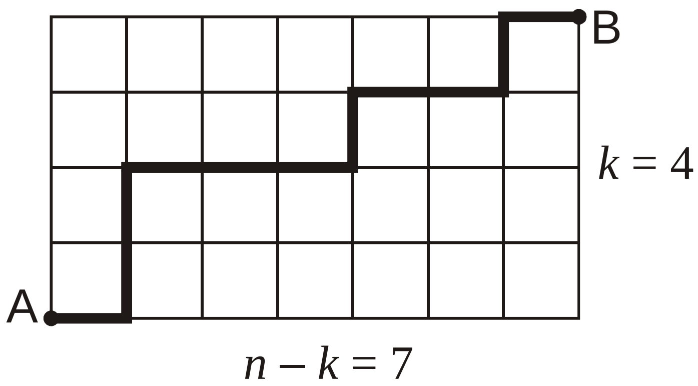
Współczynnik dwumianowy

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

$\binom{n}{k}$ - liczba wszystkich podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$$

Interpretacja współczynnika dwumianowego na kracie:

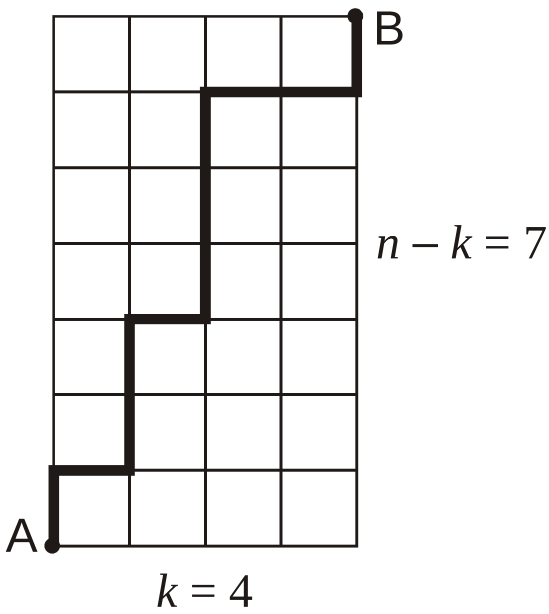


Najkrótsza droga z A do B jest sekwencją $n = 11$ odcinków z $k = 4$ pionowymi

A —||— — —|— —|— B

$n = 11$

Podzbiór k odcinków pionowych z n tworzących taką drogę można wybrać na $\binom{n}{k} = \binom{11}{4}$ sposobów



Najkrótsza droga z A do B jest sekwencją $n = 11$ odcinków
z $n - k = 7$ pionowymi

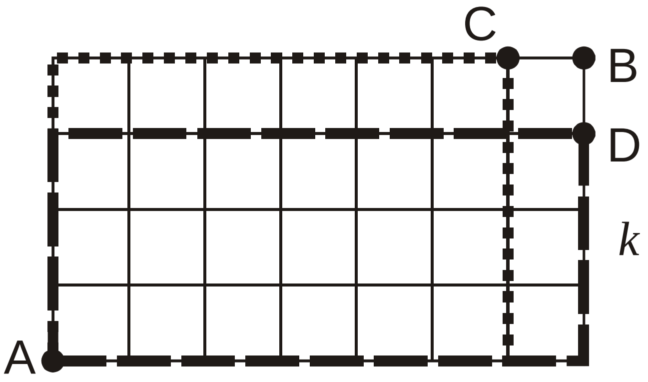
A |— —|||—||—| B

$n = 11$

Podzbiór $n - k$ odcinków pionowych z n tworzących taką drogę

można wybrać na $\binom{n}{n-k} = \binom{11}{7}$ sposobów

Ponieważ najkrótszych dróg jest tyle samo, to $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$



$k = 4$

$k - 1 = 3$

$n - k - 1 = 6$

$n - k = 7$

liczba najkrótszych dróg z A do C $\left|P_A^C\right| = \binom{n-1}{k} = \binom{10}{4}$

liczba najkrótszych dróg z A do D $\left|P_A^D\right| = \binom{n-1}{k-1} = \binom{10}{3}$

zbiór najkrótszych dróg z A do B

$$P_A^B = P_A^C \cup P_A^D, \text{ gdzie } P_A^C \cap P_A^D = \varnothing$$

Zatem $\binom{11}{4} = \left|P_A^B\right| = \left|P_A^C\right| + \left|P_A^D\right| = \binom{10}{4} + \binom{10}{3}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

	1	5	15	35	70	126	210	330	B
	1	4	10	20	35	56	84	120	
	1	3	6	10	15	21	28	36	
	1	2	3	4	5	6	7	8	
A	1	1	1	1	1	1	1	1	

W tzw. trójkącie Pascala i-ty wiersz zawiera kolejno $\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, ..., \binom{i}{i}$

$\binom{n}{k}$

	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
...							...							

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Blaise Pascal (1623 – 1662)

Współczynnik wielomianowy

Rozbicie zbioru X na m podzbiorów o zadanych liczbach elementów $k_1, k_2, \ldots, k_m$

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$$

$$X_i \cap X_j = \varnothing \text{ dla } 1 \le i < j \le m \,; \quad |X| = n, \, |X_i| = k_i$$

$\binom{n}{k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_m}$ - liczba wszystkich rozbić zbioru n-elementowego

Twierdzenie

$$\binom{n}{k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

Dowód

Podzbiór X_1 można wybrać na $\binom{n}{k_1}$ sposobów,

następnie podzbiór X_2 można wybrać na $\binom{n-k_1}{k_2}$ sposobów,

następnie podzbiór X_3 można wybrać na $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ sposobów,

...

i w koncu podzbiór X_m można wybrać na $\binom{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}{k_m}$ sposobów.

Zatem

$$\binom{n}{k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_m} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}{k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

■

Przykład wyznaczania wartości wsp. wielomianowego

$$\binom{11}{4 \quad 3 \quad 2 \quad 2} = \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{11!}{4! \cdot \cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{3! \cdot \cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{2! \cdot 0!} = \frac{11!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

ZBIORY Z POWTÓRZENIAMI

W ***zbiorze z powtórzeniami*** ten sam element może występować kilkakrotnie.

Liczbę wystąpień nazywamy ***krotnością*** tego elementu w zbiorze

$X = \{ x_1, ..., x_n \}$	-	zbiór
$k_1, ..., k_n$	-	krotności elementów
$A = < k_1{*}x_1, ..., k_n{*}x_n >$	-	zbiór z powtórzeniami

Przykład zbioru z powtórzeniami

$X = \{ a, b, c \}$ $\quad k_a = 2, \quad k_b = 1, \quad k_c = 3$

Zbiór z powtórzeniami: $\boldsymbol{A} = < 2{*}a, 1{*}b, 3{*}c > = < a, a, b, c, c, c >$

Liczność zbioru z powtórzeniami: $| A | = k_1 + ... + k_n$

<u>Podzbiór zbioru z powtórzeniami</u> jest wyznaczany przez wektor n-elementowy $(m_1, ..., m_n)$, w którym

$$0 \le m_1 \le k_1, \quad . . . , \quad 0 \le m_n \le k_n$$

Zatem <u>liczba podzbiorów</u> zbioru z powtórzeniami o krotnościach

$k_1, k_2,..., k_n$ jest równa $\quad (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_n + 1)$

<u>Twierdzenie</u>

Liczba k-elementowych podzbiorów zbioru z powtórzeniami

$< k{*}x_1, ..., k{*}x_n >$ jest równa $\quad \dfrac{n^{\overline{k}}}{k!} = \dbinom{n+k-1}{k}$

Dowód

Rozważmy rozmieszczenie uporządkowane k obiektów w n pudełkach.

Liczba takich rozmieszczeń jest równa $n^{\overline{k}} = n\cdot(n + 1)\cdot\ldots\cdot(n + k - 1)$.

Każde takie rozmieszczenie wyznacza wektor n-elementowy $(r_1, \ldots, r_n)$, dla którego zachodzi $r_1 + \ldots + r_n = k$, gdzie r_i jest liczbą obiektów w pudełku i.

Wektor $(r_1, \ldots, r_n)$ odpowiada k-elementowemu podzbiorowi

$$< r_1{*}x_1, \ldots, r_n{*}x_n > \;\subseteq\; < k{*}x_1, \ldots, k{*}x_n >$$

Ponadto $k!$ rozmieszczeń wyznacza ten sam podzbiór k-elementowy, a zatem liczba różnych podzbiorów k-elementowych zbioru z powtórzeniami o wszystkich krotnościach równych k wynosi

$$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

■

Przykład zastosowania twierdzenia

Wyznaczanie liczby całkowitych nieujemnych rozwiązań linowego równania diofantycznego: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

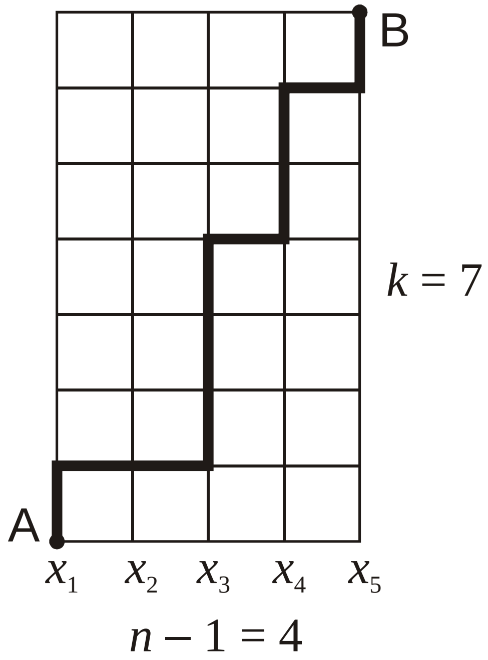
Każde rozwiązanie odpowiada k-elementowemu podzbiorowi

$< x_1{*}z_1, \ldots, x_n{*}z_n >$ zbioru $< k{*}z_1, \ldots, k{*}z_n >$.

Zatem liczba rozwiązań wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

Interpretacja równania diofantycznego na kracie:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$$



$$x_1 = \mathbf{1},\ x_2 = \mathbf{0},\ x_3 = \mathbf{3},\ x_4 = \mathbf{2},\ x_5 = \mathbf{1}$$

Każde rozwiązanie równania diofantycznego ma wzajemnie jednoznacznie przyporządkowaną jedną z najkrótszych dróg z A do B.

Zatem liczba rozwiązań jest równa liczbie najkrótszych dróg:

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{5-1+7}{7} = \binom{11}{7}$$

FUNKCJA TWORZĄCA

Nieskończony ciąg liczbowy:

$$(a_k) = a_0, a_1, a_2, ..., a_k, ...$$

możemy przedstawić w postaci *szeregu potęgowego*:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- uzyskujemy formalną reprezentację ciągu za pomocą funkcji $A(x)$

Funkcję $A(x)$ nazywamy <u>funkcja tworzącą</u> dla ciągu (a_k)

W oparciu o funkcje tworzące można zdefiniować operacje na ciągach:

$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dla (a_k) i $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ dla (b_k)

- **dodawanie**: $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$ dla $(a_k + b_k)$
- **mnożenie przez liczbę**: $p \cdot A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot a_k x^k$ dla $(p \cdot a_k)$
- **iloczyn Cauchy'go**: $A(x) \cdot B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ dla (c_k)

  gdzie $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$;

  ciąg $(c_k) = c_0, c_1, ..., c_k, ...$ nazywamy **splotem** ciągów (a_k) i (b_k)

$$(c_k) = (a_k) * (b_k)$$

Jeżeli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera, to jego suma $A(x)$ jest <u>funkcją analityczną</u> w tym otoczeniu i wtedy

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gdzie $A^{(k)}(0)$ jest wartością k-tej pochodnej funkcji $A(x)$ dla $x = 0$

Jeśli szereg jest zbieżny to jego funkcją tworząca $A(x)$ jest funkcją analityczną, np.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

Przykłady funkcji tworzących

1. ciąg współczynników dwumianowych dla ustalonego n

   $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, \ldots$

   i jego funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$

2. ciąg $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^k, \ldots$

   i jego funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$

3. ciąg $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots$

   i jego funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}$

Jeżeli ciąg jest <u>skończony</u>, tzn. $a_k = 0$ dla $k > n$, to funkcja tworząca ciągu jest **<u>wielomianem</u>** $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

Funkcja tworząca dla ciągu liczb podzbiorów *k*-elementowych

<u>Zbiór</u> $X = \{ a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n \}$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (x^0 + x^1) & \cdot & (x^0 + x^1) \cdot \ldots \cdot & & (x^0 + x^1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (1 + x) & \cdot & (1 + x) \cdot \ldots \cdot & & (1 + x) \end{array} = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

każdy podzbiór zbioru X może być wskazany przez podanie

czy dany element a_k ($k = 1, \ldots, n$) jest w nim zawarty, czy nie:

$x^0 = 1$ – odpowiada brakowi danego elementu (zero wystąpień)

$x^1 = x$ – odpowiada wystąpieniu danego elementu (jeden raz)

Podzbiór jest k-elementowy $\Leftrightarrow$ w k czynnikach wybrano składnik x^1

<u>Zbiór z powtórzeniami</u>:

$$Z = \langle 3{*}a_1, \quad 1{*}a_2, \quad 2{*}a_3 \rangle$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x + x^2) = A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Podzbiór jest k-elementowy $\Leftrightarrow$ z każdego nawiasu wybrano taki

składnik x^{k_i}, że $x^{k_1} \cdot x^{k_2} \cdot x^{k_3} = x^{k_1 + k_2 + k_3} = x^k$

Zatem c_k, to liczba podzbiorów k-elementowych zbioru Z.

$$A(x) = (1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x + x^2)$$
$$= 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

$\Rightarrow$ występuje 1 podzbiór pusty, 3 podzbiory jednoelementowe, 5 podzbiorów dwuelementowych, 6 podzbiorów trzyelementowych, itd.

Przykłady uwzględnienia dodatkowych warunków dla zb. z powtórz.

$Z = < 5{*}a_1,\ 2{*}a_2,\ 4{*}a_3 >$

Funkcja tworząca dla ciągu liczb podzbiorów k-elementowych:

$A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

Trzeba wyznaczyć ile jest podzbiorów k-elementowych, w których a_1, a_2 i a_3 występują nieparzystą liczbę razy.

Modyfikujemy funkcję tworzącą usuwając potęgi o wykładnikach parzystych:

$A^*(x) = (x + x^3 + x^5) \cdot (x) \cdot (x + x^3) = x^3 + 2\,x^5 + 2\,x^7 + x^9$.

$\Rightarrow$ występuje

1 podzbiór 3-elementowy: $< 1{*}a_1, 1{*}a_2, 1{*}a_3 >$,

2 podzbiory 5-elementowe: $< 3{*}a_1, 1{*}a_2, 1{*}a_3 >$ i $< 1{*}a_1, 1{*}a_2, 3{*}a_3 >$,

2 podzbiory 7-elementowe: $< 5{*}a_1, 1{*}a_2, 1{*}a_3 >$ i $< 3{*}a_1, 1{*}a_2, 3{*}a_3 >$,

i 1 podzbiór 9-elementowy: $< 5{*}a_1, 1{*}a_2, 3{*}a_3 >$.