

Algebra seria A

.....
Imię Nazwisko Grupa Nr. indeksu

Zadanie 1 (Punkty 4+4)

Znajdź wszystkie liczby zespolone z , które są rozwiązaniami równania:

a) $z^2 = -6 + 8i$,

b) $5z - 2\overline{(z+1)} - 7\operatorname{Re} z + \operatorname{Im}(z+2i) + |3+4i| = 1 - 7i$.

Zadanie 2 (Punkty 4)

Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)^{21}.$$

Zadanie 3 (Punkty 5)

Rozwiąż równania sprowadzając macierz układu do postaci schodkowej zredukowanej.

Zapisz rozwiązanie stosując zmienne związane i parametry.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 - 9x_4 + 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + 2x_3 + 6x_4 = 10 \end{cases}$$

Zadanie 4 (Punkty 3+4)

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

a) Wylicz, jeżeli to możliwe, iloczyny: AB , BA , BB i AA

b) Wylicz, jeżeli to możliwe: A^{-1} i B^{-1} .

Zadanie 5 (Punkty 6)

Stosując metodę Cramera policz zmienną x_2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases},$$

Zadanie 6 (Punkty 4+3)

Niech $\phi: R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone wzorem:

$$\phi(x, y, z) = (6x - 3y, 2x - y, -4x + 2y)$$

a) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni $\operatorname{Im} \phi$ i $\operatorname{Ker} \phi$.

b) Napisz macierz ϕ w bazach standardowych.

Zadanie 7 (Punkty 5+3)

Niech $\phi: R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone macierzą $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$,

a) Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ .

b) Zapisz macierz przekształcenia ϕ w znalezionej bazie.

Zadanie 8 (Punkty 5)

Policz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 3, 3)$, $C = (1, 4, -1)$.

Algebra seria B

.....
Imię Nazwisko Grupa Nr. indeksu

Zadanie 9 (Punkty 4+4)

Znajdź wszystkie liczby zespolone z , które są rozwiązaniami równania:

a) $z^2 = 16 + 12i$

b) $3z - 2\bar{z} - 7\operatorname{Re}(2 + z) + \operatorname{Im} z + |3 + 4i| = 1 - 5i$.

Zadanie 10 (Punkty 4)

Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby

$$z = (i\sqrt{2} - \sqrt{2})^{21}.$$

Zadanie 11 (Punkty 5)

Rozwiąż równania sprowadzając macierz układu do postaci schodkowej zredukowanej.

Zapisz rozwiązanie stosując zmienne związane i parametry.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_3 + 6x_4 - x_5 = 9 \end{cases}$$

Zadanie 12 (Punkty 3+4)

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Wylicz, jeżeli to możliwe, iloczyny: AB , BA , BB i AA

b) Wylicz, jeżeli to możliwe: A^{-1} i B^{-1} .

Zadanie 13 (Punkty 6)

Stosując metodę Cramera policz zmienną x_2

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 14 (Punkty 4+3)

Niech $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone wzorem:

$$\phi(x, y, z) = (6x - 3y + z, 2x - y - z, -4x + 2y + 2z)$$

a) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni $\operatorname{Im} \phi$ i $\operatorname{Ker} \phi$.

b) Napisz macierz ϕ w bazach standardowych.

Zadanie 15 (Punkty 5+3)

Niech $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ .

b) Zapisz macierz przekształcenia ϕ w znalezionej bazie.

Zadanie 16 (Punkty 5)

Policz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 2, 4)$, $C = (1, 3, 0)$.

.....

| Imię | Nazwisko | Grupa | Nr. indeksu |
|------|----------|-------|-------------|
|------|----------|-------|-------------|

Zadanie 17 (Punkty 4+4)

Znajdź wszystkie liczby zespolone z , które są rozwiązaniami równania:

a) $z^2 = 16 - 12i$

b) $5z - 3\bar{z} - 7\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z + |3 + 4i| = 3 - 8i$.

Zadanie 18 (Punkty 4)

Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby $z = (\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9})^{30}$.

Zadanie 19 (Punkty 5)

Rozwiąż równania sprowadzając macierz układu do postaci schodkowej zredukowanej.

Zapisz rozwiązanie stosując zmienne związane i parametry.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 - 16x_5 = 10 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 10 \end{cases}$$

Zadanie 20 (Punkty 3+4)

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Wylicz, jeżeli to możliwe, iloczyny: AB , BA , BB i AA

b) Wylicz, jeżeli to możliwe: A^{-1} i B^{-1} .

Zadanie 21 (Punkty 6)

Stosując metodę Cramera policz zmienną x_1

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 22 (Punkty 4+3)

Niech $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone wzorem:

$\phi(x, y, z) = (x - 3y + 6z, 2x - y + 2z, x + 2y - 4z)$

a) *Znajdź bazę i wymiar przestrzeni $\operatorname{Im} \phi$ i $\operatorname{Ker} \phi$.*

b) *Napisz macierz ϕ w bazach standardowych.*

Zadanie 23 (Punkty 5+3)

Niech $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone macierzą $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) *Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ .*

b) *Zapisz macierz przekształcenia ϕ w znalezionej bazie.*

Zadanie 24 (Punkty 5)

Policz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 3, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (1, 0, 1)$.

.....
 Imię Nazwisko Grupa Nr. indeksu

Zadanie 25 (Punkty 4+4)

Znajdź wszystkie liczby zespolone z , które są rozwiązaniami równania:

- a) $z^2 = 6 + 8i$,
 b) $7z - 25\overline{z} - 3\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z + |3 + 4i| = 7 - 9i$.

Zadanie 26 (Punkty 4)

Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczby
 $z = (3 - 3i)^{21}$.

Zadanie 27 (Punkty 5)

*Rozwiąż równania sprowadzając macierz układu do postaci schodkowej zredukowanej.
 Zapisz rozwiązanie stosując zmienne związane i parametry.*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 12x_4 + 6x_5 = 11 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 - 2x_5 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_4 + 6x_5 = 10 \end{cases}$$

Zadanie 28 (Punkty 3+4)

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- a) Wylicz, jeżeli to możliwe, iloczyny: AB , BA , BB i AA
 b) Wylicz, jeżeli to możliwe: A^{-1} i B^{-1} .

Zadanie 29 (Punkty 6)

Stosując metodę Cramera policz zmienną x_1

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 30 (Punkty 4+3)

Niech $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone wzorem:

$$\phi(x, y, z) = (6y - 3z, 2y - z, -4y + 2z)$$

- a) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni $\operatorname{Im} \phi$ i $\operatorname{Ker} \phi$.
 b) Napisz macierz ϕ w bazach standardowych.

Zadanie 31 (Punkty 5+3)

Niech $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ będzie określone macierzą $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- a) Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ .
 b) Zapisz macierz przekształcenia ϕ w znalezionej bazie.

Zadanie 32 (Punkty 5)

Policz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 1, 1)$, $B = (-1, 2, 3)$, $C = (1, 0, -1)$.