

**Zadanie 1.** Który z ciągów  $(1, 1, 2, 1), (1, 1, -2, 2), (1, 0, 0, 1)$  jest rozwiązaniem układu równań?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

*Odp. wyłącznie trzeci.*

**Zadanie 2.** Znajdź wszystkie  $t \in \mathbb{R}$  takie, że  $(-1, t^2, t, -3)$  jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

*Odp.  $t = -1$ .*

**Zadanie 3.** Podaj rozwiązania ogólne poniższych układów równań.

i)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}$

ii)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

iii)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 1 \end{cases}$

iv)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$

v)  $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - 5x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

*Odp. i)  $x_1 = 8, x_2 = -3$ , ii)  $x_1 = -5x_3 - 2x_4, x_2 = 3x_3 + x_4, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$  iii) sprzeczny iv)  $x_1 = -2x_2 - 2, x_3 = 1, x_2 \in \mathbb{R}$ , v)  $x_4 = 2x_1 + x_2 - 3, x_3 = 0, x_5 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*

**Zadanie 4.** Dla jakiego parametru  $t \in \mathbb{R}$  poniższy układ jest niesprzeczny?

i)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 = t \end{cases}$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 = t \end{cases}$$

*Odp. i)  $t = 4$ , ii) sprzeczny dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$*

**Zadanie 5.** Oblicz  $\text{Arg}(1+i)$ ,  $\text{Arg}(1-i)$ ,  $\text{Arg}(\sqrt{3}+i)$ . *Odp.  $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ .*

**Zadanie 6.** Oblicz  $|3+4i|$ ,  $\overline{(1-i)^2}$ ,  $\text{Re}((2+3i)(3-2i))$ ,  $\text{Im}((2-i)^2+i)$ .  
*Odp. 5,  $2i$ , 12,  $-3$ .*

**Zadanie 7.** Oblicz  $z \cdot w$ ,  $|z \cdot w|$ ,  $\text{Re}(z \cdot w)$ ,  $\text{Im}(z \cdot w)$ ,  $\text{Arg}(z \cdot w^2)$ , jeśli  $z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ ,  $w = 3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ .  
*Odp.  $-3\sqrt{3}+3i$ , 6,  $-3\sqrt{3}$ , 3,  $\frac{3\pi}{2}$ .*

**Zadanie 8.** Narysuj na płaszczyźnie zespolonej liczby  $z \in \mathbb{C}$  spełniające warunki:

- i)  $\text{Re}(zi) = 2$ ,
- ii)  $|z-i| = 1$ ,
- iii)  $\overline{z+i} = z+i$ ,
- iv)  $\text{Arg}(z^2) = 90^\circ$ ,
- v)  $|z-i| = |z-1|$ .

*Odp. i) prosta  $y = -2$ , ii) okrąg o środku w  $(0,1)$  i promieniu 1, iii) prosta  $y = -1$ , iv) prosta  $y = x$  bez  $(0,0)$ , v) prosta  $y = x$ .*

**Zadanie 9.** Przedstaw poniższe liczby w postaci trygonometrycznej:

- i)  $2i$ ,
- ii)  $-2+2i$ ,
- iii)  $\sqrt{12}+2i$ ,
- iv)  $-2+2\sqrt{3}i$ .

*Odp. i)  $2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ , ii)  $2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ , iii)  $4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ , iv)  $4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ .*

**Zadanie 10.** Oblicz pierwiastki kwadratowe z liczb zespolonych

i)  $z = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ),$

ii)  $z = 1 + i.$

Wywnioskuj, że

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Przypomnienie:  $w = \pm \left( \frac{b}{\sqrt{2(|z|-a)}} + i\sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \right).$

*Odp.* i)  $\pm(\sqrt{3} + i)$  ii)  $\pm \left( \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$