Wykład 1

Ω – zbiór zdarzeń elementarnych (może być skończony lub nieskończony)

Dowolne podzbiory Ω nazywamy zdarzeniami.

$\omega \epsilon A$: „Zaszło zdarzenie A”

$\omega \notin A$: „Zaszło zdarzenie przeciwne do A czyli zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$”

Przykład:

Rzucamy kostką do gry.

A – „wypadła parzysta liczba oczek”

$A = \{2,4,6\}$

$A' = \{1,3,5\}$

$A' = \Omega \setminus A$

B – „wypadła liczba oczek < 4”

$B = \{1,2,3\}$

$A \cap B$ – zaszło A i zaszło B

$A \cap B = \{2\}$

$A \cup B$ – zaszło A lub zaszło B

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

$A \setminus B$ – zaszło A i nie zaszło B

$A \setminus B = \{4,6\}$

$B \setminus A$ – zaszło B i nie zaszło A

$B \setminus A = \{1,3\}$

Definicja:

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ (δ – ciałem zdarzeń) nazywamy rodzinę podzbiorów Ω, spełniającą warunki:

1. $\Omega \epsilon \mathcal{F}$
2. Jeśli $A_1 \epsilon \mathcal{F}$ to $A' \epsilon \mathcal{F}$
3. Jeśli $A_1, A_2, A_3 \dots \epsilon \mathcal{F}$ to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \, \epsilon \mathcal{F}$

Uwaga:

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym lub nieskończonym przeliczalnym to $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów Ω.

Oznaczenie: $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

Przykład:

Rzut monetą

$\Omega = \{O, R\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{O\}, \{R\}\}$

Definicja

Prawdopodobieństwem określonym na $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy funkcję $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ przyporządkowującą każdemu zdarzeniu A liczbę $\mathbb{P}(A)$ zwaną prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A tak że spełnione są następujące warunki:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ dla każdego A
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Jeśli $A_1, A_2, A_3 \dots \epsilon \mathcal{F}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla i$\neq j$ $(i, j = 1,2,3, \dots)$
   to $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Punkty 1-3 to aksjomaty teorii prawdopodobieństwa

Definicja:

Przestrzeń probabilistyczna – matematyczny model doświadczenia losowego, trójka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Podstawowe właściwości prawdopodobieństwa:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. Jeśli $A_1, \dots, A_n$ wykluczają się parami tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla i$\neq j$ to $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
3. $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Jeśli $A \subset B$, to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5. Jeśli $A \subset B$, to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
6. $\mathbb{P}(A) \leq 1$ dla każdego A
7. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (własność ta działa rekurencyjnie dla większej ilości zdarzeń)

Metody wyznaczania prawdopodobieństwa:

1. Schemat klasyczny: Ω – zbiór skończony
2. Uogólnienie schematu klasycznego: Ω – zbiór nieskończony przeliczalny
3. Prawdopodobieństwo geometryczne

Schemat klasyczny:

Ω – zbiór skończony

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

Zakładamy, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Wówczas dla dowolnego $A \epsilon \mathcal{F}$:

$\mathbb{P}(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}}$

$\bar{\bar{A}}$ – moc (liczba elementów)

Przykład:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\bar{\bar{\Omega}} = 6$

$A = \{2,4,6\}$

$\bar{\bar{A}} = 3$

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Uogólnienie schematu klasycznego:

Ω – zbiór nieskończony przeliczalny

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_i, \dots\}$

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

Niech $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ – prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia elementarnego ω_i. Wówczas prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \epsilon \mathcal{F}$:

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i:\omega_i \epsilon A} p_i$ – suma wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A.

Przykład:

Rzut monetą do momentu wyrzucenia orła:

$\Omega = \{o, RO, RRO, \dots, RRRRO, \dots\}$

$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i = ?$

$p_1 = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$

$p_2 = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad p_i > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1$$

A – „Orzeł wypadł w pierwszym rzucie"

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

B – „Wykonano mniej niż 3 rzuty"

$$B = \{O, RO\}$$

$$\mathbb{P}(B) = p_1 + p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne

Ω – zbiór nieskończony, nieprzeliczalny.

Zakładamy, że Ω podzbiór $\mathbb{R}^n$ (prosta $\mathbb{R}$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, ….) który ma skończoną miarę (czyli długość, pole, objętość, …)

$\mathcal{F}$ - rodzina zdarzeń to δ-ciało podzbiorów Ω

Wówczas prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia $A \epsilon \mathcal{F}$ wyznacza się ze wzoru $\mathbb{P}(A) = \frac{miara(A)}{miara(\Omega)}$

Miara punktu jest równa zero! Zatem dla każdego zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ mamy $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$.

Przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[0,1]$.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość tego punktu od środka jest mniejsza niż $\frac{1}{4}$?

$\Omega = [0,1]$

Miara (Ω) = długość (Ω) = 1

A – „Odległość tego punktu od środka odcinka jest $< \frac{1}{4}$”

$A = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Miara (A) = długość (A) = $\frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{miara(A)}{miara(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Przykład

Rzucamy strzałką do tarczy. Wynik doświadczenia to punkt trafienia w tarczę.

Jeżeli tarcza jest kołem o promieniu r to $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}$

Miara (Ω) = pole (Ω) = πr^2

A – „trafienie w dziesiątkę tzn. trafienie w kropkę na tarczy o promieniu $\frac{r}{10}$.”

Miara(A) = pole (A) = $\pi \left(\frac{r}{10}\right)^2$

$\mathbb{P}(A) = \frac{miara(A)}{miara(\Omega)} = \frac{\pi\left(\frac{r}{10}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{100}$

Prawdopodobieństwo warunkowe

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – przestrzeń probabilistyczna

Jeśli $A, B \epsilon \mathcal{F}$ oraz $\mathbb{P}(B) > 0$ to prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Przykład

Rzucamy 3 razy monetą

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

$$\bar{\bar{\Omega}} = 2^3 = 8$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadły 3 orły, jeżeli wiadomo, że wyrzucono nieparzystą liczbę orłów?

A = „wypadły 3 orły"

B – „wyrzucono nieparzystą liczbę orłów"

$$A = \{OOO\}$$

$$B = \{OOO, ORR, ROR, RRO\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$$

$$A \cap B = \{OOO\}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Uwaga ze wzoru $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ o ile $\mathbb{P}(B) > 0$ wynika natychmiast $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\ \mathbb{P}(B)$ co można łatwo uogólnić dla iloczynu n zdarzeń.

Wzór łańcuchowy:

Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ przy czym $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Przykład

W urnie jest 5 kul białych i 15 kul czarnych. Wyciągamy kolejno, bez zwracania, 3 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania 3 kul białych?

A_1 – „w pierwszym losowaniu wyciągnięto kulę białą"

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{5}{20}$

A_2 – „w drugim losowaniu wyciągnięto kulę białą"

$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{4}{19}$

A_2 – „w trzecim losowaniu wyciągnięto kulę białą"

$\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{18}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \approx 0{,}09$

Prawdopodobieństwo całkowite

Niech zdarzenia $H_1, H_2, \dots, H_n$ będą rozbiciem przestrzeni Ω tzn. $H_i \epsilon\, \mathcal{F}, i = 1, \dots, n$

$H_i \cap H_j \neq \emptyset\ dla\ i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Niech $\mathbb{P}(H_i) > 0, i = 1,2, \dots, n$. Wtedy dla dowolnego zdarzenia $A \epsilon\, \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_2|H_i)\,\mathbb{P}(H_i)$

Przykład:

Przypuśćmy, że 1 osoba na 1000 choruję na pewną chorobę, która nie ma jednoznacznie określonych objawów. Test wykrywa tą chorobę w 100% a błędne wykrycie zdarza się w 0,5% przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeśli zgłosimy się na badanie to będziemy mieć pozytywny wynik testu?

H_1 – jesteśmy chorzy

H_2 – jesteśmy zdrowi

$(H_2 = H_1')$

$H_1 \cup H_2 = \Omega$

$H_1 \cap H_2 = \emptyset$

$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{1000} > 0$

$\mathbb{P}(H_2) = 1 - \frac{1}{1000} > 0$

A – pozytywny wynik testu

$\mathbb{P}(A|H_1) = 1$

$\mathbb{P}(A|H_2) = 0{,}005$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) = 1 \cdot 0{,}001 + 0{,}005 \cdot 0{,}999 \approx 0{,}006 = 0{,}6\%$

Wzór Bayesa

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}$$

$\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ o ile $\mathbb{P}(A) > 0$ oraz $\mathbb{P}(B) > 0$

Przykład:

Jakie jest prawdopodobieństwo, że jesteśmy chorzy, jeśli test dał wynik pozytywny?

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1\cdot 0{,}001}{1\cdot 0{,}001+0{,}005\cdot 0{,}999} \approx 0{,}17$$

Niezależność

Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Zauważamy, że wówczas $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}$= $\mathbb{P}(A)$ o ile $\mathbb{P}(B) > 0$

Przykład:

Rzucamy dwa razy monetą

$\Omega = \{PP, PR, RO, RR\}$

$\bar{\bar{\Omega}} = 4$

A – „Orzeł wypadł w pierwszym rzucie”

B – „Orzeł wypadł w drugim rzucie”

$A - \{OO, OR\}$

$B - \{OO, RO\}$

$A \cap B = \{OO\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Czyli A i B są niezależne

C – „Reszka wypadła w pierwszym rzucie”

$C - \{RO, RR\}$

$A \cap C = \emptyset$

$\mathbb{P}(A \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$

Czyli A i C nie są niezależne (są zależne)

Stwierdzenie

Jeśli A i B są niezależne, to niezależne są również:

1. $A\ i\ B'$
2. $A'\ i\ B$
3. $A'\ i\ B'$

W przypadku większej liczby zdarzeń niezależność definiujemy następująco:

Zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne (łączne niezależne) jeżeli dla dowolnego $k = 2, \dots, n$ oraz dowolnych, różnych indeksów $i_1, i_2, \dots, i_k$ ze zbioru $1, \dots, n$

$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = \mathbb{P}\left(A_{i_1}\right)\mathbb{P}\left(A_{i_2}\right) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right)$$

Np. dla n = 3 mamy następujący warunek niezależności zdarzeń A_1, A_2, A_3:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

Uwaga: Z niezależności zdarzeń parami tzn. z warunku, że

$\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ dla wszystkich $i \neq j$, $i_1 j = 1, \dots, n$ nie wynika niezależność (łączna niezależność) $A_1, \dots A_n$!

Przykład

Rzucamy czworościanem foremnym o bokach kolorów: czerwonym, zielonym, białym, czerwono zielonobiałym.

C – „czworościan upadł na ścianę, na której jest kolor czerwony (1,4)"

B – „czworościan upadł na ścianę, na której jest kolor biały (2,4)"

Z – „czworościan upadł na ścianę, na której jest kolor zielony (3,4)"

$$\mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(Z)$$

$$\mathbb{P}(C \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(C \cap Z) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(Z)$$

$\mathbb{P}(B \cap Z) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(Z)$

C, B i Z są niezależne w parach, ale $\mathbb{P}(C \cap B \cap Z) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{8}$

Zatem C, B i Z nie są niezależne!