

# Planowanie przedsięwzięć

Badania Operacyjne lab 2

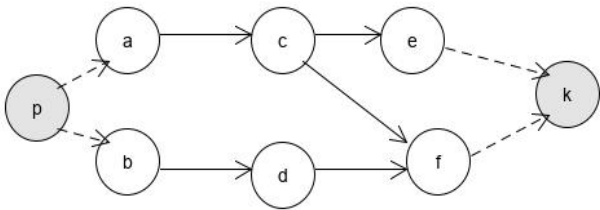
### Planowanie przedsięwzięć – przykład

Dane jest przedsięwzięcie o strukturze i parametrach operacji określonych w poniższej tabeli. Przedsięwzięcie składa się z sześciu operacji, oznaczonych literami a, b, c, d, e, f. Struktura zależności między operacjami jest określona przez podanie operacji poprzedzających, które muszą zostać zakończone, żeby dana operacja mogła się rozpocząć. Należy wyznaczyć najkrótszy czas trwania przedsięwzięcia  $T$ .

Operacja	Czas wykonania	Operacja poprzedzająca
a	12	
b	4	
c	10	a
d	16	b
e	10	c
f	11	c, d

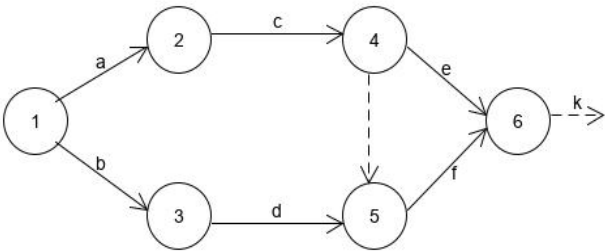
### Sieć przedsięwzięcia

W przedstawieniu wierzchołkowym: operacje -> wierzchołki, zależności kolejnościowe -> strzałki.



W przedstawieniu łukowym: operacje -> łuki, zdarzenia -> węzły, występują operacje pozorne (o czasie wykonywania = 0), zależności kolejnościowe -> strzałki.

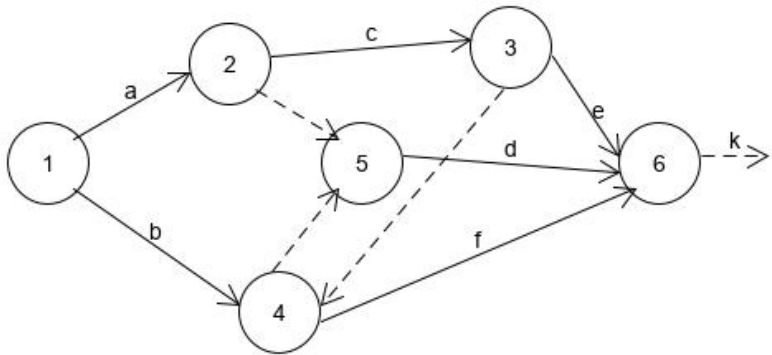
Wierzchołki są ponumerowane w porządku topologicznym



- Ścieżki w sieci:
- 1-2-4-6 (a-c-e)
  - 1-2-4-5-6 (a-c-f)
  - 1-3-5-6 (b-d-f)

Co by było, gdyby...

Operacja	Operacja poprzedzająca
a	
b	
c	a
d	a, b
e	c
f	b, c



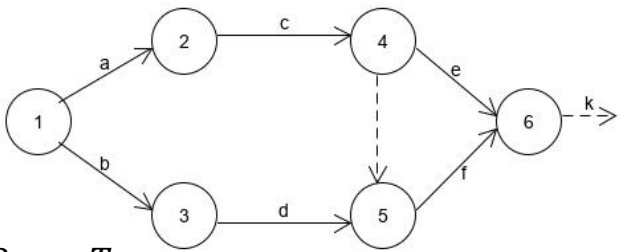
Metoda ścieżki krytycznej

Oznaczenia:

$t_{kj}$  – czas potrzebny na wykonanie operacji  $(k,j)$

$T_k$  - najwcześniejszy czas wystąpienia zdarzenia  $k$

$NWR_{kj}$  najwcześniejszy czas rozpoczęcia operacji  $(k,j)$ ,  $NWR_{kj} = T_k$



Operacja	Czas wyk.	Poprzed.
a	12	
b	4	
c	10	a
d	16	b
e	10	c
f	11	c, d

Wyznaczanie najwcześniejszych czasów wystąpienia zdarzeń:

$T_1 = 0$

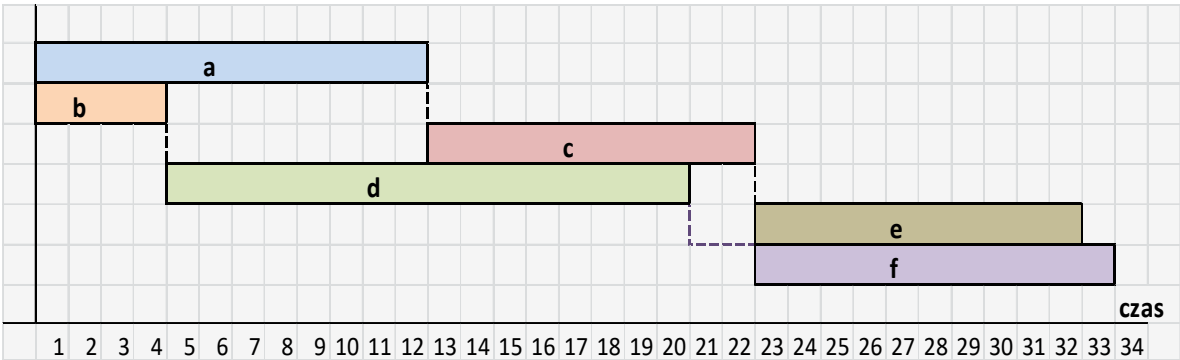
$T_k = \max_{i < k} (T_i + t_{ik})$  dla  $k > 1$

$T_1 = 0$   
 $T_2 = T_1 + t_{12} = 12$   
 $T_3 = 4$   
 $T_4 = T_2 + t_{24} = 12 + 10 = 22$   
 $T_5 = \max_{3,4} (T_3 + t_{35}, T_4 + t_{45}) = \max(4 + 16, 22 + 0) = 22$   
 $T_6 = \max_{4,5} (22 + 10, 22 + 11) = 33$

Czas trwania przedsięwzięcia =  $T_n$ , gdzie  $n$  jest ostatnim zdarzeniem

$T = T_6 = 33$

Operacja	NWR	NWZ
a	0	12
b	0	4
c	12	22
d	4	20
e	22	32
f	22	33

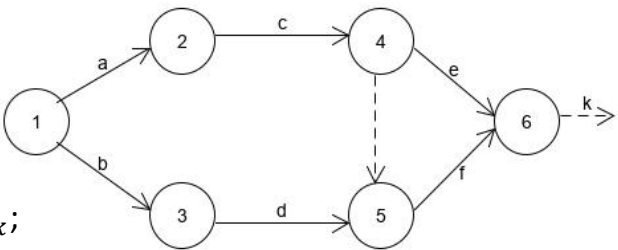


Wykres Gantta przy założeniu, że operacje rozpoczynane są najwcześniej jak to możliwe

Metoda ścieżki krytycznej, cd.

Oznaczenia:

$T'_k$  - najpóźniejszy czas wystąpienia zdarzenia  $k$   
 $NPZ_{ik}$  najpóźniejszy czas zakończenia operacji  $(i, k)$ ,  $NPZ_{ik} = T'_k$ ;  
 $NPR_{k,j}$  - najpóźniejszy czas rozpoczęcia operacji  $(k, j)$ ,  $NPR_{k,j} = T'_j - t_{kj}$   
 $NPR$  określa, kiedy można najpóźniej rozpocząć wykonywanie operacji tak, aby nie wydłużyć całego przedsięwzięcia.



Operacja	Czas wyk.	Poprzed.
a	12	
b	4	
c	10	a
d	16	b
e	10	c
f	11	c, d

Wyznaczanie najpóźniejszych czasów wystąpienia zdarzeń:

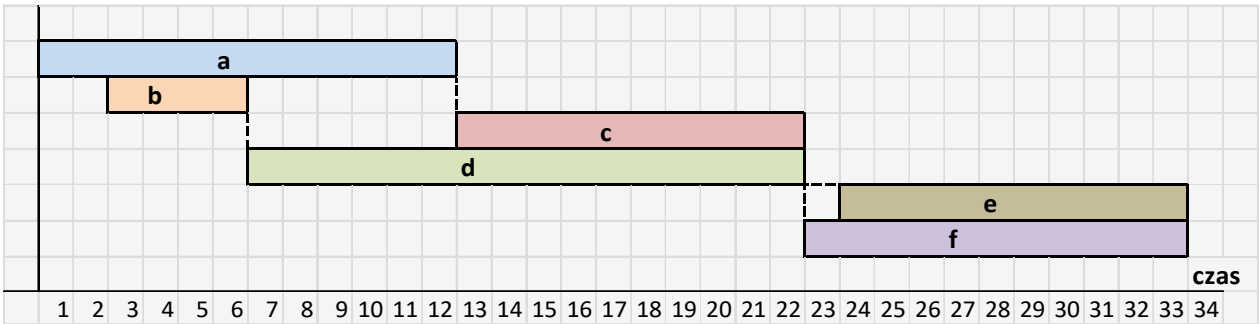
$T'_n = T_n,$

$T'_k = \min_{j>k}(T'_j - t_{kj})$  dla  $k < n$

gdzie  $n$  – numer ostatniego wierzchołka

$T'_6 = T_6 = 33$   
 $T'_5 = T'_6 - t_{56} = 33 - 11 = 22$   
 $T'_4 = \min_{5,6}(T'_5 - t_{45}, T'_6 - t_{46}) = \min(22 - 0, 33 - 10) = 22$   
 $T'_3 = T'_5 - t_{35} = 22 - 16 = 6$   
 $T'_2 = T'_4 - t_{24} = 22 - 10 = 12$   
 $T'_1 = \min_{2,3}(T'_2 - t_{12}, T'_3 - t_{13}) = \min(12 - 12, 6 - 4) = 0$

Operacja	NWR	NWZ	NPR	NPZ
a	0	12	0	12
b	0	4	2	6
c	12	22	12	22
d	4	20	6	22
e	22	32	23	33
f	22	33	22	33



Wykres Gantta przy założeniu, że operacje rozpoczynane są najpóźniej jak to możliwe

Metoda ścieżki krytycznej, cd. – wyznaczanie zapasów czasu

Zapas całkowity:

$$s_{ij} = T'_j - T_i - t_{ij}$$

Całkowity zapas czasu operacji (*Total Slack*) określa, o ile czas trwania danej operacji może zostać wydłużony (albo moment jej rozpoczęcia opóźniony), aby nie wpłynęło to na najkrótszy możliwy czas realizacji przedsięwzięcia.

Zapas swobodny:

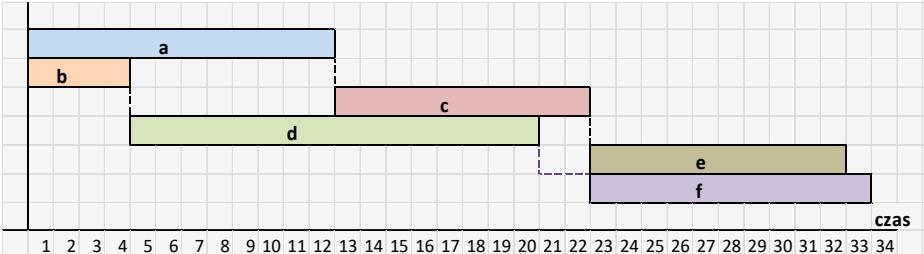
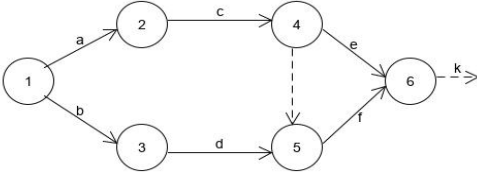
$$v_{ij} = T_j - T_i - t_{ij}$$

Swobodny zapas czasu operacji (*Free Slack*) określa, o jaki czas można wydłużyć operację nie wpływając na czas rozpoczęcia operacji następnych.

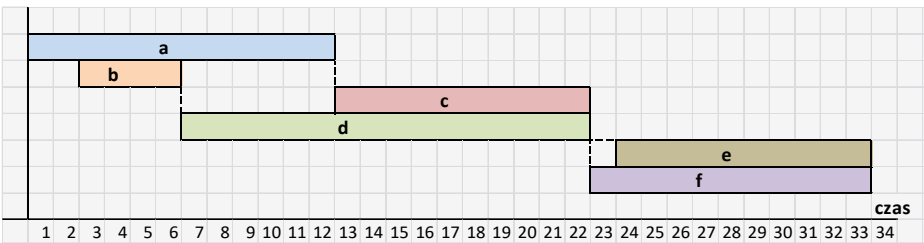
Zachodzi zależność: zapas swobodny <= zapas całkowity

$s_{12} = 12 - 0 - 12 = 0$   
 $s_{13} = 6 - 0 - 4 = 2$   
 $s_{24} = 22 - 12 - 10 = 0$   
 $s_{35} = 22 - 4 - 16 = 2$   
 $s_{46} = 33 - 22 - 10 = 1$   
 $s_{56} = 33 - 22 - 11 = 0$

$v_{12} = 12 - 0 - 12 = 0$   
 $v_{13} = 4 - 0 - 4 = 0$   
 $v_{24} = 22 - 12 - 10 = 0$   
 $v_{35} = 22 - 4 - 16 = 2$   
 $v_{46} = 33 - 22 - 10 = 1$   
 $v_{56} = 33 - 22 - 11 = 0$



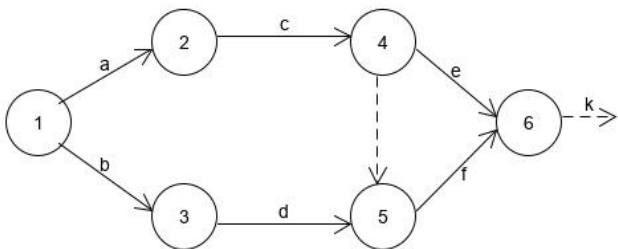
Wykres Gantta przy najwcześniejszych terminach rozpoczynania operacji



Wykres Gantta przy najpóźniejszych terminach rozpoczynania operacji

Operaca	Czas wyk.	Poprz.	NWR	NWZ	NPR	NPZ	Zapas całk. (NPZ-NWZ)	Zapas swob.
a	12		0	12	0	12	0	0
b	4		0	4	2	6	2	0
c	10	a	12	22	12	22	0	0
d	16	b	4	20	6	22	2	2
e	10	c	22	32	23	33	1	1
f	11	c, d	22	33	22	33	0	0

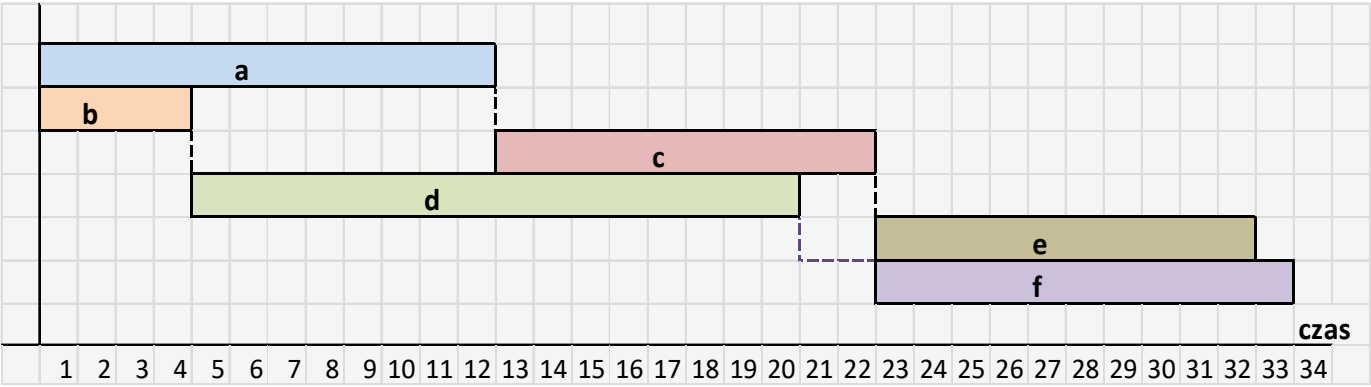
Ścieżka krytyczna



Operacja	Czas wyk.	Poprzed.	NWR	NPZ	NPR	Zapas całk.	Zapas swob.
a	12		0	12	0	0	0
b	4		0	6	2	2	0
c	10	a	12	22	12	0	0
d	16	b	4	22	6	2	2
e	10	c	22	33	23	1	1
f	11	c, d	22	33	22	0	0

Operacje leżące na jednej ścieżce, dla których zapas całkowity jest równy 0 tworzą **ścieżkę krytyczną**.

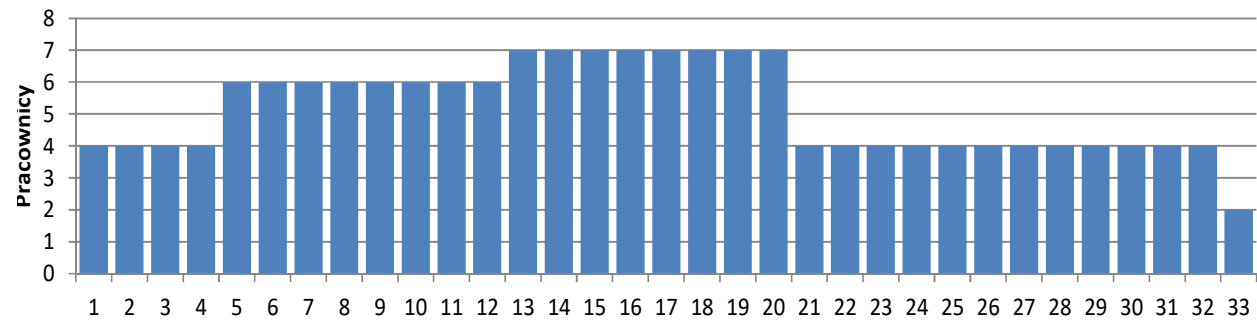
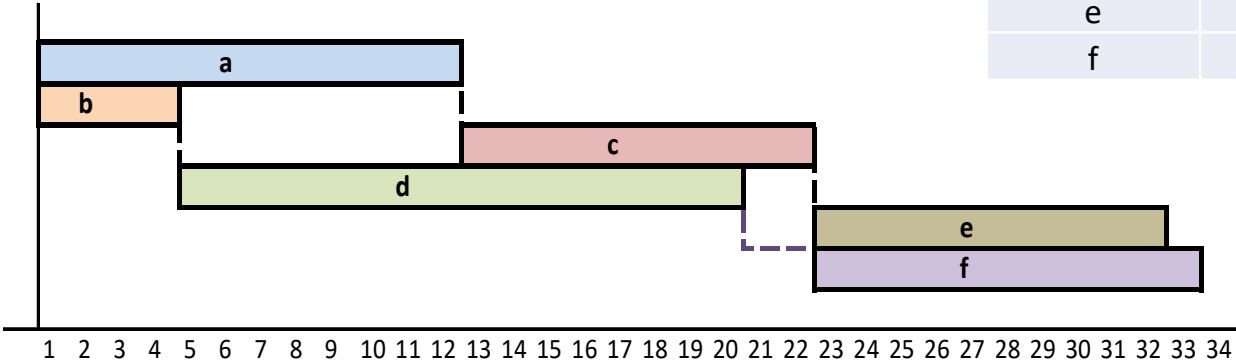
a-c-f



Wykres Gantta przy najwcześniejszych terminach rozpoczynania operacji

Zasób - pracownicy

Operacja	Czas wykonania	Operacja poprzedzająca	Liczba pracowników
a	12		3
b	4		1
c	10	a	4
d	16	b	3
e	10	c	2
f	11	c, d	2

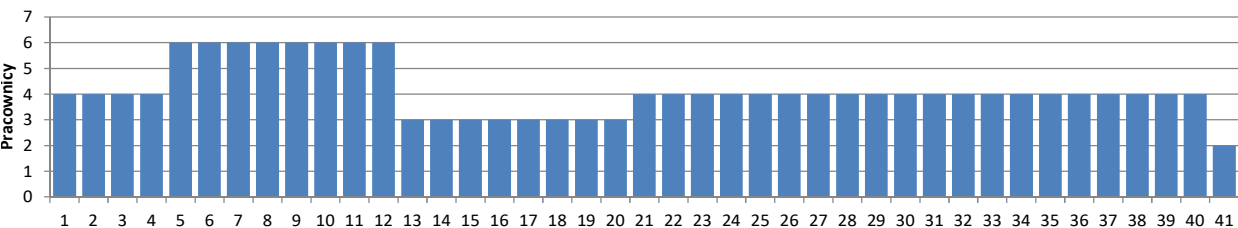
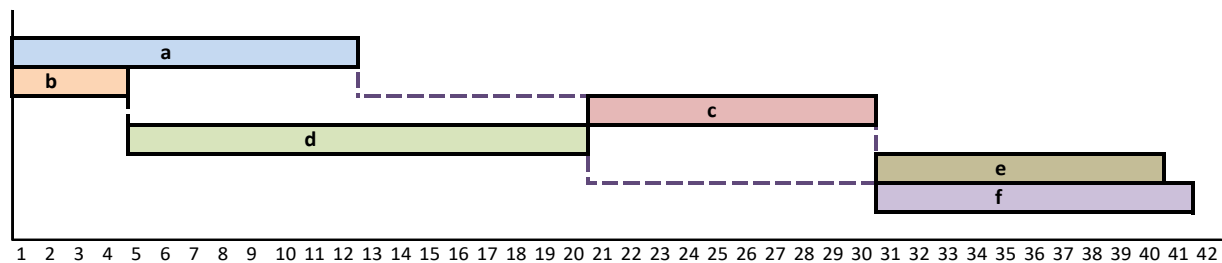
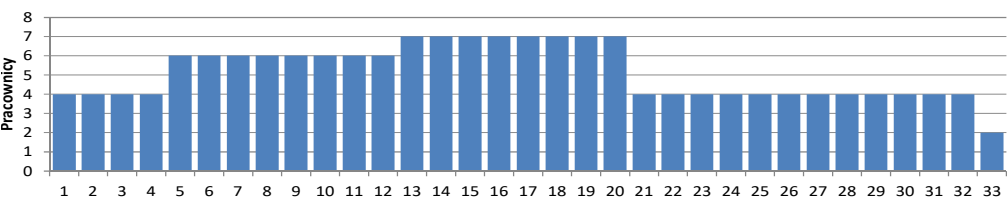
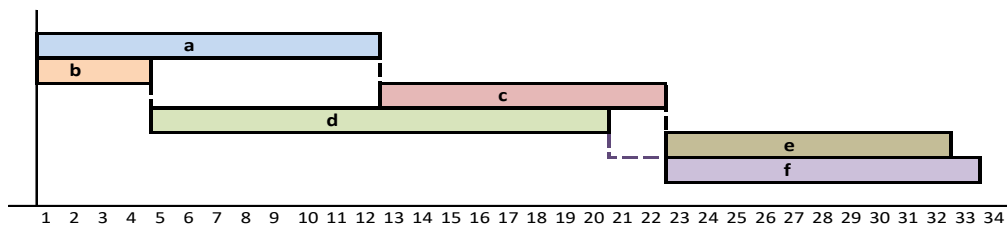


Wykres pokazuje łączną liczbę pracowników zatrudnionych w tym samym czasie przy braku ograniczeń na liczbę dostępnych pracowników.

Maksymalnie pracuje równocześnie 7 pracowników



### Ograniczenia na dostępność pracowników



Operacja	Czas wykonania	Operacja poprzedzająca	Liczba pracowników
a	12		3
b	4		1
c	10	a	4
d	16	b	3
e	10	c	2
f	11	c, d	2

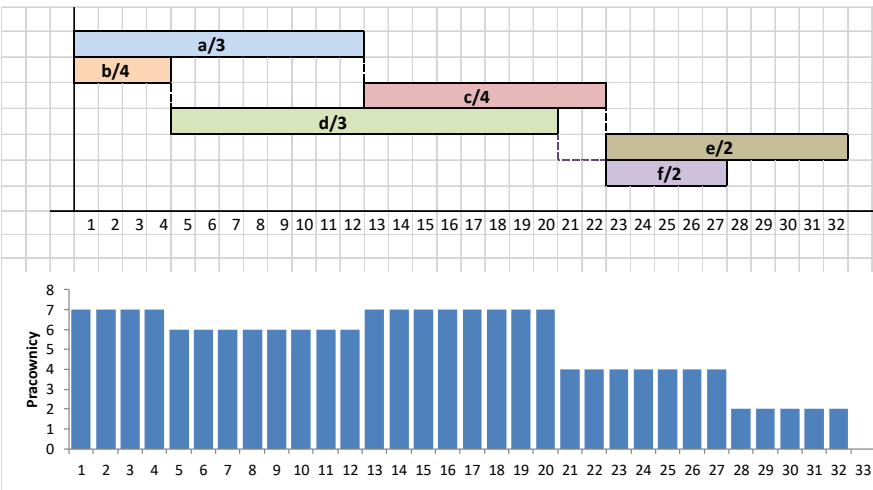
Dostępność pracowników jest ograniczona do 6

Wykres pokazuje łączną liczbę pracowników pracujących w tym samym czasie w przypadku, gdy dostępność pracowników jest ograniczona do 6

Operacje c i d **nie** mogą być wykonywane jednocześnie

Przedsięwzięcie ulega wydłużeniu do 41 dni

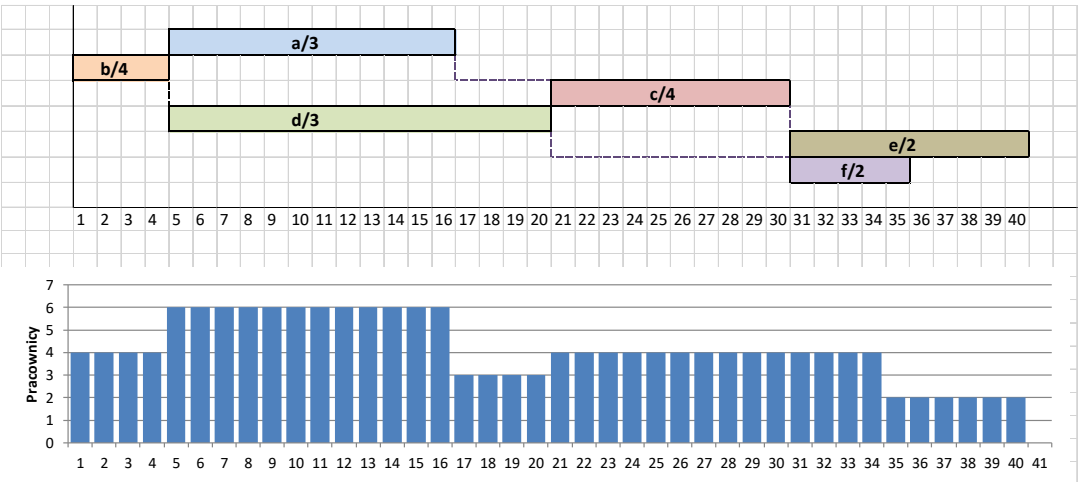
Co by było, gdyby ...



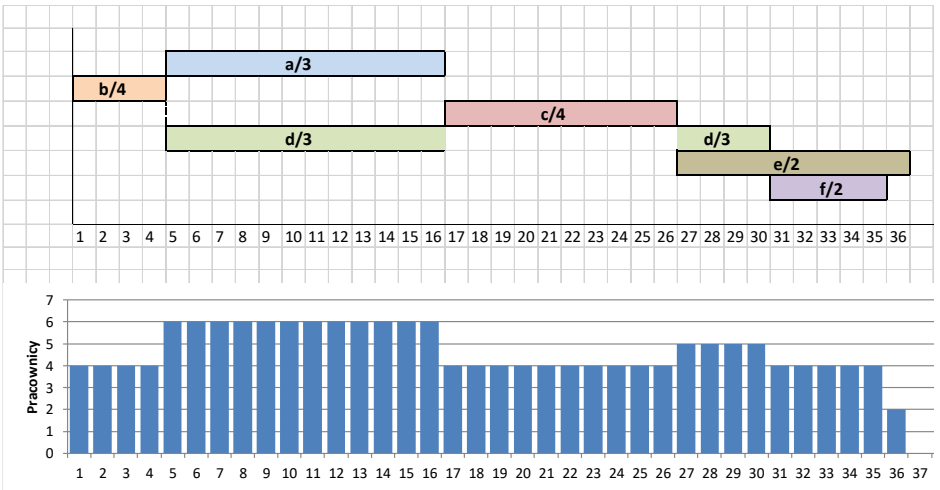
Dostępność pracowników  
jest ograniczona do 6

Operacja	Czas wykonania	Operacja poprzedzająca	Liczba pracowników
a	12		3
b	4		4
c	10	a	4
d	16	b	3
e	10	c	2
f	5	c, d	2

Nie można przerywać wykonywania operacji, T = 40



Zezwalamy na przerywanie wykonywania operacji, T = 36



**Skracanie przedsięwzięcia przez przydział godzin nadliczbowych**

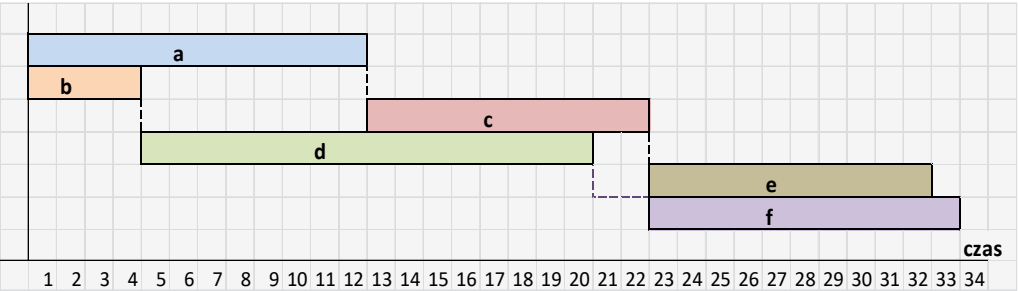
Wykonanie operacji w czasie krótszym od nominalnego wymaga wykonania części pracy w godzinach nadliczbowych.

Operacje mogą być skracane wyłącznie o całkowitą liczbę dni i tylko w granicach podanego czasu minimalnego.

Operacja	Operacja poprzedzająca	Nominalny czas wykonania	Minimalny czas wykonania	Liczba pracowników
a		12	6	3
b		4	3	1
c	a	10	5	4
d	b	16	2	3
e	c	10	2	2
f	c, d	11	6	2

Założmy, że **dostępnych jest 7 dniówek (7\*8=56 godzin) na skracanie operacji** (dniówka = osobodzień)

- Skracamy operacje leżące na ścieżce krytycznej (ścieżka krytyczna może ulec zmianie)
- Operacja f: skrócenie o 1 dzień, wykorzystanie zasobu: 2 dniówki
  - Ponieważ operację f wykonuje 2 pracowników, skrócenie tej operacji o 1 dzień wymaga przydzielenia do niej 2 dni pracy (po jednym dla każdego pracownika) do wykonania w godzinach nadliczbowych
- Teraz są dwie ścieżki krytyczne: a-c-e i a-c-f
- Operacja a: skrócenie o 1 dzień, wykorzystanie zasobu: 3 dniówki
- Łącznie wykorzystano 5 dniówek.



Harmonogram został skrócony o 2 dni, teraz czas jego trwania wynosi 31 dni.

