

441 Computerphysik - Hausaufgabe 5

Dirk Knott, Lars Döpfer

3. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

10 Solitonlösung der Korteweg-De Vries-Gleichung	1
10.1 Darstellung der Lösung für $N=2$	1
10.2 Diskretisierung und Lösung der Differentialgleichung	5
10.2.1 Stabilitätsanalyse	7
10.3 Lösung für $N=3$	9
10.4 Andere Lösungen der KDV-Gleichung	9

10 Solitonlösung der Korteweg-De Vries-Gleichung

In dieser Hausaufgabe beschäftigen wir uns mit der Lösung von partiellen Differentialgleichungen (PDGs) am Beispiel der Korteweg-De Vries-Gleichung. Diese PDG beschreibt die Abweichung vom mittleren Wasserspiegel in einem breiten, aber nicht sehr tiefen Kanal. Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = 6u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t, x) \quad (1)$$

wobei x die Koordinate in Richtung der Kanalachse beschreibt.

Man kennt schon spezielle Lösungen dieser PDG, eine ist z.B.

$$u^{[1]}(t, x) = \frac{-2}{\cosh^2 x - 4t} \quad (2)$$

Diese Funktion beschreibt ein Wellental, das sich unverformt mit der Geschwindigkeit $v = 4$ nach rechts fortpflanzt. Eine solche unverformte Welle nennt man Solitaire Wellenlösungsöder auch Solitone.

Wir betrachten im Folgenden den allgemeinen Anfangszustand

$$u^{[N]}(0, x) = \frac{-N(N+1)}{\cosh^2(x)} \quad (3)$$

Die Lösung mit diesem Anfangszustand führt zu N Solitonen, die sich alle mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten. Die Lösung für $N = 2$ lautet dabei z.B.:

$$u^{[2]}(t, x) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \quad (4)$$

10.1 Darstellung der Lösung für $N=2$

Wir plotten in diesem Aufgabenteil einmal die Lösung der PDG mit $N = 2$. Dafür verwenden wir ein Python-Skript, um die Funktion dreidimensional zu plotten. Diese Plots sieht man in Abbildungen 1, 2 und 3. Aus diesen Plots kann man nun die Geschwindigkeiten der Solitonen schätzen. Für den ersten Soliton, der bei

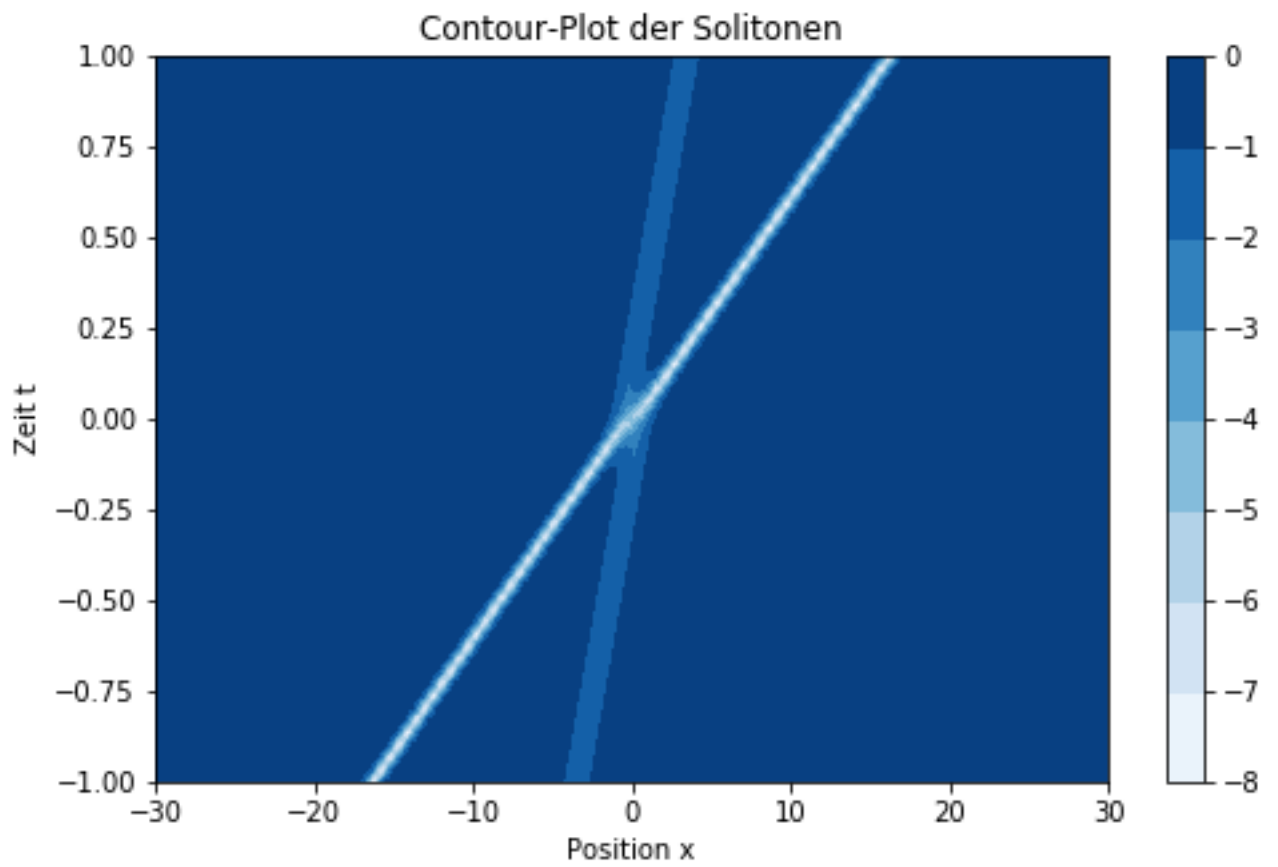


Abbildung 1: Contour-Plot des Verlaufs der Solitonen

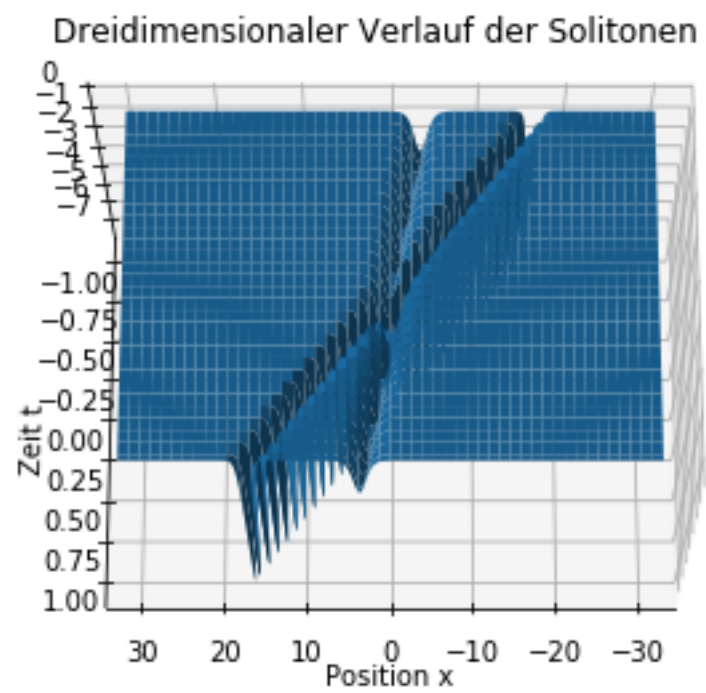


Abbildung 2: Dreidimensionaler Plot der Solitonen

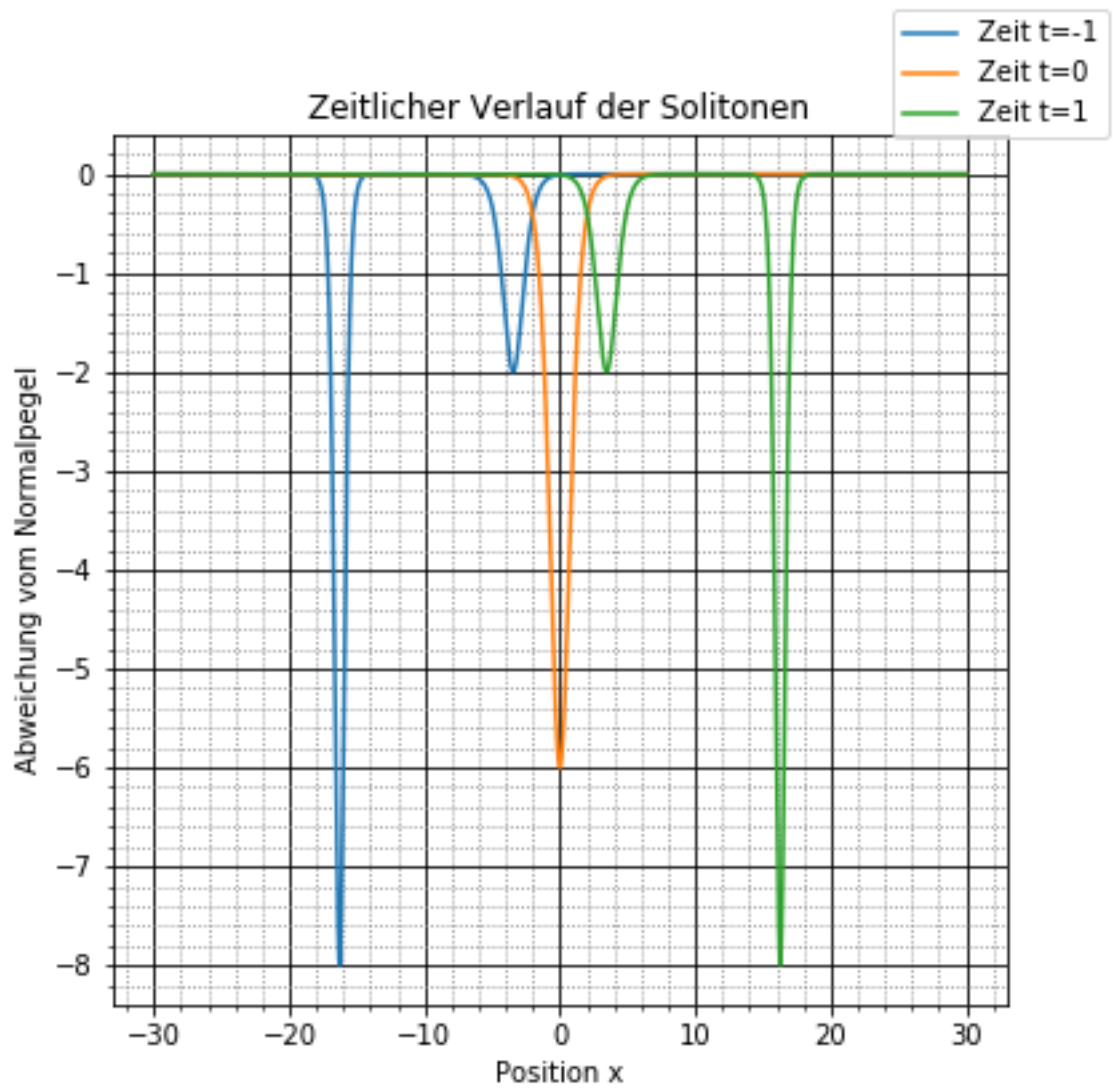


Abbildung 3: Plots der Solitone für verschiedene Zeiten

$t = -1$ bei $x = -16$ den Peak hat, breitet sich damit mit einer Geschwindigkeit von $v_1 \approx 16 \frac{l}{\tau}$ aus mit den charakteristischen Längen- und Zeiteinheiten l und τ . Der andere Soliton, der seinen Peak bei $t = -1$ und $x \approx -3,5$, breitet sich damit mit einer ungefähren Geschwindigkeit von $v_2 \approx 3,5 \frac{l}{\tau}$ aus mit den selben charakteristischen Längen- und Zeiteinheiten.

10.2 Diskretisierung und Lösung der Differentialgleichung

Um die Differentialgleichung 1 zu lösen, diskretisieren wir unser Lösungsgebiet zunächst als Quader, wobei für die Koordinaten x und t jeweils gilt:

$$\begin{aligned} t_n &= n \cdot d \\ x_j &= j \cdot h \end{aligned}$$

Damit können wir auch direkt die Lösungsfunktion $u(t, x)$ diskretisieren:

$$u(t_n, x_j) := u_j^n$$

Jetzt verwenden wir die Differenzenquotienten um die linke und rechte Seite von Gleichung 1 zu diskretisieren. Wir verwenden:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t_n, x_j) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2d} + O(d^2) \quad (5)$$

Für den nicht-linearen Term auf der rechten Seite schreiben wir:

$$u(t_n, x_j) \frac{\partial}{\partial x} u(t_n, x_j) = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (6)$$

Und für die dritte Ortsableitung schreiben wir zuletzt:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t_n, x_j) = \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} + O(h^2) \quad (7)$$

Diese Diskretisierung ermöglicht uns die Verwendung eines Zweischrittverfahrens zur Bestimmung von u^{n+1} falls u^n und u^{n-1} bereits bekannt sind. Als Anfangswerte u^0 verwenden wir die Werte aus Gleichung 3 und die Werte für u^1 bestimmen wir durch folgenden Differenzenquotienten:

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{d} = 6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3} \quad (8)$$

Damit können wir die Zeitentwicklung der Lösung bestimmen. Die Werte auf dem Rand dürfen wir dabei auf 0 setzen, wenn die Entfernung zum Rand groß genug ist. Deshalb wählen wir die Intervalle $x \in (-30; 30)$ und $t \in [0; 1]$. Es ist angegeben, dass die Stabilität des Verfahrens erfordert, dass gilt $d \lesssim \frac{h^3}{2,6}$. Dies werden wir auch numerisch in diesem Aufgabenteil überprüfen.

Zunächst lösen wir die Differentialgleichung für $N=1$ und $N=2$ und vergleichen die Werte mit der analytischen Lösung. Die Lösungen für $t=1$ sieht man in Abbildungen 4 und 5. Man erkennt bei einer rein graphischen Auswertung, dass die analytische Lösung mit der Numerischen Übereinstimmt.

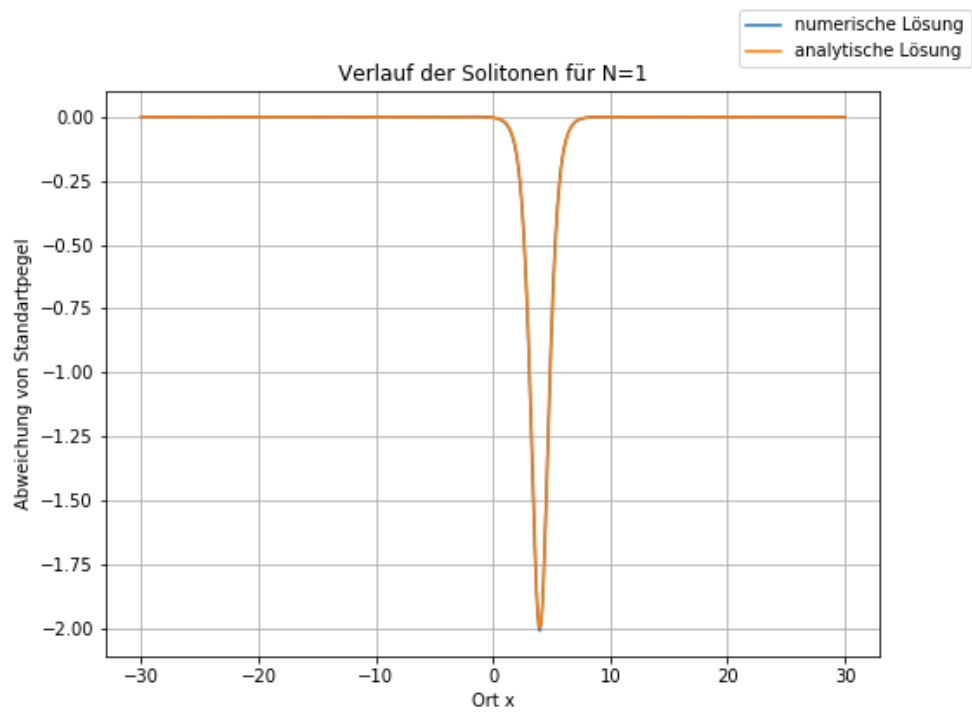


Abbildung 4: Lösung für $N=1$ und $t=1$

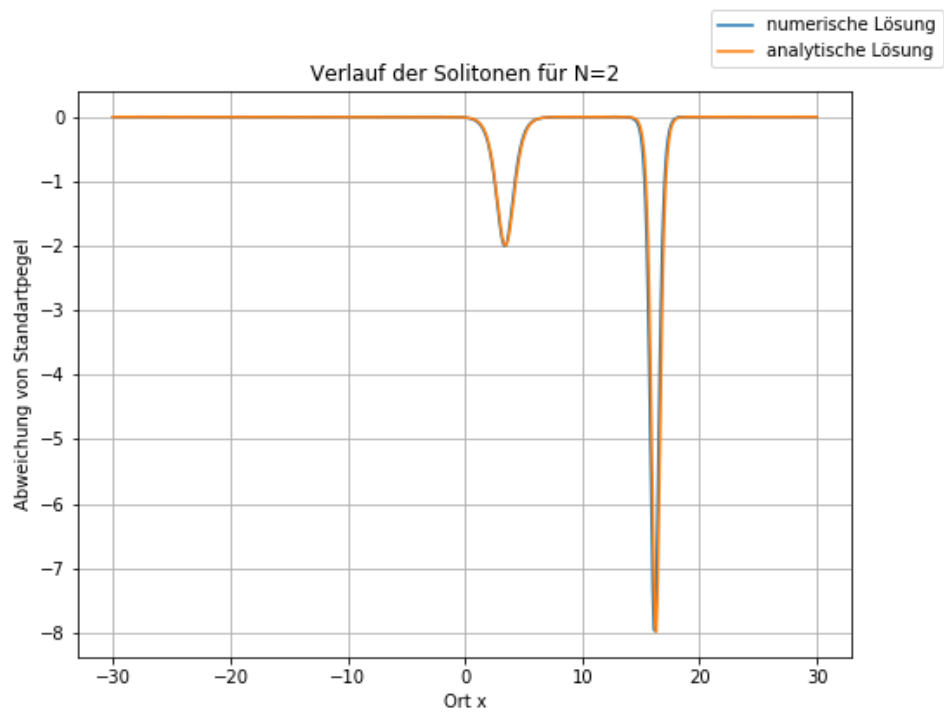


Abbildung 5: Lösung für $N=2$ und $t=1$

10.2.1 Stabilitätsanalyse

Nun möchten wir zeigen in welchen Bereichen das Programm instabil oder auch stabil ist, hierbei gilt folgende Relation

$$d \lesssim \frac{1}{2.6} h^3 \quad (9)$$

Hierbei ergibt sich für die gegebenen Werte

h	d
0,05	$\lesssim 0,000048$
0,1	$\lesssim 0,000385$
0,2	$\lesssim 0,003077$
0,4	$\lesssim 0,024615$

Tabelle 1: Werte für Stabilitätsanalyse

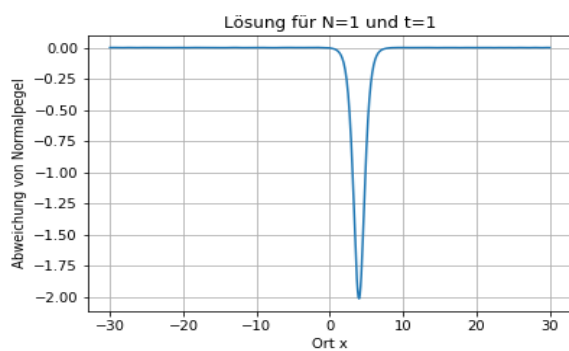


Abbildung 6: $h = 0.05$ $d = 0.000047$

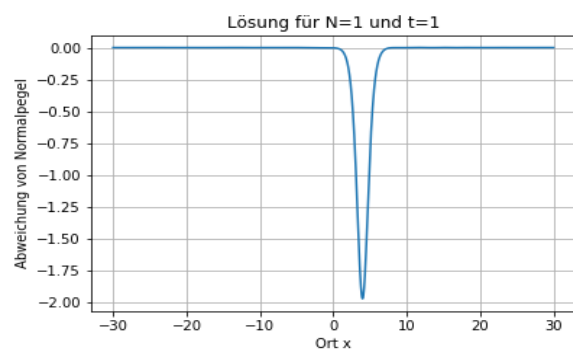


Abbildung 7: $h = 0.05$ $d = 0.000048$

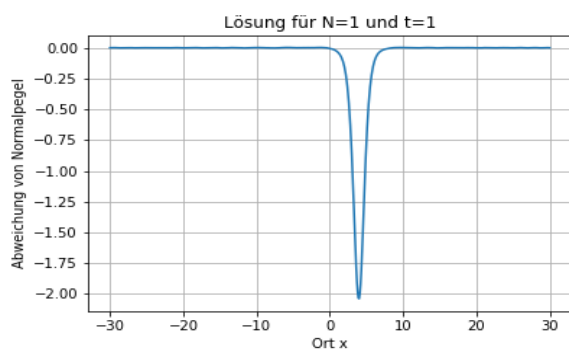


Abbildung 8: $h = 0.1$ $d = 0.00375$

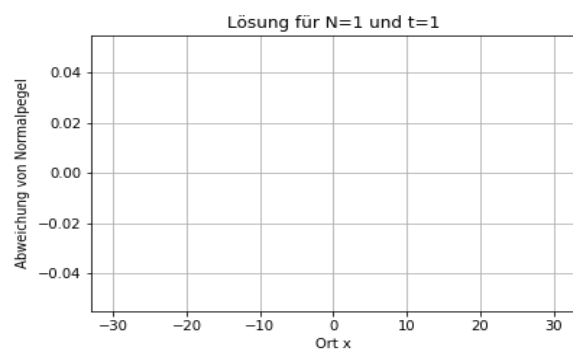


Abbildung 9: $h = 0.1$ $d = 0.00385$

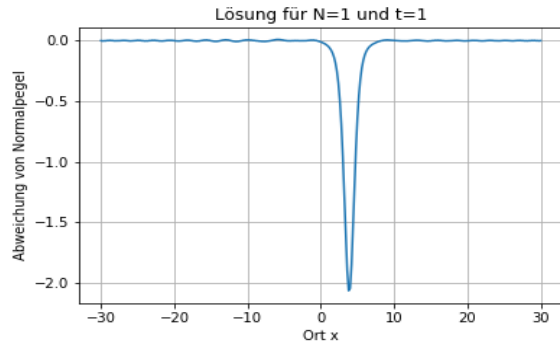


Abbildung 10: $h = 0.2$ $d = 0.003077$

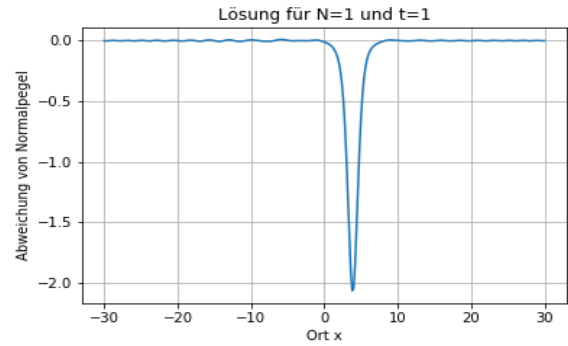


Abbildung 11: $h = 0.2$ $d = 0.003077$

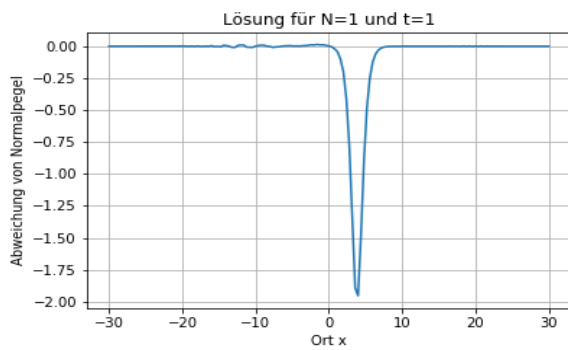


Abbildung 12: $h = 0.4$ $d = 0.001$

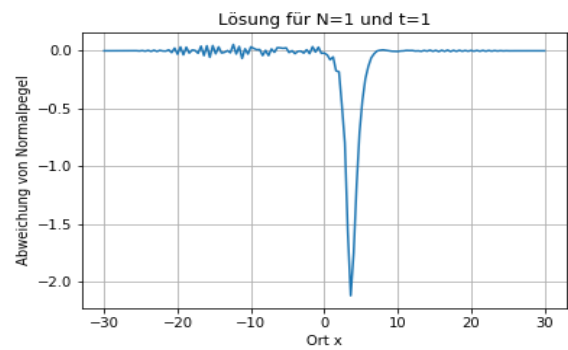


Abbildung 13: $h = 0.4$ $d = 0.020$

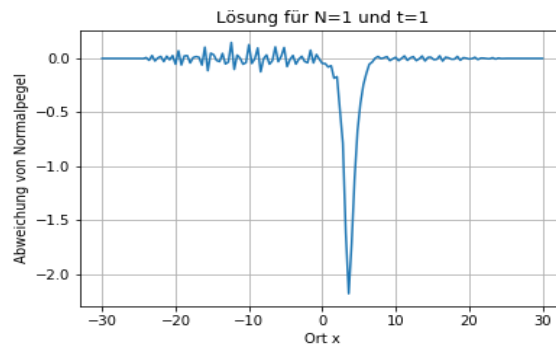


Abbildung 14: $h = 0.4$ $d = 0.025$

Aufgrund der Rationalität der Zahlen und der Genauigkeitsgrenze der Programmierung in C ergibt sich bspw. ein Plot wie in [9]. Jedoch ist hier genau zu erkennen, dass unser Verfahren für die jeweiligen Grenzen die sich aus der gegebenen Relation [9] ergeben stabil ist. Eine Veränderung der Schrittweite scheint nicht viel zu Ändern, wird aber die Grenze angenähert oder erreicht steigen die Fluktuationen sehr stark an, darüber hinaus divergiert das System beim überschreiten der Grenzen. Dies können wir in Abbildung 9 sehen, wo die Werte für $t = 1$ nur noch $\pm \text{nan}$ anzeigen. Dies könnte möglicherweise an undefinierten Termen oder einer Division durch 0 liegen. Bei der Veränderung der Anfangswerte ergibt sich ein äquivalentes Ergebnis, durch die analoge Herangehensweise und der lediglich veränderten Matrix.

10.3 Lösung für $N=3$

Wir lösen die Gleichung 1 nun einmal für $N = 3$. Hierbei können wir die Abweichung der Solitonen vom Normalpegel in der Abbildung 15 sehen. Des weiteren betrachten wir den Contour Verlauf der Solitonen für unsere gegebenen Werte und erhalten ein Ergebnis ersichtlich in 16.

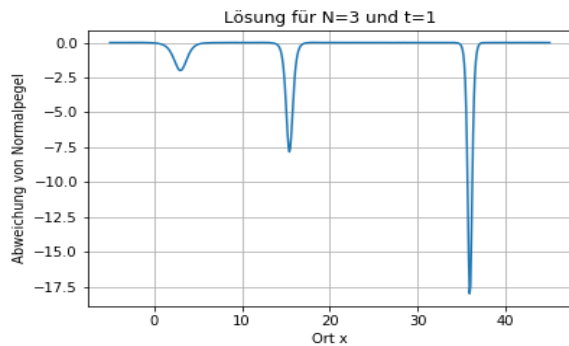


Abbildung 15: Lösung $N=3$ und $t=1$

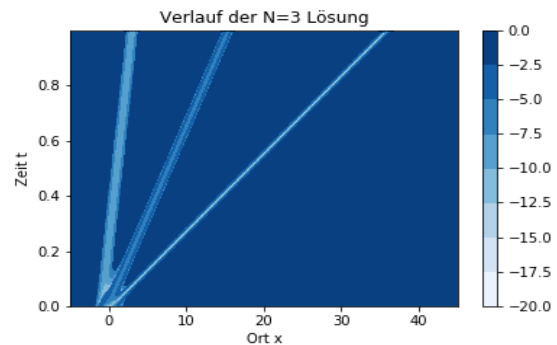


Abbildung 16: Contour-Plot des Verlaufs der Solitonen

10.4 Andere Lösungen der KDV-Gleichung

In diesem Aufgabenteil untersuchen wir Lösungen für nicht-natürliche Zahlen für N . Wir variieren dafür N zwischen 1 und 2 in Schritten von 0,1. Das Ergebnis sieht man in Abbildung 17. Wir sehen, dass sich schon 2 Peaks ausbilden, wenn wir N nur ein wenig über 1 erhöhen. Allerdings verändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Höhe der Peaks in Abhängigkeit von N . Wir sehen zudem, dass der erste und einzige Peak von $N = 1$ in den neuen, zweiten Peak übergeht und sich ein neuer, erster Peak ausbildet. Die Höhe und Geschwindigkeit beider Peaks nimmt mit steigendem N kontinuierlich zu.

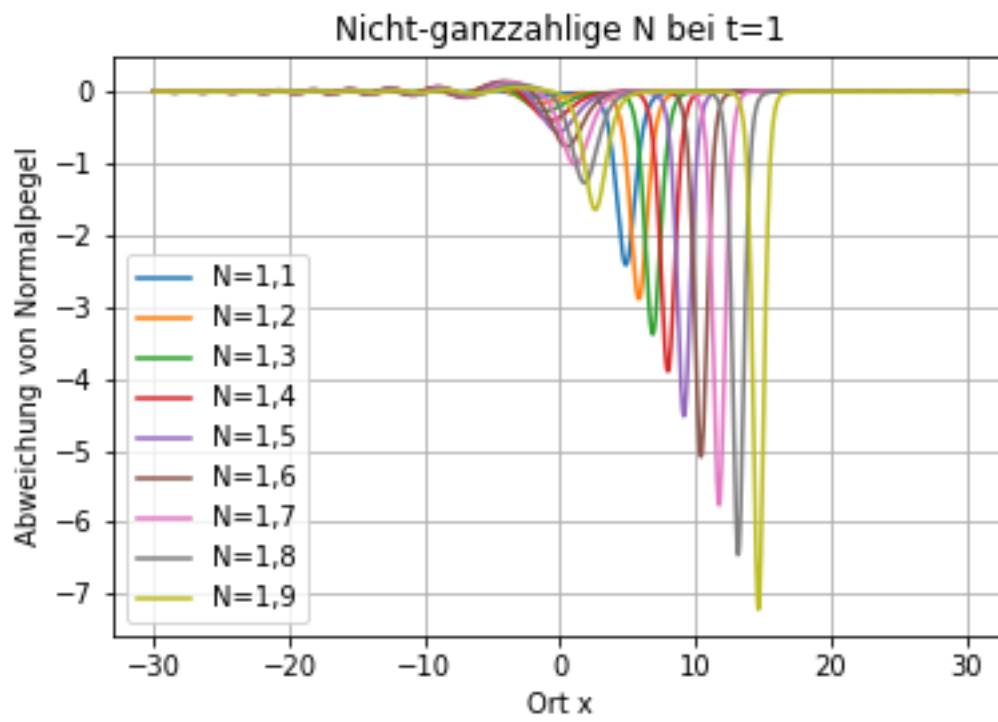


Abbildung 17: Lösung für nicht-natürliche N

Abbildungsverzeichnis

1	Contour-Plot des Verlaufs der Solitonen	2
2	Dreidimensionaler Plot der Solitonen	3
3	Plots der Solitone für verschiedene Zeiten	4
4	Lösung für $N=1$ und $t=1$	6
5	Lösung für $N=2$ und $t=1$	6
6	$h = 0.05$ $d = 0.000047$	7
7	$h = 0.05$ $d = 0.000048$	7
8	$h = 0.1$ $d = 0.00375$	7
9	$h = 0.1$ $d = 0.00385$	7
10	$h = 0.2$ $d = 0.003077$	8
11	$h = 0.2$ $d = 0.003077$	8
12	$h = 0.4$ $d = 0.001$	8
13	$h = 0.4$ $d = 0.020$	8
14	$h = 0.4$ $d = 0.025$	8
15	Lösung $N=3$ und $t=1$	9
16	Contour-Plot des Verlaufs der Solitonen	9
17	Lösung für nicht-natürliche N	10