

### Programowanie liniowe - przykład.

Pewna firma produkuje 2 rodzaje wyrobów: W1 i W2. Zyski jednostkowe (podane w tysiącach złotych na 30 sztuk) z produkcji wyrobów W1 i W2 wynoszą, odpowiednio, 3 i 4.

Produkcja każdego z wyrobów przebiega w 3 etapach: wytworzenie części, montaż i pakowanie. W szczególności wyprodukowanie jednej jednostki (30 sztuk) wyrobu W1 wymaga 2 godzin na wytworzenie części, 2 godzin na montaż i 2 godzin na pakowanie, natomiast wyprodukowanie jednej jednostki wyrobu W2 wymaga 3 godzin na wytworzenie części, 6 godzin na montaż i 1 godziny na pakowanie.

W horyzoncie planowania (nadchodzącym tygodniu) firma dysponuje 36 godzinami pracy oddziału wytwarzającego części, 42 godzinami pracy oddziału montażu i 24 godzinami oddziału pakującego. Należy opracować plan produkcji wyrobów W1 i W2 zapewniający osiągnięcie maksymalnego całkowitego zysku (przy czym wielkość produkcji nie musi być całkowitą wielokrotnością 30 sztuk wyrobu).

Wyrób	Czas wytwarzania części	Czas montażu	Czas pakowania	Zysk
W1	2	2	2	3
W2	3	6	1	4
Czas dostępny dla poszczególnych etapów produkcji	36	42	24	

#### Model matematyczny:

Zmienne:

$x$  – liczba jednostek wyrobu W1, które należy wyprodukować

$y$  – liczba jednostek wyrobu W2, które należy wyprodukować

Funkcja celu:

$$\max z = 3x + 4y$$

Ograniczenia:

(1)  $2x + 3y \leq 36$

(2)  $2x + 6y \leq 42$

(3)  $2x + y \leq 24$

(4)  $x, y \geq 0$

Jest to ZPL – zadanie programowania liniowego

#### Rozwiązanie

Rysowanie obszaru rozwiązań dopuszczalnych – punkty przecięcia prostych ograniczeń z osiami:

(1)  $2x + 3y = 36$ :  $x = 0 \rightarrow y = 12$ ;  $y = 0 \rightarrow x = 18$

(2)  $2x + 6y = 42$ :  $x = 0 \rightarrow y = 7$ ;  $y = 0 \rightarrow x = 21$

(3)  $2x + y = 24$ :  $x = 0 \rightarrow y = 24$ ;  $y = 0 \rightarrow x = 12$

-----  
Znajdowanie rozwiązania optymalnego – rysowanie prostych stałej wartości funkcji celu, analiza ich nachylenia oraz kierunku wzrostu wartości zysku:

Czy można osiągnąć zysk np. 12?

Czy prosta  $3x+4y = 12$  ma punkty wspólne z obszarem rozw. dopuszczalnych?

Czy można osiągnąć zysk np. 24?

Czy prosta  $3x+4y = 24$  ma punkty wspólne z obszarem rozw. dopuszczalnych?

Czy można osiągnąć zysk np. 36?

Czy prosta  $3x+4y = 36$  ma punkty wspólne z obszarem rozw. dopuszczalnych?

Z analizy nachylenia prostej stałej wartości funkcji celu i kierunku wzrostu zysku wynika, że rozwiązaniem optymalnym jest punkt B.

Obliczanie współrzędnych punktu B:

$$(2) \quad 2x + 6y = 42$$

$$(3) \quad 2x + y = 24$$

$$5y = 18$$

$$y = 3.6$$

$$x = (24 - 3.6)/2 = 10.2$$

$$B(10.2, 3.6) \quad z(B) = 3 \cdot 10.2 + 4 \cdot 3.6 = 45$$

Odp. Rozwiązanie optymalne: należy produkować 10.2 jednostki wyrobu W1 i 3.6 jednostki wyrobu W2, co daje zysk równy 45.

**Jak zmieni się rozwiązanie optymalne, gdy zysk jednostkowy z produkcji wyrobu W2 wzrośnie do 12.**

$$\max \quad z' = 3x + 12y$$

$$3x + 12y = 12$$

$$3x + 12y = 36$$

Na podstawie analizy graficznej nachylenia prostej dla funkcji celu mamy dwóch kandydatów:

C i B

Sprawdzamy wartość funkcji celu w B i C

$$z'(B) = 3 \cdot 10.2 + 12 \cdot 3.6 = 73.8$$

$$C(0, 7) \quad z'(C) = 3 \cdot 0 + 12 \cdot 7 = 84$$

Odp. Rozwiązaniem optymalnym w tym przypadku jest punkt C(0,7), tzn. nie produkujemy wyrobu W1, produkujemy tylko W2 w ilości 7 jednostek. Zysk wynosi 84.

Obserwacja: Rozwiązanie optymalne ZPL znajduje się w którymś z punktów wierzchołkowych obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

-----  
W jakim przedziale zysku jednostkowego z produkcji wyrobu W2, punkt B jest rozwiązaniem optymalnym.

Oznaczmy zysk jednostkowy z produkcji wyrobu w2 przez e.

e = 4, rozw. opt. : B

e = 12 roz. Opt.: C

e = 8 : B

e = 10: C

e = 9: C

e = 8.5: B

e = 8.9: B

-----  
Sprawdzić, jaki przyrost zysku otrzymamy po dodaniu 1 godziny do prawych stron ograniczeń.

Po dodaniu 1 godziny w ogr1 -> zysk = 45

Po dodaniu 1 godziny w ogr2 -> zysk = 45.5

Po dodaniu 1 godziny w ogr3 -> zysk = 46

Jak zmieni się rozw. opt i obszar rozwiązań dopuszczalnych, gdy dodamy dodatkowo 50 godzin dla pakowania

Ogr3:  $2x + y \leq 74$