Wykład 4

Definicja 4.1 *Przekształcenie liniowe* $f : V \to W$ *nazywamy izomorfizmem gdy jest różnowartościowe i "na".*

Przestrzenie liniowe V *i* W *nad ciałem* K *nazywamy izomorficznymi gdy istnieje izomorfizm* $f : V \to W$.

Wniosek 4.2 *Przestrzenie liniowe* V *i* W *nad ciałem* K *są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy* $\dim V = \dim W$.

Przykład 4.3 *Przykładami przekształceń liniowych są:*

1) Homotetie: $f_r(\alpha) = r\alpha$.

2) Obrót płaszczyzny R^2 *o kąt* ϕ *wokół zera :*
$f(x, y) = (x \cos\phi - y \sin\phi, x \sin\phi + y \cos\phi)$.

Stwierdzenie 4.4 *Niech* $f : V \to W$ *będzie izomorfizmem.*
Wówczas $f^{-1} : W \to V$ *też jest izomorfizmem.*

Twierdzenie 4.5 *Każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie określone na bazie. To znaczy: jeżeli* $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ *jest bazą* V *zaś* $\{\beta_i\}_{i\in I}$ *jest zbiorem wektorów z przestrzeni* W *to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe* $f : V \to W$ *spełniające warunek* $\forall_{i\in I}\ f(\alpha_i) = \beta_i$.

Twierdzenie 4.6 *Przestrzenie liniowe* V *i* W *nad ciałem* K *są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy* $\dim V = \dim W$.

Wniosek 4.7 *Niech* V *będzie przestrzenią nad ciałem* K. *Wówczas przestrzenie* V *i* K^n *są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy przestrzeń* V *ma bazę* $n-$ *elementową.*

Definicja 4.8 *Niech* $f : V \to W$ *będzie przekształceniem liniowym.*

1) Zbiór $\mathrm{im}\, f = \{f(\alpha)\ ;\ \alpha \in V\}$ *nazywamy obrazem* f.

2) Zbiór $\ker f = \{\alpha \in V\ ;\ f(\alpha) = \theta\}$ *nazywamy jądrem* f.

Twierdzenie 4.9

$\mathrm{im}\, f$ *jest podprzestrzenią* W *zaś* $\ker f$ *jest podprzestrzenią* V.

Twierdzenie 4.10 *Przekształcenie liniowe* f *jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy gdy* $\ker f = \{\theta\}$.

Twierdzenie 4.11 *Niech* $f : V \to W$ *będzie przekształceniem liniowym.*
Wówczas $\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{im}\, f$.

Definicja 4.12

Przekształcenie liniowe $f : V \to W$ *nazywamy monomorfizmem gdy jest różnowartościowe.*

Przekształcenie liniowe $f : V \to W$ *nazywamy epimorfizmem gdy jest "na".*

Przekształcenie liniowe $f : V \to W$ *nazywamy izomorfizmem gdy jest równocześnie monomorfizmem i epimorfizmem, czyli różnowartościowe i "na".*

Przestrzenie liniowe V *i* W *nad ciałem* K *nazywamy izomorficznymi gdy istnieje izomorfizm* $f : V \to W$.

Definicja 4.13 *Niech* A *i* B *będą podprzestrzeniami* V *nad ciałem* K. *Sumą (algebraiczną) przestrzeni* A *i* B *nazywamy zbiór:*

$$A + B = \{\alpha + \beta;\ \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Twierdzenie 4.14 *Niech* A *i* B *będą podprzestrzeniami* V *nad ciałem* K. *Wówczas* $A + B = \operatorname{lin}(A \cup B)$.

Definicja 4.15 *Niech* A *i* B *będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej* V. *Powiemy, że* V *jest sumą prostą podprzestrzeni* A *i* B, *co oznaczamy* $V = A \oplus B$, *jeżeli każdy wektor z* V *można jednoznacznie zapisać w postaci sumy* $\gamma = \alpha + \beta$, *gdzie* $\alpha \in A$ *oraz* $\beta \in B$.

Twierdzenie 4.16 $V = A \oplus B$ *wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki:*

1) $V = A + B$,

2) $A \cap B = \{\theta\}$.

Przykład 4.17 *Niech* $V = A \oplus B$. *Przykładami przekształceń liniowych są:*

1) Symetria względem podprzestrzeni A *wzdłuż podprzestrzeni* B *określona jako:* $S(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$, *gdzie* $\alpha \in A$ *oraz* $\beta \in B$.

2) Rzut na podprzestrzeń A *wzdłuż podprzestrzeni* B *określony jako:* $\pi(\alpha + \beta) = \alpha$, *gdzie* $\alpha \in A$ *oraz* $\beta \in B$.

Twierdzenie 4.18 *Niech* $f : V \to V$ *będzie przekształceniem liniowym przestrzeni nad ciałem* R. *Wówczas:*

1) f *jest symetrią wtedy i tylko wtedy gdy* $f \circ f = id$.

2) f *jest rzutem wtedy i tylko wtedy gdy* $f \circ f = f$.

3) f *jest rzutem wtedy i tylko wtedy gdy* $id - 2f$ *jest symetrią.*

Lemat 4.19 *Niech* V, U *i* W *będą przestrzeniami nad tym samym ciałem* K *zaś* $f : V \to U$ *i* $g : U \to W$ *będą przekształceniami liniowymi. Wówczas przekształcenie* $g \circ f : V \to W$ *też jest liniowe.*

Lemat 4.20 *Niech* V *i* W *będą przestrzeniami nad tym samym ciałem* K *zaś* f *i* g *będą przekształceniami liniowymi z* V *w* W. *Wówczas przekształcenia* $f + g$ *oraz* $r \cdot f$ *też są liniowe.*

Definicja 4.21 *Niech V i W będą przestrzeniami nad tym samym ciałem K. Symbolem $L(V;W)$ oznaczać będziemy przestrzeń wszystkich funkcji liniowych z V w W z naturalnymi działaniami.*

Stwierdzenie 4.22 *Niech*
$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \cdots, e_n = (0, 0, 0, ..., 0, 1)$
będzie bazą standardową przestrzeni R^n. Niech $f : R^n \to R^s$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym warunki:

$$f(e_1) = (a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{s,1}),$$
$$f(e_2) = (a_{1,2}, a_{2,2}, ..., a_{s,2}),$$
$$\vdots$$
$$f(e_n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{s,n}).$$

Wówczas $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n,\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n,\ ...,\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + ... + a_{s,n}x_n)$.

Zapis ten nazywamy wzorem analitycznym przekształcenia f.

Definicja 4.23 *Niech $f : R^n \to R^s$ będzie określone wzorem $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n,\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n,\ ...,\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + ... + a_{s,n}x_n)$. Macierzą f w bazach standardowych nazywamy*

$$M(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}.$$