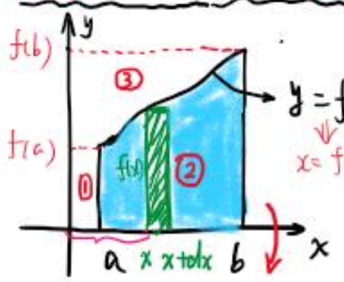
积分复习2

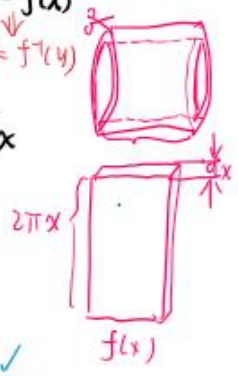
2023年12月26日 12:37

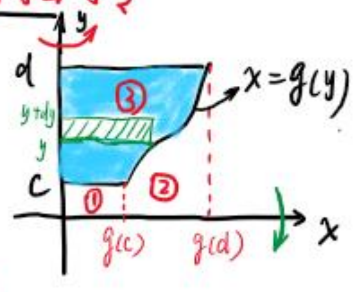
• 定积分的几何应用

(1) 旋转体体积

1. 坐标轴上的曲边梯形绕x, y轴转







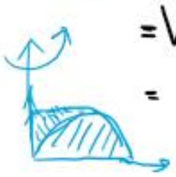
$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$

$$V_y = \int_c^d \pi g^2(y)\, dy$$

$$V_y = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$ ✓

$$= V_{①②③y} - V_{①y} - V_{③y}$$

$$= \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} \pi \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

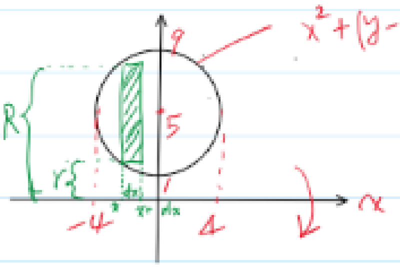


$$V_x = \int_c^d 2\pi y\, g(y) \cdot dy$$

$$= V_{①②③x} - V_{①x} - V_{②x}$$

$$= \pi g^2(d) d - \pi g^2(c) c - \int_{g(c)}^{g(d)} \pi \left(g^{-1}(x)\right)^2 dx$$

问题1：求由x^2+(y-5)^2=16围成的平面图形绕x轴旋转一周得到立体的体积。



$$x^2+(y-5)^2=16 \Rightarrow y = 5\pm\sqrt{16-x^2}$$

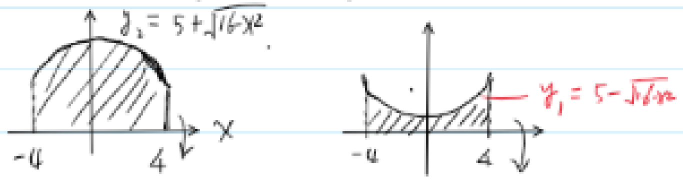
上半圆：$y=5+\sqrt{16-x^2}$

下半圆：$y=5-\sqrt{16-x^2}$

方法一：元素法（微元法）

$$V_x=\int_{-4}^{4}\pi(R^2-r^2)\,dx=\int_{-4}^{4}\pi\left[\left(5+\sqrt{16-x^2}\right)^2-\left(5-\sqrt{16-x^2}\right)^2\right]dx$$
$$=160\pi^2.$$

方法二：转化法（本质是微元法）



$$V_{2x}=\pi\int_{-4}^{4}y_2^2(x)\,dx \qquad V_{1x}=\pi\int_{-4}^{4}y_1^2(x)\,dx$$
$$V_x=V_{2x}-V_{1x}$$

% 方法二：转化法（标准方法所得两个体积相减）

% 标准方法指的是：x轴上的曲边梯形绕x轴转用体积公式 V_x = Pi $\int_a^b$ f^2 (x) dx、

y轴上的曲边梯形绕y轴转用体积公式 V_y = Pi $\int_c^d$ f^2 (x) dy

用标准方法关键：需辨别清楚到底哪一部分图形是x或y轴上的曲边梯形。

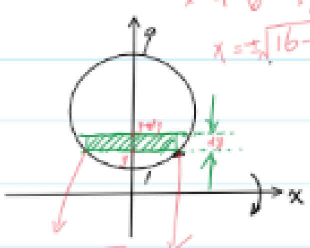
```
Simplify[Pi ∫_{-4}^{4} (5 + √(16 - x^2))^2 dx - Pi ∫_{-4}^{4} (5 - √(16 - x^2))^2 dx]
```

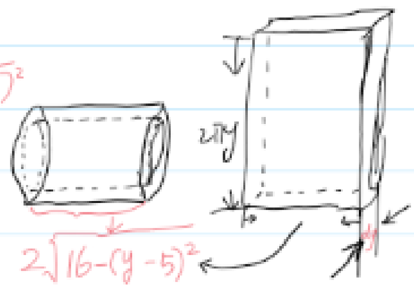
$160\pi^2$

方法三：薄壳法

$x^2+(y-5)^2=16$

$x=\pm\sqrt{16-(y-5)^2}$

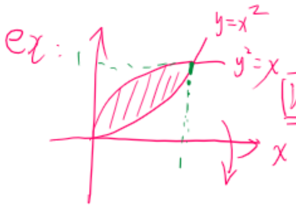




$x=-\sqrt{16-(y-5)^2}$, $x=\sqrt{16-(y-5)^2}$

$$V_x=\int_1^9 2\pi y\cdot 2\sqrt{16-(y-5)^2}\cdot dy=160\pi^2.$$

eg:



$V_x=?\quad V_y=?$

$\boxed{法1}$ $V_x=\int_0^1 \pi y_{上}^2(x)\,dx-\int_0^1 \pi y_{下}^2(x)\,dx$

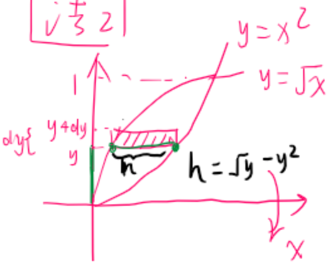
$=\int_0^1 \pi\cdot x\,dx-\int_0^1 \pi\cdot(x^2)^2\,dx=\cdots$

$V_y=\int_0^1 \pi x_{右}^2(y)\,dy-\int_0^1 \pi x_{左}^2(y)\,dy$

$=\int_0^1 \pi y\,dy-\int_0^1 \pi y^4\,dy \overset{\text{“对称性”}}{=} V_x$

定积分与积分变量选择无关

$\boxed{法2}$

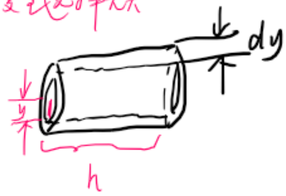


法2(薄壳法)

$V_x=\int_0^1 \underset{长}{\underline{2\pi y}}\cdot\underset{高}{\underline{h}}\cdot\underset{厚}{\underline{dy}}$

$=\int_0^1 2\pi y\cdot(\sqrt{y}-y^2)\,dy$

$=\frac{3\pi}{10}$



$\int_0^1 2\,\mathrm{Pi}\,y*(\sqrt{y}-y\text{^}2)\,dy$ [圆周率

$\int_0^1 \mathrm{Pi}\,y\,dy-\int_0^1 \mathrm{Pi}\,y\text{^}4\,dy$ [圆周率 [圆周率

$\frac{3\pi}{10}$

$\frac{3\pi}{10}$

绕平行于x、y轴的直线旋转体，体积用微元法（元素法），关键是旋转后近似看成什么图形（一般是圆柱体，弄明白圆柱体的长、宽、高）

例子详见上课ppt（弄懂一个即可掌握方法）

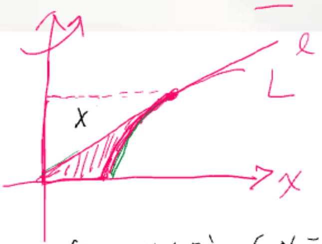
求体积
（21 级）

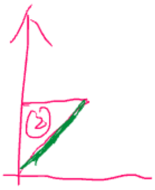
六、（本题 6 分）过原点作曲线 $L: y=\sqrt{x-1}$ 的切线 l，求由 L、l 以及 x 轴围成图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积。 $x=y^2+1$

切线方程 $y=\frac{1}{2}x$ $\Rightarrow x=2y$

体积 $V=\int_0^1 \pi(x_1^2-x_2^2)dy$

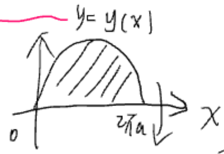
$=\pi\int_0^1((1+y^2)^2-4y^2)dy=\frac{8}{15}\pi$





曲线 ① $y=y(x)$

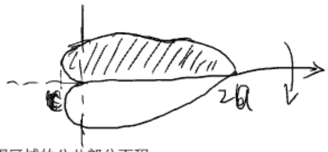
② 曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t)=a(t-\sin t) \\ y=\psi(t)=a(1-\cos t) \end{cases}$



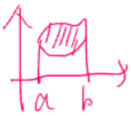
$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi\cdot y^2(x)\,dx \; \frac{x=a(t-\sin t)}{y=a(1-\cos t)} \; \int_\alpha^\beta \pi\cdot(a(1-\cos t))^2\, a(1-\cos t)dt$

③ 曲线 $r=a(1+\cos\theta)$ $\rightarrow V_x=\int_c^{2a}\pi y^2(x)\,dx$

$\begin{cases} x=r\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ y=r\sin\theta=a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \end{cases}$



(2) 平面图形的面积



$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

$A=\int_a^b(f_上-f_下)dx$

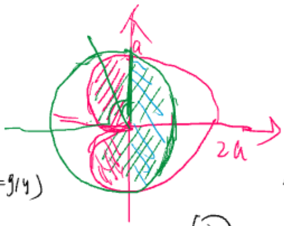
$A=\int_0^{2\pi a}y(x)\,dx$

$=\int_\alpha^\beta \cdots\cdots dt$

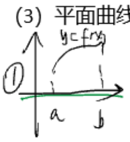
$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$

（18 级，5 分）求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $r=a\ (a>0)$ 各自所围区域的公共部分面积.

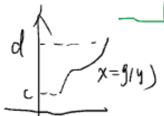
解 所求面积 $A=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{5}{4}\pi a^2-2a^2$



(3) 平面曲线的的弧长

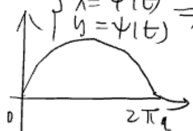


$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$



$S=\int_c^d\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$

②



$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$dx=\varphi'(t)dt$

$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$

$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

13 求心脏线 $r=1+\cos\theta$ ($\theta\in[0,2\pi]$) 的全长。

答案:

5 分: $\int_0^{2\pi}\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

5 分: $=8$

③ $r=r(\theta)$

$\Rightarrow \begin{cases} x(\theta)=r(\theta)\cos\theta=\varphi(\theta) \\ y(\theta)=r(\theta)\sin\theta=\psi(\theta) \end{cases}$

$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

•反常积分（广义积分）

$$F(x)\Big|_2^{+\infty} = F(+\infty) - F(2) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(2)$$

反常积分：

1) 无穷区间的积分。先写成定义的形式，也就是极限的形式再计算

(2020) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{\ln x}{x^2}dx$ $\quad \frac{\ln 2+1}{2}$.

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx = \int_{+\infty}^{2}\ln x\cdot d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{x}\Big|_{+\infty}^{2} + \int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\Big|_{+\infty}^{2}$$

$$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln 2+1}{2}$$

2) 带瑕点的积分。同样先写成定义的形式，特别注意上下限同时是瑕点的情况

设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$，求 $\int_2^4 f(x-1)\,dx$

3) 瑕点在中间的情况。要利用区间可加性分成两个积分再计算

$$\int_{1/2}^{3/2}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$$

14. 求反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$.

$x>0$

$x - x^2 = \underbrace{x}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{>0<0} \Rightarrow x=1$

$$原式 = \int_{\frac12}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac32}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_{\frac12}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{1+\varepsilon_2}^{\frac32}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0^+}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac12}^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\left[\ln\left|x-\tfrac12+\sqrt{x^2-x}\right|\right]_{1+\varepsilon_2}^{\frac32}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt3)$$

$$I_n = \int_0^{+\infty}x^n e^{-px}dx$$

$$= -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}x^n d(e^{-px})$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \to \int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \to \arcsin u$$

$\Delta>0$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}\ (\Delta>0) \to \int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} \to \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$$

$$\int_{\frac12}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac12}^{1}\frac{d(x-\frac12)}{\sqrt{(\frac12)^2-(x-\frac12)^2}} = \arcsin\frac{x-\frac12}{\frac12}\Big|_{\frac12}^{1}$$

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac12}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$\frac14 - (x^2 - x + \frac14)$

$$\int_1^{\frac32}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{\frac32}\frac{d(x-\frac12)}{\sqrt{(x-\frac12)^2-(\frac12)^2}} = \ln\left|x-\tfrac12+\sqrt{x^2-x}\right|\Big|_{1^+}^{\frac32} = \cdots$$

$\Delta>0$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$