Ćwiczenia 6 z MD

1. W czterech jednakowych pudełkach zostało rozmieszczonych 10 klocków różnych rozmiarów. Obliczyć
   a. Ile jest wszystkich rozmieszczeń, jeśli wiemy, że żadne pudełko nie jest puste?
   b. Ile jest rozmieszczeń, takich że w jednym z pudełek są 4 klocki, a w pozostałych trzech są po 2 klocki?

2. Do czterech zespołów przyjęto 12 pracowników. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli :
   a. każdy zespół ma zostać wzmocniony.
   b. do zespołu nr 1 trafiają 4 osoby, a pozostałe są przydzielane dowolnie.
   c. do zespołu nr 1 trafiają 4 osoby i pozostałe zespoły też muszą być wzmocnione.
   d. do każdego zespołu mają trafić po 3 osoby .

3. Do trzech jednakowych pudeł wsadzono 12 różnych zabawek. Na ile sposobów można je rozlokować w pudłach, jeśli:
   a. w każdym pudle ma się znaleźć przynajmniej jedna zabawka.
   b. nie ma ograniczeń na rozmieszczenia. (np. wszystkie zabawki mogą znaleźć się w jednym pudle lub dwóch).
   c. żadne pudło nie może być puste, a 4 wskazane zabawki mają się znaleźć w tym samym pudle.

4. Na pięciu stanowiskach pracowało 5 szwaczek, szyjących jednakowe pidżamy. Ile możliwych wyników wykonania planu można im przyporządkować, jeśli wiadomo, że uszyły danego dnia 21 pidżam i każda uszyła co najmniej jedną pidżamę.

5. Na ile sposobów można podzielić 20-osobową grupę na:
   a. cztery podgrupy, z których dwie liczą po 6 osób, a dwie pozostałe po 4 osoby?
   b. pięć równolicznych podgrup.

6. Na kurs języka francuskiego zgłosiło się 11 osób, które mają dołączyć do trzech istniejących grup, odbywających zajęcia w różnych terminach. Na ile sposobów można ich przydzielić, aby :
   a. do każdej z grup trafiła przynajmniej jedna osoba.
   b. nowe osoby trafiły do dokładnie dwóch grup.

Odpowiedzi do zestawu 6:

1. a. $\left\{ {10 \atop 4} \right\} = \frac{s_{10,4}}{4!} = \frac{4^{10} - 4\cdot 3^{10} - 6\cdot 2^{10} - 4}{4!} = 34105$ b. $\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}}{3!} = \frac{10!}{(2!)^3\cdot 3!\cdot 4!} = 3150$

2. a. $s_{12,4} = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} (4-i)^{12} = 4^{12} - 4\cdot 3^{12} + 6\cdot 2^{12} - 4 = 14676024$ b. $\binom{12}{4}\cdot 3^8 = 495\cdot 81^2$

   c. $\binom{12}{4}\cdot s_{8,3} = 495\cdot(3^8 - 3\cdot 2^8 + 3) = 495\cdot 5796$ d. $\frac{12!}{(3!)^4} = 369600$

3. a. $\left\{ {12 \atop 3} \right\} = \frac{s_{12,3}}{3!} = \frac{1}{3!}\cdot(3^{12} - 3\cdot 2^{12} + 3) = 86526$

   b. $\left\{ {12 \atop 3} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} + 1 = \frac{s_{12,3}}{3!} + \frac{s_{12,2}}{2!} + 1 = \frac{3^{11}+1}{2} = 88574$

   c. $\left\{ {9 \atop 3} \right\} = \frac{s_{9,3}}{3!} = \frac{1}{3!}\cdot(3^9 - 3\cdot 2^9 + 3) = 3025$

4. $\binom{20}{16} = 4845$

5. a. $\frac{\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{6}}{2!\cdot 2!} = \frac{20!}{4\cdot(4!)^2\cdot(6!)^2}$ b. $\frac{20!}{5!\cdot(4!)^5}$

6. a. $s_{11,3} = 3^{11} - 3\cdot 2^{11} + 3 = 171006$ b. $3\cdot(2^{11} - 2) = 6136$