

Temat: Ciągłe zmienne losowe.

1. Czas instalacji pewnego programu w godzinach jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^3) & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz stałą k .
 - (b) Oblicz prawdopodobieństwo, że zainstaluje się w czasie nie dłuższym niż pół godziny.
 - (c) Oblicz średni czas instalacji programu.
 - (d) Wyznacz dystrybucję tej zmiennej.
2. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybucji

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ cx^2 + d & \text{dla } 1 \leq x < 4, \\ 1 & \text{dla } x \geq 4. \end{cases}$$

Wyznacz stałe c i d . Wyznacz gęstość $f(x)$.

3. Czas pobierania się pliku w minutach jest opisany zmienną losową X o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x & \text{dla } 0 \leq x < 10 \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geq 10. \end{cases}$$

- (a) Oblicz prawdopodobieństwo pobrania się pliku co najwyżej w 5 minut.
 - (b) Oblicz średni czas pobierania się pliku.
 - (c) Oblicz prawdopodobieństwo, że plik będzie pobierał się dłużej niż 1 minutę, ale krócej niż 4 minuty.
 - (d) Ile co najwyżej minut będzie pobierał się plik z prawdopodobieństwem 0.9?
4. Czas przez jaki maszyna działa zanim ulegnie awarii (czyli odstęp czasu między dwiema kolejnymi awariami) ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 2$ (miesiące). Jakie jest prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy maszyny przez co najmniej 1 miesiąc? Jaki jest średni odstęp czasu między awariami?
5. Czas w miesiącach pomiędzy awariami drukarki ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 0.5$. W przypadku wystąpienia awarii drukarka jest natychmiast naprawiana.
- (a) Określ rozkład liczby awarii drukarki w ciągu miesiąca.
 - (b) Średnio ilu awarii możemy spodziewać się w ciągu miesiąca?
 - (c) Średnio ilu awarii możemy spodziewać się w ciągu roku?
6. Z dotychczasowych obserwacji wynika, że liczba klientów przybywających w ciągu godziny do banku ma rozkład Poissona o średniej 4 (klientów na godzinę).
- (a) Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa czasu pomiędzy momentami przyjscia kolejnych klientów?
 - (b) Jaki jest średni czas oraz odchylenie standardowe czasu pomiędzy momentami przybywania kolejnych klientów?
 - (c) Jeżeli w danej chwili do oddziału banku wszedł klient, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych 30 minut kolejny klient przybędzie do oddziału?
 - (d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu godziny do oddziału banku nie przyjdzie ani jeden klient?
7. Czas bezawaryjnej pracy X pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 5$. Oblicz:
- (a) wartość średnią bezawaryjnego czasu pracy urządzenia,
 - (b) medianę,
 - (c) prawdopodobieństwo, że bezawaryjny czas pracy urządzenia wynosi co najmniej 5 godzin.

8. Niech Z będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Oblicz: (a) $P(Z < 1.25)$, (b) $P(Z \leq 1.25)$, (c) $P(Z > 1.25)$, (d) $P(|Z| < 1.25)$, (e) $P(Z < 6)$, (f) $P(Z > 6)$, (g) Jakiej wartości nie przekracza zmienna Z z prawdopodobieństwem 0.8?
9. Dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym ze średnią $\mu = -3$ oraz odchyleniem standardowym $\sigma^2 = 4$ oblicz: (a) $P(X \leq 2.39)$, (b) $P(X \geq -2.39)$, (c) $P(|X| \geq 2.39)$, (d) $P(|X + 3| \geq 2.39)$, (e) $P(X < 5)$, (f) $P(|X| < 5)$, (g) Jaką wartość przekracza zmienna losowa X z prawdopodobieństwem 0.33?
10. Włoski producent samochodów jest przekonany, że liczba kilometrów, które można przejechać na jednym z jego silników ma rozkład normalny ze średnią 160 tys. km i odchyleniem standardowym 30 tys. km. Jakie jest prawdopodobieństwo, że silnik tego typu wytrzyma przebieg między 150 tys. km a 190 tys. km, zanim trzeba go będzie wymienić?
11. Zakładamy, że wyniki skoku w dal mają rozkład normalny ze średnią 6.8 m i odchyleniem standardowym 0.3 m. Poniżej jakiego wyniku plasuje się 20% najsłabszych rezultatów?
12. Wzrost mieszkańców w pewnym mieście opisany jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej 173 cm i wariancji 100cm^2 .
 - (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba ma nie więcej niż 179cm?
 - (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba ma więcej niż 181 cm?
 - (c) Jaka jest frakcja osób mających wzrost pomiędzy 167 a 180 cm?
 - (d) Wyznacz wartość wzrostu, którego nie przekracza 60% badanej populacji.
13. Stężenie zanieczyszczeń w półprzewodnikach używanych do produkcji mikroprocesorów ma rozkład normalny ze średnią 127 pewnych jednostek i odchyleniu standardowym 22 jednostki. Półprzewodnik może być użyty do produkcji tylko wtedy, gdy stężenie zanieczyszczeń jest mniejsze niż 150 jednostek. Jaka część półprzewodników nadaje się do tego, by ją użyć do produkcji mikroprocesorów?

14. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{dla } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz dystrybucję zmiennej X .
 - (b) Wyznacz wartość oczekiwaną, wariancję, medianę zmiennej X .
15. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{dla } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz dystrybucję zmiennej X .
- (b) Wyznacz kwantyl rzędu 0.25 (pierwszy/dolny kwartył) zmiennej X .

Odpowiedzi:

1a $k = 4/3$, **1b** $31/48$, **1c** 0.4 , **1d** $F(x) = 0$ dla $x \leq 0$, $F(x) = \frac{1}{3}x(4 - x^3)$ dla $0 \leq x < 1$, $F(x) = 1$ dla $x \geq 1$,
2 $c = 0.05$, $d = 0.2$, $f(x) = 0$ dla $x < 0, x \geq 4$, $f(x) = 1/4$ dla $0 \leq x < 1$, $f(x) = 0.1x$ dla $1 \leq x < 4$,
3a 0.75 , **3b** $3\frac{1}{3}\text{min}$, **3c** 0.45 , **3d** $10 - \sqrt{10}$,
4 $P(T \geq 1) = e^{-2} = 0.14$, $ET = 0.5$,
5a rozkład Poissona z $\lambda = 0.5$, **5b** 0.5 , **5c** 6 ,
6a rozkład wykładniczy z $\lambda = 4$, **6b** 0.25 h, 0.25 h, **6c** 0.86 , **6d** 0.018 ,
8a 0.8944 , **8b** 0.8944 , **8c** 0.1056 , **8d** 0.7888 , **8e** 1 , **8f** 0 , **8g** 0.84 ,
9a 0.9722 , **9c** 0.6138 , **9e** 0.9985 , **9g** -1.19 ,
10 0.7226 ,
11 6.55m ,
13 0.8520

hasło do pliku z tablicami dla $N(0, 1)$: tablice