Hausaufgabe 3

Freitag, 5. Juni 2020 11:39

Aufgabe 1:

Sei das Randwertproblem gegeben durch:

$$u''(x) + g(x)u(x) = 0$$
$$u(t_0) = u_0$$
$$u(t_1) = u_1$$

Daraus definieren wir den Differentialoperator:

$$Du = u'' + g(x) \quad \text{\& Randbedingungen}$$

a) Sei das Problem $Du_\lambda - \lambda u_\lambda = 0 \qquad u(t_0) = 0 = u(t_1)$

$$\Leftrightarrow \quad u''(t) + g(t)u(t) - \lambda u(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad u''(t) + (g(t) - \lambda)u(t) = 0$$

$$Du(x) = \lambda u(x) + f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad Du(x) - \lambda u(x) = f(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad u''(x) + (g(x) - \lambda)u(x) = f(x)$$

Die Lösung des Systems setzt sich aus der Lösung des homogenen Teil u_{homo} und eine partikuläre Lösung u_{part} zusammen.

Da für die homogene Lösung gilt $u_{homo}(x_1) = 0 = u_{homo}(x_2)$, können wir die beiden freien Parameter der partikulären Lösung so bestimmen dass gilt

$$u_{part}(x_1) = a \quad ; \quad u_{part}(x_2) = b$$

Damit erfüllt $u(x) = u_{homo}(x) + u_{part}(x)$ die DGL und die Randbedingungen und ist somit die vollständige Lösung.

b) Sei $g(x) \equiv 0$, so gilt

$$Du(x) - \lambda u(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad u''(x) - \lambda u(x) = 0$$

$\mathcal{D}u(x) - \lambda u(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad u''(x) - \lambda u(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad u''(x) = \lambda u(x) \qquad$ mit $\quad u(0) = 1, \quad u(60) = 0$

Fallunterscheidung $\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad u''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = Ax + B$

$u(0) = 1 = B \quad ; \quad u(60) = 60A + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{60}$

$\Rightarrow \quad u_0(x) = -\frac{x}{60} + 1$

Sei $\lambda > 0$:

$u''(x) = \lambda u(x) \qquad$ Sei $\lambda = \beta^2$

$\Rightarrow u''(x) = \beta^2 u(x)$

$\Rightarrow \quad u(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$

Randbedingungen: $\quad u(0) = A + B \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1 - A$

$u(60) = Ae^{\beta \cdot 60} + (1-A)e^{-\beta 60} = 0$

$\Leftrightarrow \quad Ae^{\beta 60} + e^{-\beta 60} - Ae^{\beta 60} = 0$

$\Leftrightarrow \quad A(e^{\beta 60} - e^{-\beta 60}) = -e^{-\beta 60}$

$\Leftrightarrow \quad A = -\frac{e^{-\beta 60}}{e^{\beta \cdot 60} - e^{-\beta 60}} = \frac{1}{1 - e^{120 \cdot \beta}} \qquad$ und $\quad \beta \neq 0$

$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{1-e^{120\beta}} \cdot e^{\beta x} + \left(1 - \frac{1}{1-e^{120\beta}}\right) e^{-\beta x}$

3. Fall Sei $\lambda < 0$

So gilt $\quad u''(x) = \underbrace{\lambda}_{<0} u(x) \qquad$ Sei $\lambda = -\beta^2 \qquad \beta^2 > 0$

$\Rightarrow \quad u''(x) = -\beta^2 u(x)$

$\Rightarrow \quad u(x) = Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}$

$u(0) = A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1 - A$

$$u(60) = A e^{i\beta 60} + (1-A)\, e^{-i\beta 60} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\left(e^{i\beta 60} - e^{-i\beta 60}\right) + e^{-i\beta 60} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\left(e^{i\beta 60} - e^{-i\beta 60}\right) = - e^{-i\beta 60}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = - \frac{e^{-i\beta 60}}{e^{i\beta 60} - e^{-i\beta 60}} = - \frac{e^{-i\beta 60}}{e^{-i\beta 60}\left(e^{i\beta 120} - 1\right)} = \frac{1}{1 - e^{i\beta 120}} \quad \Rightarrow \quad B = 1 - \frac{1}{1 - e^{i\beta 120}} = \frac{-e^{i\beta 120}}{1 - e^{i\beta 120}}$$

$$= \frac{-e^{i\beta 120}}{e^{i\beta 120}\left(e^{-i\beta 120} - 1\right)} = \frac{1}{1 - e^{-i\beta 120}}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{1 - e^{i\beta 120}}\, e^{i\beta x} + \frac{1}{1 - e^{-i\beta 120}}\, e^{-i\beta x}$$