# 期末复习-微分学

2023年12月25日 19:25

## 导数的定义，几何意义

（22级 a）

函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导意味着（ 3 ）实数 $A$，（ 4 ）$\varepsilon>0$，（ 5 ）$\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A\right|<\varepsilon$。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

分段函数在分段点处的导数问题，→ 定义

（22级 b）

17 已知 $\varphi(x)$ 二阶可导并且 $\varphi''(x)$ 连续，$\varphi(0)=1$，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq0\\ \varphi'(0), & x=0\end{cases}$

(1) 求 $f'(x)$，(2) 在 $x=0$ 处 $f'(x)$ 是否连续？请证明你的结论。

$g(x)=f'(x)$

$\lim_{x\to0}g(x)\overset{?}{=}g(0)$，$\lim_{x\to0}f'(x)\overset{?}{=}f'(0)=\frac12[1+\varphi''(0)]$

解:

(1) $x\neq0$ 时 $f'(x)=\dfrac{[\varphi'(x)+\sin x]x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$

$x=0$ 时 $f'(0)=\frac12[\varphi''(0)+1]$

(2) 利用洛必达可知 $x\to0$ 时 $f'(x)\to f'(0)$，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

（17 级）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 有二阶导数，且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=1$，求 $a, f'(0)$.

解：(1) $x\neq0$. $f'(x)=\dfrac{(\varphi'(x)+\sin x)x-(\varphi(x)-\cos x)\cdot1}{x^2}$ ✓

$x=0$. $f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x-\varphi'(0)x}{x^2}$ $\quad\frac00$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}=\dfrac12\left[\underset{\downarrow\,1}{\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}}+\underbrace{\lim_{x\to0}\dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x-0}}_{\varphi''(0)}\right]$

$=\frac12(1+\varphi''(0))$ ✓

即 $g(x)=f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\varphi'(x)+x\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq0\\ \frac12[1+\varphi''(0)] ✓ & x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{x\cdot\varphi'(x)+x\cdot\sin x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}$ $\quad\frac00$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1\cdot\varphi'(x)+x\varphi''(x)+1\cdot\sin x+x\cdot\cos x-\varphi'(x)-\sin x}{2x}$ $\quad\lim_{x\to0}\varphi''(x)=\varphi''(0)$

$=\frac12\lim_{x\to0}(\varphi''(x)+\cos x)\xrightarrow{\varphi''(x)\text{ 连续}}\frac12[1+\varphi''(0)]=f'(0)$

∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续

$= 2\lim\limits_{x\to 0}(\varphi'(x)+\cos x) \Longrightarrow$ ——— $2[\ldots(0)]-f(0)$

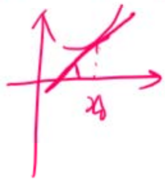
∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(22 级 b)

11 求由极坐标方程给出的三叶玫瑰线 $r=\sin(3\theta)$ 上对应于 $\theta=\pi/4$ 的点处的切线方程（直角坐标形式）。

$y=f(x)$ 在 $x_0$ 导数

$y'(x_0)=f'(x_0)=k_{切}$



解:

$y(\theta)=\sin(3\theta)\sin\theta$, $x(\theta)=\sin(3\theta)\cos\theta$, 参数方程决定的局部函数为 $f$, 则 $y(\theta)=f(x(\theta))$

k 斜率 ⟹ (5 分) $\cancel{f'(x(\theta))} = \dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \dfrac{\cos(3\theta)\cdot 3\cdot\sin\theta+\sin(3\theta)\cos\theta}{\cos(3\theta)\cdot 3\cdot\cos\theta-\sin(3\theta)\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$

$\dfrac{dy}{dx}=$

---

$$f'\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{y'(\frac{\pi}{4})}{x'(\frac{\pi}{4})}=\frac{3(-\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)+(\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)}{3(-\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)-(\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)}=\frac{1}{2}$$

(10 分) 当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，切线是 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

切点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$r=r(\theta)$ $(\rho=\rho(\theta))$ $\Rightarrow \begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta=x(\theta) \\ y=r(\theta)\cdot\sin\theta=y(\theta)\end{cases}$ 参数方程

$\begin{cases} x_0=r(\theta_0)\cos\theta_0 \\ y_0=r(\theta_0)\sin\theta_0\end{cases}$ $\underset{切点}{(x_0,y_0)}$ $\underset{斜率}{k}=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)}\Big|_{\theta=\theta_0}$

简单函数的微分 $y=f(x)$, $dy=y'(x)\,dx$

设 $y=f\left(\ln^2 x-e^{-x}\right)$，求 $dy$.

$dy=y'(x)\,dx$

$=f'(\ln^2 x-e^{-x})\cdot\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}-e^{-x}\cdot(-1)\right)dx$

☆ 隐函数求导法、对数求导法（换元法） $F(x,y)=0$ 函数 自变量

(22 级 a)

11 设 $y=f(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y+1)=x^3y+\sin x$ 确定。求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程。

两端同时对 $x$ 求导: $\dfrac{1}{x^2+y+1}\cdot(2x+y'(x)+0)$

$=3x^2\cdot y+x^3\cdot y'(x)+\cos x$ ✓

3 分: $f(0)=0$

2 分: $\dfrac{2x+f'(x)}{x^2+f(x)+1}=3x^2y+x^3f'(x)+\cos x$

$x=0$ 时. $\ln(1+y)=0$. $y=0$ 切点 $(0,0)$

$x=0$ ⇓

$\dfrac{f'(0)}{0+0+1}=0+0+\cos 0=1$

---

$k=1$, 切点 $(0,0)$

3 分: $f'(0)=1$

3 分：$f'(0)=1$ $k=1$，切点 $(0,0)$

2 分：切线是 $y=x$

（22 级 b）

15 设 $y=\tan(x+y)$ 在 $(x_0,y_0)=(\frac{\pi}{4}-1,1)$ 附近确定了 $y$ 关于 $x$ 的隐函数 $y=f(x)$，计算 $f'(x_0)$、$f''(x_0)$。

解：

$x+f(x)=\arctan f(x)$，$1+f'(x)=\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$，因此 $f'(x)=-\dfrac{1}{[f(x)]^2}-1$，

$$f''(x)=(-2)\cdot\frac{1+[f(x)]^2}{[f(x)]^5}$$

$f(x_0)=f(\frac{\pi}{4}-1)=1$，因此 $f'(x_0)=-2$，$f''(x_0)=-4$

$$\frac{2x+f'(x)}{x^2+f(x)+1}=3x^2 f(x)+x^3 f'(x)+\cos x$$

$2x+f'(x)=(x^2+f(x)+1)(3x^2 f(x)+x^3 f'(x)+\cos x)$

两边对 $x$ 求导 $\Rightarrow$

$2+f''(x)=(2x+f'(x))(3x^2f(x)+x^3f'(x)+\cos x)$

$+(x^2+f(x)+1)\cdot(6xf(x)+3x^2f'(x)+3x^2f'(x)+x^3f''(x)-\sin x)$

$x=0$

$2+f''(0)=(0+1)\cdot(0+0+1)+(0+0+1)\cdot 0$

$f''(0)=1-2=-1.$

（21 级）

（本题 7 分）设 $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos x}}+\arcsin\sqrt{\cos x}$，求 $dy$.

$$dy=\left(\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{1-\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\right)\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x)dx$$

$y=\ln\dfrac{1+u}{1-u}+\arcsin u$，$u=\sqrt{\cos x}$. $y \to u \to x$

$=\ln(1+u)-\ln(1-u)+\arcsin u$，$u=\sqrt{\cos x}$

$u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\ }}\cdot(-\sin x)$

$dy=y'(x)\,dx$

$u'(x)=\frac{}{2\sqrt{}}(-\sin x)$

$dy=y'(x)dx$

$=\left(\frac{1}{1+u}-\frac{1}{1-u}\cdot(-1)+\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)\cdot\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx$

$=\left(\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{1-\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\right)\cdot\left(-\frac{\sin x}{2\sqrt{}}\right)dx$

## 参数式函数的一二级阶导数

- 对数求导法：
  处理复杂的乘除带幂的形式，比如

  $\ln y=\ln x+x+\frac{1}{2}\ln(\sin(x^2-1))$

  $\frac{1}{y}\cdot y'=\cdots$

  求 $y=xe^x\sqrt{\sin(x^2-1)}$ 的导数

  $y'=y\cdot(\cdots)$

- 参数方程求导：

  $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$

  $$\begin{cases}y=y(t)\\x=x(t)\end{cases}$$

  则

  $$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}}=\frac{\cdots}{\cdots}$$

  而二阶导数则相当于讨论一个新的参数方程求导

  $x\xrightarrow{反函数}t$

  $t'(x)=\frac{1}{x'(t)}$

  $$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}(t)\\x=x(t)\end{cases}$$

  即

  $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=g(t(x))$

  $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'_{(t)}}{x'(t)}$$

**（19 级）** $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'(t)\cdot t'(x)=\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'(t)\cdot\frac{1}{x'(t)}$

4. 设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(t-\arctan t)'_t}{(\ln(1+t^2))'_t}=\frac{t}{2}\left(=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\right)=\cdots$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{t}{2})'_t}{(\ln(1+t^2))'_t}=\frac{1+t^2}{4t}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{t}{2})'_t}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}$

(21级) $y'(t)=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin y}$

$e^y \sin t - y + 1 = 0$ 两边对 t 求导 ⇒ $y'(t)$

⇐ $e^y\cdot y'(t)\cdot\sin t + e^y\cdot\cos t - y'(t) = 0$ ⇒ $t=0$ 时 $y'(0)=e$

4. $y = y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$ ________.

当 $t=0$ 时 $x=3$, $y=1$　　$e^1\cdot y'(0)\cdot 0 + e^1\cdot 1 - y'(0) = 0$

4. $\dfrac{e}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y\cos t/(1-e^y\sin y)}{6t+2+0}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$$

极坐标下函数的一阶导数（+几何意义，求切线等）

设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, 则

参数式求导

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

高阶导数 ☆

$$(u\cdot v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \cdots + C_n^n u^{(0)} v^{(n)}$$

高阶导数：莱布尼茨公式，比如

$f(x) = x^2 \sin x \cos x$，求 $f^{(2015)}(0)$

$= \frac{1}{2}x^2 \sin\dots$

或者求

高阶导数：莱布尼茨公式，比如 $+C_n^{n-1}u'v+\cdots+C_n^n u^{(n)}$

$$f(x)=x^2\sin x\cos x\,,\text{求 } f^{(2015)}(0)$$

$=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin 2x$

或者求

$(x^n)^{(n)}=n!$

$$(x^{n-1}\ln x)^{(n)}$$

很多情况下，高阶导数也可以用泰勒展开或者数学归纳法。更特别的例子

$$\text{令 } y=\arctan x\,,\text{求 } y^{(2019)}(0).$$

$\sin^{(n)}(ax+b)=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad(\ln x)^{(n)}$

$(e^x)^{(n)}=,\quad(\cos(ax+b))^{(n)}$

（22 级 a）

$$f(x)=\arcsin x\text{，则 } f^{(3)}(0)=$$

1

（22 级 B）

$y=f(x)=\arctan x$，则 $f^{(4)}(0)=$ 0

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad f'(0)=0.$

$=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)$ $\quad f''(0)=0$

$=x\cdot(1-x^2)^{-3/2}$

$f'''(x)=1\cdot(1-x^2)^{-3/2}+x\cdot(\cdots)$ $\quad f'''(0)=1$

$x=0$

方法1

$y'=\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}$, $y'(0)=1$

$y''=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x$, $y''(0)=0$

$y'''=2(1+x^2)^{-3}\cdot 2x\cdot 2x$

$+-(1+x^2)^{-2}\cdot 2$

$y^{(4)}$

方法2. $\quad y'\cdot(1+x^2)=1$

$y''\cdot(1+x^2)+y'(x)\cdot 2x=0\xrightarrow{x=0}y''(0)(1+0)+1\cdot 0=0$

$y'''\cdot(1+x^2)+y''\cdot(2x)+y''\cdot 2x+y'\cdot 2=0$

21级

3. 设 $f(x)=\cos^2 x$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

3. $f^{(n)}(x)=2^{n-1}\cos(2x+\dfrac{n\pi}{2})$.

$f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot(\cos 2x)^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

（18 级，5 分）设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(2018)}(0)$．

$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$

$'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$''' = 2\frac{1}{(1+x)^3}$

**解　方法 1：** $f^{(2018)}(0)=C_{2018}^{2}\cdot 2\cdot\dfrac{(-1)^{2015}\cdot 2015!}{(1+0)^{2016}}\ =-2C_{2018}^{2}\cdot 2015!$

**方法 2：** 注意到 $f$ 的泰勒公式中 $x^{2018}$ 的系数为 $\dfrac{(-1)^{2015}}{2016}$，从而 $f^{(2018)}(0)=\dfrac{(-1)^{2015}}{2016}\cdot 2018!$

$2x$

方法1 $(f(x))^{(2018)} = C_{2018}^{0}(x^2)^{(0)}(\ln(1+x))^{(2018)} + C_{2018}^{1}(x^2)'(\ln(1+x))^{(2017)}$
$+ C_{2018}^{2}\underbrace{(x^2)''}_{=2}(\ln(1+x))^{(2016)} + 0$

$\Rightarrow f^{(2018)}(0) = C_{2018}^{2}\cdot 2\cdot\dfrac{2015!\,(-1)^{2015}}{(1+0)^{2016}}$

方法2, $f(x) \overset{间}{=} x^2\cdot\ln(1+x)$ $\ln(1+x)=g(x)$　$g(0)=0$,

$= x^2\cdot\left[0+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3+\cdots\frac{g^{(2016)}(0)}{2016!}x^{2016}+o(x^{2016})\right]$

$= \cdots + \dfrac{g^{(2016)}(0)}{2016!}\cdot x^{2018}+\cdots$

（15 级）设 $f(x)=x^2\sin x\cos x$，求 $f^{(2015)}(0)$.

$f(x) \overset{直}{=} \cdots + \dfrac{f^{(2018)}(0)}{2018!}x^{2018}+\cdots$

解. $f(x)=x^2\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$

$g(x)=\ln(1+x)$

$g^{(2016)}(0)=\dfrac{(-1)^{2015}(2015)!}{(1+0)^{2016}}$

## 极值与最值

Key: 目标函数!

（22 级 a）

12 一个正圆锥体的侧面和底面均与一个半径为 $R$ 的球面相切。圆锥的高 $h$ 和底半径 $r$ 分别为多少时圆锥的体积最小?

(22 级 a)

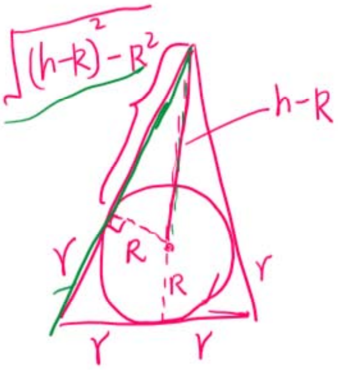
12 一个正圆锥体的侧面和底面均与一个半径为 $R$ 的球面相切。圆锥的高 $h$ 和底半径 $r$ 分别为多少时圆锥的体积最小?

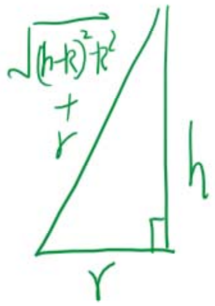
答案:

3 分: $(\sqrt{(h-R)^2-R^2}+r)^2=h^2+r^2$ 得到 $r^2=\dfrac{R^2h}{h-2R}$

5 分: $V(h)=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2h^2}{h-2R}$, 对 $V(h)$ 求导来求极值

2 分: $h=4R$ 时 $V(h)$ 取最小值 $\dfrac{8}{3}\pi R^3$, 此时 $r=\sqrt{2}R$



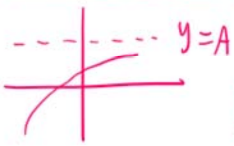

$h^2+r^2=(\sqrt{\ }+r)^2$

凸凹性、拐点、渐近线、曲率、作图

$f'$ ↗ ↘

$f''$ $\cap$ $\cup$

拐




(22 级 a)

$x\to\infty,\ y\to A$ $y=A$ 水平渐近线

$x\to x_0,\ y\to\infty$ $x=x_0$ 垂直渐近线

$f(x)=(x-1)e^{\arctan x}$ 在 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线方程是

$x\to\infty$, $f(x)-(kx+b)\to 0$. $y=kx+b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线

$$y=e^{\frac{\pi}{2}}x-2e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)}$$

$\checkmark\ k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)e^{\arctan x}}{x}=e^{\frac{\pi}{2}}$ $e^{\arctan x}\to e^{\frac{\pi}{2}}$

$\checkmark\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{\arctan x}-e^{\frac{\pi}{2}}x\right]$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

$= \lim(-e^{\arctan x}) + \lim x\cdot[e^{\arctan x}-e^{\frac{\pi}{2}}]$ $(\infty\cdot 0)$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-e^{\arctan x}) + \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{\arctan x} - e^{\frac{\pi}{2}}\right] \quad (\infty\cdot 0)$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\arctan x}-e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= -e^{\pi/2} + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}-0}{-\frac{1}{x^2}} = -2e^{\frac{\pi}{2}}$$

（21级）

五、（本题 7 分）作函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形.

$y'$

⇒ 驻点 $x=0,2$　不可导点 $x=1$

$$y'=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0,\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow x=1 \text{ 二阶导数不存在的点}$$

单调区间，凹凸区间，

渐近线 $x=1, y=x+1$

$\lim_{x\to\infty} y=\infty$ 无水平渐近线

$\lim_{x\to ?}\frac{x^2}{x-1}=\infty$, $x=1$ 垂直渐近线

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=1,\quad b=\lim\left[\frac{x^2}{x-1}-1\cdot x\right]=1$$

$$y'\cdot\sqrt{1-x^2}=-2x$$

$$(y')^2\cdot(1-x^2)=4x^2. \quad 2y'y''(1-x^2)+(y')^2\cdot(-2x)=8x$$

$x=0$

6. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率.

解. $y>0$ 时　$y'=-\frac{2x}{\ldots}$　　$y'(0)=0$

$|y''| \cdot (-2\lambda) = 0\lambda$

$\uparrow$

解：$y>0$ 时，$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y'(0)=0$ $\quad x=0$

$$y'' = -2 \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}, \quad y''(0) = -2$$

所求曲率 $k = \frac{|y''(0)|}{(1+y'^2(0))^{\frac{3}{2}}} = 2$

$$k = \frac{|y''(0)|}{(1+y'(0)^2)^{3/2}}$$

曲线 $\underline{r = r(\theta)} = a(1+\cos\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cdot\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\theta_0} = y'(x_0)$$

（14 级）利用函数凸性证明：$\underline{a^{1-\lambda}b^{\lambda} \le (1-\lambda)a + \lambda b}$，其中 $a>0, b>0, 0<\lambda<1$.

$\Updownarrow$

证明:

$f(\underline{\lambda} a + \underline{(1-\lambda)} b) < \underline{(1-\lambda)} f(a) + \underline{\lambda} f(b)$

$>$

$y = \ln x, y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$，上凸

构造 $f(t)$.

$(1-\lambda)\ln a + \lambda \ln b \le \ln\left((1-\lambda)a + \lambda b\right)$

$a^{1-\lambda}b^{\lambda} \le (1-\lambda)a + \lambda b$

$f''(t) > 0$, $\cup$ $\quad <$

$f''(t) < 0$ $\quad \cap$ $\quad >$

中值定理的证明

① Lagrange. Cauchy 中值 证明

( Rolle )

② Fermat 引理.

③ 公式 → $\begin{cases} \text{无最值} \to \text{介值} \\ \text{有最值} \to \text{Rolle 定理} \end{cases}$