315 5,2688



Rys. 4.29. Do zad. 4.85 b)

c)

$\bar{x}_i$	$g_1(\bar{x}_i)$	$g_2(\bar{x}_i)$
2,4	−0,2350 −0,3693	0,5698 0,7041
3,3	0,5140 0,4208	1,0712 1,1644
4,2	1,1193 1,0195	1,7163 1,8161
5,1	1,5999 1,4519	1,4863 2,6343
6,0	2,0382 1,8250	3,3004 3,5116



Rys. 4.30. Do zad. 4.85 c)

4.86. H: $\rho=0$ przeciw K: $\rho\neq 0$; $r=0{,}3212$.

I sposób. Wartość statystyki t (4.5.1) — $t_d=0{,}959$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}975, 8) = 2{,}306$; zbiór krytyczny $I=(-\infty, -2{,}306\rangle \cup \langle 2{,}306, +\infty)$. Ponieważ $t_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho=0$ na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

II sposób. Z tablicy 23 wyznaczamy $r(0{,}05, 8)=0{,}6319$; zbiór krytyczny $I=(-\infty, -0{,}6319\rangle \cup \langle 0{,}6319, +\infty)$. Ponieważ $r\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho=0$ na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

4.87. H: $\rho=0$ przeciw K: $\rho>0$; $r=0{,}1206$. Wartość statystyki t (4.5.1) — $t_d=0{,}1206$. Z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}99, 8)=2{,}897$; zbiór krytyczny $I=\langle 2{,}897, +\infty)$. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho=0$. Należy więc odrzucić hipotezę K: $\rho>0$, że istnieje dodatnia korelacja między wielkością produkcji danego artykułu a zużyciem pary technologicznej.

4.88. H: $\rho=0$ przeciw K: $\rho<0$; $r=-0{,}1965$. Wartość statystyki t (4.5.1) — $t_d=-0{,}5658$. Z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}95, 8)=1{,}859$; zbiór krytyczny $I=(-\infty, -1{,}859\rangle$. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho=0$. Należy zatem odrzucić hipotezę K: $\rho<0$, że istnieje ujemna korelacja między miesięcznym dochodem przypadającym na jednego członka rodziny a wydatkami na artykuły żywnościowe w tej rodzinie.

4.89. H: $\rho = -0{,}8$ przeciw K: $\rho \neq -0{,}8$; $r = -0{,}9303$; $\rho_0 = -0{,}8$. Z tablicy 3 lub wzoru (4.4.2) dla $r = -0{,}9303$ wyznaczamy $z = -1{,}6606$ oraz dla $\rho_0 = -0{,}8$, $z_0 = -1{,}0986$, a następnie wartość statystyki U(4.5.4) – $u = -1{,}49$. Z tablicy 6 wyznaczamy $u(0{,}975) = 1{,}96$; zbiór krytyczny $I = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$. Ponieważ $u \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że współczynnik korelacji między badanymi cechami nie różni się istotnie od $-0{,}8$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

4.90. H: $\rho = 0{,}3$ przeciw K: $\rho > 0{,}3$; $r = 0{,}5686$, $\rho_0 = 0{,}3$. Z tablicy 3 dla $r = 0{,}5686$ wyznaczamy $z = 0{,}6455$, oraz dla $\rho_0 = 0{,}3$, $z_0 = 0{,}3095$, a następnie wartość statystyki U(4.5.4) – $u = 0{,}89$. Z tablicy 6 wyznaczamy $u(0{,}95) = 1{,}64$; zbiór krytyczny $I = \langle 1{,}64, +\infty)$. Ponieważ $u \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho = 0{,}3$. Na podstawie zebranych danych, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ należy więc odrzucić hipotezę, że współczynik korelacji między badanymi cechami jest istotnie większy niż 0,3.

4.91. H: $\rho = -0{,}5$ przeciw K: $\rho < -0{,}5$; $r = -0{,}9679$, $\rho_0 = -0{,}5$. Z tablicy 3 dla $r = -0{,}9679$, wyznaczamy $z = -2{,}0579$, oraz dla $\rho_0 = -0{,}5$, $z_0 = -0{,}5493$, a następnie wartość statystyki U(4.5.4) – $u = -3{,}99$. Z tablicy 6 wyznaczamy $u(0{,}99) = 2{,}33$; zbiór krytyczny $I = (-\infty, -2{,}33\rangle$. Ponieważ $u \in I$, więc hipotezę H: $\rho = -0{,}5$ odrzucamy na korzyść hipotezy K: $\rho < -0{,}5$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$. Zebrane dane nie przeczą więc hipotezie, że współczynnik korelacji między spożyciem ziemniaków a spożyciem artykułów zbożowych jest istotnie mniejszy od $-0{,}5$.

4.92. H: $\rho = 0$ przeciw K: $\rho \neq 0$. Wartość statystyki χ^2 (4.5.2) – $\chi_d^2 = 8{,}7508$. Z tablicy 8 wyznaczamy $\chi^2(0{,}99, 1) = 6{,}635$; zbiór krytyczny $I = \langle 6{,}635, +\infty)$. Ponieważ $\chi_d^2 \in I$, więc hipotezę H: $\rho = 0$ odrzucamy na korzyść hipotezy K: $\rho \neq 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$. Oznacza to, że dane nie przeczą hipotezie, że badane cechy są liniowo skorelowane.

4.93. H: $\rho = 0$ przeciw K: $\rho \neq 0$.

Sposób I. Wartość statystyki χ^2(4.5.2) – $\chi_d^2 = 3{,}3075$. Z tablicy 8 wyznaczamy $\chi^2(0{,}95, 1) = 3{,}841$; zbiór krytyczny $I = \langle 3{,}841, +\infty)$. Ponieważ $\chi_d^2 \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho = 0$, że badane cechy są liniowo nieskorelowane, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

Sposób II. Wartość statystyki U(4.5.3) – $u = 1{,}8389$. Z tablicy 6 wyznaczamy $u(0{,}95) = 1{,}96$; zbiór krytyczny $I = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, +\infty)$. Ponieważ $u \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H: $\rho = 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

4.94. H: $\rho = 0$ przeciw K: $\rho > 0$. Wartość statystyki U(4.5.3) – $u = 3{,}0282$. Z tablicy 6 wyznaczamy $u(0{,}99) = 2{,}33$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}33, +\infty)$. Ponieważ $u \in I$, więc hipotezę H: $\rho = 0$ odrzucamy na korzyść K: $\rho > 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$. Zebrane dane nie przeczą hipotezie, że między badanymi cechami istnieje korelacja dodatnia.

4.95. H: $\rho = 0$ przeciw K: $\rho < 0$. Wartość statystyki U(4.5.3) – $u = -2{,}4166$. Z tablicy 6 wyznaczamy $u(0{,}95) = 1{,}64$, zbiór krytyczny $I = (-\infty, -1{,}64\rangle$. Ponieważ $u \in I$, więc hipotezę H: $\rho = 0$ odrzucamy na korzyść K: $\rho < 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Zebrane dane nie przeczą hipotezie, że między badanymi cechami istnieje korelacja ujemna.

Odpowiedzi do zadań **4.96–4.105.**

Nr zad.	Statystyka testowa					Wniosek
	Nazwa	Nr wzoru	Wartość z dośw.	Nr tabl.	Zbiór krytyczny	
4.96	t	(4.5.1)	1,4355	7	$(-\infty, -2{,}101\rangle \cup \langle 2{,}101, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.97	t	(4.5.1)	0,0657	7	$\langle 2{,}457, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.98	t	(4.5.1)	$-1{,}4174$	7	$(-\infty, -1{,}67\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.99	χ^2	(4.5.2)	3,703	8	$\langle 3{,}841, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.100	U	(4.5.3)	3,1903	6	$(-\infty, -2{,}58\rangle \cup \langle 2{,}58, +\infty)$	odrzucić hipotezę H
4.101	U	(4.5.3)	1,2690	6	$\langle 1{,}64, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.102	U	(4.5.3)	$-1{,}4034$	6	$(-\infty, -1{,}64\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.103	U	(4.5.4)	$-1{,}0409$	6	$(-\infty, -2{,}58\rangle \cup \langle 2{,}58, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.104	U	(4.5.4)	$-1{,}8579$	6	$\langle 2{,}33, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.105	U	(4.5.4)	$-1{,}9478$	6	$(-\infty, -1{,}64\rangle$	odrzucić hipotezę H

4.106. Próbka I. $\bar{x}=8{,}6$, $\bar{y}=2{,}5$, $s_X=1{,}9339$, $s_Y=0{,}8660$, $\mathrm{cov}\,(x,\ y)=1{,}45$, $r_1=$ $=0{,}8658$.

Próbka II. $\bar{x}=8{,}67$, $\bar{y}=2{,}6$, $s_X=1{,}9120$, $s_Y=0{,}8406$, $\mathrm{cov}\,(x,\ y)=1{,}1747$, $r_2=$ $=0{,}4547$. Wartość statystyki U (4.6.1), $u=1{,}7357$. Zbiór krytyczny $(-\infty,\ -1{,}96\rangle\ \cup$ $\cup\ \langle 1{,}96,\ +\infty)$. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy. Oszacowanie współczynnika korelacji ((4.6.2)) obu populacji $r=0{,}6611$.

4.107. Próbka I. $\bar{x}=4{,}07$, $\bar{y}=5{,}53$, $s_X=1{,}4704$, $s_Y=2{,}1944$, $\mathrm{cov}\,(x,\ y)=2{,}7144$, $r_1=0{,}8412$.

Próbka II. $\bar{x}=3{,}93$, $\bar{y}=5{,}2$, $s_X=1{,}7876$, $s_Y=1{,}7776$, $\mathrm{cov}\,(x,y)=2{,}764$, $r_2=0{,}8698$.

Próbka III. $\bar{x}=4{,}03$, $\bar{y}=5{,}67$, $s_X=1{,}3225$, $s_Y=2{,}6437$, $\mathrm{cov}\,(x,\ y)=2{,}8444$, $r_3=$ $=0{,}8135$. Wartość statystyki χ^2 (4.6.3), $\chi^2_d=0{,}2291$. Zbiór krytyczny $\langle 5{,}991,\ +\infty)$. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy. Oszacowanie współczynnika korelacji w trzech populacjach ((4.6.2)), $r=0{,}8431$.

Odpowiedzi do zadań **4.108**–**4.115** w tablicy na str. 264.

Odpowiedzi do zadań **4.116**–**4.145** w tablicy na str. 265.

4.146. a) Stosując wzory (4.8.1)–(4.8.8), obliczamy kolejno: $E_X=122{,}5$, $E_Y=55{,}5$, $E_{XY}=78{,}25$, $E'=5{,}5124$, $E=5{,}5158$. Wartość statystyki F(4.8.13) – $F_d=0{,}074$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95,\ 2,\ 24)=3{,}40$; zbiór krytyczny $I=\langle 3{,}40,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1.

b) Ponieważ hipoteza H_1 nie została odrzucona, weryfikujemy hipotezę H_2. Stosując wzory (4.8.9)–(4.8.12), obliczamy: $G_X=127{,}5$, $G_Y=56{,}3$, $G_{XY}=80{,}25$, $G=5{,}7897$. Wartość statystyki F(4.8.15) – $F_d=0{,}6455$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95,\ 2,\ 26)=3{,}37$; zbiór krytyczny $I=\langle 3{,}37,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_2.

c) Ponieważ hipotezy H_1 i H_2 nie zostały odrzucone, więc można wyznaczyć oszacowanie wspólnej prostej regresji cechy Y_i względem X_i we wszystkich populacjach: $y=0{,}6388x+0{,}9254$.

4.147. a) Stosujemy wzory (4.8.1)–(4.8.8): $E_X=82{,}9$, $E_Y=93{,}1$, $E_{XY}=80{,}7$, $E'=$ $=7{,}9477$, $E=14{,}5416$. Wartość statystyki F(4.8.13) – $F_d=8{,}2966$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}99,\ 4,\ 40)=3{,}83$; zbiór krytyczny $I=\langle 3{,}83,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d\notin I$, więc hipotezę H_1 odrzucamy na poziomie istotności $\alpha=0{,}01$.

4.148. a) Stosując wzory (4.8.1)–(4.8.2), obliczamy $E_X=643{,}3$, $E_Y=281{,}8$, $E_{XY}=$ $=402{,}55$, $E'=26{,}9766$, $E=29{,}7837$. Wartość statystyki F(4.8.13) – $F_d=1{,}0406$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95,\ 4,\ 40)=2{,}61$; zbiór krytyczny $I=\langle 2{,}61,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1.

b) Ponieważ hipoteza H_1 nie została odrzucona, więc weryfikujemy hipotezę H_2. Na podstawie wzorów (4.8.9)–(4.8.12) obliczamy $G_X=643$, $G_Y=284{,}88$, $G_{XY}=402{,}55$, $G=32{,}8637$. Wartość statystyki F(4.8.15) – $F_d=1{,}1375$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95,\ 4,\ 44)=2{,}58$; zbiór krytyczny $I=\langle 2{,}58,\ +\infty)$. Ponieważ $F_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_2.

c) Ponieważ hipotezy H_1 i H_2 nie zostały odrzucone, więc można wyznaczyć oszacowanie wspólnej prostej regresji cechy Y_i względem X_i we wszystkich populacjach: $y=0{,}626x+1{,}8622$.

Nr zadania	Statystyka testowa								Wniosek	Oszacowanie wspólnej wartości r
	Nazwa	Nr wzoru	pomocnicza statystyka Z			Wartość z doświad.	Nr tabl.	Zbiór krytyczny		
			Nr wzoru	Nr tabl.	Wartość z doświad.					
4.108	U	(4.6.1)	(4.4.2)	3	$z_1=0,6328$ $z_2=0,7414$	$-0,4315$	6	$(-\infty, -1,96\rangle\cup\langle 1,96, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia H	0,60
4.109	U	(4.6.1)	(4.4.2)	3	$z_1=0,5763$ $z_2=0,3654$	1,4715	6	$\langle 1,64, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia H	0,42
4.110	U	(4.6.1)	(4.4.2)	3	$z_1=0,9287$ $z_2=1,1568$	$-2,7435$	6	$(-\infty, -2,33\rangle$	odrzucić H	—
4.111	χ^2	(4.6.3)	(4.4.2)	3	$z_1=0,3884$ $z_2=0,5627$ $z_3=0,5361$	1,0306	8	$\langle 5,991, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia H	0,46
4.112	χ^2	(4.6.3)	(4.4.2)	3	$z_1=-1,0454$ $z_2=-1,2933$ $z_3=-0,8872$	7,5778	8	$\langle 5,991, +\infty)$	odrzucić H	—
4.113	χ^2	(4.6.3)	(4.4.2)	3	$z_1=0,5627$ $z_2=0,6475$ $z_3=0,7414$	4,0932	8	$\langle 9,21, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia H	0,57
4.114	χ^2	(4.6.3)	(4.4.2)	3	$z_1=1,0714$ $z_2=1,4219$ $z_3=1,1270$ $z_4=1,1881$ $z_5=1,5275$	36,963	8	$\langle 13,277, +\infty)$	odrzucić H	—
4.115	χ^2	(4.6.3)	(4.4.2)	3	$z_1=0,7414$ $z_2=0,8291$ $z_2=0,6625$ $z_4=0,9287$ $z_5=0,8673$	5,3229	8	$\langle 9,488, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia H	0,67

Nr zadania	Statystyka testowa t					Wniosek
	Nr wzoru	Wartość z dośw.	Nr tabl.	Wartość krytyczna	Zbiór krytyczny	
4.116	(4.7.1)	−2,4495	7	2,306	$(-\infty, -2{,}306\rangle \cup \langle 2{,}306, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.117	(4.7.1)	0,2298	7	−1,859	$(-\infty, -1{,}859\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.118	(4.7.1)	3,6716	7	2,897	$\langle 2{,}897, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.119	(4.7.2)	−3,1943	7	3,355	$(-\infty, -3{,}355\rangle \cup \langle 3{,}355, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.120	(4.7.2)	1,7321	7	1,859	$\langle 1{,}859, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.121	(4.7.2)	−2,9505	7	−2,897	$(-\infty, -2{,}897\rangle$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.122	(4.7.1)	1,8283	7	2,712	$(-\infty, -2{,}712\rangle \cup \langle 2{,}712, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.123	(4.7.1)	2,6480	7	2,407	$\langle 2{,}407, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.124	(4.7.1)	−1,2835	7	−1,677	$(-\infty, -1{,}677\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.125	(4.7.2)	2,2437	7	2,024	$(-\infty, -2{,}024\rangle \cup \langle 2{,}024, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.126	(4.7.2)	1,9062	7	1,677	$\langle 1{,}677, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.127	(4.7.2)	−0,5003	7	−2,407	$(-\infty, -2{,}407\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.128	(4.7.1)	−1,4428	7	2,048	$(-\infty, -2{,}048\rangle \cup \langle 2{,}048, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.129	(4.7.2)	1,2310	7	2,763	$(-\infty, -2{,}763\rangle \cup \langle 2{,}763, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.130	(4.7.1)	−0,7035	7	2,819	$(-\infty, -2{,}819\rangle \cup \langle 2{,}819, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.131	(4.7.2)	2,0129	7	1,717	$\langle 1{,}717, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.132	(4.7.1)	−2,5110	7	2,101	$(-\infty, -2{,}101\rangle \cup \langle 2{,}101, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.133	(4.7.2)	−1,9022	7	−2,552	$(-\infty, -2{,}552\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.134	(4.7.1)	2,6425	7	2,508	$\langle 2{,}508, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.135	(4.7.2)	2,1515	7	2,074	$(-\infty, -2{,}074\rangle \cup \langle 2{,}074, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.136	(4.7.1)	1,2229	7	1,734	$\langle 1{,}734, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.137	(4.7.2)	1,7165	7	2,552	$\langle 2{,}552, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.138	(4.7.1)	1,5934	7	2,583	$\langle 2{,}583, +\infty)$	brak podstaw do odrzucena hip. H
4.139	(4.7.2)	−2,8239	7	−2,583	$(-\infty, -2{,}583\rangle$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.140	(4.7.1)	−2,1689	7	−1,725	$(-\infty, -1{,}725\rangle$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.141	(4.7.2)	−1,2244	7	2,086	$(-\infty, -2{,}086\rangle \cup \langle 2{,}086, +\infty)$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.142	(4.7.1)	−2,7115	7	−2,602	$(-\infty, -2{,}602\rangle$	odrzucamy hip. H na korzyść hip K
4.143	(4.7.2)	2,0848	7	1,753	$\langle 1{,}753, +\infty)$	odrzucamy hip. H na korzyść hip. K
4.144	(4.7.1)	−1,1258	7	−1,734	$(-\infty, -1{,}734\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H
4.145	(4.7.2)	−0,7087	7	−1,734	$(-\infty, -1{,}734\rangle$	brak podstaw do odrzucenia hip. H

4.149.

a) $y = 0{,}6145x + 2{,}6539, \quad V_r = 0{,}3972, \quad \varphi^2 = 0{,}1678, \quad \mathscr{R} = 0{,}9122;$

b) $y = -0{,}086x^2 + 1{,}397x + 1{,}3228, \quad V_r = 0{,}2588, \quad \varphi^2 = 0{,}1093, \quad \mathscr{R} = 0{,}9438;$

c) $y = -5{,}6227\frac{1}{x} + 0{,}2791, \quad V_r = 0{,}4468, \quad \varphi^2 = 0{,}1887, \quad \mathscr{R} = 0{,}9007;$

d) $y = 5{,}2778 \log x + 2{,}3636, \quad V_r = 0{,}2606, \quad \varphi^2 = 0{,}1101, \quad \mathscr{R} = 0{,}9433.$

4.150.

a) $y = 1{,}45x - 1{,}71, \quad V_r = 1{,}0214, \quad \varphi^2 = 0{,}1954, \quad \mathscr{R} = 0{,}8970;$

b) $y = 0{,}059x^2 + 1{,}1375x - 1{,}4215, \quad V_r = 0{,}8482, \quad \varphi^2 = 0{,}1623, \quad \mathscr{R} = 0{,}9153;$

c) $y = 0{,}2154x^{2{,}2448}, \quad V_r = 1{,}1348, \quad \varphi^2 = 0{,}2171, \quad \mathscr{R} = 0{,}8848;$

d) $y = 0{,}3211 \cdot 1{,}7921^x, \quad V_r = 1{,}2502, \quad \varphi^2 = 0{,}2392, \quad \mathscr{R} = 0{,}8722.$

4.151.

a) $y = -0{,}1311x + 14{,}864, \quad V_r = 0{,}0212, \quad \varphi^2 = 0{,}0168, \quad \mathscr{R} = 0{,}9916;$

b) $y = 0{,}0001x^2 - 0{,}1353x + 14{,}8802, \quad V_r = 0{,}0211, \quad \varphi^2 = 0{,}0168, \quad \mathscr{R} = 0{,}9916;$

c) $y = 15{,}02e^{-0{,}0104x}, \quad V_r = 0{,}0224, \quad \varphi^2 = 0{,}0178, \quad \mathscr{R} = 0{,}9911;$

d) $y = 16{,}4848\frac{1}{x} + 11{,}2232, \quad V_r = 0{,}3314, \quad \varphi^2 = 0{,}2632, \quad \mathscr{R} = 0{,}8584.$

4.152

a) $y = 0{,}0116x + 1{,}0051, \quad V_r = 5{,}981 \cdot 10^{-4}, \quad \varphi^2 = 0{,}1459, \quad \mathscr{R} = 0{,}9242;$

b) $y = 0{,}1303 \log x + 0{,}9966, \quad V_r = 0{,}0012, \quad \varphi^2 = 0{,}2927, \quad \mathscr{R} = 0{,}8410;$

c) $y = 0{,}993x^{0{,}0545}, \quad V_r = 1{,}1288 \cdot 10^{-3}, \quad \varphi^2 = 0{,}2753, \quad \mathscr{R} = 0{,}8513;$

d) $y = -0{,}1302\frac{1}{x} + 1{,}1283, \quad V_r = 0{,}0021, \quad \varphi^2 = 0{,}5122, \quad \mathscr{R} = 0{,}6984.$

4.153.

$$y = 1{,}8558 \sin \frac{\pi(x+2{,}5)}{3{,}5} + 2{,}8125, \quad V_r = 0{,}1096, \quad \varphi^2 = 0{,}0784, \quad \mathscr{R} = 0{,}96.$$

4.154.

a) $y = 0{,}1754x^2 - 0{,}8967x + 1{,}8463, \quad V_r = 2{,}5591, \quad \varphi^2 = 0{,}305, \quad \mathscr{R} = 0{,}8336;$

b) $y = 0{,}3197x^2 - 3{,}2824x + 10{,}3952, \quad V_r = 2{,}0451, \quad \varphi^2 = 0{,}3496, \quad \mathscr{R} = 0{,}8065.$

4.155.

a) $y = 0{,}3498x + 0{,}4293, \quad V_r = 0{,}3727, \quad \varphi^2 = 0{,}556, \quad \mathscr{R} = |r| = 0{,}6658;$

b) $y = -0{,}0849x^2 - 1{,}9594x - 6{,}9777, \quad V_r = 0{,}3221, \quad \varphi^2 = 0{,}4811, \quad \mathscr{R} = 0{,}7204;$

c) $y = 7{,}6613 \log x - 3{,}6862, \quad V_r = 0{,}3525, \quad \varphi^2 = 0{,}5266, \quad \mathscr{R} = 0{,}6881;$

d) $y = 0{,}3752x^{1{,}0188}, \quad V_r = 0{,}382, \quad \varphi^2 = 0{,}5705, \quad \mathscr{R} = 0{,}6553.$

4.156.

a) $y = 0{,}6947x + 1{,}4999, \quad V_r = 0{,}8393, \quad \varphi^2 = 0{,}5927, \quad \mathscr{R} = 0{,}6382;$

b) $y = -0{,}1311x^2 + 1{,}7524x - 0{,}4566, \quad V_r = 0{,}8136, \quad \varphi^2 = 0{,}5745, \quad \mathscr{R} = 0{,}6523;$

c) $y = 6{,}12 \log x + 0{,}7081, \quad V_r = 0{,}8233, \quad \varphi^2 = 0{,}5814, \quad \mathscr{R} = 0{,}6470;$

d) $y = -9{,}1321\frac{1}{x} + 6{,}7554, \quad V_r = 0{,}8389, \quad \varphi^2 = 0{,}5924, \quad \mathscr{R} = 0{,}6385.$

4.157. a) $\eta^2_{Y|X} = 0{,}3026, \quad \eta^2_{X|Y} = 0{,}3033.$

1. Wartość statystyki F (4.11.1) – $F_d = 3{,}7966$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 4, 35) = 2{,}64$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}64, +\infty)$. Ponieważ $F_d \in I$, więc hipotezę $H_1: H^2_{Y|X} = 0$ odrzucamy na korzyść $K_1: H^2_{Y|X} \neq 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

2. Wartość statystyki F (4.11.2) – $F_d = 3{,}8092$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 4, 35) = 2{,}64$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}64, +\infty)$. Ponieważ $F_d \in I$, więc hipotezę $H_2: H^2_{X|Y} = 0$ odrzucamy na korzyść $K_2: H^2_{X|Y} \neq 0$ na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

3. Wartość statystyki F (4.12.1) – $F_d = 0{,}1369$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 3, 35) = 2{,}88$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}88, +\infty)$. Ponieważ $F_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy $H_3: H^2_{Y|X} - \rho^2 = 0$, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

b) $\eta^2_{Y|X} = 0{,}5238$, $\eta^2_{X|Y} = 0{,}4602$.

1. Wartość statystyki F (4.11.1) – $F_d = 7{,}8830$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 6, 43) = 2{,}31$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}31, +\infty)$. Ponieważ $F_d \in I$, więc hipotezę H_1 odrzucamy na korzyść hipotezy K_1 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

2. Wartość statystyki F (4.11.2) – $F_d = 10{,}5911$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 4, 45) = 2{,}57$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}57, +\infty)$. Ponieważ $F_d \in I$, więc hipotezę H_2 odrzucamy na korzyść hipotezy K_2, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

3. Wartość statystyki F (4.12.1) – $F_d = 1{,}454$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 5, 43) = 2{,}43$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}43, +\infty)$. Ponieważ $F_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_3 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

c) $\eta^2_{Y|X} = 0{,}4637$, $\eta^2_{X|Y} = 0{,}5076$.

1. Wartość statystyki F (4.11.1) – $F_d = 9{,}7271$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 4, 45) = 2{,}57$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}57, +\infty)$. Ponieważ $F_d \in I$, więc hipotezę H_1 odrzucamy na korzyść hipotezy K_1 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

2. Wartość statystyki F (4.11.2) – $F_d = 7{,}3879$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 6, 43) = 2{,}31$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}31, +\infty)$. Ponieważ $F_d \in I$, więc hipotezę H_2 odrzucamy na korzyść K_2 na poziomie istotości $\alpha = 0{,}05$.

3. Wartość statystyki F (4.12.1) – $F_d = 1{,}5775$. Z tablicy 9 wyznaczamy $F(0{,}95, 3, 45) = 2{,}81$; zbiór krytyczny $I = \langle 2{,}81, +\infty)$. Ponieważ $F_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_3 na poziomie istotości $\alpha = 0{,}05$.

4.158. $r_s = 0{,}77$, $r_k = 0{,}6$.

4.159. $r_s = -0{,}19$, $r_k = -0{,}14$.

4.160. $r_s = 0{,}8485$, $r_k = 0{,}6444$.

4.161. a) $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$; b) $(n-2)\binom{n}{2}$; c) $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$; d) $\binom{n}{2}\binom{n-2}{t}$;

e) $\binom{n}{2}\left[1 + (n-2) + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-2}{n-2}\right] = \binom{n}{2}2^{n-2}$, ponieważ suma w nawiasie kwadratowym jest równa sumie wszystkich współczynników w rozwinięciu $(a+b)^{n-2}$, a ta jest równa 2^{n-2}.

4.162. Nie, wynika to ze wzoru (4.14.3); ρ_{12} będzie wówczas równy zeru, gdy – prócz równości $\rho_{12.3} = 0$ – zajdzie jeszcze przynajmniej jedna z równości: $\rho_{13.2} = 0$, $\rho_{23.1} = 0$.

4.163. Tak, wystarczy rozważyć wzory (4.4.4) i wzór z zadania 4.161. Powyższe zadanie świadczy o tym, że przy tego rodzaju badaniach (patrz zad. 4.46, 4.164, 4.159) z wnioskami należy być bardzo ostrożnym.

4.164. Rozwiązanie analogiczne jak w zad. 4.44.

$$-\rho_{12.3}\rho_{13.2}-\sqrt{1-\rho_{12.3}^2-\rho_{13.2}^2+\rho_{12.3}^2\rho_{13.2}^2}\leqslant\rho_{23.1}\leqslant$$
$$\leqslant-\rho_{12.3}\rho_{13.2}+\sqrt{1-\rho_{12.3}^2-\rho_{13.2}^2+\rho_{12.3}^2\rho_{13.2}^2}.$$

4.165. Skorzystać z nierówności w odpowiedzi do zad. 4.164. a) nie; b) tak; c) nie; d) tak.

4.166. a) Z nierówności (4.4.4) przy $\rho_{12}=\rho_{13}=d$ wynika: $2d^2-1\leqslant\rho_{23}\leqslant 1$. Jeśli więc $-1<d<0$, to aby $\rho_{23}>0$, winno być $2d^2-1>0$, tzn. $-1<d<\frac{1}{2}\sqrt{2}$, jeśli zaś $0<d<1$, to aby mogło być $\rho_{23}<0$, winno być $2d^2-1<0$, tz. $0<\rho_{12}=\rho_{13}=d<\frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) trzeci współczynnik ma należeć do przedziału $\langle 0, 1\rangle$; c) $\langle -1, 0\rangle$.

4.167. Nie, wynika to z pierwszego ze wzorów (4.14.3); $\rho_{12.3}$ będzie równy zeru, gdy prócz równości $\rho_{12}=0$ – będzie spełniony przynajmniej jeden z warunków: $\rho_{13}=0$, $\rho_{23}=0$.

4.168. a) Współczynników $R_{i(u)}$ korelacji wielorakiej X_i względem t dowolnych innych zmiennych spośród $X_1,\ldots,X_{i-1}$, $X_{i+1},\ldots,X_n$, gdzie $i=1,\ldots,n$, a u jest zbiorem różnych t wskaźników spośród $1, 2,\ldots,i-1, i+1,\ldots,n$ jest $n\binom{n-1}{t}$.

b) Liczba wszystkich $R_{i(u)}$ jest równa $n(n-1)+n\binom{n-1}{1}+\ldots+n\binom{n-1}{n-1}=n(2^{n-1}-1)$ (uzasadnienie w odpowiedzi do zad. 4.161 e);

c) nie wszystkie one są jednak różne, gdyż w pierwszym składniku policzone zostały współczynniki $R_{i(j)}$, $i, j=1,\ldots,n$, $i\neq j$ jako różne od $R_{j(i)}$ (patrz wzór (4.14.8)), wszystkich więc różnych współczynników jest o $\binom{n}{2}$ mniej, a więc jest ich $n(2^n-n-1)/2$.

4.169. $\bar{x}_1=8{,}015$, $\bar{x}_2=99{,}35$, $\bar{x}_3=1{,}4713$; $s_1=0{,}1324$, $s_2=3{,}1811$, $s_3=0{,}0127$; cov $(x_1, x_2)=-0{,}4033$, cov $(x_1, x_3)=6{,}62\cdot10^{-4}$, cov $(x_2, x_3)=-0{,}0193$; $r_{12}=-0{,}9576$, $r_{13}=0{,}3948$, $r_{23}=-0{,}4781$; $r_{12.3}=-0{,}9528$, $r_{13.2}=-0{,}2491$, $r_{23.1}=-0{,}3779$; $R_{1(23)}=0{,}9603$, $R_{2(13)}=0{,}9638$, $R_{3(12)}=0{,}5258$; $x_1=-0{,}0415x_2-0{,}8541x_3+13{,}3947$, $x_2=-21{,}8836x_1-29{,}7669x_3+318{,}5431$, $x_3=-0{,}0726x_1-0{,}0048x_2+2{,}5301$.

4.170. $\bar{x}=36{,}08$, $\bar{x}_2=10{,}96$, $\bar{x}_3=8{,}64$; $s_1=0{,}1939$, $s_2=0{,}1020$, $s_3=0{,}0490$; cov $(x_1, x_2)=0{,}0052$, cov$(x_1, x_3)=0{,}0008$, cov$(x_2, x_3)=0{,}0036$; $r_{12}=0{,}263$, $r_{13}=0{,}0842$, $r_{23}=0{,}7206$; $r_{12.3}=0{,}2928$, $r_{13.2}=-0{,}1574$, $r_{23.1}=0{,}7265$; $R_{1(23)}=0{,}3037$, $R_{2(13)}=0{,}7486$, $R_{3(12)}=0{,}7265$; $x_1=0{,}8x_2-0{,}8667x_3+34{,}8$, $x_2=0{,}1072x_1+1{,}465x_3-5{,}565$, $x_3=-0{,}0286x_1+0{,}3604x_2+5{,}722$.

4.171. $\bar{x}_1=164{,}98$, $\bar{x}_2=21{,}28$, $\bar{x}_3=67{,}38$; $s_1=20{,}2253$, $s_2=0{,}5036$, $s_3=2{,}9586$; cov$(x_1, x_2)=9{,}9356$, cov $(x_1, x_3)=56{,}032$, cov $(x_2, x_3)=1{,}3556$; $r_{12}=0{,}9755$, $r_{13}=0{,}9364$, $r_{23}=0{,}9098$; $r_{12.3}=0{,}8483$, $r_{13.2}=0{,}5354$, $r_{23.1}=-0{,}0474$; $R_{1(23)}=0{,}9826$, $R_{2(13)}=0{,}9756$, $R_{3(12)}=0{,}9365$; $x_1=28{,}81x_2+1{,}94x_3-578{,}8$, $x_2=0{,}025x_1-0{,}0051x_3+17{,}5$, $x_3=0{,}1478x_1-0{,}444x_2+52{,}44$.

4.172. $\bar{x}_1=7{,}8571$, $\bar{x}_2=30{,}7714$, $\bar{x}_3=12{,}3571$; $s_1=0{,}9897$, $s_2=10{,}2574$, $s_3=2{,}8091$; cov$(x_1, x_2)=0{,}1388$, cov$(x_1, x_3)=1{,}1796$, cov$(x_2, x_3)=2{,}8091$; $r_{12}=0{,}0137$, $r_{13}=0{,}4243$, $r_{23}=0{,}8661$; $r_{12.3}=-0{,}7816$, $r_{13.2}=0{,}8252$, $r_{23.1}=0{,}9501$; $R_{1(23)}=0{,}8252$, $R_{2(13)}=0{,}9501$, $R_{3(12)}=0{,}9593$; $x_1=-0{,}1366x_2+0{,}5815x_3+4{,}8748$, $x_2=-4{,}4717x_1+3{,}8310x_3+18{,}5659$, $x_3=1{,}1708x_1+0{,}2356x_2-4{,}0917$.

4.173. $\bar{x}_1=135{,}75$, $\bar{x}_2=204{,}25$, $\bar{x}_3=53{,}0375$, $\bar{x}_4=16{,}4375$; $s_1=13{,}5347$, $s_2=28{,}9774$, $s_3=9{,}2723$, $s_4=3{,}1851$; $\mathrm{cov}(x_1, x_2)=391{,}438$, $\mathrm{cov}(x_1, x_3)=-119{,}2281$, $\mathrm{cov}(x_1, x_4)=$ $=-42{,}8406$, $\mathrm{cov}(x_2, x_3)=-251{,}909$, $\mathrm{cov}(x_2, x_4)=-91{,}6343$, $\mathrm{cov}(x_3, x_4)=28{,}4074$; $r_{12}=0{,}9981$, $r_{13}=-0{,}9500$, $r_{14}=-0{,}9938$, $r_{23}=-0{,}9376$, $r_{24}=-0{,}9928$, $r_{34}=0{,}9619$; $r_{12.3}=0{,}9890$, $r_{13.2}=-0{,}6619$, $r_{23.1}=0{,}5507$, $r_{12.4}=0{,}8602$, $r_{14.2}=-0{,}3911$, $r_{24.1}=$ $=-0{,}1297$, $r_{13.4}=0{,}1953$, $r_{14.3}=-0{,}9370$, $r_{34.1}=0{,}5124$, $r_{23.4}=0{,}5305$, $r_{24.3}=$ $=-0{,}9564$, $r_{34.2}=0{,}7455$; $r_{12.34}=0{,}91$, $r_{13.24}=-0{,}60$, $r_{14.23}=0{,}20$, $r_{23.14}=0{,}72$, $r_{24.13}=-0{,}5746$, $r_{34.12}=0{,}70$; $R_{1(2)}=|r_{12}|=0{,}9981$, $R_{1(23)}=0{,}99893$, $R_{1(234)}=0{,}99898$, $R_{2(1)}=|r_{12}|=0{,}9981$, $R_{2(13)}=0{,}9987$, $R_{2(134)}=0{,}9991$, $R_{3(1)}=|r_{13}|=0{,}95$, $R_{3(12)}=$ $=0{,}9654$, $R_{3(124)}=0{,}925$, $R_{4(1)}=|r_{14}|=0{,}9938$, $R_{4(12)}=0{,}9939$, $R_{4(123)}=0{,}9969$;

$$\begin{aligned}
x_1&=0{,}3651x_2+0{,}0963x_3-3{,}8067x_4+118{,}6435,\\
x_2&=1{,}7974x_1+0{,}5233x_3-2{,}9078x_4-19{,}7046,\\
x_3&=-1{,}674x_1+1{,}0152x_2+4{,}9013x_4-7{,}6367,\\
x_4&=0{,}087x_1-0{,}1187x_2+0{,}1032x_3+23{,}3983.
\end{aligned}$$

4.174. a) $y=-0{,}09x_1+x_2-1{,}8$; b) $-0{,}28<A_1<0{,}10$, $0{,}0685<A_2<1{,}9315$;

c) weryfikacja hipotezy H_1: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=-2{,}038$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}975,\ 2)=4{,}303$, a następnie obszar krytyczny $I=(-\infty,\ -4{,}303\rangle\cup$ $\cup\langle 4{,}303,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1. Weryfikacja hipotezy H_2: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=4{,}6189$. Obszar krytyczny jak poprzednio. Ponieważ $t_d\in I$, więc hipotezę H_2 odrzucamy na korzyść hipotezy K_2.

d) $\mathscr{R}=0{,}9906$.

4.175. a) $y=0{,}2226x_1-0{,}1548x_2+1{,}6839$; b) $-0{,}5519<A_1<0{,}9971$, $-1{,}7059<A_2<$ $<1{,}3963$.

c) weryfikacja hipotezy H_1: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=1{,}2367$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}95,\ 2)=2{,}92$, a następnie obszar krytyczny $I=\langle 2{,}92,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1. Weryfikacja hipotezy H_2: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=-0{,}4294$; obszar krytyczny $I=(-\infty,\ -2{,}92)$. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_2.

d) $\mathscr{R}=0{,}7069$.

4.176. a) $y=x_1+1{,}5x_2+0{,}5x_3$; b) $-0{,}338<A_1<2{,}338$, $0{,}112<A_2<2{,}888$, $-0{,}888<A_3<1{,}888$;

c) weryfikacja hipotezy H_1: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=2$, z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}975,\ 4)=2{,}776$, a następnie obszar krytyczny $I=(-\infty,\ -2{,}776\rangle\cup\langle 2{,}776,$ $+\infty)$, ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1. Weryfikacja hipotezy H_2: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=3$, obszar krytyczny jak wyżej. Ponieważ $t_d\in I$, więc hipotezę H_2 odrzucamy na korzyść hipotezy K_2. Weryfikacja hipotezy H_3: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=1$. Obszar krytyczny jak poprzednio. Ponieważ $t_d\notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_3.

d) $\mathscr{R}=0{,}7293$.

4.177. a) $y=0{,}65x_1+0{,}25x_2+0{,}3x_3+2{,}1$; b) $-1{,}03<A_1<2{,}33$, $-1{,}43<A_2<1{,}93$, $-3{,}51<A_3<4{,}11$;

c) Weryfikacja hipotezy H_1: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=1{,}1338$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}95,\ 1)=6{,}314$; obszar krytyczny $I=\langle 6{,}314,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d \notin$ I, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_1. Weryfikacja hipotezy H_2: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=0{,}3779$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}975,\ 1)=12{,}706$. Obszar krytyczny $I=(-\infty,\ -12{,}706\rangle \cup \langle 12{,}706,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_2. Weryfikacja hipotezy H_3: według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=-0{,}5$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}95,\ 1)=6{,}314$. Obszar krytyczny $I=(-\infty,\ -6{,}314\rangle$. Ponieważ $t_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_3.

d) $\mathscr{R}=0{,}9980$.

4.178. a) $y=-2{,}5x_1-2{,}5x_2+5{,}25$;

b) Weryfikujemy hipotezę H_1: $A_1=0$ przeciw K_1: $A_1\neq 0$, według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=-4{,}4723$. Z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}975,\ 4)=2{,}776$; zbiór krytyczny $I=(-\infty,\ -2{,}776\rangle \cup \langle 2{,}776,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d \in I$, więc hipotezę H_1 odrzucamy na korzyść hipotezy K_1.

Weryfikujemy hipotezę H_2: $A_2=0$ przeciw K_2: $A_2\neq 0$. Obliczenia i zbiór krytyczny takie same jak wyżej, a więc hipotezę H_2 odrzucamy na korzyść hipotezy K_2.

Weryfikujemy hipotezę H_3: $A_3=0$ przeciw K_3: $A_3\neq 0$. Według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=0$. Obszar krytyczny jak poprzednio $I=(-\infty,\ -2{,}776\rangle \cup \langle 2{,}776,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d \notin I$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_3.

c) Otrzymany w poprzednim punkcie wynik i polecenie zawarte w treści zadania nakazują wyeliminować z rozważań zmienną X_3. Otrzymujemy

X_1	X_2	Y
0	0	6
1	0	3
0	1	2
0	0	5
1	1	0
1	0	2
0	1	3
1	1	1

Ponownie wyznaczamy liniową funkcję regresji Y względem X_1 i X_2 : $y=-2{,}5x_1-2{,}5x_2+5{,}25$. Weryfikujemy hipotezę H_1: $A_1=0$ przeciw K_1: $A_1\neq 0$. Według wzoru (4.15.12) obliczamy $t_d=-5$; z tablicy 7 wyznaczamy $t(0{,}975,\ 5)=2{,}571$. Zbiór krytyczny $I=(-\infty,\ -2{,}571\rangle \cup \langle 2{,}571,\ +\infty)$. Ponieważ $t_d \in I$, więc hipotezę H_1 odrzucamy na korzyść hipotezy K_2. Weryfikacja hipotezy H_2: $A_2=0$ przeciw K_2: $A_2\neq 0$ i wniosek końcowy analogicznie jak wyżej.

d) Ponieważ otrzymane współczynniki regresji wielorakiej różnią się istotnie od zera, więc wyznaczamy dla nich granice przedziałów ufności: $-3{,}7853<A_i<1{,}2147$, $i=1,\ 2$. Współczynnik korelacji wielorakiej $\mathscr{R}=0{,}9535$.

5 ANALIZA WARIANCJI

5.1. UWAGI WSTĘPNE

Analiza wariancji jest metodą statystyki matematycznej – bazującą na porównaniu wariancji – która w najprostszym przypadku jest rozszerzeniem testu do weryfikacji hipotezy o równości wartości przeciętnych w dwóch populacjach na większą ich liczbę.

Jednym z częściej rozwiązywanych za jej pomocą problemów jest analiza czynników zewnętrznych wpływających na wynik przeprowadzonego doświadczenia. W przypadku gdy np. obserwujemy ilość wydzielonej substancji podczas przeprowadzanego pewnego doświadczenia chemicznego przy różnych temperaturach, wtedy mamy do czynienia z *klasyfikacją jednoczynnikową*. Można także stosować klasyfikację według dwóch (albo kilku) kryteriów i wtedy mamy do czynienia z *klasyfikacją wielokrotną*.

Rozpatrzmy obecnie pewne najprostsze warianty analizy wariancji w przypadku klasyfikacji jedno- oraz dwuczynnikowej.

5.2. WERYFIKACJA HIPOTEZY O RÓWNOŚCI $k \geqslant 3$ WARTOŚCI PRZECIĘTNYCH W PRZYPADKU KLASYFIKACJI JEDNOCZYNNIKOWEJ

Niech badana cecha X ma w każdej z k populacji taki sam rozkład $N(\mu, \sigma)$. Z każdej z tych k populacji pobieramy próbkę o liczności n_i $(i=1,\ldots,k)$ odpowiednio. Niech x_{ij} $(i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,n_i)$ będzie j-tym wynikiem w i-tej próbce i niech $\bar{x}_i$ oznacza średnią i-tej próbki (średnią grupową), a $\bar{x}$ – średnią ogólną, tzn.

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \qquad \text{dla} \qquad i=1,\ldots,k,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{k} \bar{x}_i n_i, \qquad \text{gdzie} \qquad n = \sum_{1}^{k} n_i.$$

Sumę kwadratów odchyleń poszczególnych obserwacji x_{ij} od średniej ogólnej $\bar{x}$ można przedstawić w postaci sumy dwóch składników

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}[(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_i)+(\bar{x}_i-\bar{x})]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2+\sum_{1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{x})^2 n_i.\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Pierwszy składnik jest sumą sum kwadratów odchyleń między poszczególnymi obserwacjami a ich średnimi grupowymi i nazywany jest *sumą kwadratów odchyleń wewnątrz grup* albo *resztkową sumą kwadratów*. Drugi jest sumą kwadratów odchyleń średnich grupowych od średniej ogólnej i nazywany jest *sumą kwadratów pomiędzy grupami*.

Wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{gathered} q=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2, \qquad q_R=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2, \\ q_G=\sum_{1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{x})^2 n_i. \end{gathered} \tag{5.2.2}$$

Traktując wyniki x_{ij} jako realizację zmiennych losowych X_{ij}, oraz q, q_R, q_G jako realizacje zmiennych losowych Q, Q_R, Q_G, można wykazać (zad. 5.1), że zmienne losowe $Q/(n-1)$, $Q_R/(n-k)$, $Q_G/(k-1)$ są nieobciążonymi estymatorami nieznanej wariancji σ^2.

Można wykazać także [5], że zmienna losowa

$$F=\frac{Q_G}{k-1}\bigg/\frac{Q_R}{n-k} \tag{5.2.3}$$

ma rozkład F Snedecora o $(k-1,\ n-k)$ stopniach swobody.

Zadanie 5.1. Wykazać, że

$$E(Q/(n-1))=E(Q_R/(n-k))=E(Q_G/(k-1))=\sigma^2.$$

R o z w i ą z a n i e. Wykażemy najpierw, że

$$E\big(Q/(n-1)\big)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(X_{ij}-\bar{X})^2}{n-1}\right)=\sigma^2.$$

Ponieważ rozkłady wszystkich $n=\sum_{1}^{k}n_i$ zmiennych X_{ij} są identyczne – $N(\mu,\sigma)$, więc wszystkie n obserwacji x_{ij} możemy traktować jako próbkę pobraną z populacji, w której badana cecha X ma rozkład $N(\mu,\sigma)$. Jak wiemy ((2.2.6)) estymatorem nieobciążonym wariancji jest estymator $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X})^2$, co kończy dowód.

Wykażemy dalej, że $E\big((Q_R/(n-k)\big)=\sigma^2$. Rozpatrzmy i-tą grupę obserwacji $x_{i1},\dots,x_{in_i}$ i odpowiadające zmienne losowe $X_{i1},\dots,X_{in_i}$, z których każda ma rozkład $N(\mu,\sigma)$. Estymatorem nieobciążonym wariancji jest zatem

$$\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2, \qquad \text{tzn.} \qquad E\left(\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2\right)=\sigma^2.$$

Stąd wynika, że

$$E\Big(\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}-\bar{X}_i)^2\Big) = (n_i-1)\,\sigma^2,$$

więc

$$E\,(Q_R/(n-k)) = E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{n-k}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2\right) = \frac{1}{n-k}\sum_{1}^{k}(n_i-1)\sigma^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-k}\Big(\sum_{1}^{k} n_i - k\Big) = \sigma^2.$$

W celu wykazania ostatniej równości skorzystajmy z faktu, że $Q_G = Q - Q_R$. Stąd

$$E(Q_G) = E(Q) - E(Q_R) = (n-1)\sigma^2 - (n-k)\sigma^2 = (k-1)\sigma^2,$$

a zatem

$$E\,(Q_R/(k-1)) = \sigma^2.$$

M o d e l. Badana cecha X w k populacjach ma rozkłady $N(\mu_i, \sigma_i)$ $(i=1, 2,\ldots, k)$ odpowiednio, o jednakowych wariancjach $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$. Weryfikacja hipotezy $H\colon \mu_1 = \ldots = \mu_k$ wobec hipotezy alternatywnej K, że nie wszystkie wartości przeciętne μ_i są równe.

Weryfikację hipotezy H przeprowadzimy na podstawie wyników k próbek o licznościach $n_i\,(i=1,\ldots,k)$ z tych populacji. Ze względu na to, że rozpatrywany model wymaga spełnienia założenia równości wariancji badanej cechy w tych k populacjach, to w przypadku braku takiej informacji weryfikujemy najpierw hipotezę o równości wszystkich wariancji jednym z trzech testów: Bartletta, Cochrana-Coxa albo Hartleya (p. 3.2).

Do weryfikacji hipotezy H stosujemy test oparty na statystyce F określonej wzorem (5.2.3), która przy założeniu prawdziwości hipotezy H ma rozkład F Snedecora o $(k-1, n-k)$ stopniach swobody. Ze wzoru na Q_G widzimy, że należy przyjąć prawostronny zbiór krytyczny, tzn. przedział $\langle F(1-\alpha, k-1, n-k), +\infty)$, gdzie $F(1-\alpha, k-1, n-k)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu F Snedecora o $(k-1, n-k)$ stopniach swobody. W praktyce analizę wariancji w przypadku klasyfikacji pojedynczej wygodnie jest przedstawić za pomocą następującej tablicy:

T a b l i c a 5.1

Suma kwadratów odchyleń		Liczba stopni swobody	Średnia kwadratów	Wartość statystyki testowej
między grupami	$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2 = q_G$	$k-1$	$q_G/(k-1)$	
resztkowa wewnątrz grup	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = q_R$	$n-k$	$q_R/(n-k)$	$F_{\text{obl}} = \frac{q_G}{k-1} : \frac{q_R}{n-k}$
razem	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2 = q$	$n-1$		

Zadanie 5.2. Zmierzono długości czasów świecenia trzech typów żarówek, otrzymując (w h):

dla typu 1: 1802, 1992, 1854, 1880, 1761, 1900;

dla typu 2: 1664, 1755, 1823, 1862;

dla typu 3: 1877, 1710, 1882, 1720, 1950.

Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że wartości przeciętne czasów świecenia żarówek tych typów są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że te wartości przeciętne nie są jednakowe.

Rozwiązanie. Ponieważ nie wiemy, czy jest spełnione założenie o równości wariancji, konieczne w rozpatrywanym modelu, musimy najpierw zweryfikować hipotezę $H\colon \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2$. Wykorzystamy w tym celu test Bartletta (p. 3.2).

Z obliczeń otrzymujemy $\bar{x}_1=1864{,}8$, $\bar{x}_2=1776{,}0$, $\bar{x}_3=1827{,}8$;

$$\sum_1^6 (x_{1i}-\bar{x}_1)^2=32484, \quad \sum_1^4 (x_{2i}-\bar{x}_2)^2=22590, \quad \sum_1^5 (x_{3i}-\bar{x}_3)^2=45792;$$

$$\hat{s}^2=\frac{1}{n-k}\sum_1^k (n_i-1)\hat{s}_i^2=\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2=$$

$$=\tfrac{1}{12}(32484+22590+45792)=8405{,}5$$

oraz

$$\chi^2_{\mathrm{obl}}=\frac{2{,}303}{c}\left[(n-k)\log\hat{s}^2-\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\log\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{n_i-1}\right]=\frac{0{,}392}{c}.$$

Ponieważ $0{,}392\notin\langle 5{,}991,\ +\infty)$, więc – wobec $c>1$ – tym bardziej $\dfrac{0{,}392}{c}\notin \langle 5{,}991,\ +\infty)$, zatem na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ nie ma powodu do odrzucenia hipotezy o równości wariancji. Zakładając więc prawdziwość hipotezy H, możemy przejść do weryfikacji hipotezy $H_1\colon \mu_1=\mu_2=\mu_3$.

Obliczamy następnie $\bar{x}=1828{,}8$ oraz $\sum_1^3(\bar{x}_i-\bar{x})^2 n_i=18932{,}36$. Zatem

$$F_{\mathrm{obl}}=\frac{\dfrac{1}{k-1}\sum_1^k(\bar{x}_i-\bar{x})^2 n_i}{\dfrac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 18932{,}36}{8405{,}5}=1{,}126.$$

Z tablic kwantyli rozkładu F Snedecora odczytujemy $F(1-\alpha, k-1, n-k)=F(0{,}95, 2, 12)=$ $=3{,}88$, więc zbiorem krytycznym jest przedział $\langle 3{,}88,\ +\infty)$. Ze względu na to, że $F_{\mathrm{obl}}=$ $=1{,}126$ nie należy do tego przedziału, nie ma powodu do odrzucenia weryfikowanej hipotezy H_1 na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

5.3. WERYFIKACJA HIPOTEZ DOTYCZĄCYCH WARTOŚCI PRZECIĘTNYCH W PRZYPADKU KLASYFIKACJI PODWÓJNEJ

Rozważmy teraz sytuację, gdy na badaną cechę X wpływa jednocześnie: jeden z wariantów $A_1, \ldots, A_r$ czynnika A oraz jeden z wariantów $B_1, \ldots, B_p$ czynnika B. Zachodzi to np. wtedy, gdy badamy twardość X różnych wariantów stopu, w skład którego wchodzi metal A o różnych zawartościach $A_1, \ldots, A_r$ oraz metal B o zawartościach $B_1, B_2, \ldots, B_p$; podobnie gdy badamy plon X określonego zboża w zależności od r jego odmian oraz p rodzajów nawozu. W obu przypadkach rozporządzamy danymi z rp wariantów (A_i, B_j) $(i=1,\ldots,r\,;\,j=1,\ldots,p)$.

W tego rodzaju badaniach wszystkie obserwacje podzielone są na rp grup. Ograniczymy się tutaj do przypadku, gdy w każdym z rp wariantów dokonano jednakowej liczby l pomiarów badanej cechy X, które będziemy traktowali jako l-elementowe próbki pobrane z populacji wielu możliwych wyników osiągniętych w warunkach wariantu (A_i, B_j).

M o d e l. Badana cecha X w każdej z rp populacji ma rozkład $N(\mu_{ij}, \sigma)$, $i=1,\ldots,r$; $j=1,\ldots,p$, o nieznanych parametrach. Weryfikacja hipotez dotyczących wartości przeciętnych μ_{ij} (hipotezy H_1, H_2, H_3, H_4) na podstawie wyników prób o jednakowych licznościach l pobranych z każdej z tych populacji. Wyniki tych prób można sklasyfikować za pomocą tablicy 5.2, gdzie

$$\bar{x}_{i.} = \frac{1}{lp} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \quad \text{(średnia z kolumn)}, \quad i=1,\ldots,r,$$

$$\bar{x}_{.j} = \frac{1}{lr} \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \quad \text{(średnia z wierszy)}, \quad j=1,\ldots,p,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{lrp} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \quad \text{(średnia ogólna)}$$

oraz odpowiednio

$$\mu_{i} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij}, \qquad \mu_{.j} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_{ij}, \qquad \mu = \frac{1}{rp} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij}.$$

W przypadku tego modelu możemy weryfikować następujące hipotezy:

1) $H_1: \mu_{ij} = \mu$ dla $i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,p$, dotyczącą równości wartości przeciętnych μ_{ij} badanej cechy we wszystkich rp populacjach.

T a b l i c a 5.2

Czynnik	A_1	A_2	...	A_r	Średnia
B_1	$x_{111}, \ldots, x_{11l}$	$x_{211}, \ldots, x_{21l}$	...	$x_{r11}, \ldots, x_{r1l}$	$\bar{x}_{.1}$
B_2	$x_{121}, \ldots, x_{12l}$	$x_{221}, \ldots, x_{22l}$	...	$x_{r21}, \ldots, x_{r2l}$	$\bar{x}_{.2}$
...	....	....	...	....	...
B_p	$x_{1p1}, \ldots, x_{1pl}$	$x_{2p1}, \ldots, x_{2pl}$	...	$x_{rp1}, \ldots, x_{rpl}$	$\bar{x}_{.p}$
Średnia	$\bar{x}_{1.}$	$\bar{x}_{2.}$	...	$\bar{x}_{r.}$	$\bar{x}$

2) $H_2: \mu_{1.} = \ldots = \mu_{r.}$ – oznaczającą równość wszystkich wartości przeciętnych $\mu_{i.}$, $i = 1, \ldots, r$, badanej cechy poddanej działaniu czynnika A w r wariantach $A_1, \ldots, A_r$, bez uwzględniania wpływu czynnika B.

3) $H_3: \mu_{.1} = \ldots = \mu_{.p}$ – oznaczającą równość wszystkich wartości przeciętnych wierszowych $\mu_{.j}$, $j = 1, \ldots, p$, badanej cechy poddanej działaniu czynnika B w p wariantach $B_1, \ldots, B_p$, bez uwzględniania wpływu czynnika A.

4) $H_4: \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu = 0$ dla $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, p$. Hipoteza ta przedstawiona w równoważnej postaci $H_4: \mu_{ij} - \mu = (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu)$ wyraża fakt, że odchylenie wartości przeciętnej μ_{ij} od ogólnej wartości przeciętnej μ jest równe sumie efektów czynnika A i czynnika B. Gdy hipoteza H_4 nie jest spełniona, czyli gdy nie zachodzi zjawisko addytywności oddziaływania efektów rozpatrywanych czynników, wtedy mówimy, że zachodzi współdziałanie (interakcja) tych czynników, a wyrażenie $\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu$ jest miarą tej interakcji.

Podobnie jak w przypadku klasyfikacji pojedynczej, rozłóżmy sumę kwadratów wszystkich odchyleń od ogólnej średniej na sumę czterech następujących składników

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} (x_{ijk} - \bar{x})^2 = lp \sum_{i=1}^{r} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 + lr \sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 +$$

$$+ l \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{p} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

Oznaczmy

$$q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} (x_{ijk} - \bar{x})^2, \qquad q_A = lp \sum_{1}^{r} (x_{i\cdot} - \bar{x})^2,$$

$$q_B = lr \sum_{1}^{p} (x_{.j} - \bar{x})^2, \qquad q_{AB} = l \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2,$$

$$q_R = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2.$$

Wówczas

$$q = q_A + q_B + q_{AB} + q_R.$$

Analogicznie – jak w klasyfikacji pojedynczej – wykazuje się, że w przypadku prawdziwości hipotezy H_1 zmienne losowe

$$\frac{Q_A}{r-1}, \quad \frac{Q_B}{p-1}, \quad \frac{Q_{AB}}{(r-1)(p-1)}, \quad \frac{Q_R}{rp(l-1)}, \quad \frac{Q}{rpl-1}$$

są nieobciążonymi estymatorami nieznanej wariancji σ^2, natomiast zmienne

$$\frac{Q_A}{\sigma^2}, \quad \frac{Q_B}{\sigma^2}, \quad \frac{Q_{AB}}{\sigma^2}, \quad \frac{Q_R}{\sigma^2}, \quad \frac{Q}{\sigma^2}$$

są niezależne i mają rozkłady χ^2 o liczbie stopni swobody $r-1, p-1, (r-1)(p-1), rp(l-1)$ i $rpl-1$ odpowiednio. Analizę wariancji w przypadku klasyfikacji podwójnej wygodnie jest przedstawić w tablicy 5.3.

Tablica 5.3

Suma kwadratów odchyleń		Liczba stopni swobody	Średnia kwadratowa
dla czynnika A	$q_A = lp\sum_{1}^{r}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2$	$r-1$	$\frac{q_A}{r-1}$
dla czynnika B	$q_B = lr\sum_{1}^{p}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2$	$p-1$	$\frac{q_B}{p-1}$
wzajemna czynników A i B	$q_{AB} = l\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x})^2$	$(r-1)\ (p-1)$	$\frac{q_{AB}}{(r-1)\ (p-1)}$
resztkowa	$q_R = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{l}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2$	$rp(l-1)$	$\frac{q_R}{rp\ (l-1)}$
razem	$q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{l}(x_{ijk}-\bar{x})^2$	$rpl-1$	

Hipotezę H_1 – dotyczącą równości wartości przeciętnych μ_{ij} badanej cechy w rp populacjach – weryfikujemy na podstawie rp niezależnych próbek, każda o liczności l, stosując test analizy wariancji w przypadku klasyfikacji pojedynczej.

Do weryfikacji hipotez H_2, H_3, H_4 stosujemy testy oparte na statystykach:

dla hipotezy H_2

$$F_A = \frac{Q_A}{r-1} : \frac{Q_R}{rp(l-1)}, \tag{5.3.1}$$

dla hipotezy H_3

$$F_B = \frac{Q_B}{p-1} : \frac{Q_R}{rp(l-1)}, \tag{5.3.2}$$

dla hipotezy H_4

$$F_{AB} = \frac{Q_{AB}}{(r-1)\ (p-1)} : \frac{Q_R}{rp(l-1)}, \tag{5.3.3}$$

które, przy założeniu prawdziwości weryfikowanej hipotezy, mają rozkład F Snedecora o liczbach stopni swobody odpowiednio równych

dla F_A – $\big(r-1,\ rp\ (l-1)\big)$,

dla F_B – $\big(p-1,\ rp\ (l-1)\big)$,

dla F_{AB} – $\big((r-1)\ (p-1),\ rp\ (l-1)\big)$.

Zbiorami krytycznymi tych testów są odpowiednio przedziały

$$\langle F\big(1-\alpha,\ r-1,\ rp\ (l-1)\big),\ +\infty),\ \langle F\big(1-\alpha,\ p-1,\ rp\ (l-1)\big),\ +\infty)$$

oraz $\langle F\big(1-\alpha, (r-1)(p-1), rp\,(l-1)\big), +\infty)$, gdzie $F(1-\alpha, w, v)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu F Snedecora przy parze (w, v) stopni swobody.

W przypadku, gdy z każdej populacji do próby pobieramy jeden element, Q_R jest równe 0, albowiem wtedy $x_{ijk}=\bar{x}_{ij}$. W tym przypadku rolę resztkowej sumy kwadratów przejmuje wyrażenie Q_{AB}. Oznacza to jednak, że w takim wariancie analizy wariancji nie ma możliwości badania efektów współdziałania obu czynników (nie możemy weryfikować hipotezy H_4).

Zadanie 5.3. Spośród trzech odmian ziemniaków każdą uprawiano na 12 działkach tej samej wielkości i rodzaju. Działki te podzielono na 4 grupy po 3 działki i dla każdej grupy zastosowano różny rodzaj nawozu. Plony w q były następujące:

Odmiana	Nawóz			
	1	2	3	4
1	5,6 6,1 5,9	6,6 6,7 6,6	7,7 7,3 7,4	6,3 6,4 6,3
2	5,7 4,9 5,1	6,5 6,7 6,6	6,9 7,1 6,5	6,6 6,7 6,7
3	6,3 6,1 6,3	6,5 6,4 6,2	6,6 6,6 6,8	6,3 6,1 6,0

Na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ zweryfikować następujące hipotezy:

a) wartości przeciętne plonów dla różnych odmian nie różnią się istotnie niezależnie od stosowanego nawozu,

b) wartości przeciętne plonów dla różnych nawozów nie różnią się istotnie niezależnie od odmiany,

c) interakcja między odmianami i nawozami jest równa 0.

R o z w i ą z a n i e. W naszym przypadku mamy $r=4$ (liczba rodzajów nawozów), $p=3$ (liczba odmian) oraz liczbę powtórzeń doświadczenia w danym wariancie $l=3$. Po obliczeniach otrzymujemy

p	r				
	1	2	3	4	Razem
1	$\bar{x}_{11}=5{,}87$	$\bar{x}_{21}=6{,}63$	$\bar{x}_{31}=7{,}47$	$\bar{x}_{41}=6{,}33$	$\bar{x}_{.1}=6{,}58$
2	$\bar{x}_{12}=5{,}23$	$\bar{x}_{22}=6{,}60$	$\bar{x}_{32}=6{,}83$	$\bar{x}_{42}=6{,}80$	$\bar{x}_{.2}=6{,}37$
3	$\bar{x}_{13}=6{,}23$	$\bar{x}_{23}=6{,}37$	$\bar{x}_{33}=6{,}67$	$\bar{x}_{43}=6{,}13$	$\bar{x}_{.3}=6{,}35$
Razem	$\bar{x}_{1.}=5{,}78$	$\bar{x}_{2.}=6{,}53$	$\bar{x}_{3.}=6{,}99$	$\bar{x}_{4.}=6{,}42$	$\bar{x}=6{,}43$

Wykonując dalsze obliczenia w myśl tabl. 5.3, otrzymujemy

Suma kwadratów odchyleń		Liczba stopni swobody	Średnia kwadratów	Wart. statystyki test.
dla nawozów	$q_A=6{,}72$	3	2,240	$F_{A\text{obl}}=8{,}45$
dla odmian	$q_B=0{,}39$	2	0,195	$F_{B\text{obl}}=0{,}736$
wzajemnego oddziaływania	$q_{AB}=3{,}04$	6	0,507	$F_{AB\text{obl}}=1{,}913$
resztkowa	$q_R=6{,}35$	24	0,265	
razem	$q=16{,}50$	35		

Z tablicy kwantyli rozkładu F otrzymujemy

$$F\big(1-\alpha,\ r-1,\ rp(l-1)\big)=F(0{,}95,\ 3,\ 24)=3{,}01,$$

$$F\big(1-\alpha,\ p-1,\ rp(l-1)\big)=F(0{,}95,\ 2,\ 24)=3{,}40,$$

$$F\big(1-\alpha,\ (r-1)(p-1),\ rp(l-1)\big)=F(0{,}95,\ 6,\ 24)=2{,}51,$$

więc zbiorami krytycznymi są odpowiednio przedziały $\langle 3{,}01,\ +\infty)$, $\langle 3{,}40,\ +\infty)$, $\langle 2{,}51,\ +\infty)$.

Ponieważ $F_{A\,\mathrm{obl}}=8{,}45\in\langle 3{,}01,\ +\infty)$, więc hipotezę o równości wartości przeciętnych plonów przy stosowaniu różnych nawozów należy odrzucić na przyjętym poziomie istotności $\alpha=0{,}05$. Natomiast $F_{B\,\mathrm{obl}}=0{,}736\notin\langle 3{,}40,\ +\infty)$ oraz $F_{AB\,\mathrm{obl}}=1{,}913\notin\langle 2{,}51,\ +\infty)$, więc brak jest podstaw do odrzucenia dwóch pozostałych hipotez.

5.4. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

5.4. Badano efekty prania sześciu rodzajów tkanin trzema środkami piorącymi. W tabelce podano w procentach wartości średnie oraz odchylenia standardowe tych efektów uzyskane z badań 10-elementowych próbek dla każdej grupy.

Środek piorący		Tkanina					
		bawełniana		wełniana		mieszankowa	
		biała	kolorowa	biała	kolorowa	biała	kolorowa
Płatki mydlane	$\bar{x}$	94,4	88,7	96,6	90,0	89,1	87,1
	s	4,0	6,8	5,1	5,8	6,0	5,8
Pretepon G	$\bar{x}$	98,7	97,3	99,4	99,4	71,9	69,2
	s	5,1	5,2	4,3	6,1	3,8	5,2
Sulfapol	$\bar{x}$	97,7	96,4	65,7	70,7	68,7	71,9
	s	4,6	5,0	6,1	4,9	4,2	6,3

Zakładając, że efekty prania mają rozkład normalny, a wariancje efektów wszystkich grup są jednakowe, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$ następujące hipotezy:

a) wartości przeciętne efektów prania różnych tkanin nie różnią się istotnie niezależnie od użytego środka piorącego;

b) wartości przeciętne efektów prania różnymi środkami piorącymi nie różnią się istotnie niezależnie od rodzaju pranej tkaniny;

c) wartości przeciętne wszystkich 18 grup nie różnią się istotnie.

5.5. Badano wpływ prędkości przędzenia przędzy wiskozowej na liczbę zrywów tej przędzy dla dwóch rodzajów przędzy. Otrzymano rezultaty

	Gęstość liniowa przędzy	Prędkość przędzenia m/s					
		1	1,33	1,66	2,00	2,33	3,00
Liczba zrywów na wyjściu z komory przędzącej na 100 km przędzy	25	1,4 3,5 3,2 3,3 4,2	6,2 2,3 3,2 1,2 5,1	1,2 3,4 0,2 1,2 2,4	4,2 7,5 1,0 2,3 2,2	4,2 3,0 5,1 5,3 2,2	4,0 3,1 4,2 7,1 2,5
	50	5,2 3,1 5,2 3,2 2,1	0,3 2,1 3,5 4,2 2,1	6,2 0,1 1,4 2,1 1,1	2,1 7,2 3,0 0,2 2,1	4,2 4,1 5,1 3,2 1,2	2,1 3,5 0,0 4,3 1,1

Zakładając, że wariancje liczby zrywów każdej z rozpatrywanych grup są jednakowe, a pierwiastek kwadratowy liczby zrywów ma rozkład normalny, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezy:

a) wartości przeciętne liczby zrywów dla przędzy o gęstości liniowej 25 dla różnych prędkości przędzenia są jednakowe;

b) wartości przeciętne liczby zrywów dla obu rodzajów przędzy przy różnych prędkościach przędzenia są jednakowe.

5.6. Każdym z trzech mikrometrów zmierzono 5 razy ten sam przedmiot, uzyskując rezultaty

mikrometr 1: 4,077, 4,084, 4,078, 4,085, 4,082;

mikrometr 2: 4,079, 4,086, 4,080, 4,070, 4,081;

mikrometr 3: 4,075, 4,069, 4,083, 4,071, 4,087.

Zakładając, że błędy pomiarów mają rozkład normalny o tej samej wariancji, zweryfikować hipotezę, że wartości przeciętne pomiarów uzyskiwanych tymi mikrometrami są jednakowe.

5.7. Z trzech różnych wydziałów pewnej uczelni wylosowano po pięciu studentów z każdego roku studiów i obliczono średnią ocen uzyskaną przez każdego studenta w ostatnim semestrze. Uzyskano rezultaty

Rok studiów	Wydział		
	A	B	C
I	3,6, 4,1, 3,1, 2,4	3,1, 2,5, 3,3, 3,8	2,7, 4,2, 2,9, 3,7
II	2,8, 4,3, 3,8, 3,0	3,9, 2,6, 3,2, 3,3	3,0, 4,4, 3,9, 3,1
III	3,2, 4,1, 4,8, 4,0	3,4, 2,9, 4,1, 2,8	4,0, 3,3, 3,4, 3,0
IV	3,2, 3,9, 4,2, 3,6	3,6, 4,4, 2,8, 3,9	3,7, 5,0, 2,6, 3,4
V	4,0, 4,0, 3,5, 3,8	4,0, 3,0, 4,5, 3,7	3,0, 3,8, 4,8, 3,5

Zakładając, że średnie uzyskiwanych ocen mają rozkłady normalane o tej samej wariancji na poziomie $\alpha = 0{,}05$, zweryfikować następujące hipotezy:

a) wartości przeciętne średnich ocen dla studentów różnych wydziałów są jednakowe;

b) wartości przeciętne średnich ocen dla różnych lat studiów są jednakowe;

c) wartości przeciętne ocen średnich dla pierwszych dwóch lat są jednakowe.

5.8. W celu porównania wartości przeciętnych grubości włókien wełny pochodzących od owiec różnych ras pobrano losowo próbki i otrzymano

Rasa	Liczba owiec	Średnia średnica włókien [μm]	Współczynnik zmienności [%]
Merino	73	21,7	15,5
Southdown	28	23,4	15,6
Dorset Down	21	26,6	16,4
Rambouillet × Merino	36	19,2	15,6

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że wartości przcziętne grubości włókien wełny dla tych ras są jednakowe wobec hipotezy alternatywnej, że nie są jednakowe.

Odpowiedzi

5.4. a) $q_A = 11177$, $q_R = 5064{,}7$, $F_{A\text{obl}} = 71{,}51 \in \langle 2{,}27, +\infty)$ – wartości przeciętne efektów prania różnych tkanin różnią się istotnie; b) $q_B = 5505{,}0$, $F_{B\text{obl}} = 88{,}05 \in \langle 3{,}06, +\infty)$ – wartości przeciętne efektów prania różnymi środkami różnią się istotnie;
c) $F_{\text{obl}} = 51{,}45 \in \langle 1{,}69, \infty)$ – hipotezę odrzucamy.

5.5. a) $q_G = 5{,}0$, $q_R = 153$, $F_{\text{obl}} = 0{,}35 \notin \langle 2{,}39, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy; b) $q_B = 6{,}91$, $F_{B\text{obl}} = 2{,}47 \notin \langle 3{,}94, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

5.6. $q_G = 0{,}0257$, $q_R = 0{,}0765$, $F_{\text{obl}} = 2{,}02 \notin \langle 3{,}49, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy.

5.7. a) $q_A = 0{,}40$, $q_R = 18{,}16$, $F_{A\text{obl}} = 0{,}50$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że wartości przeciętne ocen dla różnych wydziałów są jednakowe; b) $q_B = 1{,}78$, $F_B = 1{,}10 \notin$ $\notin \langle 2{,}57, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy; c) $\bar{x}_1 = 3{,}3$, $\bar{x}_2 = 3{,}5$, $s_1 = 0{,}082$, $s_2 = 0{,}125$, $F_{\text{obl}} = 2{,}32 \notin \langle 2{,}83, +\infty)$ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji, $t_{\text{obl}} = -4{,}45 \in (-\infty, -2{,}074\rangle$ – hipotezę odrzucamy.

5.8. $q_G = 781$, $q_R = 1918$, $F_{\text{obl}} = 20{,}90$ – hipotezę odrzucamy.

TABLICE STATYSTYCZNE

Tablica 1. Wartości funkcji wykładniczej $f(x) = \exp(-x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	1,0000	0,9990	0,9980	0,9970	0,9960	0,9950	0,9940	0,9930	0,9920	0,9910
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	,8958	,8869	,8781	,8694	,8607	,8521	,8437	,8353	,8270
0,2	,8187	,8106	,8025	,7945	,7866	,7788	,7711	,7634	,7558	,7483
0,3	,7408	,7334	,7261	,7189	,7118	,7047	,6977	,6907	,6839	,6771
0,4	,6703	,6637	,6570	,6505	,6440	,6376	,6313	,6250	,6188	,6126
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0,5886	0,5827	0,5769	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0,6	,5488	,5434	,5379	,5326	,5273	,5220	,5169	,5117	,5066	,5016
0,7	,4966	,4916	,4868	,4819	,4771	,4724	,4677	,4630	,4584	,4538
0,8	,4493	,4449	,4404	,4360	,4317	,4274	,4232	,4190	,4148	,4107
0,9	,4066	,4025	,3985	,3946	,3906	,3867	,3829	,3791	,3753	,3716
1,	0,3679	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496
2,	,1353	,1225	,1108	,1003	,0907	,0821	,0743	,0672	,0608	,0550
3,	,0498	,0450	,0408	,0369	,0334	,0302	,0273	,0247	,0224	,0202
4,	,0183	,0166	,0150	,0136	,0123	,0111	,0100	,0091	,0082	,0074
5,	,0067	,0061	,0055	,0050	,0045	,0041	,0037	,0034	,0030	,0027
6,	0,0025	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010
7,	,0009	,0008	,0007	,0007	,0006	,0006	,0005	,0005	,0004	,0004
8,	,0003	,0003	,0003	,0002	,0002	,0002	,0002	,0002	,0002	,0001
9,	,0001	,0001	,0001	,0001	,0001	,0001	,0001	,0001	,0001	,0000

Tablica 2. Przekształcenie $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{p}$

p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,200	0,284	0,348	0,403	0,451	0,495	0,536	0,574	0,609
0,1	0,643	0,676	0,707	0,738	0,767	0,795	0,823	0,850	0,876	0,902
0,2	0,927	0,925	0,976	1,000	1,023	1,047	1,070	1,093	1,115	1,137
0,3	1,159	1,181	1,202	1,224	1,245	1,266	1,287	1,308	1,328	1,349
0,4	1,369	1,389	1,410	1,430	1,451	1,471	1,491	1,511	1,531	1,551
0,5	1,571	1,591	1,611	1,631	1,651	1,671	1,691	1,711	1,731	1,752
0,6	1,722	1,793	1,813	1,834	1,855	1,875	1,897	1,918	1,939	1,961
0,7	1,982	2,004	2,026	2,049	2,071	2,094	2,118	2,141	2,165	2,190
0,8	2,214	2,239	2,265	2,292	2,319	2,346	2,375	2,404	2,434	2,465
0,9	2,498	2,532	2,568	2,606	2,674	2,691	2,739	2,793	2,858	2,941
1,0	3,142	—	—	—	—	—	—	—	—	—

T a b l i c a 3. Przekształcenie $z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = \operatorname{ar\,tgh} r$

r	0,000	0,002	0,004	0,006	0,008	Poprawki $P\rightarrow$										0,000	0,002	0,004	0,006	0,008	r
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
0,00	0,0000	0,0020	0,0040	0,0060	0,0080	1	3	4	5	7	8	9	11	12	13	0,5493	0,5520	0,5547	0,5573	0,5600	0,50
0,01	,0100	,0120	,0140	,0160	,0180	1	3	4	5	7	8	10	11	12	14	,5627	,5654	,5682	,5709	,5736	0,51
0,02	,0200	,0220	,0240	,0260	,0280	1	3	4	6	7	8	10	11	13	14	,5763	,5791	,5818	,5846	,5874	0,52
0,03	,0300	,0320	,0340	,0360	,0380	1	3	4	6	7	8	10	11	13	14	,5901	,5929	,5957	,5985	,6013	0,53
0,04	,0400	,0420	,0440	,0460	,0480	1	3	4	6	7	9	10	11	13	14	,6042	,6070	,6098	,6127	,6155	0,54
0,05	0,0500	0,0520	0,0541	0,0561	0,0581	1	3	4	6	7	9	10	12	13	14	0,6184	0,6213	0,6241	0,6270	0,6299	0,55
0,06	,0601	,0621	,0641	,0661	,0681	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	,6328	,6358	,6387	,6416	,6446	0,56
0,07	,0701	,0721	,0741	,0761	,0782	1	3	4	6	7	9	10	12	14	15	,6475	,6505	,6535	,6565	,6595	0,57
0,08	,0802	,0822	,0842	,0862	,0882	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	,6625	,6655	,6685	,6716	,6746	0,58
0,09	,0902	,0923	,0943	,0963	,0983	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	,6777	,6807	,6838	,6869	,6900	0,59
0,10	0,1003	0,1024	0,1044	0,1064	0,1084	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	0,6931	0,6963	0,6994	0,7026	0,7057	0,60
0,11	,1104	,1125	,1145	,1165	,1186	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	,7089	,7121	,7153	,7185	,7218	0,61
0,12	,1206	,1226	,1246	,1267	,1287	2	3	5	7	8	10	11	13	15	16	,7250	,7283	,7315	,7348	,7381	0,62
0,13	,1307	,1328	,1348	,1368	,1389	2	3	5	7	8	10	12	13	15	17	,7414	,7447	,7481	,7514	,7548	0,63
0,14	,1409	,1430	,1450	,1471	,1491	2	3	5	7	9	10	12	14	15	17	,7582	,7616	,7650	,7684	,7718	0,64
0,15	0,1511	0,1532	0,1552	0,1573	0,1593	2	4	5	7	9	11	12	14	16	18	0,7753	0,7788	0,7823	0,7858	0,7893	0,65
0,16	,1614	,1634	,1655	,1676	,1696	2	4	5	7	9	11	13	14	16	18	,7928	,7964	,7999	,8035	,8071	0,66
0,17	,1717	,1737	,1758	,1779	,1799	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	,8107	,8144	,8180	,8217	,8254	0,67
0,18	,1820	,1841	,1861	,1882	,1903	2	4	6	8	9	11	13	15	17	19	,8291	,8328	,8366	,8404	,8441	0,68
0,19	,1923	,1944	,1965	,1986	,2007	2	4	6	8	10	12	14	15	17	19	,8480	,8518	,8556	,8595	,8634	0,69
0,20	0,2027	0,2048	0,2069	0,2090	0,2111	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	0,8673	0,8712	0,8752	0,8792	0,8832	0,70
0,21	,2132	,2153	,2174	,2195	,2216	2	4	6	8	10	12	15	16	18	20	,8872	,8912	,8953	,8994	,9035	0,71
0,22	,2237	,2258	,2279	,2300	,2321	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	,9076	,9118	,9160	,9202	,9245	0,72
0,23	,2342	,2363	,2384	,2405	,2427	2	4	7	9	11	13	15	17	20	22	,9287	,9330	,9373	,9417	,9461	0,73
0,24	,2448	,2469	,2490	,2512	,2533	2	4	7	9	11	13	16	18	20	22	,9505	,9549	,9594	,9639	,9684	0,74

0,25	0,2554	0,2575	0,2597	0,2618	0,2640	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,75
0,26	,2661	,2683	,2704	,2726	,2747	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	,996	1,001	1,006	1,011	1,015	0,76
0,27	,2769	,2790	,2812	,2833	,2855	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	1,020	,025	,030	,035	,040	0,77
0,28	,2877	,2899	,2920	,2942	,2964	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	,045	,050	,056	,061	,066	0,78
0,29	,2986	,3008	,3029	,3051	,3073	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	,071	,077	,082	,088	,093	0,79
0,30	0,3095	0,3117	0,3139	0,3161	0,3183	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	1,099	1,104	1,110	1,116	1,121	0,80
0,31	,3205	,3228	,3250	,3272	,3294	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	,127	,133	,139	,145	,151	0,81
0,32	,3316	,3339	,3361	,3383	,3406	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	,157	,163	,169	,175	,182	0,82
0,33	,3428	,3451	,3473	,3496	,3518	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	,188	,195	,201	,208	,214	0,83
0,34	,3541	,3564	,3586	,3609	,3632	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	,221	,228	,235	,242	,249	0,84
0,35	0,3654	0,3677	0,3700	0,3723	0,3746	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	1,256	1,263	1,271	1,278	1,286	0,85
0,36	,3769	,3792	,3815	,3838	,3861	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12	,293	,301	,309	,317	,325	0,86
0,37	,3884	,3907	,3931	,3954	,3977	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12	,333	,341	,350	,358	,367	0,87
0,38	,4001	,4024	,4047	,4071	,4094	1	2	4	5	6	7	8	9	11	12	,376	,385	,394	,403	,412	0,88
0,39	,4118	,4142	,4165	,4189	,4213	1	2	4	5	6	7	8	9	11	12	,422	,432	,442	,452	,462	0,89
0,40	0,4236	0,4260	0,4284	0,4308	0,4332	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	1,472	1,483	1,494	1,505	1,516	0,90
0,41	,4356	,4380	,4404	,4428	,4453	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	,528	,539	,551	,564	,576	0,91
0,42	,4477	,4501	,4526	,4550	,4574	1	2	4	5	6	7	9	10	11	12	,589	,602	,616	,630	,644	0,92
0,43	,4599	,4624	,4648	,4673	,4698	1	2	4	5	6	7	9	10	11	12	,658	,673	,689	,705	,721	0,93
0,44	,4722	,4747	,4772	,4797	,4822	1	2	4	5	6	7	9	10	11	12	,738	,756	,774	,792	,812	0,94
0,45	0,4847	0,4872	0,4897	0,4922	0,4948	1	3	4	5	6	8	9	10	11	13	1,832	1,853	1,874	1,897	1,921	0,95
0,46	,4973	,4999	,5024	,5049	,5075	1	3	4	5	6	8	9	10	11	13	,946	,972	2,000	2,029	2,060	0,96
0,47	,5101	,5126	,5152	,5178	,5204	1	3	4	5	6	8	9	10	12	13	2,092	2,127	,165	,205	,249	0,97
0,48	,5230	,5256	,5282	,5308	,5334	1	3	4	5	7	8	9	10	12	13	,298	,351	,410	,477	,555	0,98
0,49	,5361	,5387	,5413	,5440	,5466	1	3	4	5	7	8	9	11	12	13	,647	,759	,903	3,106	3,453	0,99
	0,000	0,002	0,004	0,006	0,008	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0,000	0,002	0,004	0,006	0,088	*r*
						← Poprawki *P*															

Tablica 3 pochodzi z [33]

T a b l i c a 4. Przekształcenie $r = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \operatorname{tgh} z$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0599	0,0699	0,0798	0,0898	0,0
0,1	,0997	,1096	,1194	,1293	,1391	,1489	,1586	,1684	,1781	,1877	0,1
0,2	,1974	,2070	,2165	,2260	,2355	,2449	,2543	,2636	,2729	,2821	0,2
0,3	,2913	,3004	,3095	,3185	,3275	,3364	,3452	,3540	,3627	,3714	0,3
0,4	,3800	,3885	,3969	,4053	,4136	,4219	,4301	,4382	,4462	,4542	0,4
0,5	0,4621	0,4699	0,4777	0,4854	0,4930	0,5005	0,5080	0,5154	0,5227	0,5299	0,5
0,6	,5370	,5441	,5511	,5580	,5649	,5717	,5784	,5850	,5915	,5980	0,6
0,7	,6044	,6107	,6169	,6231	,6291	,6351	,6411	,6469	,6527	,6584	0,7
0,8	,6640	,6996	,6751	,6805	,6858	,6911	,6963	,7014	,7064	,7114	0,8
0,9	,7163	,7211	,7259	,7306	,7352	,7398	,7443	,7487	,7531	,7574	0,9
1,0	0,7616	0,7658	0,7699	0,7739	0,7779	0,7818	0,7857	0,7895	0,7932	0,7969	1,0
1,1	,8005	,8041	,8076	,8110	,8144	,8178	,8210	,8243	,8275	,8306	1,1
1,2	,8337	,8367	,8397	,8426	,8455	,8483	,8511	,8538	,8565	,8591	1,2
1,3	,8617	,8643	,8668	,8692	,8717	,8741	,8764	,8787	,8810	,8832	1,3
1,4	,8854	,8875	,8896	,8917	,8937	,8957	,8977	,8996	,9015	,9033	1,4
1,5	0,9051	0,9069	0,9087	0,9104	0,9121	0,9138	0,9154	0,9170	0,9186	0,9201	1,5
1,6	,9217	,9232	,9246	,9261	,9275	,9289	,9302	,9316	,9329	,9341	1,6
1,7	,9354	,9366	,9379	,9391	,9402	,9414	,9425	,9436	,9447	,9458	1,7
1,8	,94681	,94783	,94884	,94983	,95080	,95175	,95268	,95359	,95449	,95537	1,8
1,9	,95624	,95709	,95792	,95873	,95953	,96032	,96109	,96185	,96259	,96331	1,9
2,0	0,96403	0,96473	0,96541	0,96609	0,96675	0,96739	0,96803	0,96865	0,96926	0,96986	2,0
2,1	,97045	,97103	,97159	,97215	,97269	,97323	,97375	,97426	,97477	,97526	2,1
2,2	,97574	,97622	,97668	,97714	,97759	,97803	,97846	,97888	,97929	,97970	2,2
2,3	,98010	,98049	,98087	,98124	,98161	,98197	,98233	,98267	,98301	,98335	2,3
2,4	,98367	,98399	,98341	,98462	,98492	,98522	,98551	,98579	,98607	,98635	2,4
2,5	0,98661	0,98688	0,98714	0,98739	0,98764	0,98788	0,98812	0,98835	0,98858	0,98881	2,5
2,6	,98903	,98924	,98945	,98966	,98987	,99007	,99026	,99045	,99064	,99083	2,6
2,7	,99101	,99118	,99136	,99153	,99170	,99186	,99202	,99218	,99233	,99248	2,7
2,8	,99263	,99278	,99292	,99306	,99320	,99333	,99346	,99359	,99372	,99384	2,8
2,9	,99396	,99408	,99420	,99431	,99443	,99454	,99464	,99475	,99485	,99495	2,9

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	z
3	0,99505	0,99595	0,99668	0,99728	0,99777	0,99818	0,99851	0,99878	0,99900	0,99918	3
4	,99933	,99945	,99955	,99963	,99970	,99975	,99980	,99983	,99986	,99989	4

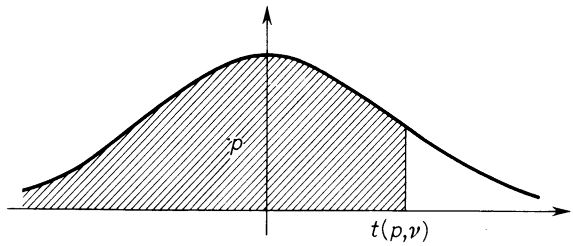
Tablica 4 pochodzi z [33]

T a b l i c a 5. Wartości Φ (u) dystrybuanty rozkładu normalnego $N(0, 1)$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	7224
0,6	,7257	,7290	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8340	,8340	,8365	,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986

T a b l i c a 6. Kwantyle u (p) rzędu p rozkładu normalnego N (0, 1)

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
u (p)	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

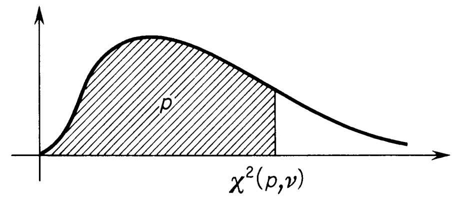


T a b l i c a 7. Kwantyle $t(p, \nu)$ rzędu p rozkładu Studenta o ν stopniach swobody

ν	p				
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	,638	,353	3,182	4,541	5,841
4	,533	,132	2,776	3,747	4,604
5	,476	,015	,571	,365	,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	,415	,895	,365	2,998	,499
8	,397	,859	,306	,897	,355
9	,383	,833	,262	,821	,250
10	,372	,812	,228	,764	,169
11	1,363	1,795	2,201	2,718	3,106
12	,356	,782	,179	,681	,054
13	,350	,771	,160	,650	,012
14	,345	,761	,145	,624	2,977
15	,341	,753	,131	,602	,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	,333	,740	,110	,567	,898
18	,330	,734	,101	,552	,878
19	,328	,729	,093	,539	,861
20	,325	,725	,086	,528	,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	,321	,717	,074	,508	,819
23	,319	,714	,069	,500	,807
24	,318	,711	,064	,492	,797
25	,316	,708	,060	,485	,787
26	1,315	1,706	2,055	2,479	2,779
27	,314	,703	,052	,473	,771
28	,312	,701	,048	,467	,763
29	,311	,699	,045	,462	,756
30	,310	,697	,042	,457	,750
31	1,309	1,695	2,039	2,453	2,744
32	,309	,694	,037	,449	,738
33	,308	,692	,034	,445	,733
34	,307	,691	,032	,441	,728
35	,306	,690	,030	,438	,724

T a b l i c a 7 (cd.)

v	p				
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
36	1,305	1,688	2,028	2,434	2,720
37	,305	,687	,025	,431	,715
38	,304	,686	,024	,429	,712
39	,304	,685	,023	,425	,708
40	,303	,684	,021	,423	,704
41	1,303	1,683	2,019	2,421	2,701
42	,302	,682	,018	,418	,698
43	,302	,681	,017	,416	,695
44	,301	,680	,015	,414	,692
45	,301	,679	,014	,412	,690
46	1.300	1,679	2,013	2,410	2,687
47	,300	,678	,012	,408	,685
48	,299	,677	,011	,407	,682
49	,299	,677	,010	,405	,680
50	,299	,676	,009	,403	,678
55	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668
60	,295	,671	,000	,390	,660
65	,295	,669	1,997	,385	,654
70	,294	,667	,994	,381	648
75	,293	,665	,992	,377	,643
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
90	,291	,662	,987	,369	632
100	,290	,660	,984	,364	,626
120	,289	,658	,980	,358	,617
150	,287	,655	,976	,351	,609
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
300	,284	,650	,968	,339	,592
500	,283	,648	,965	,334	,586
1000	,282	,646	,962	,330	,581
∞	,282	,645	,960	,326	,576

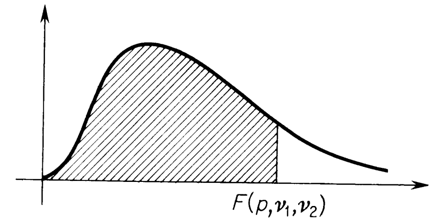


T a b l i c a 8. Kwantyle χ^2 (p, ν) rzędu p rozkładu χ^2 o ν stopniach swobody

ν	p							
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99	0,995
1	—	—	0,001	0,004	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,071	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	21,026	23,337	26,217	28,299
13	3,565	4,107	5,009	5,892	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,336	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	40,113	43,194	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,257	16,047	17,708	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,954	16,791	18,493	43,773	46,979	50,892	53,672

Tablica 8 (cd.)

v	p							
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99	0,995
31	14,458	15,655	17,539	19,281	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	46,194	49,480	43,486	56,328
33	15,815	17,074	19,047	20,867	47,400	50,725	54,776	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	52,192	55,668	59,892	62,883
38	19,289	20,691	22,878	24,884	53,384	56,896	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	54,572	58,120	62,428	65,476
40	20,707	22,164	24,433	26,509	55,758	59,342	63,691	66,766
41	21,421	22,906	25,215	27,326	56,942	60,561	64,950	68,053
42	22,138	23,650	25,999	28,144	58,124	61,777	66,206	69,336
43	22,859	24,398	26,785	28,965	59,304	62,990	67,459	70,616
44	23,584	25,148	27,575	29,787	60,481	64,201	68,710	71,893
45	24,311	25,901	28,366	30,612	61,656	65,410	69,957	73,166
46	25,041	26,657	29,160	31,439	62,830	66,617	71,201	74,437
47	25,775	27,416	29,956	32,268	64,001	67,821	72,443	75,704
48	26,511	28,177	30,755	33,098	65,171	69,023	73,683	76,969
49	27,249	28,941	31,555	33,930	66,339	70,222	74,919	78,231
50	27,991	29,707	32,357	34,764	67,505	71,420	76,154	79,490



T a b l i c a 9. Kwantyle $F(p, \nu_1, \nu_2)$ rzędu p rozkładu F Snedecora o (ν_1, ν_2) stopniach swobody

$p = 0{,}95$

ν_2	ν_1														
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	20	40	60	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	242	244	248	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,79	8,74	8,66	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,96	5,91	5,80	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,74	4,68	4,56	4,46	4,43	4,41	4,37
6	5,99	,14	4,76	4,53	4,39	,28	,21	,15	,06	,00	3,87	3,77	3,74	3,71	3,67
7	,59	4,74	,35	,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,64	3,57	,44	,34	,30	,27	,23
8	,32	,46	,07	3,84	,69	,58	,50	,44	,35	,28	,15	,04	,01	2,97	2,93
9	,12	,26	3,86	,63	,48	,37	,29	,23	,14	,07	2,94	2,83	2,79	,76	,71
10	4,96	,10	,71	,48	,33	,22	,14	,07	2,98	2,91	,77	,66	,62	,59	,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,85	2,79	2,65	2,53	2,49	2,46	2,40
12	,75	,89	,49	,26	,11	,00	2,91	,85	,75	,69	,54	,43	,38	,35	,30
13	,67	,81	,41	,18	,03	2,92	,83	,77	,67	,60	,46	,34	,30	,26	,21
14	,60	,74	,34	,11	2,96	,85	,76	,70	,60	,53	,39	,27	,22	,19	,13
15	,54	,68	,29	,06	,90	,79	,71	,64	,54	,48	,33	,20	,16	,12	,07
16	,49	,63	,24	,01	,85	,74	,66	,59	,49	,42	,28	,15	,11	,07	,01
17	,45	,59	,20	2,96	,81	,70	,61	,55	,45	,38	,23	,10	,06	,02	1,96
18	,41	,55	,16	,93	,77	,66	,58	,51	,41	,34	,19	,06	,02	1,98	,92
19	,38	,52	,13	,90	,74	,63	,54	,48	,38	,31	,16	,03	1,98	,94	,88
20	,35	,49	,10	,87	,71	,60	,51	,45	,35	,28	,12	1,99	,95	,91	,84

Tablica 9 (cd.)

$p=0,95$

ν_2	ν_1														
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	20	40	60	100	∞
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,32	2,25	2,10	1,96	1,92	1,88	1,81
22	,30	,44	,05	,82	,66	,55	,46	,40	,30	,23	,07	,94	,89	,85	,78
23	,28	,42	,03	,80	,64	,53	,44	,37	,27	,20	,05	,91	,86	,82	,76
24	,26	,40	,01	,78	,62	,51	,42	,36	,25	,18	,03	,89	,84	,80	,73
25	,24	,39	2,99	,76	,60	,49	,40	,34	,24	,16	,01	,87	,82	,78	,71
26	,23	,37	,98	,74	,59	,47	,39	,32	,22	,15	1,99	,85	,80	,76	,69
27	,21	,35	,96	,73	,57	,46	,37	,31	,20	,13	,97	,84	,79	,74	,67
28	,20	,34	,95	,71	,56	,45	,36	,29	,19	,12	,96	,82	,77	,73	,65
29	,18	,33	,93	,70	,55	,43	,35	,28	,18	,10	,94	,81	,75	,71	,64
30	,17	,32	,92	,69	,53	,42	,33	,27	,16	,09	,93	,79	,74	,70	,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,08	2,00	1,84	1,69	1,64	1,59	1,51
60	,00	,15	,76	,53	,37	,25	,17	,10	1,99	1,92	,75	,59	,53	,48	,39
120	3,92	,07	,68	,44	,29	,17	,08	,01	,91	,83	,65	,49	,42	,36	,25
∞	,84	,00	,60	,37	,21	,10	,01	1,94	,83	,75	,57	,39	,32	,24	,00

Tablica 9 (cd.)

$p = 0{,}975$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	20	40	60	100	∞
1	648	800	864	900	922	937	948	957	969	977	993	1006	1010	1013	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,4	14,3	14,2	14,0	14,0	14,0	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,84	8,75	8,56	8,41	8,36	8,32	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,62	6,52	6,33	6,18	6,12	6,08	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,46	5,37	5,17	5,01	4,92	4,92	4,85
7	,07	6,54	5,89	5,52	,29	,12	4,99	4,90	4,76	4,67	4,47	4,31	,25	,21	,14
8	7,57	,06	,42	,05	4,82	4,65	,53	,43	,30	,20	,00	3,84	3,78	3,74	3,67
9	,21	5,71	,08	4,72	,48	,32	,20	,10	3,96	3,87	3,67	,51	,45	,40	,33
10	6,94	,46	4,83	,47	,24	,07	3,95	3,85	,72	,62	,42	,26	,20	,15	,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,53	3,43	3,23	3,06	3,00	2,96	2,88
12	,55	,10	,47	,12	3,89	,73	,61	,51	,37	,28	,07	2,91	2,85	,80	,72
13	,41	4,97	,35	,00	,77	,60	,48	,39	,25	,15	2,95	,78	,72	,67	,60
14	,30	,86	,24	3,89	,66	,50	,38	,29	,15	,05	,84	,67	,61	,56	,49
15	,20	,76	,15	,80	,58	,41	,29	,20	,06	2,96	,76	,58	,52	,47	,40
16	,12	,69	,08	,73	,50	,34	,22	,12	2,99	,89	,68	,51	,45	,40	,32
17	,04	,62	,01	,66	,44	,28	,16	,06	,92	,82	,62	,44	,38	,33	,25
18	5,98	,56	3,95	,61	,38	,22	,10	,01	,87	,77	,56	,38	,32	,27	,19
19	,92	,51	,90	,56	,33	,17	,05	2,96	,82	,72	,51	,33	,27	,22	,13
20	,87	,46	,86	,51	,29	,13	,01	,91	,77	,68	,46	,29	,22	,17	,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,73	2,64	2,42	2,25	2,18	2,13	2,04
22	,79	,38	,78	,44	,22	,05	,93	,84	,70	,60	,39	,21	,14	,09	,00
23	,75	,35	,75	,41	,18	,02	,90	,81	,67	,57	,36	,18	,11	,06	1,97
24	,72	,32	,72	,38	,15	2,99	,87	,78	,64	,54	,33	,15	,08	,02	,94
25	,69	,29	,69	,35	,13	,97	,85	,75	,61	,51	,30	,12	,05	,00	,91
26	,66	,27	,67	,33	,10	,94	,82	,73	,59	,49	,28	,09	,03	1,97	,88
27	,63	,24	,65	,31	,08	,92	,80	,71	,57	,47	,25	,07	,00	,94	,85
28	,61	,22	,63	,29	,06	,90	,78	,69	,55	,45	,23	,05	1,98	,92	,83
29	,59	,20	,61	,27	,04	,88	,76	,67	,53	,43	,21	,03	,96	,90	,81
30	,57	,18	,59	,25	,03	,87	,75	,65	,51	,41	,20	,01	,94	,88	,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,39	2,29	2,07	1,88	1,80	1,74	1,64
60	,29	3,93	,34	,01	,79	,63	,51	,41	,27	,17	1,94	,74	,67	,60	,48
120	,15	,80	,22	2,89	,67	,51	,39	,30	,15	,05	,82	,61	,52	,45	,31
∞	,02	,69	,12	,79	,57	,41	,29	,19	,05	1,94	,71	,48	,39	,30	,00

T a b l i c a 9 (cd.)

$p = 0{,}99$

ν_2	ν_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	20	40	60	100	∞
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,2	27,1	26,7	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,5	14,4	14,0	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,1	9,89	9,55	9,29	9,20	9,13	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,87	7,72	7,40	7,14	7,06	6,99	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,62	6,47	6,16	5,91	5,82	5,75	5,65
8	11,3	8,65	7,59	,01	6,63	6,37	,18	,03	5,81	5,67	5,36	,12	,03	4,96	4,86
9	10,6	,02	6,99	6,42	,06	5,80	5,61	5,47	,26	,11	4,81	4,57	4,48	,42	,31
10	,0	7,56	,55	5,99	5,64	,39	,20	,06	4,85	4,71	,41	,17	,08	,01	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,54	4,40	4,10	3,86	3,78	3,71	3,60
12	,33	6,93	5,95	,41	,06	4,82	,64	,50	,30	,16	3,86	,62	,54	,47	,36
13	,07	,70	,74	,21	4,86	,62	,44	,30	,10	3,96	,66	,43	,34	,27	,17
14	8,86	,51	,56	,04	,70	,46	,28	,14	3,94	,80	,51	,27	,18	,11	,00
15	,68	,36	,42	4,89	,56	,32	,14	,00	,80	,67	,37	,13	,05	2,98	2,87
16	,53	,23	,29	,77	,44	,20	,03	3,89	,69	,55	,26	,02	2,93	,86	,75
17	,40	,11	,18	,67	,34	,10	3,93	,79	,59	,46	,16	2,92	,83	,76	,65
18	,29	,01	,09	,58	,25	,01	,84	,71	,51	,37	,08	,84	,75	,68	,57
19	,18	5,93	,01	,50	,17	3,94	,77	,63	,43	,30	,00	,76	,67	,60	,49
20	,10	,85	4,94	,43	,10	,87	,70	,56	,37	,23	2,94	,69	,61	,54	,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,31	3,17	2,88	2,64	2,55	2,48	2,36
22	7,95	,72	,82	,31	3,99	,76	,59	,45	,26	,12	,83	,58	,50	,42	,31
23	,88	,66	,76	,26	,94	,71	,54	,41	,21	,07	,78	,54	,45	,37	,26
24	,82	,61	,72	,22	,90	,67	,50	,36	,17	,03	,74	,49	,40	,33	,21
25	,77	,57	,68	,18	,86	,63	,46	,32	,13	2,99	,70	,45	,36	,29	,17
26	,72	,53	,64	,14	,82	,59	,42	,29	,09	,96	,66	,42	,33	,25	,13
27	,68	,49	,60	,11	,78	,56	,39	,26	,06	,93	,63	,38	,29	,22	,10
28	,64	,45	,57	,07	,75	,53	,36	,23	,03	,90	,60	,35	,26	,19	,06
29	,60	,42	,54	,04	,73	,50	,33	,20	,00	,87	,57	,33	,23	,16	,03
30	,56	,39	,51	,02	,70	,47	,30	,17	2,98	,84	,55	,30	,21	,13	,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,80	2,66	2,37	2,11	2,02	1,94	1,80
60	,08	4,98	,13	,65	,34	,12	2,95	,82	,63	,50	,20	1,94	1,84	,75	,60
120	6,85	,79	3,95	,48	,18	2,96	,80	,67	,48	,34	,04	,77	,66	,56	,38
∞	**,63**	**,61**	**78**	**,32**	**,02**	**,80**	**,64**	**,51**	**,32**	**,18**	**1,88**	**,59**	**,47**	**,36**	**,00**

$p=0{,}995$

ν_2	ν_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	20	40	60	100	∞
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	198,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	200,0
3	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,7	43,4	42,8	42,3	42,1	42,0	41,8
4	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,0	20,7	20,2	19,8	19,6	19,5	19,3
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,6	13,4	12,9	12,5	12,4	12,3	12,1
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,2	10,0	9,59	9,24	9,12	9,03	8,88
7	16,2	12,4	10,9	10,0	9,52	9,16	8,89	8,68	8,38	8,18	7,75	7,42	7,31	7,22	7,08
8	14,7	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,21	7,01	6,61	6,29	6,18	6,09	5,95
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	,13	6,88	6,69	6,42	6,23	5,83	5,52	5,41	5,32	,19
10	12,8	9,43	,08	,34	6,87	6,54	,30	,12	5,85	5,66	,27	4,97	4,86	4,77	4,64
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,42	5,24	4,86	4,55	4,44	4,36	4,23
12	11,8	,51	,23	,52	,07	5,76	,52	,35	,09	4,91	,53	,23	,12	,04	3,90
13	,4	,19	6,93	,23	5,79	,48	,25	,08	4,82	,64	,27	3,97	3,87	3,78	,65
14	,1	7,92	,68	,00	,56	,26	,03	4,86	,60	,43	,06	,76	,66	,57	,44
15	10,8	,70	,48	5,80	,37	,07	4,85	,67	,42	,25	3,88	,58	,48	,39	,26
16	,6	,51	,30	,64	,21	4,91	,69	,52	,27	,10	,73	,44	,33	,25	,11
17	,4	,35	,16	,50	,07	,78	,56	,39	,14	3,97	,61	,31	,21	,12	2,98
18	,2	,21	,03	,37	4,96	,66	,44	,28	,03	,86	,50	,20	,10	,01	,87
19	,1	,09	5,92	,27	,85	,56	,34	,18	3,93	,76	,40	,11	,00	2,91	,78
20	9,94	6,99	,82	,17	,76	,47	,26	,09	,85	,68	,32	,02	2,92	,83	,69
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,77	3,60	3,24	2,95	2,84	2,75	2,61
22	,73	,81	,65	,02	,61	,32	,11	3,94	,70	,54	,18	,88	,77	,69	,55
23	,63	,73	,58	4,95	,54	,26	,05	,88	,64	,47	,12	,82	,71	,62	,48
24	,55	,66	,52	,89	,49	,20	3,99	,83	,59	,42	,06	,77	,66	,57	,43
25	,48	,60	,46	,84	,43	,15	,94	,78	,54	,37	,01	,72	,61	,52	,38
26	,41	,54	,41	,79	,38	,10	,89	,73	,49	,33	2,97	,67	,56	,47	,33
27	,34	,49	,36	,74	,34	,06	,85	,69	,45	,28	,93	,63	,52	,43	,29
28	,28	,44	,32	,70	,30	,02	,81	,65	,41	,25	,89	,59	,48	,39	,25
29	,23	,40	,28	,66	,26	3,98	,77	,61	,38	,21	,86	,56	,45	,36	,21
30	,18	,35	,24	,62	,23	,95	,74	,58	,34	,18	,82	,52	,42	,32	,18
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,12	2,95	2,60	2,30	2,18	2,09	1,93
60	,49	5,80	,73	,14	,76	,49	,29	,13	2,90	,74	,39	,08	1,96	1,86	,69
120	,18	,54	,50	3,92	,55	,29	,09	2,94	,71	,55	,19	1,87	,75	,64	,43
∞	7,88	,30	,28	,72	,35	,09	2,90	,74	,52	,36	,00	,67	,53	,40	,00

T a b l i c a 10. Kwantyle $G\ (p,\ k,\ v)$ rzędu p statystyki G Cochrana

$p = 0{,}99$

k	v													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	,9933	,9423	,8831	,8335	,7933	,7606	,7335	,7107	,6912	,6743	,6059	,5153	,4230	,3333
4	,9679	,8643	,7814	,7212	,6761	,6410	,6129	,5897	,5702	,5536	,4884	,4057	,3251	,2500
5	,9279	,7885	,6957	,6329	,5875	,5531	,5259	,5037	,4854	,4697	,4094	,3351	,2644	,2000
6	0,8828	0,7218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	,8376	,6644	,5685	,5080	,4659	,4347	,4105	,3911	,3751	,3616	,3105	,2494	,1929	,1429
8	,7945	,6152	,5209	,4627	,4226	,3932	,3704	,3522	,3373	,3248	,2779	,2214	,1700	,1250
9	,7544	,5727	,4810	,4251	,3870	,3592	,3378	,3207	,3067	,2950	,2514	,1992	,1521	,1111
10	,7175	,5358	,4469	,3984	,3572	,3308	,3106	,2945	,2813	,2704	,2297	,1811	,1376	,1000
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680	0,2535	0,2419	0,2320	0,1916	0,1535	0,1157	0,0833
15	,5747	,4069	,3317	,2882	,2593	,2386	,2228	,2104	,2002	,1918	,1612	,1251	,0934	,0667
20	,4799	,3297	,2654	,2288	,2048	,1877	,1748	,1646	,1567	,1501	,1248	,0960	,0709	,0500
24	,4247	,2871	,2295	,1970	,1759	,1608	,1495	,1406	,1338	,1283	,1060	,0810	,0595	,0417
30	,3632	,2412	,1913	,1635	,1454	,1327	,1232	,1157	,1100	,1054	,0867	,0658	,0480	,0333
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	,2151	,1371	,1069	,0902	,0976	,0722	,0668	,0625	,0594	,0567	,0461	,0344	,0245	,0167
120	,1225	,0759	,0585	,0489	,0429	,0387	,0357	,0334	,0316	,0302	,0242	,0178	,0125	,0083
∞	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000

$p = 0{,}95$

k	v													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	,9669	,8709	,7977	,7457	,7071	,6771	,6530	,6333	,6167	,6025	,5466	,4748	,4031	,3333
4	,9065	,7679	,6841	,6287	,5985	,5598	,5365	,5175	,5017	,4884	,4366	,3720	,3093	,2500
5	,8412	,6838	,5938	,5440	,5063	,4783	,4564	,4387	,4241	,4118	,3645	,3066	,2513	,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	,7271	,5612	,4800	,4307	,3974	,3726	,3535	,3384	,3259	,3154	,2756	,2278	,1833	,1429
8	,6798	,5157	,4377	,3910	,3595	,3362	,3185	,3043	,2926	,2829	,2462	,2022	,1616	,1250
9	,6385	,4775	,4027	,3584	,3286	,3067	,2901	,2768	,2659	,2568	,2226	,1820	,1446	,1111
10	,6020	,4450	,3733	,3311	,3029	,2823	,2666	,2541	,2439	,2353	,2032	,1655	,1308	,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	,4709	,3346	,2758	,2419	,2195	,2034	,1911	,1815	,1736	,1671	,1429	,1144	,0889	,0667
20	,3894	,2705	,2205	,1921	,1735	,1602	,1501	,1422	,1357	,1303	,1108	,0879	,0675	,0500
24	,3434	,2354	,1907	,1656	,1493	,1374	,1286	,1216	,1160	,1113	,0942	,0743	,0567	,0417
30	,2929	,1980	,1593	,1377	,1237	,1137	,1061	,1002	,0958	,0921	,0771	,0604	,0457	,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	,1737	,1131	,0895	,0765	,0682	,0623	,0583	,0552	,0520	,0497	,0411	,0316	,0234	,0167
120	,0998	,0632	,0495	,0419	,0371	,0337	,0312	,0292	,0279	,0266	,0218	,0165	,0120	,0083
∞	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000

Tablica 10 pochodzi z [33]

T a b l i c a 11. Kwantyle $H(p, k, v)$ rzędu p statystyki H Hartleya

$p=0{,}95$

v	k										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39,0	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62,0	72,9	83,5	93,9	140	114	124
4	9,60	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48,6	51,4
5	7,15	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15,0	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,70	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,80	8,41	8,95	9,45	9,91	10,3	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,79	5,30	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,48
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,40	5,59	5,77	5,93
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,10	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,40	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,26	2,30	2,33	2,36
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

$p=0{,}99$

v	k										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47,5	85	120	151	184	$21\underline{6}$	$24\underline{9}$	$28\underline{1}$	$31\underline{0}$	$33\underline{7}$	$36\underline{1}$
4	23,2	37	49	59	69	$7\overline{9}$	$8\overline{9}$	$9\overline{7}$	$10\overline{6}$	$11\overline{3}$	$12\overline{0}$
5	14,9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11,1	15,5	19,1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8,89	12,1	14,5	16,5	18,4	20	22	23	24	26	27
8	7,50	9,9	11,7	13,2	14,5	15,8	16,9	17,9	18,9	19,8	21
9	6,54	8,5	9,9	11,1	12,1	13,1	13,9	14,7	15,3	16,0	16,6
10	5,85	7,4	8,6	9,6	10,4	11,1	11,8	12,4	12,9	13,4	13,9
12	4,91	6,1	6,9	7,6	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,2	10,6
15	4,07	4,9	5,5	6,0	6,4	6,7	7,1	7,3	7,5	7,8	8,0
20	3,32	3,8	4,3	4,6	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9
30	2,63	3,0	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
60	1,96	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
∞	1,00	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Tablica 11 pochodzi z [33]

T a b l i c a 12. Kwantyle $d_n(1-\alpha)$ statystyki D_n Kołmogorowa

n	α			n	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995	51	0,168	0,187	0,224
2	,776	,842	,929	52	,166	,185	,222
3	,636	,708	,829	53	,165	,183	,220
4	,565	,624	,734	54	,163	,181	,218
5	,509	,563	,669	55	,162	,180	,216
6	,468	,519	,617	56	,160	,178	,214
7	,436	,483	,576	57	,159	,177	,212
8	,410	,454	,542	58	,158	,175	,210
9	,387	,430	,513	59	,156	,174	,208
10	,369	,409	,489	60	,155	,172	,207
11	,352	,391	,468	61	,154	,171	,205
12	,338	,375	,449	62	,153	,170	,203
13	,325	,361	,432	63	,151	,168	,202
14	,314	,349	,418	64	,150	,167	,200
15	,304	,338	,404	65	,149	,166	,199
16	,295	,327	,392	66	,148	,164	,197
17	,286	,318	,381	67	,147	,163	,196
18	,279	,309	,371	68	,146	,162	,194
19	,271	,301	,361	69	,145	,161	,193
20	,265	,294	,352	70	,144	,160	,192
21	,259	,287	,344	71	,143	,159	,190
22	,253	,281	,337	72	,142	,158	,189
23	,247	,275	,330	73	,141	,156	,188
24	,242	,269	,323	74	,140	,155	,186
25	,238	,264	,317	75	,139	,154	,185
26	,233	,259	,311	76	,138	,153	,184
27	,229	,254	,305	77	,137	,152	,183
28	,225	,250	,300	78	,136	,151	,182
29	,221	,246	,294	79	,136	,151	,181
30	,218	,242	,290	80	,135	,150	,179
31	,214	,238	,285	81	,134	,149	,178
32	,211	,234	,281	82	,133	,148	,177
33	,208	,231	,277	83	,132	,147	,176
34	,205	,227	,273	84	,131	,146	,175
35	,202	,224	,269	85	,131	,145	,174
36	,199	,221	,265	86	,130	,144	,173
37	,196	,218	,262	87	,129	,144	,172
38	,194	,215	,258	88	,128	,143	,171
39	,191	,213	,255	89	,128	,142	,170
40	,189	,210	,252	90	,127	,141	,169
41	,187	,208	,249	91	,126	,140	,168
42	,185	,205	,246	92	,126	,140	,168
43	,183	,203	,243	93	,125	,139	,167
44	,181	,201	,241	94	,124	,138	,166
45	,179	,198	,238	95	,124	,137	,165
46	,177	,196	,235	96	,123	,137	,164
47	,175	,194	,233	97	,122	,136	,163
48	,173	,192	,231	98	,122	,135	,162
49	,171	,190	,228	99	,121	,135	,162
50	,170	,188	,226	100	,121	,134	,161

T a b l i c a 13. Wartości $K(y)$ dystrybuanty K statystyki $\sqrt{n}\, D_n$ Kołmogorowa przy $n \to \infty$

y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$
0,36	0,001	0,72	,322	1,08	0,806	1,44	0,968
0,37	,001	0,73	,339	1,09	,814	1,45	,970
0,38	,001	0,74	,356	1,10	,822	1,46	,972
0,39	,002	0,75	,373	1,11	,830	1,47	,973
0,40	,003	0,76	,390	1,12	,837	1,48	,975
0,41	,004	0,77	,406	1,13	,845	1,49	,976
0,42	,005	0,78	,423	1,14	,851	1,50	,978
0,43	,007	0,79	,440	1,15	,858	1,51	,979
0,44	,010	0,80	,456	1,16	,864	1,52	,980
0,45	,013	0,81	,472	1,17	,871	1,53	,981
0,46	,016	0,82	,488	1,18	,877	1,54	,983
0,47	,020	0,83	,504	1,19	,882	1,55	,984
0,48	,025	0,84	,519	1,20	,888	1,56	,985
0,49	,030	0,85	,535	1,21	,893	1,57	,986
0,50	,036	0,86	,550	1,22	,898	1,58	,986
0,51	,043	0,87	,565	1,23	,903	1,59	,987
0,52	,050	0,88	,579	1,24	,908	1,60	,988
0,53	,059	0,89	,593	1,25	,912	1,61	,989
0,54	,067	0,90	,607	1,26	,916	1,62	,989
0,55	,077	0,91	,621	1,27	,921	1,63	,990
0,56	,088	0,92	,634	1,28	,925	1,64	,991
0,57	,099	0,93	,647	1,29	,928	1,65	,991
0,58	,110	0,94	,660	1,30	,931	1,66	,992
0,59	,123	0,95	,673	1,31	,935	1,67	,992
0,60	,136	0,96	,685	1,32	,939	1,68	,993
0,61	,149	0,97	,696	1,33	,942	1,69	,993
0,62	,163	0,98	,708	1,34	,945	1,70	,994
0,63	,178	0,99	,719	1,35	,948	1,71	,994
0,64	,193	1,00	,730	1,36	,951	1,72-1,74	,995
0,65	,208	1,01	,741	1,37	,953	1,75-1,78	,996
0,66	,224	1,02	,751	1,38	,956	1,79-1,82	,997
0,67	,240	1,03	,761	1,39	,958	1,83-1,89	,998
0,68	,256	1,04	,770	1,40	,960	1,90-2,03	,999
0,69	,272	1,05	,780	1,41	,962		
0,70	,289	1,06	,789	1,42	,965		
0,71	,305	1,07	,798	1,43	,967		

T a b l i c a 14. Wartości iloczynów $n_1 n_2 d$ (α, n_1, n_2) liczności próbek i wartości krytycznych statystyki Smirnowa

$\alpha = 0{,}01$

n_2	n_1																	
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	–																	
4	–	–																
5	–	–	25															
6	–	24	30	36														
7	–	28	35	36	42													
8	–	32	35	40	48	56												
9	27	36	40	45	49	55	63											
10	30	36	45	48	56	60	63	80										
11	33	40	45	54	59	64	70	77	88									
12	36	44	50	60	60	68	75	80	86	96								
13	39	48	52	59	65	72	78	84	91	95	107							
14	42	48	56	64	77	76	84	90	96	104	104	126						
15	42	52	60	69	75	81	90	100	102	108	115	123	135					
16	45	56	64	72	77	88	94	100	106	116	121	126	133	160				
17	48	60	68	73	84	88	99	106	110	119	127	134	142	143	170			
18	51	60	70	84	87	94	108	108	118	126	131	140	147	154	164	180		
19	54	64	71	83	91	98	107	113	122	130	138	148	152	160	166	176	190	
20	57	68	80	88	93	104	111	120	127	140	143	152	160	168	175	182	187	220

$d(\alpha, n_2, n_1) = d(\alpha, n_1, n_2)$

$\alpha = 0{,}05$

n_2	n_1																	
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	–																	
4	–	16																
5	15	20	25															
6	18	20	24	30														
7	21	24	29	30	42													
8	21	28	29	34	40	48												
9	24	28	35	39	42	46	54											
10	27	30	40	40	46	48	53	70										
11	30	33	39	43	48	53	59	60	77									
12	30	36	43	48	53	60	63	66	72	84								
13	33	39	45	52	56	62	65	70	75	81	91							
14	36	42	46	54	63	65	70	74	82	86	89	112						
15	36	44	55	57	62	67	75	80	84	93	96	98	120					
16	39	48	54	60	64	80	78	82	89	96	101	106	114	128				
17	42	48	55	62	68	77	82	89	93	100	105	111	116	124	136			
18	45	50	60	72	72	80	90	92	97	108	110	116	123	128	133	162		
19	45	53	61	70	76	82	89	94	102	108	114	121	127	133	141	142	171	
20	48	60	65	72	79	88	99	100	107	116	120	126	135	140	146	152	160	180

$d(\alpha, n_2, n_1) = d(\alpha, n_1, n_2)$

T a b l i c a 15. Wartości krytyczne k_n $(1-\alpha)$ do testu Kołmogorowa-Lillieforsa

n	α		n	α	
	0,01	0,05		0,01	0,05
31	0,1852	0,1591	48	0,1488	0,1279
32	,1823	,1566	49	,1473	,1266
33	,1795	,1542	50	,1458	,1253
34	,1768	,1519	51	,1444	,1241
35	,1743	,1498	52	,1430	,1229
36	,1717	,1477	53	,1416	,1217
37	,1695	,1457	54	,1403	,1206
38	,1673	,1437	55	,1390	,1193
39	,1651	,1419	60	,1331	,1144
40	,1630	,1401	65	,1279	,1099
41	,1610	,1384	70	,1232	,1059
42	,1591	,1367	75	,1190	,1023
43	,1572	,1351	80	,1153	,0991
44	,1554	,1336	85	,1118	,0961
45	,1537	,1321	90	,1087	,0934
46	,1520	,1306	95	,1058	,0909
47	,1504	,1292	100	,1031	,0886

T a b l i c a 16. Wartości $a_i\,(n)$ do testu Shapiro-Wilka

i	n									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	
2		,0000	,1677	,2413	,2806	,3031	,3164	,3244	,3291	
3				,0000	,0875	,1401	,1743	,1976	,2141	
4						,0000	,0561	,0947	,1224	
5								,0000	,0399	

i	n									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4486	0,4808	0,4734
2	,3315	,3325	,3325	,3318	,3306	,3290	,3273	,3253	,3232	,3211
3	,2260	,2347	,2412	,2460	,2495	,2521	,2540	,2533	,2561	,2565
4	,1429	,1586	,1707	,1802	,1878	,1939	,1988	,2027	,2059	,2085
5	,0695	,0922	,1099	,1240	,1353	,1447	,1524	,1587	,1641	,1686
6	0,0000	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7			,0000	,0240	,0433	,0593	,0725	,0837	,0932	,1013
8					,0000	,0196	,0359	,0496	,0612	,0711
9							,0000	,0013	,0303	,0422
10									,0000	,0140

i	n									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4390	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	,3815	,3156	,3126	,3098	,3069	,3043	,3018	,2992	,2968	,2944
3	,2578	,2571	,2563	,2554	,2543	,2533	,2522	,2510	,2499	,2487
4	,2199	,2131	,2139	,2145	,2148	,2151	,2152	,2151	,2150	,2148
5	,1736	,1764	,1787	,1807	,1822	,1836	,1848	,1857	,1864	,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	,1092	,1150	,1201	,1245	,1283	,1316	,1346	,1372	,1395	,1415
8	,0804	,0878	,0941	,0997	,1046	,1089	,1128	,1162	,1192	,1219
9	,0530	,0618	,0696	,0764	,0823	,0876	,0923	,0965	,1002	,1036
10	,0263	,0368	,0459	,0539	,0610	,0672	,0728	,0778	,0822	,0862
11	0,0000	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12			,0000	,0107	,0200	,0284	,0358	,0424	,0483	,0537
13					,0000	,0094	,0178	,0253	,0320	,0381
14							,0000	,0084	,0159	,0227
15									,0000	,0076

Tablica 16 (cd.)

i	n									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0,4420	0,4188	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,4040	0,4015	0,3989	0,3964
2	,2921	,2898	,2876	,2854	,2834	,2813	,2794	,2774	,2755	,2737
3	,2475	,2463	,2451	,2439	,2427	,2415	,2403	,2391	,2380	,2368
4	,2145	,2141	,2137	,2132	,2127	,2121	,2116	,2110	,2104	,2098
5	1874	,1878	,1880	,1882	,1883	,1883	,1883	,1881	,1880	,1878
6	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691
7	,1433	,1449	,1463	,1475	,1487	,1496	,1505	,1513	,1520	,1526
8	,1243	,1265	,1284	,1301	,1317	,1331	,1344	,1356	,1366	,1376
9	,1066	,1093	,1118	,1140	,1160	,1170	,1196	,1211	,1225	,1237
10	,0899	,0931	,0961	,0988	,1013	,1036	,1056	,1075	,1092	,1108
11	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947	0,0967	0,0986
12	,0585	,0629	,0669	,0706	,0739	,0770	,0798	,0824	,0848	,0870
13	,0435	,0485	,0530	,0572	,0610	,0645	,0677	,0706	,0733	,0759
14	,0280	,0344	,0395	,0441	,0484	,0523	,0559	,0592	,0622	,0651
15	,0144	,0206	,0262	,0314	,0361	,0404	,0444	,0481	,0515	,0546
16	0,0000	0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372	0,0409	0,0444
17			,0000	,0062	,0119	,0172	,0220	,0264	,0305	,0343
18					,0000	,0057	,0110	,0158	,0203	,0244
19							,0000	,0053	,0101	,0146
20									,0000	,0049

i	n									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,3940	0,3917	0,3894	0,3872	0,3850	0,3830	0,3808	0,3789	0,3770	0,3751
2	,2719	,2701	,2684	,2667	,2651	,2635	,2620	,2604	,2589	,2574
3	,2357	,2345	,2334	,2323	,2313	,2302	,2291	,2281	,2271	,2260
4	,2091	,2085	,2078	,2072	,2065	,2058	,2052	,2045	,2038	,2032
5	,1876	,1874	,1871	,1808	,1865	,1862	,1859	,1855	,1851	,1847
6	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	,1531	,1535	,1539	,1542	,1545	,1548	,1550	,1551	,1553	,1554
8	,1384	,1392	,1398	,1405	,1410	,1415	,1420	,1423	,1427	,1430
9	,1249	,1259	,1269	,1278	,1286	,1293	,1300	,1306	,1312	,1317
10	,1123	,1136	,1149	,1160	,1170	,1180	,1189	,1197	,1205	,1212
11	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1093	0,1105	0,1113
12	,0891	,0909	,0927	,0943	,0959	,0972	,0986	,0998	,1010	,1020
13	,0782	,0804	,0824	,0842	,0860	,0876	,0892	,0906	,0919	,0932
14	,0677	,0701	,0724	,0745	,0765	,0783	,0801	,0817	,0832	,0846
15	,0575	,0602	,0628	,0651	,0673	,0694	,0713	,0731	,0748	,0764
16	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	,0379	,0411	,0442	,0471	,0497	,0522	,0546	,0568	,0588	,0608
18	,0283	,0318	,0352	,0383	,0412	,0439	,0465	,0489	,0511	,0532
19	,0188	,0227	,0263	,0296	,0328	,0357	,0385	,0411	,0436	,0459
20	,0094	,0136	,0175	,0211	,0245	,0277	,0307	,0335	,0361	,0386
21	0,0000	0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0259	0,0288	0,0314
22			,0000	,0042	,0081	,0118	,0153	,0185	,0215	,0244
23					,0000	,0039	,0076	,0011	,0143	,0174
24							,0000	,0037	,0071	,0104
25									,0000	,0035

Tablica 16 pochodzi z [20]

T a b l i c a 17. Kwantyle $W(\alpha, n)$ do testu Shapiro-Wilka

n	α					
	0,01	0,02	0,05	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,999	1,000	1,000
4	,687	,707	,748	,992	,996	,997
5	,686	,715	,762	,986	,991	,993
6	0,713	0,743	0,788	0,981	0,986	0,989
7	,730	,760	,803	,979	,985	,988
8	,749	,778	,818	,978	,984	,987
9	,764	,791	,829	,978	,984	,986
10	,781	,806	,842	,978	,983	,986
11	0,792	0,817	0,850	0,979	0,984	0,986
12	,803	,828	,859	,979	,984	,986
13	,814	,837	,866	,979	,984	,986
14	,825	,846	,874	,980	,984	,986
15	,835	,855	,881	,980	,984	,987
16	0,844	0,863	0,887	0,981	0,985	0,987
17	,851	,869	,892	,981	,985	,987
18	,858	,874	,897	,982	,986	,988
19	,863	,879	,901	,982	,986	,988
20	,868	,884	,905	,983	,986	,988
21	0,873	0,888	0,908	0,983	0,987	0,989
22	,878	,892	,911	,984	,987	,989
23	,881	,895	,914	,984	,987	,989
24	,884	,898	,916	,984	,897	,989
25	,888	,901	,918	,985	,988	,889
26	0,891	0,904	0,920	0,985	0,988	0,989
27	,894	,906	,923	,985	,988	,990
28	,896	,908	,924	,985	,988	,990
29	,898	,910	,926	,985	,988	,990
30	,900	,912	,927	,985	,988	,900
31	0,902	0,914	0,929	0,986	0,988	0,990
32	,904	,915	,930	,986	,988	,990
33	,906	,917	,931	,986	,989	,990
34	,908	,919	,933	,986	,989	,990
35	,910	,920	,934	,986	,989	,990
36	0,912	0,922	0,935	0,986	0,989	0,990
37	,914	,924	,936	,987	,989	,990
38	,916	,925	,938	,987	,989	,990
39	,917	,927	,939	,987	,989	,991
40	,919	,928	,940	,987	,989	,991
41	0,920	0,929	0,941	0,987	0,989	0,991
42	,922	,930	,942	,987	,989	,991
43	,923	,932	,943	,987	,990	,991
44	,924	,933	,944	,987	,990	,991
45	,926	,934	,945	,988	,990	,991
46	0,927	0,935	0,945	0,988	0,990	0,991
47	,928	,936	,946	,988	,990	,991
48	,929	,937	,947	,988	,990	,991
49	,929	,937	,947	,988	,990	,991
50	,930	,938	,947	,988	,990	,991

Tablica pochodzi z [20]

T a b l i c a 18. Wartości krytyczne $k\ (\alpha, n_1, n_2)$ rozkładu liczby serii;

$$k\ (\alpha, n_2, n_1) = k\ (\alpha, n_1, n_2)$$

$\alpha = 0{,}05$																	
$\overrightarrow{n_1}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$n_2\downarrow$
	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
$\downarrow n_2$		3	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
5	2		4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
6	2	2		5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8
7	2	3	3		6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9
8	2	3	3	4		6	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10
9	3	3	4	4	4		7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11
10	3	3	4	4	5	5		8	9	9	9	10	10	10	10	10	12
11	3	4	4	5	5	5	6		9	9	10	10	10	11	11	11	13
12	3	4	4	5	5	6	6	7		10	10	11	11	11	12	12	14
13	3	4	5	5	6	6	6	7	7		11	11	11	12	12	12	15
14	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8		11	12	12	13	13	16
15	4	4	5	5	6	7	7	8	8	8	9		12	13	13	13	17
16	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10		13	14	14	18
17	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10		14	14	19
18	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	11	11	11		15	20
19	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12		
20	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	11	12	12	13	
$\overrightarrow{n_1}$	·5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$\alpha = 0{,}01$																	

T a b l i c a 19. Wartości krytyczne $u(\alpha, n_1, n_2)$ statystyki U Wilcoxona

$$P\left(U \leqslant u(\alpha, n_1, n_2)\right) = P\left(U \leqslant u(\alpha, n_2, n_1)\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\alpha$$

$\alpha = 0{,}01$															
$\overrightarrow{n_1}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$n_2\downarrow$
	—	—	—	—	—	—	0	0	0	1	1	1	2	2	3
$\downarrow n_2$		—	—	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	4
3	—		0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	5
4	—	0		2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	6
5	0	1	2		4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	7
6	1	2	3	5		7	9	11	13	15	17	18	20	22	8
7	1	3	5	6	8		11	13	16	18	20	22	24	27	9
8	2	4	6	8	10	13		16	18	21	24	26	29	31	10
9	2	4	7	10	12	15	17		21	24	27	30	33	36	11
10	3	5	8	11	14	17	20	23		27	31	34	37	41	12
11	3	6	9	13	16	19	23	26	30		34	38	42	45	13
12	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37		42	46	50	14
13	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45		51	55	15
14	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55		60	16
15	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64		
16	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	
$\overrightarrow{n_1}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$\alpha = 0{,}05$															

T a b l i c a 20. Wartość współczynników $g_1(\alpha, r)$ i $g_2(\alpha, r)$ do wyznaczania przedziałów ufności dla odchylenia standardowego

r	$\alpha=0{,}01$		$\alpha=0{,}02$		$\alpha=0{,}05$		$\alpha=0{,}10$	
	g_1	g_2	g_1	g_2	g_1	g_2	g_1	g_2
1	0,356	159,58	0,388	79,79	0,446	31,91	0,510	15,95
2	,434	14,12	,466	9,97	,521	6,28	,578	4,42
3	,483	6,47	,514	5,11	,566	3,73	,620	2,92
4	,519	4,40	,549	3,67	,599	2,87	,649	,37
5	,546	3,48	,576	,00	,624	,45	,672	,09
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,20	0,690	1,92
7	,588	,66	,616	,38	,661	,04	,705	,80
8	,604	,44	,631	,20	,675	1,92	,718	,71
9	,618	,28	,645	,08	,688	,83	,729	,65
10	,630	,15	,656	1,98	,699	,75	,739	,59
11	0,641	2,06	0,667	1,90	0,708	1,70	0,748	1,55
12	,651	1,98	,677	,83	,717	,65	,755	,52
13	,660	,91	,685	,78	,725	,61	,762	,49
14	,669	,85	,693	,73	,732	,58	,769	,46
15	,676	,81	,700	,69	,739	,55	,775	,44
16	0,683	1,76	0,707	1,66	0,745	1,52	0,780	1,42
17	,690	,73	,713	,63	,750	,50	,785	,40
18	,696	,70	,719	,60	,756	,48	,790	,38
19	,702	,67	,725	,58	,760	,46	,794	,37
20	,707	,64	,730	,56	,765	,44	,798	,36
21	0,712	1,62	0,734	1,54	0,769	1,43	0,802	1,35
22	,717	,60	,739	,52	,773	,42	,805	,34
23	,722	,58	,743	,50	,777	,40	,809	,33
24	,726	,56	,747	,49	,781	,39	,812	,32
25	,730	,54	,751	,47	,784	,38	,815	,31
26	0,734	1,53	0,755	1,46	0,788	1,37	0,818	1,30
27	,737	,51	,758	,45	,791	,36	,820	,29
28	,741	,50	,762	,44	,794	,35	,823	,29
29	,744	,49	,765	,43	,796	,34	,825	,28
30	,748	,48	,768	,42	,799	,34	,828	,27
35	0,762	1,43	0,781	1,38	0,811	1,30	0,838	1,25
40	,774	,39	,792	,34	,821	,28	,847	,23
45	,784	,36	,802	,32	,829	,26	,854	,21
50	,793	,34	,810	,30	,837	,24	,861	,20
55	,801	,32	,818	,28	,843	,23	,866	,19
60	0,808	1,30	0,824	1,27	0,849	1,22	0,871	1,18
65	,814	,28	,830	,25	,854	,21	,875	,17
70	,820	,27	,835	,24	,858	,20	,879	,16
75	,825	,26	,840	,23	,862	,19	,883	,16
80	,829	,25	,844	,22	,866	,18	,886	,15
85	0,834	1,24	0,848	1,21	0,870	1,18	0,889	1,15
90	,838	,23	,852	,21	,873	,17	,892	,14
95	,841	,23	,855	,20	,876	,17	,894	,14
100	,845	,22	,858	,19	,879	,16	,897	,13

Tablica pochodzi z [33]

T a b l i c a 21. Granice dwustronnego przedziału ufności (f_1, f_2) dla nieznanej wadliwości p przy k sztukach niedobrych w próbce o liczności n i poziomie ufności $1-\alpha=0{,}95$

k	$n-k$														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	– –	0,975 0,000	0,842 0,000	0,708 0,000	0,602 0,000	0,522 0,000	0,459 0,000	0,410 0,000	0,369 0,000	0,336 0,000	0,308 0,000	0,285 0,000	0,265 0,000	0,247 0,000	0,232 0,000
1	1,000 0,025	0,987 0,013	0,906 0,008	0,806 0,006	0,716 0,005	0,641 0,004	0,579 0,004	0,527 0,003	0,483 0,003	0,445 0,003	0,413 0,002	0,385 0,002	0,360 0,002	0,339 0,002	0,319 0,002
2	1,000 0,158	0,992 0,094	0,932 0,068	0,853 0,053	0,777 0,043	0,710 0,037	0,651 0,032	0,600 0,028	0,556 0,025	0,518 0,023	0,484 0,021	0,454 0,019	0,428 0,018	0,405 0,017	0,383 0,016
3	1,000 0,292	0,994 0,194	0,947 0,147	0,882 0,118	0,816 0,099	0,755 0,085	0,701 0,075	0,652 0,067	0,610 0,060	0,572 0,055	0,538 0,050	0,508 0,047	0,481 0,043	0,456 0,040	0,434 0,038
4	1,000 0,398	0,995 0,284	0,957 0,223	0,901 0,184	0,843 0,157	0,788 0,137	0,738 0,122	0,692 0,109	0,651 0,099	0,614 0,091	0,581 0,084	0,551 0,078	0,524 0,073	0,499 0,068	0,476 0,064
5	1,000 0,478	0,996 0,359	0,963 0,290	0,915 0,245	0,863 0,212	0,813 0,187	0,766 0,167	0,723 0,151	0,684 0,139	0,649 0,128	0,616 0,118	0,587 0,110	0,560 0,103	0,535 0,097	0,512 0,091
6	1,000 0,541	0,996 0,421	0,968 0,349	0,925 0,299	0,878 0,262	0,833 0,234	0,789 0,211	0,749 0,192	0,711 0,177	0,677 0,163	0,646 0,152	0,617 0,142	0,590 0,133	0,565 0,126	0,543 0,119
7	1,000 0,590	0,997 0,473	0,972 0,400	0,933 0,348	0,891 0,308	0,849 0,277	0,808 0,251	0,770 0,230	0,734 0,213	0,701 0,198	0,671 0,184	0,643 0,173	0,616 0,163	0,592 0,154	0,570 0,146
8	1,000 0,631	0,997 0,517	0,975 0,444	0,940 0,390	0,901 0,349	0,861 0,316	0,823 0,289	0,787 0,266	0,753 0,247	0,722 0,230	0,692 0,215	0,665 0,203	0,639 0,191	0,616 0,181	0,593 0,172
9	1,000 0,664	0,997 0,555	0,977 0,482	0,945 0,428	0,909 0,386	0,872 0,351	0,837 0,323	0,802 0,299	0,770 0,278	0,740 0,260	0,711 0,244	0,685 0,231	0,660 0,218	0,636 0,207	0,615 0,197
10	1,000 0,692	0,998 0,587	0,979 0,516	0,950 0,462	0,916 0,419	0,882 0,384	0,848 0,354	0,816 0,329	0,785 0,308	0,756 0,289	0,728 0,272	0,702 0,257	0,678 0,244	0,655 0,232	0,634 0,221
11	1,000 0,715	0,998 0,615	0,981 0,546	0,953 0,492	0,922 0,449	0,890 0,413	0,858 0,383	0,827 0,357	0,797 0,335	0,769 0,315	0,743 0,298	0,718 0,282	0,694 0,268	0,672 0,256	0,651 0,244
12	1,000 0,735	0,998 0,640	0,982 0,572	0,957 0,519	0,927 0,476	0,897 0,440	0,867 0,410	0,837 0,384	0,809 0,361	0,782 0,340	0,756 0,322	0,732 0,306	0,709 0,291	0,687 0,278	0,666 0,266

Tablica 21 (cd.)

k	$n-k$														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
13	1,000	0,998	0,983	0,960	0,932	0,903	0,874	0,846	0,819	0,793	0,768	0,744	0,722	0,701	0,680
	0,753	0,661	0,595	0,544	0,501	0,465	0,435	0,408	0,384	0,364	0,345	0,328	0,313	0,299	0,287
14	1,000	0,998	0,984	0,962	0,936	0,909	0,881	0,854	0,828	0,803	0,779	0,756	0,734	0,713	0,694
	0,768	0,681	0,617	0,566	0,524	0,488	0,457	0,430	0,407	0,385	0,366	0,349	0,334	0,320	0,306
15	1,000	0,998	0,985	0,964	0,939	0,913	0,887	0,861	0,836	0,812	0,789	0,766	0,745	0,725	0,705
	0,782	0,698	0,636	0,586	0,544	0,509	0,478	0,451	0,427	0,406	0,386	0,369	0,353	0,339	0,325
16	1,000	0,999	0,986	0,966	0,943	0,918	0,893	0,868	0,844	0,820	0,798	0,776	0,755	0,736	0,717
	0,794	0,713	0,653	0,604	0,563	0,529	0,498	0,471	0,447	0,425	0,405	0,388	0,372	0,357	0,343
17	1,000	0,999	0,987	0,968	0,946	0,922	0,898	0,874	0,851	0,828	0,806	0,785	0,765	0,745	0,727
	0,805	0,727	0,669	0,621	0,581	0,547	0,516	0,488	0,465	0,443	0,423	0,406	0,389	0,374	0,360
18	1,000	0,999	0,988	0,970	0,948	0,925	0,902	0,879	0,857	0,835	0,814	0,793	0,773	0,755	0,736
	0,815	0,740	0,683	0,637	0,597	0,564	0,533	0,506	0,482	0,460	0,440	0,422	0,406	0,391	0,376
19	1,000	0,999	0,988	0,971	0,950	0,929	0,906	0,884	0,862	0,841	0,821	0,801	0,782	0,763	0,745
	0,824	0,751	0,696	0,651	0,612	0,579	0,549	0,522	0,508	0,476	0,456	0,439	0,422	0,408	0,392
20	1,000	0,999	0,989	0,972	0,953	0,932	0,910	0,889	0,868	0,847	0,827	0,808	0,789	0,771	0,753
	0,832	0,762	0,708	0,664	0,626	0,593	0,564	0,537	0,513	0,492	0,472	0,454	0,437	0,421	0,407
21	1,000	0,999	0,990	0,973	0,955	0,934	0,914	0,893	0,874	0,853	0,833	0,814	0,796	0,778	0,761
	0,839	0,772	0,720	0,676	0,640	0,607	0,577	0,551	0,528	0,506	0,486	0,468	0,451	0,436	0,421
22	1,000	0,999	0,990	0,975	0,956	0,937	0,917	0,897	0,877	0,858	0,839	0,820	0,803	0,785	0,768
	0,846	0,781	0,730	0,688	0,651	0,619	0,590	0,565	0,541	0,519	0,500	0,481	0,465	0,449	0,434
23	1,000	0,999	0,990	0,976	0,957	0,939	0,920	0,901	0,881	0,862	0,844	0,826	0,809	0,792	0,775
	0,852	0,789	0,740	0,699	0,662	0,631	0,603	0,577	0,544	0,533	0,513	0,495	0,478	0,462	0,448
24	1,000	0,999	0,991	0,976	0,960	0,942	0,923	0,904	0,885	0,867	0,849	0,831	0,814	0,798	0,782
	0,858	0,797	0,749	0,708	0,673	0,642	0,614	0,589	0,566	0,545	0,525	0,507	0,490	0,475	0,460
25	1,000	0,999	0,991	0,977	0,961	0,944	0,925	0,907	0,889	0,871	0,854	0,836	0,820	0,804	0,788
	0,863	0,804	0,757	0,718	0,683	0,653	0,625	0,600	0,577	0,556	0,537	0,519	0,502	0,487	0,472

T a b l i c a 21 (cd.)

k	$n-k$														
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0	0,218	0,206	0,195	0,185	0,176	0,168	0,161	0,154	0,148	0,142	0,137	0,132	0,127	0,123	0,119
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,302	0,287	0,273	0,260	0,249	0,238	0,228	0,219	0,211	0,203	0,196	0,190	0,184	0,178	0,172
	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
2	0,364	0,347	0,331	0,317	0,304	0,292	0,280	0,270	0,260	0,251	0,243	0,235	0,228	0,221	0,215
	0,015	0,014	0,013	0,012	0,012	0,011	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008	0,008
3	0,414	0,396	0,379	0,363	0,349	0,336	0,324	0,312	0,301	0,292	0,282	0,274	0,265	0,257	0,250
	0,036	0,034	0,032	0,030	0,029	0,028	0,027	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,021	0,020	0,020
4	0,456	0,437	0,419	0,403	0,388	0,374	0,360	0,349	0,338	0,327	0,317	0,307	0,298	0,290	0,282
	0,061	0,057	0,054	0,052	0,050	0,047	0,045	0,044	0,042	0,040	0,039	0,038	0,036	0,035	0,034
5	0,491	0,471	0,453	0,436	0,421	0,407	0,393	0,381	0,369	0,358	0,347	0,337	0,328	0,319	0,311
	0,087	0,082	0,078	0,075	0,071	0,068	0,066	0,063	0,061	0,058	0,056	0,055	0,053	0,051	0,050
6	0,522	0,502	0,484	0,467	0,451	0,436	0,423	0,410	0,397	0,386	0,375	0,364	0,355	0,345	0,336
	0,113	0,107	0,102	0,098	0,094	0,090	0,086	0,083	0,080	0,077	0,075	0,072	0,070	0,068	0,066
7	0,549	0,529	0,512	0,494	0,478	0,463	0,499	0,435	0,423	0,411	0,400	0,389	0,379	0,369	0,360
	0,139	0,132	0,126	0,121	0,116	0,111	0,107	0,103	0,099	0,096	0,093	0,090	0,087	0,084	0,082
8	0,573	0,553	0,535	0,518	0,502	0,487	0,472	0,459	0,446	0,434	0,423	0,412	0,401	0,391	0,382
	0,164	0,156	0,149	0,143	0,138	0,132	0,126	0,123	0,119	0,115	0,111	0,107	0,104	0,101	0,098
9	0,594	0,575	0,557	0,540	0,524	0,508	0,494	0,481	0,467	0,455	0,444	0,433	0,422	0,412	0,402
	0,188	0,180	0,172	0,165	0,159	0,153	0,147	0,142	0,138	0,133	0,129	0,125	0,121	0,118	0,114
10	0,614	0,595	0,577	0,560	0,544	0,528	0,514	0,500	0,487	0,475	0,463	0,452	0,441	0,431	0,421
	0,211	0,202	0,194	0,186	0,179	0,173	0,167	0,161	0,156	0,151	0,146	0,142	0,138	0,134	0,130
11	0,631	0,612	0,594	0,578	0,561	0,546	0,532	0,519	0,505	0,493	0,481	0,470	0,459	0,449	0,439
	0,234	0,224	0,215	0,207	0,199	0,192	0,186	0,180	0,174	0,169	0,164	0,159	0,154	0,150	0,146
12	0,647	0,628	0,611	0,594	0,578	0,563	0,549	0,535	0,522	0,510	0,498	0,487	0,476	0,465	0,455
	0,255	0,245	0,235	0,227	0,218	0,211	0,204	0,197	0,191	0,186	0,180	0,175	0,170	0,166	0,161

T a b l i c a 21 (cd.)

k	$n-k$														
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
13	0,661 0,275	0,643 0,264	0,626 0,255	0,609 0,245	0,594 0,237	0,579 0,229	0,564 0,222	0,551 0,215	0,538 0,208	0,525 0,202	0,513 0,196	0,503 0,191	0,491 0,186	0,481 0,181	0,471 0,176
14	0,675 0,295	0,657 0,283	0,640 0,273	0,624 0,264	0,608 0,255	0,593 0,247	0,579 0,239	0,556 0,232	0,552 0,225	0,540 0,218	0,528 0,212	0,517 0,206	0,506 0,201	0,496 0,196	0,485 0,191
15	0,687 0,313	0,669 0,302	0,653 0,291	0,637 0,281	0,621 0,272	0,607 0,263	0,592 0,255	0,579 0,248	0,566 0,240	0,554 0,234	0,542 0,227	0,531 0,221	0,520 0,216	0,509 0,210	0,499 0,205
16	0,698 0,331	0,681 0,319	0,665 0,308	0,649 0,298	0,634 0,288	0,619 0,280	0,605 0,271	0,592 0,263	0,579 0,255	0,567 0,249	0,555 0,242	0,544 0,236	0,533 0,230	0,522 0,224	0,512 0,219
17	0,709 0,347	0,692 0,335	0,676 0,324	0,660 0,314	0,645 0,304	0,631 0,295	0,617 0,286	0,604 0,278	0,591 0,270	0,579 0,263	0,567 0,256	0,556 0,250	0,545 0,244	0,535 0,238	0,524 0,232
18	0,719 0,363	0,702 0,351	0,686 0,340	0,671 0,329	0,656 0,319	0,642 0,310	0,628 0,301	0,615 0,293	0,602 0,285	0,590 0,277	0,579 0,270	0,568 0,264	0,557 0,257	0,547 0,251	0,536 0,245
19	0,728 0,379	0,712 0,366	0,696 0,355	0,681 0,344	0,666 0,334	0,652 0,324	0,639 0,315	0,626 0,307	0,613 0,298	0,601 0,291	0,590 0,284	0,578 0,277	0,568 0,270	0,557 0,264	0,547 0,258
20	0,737 0,393	0,720 0,381	0,705 0,369	0,690 0,358	0,676 0,348	0,662 0,338	0,649 0,329	0,636 0,320	0,623 0,312	0,612 0,304	0,600 0,296	0,589 0,289	0,578 0,283	0,568 0,276	0,588 0,270
21	0,745 0,408	0,729 0,395	0,714 0,383	0,699 0,372	0,685 0,361	0,671 0,351	0,658 0,342	0,645 0,333	0,633 0,325	0,621 0,317	0,610 0,309	0,599 0,302	0,588 0,295	0,578 0,288	0,568 0,282
22	0,752 0,421	0,737 0,408	0,722 0,396	0,707 0,385	0,693 0,374	0,680 0,364	0,667 0,355	0,654 0,346	0,642 0,337	0,631 0,329	0,619 0,321	0,608 0,314	0,598 0,307	0,587 0,300	0,577 0,293
23	0,760 0,434	0,745 0,421	0,730 0,409	0,715 0,398	0,702 0,387	0,688 0,377	0,675 0,367	0,663 0,358	0,651 0,349	0,639 0,341	0,628 0,333	0,617 0,325	0,607 0,318	0,596 0,311	0,586 0,304
24	0,766 0,446	0,751 0,433	0,737 0,421	0,723 0,410	0,709 0,399	0,696 0,388	0,683 0,379	0,671 0,370	0,659 0,361	0,648 0,352	0,636 0,344	0,626 0,337	0,615 0,330	0,605 0,322	0,595 0,315

Tablica 21 pochodzi z [10]

T a b l i c a 22. Wartość współczynników

$$b_n = \frac{\sigma}{ES} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{n}{2}}; \quad d_n = \frac{\sigma}{ER}$$

oraz efektywność estymatora Rd_n

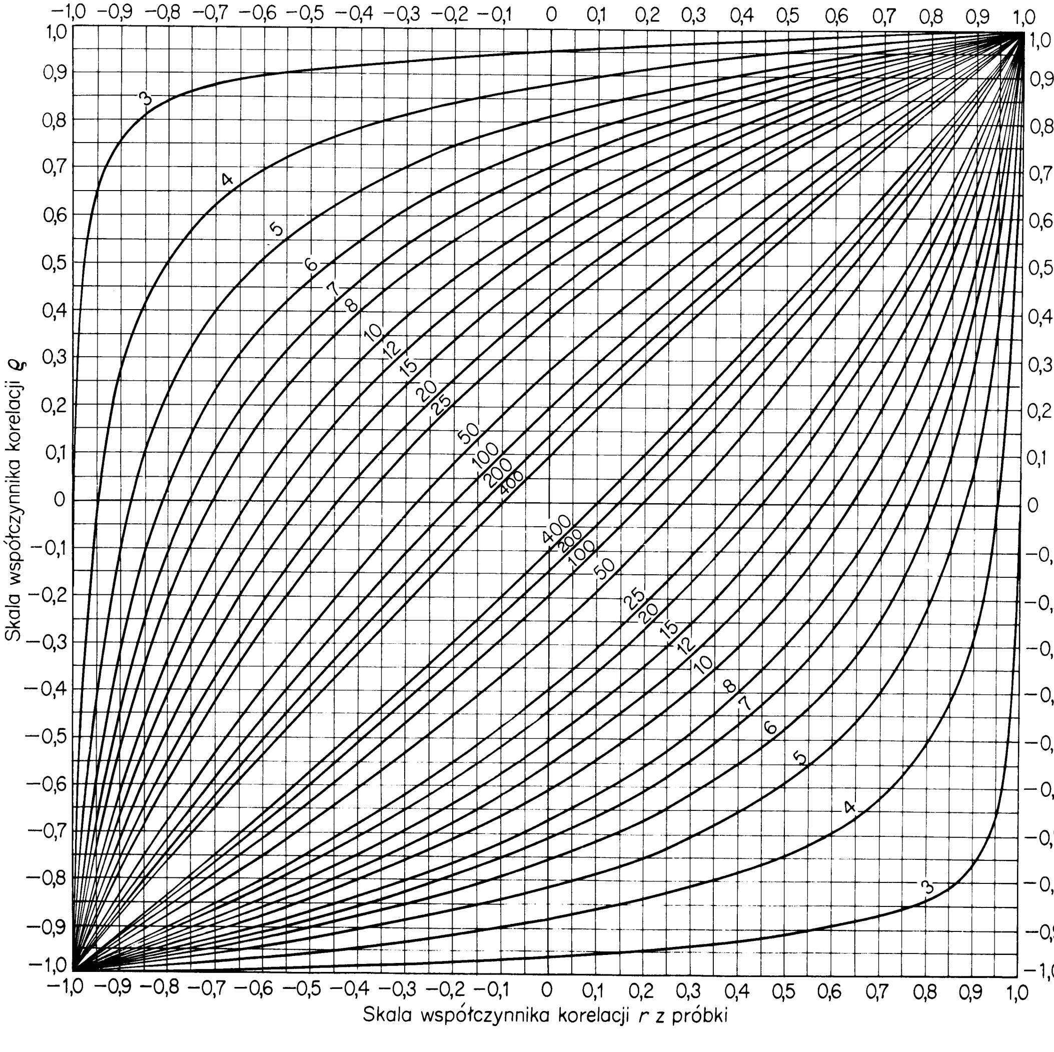
n	b_n	d_n	ef (Rd_n)
2	1,772	0,886	1,000
3	1,382	0,591	0,992
4	1,253	0,486	0,975
5	1,189	0,430	0,955
6	1,151	0,395	0,933
7	1,126	0,370	0,911
8	1,108	0,351	0,890
9	1,094	0,337	0,869
10	1,084	0,325	0,850

n	b_n	d_n	ef (Rd_n)
11	1,075	0,315	0,831
12	1,068	0,307	0,814
13	1,063	0,300	0,797
14	1,058	0,294	0,781
15	1,054	0,288	0,766
16	1,050	0,283	0,751
17	1,047	0,270	0,738
18	1,044	0,275	0,725
19	1,042	0,271	0,712
20	1,040	0,268	0,700

T a b l i c a 23. Wartości krytyczne współczynnika $r(\alpha, v)$ korelacji

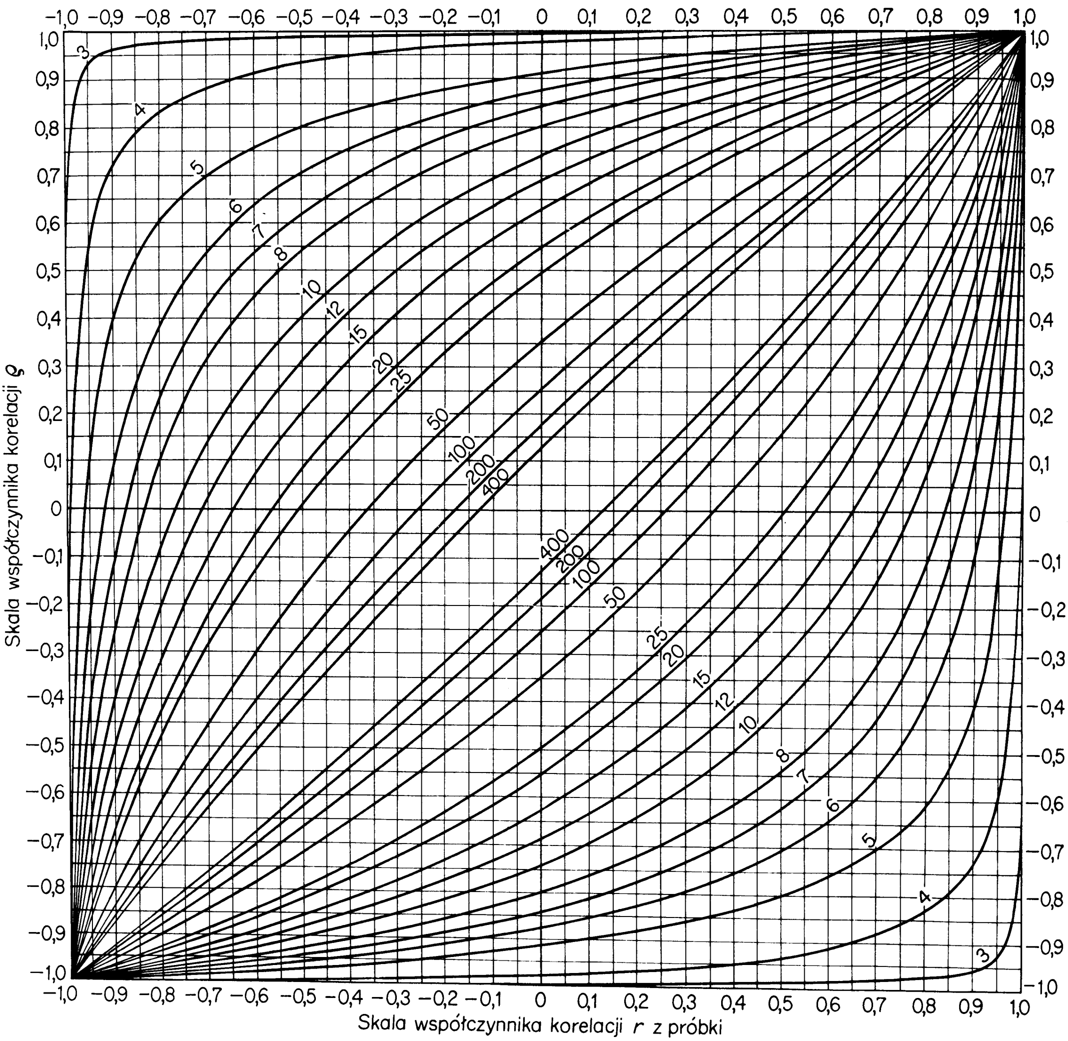
v	α			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,98769	0,99692	0,999507	0,999877
2	,90000	,95000	,98000	,990000
3	,8054	,8783	,93433	,95873
4	,7293	,8114	,8822	,91720
5	,6694	,7545	,8329	,8745
6	,6215	,7067	,7887	,8343
7	,5822	,6664	,7498	,7977
8	,5494	,6319	,7155	,7646
9	,5214	,6021	,6851	,7348
10	,4973	,5760	,6581	,7079
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835
12	,4575	,5324	,6120	,6614
13	,4409	,5139	,5923	,6411
14	,4259	,4973	,5742	,6226
15	,4124	,4821	,5577	,6055
16	,4000	,4683	,5425	,5897
17	,3887	,4555	,5285	,5751
18	,3783	,4438	,5155	,5614
19	,3687	,4329	,5034	,5487
20	,3598	,4227	,4921	,5368
25	0,3233	0,3809	0,4451	0,4869
30	,2960	,3494	,4093	,4487
35	,2746	,3246	,3810	,4182
40	,2573	,3044	,3578	,3932
45	,2428	,2875	,3384	,3721
50	,2306	,2732	,3218	,3541
60	,2108	,2500	,2948	,3248
70	,1954	,2319	,2737	,3017
80	,1829	,2172	,2565	,2830
90	,1726	,2050	,2422	,2673
100	,1638	,1946	,2301	,2540

T a b l i c a 24a. Przedziały ufności dla współczynnika korelacji. Przedział ufności $1-\alpha=0{,}95$



Tablica pochodzi z [33]

T a b l i c a 24b. Przedziały ufności dla współczynnika korelacji. Przedział ufności $1-\alpha=0{,}99$



T a b l i c a 25a. Współczynniki $k(\alpha, n, p)$ przedziałów tolerancji dwustronnej dla rozkładu normalnego

	$\alpha = 0{,}05$				$\alpha = 0{,}01$			
	p				p			
n	0,75	0,90	0,95	0,99	0,75	0,90	0,95	0,99
2	22,858	32,019	37,674	48,430	114,363	160,193	188,491	242,300
3	5,922	8,380	9,916	12,861	13,378	18,930	22,401	29,055
4	3,779	5,369	6,370	8,299	6,614	9,398	11,150	14,527
5	,002	4,275	5,079	6,634	4,643	6,612	7,855	10,260
6	2,604	3,712	4,414	5,775	3,743	5,337	6,345	8,301
7	,361	,369	,007	,248	,233	4,613	5,488	7,187
8	,197	,136	3,732	4,891	2,905	,147	4,936	6,468
9	,078	2,967	,532	,631	,677	3,822	,550	5,966
10	1,987	,839	,379	,433	,508	,582	,265	,594
11	1,916	2,737	3,259	4,277	2,378	3,397	4,045	5,308
12	,858	,655	,162	,150	,274	,250	3,870	,079
13	,810	,587	,081	,044	,190	,130	,727	4,893
14	,770	,529	,012	3,955	,120	,029	,608	,737
15	,735	,480	2,954	,878	,060	2,945	,507	,605
16	,705	,437	,903	,812	,009	,872	,421	,492
17	,679	,400	,858	,754	1,965	,808	,345	,393
18	,655	,366	,819	,702	,926	,753	,279	,307
19	,635	,337	,784	,656	,891	,703	,221	,230
20	,616	,310	,752	,615	,860	,659	,168	,161
21	1,599	2,286	2,723	3,577	1,833	2,620	3,121	4,100
22	,584	,264	,697	,543	,808	,584	,078	,044
23	,570	,244	,673	,512	,785	,551	,040	3,993
24	,557	,225	,651	,483	,764	,522	,004	,947
25	,545	,208	,631	,457	,745	,494	2,972	,904
26	,534	,193	,612	,432	,727	,469	,941	,865
27	,523	,178	,595	,409	,711	,446	,914	,828
28	,514	,164	,579	,388	,695	,424	,888	,794
29	,505	,152	,564	,368	,681	,404	,864	,763
30	,497	,140	,549	,350	,668	,385	,841	,733
31	1,489	2,129	2,536	3,332	1,656	2,367	2,820	3,706
32	,481	,118	,524	,316	,644	,351	,801	,680
33	,475	,108	,521	,300	,633	,335	,782	,655
34	,468	,099	,501	,286	,623	,320	,764	,632
35	,462	,090	,490	,272	,613	,306	,748	,611
36	,455	,081	,479	,258	,604	,293	,732	,590
37	,450	,073	,470	,246	,595	,281	,717	,571
38	,446	,068	,464	,237	,587	,269	,703	,552
39	,441	,060	,455	,226	,579	,257	,690	,534
40	,435	,052	,445	,213	,571	,247	,677	,518
41	1,430	2,045	2,437	3,202	1,564	2,236	2,665	3,502
42	,426	,039	,429	,192	,557	,227	,653	,486
43	,422	,033	,422	,183	,551	,217	,642	,472
44	,418	,027	,415	,173	,545	,208	,633	,458
45	,414	,021	,408	,165	,539	,200	,621	,444
46	,410	,016	,402	,156	,533	,192	,611	,431
47	,406	,011	,396	,148	,527	,184	,602	,419
48	,403	,006	,390	,140	,522	,176	,593	,407
49	,399	,001	,384	,133	,517	,169	,584	,396
50	,396	1,996	,379	,126	,512	,162	,576	,385

Tablica pochodzi z [33]

T a b l i c a 25b. Współczynniki tolerancji jednostronnej $k_1(\alpha, n, p)$ dla rozkładu normalnego

n	w [%]				
	25	10	5	1,0	0,1
3	3,804	6,158	7,655	10,552	13,857
4	2,619	4,163	5,145	7,042	9,215
5	2,149	3,407	4,202	5,741	7,501
6	1,895	3,006	3,707	5,062	6,612
7	,732	2,755	,399	4,641	,061
8	,617	,582	,188	,353	5,686
9	,532	,454	,031	,143	,414
10	,465	,355	2,911	3,981	,203
11	1,411	2,275	2,815	3,852	5,036
12	,366	,210	,736	,747	4,900
13	,329	,155	,670	,659	,787
14	,296	,108	,614	,585	,690
15	,268	,068	,566	,520	,607
16	1,242	2,032	2,523	3,463	4,534
17	,200	,001	,486	,415	,471
18	,200	1,974	,453	,370	,415
19	,183	,949	,423	,331	,364
20	,167	,926	,396	,295	,319
21	1,152	1,905	2,371	3,262	4,276
22	,138	,887	,350	,233	,238
23	,126	,869	,329	,206	,204
24	,114	,853	,309	,181	,171
25	,103	,838	,292	,158	,143
30	1,059	1,778	2,220	3,064	4,022
35	,025	,732	,166	2,994	3,934
40	0,999	,697	,126	,941	,866
45	,978	,669	,092	,897	,811
50	,961	,646	,065	,863	,776

Tablica pochodzi z [10]

T a b l i c a 26. Minimalne liczności próbek do wyznaczenia nieparametrycznych przedziałów tolerancji

Y	p						
	0,975	0,980	0,990	0,995	0,999	0,9995	0,9999
0,500	67	84	168	336	1679	3357	16783
0,700	97	122	244	488	2439	4878	24392
0,750	107	134	269	538	2692	5385	26926
0,800	119	149	299	598	2994	5988	29943
0,850	134	168	337	674	3372	6744	33724
0,900	155	194	388	777	3889	7778	38896
0,950	188	236	473	947	4742	9486	47437
0,975	221	277	555	1113	5570	11141	55715
0,980	231	290	581	1165	5832	11666	58337
0,990	263	330	662	1325	6636	13274	66381
0,995	294	369	740	1483	7427	14858	74299
0,999	366	458	920	1843	9230	18463	92330
0,9995	396	496	996	1996	9995	19993	99983
0,9999	465	583	1171	2346	11751	23508	117559

T a b l i c a 27. Niektóre rozkłady prawdopodobieństwa

Lp.	Nazwa	Gęstość albo funkcja prawdopodobieństwa	Parametry rozkładu	Wartość przeciętna EX	Wariancja D^2X
1	równomierny	$\frac{1}{b-a}$ dla $a \leqslant x \leqslant b$	$a, b \in \mathbf{R}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
2	wykładniczy	$\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x>0$	$\lambda>0$	λ	λ^2
3	gamma	$\frac{x^{p-1} e^{-x/\lambda}}{\lambda^p \Gamma(p)}, \quad x>0$ (¹)	$p, \lambda>0$	λp	$\lambda^2 p$
4	beta	$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, \quad 0<x<1$ (²)	$p, q>0$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$
5	normalny	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty<x<\infty$	$\mu \in \mathbf{R}$ $\sigma>0$	μ	σ^2
6	Laplace'a	$\frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{\lvert x-\mu \rvert}{\lambda}\right), \quad -\infty<x<\infty$	$\lambda>0$ $\mu \in \mathbf{R}$	μ	$2\lambda^2$
7	Rayleigha	$\frac{2}{\lambda} x \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right), \quad x>0$	$\lambda>0$	$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda\pi}$	$\frac{4-\pi}{4}\lambda$

Tablica 27 (cd.)

Lp.	Nazwa	Gęstość albo funkcja prawdopodobieństwa	Parametry rozkładu	Wartość przeciętna EX	Wariancja D^2X
8	Maxwella	$\frac{4\lambda^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right), \quad x>0$	$\lambda>0$	$2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$	$\frac{3\pi-8}{2\pi}\lambda$
9	Weibulla	$\frac{p}{\lambda} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x^p}{\lambda}\right), \quad x>0$	$p,\lambda>0$	$\lambda^{1/p}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)$	$\lambda^{2/p}\left[\Gamma\left(\frac{2}{p}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]$
10	uogólniony gamma	$\frac{\alpha}{\lambda^{p/\alpha}\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{\lambda}\right), \quad x>0$	$p,\ \alpha,\ \lambda>0$	$\lambda^{1/p}\frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)}$	$\lambda^{2/p}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{2+p}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)}-\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)}\right]^2\right\}$
11	Cauchy'ego	$\frac{\lambda}{\pi[\lambda^2+(x-\mu)^2]}$	$\mu\in\mathbf{R}$ $\lambda>0$	nie istnieją	
12	χ^2 z v stopniami swobody	$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma(\frac{1}{2}v)} x^{v/2-1} e^{-x/2}, \quad x>0$	$v\in\mathbf{N}$	v	$2v$
13	t Studenta z v stopniami swobody	$\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{(v+1)/2}}$ dla $x\in\boldsymbol{R}$	$v\in\mathbf{N}$	0	$\frac{v}{v-2}$ dla $v>2$

Tablica 27 (cd.)

Lp.	Nazwa	Gęstość albo funkcja prawdopodobieństwa	Parametry rozkładu	Wartość przeciętna EX	Wariancja D^2X
14	F Snedecora z parą (ν_1, ν_2) stopni swobody	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} x^{(\nu_1-2)/2}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$ dla $x>0$	$\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{N}$	$\dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}$ dla $\nu_2>2$	$\dfrac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ dla $\nu_2>4$
15	zero-jedynkowy	$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$	$p \in (0, 1)$	p	$p(1-\mathrm{p})$
16	dwumianowy	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n$	$n \in \mathbf{N}$ $p \in (0, 1)$	np	$np(1-p)$
17	Poissona	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \ldots$	$\lambda>0$	λ	λ
18	geometryczny	$p(1-p)^{k-1}, \quad k=1, 2, \ldots$	$p \in (0, 1)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

(1) $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ dla $p>0$; dla $p_1=n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

(2) $B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p, q>0, \quad B(p, q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

LITERATURA

[1] Barella Miró A., *Estadistica aplicada*, Barcelona 1969.

[2] Bartlett M.S., Properties of sufficiency of statistical tests, *Proc. Roy. Soc.* A, 160 (1937).

[3] Benjamin J.R., Cornell C.A., *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, Warszawa 1977.

[4] Beyer O., Hackal H., Pieper V., Tiedge J., *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, Leipzig 1976.

[5] Bobrowski D., *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*, Warszawa 1980.

[6] Bożyk Z., Rudzki W., *Metody statystyczne w badaniu jakości produktów żywnościowych i chemicznych*, Warszawa 1977.

[7] Cox D.R., Hinkley D. V., *Theoretical statistics*, London 1974.

[8] Cramer H., *Metody matematyczne w statystyce*, Warszawa 1958.

[9] Draper N.R., Smith H., *Analiza regresji stosowana*, Warszawa 1973.

[10] Firkowicz Sz., *Statystyczne badania wyrobów*, Warszawa 1970.

[11] Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Warszawa 1976.

[12] Greń J., *Modele i zadania statystyki matematycznej*, Warszawa 1980.

[13] Hald A., *Statistical theory with engineering applications*, New York-London 1952 (ros. tłum. pt. *Математическая статистика с механическими приложениями*, Moskwa 1956).

[14] Hellwig Z., Wyznaczanie parametrów regresji liniowej metodą dwóch punktów, *Zastos. Mat.* 3 (1). (1956).

[15] Himmelblau D.M., *Process analysis by statistical methods*, New York 1970.

[16] Kendal M.G., Stuart A., *The advanced theory of statistics*, Vol. I, II, London.

[17] Lange O., Analiza wariancji, analiza Lexis'a i korelacja – ich związki wzajemne, *Przeg. Stat.* 13 (2) (1966).

[18] Lilliefors H.W., *On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown*, JASA. 1967. 399.

[19] Mitropolskij A.K. [Митропольский А.К.], *Техника статистических вычислений*, Москва 1971.

[20] Morice E., Tests de normalité d'une distribution observée, *Rev. de Stat. Appliquée* 20 (2) (1972).

[21] Plucińska A., Pluciński E., *Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Warszawa 1978.

[22] Plucińska A., Pluciński E., *Elementy probabilistyki*, Warszawa 1979.

[23] Polskie Normy: Rachunek Prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna PN – 74/N – 01051 Wyd. Normalizacyjne.

[24] Romanowskij B.I. [Романовский Б.И.], *Математическая статистика II*, Ташкент 1963.

[25] Schmetterer L., *Einführung in die mathematische Statistik*, Springer Verlag, 1966.

[26] S a c h s L., *Statistische Auswertungsmethoden*, Springer Verlag, 1972.
[27] S e e l b i n d e r B.M., On Stein's two-stage sampling scheme, *Ann. Math. Stat.* 24 (4) (1953).
[28] S h a p i r o S.S., W i l k M.B., An analysis of variance test for normality, *Biometrika* 52 (1965), 591-611.
[29] S i l v e y S.D., *Wnioskowanie statystyczne*, Warszawa 1978.
[30] S m i r n o w N.W., D u n i n - B o r k o w s k i I.W., *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, Warszawa 1969.
[31] W i l k s S.S., *Mathematical statistics*, Princeton Univ. Press, N. York 1963 (ros. tłumaczenie *Математическая статистика*, Москва 1967).
[32] Y u l e G.U., K e n d a l l M.G., *Wstęp do teorii statystyki*, Warszawa 1966.
[33] Z i e l i ń s k i R., *Tablice statystyczne*, Warszawa 1972.
[34] Z u b r z y c k i S., *Wykłady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Warszawa 1970.
[35] Ż i t e k F., O pewnych estymatorach odchylenia standardowego, *Zastos. Mat.* 1 (4) (1954).

SKOROWIDZ

SKOROWIDZ TESTÓW

Nr Nazwa testu

SPIS RZECZY