SWD - Wskazówki do zadań z Zestawu zadań 4

μ, σ, p POPULACJA

próba

$H_0: \mu = 1{,}20$

$H_1: \mu \neq 1{,}20$ $<$ $>$

Testowanie hipotez w R w modelach jednopróbkowych

TESTY PARAMETRYCZNE

Testy do weryfikacji hipotezy $H_0: \mu = \mu_0$

1. `t.test(x, mu=, ...)`, gdy
   - $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ nieznane
   - X ma nieznany rozkład, ale próba jest duża $(n > 25)$
2. `z.test(x, mu=, stdev=, ...)`, gdy $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ znane

Testy do weryfikacji hipotezy $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

`sigma.test(x, sigma=, ...)`, gdy $X \sim N(\mu, \sigma)$

Testy do weryfikacji hipotezy $H_0: p = p_0$

1. `binom.test(k, n, p=, ...)` lub
2. `prop.test(k, n, p=, ...)`

Uwagi:

1) funkcje `z.test()` i `sigma.test()` są dostępne w pakiecie *TeachingDemos*
2) poszczególnym parametrom przypisujemy następujące wartości: `mu=` μ_0, `stdev=` σ, `sigma=` σ_0, `p=` p_0, `k=` liczba sukcesów w próbie, `n=` liczebność próby
3) powyższe testy domyślnie dotyczą dwustronnej hipotezy alternatywnej, tj. hipotezy H_1 ze znakiem $\neq$ (odpowiada temu parametr `alternative='two.sided'`). W przypadku hipotez jednostronnych: H_1 ze znakiem $<$ lub H_1 ze znakiem $>$, wartość tego parametru zmienia się, odpowiednio, na `'less'` bądź `'greater'`.

Zadanie 1

Wytrzymałość na ciśnienie wewnętrzene jest ważną charakterystyką jakościową szkła butelek. Pewna rozlewania chce zamówić butelki, których średnia wytrzymałość przewyższa 1.20 N/mm^2. Na podstawie dotychchczasowych doświadczeń wiadomo, że rozkład wytrzymałości jest normalny z odchyleniem standardowym 0.07 N/mm^2. Pobrano próbę losową 20 butelek, które następnie umieszczono w maszynie hydrostatycznej, zwiększając ciśnienie aż do zniszczenia butelki i otrzymano następujące wyniki (w N/mm^2):

1.36, 1.14, 1.27, 1.15, 1.20, 1.29, 1.27, 1.18, 1.23, 1.36, 1.38, 1.37, 1.30, 1.21, 1.33, 1.28, 1.32, 1.29, 1.33, 1.25.

Na poziomie istotności 0.04 stwierdź, czy dana partia butelek spełnia postawione wymagania jakościowe.

X – wytrzymałość butelek N/mm^2, $X \sim N(\mu, \sigma = 0{,}07)$ μ = ?

$H_0: \mu = 1{,}20$ (nie przewyższa, $\sim H_1$)

$H_1: \mu > 1{,}20$ (istotnie) przewyższa

$\Downarrow$

Czy H_0, czy H_1 jest prawdziwa? $\rightarrow$ test statystyczny $\Rightarrow$ z.test()

```
# H0: mu = 1.20 (średnia wytrzymałość nie przekracza 1.20)
# H1: mu > 1.20 (średnia wytrzymałość > 1.20)

# X ~N(mu,sigma=0.07) >>> Model 1 dla mu
x <- c(1.36, 1.14, 1.27, 1.15, 1.20, 1.29, 1.27, 1.18, 1.23, 1.36, 1.38,
       1.37, 1.30, 1.21, 1.33, 1.28, 1.32, 1.29, 1.33, 1.25)

library(TeachingDemos)
z.test(x, mu = 1.20, stdev=0.07, alt='g')

# > z.test(x, mu = 1.20, stdev=0.07, alt='g')
#
#        One Sample z-test
#
# data:  x
# z = 4.8235, n = 20.000000, Std. Dev. = 0.070000, Std. Dev. of the sample mean
# 0.015652, p-value = 7.052e-07
# alternative hypothesis: true mean is greater than 1.2
# 95 percent confidence interval:
#  1.249754      Inf
# sample estimates:
# mean of x
#    1.2755
```

σ

$= 7{,}052 \cdot 10^{-7} \approx 0 < \alpha = 0{,}04$ poziom istotności

$p\text{-value} < \alpha \Rightarrow H_1$

$p\text{-value} \geq \alpha \Rightarrow H_0$

Zatem odrzucamy H_0 i przyjmujemy H_1, czyli możemy stwierdzić, że średnia wytrzymałość wszystkich butelek przekracza 1,20 N/mm^2.

$(1-p\text{-value}) \cdot 100\%$ pewności

Zadanie 2

Zmienna *weight* znajdująca się w ramce danych *chickwts* opisuje wagę kurczaków, natomiast zmienna *feed* rodzaj użtej paszy. Czy na poziomie istotności 0.05 można wnioskować, że średnia waga kurczaków karmionych paszą *soybean* jest większa niż 260? Czy na tym samym poziomie istotności można przyjąć, że odchylenie standardowe wagi tych kurczaków nie różni się 50?

X – waga kurczaków karmionych paszą soybean, $X \sim ?$ $EX = \mu = ?$

$\sqrt{VarX} = \sigma = ?$

$\boxed{\begin{aligned} H_0 &: \mu = 260 \\ H_1 &: \mu > 260 \end{aligned}}$

$\Downarrow$

jaki test?

czy $n > 25$

$\boxed{\begin{aligned} H_0 &: \sigma = 50 \\ H_1 &: \sigma \neq 50 \end{aligned}}$

$\Downarrow$

jaki test?

```r
data(chickwts)
x <- chickwts$weight[chickwts$feed=='soybean']

# H0: mu = 260 (średnia waga nie przekracza 260)
# H1: mu > 260 (średnia waga > 260)

# Jaki test do tej hipotezy dla średniej?
(n <- length(x)) # n=14 - mała próba

# czyli Model 3 dla mu nie jest odpowiedni

# Czy rozkład wagi jest normalny?
# test Shapiro-Wilka
# H0: X~normalny
# H1: X nie ma rozkładu normalnego

shapiro.test(x)          5%          H0
# p-value = 0.5064 > alpha, zatem X ma rozkład normalny      => t.test()


# czy znamy sigmę? NIE >>> Model 2 dla mu
t.test(x, mu=260, alt='g')

# p-value = 0.8174 > alpha =5%
# zatem na poziomie istotności 0.05 nie mamy podstaw do stwierdzenia,
# że średnia waga tych kurczaków przekracza 260   ≡ średnia waga kurczaków nie przekracza 260


# H0: sigma = 50
# H1: sigma != 50

sigma.test(x, sigma=50)

# p-value = 0.5857 > alpha = 5%
# zatem na poziomie istotności 0.05 nie mamy podstaw do stwierdzenia,
# że odchylenie standardowe wagi takich kurczaków różni się istotnie od 50.
```

≡ odch. std. nie różni się istotnie od 50.

Testowanie hipotez w R w modelach dwupróbkowych

Populacja 1 ?⟺ populacja 2
μ_1, μ_2; σ_1, σ_2; p_1, p_2

Testy do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ($>$, $<$)

`t.test(x, y, ...)`, gdy

- próby są niezależne, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane, ale $\sigma_1 = \sigma_2$, wtedy `var.equal=TRUE`
- próby są niezależne, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane
- próby są niezależne, $X \sim ??, Y \sim ??$, ale liczności prób n_1, n_2 duże $n_1 > 25$, $n_2 > 25$
- próby są zależne, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, wtedy `paired=TRUE`

Testy do weryfikacji hipotezy $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

`var.test(x, y)`, gdy $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Testy do weryfikacji hipotezy $H_0 : p_1 = p_2$

`prop.test(c(k1, k2), c(n1, n2), ...)`

Zadanie 10

W stopie metalicznym pewnego typu zastosowano dwa różne pierwiastki utwardzające. Wyniki pomiarów twardości przeprowadzonych później na próbkach tego stopu utwardzanych obiema metodami wyglądają następująco:

Metoda I	145	150	153	148	141	152	146	154	139	148	
Metoda II	152	150	147	155	140	146	158	152	151	143	153

Przyjmuje się, że twardość ma rozkład normalny oraz że odchylenia standardowe σ_1, σ_2 dla obu metod są równe. Czy na podstawie przeprowadzonych pomiarów można stwierdzić, że średnia twardość stopu utwardzanego drugą metodą (μ_2) przewyższa średnią twardość stopu utwardzanego pierwszą metodą? (μ_1)

X – twardość stopu utwardzanego I metodą, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$

Y – ― " ― II metodą, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

$\sigma_1 = \sigma_2$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ → t.test( )

```
x <- c(145, 150, 153, 148, 141, 152, 146, 154, 139, 148) # twardość dla metody
y <- c(152, 150, 147, 155, 140, 146, 158, 152, 151, 143, 153) # dla metody II


# H0: mu1 = mu2
# H1: mu1 < mu2

t.test(x, y, alternative = 'less', var.equal = TRUE)

# p-value = 0.1779 > alpha
# zatem na poziomie istotności 0.05 nie mamy podstaw do odrzucenia H0
# i stwierdzamy, że twardość stopu utwardzanego I metodą nie przewyższa
# twardości stopu utwardzanego II metodą.
```

$\sigma_1 = \sigma_2$

$= 5\%$

Zadanie 7

Próba 250 przedmiotów z partii A zawiera 10 wadliwych przedmiotów, a próba 300 przedmiotów z partii B zawiera 18 wadliwych. Na poziomie istotności $\alpha = 0.02$ oceń, czy jakość tych partii różni się istotnie?

$X \sim Beon(p_1)$

$? = p_1 = P(X=1)$ wadliwy

$Y \sim Beon(p_2)$

$? = p_2 = P(Y=1)$

czy odsetki wadliwych elementów w populacjach różnią się istotnie?

$H_0: p_1 = p_2$

$H_1: p_1 \neq p_2$

```
# czy jakosc tych partii rózni sie istotnie?

n1 <- 250; k1 <- 10
n2 <- 300; k2 <- 18

alpha <- 0.02
# p1 - odsetek wadliwych w I partii
# p2 - odsetek wadliwych w II partii

# H0: p1 = p2 (nie)
# H1: p1 != p2 (tak)

prop.test(c(k1,k2), c(n1,n2))
# p-value = 0.3856 > 0.02 >>> pozostajemy przy H0
# odp. jakosc tych partii nie rózni sie istotnie
```

Testowanie zgodności

H_0: X ma rozkład......

H_1: X nie ma ......

TESTY NIEPARAMETRYCZNE

Testy zgodności $H_0 : F = F_0$

1. testy normalności, np. test Shapiro-Wilka, w R: `shapiro.test(x)`
2. wykresy normalności, w R: `qqnorm(x); qqline(x)`
3. test zgodności chi-kwadrat, gdy $n \geq 100$, w R: `chisq.test()`
4. test Kołmogorowa, gdy F - ciągłe, w R: `ks.test()`

Testy zgodności $H_0 : F_1 = \ldots = F_k$

1. test Kołmogorowa-Smirnowa, gdy $k = 2$, F_1, F_2 - ciągłe, próby niezależne, w R: `ks.test(x, y)`
2. test Kruskala-Wallisa, gdy $k \geq 2$, w R: `kruskal.test()`

Zadanie 13

Bin(3;0,5)

W celu zbadania, czy program generujący liczby losowe z rozkładu dwumianowego o parametrach 3 i 0.5 działa prawidłowo, wygenerowano 100 liczb i otrzymano: 12 zer, 37 jedynek, 38 dwójek, 13 trójek. Zweryfikuj odpowiednią hipotezę na poziomie istotnosci 0.05.

$X \sim Bin(3, 0.5)$, $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

```
# H0: X~Bin(3, 0.5)
# H1: ~H0

liczby <- c(12, 37, 38, 13)
pstwa <- dbinom(0:3, 3,0.5)
# P(x=0)=dbinom(0, 3,0.5) =0.125
# P(X=1)=dbinom(1, 3,0.5) =0.375
# P(x=2)=dbinom(2, 3,0.5) =0.375
# P(X=3)=dbinom(3, 3,0.5) =0.125

chisq.test(liczby, p=pstwa)
# p-value = 0.9968 > 0.05 >>>> H0, czyli program działa poprawnie
```

$\Rightarrow$ chisq.test(), bo $n \geq 100$

Zadanie 17

Na podstawie danych dotyczących parametrów kilku wybranych marek samochodów (plik *samochody.csv*), zweryfikuj hipotezę o jednakowym rozkładzie zużycia paliwa przez samochody produkowane w USA i w Japonii (wykorzystaj zmienne *mpg* i *producent*). Przyjmij poziom istotności $\alpha = 0.05$.

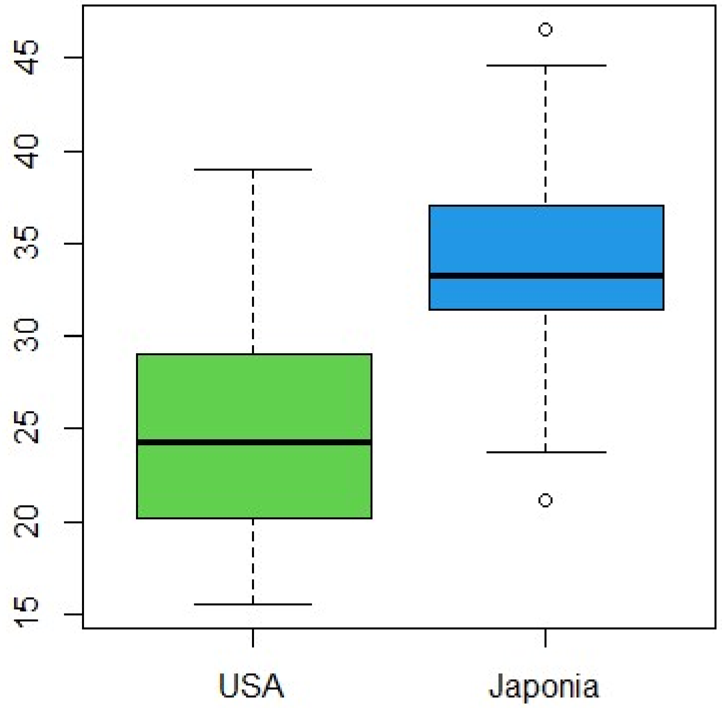
$X \sim$ zużycie paliwa aut z USA
$Y \sim$ —"— z Japonii

H_0: X i Y mają takie same rozkłady $(F_1 = F_2)$

H_0: $F_1 \neq F_2$

```
# X - zużycie paliwa aut z USA (w mpg)
# Y - zużycie paliwa aut z Japonii (w mpg)

# H0: rozklady X i Y są jednakowe (zgodne)
# H1: rozklady X i Y nie są jednakowe (nie są zgodne)

x <- auta$mpg[auta$producent==1] # mpg dla aut z USA
y <- auta$mpg[auta$producent==3] # mpg dla aut z Japonii

# I sposób (z testu Kołmogorowa-Smirnowa)
ks.test(x,y)
# p-value = 2.229e-09 < alpha, odrzucamy H0 i przyjmujemy H1

# II sposób (z testu Kruskala-Wallisa)
# dla kruskal.test inaczej podajemy dane wejściowe
z <- c(x,y) # badana cecha
g <- c(rep(1, length(x)), rep(2, length(y))) # nr próby
kruskal.test(z,g)

# p-value = 3.491e-10 < alpha, odrzucamy H0 i przyjmujemy H1

boxplot(x,y, names = c('USA', 'Japonia'), col=3:4)
```

z	g
x	1 ... 1
y	2 ... 2



* (nie będzie na Kol 1 i na Kol 2)

Nieparametryczne testy w przypadku testowania hipotez o średnich

Nieparametryczne testy dla $H_0 : \mu = \mu_0$

(a) test znaków, gdy X ma rozkład ciągły - zaimplementowany jest w różnych pakietach, np. BSDA, funkcja `SIGN.test()`, można też napisać własną funkcję dla tego testu :)

(b) test rangowanych znaków, gdy X ma rozkład ciągły i symetryczny, w R: `wilcox.test(x, mu=, ...)`

Nieparametryczne testy dla $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

(a) test Manna-Whitneya-Wilcoxona (test Wilcoxona), gdy przynajmniej jedna z cech nie ma rozkładu normalnego i próby są niezależne, w R: `wilcox.test(x,y)`

(b) test rangowanych znaków, gdy przynajmniej jedna z cech nie ma rozkładu normalnego i próby są zależne, w R: `wilcox.test(x,y,paired=TRUE)`

Zadanie 18

Badano rozciągliwość nowego stopu i otrzymano następujące wyniki: 122.66, 119.97, 119.36, 120.19, 120.02, 121.14, 119.33, 119.13, 121.35, 119.48, 119.78, 123.95, 119.51, 125.96, 121.32. Spodziewana wg eksperta rozciągliwość tego stopu wynosi 120. Czy otrzymane wyniki potwierdzają te oczekiwania? Przyjmij poziom istotności 0.05.

```r
x <- c(122.66, 119.97, 119.36, 120.19, 120.02, 121.14,
       119.33, 119.13, 121.35, 119.48, 119.78, 123.95, 119.51, 125.96, 121.32)

# X - rozciągliwość stopu, X~?

# H0: mu = 120
# H1: mu != 120

# jaki test?
# 1) czy X~N?

# test Shapiro-Wilka
# H0: X~normalny
# H1: X nie ma rozkładu normalnego

shapiro.test(x)
# p-value = 0.004794 < alpha, zatem odrzucamy H0, czyli X nie ma rozkładu N

# 2) a czy próba ma n>25?
length(x) # n=15 < 25


# zatem nie możemy zastosować t.test, trzeba wybrać test nieparametryczny

# Czy X ma rozkład symetryczny? Nie, bo skośność powyżej 1.

# install.packages('e1071')
library(e1071)
skewness(x) # 1.28911 > 1, czyli nie jest symetryczny

# Zatem nie możemy zastosować testu rangowanych znaków i wybieramy test znaków.

library(BSDA)
SIGN.test(x, md=120)

# p-value = 1 > alpha,
# zatem brak podstaw do odrzucenia H0
```

Testowanie niezależności i jednorodności

Testy niezależności $H_0 : X$ i Y są niezależne

(a) test niezależności chi-kwadrat `chisq.test()` dla dużych prób

(b) test Fishera `fisher.test()` dla małych prób

Test jednorodności dla $H_0 : p_1 = \ldots = p_k, k \geq 2$

test jednorodności chi-kwadrat, w R: `prop.test()`

Zadanie 22

Badano istnienie związku między ciśnieniem krwi a nadwagą. W poniższej tabeli zebrano dane na temat losowo wybranej grupy osób. Czy na podstawie tych danych można stwierdzić istnienie takiej zależności? Przyjmij poziom istotności 0.05.

	nadciśnienie	ciśnienie OK
nadwaga	57	18
brak nadwagi	24	91

```
# X - występowanie nadwagi
# Y - występowanie nadciśnienia

# H0: brak zależności między X i Y
# H1: jest zależność między X i Y

x <- matrix(c(57, 18, 24, 91), ncol=2, byrow=TRUE)
rownames(x) <- c('nadwaga', 'brak nadwagi')
colnames(x) <- c('nadciśnienie', 'ciśnienie ok')

# > x
#              nadciśnienie ciśnienie ok
# nadwaga                57           18
# brak nadwagi           24           91

chisq.test(x)

# p-value = 1.828e-13 = 1.828*10^{-13} < alpha
# zatem odrzucamy H0 i przyjmujemy H1, czyli możemy
# stwierdzić, że jest zależność pomiędzy występowaniem
# nadwagi i nadciśnienia.
```

Zadanie 23

Badano liczby transakcji wsród odsłon aukcji w trzech różnych wersjach. Otrzymano następujące wyniki.

Wersja aukcji	Liczba odsłon	Liczba transakcji
I	100	15
II	120	12
III	115	17

Czy na podstawie tych danych można wnioskować, że wskaźniki konwersji dla tych aukcji są istotnie różne? Przyjmij poziom istotności 0.05.

```
# pi - wskaźnik konwersji na i-tej aukcji, i=1,2,3

# czy wskaźniki konwersji dla tych aukcji są istotnie różne?

# H0: p1 = p2 = p3
# H1: nie wszystkie pi są sobie równe

# Sprawdzamy czy odsetki w 3 populacjach się różnią? >>> test jednorodności
k1 <- 15; k2 <- 12; k3 <- 17
n1 <- 100; n2 <- 120; n3 <- 115
prop.test(c(k1,k2,k3), c(n1,n2,n3))

# p-value = 0.4466 > 0.05    => Ho
# zatem na poziomie istotności 0.05 nie mamy podstaw do stwierdzenia,
# że wskaźniki konwersji różnią się istotnie
```