Wykład 8

Definicja 8.1

1) Wektory $v, w \in E^n$ nazywamy ortogonalnymi lub prostopadłymi gdy $\langle v, w\rangle = 0$. (symbolicznie: $v \perp w \iff \langle v, w\rangle = 0$)

2) Dla zbiorów A, B piszemy $A \perp B$ gdy $v \perp w$ dla wszystkich $v \in A$ i $w \in B$. Gdy $A = \{v\}$, piszemy $v \perp B$ zamiast $A \perp B$.

3) Dla $X \subset E^n$ definiujemy zbiór $X^\perp = \{v \in E^n : v \perp X\}$. Zbiór $X^\perp$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym zbioru X w przestrzeni E^n.

Stwierdzenie 8.2

1) Dla niezerowych wektorów $v, w \in E^n, v \perp w \iff$ kąt między wektorami v, w równa się $\pi/2$.

2) $X^\perp$ jest podprzestrzenią E^n.

Dowód. 1) jest oczywiste.

2) Sprawdzamy, że zbiór $X^\perp$ jest zamknięty ze względu na działania przestrzeni liniowej. Np. sprawdzimy zamkniętość względem dodawania. Załóżmy, że $v, w \in X^\perp$. Wówczas również $v + w \in X^\perp$, bo dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$\langle v + w, x\rangle = \langle v, x\rangle + \langle w, x\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Stwierdzenie 8.3

$W \cap W^\perp = \{\theta\}$.

Twierdzenie 8.4 *Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o macierzy $M = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix}$.*

Wówczas $V = W^\perp$, gdzie $W = \operatorname{lin}\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}^\perp$

Wniosek 8.5 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej E^n. Wówczas $E^n = W \oplus W^\perp$.*

Definicja 8.6 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V.*

1) Rzutem prostopadłym na W nazywamy rzut na W wzdłuż $W^\perp$.

2) Symetrią prostopadłą względem W nazywamy symetrię względem W wzdłuż $W^\perp$.

Definicja 8.7 *1) Mówimy że wektor $v \in \mathbb{R}^n$ jest unormowany (inaczej : jednostkowy), gdy ma długość 1.*

2) Bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów parami ortogonalnych nazywamy bazą ortogonalną.

3) Bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów unormowanych nazywamy bazą ortonormalną.

Przykładem bazy ortonormalnej w E^n jest baza standardowa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Załóżmy, że $v \in \mathbb{R}^n$ jest niezerowy, niech $t = \|v\|^{-1}$. Wówczas wektor tv jest już unormowany. Dlatego, mając bazę ortogonalną przestrzeni E^n łatwo otrzymać bazę ortonormalną, odpowiednio wydłużając lub skracając wektory bazowe.

Twierdzenie 8.8 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $V \subset E^n$. Wówczas zapis w bazie $\mathcal{A}$ dowolnego wektora $\beta \in V$ wygląda następująco:*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \langle \beta, \alpha_i \rangle \alpha_i.$$

Algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $\{E^n \langle \cdot ; \cdot \rangle\}$. Indukcyjnie budujemy bazę ortogonalną:

1^0 $\gamma_1 = \alpha_1$.

2^0 $\gamma_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \alpha_j ; \gamma_i \rangle}{\langle \gamma_i ; \gamma_i \rangle} \gamma_i$.

Twierdzenie 8.9 *Wektory uzyskane metodą Grama - Schmidta są parami prostopadłe. Ponadto dla każdego j równe są przestrzenie*

$$\mathrm{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j\} = \mathrm{lin}\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j\}.$$

Twierdzenie 8.10 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V zaś $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j)$ bazą ortogonalną W. Wówczas rzut prostopadły na W jest określony wzorem: $\pi(\alpha) = \sum_{i=1}^{j} \frac{\langle \alpha ; \gamma_i \rangle}{\langle \gamma_i ; \gamma_i \rangle} \gamma_i$.*

Definicja 8.11

Niech A i B będą niepustymi podzbiorami przestrzeni E^n. Odległością między tymi zbiorami nazywamy liczbę $d(A; B) = inf\{d(a; b) \parallel a \in A, b \in B\}$ będącą kresem dolnym odległości.

Twierdzenie 8.12 *Niech $H = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{E}^n \parallel a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0\}$ będzie podzbiorem przestrzeni euklidesowej zaś $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ punktem. Wówczas odległość między nimi jest równa*

$$d(H; P) = \frac{|\, a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}}.$$

Definicja 8.13

Iloczynem wektorowym w przestrzeni E^3 ze standardową orientacją nazywamy 2 - liniowe przekształcenie φ z E^3 w siebie określone wzorem

$\alpha_1 \times \alpha_2 = (a_1, a_2, , a_3)$,

$$gdzie\ det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix} = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3.$$

Twierdzenie 8.14 *Niech* $\alpha_1, \alpha_2 \in E^n$. *Wówczas:*
a) $\alpha_1 \perp (\alpha_1 \times \alpha_2)$ *i* $\alpha_2 \perp (\alpha_1 \times \alpha_2)$
b) $\|\alpha_1 \times \alpha_2\| = \sqrt{W(\alpha_1, \alpha_2)}$,
c) jeżeli wektory α_1 *i* α_2 *są liniowo niezależne to* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 \times \alpha_2)$ *jest bazą zorientowaną zgodnie ze standardową.*

Twierdzenie 8.15 *Niech* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subset \mathbb{E}^3$.
Wówczas wówczas objętość wielościanu $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *jest równa* $\mu_3(R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = | \langle \alpha_1 \times \alpha_2 \ ; \ \alpha_3 \rangle |$.

Twierdzenie 8.16 *Niech* $l_1 = A + t\alpha,\ t \in \mathbb{R}$ *i* $l_2 = B + t\alpha,\ t \in \mathbb{R}$ *będą równoległymi prostymi w* $\mathbb{E}^3$ *wówczas odległość* $\rho(l_1, l_2) = \frac{|\alpha \times \overrightarrow{AB}|}{|\alpha|}$.

Twierdzenie 8.17 *Niech* $l_1 = A_1 + t\alpha,\ t \in \mathbb{R}$ *i* $l_2 = B + t\beta,\ t \in \mathbb{R}$ *będą nie równoległymi prostymi w* $\mathbb{E}^3$ *wówczas odległość* $\rho(l_1, l_2) = \frac{|\langle \alpha \times \beta ; \overrightarrow{AB} \rangle|}{|\alpha \times \beta|}$.

Definicja 8.18 *Niech* $f : \{V_1 \langle .;. \rangle_1\} \to \{V_2 \langle .;. \rangle_2\}$. *Powiemy, że* f *jest izometrią liniową gdy* f *jest przekształceniem liniowym i zachowuje iloczyn skalarny. To znaczy* $\forall_{\alpha, \beta \in V_1}\ \langle \alpha; \beta \rangle_1 = \langle f(\alpha); f(\beta) \rangle_2$.

Twierdzenie 8.19 *Niech* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *i* $\mathcal{A}$ *będzie bazą ortonormalną* $\mathbb{E}^n$. *Wówczas* f *jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy gdy* $\left(M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right)^T = \left(M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$.

Przykład 8.20 *Macierzą obrotu* $\mathbb{E}^2$ *o kąt* φ *jest* $M = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ *i* $MM^T = I$.

Twierdzenie 8.21 *Niech* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *będzie symetrią. Wówczas* f *jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy gdy gdy jest symetrią prostopadłą.*

Twierdzenie 8.22 *Każda izometria jest złożeniem symetrii prostopadłych.*