Algebra, WIT 2019/2020

drugie kolokwium–przykładowe rozwiązania

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jeśli to możliwe, oblicz AA, AB, BA, AC, CB.

Rozwiązanie 1. Iloczyn dwóch macierzy jest zdefiniowany gdy liczba kolumn pierwszej jest równa liczbie wierszy drugiej. Można obliczyć BA i AC.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2 \\ (-3)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 & (-3)\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + (-2)\cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Analogicznie

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Stosując metodę Cramera oblicz zmienną x_4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie 2. Ze wzorów Cramera $x_4 = \frac{\det A_4}{\det A}$ (o ile $\det A \neq 0$), gdzie A jest macierzą współczynników układu, a A_4 jest macierzą współczynników układu, w której czwartą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych, tj.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczniki liczymy stosując operacje elementarne na kolumnach i wierszach oraz używając rozwinięcia Laplace'a.

$$\det A \overset{k_2-2k_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1}{=}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = -2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -2(5-6) = 2.$$

Analogicznie

$$\det A_4 \overset{k_2-2k_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{w_2-w_1 \\ w_3-3w_1}}{=}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -2(-2-3) = 10.$$

Zatem $x_4 = 5$.

Zadanie 3. Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

i) oblicz $\det A$, $\det(A^8)$,

ii) oblicz A^{-1}.

Rozwiązanie 3. i) Jak powyżej

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \overset{k_1-3k_2}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= -(3-2) = -1.$$

Wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników (twierdzenie Cauchy'ego), zatem

$$\det\left(A^8\right) = (\det A)^8 = (-1)^8 = 1.$$

ii) Macierz kwadratowa A posiada macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. W takim przypadku można operacjami elementarnymi na wierszach doprowadzić macierz $[A|I]$ do postaci $[I|A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1+3w_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 14 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+4w_2]{w_1-14w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 9 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -14 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 9 & -14 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$ gdzie odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ jest zadane macierzą

$$M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie 4. Wzór odwzorowania f to

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 +, x_4, 3x_1 + 7x_2 + 5x_3)$.

Jądro $\ker f$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Jest to układ jednorodny, który rozwiązujemy przez sprowadzenie macierzy współczynników operacjami elementarnymi do postaci schodkowej zredukowanej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3-w_2]{w_1-2w_2}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Wracając do równań otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Zatem każde rozwiązanie układu jest postaci $(3x_3+7x_4, -2x_3-3x_4, x_3, x_4) = x_3(3,-2,1,0) + x_4(7,-3,0,1)$. Zatem $\dim \ker f = 2$ a baza $\ker f$ to np. $(3,-2,1,0)$, $(7,-3,0,1)$.
Obraz odwzorowania $\operatorname{im} f$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$, rozpiętą przez obrazy wektorów bazy standardowej $\mathbb{R}^4$, czyli kolumny macierzy $M(f)_{st}^{st}$. Zatem $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}((1,2,3),(2,5,7),(1,4,5),(-1,1,0))$. Aby znaleźć bazę $\operatorname{im} f$ wpisujemy wektory poziomo do macierzy i operacjami elementarnymi sprowadzamy ją do postaci schodkowej zredukowanej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{w_1+w_4 \\ w_2+2w_4 \\ w_3+w_4}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1+w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\dim \operatorname{im} f = 2$ a baza $\operatorname{im} f$ to np. $(1,0,1),(0,1,1)$.

Zadanie 5. Endomorfizm $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadany jest macierzą

$$M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) znajdź bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu f,

ii) znajdź macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A}$ jest bazą z punktu i).

Rozwiązanie 5. i) Najpierw obliczamy wielomian charakterystyczny

$$w_f(x) = \det\big(M(f)_{st}^{st} - xI\big) = \det \begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 4-x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)(4-x) + 2 = x^2 - 5x + 6.$$

Wartości własne endomorfizmu f to miejsca zerowe $w_f(x)$. Obliczamy $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ skąd $\lambda = \frac{5-1}{2} = 2$ lub $\lambda = \frac{5+1}{2} = 3$. Każdej wartości własnej odpowiada podprzestrzeń własna złożona z wektorów własnych.

Obliczamy ją odejmując wartość własną od przekątnej macierzy $M(f)_{st}^{st}$ i rozwiązując jednorodny układ zadany przez tak otrzymaną macierz.

$$V_{(2)}\colon \begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Przestrzeń $V_{(2)}$ jest zadana równaniem $-x_1 + 2x_2 = 0$, zatem $V_{(2)} = \{(2x_2, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{lin}((2,1))$.

$$V_{(3)}\colon \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_1-2w_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzeń $V_{(3)}$ jest zadana równaniem $-x_1 + x_2 = 0$, zatem $V_{(3)} = \{(x_2, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{lin}((1,1))$. Baza $\mathcal{A}$ składa się z wektorów własnych, zatem $\mathcal{A} = ((2,1),(1,1))$.

ii) Ponieważ

$$f(2,1) = 2 \cdot (2,1) = 2 \cdot (2,1) + 0(1,1),$$
$$f(1,1) = 3 \cdot (1,1) = 0 \cdot (2,1) + 3(1,1),$$

w pierwszej kolumnie macierzy $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ stoją liczby $2, 0$, a w drugiej $0, 3$. Zatem

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$