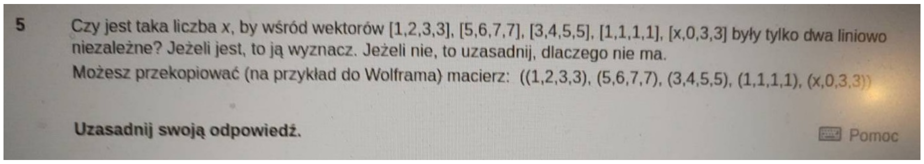
Zadanie 5



5 Czy jest taka liczba x, by wśród wektorów [1,2,3,3], [5,6,7,7], [3,4,5,5], [1,1,1,1], [x,0,3,3] były tylko dwa liniowo niezależne? Jeżeli jest, to ją wyznacz. Jeżeli nie, to uzasadnij, dlaczego nie ma.
Możesz przekopiować (na przykład do Wolframa) macierz: ((1,2,3,3), (5,6,7,7), (3,4,5,5), (1,1,1,1), (x,0,3,3))

Uzasadnij swoją odpowiedź. Pomoc

Figure 1: Zadanie 5

Dane są wektory:

$$\vec{v_1} = (1, 2, 3, 3),$$
$$\vec{v_2} = (5, 6, 7, 7),$$
$$\vec{v_3} = (3, 4, 5, 5),$$
$$\vec{v_4} = (1, 1, 1, 1),$$
$$\vec{v_5} = (x, 0, 3, 3).$$

Pytanie jest następujące - czy możemy dobrać taką liczbę x, by istniały tylko dwa wektory niezależne? Najpierw zadajmy pytanie, czy wektory $\vec{v}_1 - \vec{v}_4$ są liniowo niezależne. Liniowa zależność (czyli możliwość konstrukcji jednego wektora z pozostałych) jest tożsama z zerowaniem się wyznacznika macierzy, której wierszami (bądź kolumnami) są wektory. Po wpisaniu do Wolframa Alpha uzyskujemy:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Oznacza to, że wektory $\vec{v}_1 - \vec{v}_4$ są liniowo zależne, zatem istnieją co najwyżej trzy wektory liniowo niezależne wśród wektorów $\vec{v}_1 - \vec{v}_4$.

Zauważmy, że czwarta współrzędna jest we wszystkich przypadkach powieleniem trzeciej. Zatem moglibyśmy nasz przypadek zredukować do:

$$\vec{w_1} = (1, 2, 3),$$
$$\vec{w_2} = (5, 6, 7),$$
$$\vec{w_3} = (3, 4, 5),$$
$$\vec{w_4} = (1, 1, 1),$$
$$\vec{w_5} = (x, 0, 3).$$

Możemy zaobserwować, że wektor $\vec{w_3}$ jest sumą wektorów $\vec{w_1}$ oraz $\vec{w_2}$, podzieloną przez 2. Zatem redukujemy układ do:

$$\begin{aligned}\vec{w_1} &= (1, 2, 3),\\ \vec{w_2} &= (5, 6, 7),\\ \vec{w_4} &= (1, 1, 1),\\ \vec{w_5} &= (x, 0, 3).\end{aligned}$$

Sprawdzamy, czy układ $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_4}$ jest liniowo niezależny. Wyznacznik macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Zatem wektory są liniowo zależne. Istotnie, możemy zauważyć, że $\vec{w_1} + 4\vec{w_4} = \vec{w_2}$. Zatem zostawmy tylko wektory $\vec{w_1}$ oraz $\vec{w_4}$. Dorzućmy do nich wektor $\vec{w_5}$.

Głównym pytaniem jest, czy istnieje taka wartość x, by wektory $\vec{w_1}, \vec{w_4}, \vec{w_5}$ były liniowo zależne, tj. istniały tylko dwa liniowo niezależne. Już wiemy, że wektory będą liniowo zależne, jeśli macierz:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

Prowadzi to do równania:

$$1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot x = 0$$

$$3 + 2x - 6 - 3x = 0$$

$$-3 - x = 0$$

$$3 + x = 0$$

Zatem $x = -3$.