Rozwiązanie 1.

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -6 \\ -5 & -11 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 2.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 20, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & -6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = -40, \quad x_4 = \frac{-40}{20} = -2$$

Rozwiązanie 3.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -1, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^8 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 4.

$$\ker \phi\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{im} \phi\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker \phi = \operatorname{lin}((-2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)), \quad \operatorname{im} \phi = \operatorname{lin}((1, 0, -2), (0, 1, 3))$$

Rozwiązanie 5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad w_A(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)\ (x-2)$$

$$V_{(2)}\colon \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V_{(3)}\colon \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{(2)} = \operatorname{lin}((-2, 1)), \quad V_{(3)} = \operatorname{lin}((1, -1))$$

$$\mathcal{A} = ((-2, 1), (1, -1))$$

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$