Techniki rozwiązywania problemów kombinatorycznych cd.

- zasada mnożenia ✓
- zasada równoliczności ✓
- zasada szufladkowa Dirichleta ✓
- zasada włączania-wyłączania
- funkcje tworzące

Zasada włączania-wyłączania

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\{i,j\}\subseteq\{1,\dots,n\}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\{i,j,k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{\{p_1, p_2, \dots, p_i\}\subseteq\{1,\dots,n\}} |A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \dots \cap A_{p_i}|$$

dla $n = 3$: $|A \cup B \cup C| =$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Przykład zastosowania zasady włączania-wyłączania do wyznaczenia liczby podzbiorów k-elementowych zbioru z powtórzeniami

Rozważmy zbiór z powtórzeniami $X = < 5*a,\ 2*b,\ 3*c >$

Ile jest 7-elementowych podzbiorów zbioru X ?

Wprowadźmy pomocniczy zbiór $Y = < 7*a,\ 7*b,\ 7*c >$

Wśród 7-elementowych podzbiorów zbioru Y są takie, które są także podzbiorami zbioru X i takie, które nimi nie są.

Oznaczmy przez P zbiór 7-elementowych podzbiorów zbioru Y :

$$|P| = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$$

Podzbiorami zbioru *X* nie są te 7-elementowe podzbiory zbioru *Y*, które zawierają ponad 5 powtórzeń elementu *a* lub ponad 2 powtórzenia elementu *b*, lub ponad 3 powtórzenia elementu *c*.

Rozważmy następujące zbiory:

$P_{\mathbf{a}}$ – zbiór 7-elementowych podzbiorów zbioru *Y*, które zawierają ponad 5 powtórzeń elementu *a* ,

$P_{\mathbf{b}}$ – zbiór 7-elementowych podzbiorów zbioru *Y*, które zawierają ponad 2 powtórzenia elementu *b* :

$P_{\mathbf{c}}$ – zbiór 7-elementowych podzbiorów zbioru *Y*, które zawierają ponad 3 powtórzenia elementu *c* :

Zbiór 7-elementowych podzbiorów zbioru *Y*, które nie są podzbiorami zbioru *X* to $P_{\mathbf{a}} \cup P_{\mathbf{b}} \cup P_{\mathbf{c}}$,

a zatem liczba 7-elementowych podzbiorów zbioru *Y*, które <u>są podzbiorami</u> zbioru X wynosi $|P| - |P_{\mathbf{a}} \cup P_{\mathbf{b}} \cup P_{\mathbf{c}}|$

$$|P_{\mathbf{a}} \cup P_{\mathbf{b}} \cup P_{\mathbf{c}}| = |P_{\mathbf{a}}| + |P_{\mathbf{b}}| + |P_{\mathbf{c}}| +$$
$$- |P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{b}}| - |P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{c}}| - |P_{\mathbf{b}} \cap P_{\mathbf{c}}| + |P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{b}} \cap P_{\mathbf{c}}|$$

Każde $A \in P_{\mathbf{a}}$ może być zapisane jako $A = < 6{*}a, 0{*}b, 0{*}c > \cup A'$,

gdzie A' jest 1-elementowym podzbiorem zbioru $< 1{*}a, 7{*}b, 7{*}c >$:

$$|P_{\mathbf{a}}| = \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$$

Każde $B \in P_{\mathbf{b}}$ może być zapisane jako $B = \langle 0*a, 3*b, 0*c \rangle \cup B'$, gdzie B' jest 4-elementowym podzbiorem zbioru $\langle 7*a, 4*b, 7*c \rangle$:

$$|P_{\mathbf{b}}| = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Każde $C \in P_{\mathbf{c}}$ może być zapisane jako $C = \langle 0*a, 0*b, 4*c \rangle \cup C'$, gdzie C' jest 3-elementowym podzbiorem zbioru $\langle 7*a, 7*b, 3*c \rangle$:

$$|P_{\mathbf{c}}| = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

$|P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{b}}| = 0$, bo podzbiór należący do $P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{b}}$ musiałby mieć co najmniej 9 elementów $\langle 6*a, 3*b, ?*c \rangle$.

$|P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{c}}| = 0$, bo podzbiór należący do $P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{c}}$ musiałby mieć co najmniej 10 elementów $\langle 6*a, ?*b, 4*c \rangle$.

$|P_{\mathbf{b}} \cap P_{\mathbf{c}}| = 1$, bo podzbiór należący do $P_{\mathbf{b}} \cap P_{\mathbf{c}}$ jest tylko jeden $\langle 0*a, 3*b, 4*c \rangle$.

$|P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{b}} \cap P_{\mathbf{c}}| = 0$, bo podzbiór należący do $P_{\mathbf{a}} \cap P_{\mathbf{b}} \cap P_{\mathbf{c}}$ musiałby mieć co najmniej 13 elementów $\langle 6*a, 3*b, 4*c \rangle$.

Czyli $|P_{\mathbf{a}} \cup P_{\mathbf{b}} \cup P_{\mathbf{c}}| = 3 + 15 + 10 - 0 - 0 - 1 + 0 = 27$,
27 podzbiorów 7-elementowych zbioru Y nie jest podzbiorami X.
Liczba 7-elementowych podzbiorów zbioru X wynosi zatem

$$|P| - |P_{\mathbf{a}} \cup P_{\mathbf{b}} \cup P_{\mathbf{c}}| = 36 - 27 = \mathbf{9}$$

Zastosowanie zasady włączania-wyłączania do wyznaczenia liczby surjekcji

Dla $|X| = n$, $|Y| = m$, $\quad |\mathrm{Sur}(X, Y)| = s_{n,m} = m!\cdot \left\{ {n \atop m} \right\}$,

ale spróbujmy ominąć odwołanie do liczb Stirlinga drugiego rodzaju.

Przyjmijmy, że $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ i podzbiór $F_i \subseteq \mathrm{Fun}(X, Y)$ jest zbiorem takich funkcji f, dla których $y_i \notin f(X)$.

Zatem zbiór $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_m$ jest zbiorem funkcji $f \in \mathrm{Fun}(X, Y)$, które <u>nie są</u> surjekcjami:

$s_{n,m} = |\mathrm{Fun}(X, Y)| - |F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_m|$, $\qquad |\mathrm{Fun}(X, Y)| = m^n$

$$|F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_m| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \sum_{\{p_1, p_2, ..., p_i\} \subseteq \{1,...,m\}} |F_{p_1} \cap F_{p_2} \cap ... \cap F_{p_i}|$$

Należy zatem wyznaczyć liczności zbiorów $F_{p_1} \cap F_{p_2} \cap ... \cap F_{p_i}$ dla $i = 1, 2, ..., m$ i $\{p_1, p_2, ..., p_i\} \subseteq \{1, ..., m\}$.

Zauważmy, że jeśli $f \in F_{p_1} \cap F_{p_2} \cap ... \cap F_{p_i}$, to $y_{p_1}, y_{p_2}, ..., y_{p_i} \notin f(X)$.

Zatem $\qquad F_{p_1} \cap F_{p_2} \cap ... \cap F_{p_i} = \mathrm{Fun}(X, Y \setminus \{y_{p_1}, y_{p_2}, ..., y_{p_i}\})$;

$$|F_{p_1} \cap F_{p_2} \cap ... \cap F_{p_i}| = |\mathrm{Fun}(X, Y \setminus \{y_{p_1}, y_{p_2}, ..., y_{p_i}\})| = (m-i)^n$$

Podzbiór $\{y_{p_1}, y_{p_2}, ..., y_{p_i}\}$ można wybrać ze zbioru Y na $\binom{m}{i}$ sposobów,

a zatem $$\sum_{\{p_1, p_2, ..., p_i\} \subseteq \{1,...,m\}} |F_{p_1} \cap F_{p_2} \cap ... \cap F_{p_i}| = \binom{m}{i}(m-i)^n$$

i ostatecznie $$|F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_m| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} (m-i)^n .$$

Liczba surjekcji $s_{n,m} = |\,\mathrm{Fun}(X, Y)\,| - |\, F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m \,| =$

$$= m^n - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} (m-i)^n = m^n + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i} \binom{m}{i} (m-i)^n$$

$$\boxed{s_{n,m} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \binom{m}{i} (m-i)^n}$$

Porównując

$m! \cdot \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \binom{m}{i} (m-i)^n$ otrzymujemy wzór pozwalający bez

rekurencji wyznaczać liczby Stirlinga drugiego rodzaju:

$$\boxed{\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \binom{m}{i} (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \frac{(m-i)^n}{(m-i)! \cdot i!}}$$

Zastosowanie zasady włączania-wyłączania do wyznaczenia liczby nieporządków

$\boldsymbol{S_n}$ – zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{ 1, 2, \ldots, n \}$

Każdy element $f \in S_n$ możemy zapisać w postaci tablicy:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

Nieporządkiem nazywamy taką permutację $f \in S_n$,

dla której $f(i) \neq i$ dla każdego $\mathrm{i} \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$

$\boldsymbol{D_n}$ – zbiór wszystkich nieporządków w zbiorze $\{ 1, 2, \ldots, n \}$

$$|\, D_n \,| = ?$$

Przyjmijmy, że $A_{\boldsymbol{i}} = \{ f \in S_n : f(i) = i \}$ dla i $\in \{ 1, 2, ..., n \}$.

W zbiorze $A_{\mathbf{1}} \cup A_{\mathbf{2}} \cup ... \cup A_{\boldsymbol{n}}$ są wszystkie permutacje $f \in S_n$, które <u>nie są</u> nieporządkami, a zatem $| D_{\boldsymbol{n}} | = | S_n | - | A_{\mathbf{1}} \cup A_{\mathbf{2}} \cup ... \cup A_{\boldsymbol{n}} |$.

$| S_n | = n!$,

$$| A_{\mathbf{1}} \cup A_{\mathbf{2}} \cup ... \cup A_{\boldsymbol{n}} | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{\{p_1, p_2, ..., p_i\} \subseteq \{1,...,n\}} | A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap ... \cap A_{p_i} |.$$

Należy zatem wyznaczyć liczności zbiorów $A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap ... \cap A_{p_i}$ dla $i = 1, 2, ..., n$ i $\{ p_1, p_2, ..., p_i \} \subseteq \{1, ..., m\}$.

$A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap ... \cap A_{p_i}$ jest zbiorem wszystkich takich permutacji $f \in S_n$, dla których $f(p_{\boldsymbol{j}}) = p_{\boldsymbol{j}}$ dla $j = 1, 2, ..., i$, a zatem

$$| A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap ... \cap A_{p_i} | = (n - i)!$$

Podzbiór $\{ p_{\mathbf{1}}, p_{\mathbf{2}}, ..., p_{\boldsymbol{i}} \}$ można wybrać ze zbioru $\{ 1, 2, ..., n \}$ na $\binom{n}{i}$ sposobów, a zatem

$$\sum_{\{p_1, p_2, ..., p_i\} \subseteq \{1,...,n\}} | A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap ... \cap A_{p_i} | = \binom{n}{i} (n-i)!$$

i ostatecznie $$| A_{\mathbf{1}} \cup A_{\mathbf{2}} \cup ... \cup A_{\boldsymbol{n}} | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)! \, .$$

Liczba nieporządków $| D_{\boldsymbol{n}} | = | S_n | - | A_{\mathbf{1}} \cup A_{\mathbf{2}} \cup ... \cup A_{\boldsymbol{n}} | =$

$$n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)! = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \frac{n!}{i!} \, .$$

$$\boxed{| D_{\boldsymbol{n}} | = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}$$

Na przykład

Dla $n = 5$ liczba nieporządków

$$|D_n| = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$

spośród wszystkich 5! = 120 permutacji, czyli ponad 36%

$$\frac{|D_n|}{|S_n|} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} \approx 0{,}36787944$$

Funkcje tworzące

Funkcją tworzącą dla ciągu liczbowego $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$

nazywamy szereg potęgowy $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ dla zmiennej zespolonej z.

Przykład

Dla ciągu (1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, 0, ..., 0, ...), w którym $a_i = \binom{8}{i}$

funkcją tworzącą jest $\quad \sum_{i=0}^{\infty} \binom{8}{i} z^i = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} z^i = (1+z)^8$

Przykład

Dla ciągu (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, ...), w którym $a_n = 1$ i $a_i = 0$ dla $i \neq n$

funkcją tworzącą jest $\quad \sum_{i=0}^{\infty} \lfloor i = n \rceil\, z^i = z^n$, bo $a_i = \lfloor i = n \rceil$.

Czyli dla ciągu (0, 0, 0, 0, 1, 0, ..., 0, ...) funkcją tworzącą jest z^4.

Jeżeli funkcja tworząca $A(z)$ jest funkcją analityczną, tzn. szereg potęgowy $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ jest zbieżny w pewnym otoczeniu 0, to łatwo można odtworzyć każdy element ciągu liczbowego (a_i):

$$a_i = \frac{A^{(i)}(0)}{i!} \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots$$

gdzie $A^{(i)}(0)$ jest wartością i-tej pochodnej funkcji $A(z)$ w punkcie $z = 0$. Wtedy ciąg (a_i) jest ciągiem współczynników szeregu Mclaurina dla funkcji $A(z)$.

Przykład

Dla funkcji $A(z) = \dfrac{1}{1-z}$ rozwinięcie w szereg Mclaurina ma postać $\sum_{i=0}^{\infty} z^i$,

ponieważ $A^{(i)}(z) = \dfrac{i!}{(1-z)^{i+1}}$.

To oznacza, że ciąg współczynników $a_i = 1$ dla $i = 0, 1, \ldots$.

Zatem $A(z) = \dfrac{1}{1-z}$ jest funkcją tworzącą dla ciągu $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$

Przykład

Dla ciągu kolejnych potęg liczby zespolonej c: $(c^0, c^1, c^2, \ldots, c^i, \ldots)$

funkcją tworzącą jest $\dfrac{1}{1-c\cdot z}$, bo $\sum_{i=0}^{\infty} c^i \cdot z^i = \sum_{i=0}^{\infty} (c\cdot z)^i = \dfrac{1}{1-c\cdot z}$.

Zatem $A(z) = \dfrac{1}{1-2z}$ jest funkcją tworzącą dla ciągu $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$, Na ciągach możemy wykonywać pewne operacje, którym odpowiadają określone operacje na funkcjach tworzących.

- Jeżeli każdy wyraz ciągu (a_i) o funkcji tworzącej $A(z)$ przemnożymy przez liczbę zespoloną c , to powstanie ciąg $\boldsymbol{(c \cdot a_i)}$, dla którego funkcją tworzącą będzie $\boldsymbol{c \cdot A(z)}$, bo $c \cdot A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (c \cdot a_i) z^i$.

- Jeżeli odpowiadające sobie wyrazy dwóch ciągów: (a_i) o funkcji tworzącej $A(z)$ i (b_i) o funkcji tworzącej $B(z)$, dodamy do siebie, to powstanie ciąg $\boldsymbol{(a_i + b_i)}$, dla którego funkcją tworzącą będzie $\boldsymbol{A(z) + B(z)}$, bo $A(z) + B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) z^i$.

- Jeżeli wyrazy ciągu (a_i) przesuniemy w prawo o m pozycji, to powstanie ciąg $\boldsymbol{(0, ..., 0, a_0, a_1, a_2, ..., a_i, ...)}$, dla którego funkcją tworzącą będzie $\boldsymbol{z^m \cdot A(z)}$, bo $z^m \cdot A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+m} = \sum_{i=m}^{\infty} a_{i-m} z^i$.

Zastosowanie funkcji tworzącej do wyznaczenia wzoru na i-ty wyraz ciągu Fibonacciego

Ciąg (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...) opisywany jest najczęściej zależnością rekurencyjną:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{dla} \quad i = 2, 3, ...$$

z warunkami początkowymi $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$.

Leonardo z Pizy zwany Fibonacci (1170 – 1250)

Zapiszmy zależność rekurencyjną w zwarty sposób uwzględniając od razu warunki początkowe:

$$\boldsymbol{F_i = F_{i-1} + F_{i-2} + \lfloor i = 1 \rceil} \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, 3, \ldots \ (F_i = 0 \text{ dla } i < 0)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
F_{i-1}	0	0	1	1	2	3	5	8	13	21	...
F_{i-2}	0	0	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$\lfloor i = 1 \rceil$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Ciąg (F_i) jest sumą trzech ciągów: przesuniętego o jeden wyraz w prawo ciągu (F_i), przesuniętego o dwa wyrazy w prawo ciągu (F_i) i ciągu $a_i = \lfloor i = 1 \rceil$.

Jeżeli funkcją tworzącą dla ciągu (F_i) jest $\boldsymbol{F(z)}$, to funkcją tworzącą dla pierwszego z tych ciągów jest $\boldsymbol{z \cdot F(z)}$, dla drugiego $\boldsymbol{z^2 \cdot F(z)}$ i dla trzeciego $\boldsymbol{z}$.

Funkcja $F(z)$ musi spełniać zatem równanie $\boldsymbol{F(z) = z^2 \cdot F(z) + z \cdot F(z) + z}$

Otrzymujemy funkcję tworzącą dla ciągu Fibonacciego w postaci:

$$\boxed{F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}}$$

Wielomian $1-z-z^2$ można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$1-z-z^2 = (1-az)\,(1-bz)\,,\ \text{gdzie}\quad a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad \text{i}\quad b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Zatem

$$F(z) = \frac{z}{(1-az)(1-bz)} = \frac{1}{(a-b)(1-az)} - \frac{1}{(a-b)(1-bz)} =$$

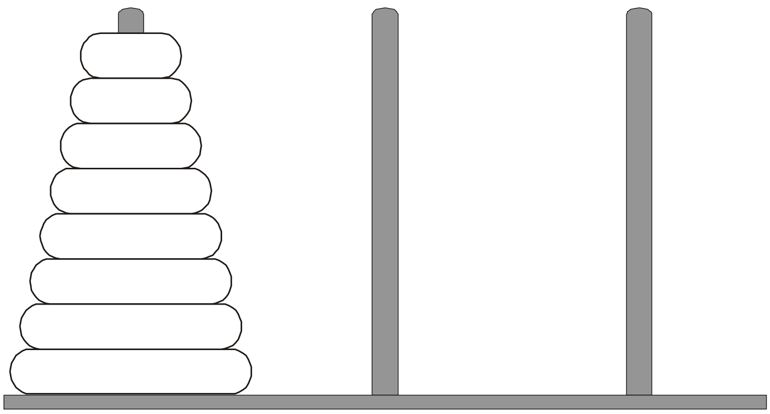
$$= \frac{1}{(a-b)} \cdot \frac{1}{(1-az)} - \frac{1}{(a-b)} \cdot \frac{1}{(1-bz)} =$$

$$= \frac{1}{(a-b)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot z^i - \frac{1}{(a-b)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b^i \cdot z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i - b^i}{a-b} \cdot z^i$$

Otrzymaliśmy wartość i-tego wyrazu ciągu Fibonacciego:

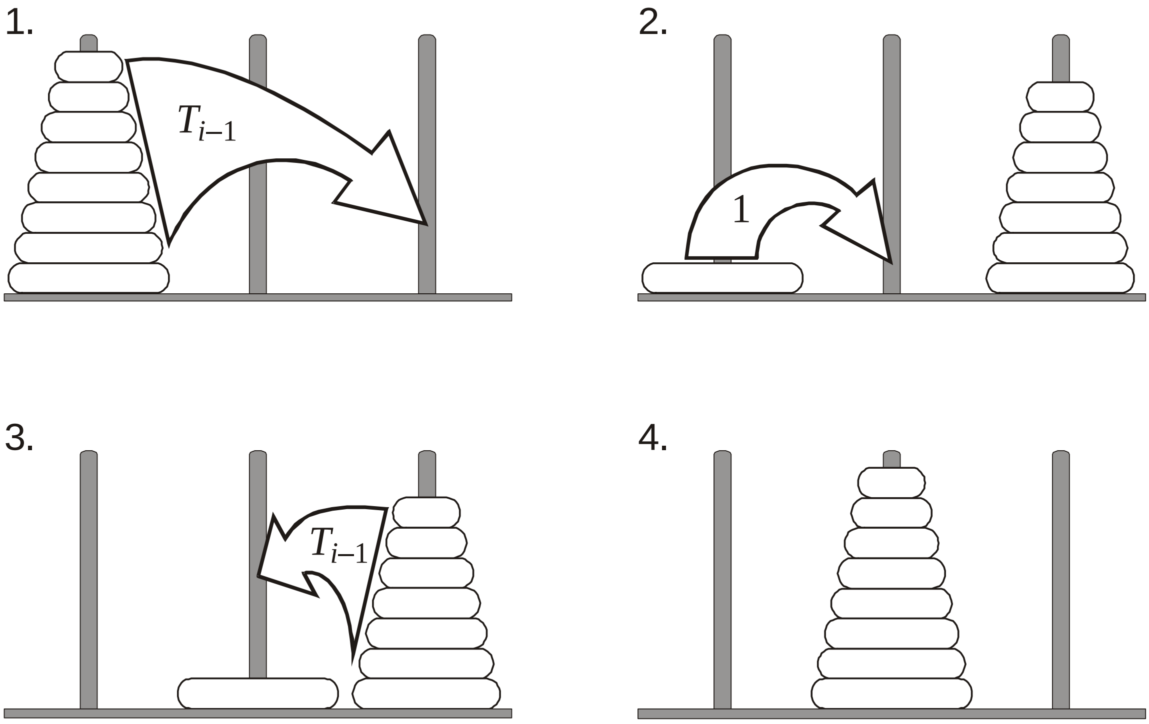
$$\boxed{F_i = \frac{a^i - b^i}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right] \quad \text{dla i = 0, 1, 2, ...}}$$

Zastosowanie funkcji tworzącej do wyznaczenia liczby ruchów potrzebnych do rozwiązania problemu wież Hanoi



Niech $\boldsymbol{T_i}$ oznacza liczbę ruchów wskazywaną przez procedurę rozwiązywania problemu dla $\boldsymbol{i}$ krążków.

Rozwiązanie rekurencyjne problemu polega na wywołaniu najpierw tej samej procedury dla przeniesienia i–1 krążków na kołek pomocniczy, potem na przeniesieniu największego krążka na kołek docelowy i w końcu na przeniesieniu i–1 krążków na kołek docelowy.



Z podanej zasady wynika, że

$$\boldsymbol{T_i = 2\cdot T_{i-1} + 1} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\text{z warunkiem początkowym } \boldsymbol{T_0 = 0}$$

Szukamy wzoru na i-ty wyraz ciągu (T_i) dla $i = 0, 1, 2, \ldots$

Zapiszmy zależność rekurencyjną w zwarty sposób uwzględniając od razu warunek początkowy:

$$\boldsymbol{T_i = 2\cdot T_{i-1} + 1 - \lfloor i = 0 \rceil} \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boldsymbol{T_i = 2\cdot T_{i-1} + 1 - \lfloor i = 0 \rceil} \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Jeżeli funkcją tworzącą dla ciągu (T_i) jest $\boldsymbol{T(z)}$, to funkcją tworzącą dla ciągu przesuniętego o jeden wyraz w prawo i przemnożonego przez 2 jest $\boldsymbol{2z\cdot T(z)}$.

Funkcją tworzącą ciągu o wszystkich wyrazach równych 1 jest $\frac{1}{1-z}$,

a funkcją tworzącą ciągu $a_i = \lfloor i = 0 \rceil$ jest $\boldsymbol{z^0 = 1}$.

Funkcja $T(z)$ musi spełniać zatem równanie $\boldsymbol{T(z) = 2z\cdot T(z) +} \frac{1}{1-z} \boldsymbol{-} 1$

Otrzymujemy funkcję tworzącą dla ciągu (T_i) w postaci:

$$\boxed{T(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}}$$

Można ją przedstawić nieco inaczej:

$$T(z) = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z}$$

Zatem

$$T(z) = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i z^i - \sum_{i=0}^{\infty} z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^i - 1\right) z^i$$

Otrzymaliśmy wartość i-tego wyrazu ciągu (T_i) :

$$\boxed{\boldsymbol{T_i = 2^i - 1} \quad \text{dla i} = 0, 1, 2, \ldots}$$

Wyznaczony został ciąg

(0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, ...)