

Zadanie 1.

Ile nieujemnych, całkowitoliczbowych rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, gdzie dodatkowo spełnione są warunki: $x_1 \geq 3$, $x_2 > 0$, $x_3 > 2$, $x_4 \geq 3$, $x_5 = 2$?
(Wskazówka: dokonać podstawienia zmiennych)

Zadanie 2.

W sklepie w koszu jest 40 jednakowych skarpet.

8 (rozdzielnych) klientów $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ wybiera je z kosza. Na ile sposobów mogli to zrobić, jeśli: każdy klient coś kupił, każdy kupił parzystą liczbę skarpet i wszystkie skarpety zostały sprzedane?

Zadanie 3.

[3.1] Zbadaj, ile rozwiązań ma nierówność: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$, gdzie x_1, x_2, x_3 są liczbami całkowitymi nieujemnymi, a dodatkowo spełnione są warunki: x_1 – parzysta, $x_2 = 0$ lub 1, $2 < x_3 < 5$.
(Funkcje tworzące)

[3.2] Ile rozwiązań ma podwójna nierówność: $5 < x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$, przy czym warunki na zmienne są takie same jak w podpunkcie **[3.1]** ?

[3.3] Zbadaj, ile rozwiązań ma nierówność: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$, gdzie x_1, x_2, x_3 są liczbami całkowitymi nieujemnymi, a dodatkowo spełnione są warunki: x_1 – parzysta, $x_2 = 0$ lub 1, x_3 podzielne przez 3.

Zadanie 4.

$X = \langle 5^*a, 4^*b, 3^*c \rangle$; rozważ takie podzbiory, w których a występuje parzystą liczbę razy, b występuje najwyżej dwa razy, ale co najmniej raz, c występuje co najmniej dwa razy. Skonstruuj funkcję tworzącą dla ciągu liczb podzbiorów k -elementowych, przy zadanych warunkach dla a, b, c .

[4.1] Ile takich podzbiorów zawiera więcej niż 6 elementów?

[4.2] Ile takich podzbiorów zawiera 4 elementy lub 8 elementów?

Zadanie 5.

Siedem cukierków $\{a, b, 1, 2, 3, 4, 5\}$ wkładamy do 3 identycznych pudełek. W każdym pudełku musi być jakiś cukierek. Muszą być spełnione oba poniższe warunki:

[1] a i b nie mogą się znaleźć razem w jednym pudełku;

[2] ani a , ani b nie mogą być same w pudełku.

Ile jest takich podziałów?

Zadanie 6.

Osiem osób $\{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ma usiąść przy 4 identycznych stolikach. Przy każdym stoliku ktoś musi usiąść. Warunek: żadna z par a,b ; b,c ; a,c ; nie może siedzieć razem. Ile jest sposobów rozsadzenia tych osób?

Zadanie 7.

Mamy 9 obiektów $\{o_1, \dots, o_9\}$ i cztery pudełka $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Warunki: w pudełku p_1 muszą się znaleźć dokładnie 3 obiekty oraz w każdym pudełku musi być przynajmniej jeden obiekt. Ile jest sposobów rozłożenia obiektów do pudełek?

Zadanie 8.

X - zbiór 5-elementowy; Y - zbiór 4-elementowy; Z - zbiór 9-elementowy.

a = liczba takich relacji równoważności w zbiorze Z , które mają co najmniej siedem klas abstrakcji;

b = liczba surjekcji $X \rightarrow Y$.

Która liczba jest większa: a czy b ? Uzasadnij.

Zadanie 9.

$A = \{\{a, 1\}, b, \{b, 1\}, a, 1\}$, $B = \{a, 1, b, \{a, 1\}\}$. Ile jest wszystkich funkcji $f: A \rightarrow B$? Ile jest funkcji różnowartościowych $g: B \rightarrow A$? Ile jest wszystkich relacji w zbiorze B ? Ile jest wszystkich surjekcji

$h: B \rightarrow A$? Ile jest wszystkich surjekcji $s: A \rightarrow B$? Ile podzbiorów ma zbiór $P(A \times B)$?

{definicja: $P(Y)$ = zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Y }

Jaką część wszystkich relacji, dających się określić w zbiorze B , stanowią relacje równoważności?

Zadanie 10.

Ile jest podziałów liczby 20 na 8 składników? Odp.: 70

Zadanie 11.

Ile jest podziałów liczby 13 na 4 składniki, w których największy składnik jest niemniejszy niż 4? Uzasadnij. Odp.: 18

Zadanie 12.

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$

1] Skonstruuj w X relację równoważności, która ma klasy abstrakcji:

$\{a, d, f\}, \{c, e\}, \{b\}$. Narysuj graf tej relacji.

2] Ile jest w X relacji równoważności, których klasy abstrakcji mają taką samą liczbę jak klasy z punktu **1]**? *Odp.: 60*

Zadanie 13.

$X = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Dzielimy zbiór X na cztery bloki, tak by w jednym z bloków były a i b , ale nie było w nim c . Ile jest takich podziałów? *Odp.: 6069*

Zadanie 14.

20 jednakowych klocków włożono do 5 jednakowych pudełek. Pudełka są niepuste. W jednym z pudełek są dokładnie 4 klocki. Ile jest takich sposobów rozłożenia klocków?

Odp.: 34

Zadanie 15.

10 rybek $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_{10}\}$ wpuszczamy dowolnie do trzech identycznych akwariów.

1] Ile jest wszystkich sposobów wpuszczenia rybek do akwariów? *Odp.: 9842*

2] Ile jest sposobów wpuszczenia rybek, jeśli r_1, r_2, r_3, r_4 muszą być razem w jednym akwarium?

Odp.: 365

Zadanie 16.

15 identycznych piłek wkładamy do jednakowych toreb. W torbie mieszczą się najwyżej 4 piłki. Na ile sposób możemy to zrobić? Wyjaśnij.

Odp.: 54