Budowa i analiza algorytmów - ćwiczenia

Raport z realizacji mini-projektu

Numer projektu: niestandardowy (Algorytm Dijkstry)

Autor: Nowicki Igor

Numer albumu: 18608

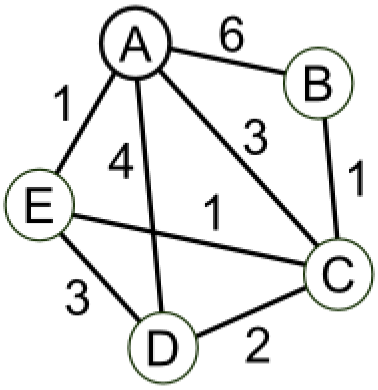
Numer grupy zajęciowej: IZ01P03

Termin oddania projektu: 2020.02.01

Termin obrony: -

Treść zadania.

Dany jest graf ważony krawędziowo (o nieujemnych wagach), reprezentowany przez macierz kwadratową. Przykładowo, poniższy graf (rysunek po lewej) będzie reprezentowany przez macierz (rysunek po prawej).



$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Węzłom A, B, C, D, E odpowiadają indeksy odpowiednio od 1 do 5, w macierzy wartość w i-tej kolumnie i j-tym wierszu odpowiada wadze połączenia między węzłami i oraz j. Brak połączenia jest reprezentowany jako wartość 0.

Stwórz funkcję `dijkstra(g, v1, v2)` która dla danego grafu `g` znajdzie połączenie o najniższej sumie wag pomiędzy parą wierzchołków o indeksach `v1` i `v2` implementując algorytm Dijkstry. Wynik będzie zwracany jako para elementów `lista, wagi`, gdzie `lista` jest listą indeksów wierzchołków optymalnej trasy, natomiast `wagi` to suma wag trasy.

Opis słowny algorytmu

1. Wejście:

    1. `GRAF`: N list N-elementowych,
    2. `START`: numer startowego wierzchołka
    3. `KONIEC`: numer końcowego wierzchołka.

2. Stwórz następujące pojemniki na dane:

    1. Zbiór `NIEODWIEDZONE` zawierajacy wartości od `1` do `N`.
    2. Tablicę `POPRZEDNI` o rozmiarze N.
    3. Tablicę `KOSZT` o rozmiarze N, wypełnioną wartościami `inf`. Na pozycji `START` wpisz wartość `0`.
    4. Zmienną `OSTATNI` równą `-1`.

3. Potwarzaj co następuje tak długo, dopóki zbiór `NIEODWIEDZONE` nie będzie pusty:

    1. Stwórz zmienną `i` zawierajacą pierwszą wartość z `NIEODWIEDZONE`.
    2. Przejdź po wszystkich `j` z `NIEODWIEDZONE`:
        1. Jeśli `KOSZT[j] < KOSZT[i]`, to przypisz `i` wartość `j`.
    3. Wpisz w `POPRZEDNI[i]` wartość `OSTATNI`.
    4. Wpisz w `OSTATNI` wartość `i`.
    5. Wyrzuć ze zbioru `NIEODWIEDZONE` wartość `i`.
    6. Stwórz listę `SĄSIEDZI` w którą wstaw wartości z `GRAF[i]`.
    7. Powtórz co następuje dla wszystkich `j` z zakresu od `1` do `N`:
        1. Jeśli `j` nie istnienie w `NIEODWIEDZONE`, to pomiń to powtórzenie.
        2. Jeśli `SĄSIEDZI[j]` jest równe 0 to pomiń to powtórzenie.
        3. Stwórz `NOWA_WARTOŚĆ` równą `KOSZT[i] + SĄSIEDZI[j]`
        4. Jeśli `NOWA_WARTOŚĆ` jest niższa niż `KOSZT[j]`, to wpisz ją w `KOSZT[j]`. W `POPRZEDNI[j]` wpisz `i`.

4. Stwórz pustą listę `TRASA`.

5. Do zmiennej `OSTATNI` wpisz wartość `KONIEC`.

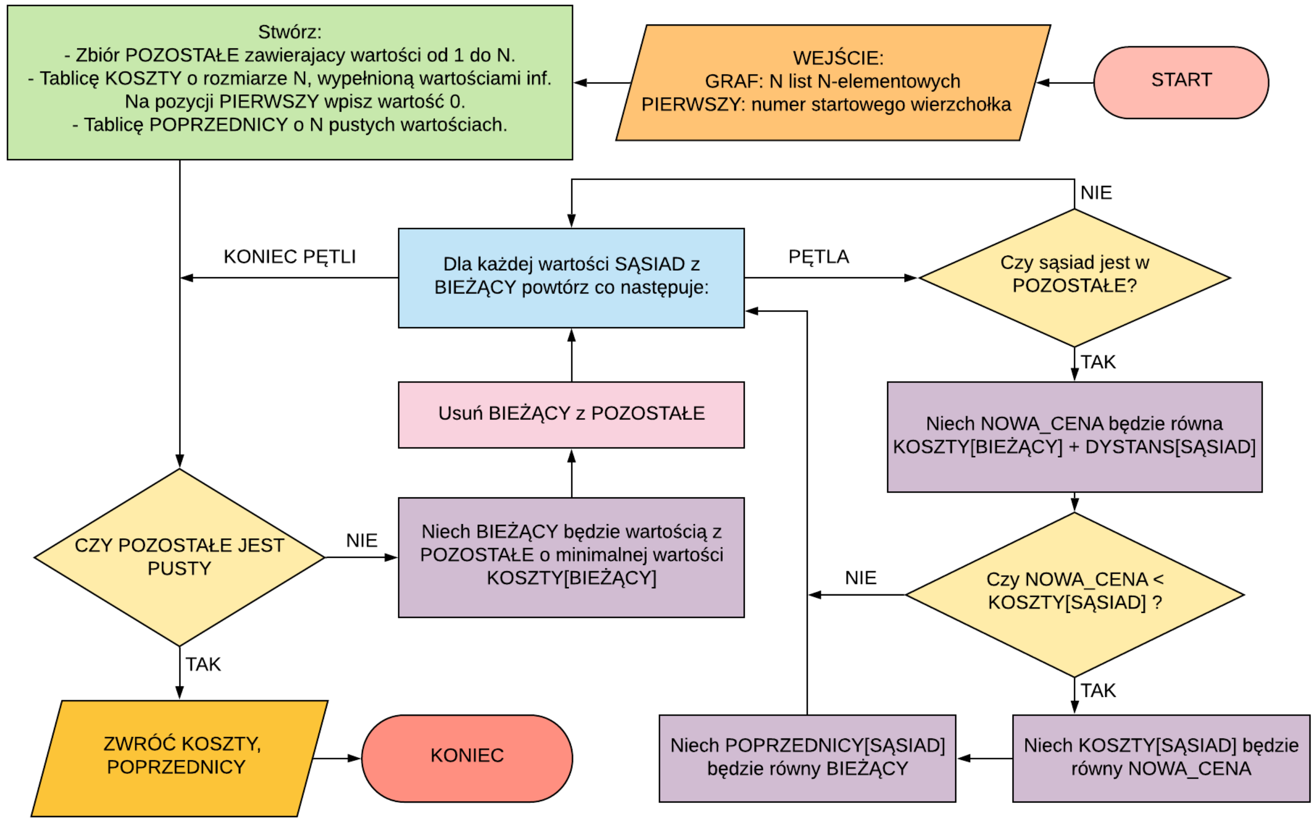
6. Powtarzaj co następuje:

    1. Jeśli wartość `OSTATNI` jest równa -1, zakończ pętlę
    2. Dopisz wartość `OSTATNI` na początek listy.
    3. Do zmiennej `OSTATNI` wpisz wartość `POPRZEDNI[OSTATNI]`.

7. Zwróć wartości `TRASA` oraz `KOSZT[OSTATNI]`.

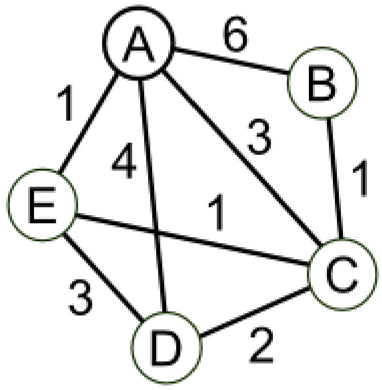
Schemat blokowy

Poniżej jest przedstawiona wersja ogólna dla poszukiwania trasy od wierzchołka start do dowolnego wierzchołka końcowego.

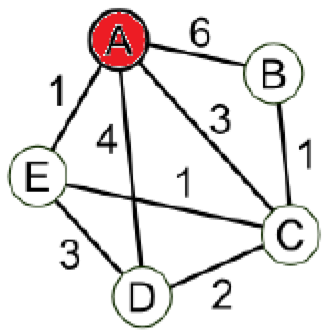


Symulacja działania algorytmu

Dla podanego grafu:

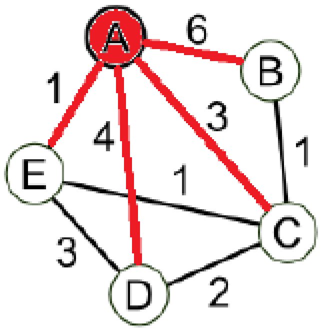


Inicjalizacja:



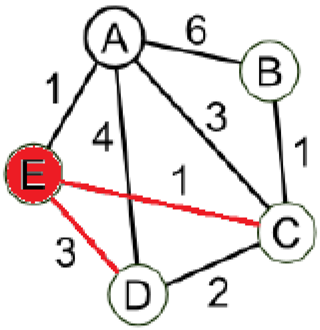
	A	B	C	D	E
POZOSTAŁE	+	+	+	+	+
KOSZTY	0	∞	∞	∞	∞
POPRZEDNICY	-	-	-	-	-

Krok pierwszy:



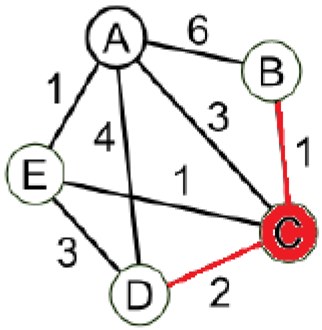
	A	B	C	D	E
POZOSTAŁE	-	+	+	+	+
KOSZTY	0	6	3	4	1
POPRZEDNICY	-	A	A	A	A

Krok drugi:



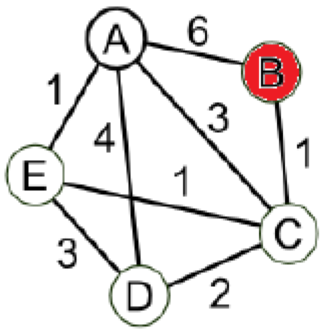
	A	B	C	D	E
POZOSTAŁE	-	+	+	+	-
KOSZTY	0	6	2	4	1
POPRZEDNICY	-	A	E	A	A

Krok trzeci:



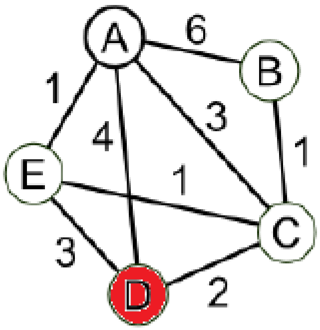
	A	B	C	D	E
POZOSTAŁE	-	+	-	+	-
KOSZTY	0	3	2	4	1
POPRZEDNICY	-	C	E	A	A

Krok czwarty:



	A	B	C	D	E
POZOSTAŁE	-	-	-	+	-
KOSZTY	0	3	2	4	1
POPRZEDNICY	-	C	E	A	A

Krok piąty:



	A	B	C	D	E
POZOSTAŁE	-	-	-	-	-
KOSZTY	0	3	2	4	1
POPRZEDNICY	-	C	E	A	A

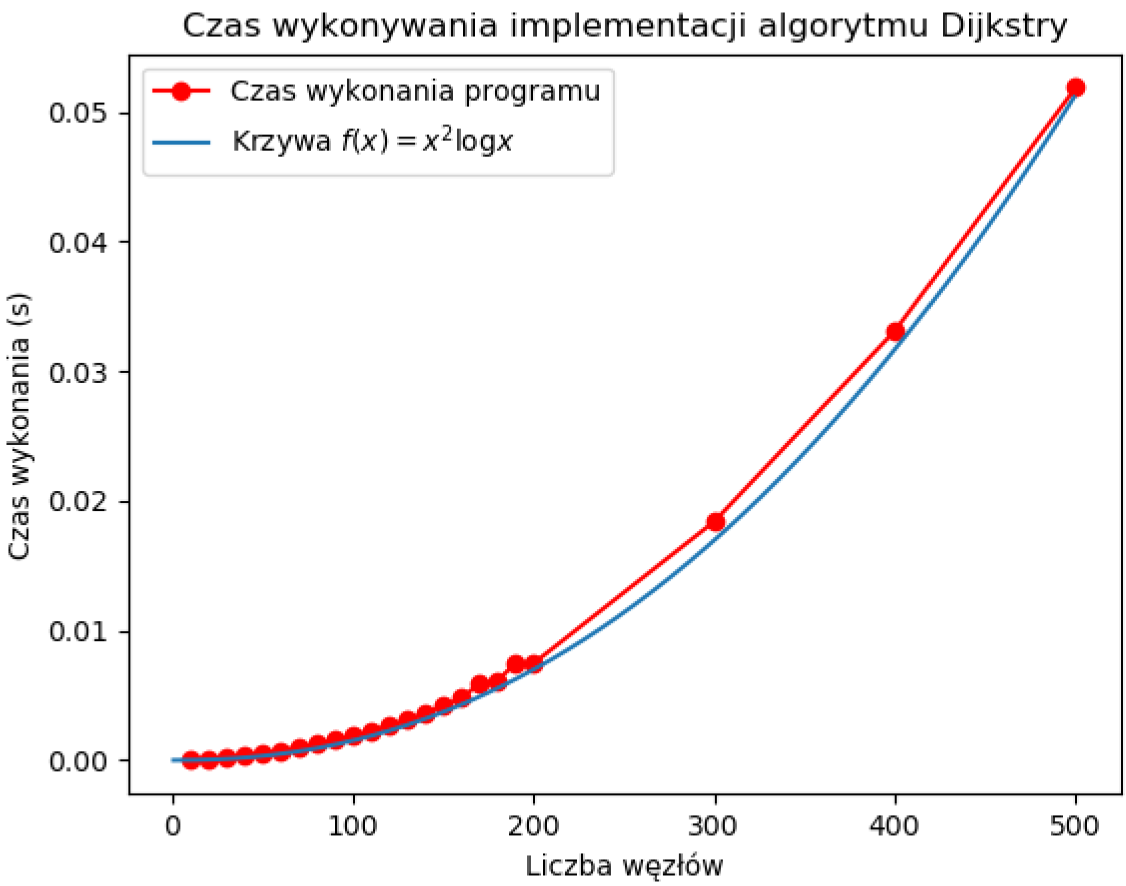
Zapis algorytmu

```python
from math import inf
import sys

def dijkstra(graph, start):
    n = len(graph)
    pozostale = set([i for i in range(n)])  #zbiór nieodwiedzonych węzłów
    poprzednicy = [None for i in range(n)] #lista poprzedzajacych węzłów
    koszty = [inf for i in range(n)] #lista kosztów dojścia do węzła
    koszty[start] = 0 #koszt dojścia do węzła startowego jest 0

    while len(pozostale) > 0:
        #znajdujemy wartość minimalną kosztów dla i spośród pozostałych
        #i zwracamy związany z nią indeks
        biezacy = min([(koszty[i], i) for i in pozostale])[1]
        #usuwamy bieżący indeks z listy nieodwiedzonych węzłów
        pozostale.remove(biezacy)
        #pobieramy listę dystansów z bieżącego węzła do sąsiadów
        dystans = graph[biezacy]
        for sasiad in range(n):
            #jeśli sąsiad został odwiedzony to zostawiamy go w spokoju
            #zerowy dystans do sąsiada oznacza brak połączenia
            if sasiad not in pozostale or dystans[sasiad] == 0:
                continue
            #nowa cena to bieżący koszt połączeń + koszt przejścia
            nowa_cena = koszty[biezacy] + dystans[sasiad]
            #jeśli nowa cena jest niższa, aktualizujemy koszty sąsiada
            if nowa_cena < koszty[sasiad]:
                poprzednicy[sasiad] = biezacy
                koszty[sasiad] = nowa_cena

    return koszty, poprzednicy

```

Oszacowanie złożoności czasowej

$$T(N) = 2 + 4N + 5N^2 + N^2\log(N) \approx O\left(N^2\log(N)\right)$$

Wykres zależności czasu liczenia od rozmiaru danych



Podsumowanie i wnioski

Algorytm Dijkstry w swojej poprawnej formie ma złożoność czasową rzędu N log(N), dzięki zastosowaniu struktur kopców. W tym wypadku byłem w stanie zastosować tylko przybliżoną formę, która oddaje ideę działania. Również można mieć uwagę że o ile oryginalna treść zadania mówiła o algorytmie `dijkstra(graf, v1, v2)`, to moja implementacja składała się z dwóch argumentów, `dijkstra(graf, v1)` - to ze względu na fakt, że z takiej funkcji uzyskuje się bardziej ogólne dane - listę `koszty` oraz `poprzednicy` - z których można uzyskać nie tylko trasę i koszt przejścia do pojedynczego węzła, ale do wszystkich węzłów z grafu (zaczynając od `v1`).