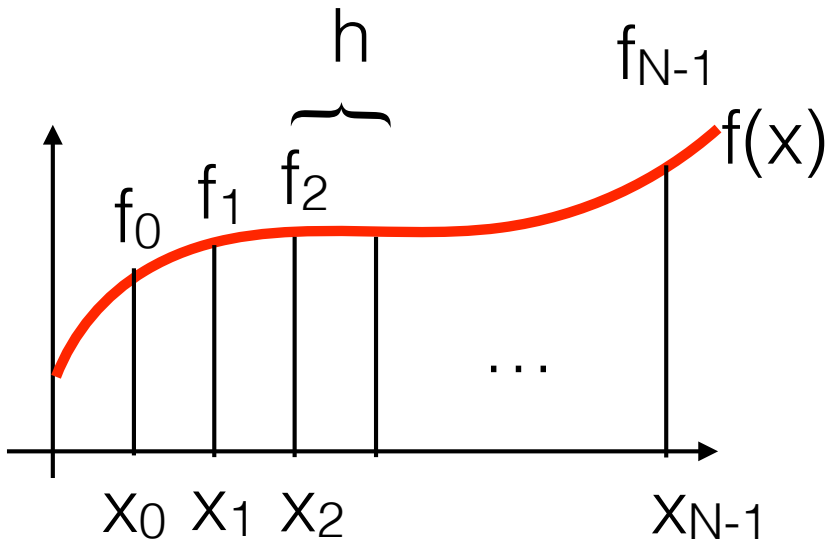
3. Einfache mathematische Operationen

Numerische Ableitung

Numerische Darstellung einer Funktion

glatte Funktionen

→ genügend gute Approximation auf einem Gitter $\{x_i\}$



Wir nehmen hier (und fast im gesamten Verlauf der Vorlesung) an, dass die Gitterpunkte gleichmäßig verteilt sind. Bei genügend kleinem Abstand **h** kann man die Funktion mit wenigen Termen in einer Taylor-Reihe annähern:

$$f_{i+1} = f(x_i + h) = f_i + f'(x_i)\,h + \frac{1}{2} f''(x_i)\,h^2 + \mathcal{O}(h^3) \qquad (1)$$

$$f_{i-1} = f(x_i - h) = f_i - f'(x_i)\,h + \frac{1}{2} f''(x_i)\,h^2 + \mathcal{O}(h^3) \qquad (2)$$

Beide Gleichungen lassen sich nach der Ableitung umstellen

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{1}{2} f''(x_i)\, h + \mathcal{O}(h^2) \tag{3}$$

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{1}{2} f''(x_i)\, h + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

womit die Ableitung für kleine h durch

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

angenähert wird. Noch besser ist aber die beiden Gleichungen zu addieren:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

```
/* Datei: beispiel-3.1.c Datum: 12.4.2016 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>       /* mathematische Funktionen */

int main()
{ double x=1.0,h=0.001,f0,f1,f2,dfa,dfb,dfc;

  f0=sin(x-h);
  f1=sin(x);
  f2=sin(x+h);

  dfa=(f2-f1)/h;
  dfb=(f1-f0)/h;
  dfc=(f2-f0)/(2*h);

  /* gebe Differenzenquotienten (verschiedene Varianten aus), vergleiche mit exakter Ableitung
     wähle Exponentialdarstellung für Ausgabe der Gleitkommazahlen  */

  printf("%15.6e   %15.6e   %15.6e   %15.6e \n",dfa,dfb,dfc,cos(x));

  return 0;
}
```

```
/* Datei: beispiel-3.1.c Datum: 12.4.2016 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>       /* mathematische Funktionen */

int main()
{ double x=1.0,h=0.001,f0,f1,f2,dfa,dfb,dfc;

  f0=sin(x-h);
  f1=sin(x);
  f2=sin(x+h);

  dfa=(f2-f1)/h;
  dfb=(f1-f0)/h;
  dfc=(f2-f0)/(2*h);

  /* gebe Differenzenquotienten (verschiedene Varianten aus), vergleiche mit exakter Ableitung
     wähle Exponentialdarstellung für Ausgabe der Gleitkommazahlen  */

  printf("%15.6e   %15.6e   %15.6e   %15.6e \n",dfa,dfb,dfc,cos(x));

  return 0;
}
```

Deklaration und Belegung der Variablen

```
/* Datei: beispiel-3.1.c Datum: 12.4.2016 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>       /* mathematische Funktionen */

int main()
{ double x=1.0,h=0.001,f0,f1,f2,dfa,dfb,dfc;

  f0=sin(x-h);
  f1=sin(x);
  f2=sin(x+h);

  dfa=(f2-f1)/h;
  dfb=(f1-f0)/h;
  dfc=(f2-f0)/(2*h);

  /* gebe Differenzenquotienten (verschiedene Varianten aus), vergleiche mit exakter Ableitung
     wähle Exponentialdarstellung für Ausgabe der Gleitkommazahlen  */

  printf("%15.6e   %15.6e   %15.6e   %15.6e \n",dfa,dfb,dfc,cos(x));

  return 0;
}
```

Deklaration und Belegung der Variablen

Berechne Ableitung von sin(x) mit drei Methoden

```
/* Datei: beispiel-3.1.c Datum: 12.4.2016 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>       /* mathematische Funktionen */

int main()
{ double x=1.0,h=0.001,f0,f1,f2,dfa,dfb,dfc;

  f0=sin(x-h);
  f1=sin(x);
  f2=sin(x+h);

  dfa=(f2-f1)/h;
  dfb=(f1-f0)/h;
  dfc=(f2-f0)/(2*h);

  /* gebe Differenzenquotienten (verschiedene Varianten aus), vergleiche mit exakter Ableitung
     wähle Exponentialdarstellung für Ausgabe der Gleitkommazahlen  */

  printf("%15.6e   %15.6e   %15.6e   %15.6e \n",dfa,dfb,dfc,cos(x));

  return 0;
}
```

Deklaration und Belegung der Variablen

Berechne Ableitung von sin(x) mit drei Methoden

Ausgabe in Exponentialdarstellung

```
/* Datei: beispiel-3.1.c Datum: 12.4.2016 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>       /* mathematische Funktionen */

int main()
{ double x=1.0,h=0.001,f0,f1,f2,dfa,dfb,dfc;

  f0=sin(x-h);
  f1=sin(x);
  f2=sin(x+h);

  dfa=(f2-f1)/h;
  dfb=(f1-f0)/h;
  dfc=(f2-f0)/(2*h);

  /* gebe Differenzenquotienten (verschiedene Varianten aus), vergleiche mit exakter Ableitung
     wähle Exponentialdarstellung für Ausgabe der Gleitkommazahlen  */

  printf("%15.6e   %15.6e   %15.6e   %15.6e \n",dfa,dfb,dfc,cos(x));

  return 0;
}

/* Ergebnis :   numerische Ableitung von sin(x) mit Methode (a),(b) und (c)

       5.398815e-01        5.407230e-01        5.403022e-01        5.403023e-01

*/
```

Deklaration und Belegung der Variablen

Berechne Ableitung von sin(x) mit drei Methoden

Ausgabe in Exponentialdarstellung

```
/* Datei: beispiel-3.1.c Datum: 12.4.2016 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>       /* mathematische Funktionen */

int main()
{ double x=1.0,h=0.001,f0,f1,f2,dfa,dfb,dfc;

  f0=sin(x-h);
  f1=sin(x);
  f2=sin(x+h);

  dfa=(f2-f1)/h;
  dfb=(f1-f0)/h;
  dfc=(f2-f0)/(2*h);

  /* gebe Differenzenquotienten (verschiedene Varianten aus), vergleiche mit exakter Ableitung
     wähle Exponentialdarstellung für Ausgabe der Gleitkommazahlen  */

  printf("%15.6e   %15.6e   %15.6e   %15.6e \n",dfa,dfb,dfc,cos(x));

  return 0;
}

/* Ergebnis :   numerische Ableitung von sin(x) mit Methode (a),(b) und (c)

       5.398815e-01        5.407230e-01        5.403022e-01        5.403023e-01

*/
```

Deklaration und Belegung der Variablen

Berechne Ableitung von sin(x) mit drei Methoden

Ausgabe in Exponentialdarstellung

Dritte Variante mit Fehler in h^2 ist wesentlich genauer!

Bleibt noch festzulegen, was eine gute Wahl für h ist!

Theoretisch sollte $h \longrightarrow 0$

Wegen der endlichen Genauigkeit unserer Gleitkommadarstellung ist das aber nicht ratsam.

Beispiel: Computer mit 5 signifikanten Stellen.

$h = 10^{-4}$ →

$$f_0 = \sin(0.9999) = 0.84141 \qquad f_2 = \sin(1.0001) = 0.84152$$

$$\frac{f_2 - f_0}{2h} = \frac{0.00011}{2 \cdot 10^{-4}} = 0.55000 \neq \cos(1.0) = 0.54030$$

$h = 10^{-3}$ →

$$f_0 = \sin(0.999) = 0.84093 \qquad f_2 = \sin(1.001) = 0.84201$$

$$\frac{f_2 - f_0}{2h} = 0.54000$$

Subtraktion fast gleicher Zahlen, wie in Differenzenquotienten ist oft ungenau.
Durch die Division, wird der Fehler dann relevant!

Für besseres Ergebnis sollte h deutlich größer als die Genauigkeit der Gleitkommadarstellung des Computers sein!

Berücksichtigung der höheren Terme der Taylor-Entwicklung für $f(x \pm 2h), \ldots$ möglich. Meist jedoch nicht nötig.

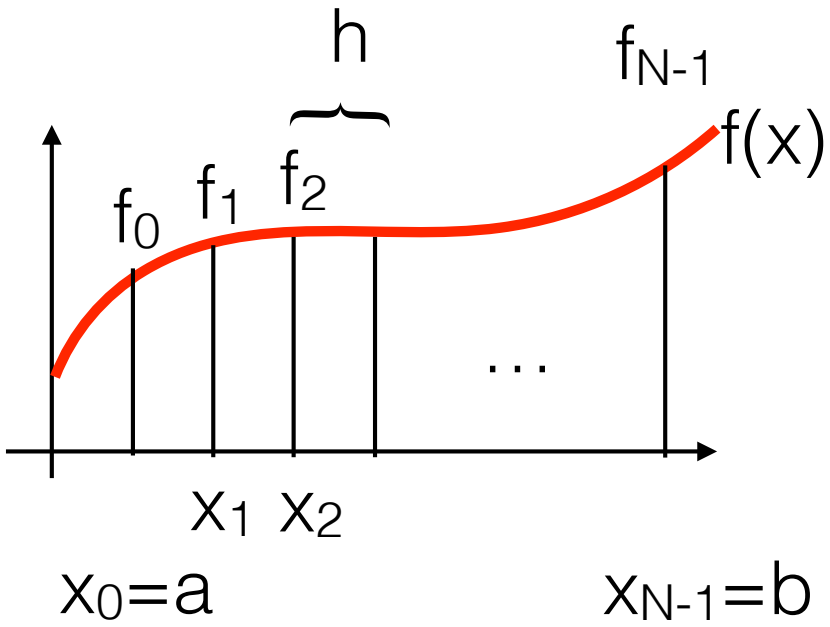
Geschickte Kombination ermöglich auch eine Berechnung höherer Ableitungen.

Beispielsweise erhält man leicht

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Numerische Integration

Nutzen wieder, dass unsere Funktion auf einem äquidistanten Gitter gegeben ist



Ziel ist die numerische Bestimmung des Integrals $\int_a^b dx\ f(x)$

1) Versuch: finde eine interpolierende Polynomfunktion für die f(x) auf dem Interval [a,b].

→ Polynom N-1 - Grades (Lagrange Formel)

Erfahrung zeigt, dass das Polynom oszilliert und die Funktion schlecht beschreibt.

2) Versuch: approximiere die Funktion lokal durch stückweise Interpolationspolynome niedriger Ordnung.
Typisches Beispiel: **Trapezregel**

$$\int_a^b dx\ f(x) = \int_{x_0}^{x_1} dx\ f(x) + \int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x) + \cdots + \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} dx\ f(x)$$

Das Problem reduziert sich auf die Teilintegrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\ f(x)$

Taylor-Entwicklung für das Interval ergibt mit numerischer Ableitung

$$f(x) = f_i + (x - x_i)\ \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

und damit kann man das Integral berechnen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\ f(x) = h\, f_i + \frac{h^2}{2}\ \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \mathcal{O}(h^3) = \frac{h}{2}\,(f_{i+1} + f_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

Schließlich summiert man über alle Teilintervalle

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{h}{2} f_0 + h\,(f_1 + \cdots + f_{N-2}) + \frac{h}{2} f_{N-1} + \underbrace{(N-1)\cdot\mathcal{O}(h^3)}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

Generell haben numerische Näherungen von Integralen die Form

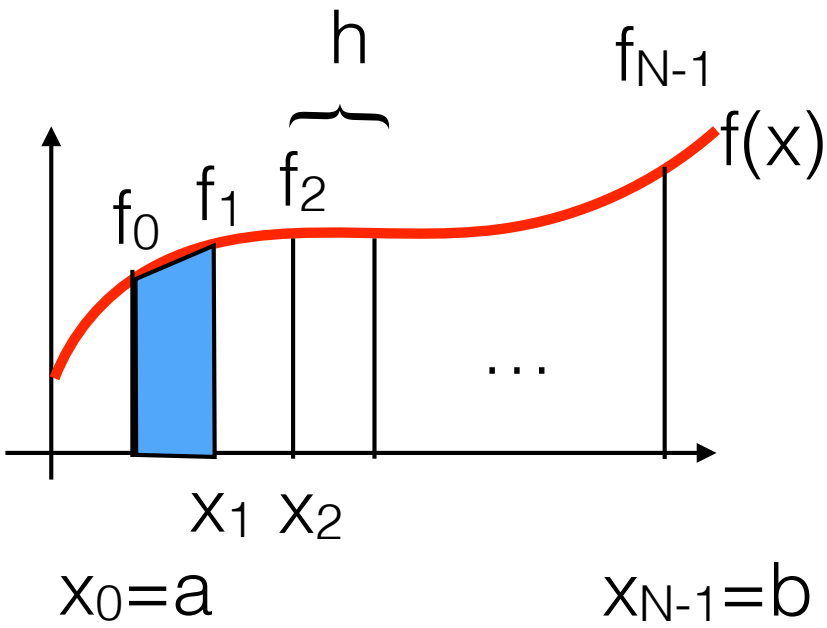
$$\int_a^b dx\ f(x) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i\ f_i$$

Für die Trapezregel lesen wir ab:

$$h = \frac{b-a}{N-1} \qquad x_i = a + i \cdot h$$

$$\omega_0 = \omega_{N-1} = \frac{h}{2}$$

$$\omega_i = h \text{ für } i = 1, \ldots, N-2$$



```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

Definition der zu integrierenden Funktion

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
```

Definition der zu integrierenden Funktion

```
/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}
```

Funktion die Stützstellen und Gewichte festlegt.

```
/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

Definition der zu integrierenden Funktion

Funktion die Stützstellen und Gewichte festlegt.

Adresse des Feldes xp und wp ist Parameter!

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

Definition der zu integrierenden Funktion

Funktion die Stützstellen und Gewichte festlegt.

Adresse des Feldes xp und wp ist Parameter!

n-1 Umwandlung in “double” (type casting)

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

Definition der zu integrierenden Funktion

Funktion die Stützstellen und Gewichte festlegt.

Adresse des Feldes xp und wp ist Parameter!

n-1 Umwandlung in “double” (type casting)

for-Schleife legt “normale” x und w fest

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

Definition der zu integrierenden Funktion

Funktion die Stützstellen und Gewichte festlegt.

Adresse des Feldes xp und wp ist Parameter!

n-1 Umwandlung in “double” (type casting)

for-Schleife legt “normale” x und w fest

Spezialfall der Randpunkte

```
/* Datei: beispiel-3.2.cpp   Datum: 12.4.2016 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Definition der zu integrierenden Funktion */
double f(double x)
{
  return exp(x);
}

/* Routine, die Gitterpunkte und Gewichte fuer ein Intervall [a,b] festlegt */
void trapez(int n, double a, double b, double *xp, double *wp)
/* n legt die Anzahl der Stuetzstellen fest.
   a,b sind "normale" double Parameter
   xp und wp sind Zeiger(Pointer) auf ein double Feld,
   es wird die Adresse des Feldes gespeichert !!!  */
{
  int i;
  double h;

  h=(b-a)/(double)(n-1);    /* Berechne Schrittweite */

  for(i=1;i<n-1;i++)
    {
      xp[i]=a+i*h;      /* xp = Anfangsadresse des Feldes */
      wp[i]=h;          /* xp[i] = Nehme die Speicherstelle, */
                        /*      die i Speicherstellen weiter liegt */
    }

  xp[0]=a;          /* Lege Punkte und Gewichte am Rand fest */
  wp[0]=h/2.0;
  xp[n-1]=b;
  wp[n-1]=h/2.0;
}
```

Definition der zu integrierenden Funktion

Funktion die Stützstellen und Gewichte festlegt.

Adresse des Feldes xp und wp ist Parameter!

n-1 Umwandlung in “double” (type casting)

for-Schleife legt “normale” x und w fest

Spezialfall der Randpunkte

keine Rückgabe, die Felder xp und wp wurden verändert

```
int main()
{
  double a,b;             /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;               /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;  /* Variablen, um Ergebnis zu speichern */
  double *x,*w;         /* Zeiger auf Speicherplaetze, die double enthalten */

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe der Parameter */
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));     /* Anzahl der Stuetzstellen bestimmt Laenge des Feldes */
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));     /* waehrend des Programmlaufes ! */
                                            /* malloc erledigt diese Aufgabe ("allozieren") */

  trapez(n,a,b,x,w);   /* uebergibt n = Anzahl der Punkte a,b Intervallgrenzen */
                       /* Adressen der mit new allozierten Speicherbereiche */

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;              /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];   /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

```
int main()
{
  double a,b;             /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;               /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;  /* Variablen, um Ergebnis zu speichern */
  double *x,*w;         /* Zeiger auf Speicherplaetze, die double enthalten */

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe der Parameter */
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));     /* Anzahl der Stuetzstellen bestimmt Laenge des Feldes */
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));     /* waehrend des Programmlaufes ! */
                                            /* malloc erledigt diese Aufgabe ("allozieren") */

  trapez(n,a,b,x,w);   /* uebergibt n = Anzahl der Punkte a,b Intervallgrenzen */
                       /* Adressen der mit new allozierten Speicherbereiche */

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;              /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];   /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

Eingabe: a,b und n sollen verändert werden: Speicherort=Adresse ist nötig und wird mit “&” Operator bestimmt

```
int main()
{
  double a,b;              /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;                /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;   /* Variablen, um Ergebnis zu s
  double *x,*w;          /* Zeiger auf Speicherplaetze, d

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));     /* Anzahl der Stuetzstellen bestimmt Laenge des Feldes */
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));     /* waehrend des Programmlaufes ! */
                                            /* malloc erledigt diese Aufgabe ("allozieren") */

  trapez(n,a,b,x,w);   /* uebergibt n = Anzahl der Punkte a,b Intervallgrenzen */
                       /* Adressen der mit new allozierten Speicherbereiche */

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;              /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];   /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

```
int main()
{
  double a,b;              /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;                /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;   /* Variablen, um Ergebnis zu s
  double *x,*w;          /* Zeiger auf Speicherplaetze, d

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));


  trapez(n,a,b,x,w);   /* uebergibt n = Anzahl der Punkte a,b Intervallgrenzen */
                       /* Adressen der mit new allozierten Speicherbereiche */

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;              /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];   /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

**Eingabe: a,b und n sollen verändert werden:
Speicherort=Adresse ist nötig und
wird mit “&” Operator bestimmt**

**malloc reserviert Speicherplatz und gibt Adresse
dieses Speicherplatzes zurück
Umwandlung in Zeiger auf double erforderlich**

```
int main()
{
  double a,b;              /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;                /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;   /* Variablen, um Ergebnis zu s
  double *x,*w;          /* Zeiger auf Speicherplaetze, d

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));


  trapez(n,a,b,x,w);    /* uebergibt
                        /* Adressen

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;               /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];    /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

**Eingabe: a,b und n sollen verändert werden:
Speicherort=Adresse ist nötig und
wird mit “&” Operator bestimmt**

**malloc reserviert Speicherplatz und gibt Adresse
dieses Speicherplatzes zurück
Umwandlung in Zeiger auf double erforderlich**

Aufruf von Trapez definiert Stützstellen und Gewichte

```
int main()
{
  double a,b;              /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;                /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;   /* Variablen, um Ergebnis zu s
  double *x,*w;          /* Zeiger auf Speicherplaetze, d

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));


  trapez(n,a,b,x,w);    /* uebergibt
                        /* Adressen

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;               /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];   /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

**Eingabe: a,b und n sollen verändert werden:
Speicherort=Adresse ist nötig und
wird mit “&” Operator bestimmt**

**malloc reserviert Speicherplatz und gibt Adresse
dieses Speicherplatzes zurück
Umwandlung in Zeiger auf double erforderlich**

Aufruf von Trapez definiert Stützstellen und Gewichte

Bestimmung des Integrals

```
int main()
{
  double a,b;              /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;                /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;   /* Variablen, um Ergebnis zu s
  double *x,*w;          /* Zeiger auf Speicherplaetze, d

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));


  trapez(n,a,b,x,w);    /* uebergibt
                        /* Adressen

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;               /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];    /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

Eingabe: a,b und n sollen verändert werden: Speicherort=Adresse ist nötig und wird mit “&” Operator bestimmt

malloc reserviert Speicherplatz und gibt Adresse dieses Speicherplatzes zurück Umwandlung in Zeiger auf double erforderlich

Aufruf von Trapez definiert Stützstellen und Gewichte

Bestimmung des Integrals

Ausgabe des Ergebnisses, des exakten Ergebnisse und des Fehlers

```
int main()
{
  double a,b;              /* Intervallgrenzen */
  int  i,n;                /* Schleifenvariable,Anzahl der Stuetzstellen */
  double exact,diff,sum;   /* Variablen, um Ergebnis zu s
  double *x,*w;          /* Zeiger auf Speicherplaetze, d

  printf("Bitte geben Sie a,b und n ein: ");  /* Eingabe
  scanf("%lf %lf  %d",&a,&b,&n);



  x=(double *)malloc(n*sizeof(double));
  w=(double *)malloc(n*sizeof(double));


  trapez(n,a,b,x,w);    /* uebergibt
                        /* Adressen

  /* Gitterpunkte und Gewichte sind nun bei x und w gespeichert */
  /* Diese kann man fuer beliebige Funktionen benutzen */

  sum=0.0;               /* Bestimmung eines Integrals mit den Gitter und Gewichten */

  for(i=0;i<n;i++)
   {
    sum+=f(x[i])*w[i];    /* "+=" Operator summiert f(xi)*w(xi) auf Summe auf */
   }

  exact=exp(b)-exp(a);
  diff=fabs(sum-exact);

  printf("N      trapez      exact       diff \n\n");
  printf("%d      %15.6e      %15.6e       %15.6e \n",n,sum,exact,diff);

  free(x);   /* Speicherbereich wieder freigeben */
  free(w);   /*  ("deallozieren") */
}
/* Ergebnis:  fuer a b n = 0.0 1.0 30
                   N              trapez               exact                diff
                  30    1.7184520869e+00    1.7182818285e+00    1.7025840042e-04
*/
```

x und w sind Adresse (=Zeiger) auf Felder

Eingabe: a,b und n sollen verändert werden: Speicherort=Adresse ist nötig und wird mit “&” Operator bestimmt

malloc reserviert Speicherplatz und gibt Adresse dieses Speicherplatzes zurück Umwandlung in Zeiger auf double erforderlich

Aufruf von Trapez definiert Stützstellen und Gewichte

Bestimmung des Integrals

Ausgabe des Ergebnisses, des exakten Ergebnisse und des Fehlers

Analog können Integrationsregeln höherer Ordnung hergeleitet werden

Simpsons-Regel → $\mathcal{O}(h^4)$ (oft verwendet)

Bodes-Regel → $\mathcal{O}(h^6)$

Wegen der Unstabilität bei sehr hohen Ordnungen
(auch weil positive/negative Gewichte auftreten) belässt man es meist bei niedrigen Ordnungen.

Später: weitere Verfeinerungen und Integrationsregel mit nicht-äquidistanten Punkten