1. Wektor w ma w bazie [2,1,1], [1,1,0], [0,1,0] przestrzeni R^3 współrzędne 3,-1,2. Obliczyć współrzędne tego wektora w bazie [1,0,2], [0,1,1], [1,0,1].

2. Dane jest przekształcenie liniowe $F\colon R^3 \to R^2$ o macierzy $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ w bazach standardowych.

(a) Obliczyć $F(1,0,0), F(0,1,0), F(0,0,1)$. Obliczyć $F(1,-1,3)$.

(b) Napisać wzór tego przekształcenia.

(c) Znaleźć wszystkie wektory $w \in R^2$ takie, że $F(w) = (1,-2)$.

(d) Znaleźć macierz F w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ gdzie $\mathcal{A}$ jest bazą R^3 złożoną z wektorów $(1,-2,0),(1,-1,0),(0,0,1)$ a $\mathcal{B}$ jest bazą R^2 złożoną z wektorów (1,1), (2,1).

3. (a) Wyznaczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} p & p & 1 & 1 \\ 1 & p(p+2) & 1 & p \\ 1 & p & p & 1 \end{bmatrix}$ w zależności od parametru p.

(b) Dla jakich wartości parametru p układ równań

$\begin{cases} px_1 & +px_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & +p(p+2)x_2 & +x_3 & +px_4 & =1 \\ x_1 & +px_2 & +px_3 & +x_4 & =2 \end{cases}$ jest sprzeczny a dla jakich p jest niesprzeczny?

Dla tych p dla których jest niesprzeczny określić ile zmiennych wolnych występuje w rozwiązaniu ogólnym.

4. Macierz przekształcenia liniowego $L\colon R^3 \to R^2$ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ gdzie $\mathcal{A}$ jest bazą R^3 złożoną z wektorów $(1,-2,0),(1,-1,0),(0,0,1)$ a $\mathcal{B}$ jest bazą R^2 złożoną z wektorów (1,1), (2,1) jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć $L(1,-2,0), L(1,-1,0), L(0,0,1), L(3,-5,1)$.

(b) Znaleźć wzór L.

5. Dane jest przekształcenie liniowe $F\colon R^3 \to R^3$, $F(x,y,z) = (x-2y+z, x+4y-z, 2z)$.

(a) Znaleźć wartości własne F.

(b) Dla każdej wartości własnej znaleźć bazę w odpowiedniej podprzestrzeni własnej (c)

Czy istnieje baza przestrzeni R^3 złożona z wektorów własnych F? Jeśli tak to znaleźć macierz F w tej bazie.

6. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Czy macierz A jest diagonalizowalna? Jeśli tak to zmnaleźć taką macierz C, ze $C^{-1}AC = D$ jest macierzą diagonalną. Znaleźć D.

(b) Obliczyć A^{20}.

Odpowiedzi.

1. -6,4,11.

2. (a) (3,3), (-2,2), (1,-1). $F(1,-1,3) = (3,3) - (-2,2) + 3(1,-1) = (6,-2)$.
(b) $F(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, -3x_1 + 2x_2 - x_3)$.

(c) nie ma takich

(d) $\begin{bmatrix} -14 & -10 & -2 \\ 21 & 15 & 3 \end{bmatrix}$

3. (a) Rząd jest równy 3 dla $p \neq 1$, jest równy 2 dla $p = 1$.

(b) Dla $p \neq 1$ układ jest niesprzeczny ; liczba parametrów jest równa 1, dla $p = 1$ układ jest sprzeczny.

4. (a) (0,1),(2,1),(1,1),(3,4).

(b) $L(x, y, z) = (4x + y + z, x + z)$.

5. (a) 2,3.

(b) Dla $\lambda = 2$ podprzestrzeń własna składa się z wektorów postaci $(-2y + z, y, z)$ $y, z \in R$. Baza to np. (-2,1,0), (1,0,1). Dla $\lambda = 3$ podprzestrzeń własna składa się z wektorów postaci $-y, y, 0$. Baza (-1,1,0).

(c) Istnieje : (-2,1,0), (1,0,1), (-1,1,0). Macierz F w tej bazie to $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Wartości wlasne S to -2 i 4. Odpowiednie wektory własne bazowe to (1,-1), (1,1). Macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$., $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$A^{20} = CD^{20}C^{-1}$.