线性代数与解析几何习题讲解

习题1 部分习题

1.计算下列行列式：

$$(5)\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

解：原式$=x^3+y^3+y^3-xy^2-xy^2-xy^2$

$$=x^3+2y^3-3xy^2$$

解法2:

$$\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix} \overset{\substack{c1+c2 \\ c1+c3}}{=} \begin{vmatrix} x+2y & y & y \\ x+2y & x & y \\ x+2y & y & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r2-r1 \\ r3-r1}}{=} \begin{vmatrix} x+2y & y & y \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{vmatrix} = (x+2y)(x-y)^2$$

2.证明下列等式：

(1) $$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

解：根据二阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y)-c(b+x)$$

$$= ad-bc+ay-cx$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

2.证明下列等式：

$$(2)\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解：根据3阶行列式的定义：

$$\text{左式}=0\times e\times c+b\times f\times 0+1\times d\times a$$

$$-a\times e\times 0-b\times 1\times c-f\times d\times 0$$

$$=ad-bc$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. 求相应的i, j值：

(1) $17i52j6$成偶排列；

解： 由于排列是7阶排列，i, j是 3, 4 或 4, 3

当$i=3, j=4$时，

$$\tau(1735246)=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7$$

$$=0+3+1+2+1+1+0=8$$

1735246是偶排列，此时，$i=3, j=4$

$i=4, j=3$时，1745236是奇排列，不符合要求。

5. 如果排列$i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数为m，求排列$i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$的逆序数。

解：若$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=m$,

排列$i_1 i_2 \cdots i_n$中任何两个数i_p, i_q按排列中的次序配对$<i_p, i_q>$（其中$p<q$），共有C_n^2种配对.

在排列$i_1 i_2 \cdots i_n$中有$C_n^2 - m$个配对$<i_p, i_q>$是正序的，有m个配对是逆序的。

在排列$i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$中有$C_n^2 - m$个配对$<i_q, i_p>$(其中$q>p$)是逆序的，有$m$个配对是正序的。

$$\therefore \tau(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1)=C_n^2 - m = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

7 写出5阶行列式$\left|a_{ij}\right|$中含有因子$a_{12}a_{35}a_{41}$的项。

解：含有因子$a_{12}a_{35}a_{41}$的项：$(-1)^{\tau(2j_2 51 j_5)}a_{12}a_{2j_2}a_{35}a_{41}a_{5j_5}$

其中，$j_2 j_5$ 是$3,4$ 或 $4,3$

所求项：$(-1)^{\tau(23514)}a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}+(-1)^{\tau(24513)}a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$

$$=a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}-a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$$

8 在多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & 7 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & x & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$中，求$x^2$的系数。

解：含有x^2的项：

$$(-1)^{\tau(1342)} a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + (-1)^{\tau(1423)} a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$

$$+(-1)^{\tau(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

$$= (-1)^2 x^2 \cdot 5 \cdot 1 + (-1)^2 x \cdot 0 \cdot x \cdot 2 + (-1)^6 (-1) x^2 \cdot 2$$

$$= 3x^2$$

9 证明：如果n阶行列式D含有多于n^2-n个元素为零，则$D=0$

解：行列式D不为零的元素少于n个, n行中至少有某一行的元素全为0. 则D=0.

10 用行列式的定义计算下列行列式：

（3）$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

解：原式 $=(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$

$+(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}+(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

$=(-1)^{0}a^{4}+(-1)^{1}a^{2}b^{2}+(-1)^{5}b^{2}a^{2}+(-1)^{6}b^{4}$

$=(a^{2}-b^{2})^{2}$

10 用行列式的定义计算下列行列式：

（5）$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解：原式$=(-1)^{\tau(n12\cdots(n-1))}a_{1n}a_{21}a_{32}\cdots a_{n,n-1}$

$$=(-1)^{n-1}a_n\times1\times1\times\cdots\times1$$

$$=(-1)^{n-1}a_n$$

11 利用行列式的性质计算下列行列式：

（4）$\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 4^3 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \\ 3^3 & 4^3 & 1^3 & 2^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 1^3 \end{vmatrix}$

解：原式＝$\begin{vmatrix} 1^3+2^3+3^3+4^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1^3+2^3+3^3+4^3 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \\ 1^3+2^3+3^3+4^3 & 4^3 & 1^3 & 2^3 \\ 1^3+2^3+3^3+4^3 & 3^3 & 4^3 & 1^3 \end{vmatrix}$

$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \\ 1 & 4^3 & 1^3 & 2^3 \\ 1 & 3^3 & 4^3 & 1^3 \end{vmatrix} = 100\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -7 & -19 & -37 \\ 0 & 56 & -26 & -56 \\ 0 & 19 & 37 & -63 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r3+8r2 \\ r4+3r2}}{=} 100\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -7 & -19 & -37 \\ 0 & 0 & -178 & -352 \\ 0 & -2 & -20 & -174 \end{vmatrix} = 200\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -7 & -19 & -37 \\ 0 & 0 & -178 & -352 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r2-7r4}{=} 200\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & 0 & 51 & 572 \\ 0 & 0 & -178 & -352 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \end{vmatrix} \overset{r2\leftrightarrow r4}{=} -200\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \\ 0 & 0 & -178 & -352 \\ 0 & 0 & 51 & 572 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r3+3r4}{=} -200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \\ 0 & 0 & -25 & 1364 \\ 0 & 0 & 51 & 572 \end{vmatrix} \overset{r4+2r3}{=} -200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \\ 0 & 0 & -25 & 1364 \\ 0 & 0 & 1 & 3300 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r3+25r4}{=} -200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \\ 0 & 0 & 0 & 83864 \\ 0 & 0 & 1 & 3300 \end{vmatrix} \overset{r3\leftrightarrow r4}{=} 200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & -1 & -10 & -87 \\ 0 & 0 & 1 & 3300 \\ 0 & 0 & 0 & 83864 \end{vmatrix}$$

$$=200\times 1\times (-1)\times 83864 = -16772800$$

11 利用行列式的性质计算下列行列式：

（5）$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}$$

解：原式$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)x & x & \cdots & x & a \\ a+(n-1)x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)x & a & \cdots & x & x \\ a+(n-1)x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r2-r1 \\ r3-r1 \\ \vdots \\ r_n-r1}}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)x & x & \dots & x & a \\ 0 & 0 & \dots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{c1\leftrightarrow c_n}{=} -\begin{vmatrix} a & x & \dots & x & a+(n-1)x \\ 0 & 0 & \dots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \dots & 0 & 0 \\ x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+(n-1)x)(a-x)^{n-1}$$

11 利用行列式的性质计算下列行列式：

（6）$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

解：当$a=0$时，若$n=1$,原式$=x$;

$$若n=2,原式=\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix}=x^2$$

若$n \geq 3$，原式=0

当a $\neq$ 0时，

$$\text{原式} \overset{\substack{c_n - \frac{x}{a}c1 \\ c_n - \frac{x}{a}c2 \\ \vdots \\ c_n - \frac{x}{a}c_{n-1}}}{=} \begin{vmatrix} x & x & \dots & x & a-(n-1)\dfrac{x^2}{a} \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-2}(a^2-(n-1)x^2)$$

12 证明下列等式：

（3）$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = [a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}](a-1)^{n-1}$$

证：原式 $$\overset{\substack{c1+c2 \\ c1+c3 \\ \vdots \\ c1+c_n}}{=} \begin{vmatrix} a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & a+1 & 3 & \cdots & n \\ a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r2-r1 \\ r3-r1 \\ \vdots \\ r_n-r1}}{=}\left(a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right](a-1)^{n-1}$$

12 证明下列等式：

(4) $$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}$$

证：设 原式$=D_n$

按第1行展开：

$$D_n = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+2} ab \begin{vmatrix} 1 & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$
=(a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - ab\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-2}
$$

$$
\therefore D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n - aD_{n-1} &= bD_{n-1} - abD_{n-2} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\
&= b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) \\
&= \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) \\
&= b^{n-2}\left(\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} - a\left|a+b\right|\right) = b^{n-2}(b^2) = b^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n &= aD_{n-1} + b^n \\
&= a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n \\
&= a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n \\
&= a^2 (aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n \\
&= a^3 D_{n-3} + a^2 b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n \\
&= \cdots \\
&= a^{n-1} D_1 + a^{n-2} b^2 + \cdots + a^2 b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n \\
&= a^{n-1}(a+b) + a^{n-2} b^2 + \cdots + a^2 b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n \\
&= a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + \cdots + a^2 b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}
\end{aligned}
$$

13 设有n阶行列式$D=|a_{ij}|$,若其元素满足$a_{ij}=-a_{ji}$, 则称为反对称行列式。试证明:

（1）反对称行列式主对角线上的元素全为0;

解: 反对称矩阵的元素满足: $a_{ij}=-a_{ji} \quad i,j=1,2,\cdots,n$

则 $a_{ii}=-a_{ii} \quad i=1,2,\cdots,n$

得 $a_{ii}=0 \quad i=1,2,\cdots,n$

即主对角线元素$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$全为0。

13 设有n阶行列式$D=|a_{ij}|$,若其元素满足$a_{ij}=-a_{ji}$, 则称为反对称行列式。试证明：

（2）奇数阶反对称行列式必为0。

解：反对称矩阵的元素满足：$a_{ij}=-a_{ji} \quad i,j=1,2,\cdots,n$

则 $$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D=D^T=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{n\text{是奇数}}{=} -D$$

$$\therefore D=0$$

14 计算下列行列式：

（2）$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解：根据拉普拉斯展开定理，选定第1, 2列展开：

$$原式=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})$$

14 计算下列行列式：

(3) $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}$$

解：选定第1行展开：

$$原式 = x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} + y\cdot(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} y & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & y & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= x^n + (-1)^{1+n} y^n$$

14 计算下列行列式：

（4）$\begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}$

解：令 原式 $= D_n$，按第1行展开：

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & z & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - y\begin{vmatrix} y & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} = xD_{n-1} - zyD_{n-2}$$

得 $$D_n = xD_{n-1} - yzD_{n-2}$$

令 $$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$\begin{cases} a+b=x \\ ab=yz \end{cases}$$

得： $$a = \frac{x+\sqrt{x^2-4yz}}{2}, b = \frac{x-\sqrt{x^2-4yz}}{2}$$

则 $$D_n - aD_{n-1} = b^{n-1}(D_1 - aD_0) = b^{n-1}(x - a\cdot 1)$$

$$= b^{n-1}(a+b-a) = b^n$$

利用a,b的对称性，同样可得 $D_n - bD_{n-1} = a^n$

$$\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n \\ D_n - bD_{n-1} = a^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} bD_n - abD_{n-1} = b^{n+1} \\ aD_n - abD_{n-1} = a^{n+1} \end{cases}$$

得 $(a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}$

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

其中，$a = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}, b = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}$

17 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \cdots & x^2 & x & 1 \\ (x+1)^n & (x+1)^{n-1} & \cdots & (x+1)^2 & x+1 & 1 \\ (x+2)^n & (x+2)^{n-1} & \cdots & (x+2)^2 & x+2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x+n-1)^n & (x+n-1)^{n-1} & \cdots & (x+n-1)^2 & x+n-1 & 1 \\ (x+n)^n & (x+n)^{n-1} & \cdots & (x+n)^2 & x+n & 1 \end{vmatrix}$$

解：原式 $=(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x^n & \cdots & x^3 & x^2 & x \\ 1 & (x+1)^n & \cdots & (x+1)^3 & (x+1)^2 & x+1 \\ 1 & (x+2)^n & \cdots & (x+2)^3 & (x+2)^2 & x+2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (x+n-1)^n & \cdots & (x+n-1)^3 & (x+n-1)^2 & x+n-1 \\ 1 & (x+n)^n & \cdots & (x+n)^3 & (x+n)^2 & x+n \end{vmatrix}$

$$
=(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^4 & x^3 & x^2 \\ 1 & x+1 & \dots & (x+1)^4 & (x+1)^3 & (x+1)^2 \\ 1 & x+2 & \dots & (x+2)^4 & (x+2)^3 & (x+2)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x+n-1 & \dots & (x+n-1)^4 & (x+n-1)^3 & (x+n-1)^2 \\ 1 & x+n & \dots & (x+n)^4 & (x+n)^3 & (x+n)^2 \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & x+1 & (x+1)^2 & \dots & (x+1)^{n-1} & (x+1)^n \\ 1 & x+2 & (x+2)^2 & \dots & (x+2)^{n-1} & (x+2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x+n-1 & (x+n-1)^2 & \dots & (x+n-1)^{n-1} & (x+n-1)^n \\ 1 & x+n & (x+n)^2 & \dots & (x+n)^{n-1} & (x+n)^n \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!
$$

21 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是互不相同的实数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$是任意实数。用克拉默法则证明：存在唯一的次数小于n的多项式$f(x)$，使得

$$f(a_i) = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

解：设次数小于n的多项式$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$

要求满足

$$\begin{cases} f(a_1) = c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_1^2 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ f(a_2) = c_0 + c_1 a_2 + c_2 a_2^2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2 \\ \qquad \vdots \\ f(a_n) = c_0 + c_1 a_n + c_2 a_n^2 + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

即要求$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$是下面线性方程组的解：

$$\begin{cases} c_0 + a_1 c_1 + a_1^{\ 2} c_2 + \cdots + a_1^{\ n-1} c_{n-1} = b_1 \\ c_0 + a_2 c_1 + a_2^{\ 2} c_2 + \cdots + a_2^{\ n-1} c_{n-1} = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_0 + a_n c_1 + a_n^{\ 2} c_2 + \cdots + a_n^{\ n-1} c_{n-1} = b_n \end{cases}$$

方程组的系数行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \ne 0$

由克拉默法则，方程组有唯一解$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$，所以，满足条件的多项式$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$存在且唯一。

习题2 部分习题

1.计算下列矩阵：

$$(3)\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ c & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解：原式$=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ac+ab+bc & a+b+c & a+b+c \\ ac+ab+bc & a^2+b^2+c^2 & a+b+c & a+b+c \\ a+b+c & a+b+c & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.计算下列矩阵：

(5) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

解：$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

假设n=k时，$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$

则n=k+1时，

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha & -\cos k\alpha\sin\alpha - \sin k\alpha\cos\alpha \\ \sin k\alpha\cos\alpha + \cos k\alpha\sin\alpha & \cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix}$$

所以，由归纳法知

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

4.求与$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$可交换的所有矩阵。

解：设所求矩阵为$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$,

则$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3x_{11}+x_{21} & 3x_{12}+x_{22} \\ -2x_{11}+2x_{21} & -2x_{12}+2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_{11}-2x_{12} & x_{11}+2x_{12} \\ 3x_{21}-2x_{22} & x_{21}+2x_{22} \end{pmatrix}$$

得方程组：$\begin{cases} 3x_{11}+x_{21} = 3x_{11}-2x_{12} \\ 3x_{12}+x_{22} = x_{11}+2x_{12} \\ -2x_{11}+2x_{21} = 3x_{21}-2x_{22} \\ -2x_{12}+2x_{22} = x_{21}+2x_{22} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x_{12}+x_{21}=0 \\ x_{11}-x_{12}-x_{22}=0 \\ 2x_{11}+x_{21}-2x_{22}=0 \\ 2x_{12}+x_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{12}+x_{21}=0 \\ x_{11}-x_{12}-x_{22}=0 \\ 2x_{11}+x_{21}-2x_{22}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{12}+x_{21}=0 \\ x_{11}-x_{12}-x_{22}=0 \\ 2x_{12}+x_{21}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_{12}+x_{21}=0 \\ x_{11}-x_{12}-x_{22}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{21}=-2x_{12} \\ x_{22}=x_{11}-x_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11}=a & (\text{任意复数}) \\ x_{12}=b & (\text{任意复数}) \\ x_{21}=-2b \\ x_{22}=a-b \end{cases}$$

所求矩阵：$\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-b \end{pmatrix}$，其中$a,b$是任意复数

5.设$A=\begin{pmatrix} a_1E_{n_1} & O & \cdots & O \\ O & a_2E_{n_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & a_rE_{n_r} \end{pmatrix}$, $a_i \neq a_j (i \neq j;\quad i, j = 1, 2, \cdots, r)$,

E_{n_i}是n_i阶单位矩阵（$i=1,2,\cdots,r$）,且$\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n.$

证明与A可交换的矩阵只能是准对角矩阵$diag(A_1, A_2, \cdots, A_r)$,

其中A_i是n_i阶矩阵（$i=1,2,\cdots,r$）

证：设与A可交换的矩阵为$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}$,

其中B_{ij}是$n_i \times n_j$矩阵（$i, j=1,2,\cdots,r$）

由于$AB=BA$

$$\begin{pmatrix} a_1E_{n_1} & O & \cdots & O \\ O & a_2E_{n_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & a_rE_{n_r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1E_{n_1} & O & \cdots & O \\ O & a_2E_{n_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & a_rE_{n_r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1B_{11} & a_1B_{12} & \cdots & a_1B_{1r} \\ a_2B_{21} & a_2B_{22} & \cdots & a_2B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_rB_{r1} & a_rB_{r2} & \cdots & a_rB_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1B_{11} & a_2B_{12} & \cdots & a_rB_{1r} \\ a_1B_{21} & a_2B_{22} & \cdots & a_rB_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1B_{r1} & a_2B_{r2} & \cdots & a_rB_{rr} \end{pmatrix}$$

得 $B_{ij}=0 \quad (i\neq j; \quad i,j=1,2,\cdots,r)$

令 $B_{ii}=A_i$ (是n_i阶矩阵) $(i=1,2,\cdots,r)$ 则$B=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_r \end{pmatrix}$

6.证明：与任何n阶矩阵都可以交换的矩阵A只能是数量矩阵kE，即 $A = kE$

证：设B为任意n阶方阵.

由于 $AB = BA$，则A只能是n阶矩阵。

$$设A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由于B是任意的n阶方阵，令

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}p\text{行}$$

$$q\text{列}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{r}
\text{第}p\text{行}\rightarrow \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{p+1,p} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{np} & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{q1} & \cdots & a_{q,q-1} & a_{qq} & a_{q,q+1} & \cdots & a_{qn} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\leftarrow p\text{行}
$$

$$\uparrow q\text{列} \qquad\qquad \uparrow q\text{列}$$

$$a_{q1} = a_{q2} = \cdots = a_{q,q-1} = a_{q,q+1} = \cdots = a_{qn} = 0$$

$$a_{pp} = a_{qq}$$

由于可取$p, q = 1, 2, \cdots, n$

得 $a_{ij} = \begin{cases} k & \text{当} i = j \text{时} \\ 0 & \text{当} i \neq j \text{时} \end{cases}$

所求矩阵$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k \end{pmatrix} = kE$

8.若$A=\frac{1}{2}(B+E)$,证明：$A^2=A$的条件当且仅当$B^2=E$

证：$\because A^2=\frac{1}{4}\left(B^2+2B+E\right)$

$$A^2=A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(B^2+2B+E\right)=\frac{1}{2}(B+E)$$

$$\Leftrightarrow \quad B^2+2B+E=2(B+E)$$

$$\Leftrightarrow \quad B^2=E$$

9.证明：若A是实对称矩阵且$A^2=O$，则$A=O$

证：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\because A$是对称矩阵，$\therefore A^T = A$

$$A^2 = AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$= O$$

$$a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2=0$$

$$a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2=0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2=0$$

因为所有元素都是实数，得

$$a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$$

$$a_{21}=a_{22}=\cdots=a_{2n}=0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{nn}=0$$

$$\therefore A=O$$

11.证明：任一方阵都可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

证：设A是任一个方阵。

$$A=\frac{1}{2}\left(A+A+A^{T}-A^{T}\right)\quad=\frac{1}{2}\left(A+A^{T}\right)+\frac{1}{2}\left(+A-A^{T}\right)$$

$$\because\left(A+A^{T}\right)^{T}=A^{T}+\left(A^{T}\right)^{T}=A^{T}+A=A+A^{T}$$

$$\therefore\frac{1}{2}\left(A+A^{T}\right)\text{是对称矩阵。}$$

$$\because \left(A-A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A-A^T\right)$$

$\therefore \frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$是反对称矩阵。

$A=$对称矩阵+反对称矩阵。

13. 设$A=\left(a_{ij}\right)$为n阶方阵，对任意的n维向量

$$X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T，都有AX=O.\ 证明：A=O$$

证：由于$X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$的任意性，

取$X=\left(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\right)^T$,(只有第$i$个分量为1)

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a_{1i}=a_{2i}=\cdots=a_{ni}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$A=O$$

16. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的逆。其中$a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

解:$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$
\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_{n-1} \leftrightarrow r_n \\ r_{n-2} \leftrightarrow r_{n-1} \\ \vdots}}
\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0
\end{array}\right)
$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$是所求的逆。

17. 求矩阵X, 使得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解： 设上述矩阵方程为：$AX = B$

先求逆矩阵A^{-1}：

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_2 - r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} - r_n}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

18. 求方程组的唯一解。

$$（2）\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1-3x_2 \qquad\quad =0 \\ x_1 \qquad\quad +5x_3=5 \end{cases}$$

解：方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

先求$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r1 \leftrightarrow r3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r3-2r1]{r2-2r1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r2+r3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -17 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r3-4r2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -17 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 61 & -3 & -4 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{61}r3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -17 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/61 & -4/61 & 14/61 \end{array}\right) \xrightarrow[r2+17r3]{r1-5r3}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 15/61 & 20/61 & -9/61 \\ 0 & 1 & 0 & 10/61 & -7/61 & -6/61 \\ 0 & 0 & 1 & -3/61 & -4/61 & 14/61 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} 15 & 20 & -9 \\ 10 & -7 & -6 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

方程组的解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} 15 & 20 & -9 \\ 10 & -7 & -6 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} -75 \\ -50 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -75/61,\quad x_2 = -50/61,\quad x_3 = 76/61$$

21. 求（$k+l$）$\times(k+l)$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} I_k & B \\ O & I_l \end{pmatrix}$$

的逆。其中I_k为k阶单位矩阵，B为$k\times l$矩阵。

解: $\because |A|=|I_k|\cdot|I_l|=1\neq 0$, A可逆。

设$A^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, 其中$X_{11}$是$k$阶矩阵；$X_{22}$是$l$阶矩阵。

$$\begin{pmatrix} I_k & B \\ O & I_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_k & B \\ O & I_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_l \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X_{11}+BX_{21}=I_k \\ X_{12}+BX_{22}=O \\ X_{21}=O \\ X_{22}=I_l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{11}=I_k \\ X_{12}=-B \\ X_{21}=O \\ X_{22}=I_l \end{cases}$$

得 $A^{-1}=\begin{pmatrix} I_k & -B \\ O & I_l \end{pmatrix}$

24. 设A为n阶方阵，证明 $\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$

证：$\because A \cdot A^* = |A| E$

$|A|\left|A^*\right| = \left||A| E\right| = |A|^n |E| = |A|^n$

当$|A| \neq 0$时，$\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$

当$|A|=0$时，$A \cdot A^* = 0 \cdot E = O$ ，（现要证$\left|A^*\right|=0$）

反证法：假设$\left|A^*\right| \neq 0$，

$(A^*)^{-1}$存在，则$A = O \cdot (A^*)^{-1} = O$，有$A^* = O$，

那么$\left|A^*\right| = 0$，与假设矛盾。

所以，$\left|A^*\right| = 0 = |A|^{n-1}$

习题3 部分习题

1.判断下列等式何时成立：

$$(1)\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$$

$$(2)\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$$

证：$(1)\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，得 $\vec{a}$与$\vec{b}$垂直

证：(2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{2}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^{2}=\left|\vec{a}\right|^{2}+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{\mathrm{b}}\right|^{2}=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=1,\qquad <\vec{a},\vec{b}>=0$$

$\vec{a},\vec{b}$同向。

24.证明：不在同一条直线上的三点(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)所确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

证：三点所在的平面方程：

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r1-r2 \\ r3-r2 \\ r4-r2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ 0 & x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

所以平面方程: $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

习题4 部分习题

1.解线性方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+4x_4+x_5=4 \\ 3x_1+7x_2-x_3-3x_4+2x_5=10 \\ -x_2-13x_3-2x_4+x_5=-14 \\ x_3-16x_4+2x_5=-11 \\ 2x_4+5x_5=12 \end{cases}$$

方法：将增广矩阵用行初等变换化为阶梯形矩阵。

解：

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{r2-3r1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r3+r2}\left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{r4-r3}\left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r5-2r4}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 14 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

得同解方程组：$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$

方程组的解$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1,1,1,1,2)$

3. 设$\alpha_1=(3,-1,1)$, $\alpha_2=(1,1,2)$, $\alpha_3=(1,-3,-3)$, $\alpha_4=(4,0,5)$

（1）证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关；

（2）证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$线性无关。

证明 (1)（用“线性相关的定义”方法）

设有数：k_1, k_2, k_3, k_4,

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$ 成立。

$$k_1(3,-1,1)+k_2(1,1,2)+k_3(1,-3,-3)+k_4(4,0,5)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} 3k_1+k_2+k_3+4k_4=0 \\ -k_1+k_2-3k_3 \qquad =0 \\ k_1+2k_2-3k_3+5k_4=0 \end{cases}$$

线性方程组的系数矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -3 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{一系列行变换}}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\because r(A)=3<4$（变量个数）， $\therefore$ 方程组有非零解k_1,k_2,k_3,k_4

$\therefore \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4$线性相关。

(2)（用“线性相关的定义”方法）

设有数：k_1,k_2,k_3

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4=0$ 成立。

$$k_1(3,-1,1)+k_2(1,1,2)+k_3(4,0,5)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} 3k_1+k_2+4k_3=0 \\ -k_1+k_2=0 \\ k_1+2k_2+5k_3=0 \end{cases}$$

线性方程组的系数矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\because r(A)=3=$变量个数， $\therefore$方程组只有唯一解$k_1=0, k_2=0, k_3=0$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$线性无关。

3. 设$\alpha_1=(3,-1,1)$, $\alpha_2=(1,1,2)$, $\alpha_3=(1,-3,-3)$, $\alpha_4=(4,0,5)$

（1） 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关；

（2） 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$线性无关。

证明 (1) （用秩的方法）

$$\left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1\leftrightarrow r3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r3-3r1]{r2+r1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3+2r2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r2-3r3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 8\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r2\leftrightarrow r3]{\frac{1}{8}r2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\because r\left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T\right)=3<4,\quad \therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关。

(2) $\because r\left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_4^T\right)=3,\quad \therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$线性无关。

4 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

证明：向量组$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$也线性无关。

证明：（用秩的方法）不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是列向量。

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

矩阵$(\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \xrightarrow{c3-c2} (\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_3)$

$\xrightarrow{c2-c1} (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$

$$r(\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=r(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=3$$

$\therefore$向量组$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$线性无关。

5 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s$,

$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,\ \beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}$等价。

证明：（用秩的方法）不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是列向量。

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=(s-1)\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)$$

矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

$$\xrightarrow{\substack{c_1+c_{s+1}\\ c_2+c_{s+2}\\ \vdots\\ c_s+c_{2s}}}(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

$$\xrightarrow{\substack{(s-1)c_1\\ (s-1)c_2\\ \vdots\\ (s-1)c_s}}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s,\ \cdots,\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

$$\longrightarrow (0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

$$\therefore\quad r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示。

显然，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。

所以，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价。

6. 设向量组$\xi_1=(1,-1,2,4)$，$\xi_2=(0,3,1,2)$，$\xi_3=(3,0,7,14)$，

$\xi_4=(1,-1,2,0)$，$\xi_5=(2,1,5,6)$。

(1) 证明ξ_1,ξ_2线性无关；

(2) 求向量组中包含ξ_1,ξ_2的极大线性无关组。

解 $$\left(\xi_1^T,\xi_2^T,\xi_3^T,\xi_4^T,\xi_5^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r3-2r1]{\substack{r4-2r3 \\ r2+r1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r2 \\ -\frac{1}{4}r4}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r3-r2}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\qquad\xrightarrow{r3\leftrightarrow r4}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(1) $\because r(\xi_1,\xi_2)=2,\qquad \therefore \xi_1,\xi_2$线性无关。

(2) $\because r(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5)=3,$

$\therefore$ 极大线性无关组有3个向量。

$r(\xi_1,\xi_2,\xi_4)=3,\quad \xi_1,\xi_2,\xi_4$线性无关。

ξ_1,ξ_2,ξ_4是向量组的极大线性无关组。

8. 证明：若向量组I可由向量组II线性表示，则

向量组I的秩$\le$向量组II的秩

证明　若向量组I可由向量组II线性表示，

由于向量组I的极大线性无关组与向量组I等价；

向量组II的极大线性无关组与向量组II等价；

则向量组I的极大线性无关组可由向量组II的极大线性无关组线性表示。

由推论4.1知，

向量组I的极大无关组的向量个数$\le$向量组II的极大无关组的向量个数

即　　　向量组I的秩　$\le$　向量组II的秩

9. 设A, B都是$m\times n$矩阵，证明：$r(A+B)\le r(A)+r(B)$

证：令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$A$的$n$个列向量，

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$B$的$n$个列向量.

则 $A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$

其中，$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$是$A+B$的$n$个列向量，

设$r(A)=s$，$r(B)=t$.

不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$.

设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的极大线性无关组为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

向量组$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$可由

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示。

$\boxed{\text{向量组}\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n\text{的秩}\le\text{向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{的秩}}$

而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的秩$\le$向量组的向量个数$s+t$

所以，$r(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\le s+t$

即 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

10. 设A是$m\times n$矩阵，证明：$r(A^T)=r(A)$

证：令$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$A$的$n$个列向量。

则 $$A^T=\begin{pmatrix}\alpha_1{}^T\\ \alpha_2{}^T\\ \vdots\\ \alpha_n{}^T\end{pmatrix}$$

其中，$\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots,\alpha_n{}^T$是$A^T$的$n$个行向量。

A的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$A^T$的行向量组$\{\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots,\alpha_n{}^T\}$是相同的向量组，它们有相同的极大线性无关组，则有

A的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$的秩=$A^T$的行向量组$\{\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots,\alpha_n{}^T\}$的秩

即 $$r(A)=r(A^T)$$

15.设线性方程组为：

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 9x_1-x_2+14x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=1 \\ 4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=2 \end{cases}$$

(1)求方程组导出组的一个基础解系；

(2)用特解和导出组的基础解系表示方程组的所有解。

解：

$$A=\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r2-3r3]{r1-r3} \left(\begin{array}{cccc:c} -1 & -3 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r2+4r1]{r3+3r1}\left(\begin{array}{cccc:c} -1 & -3 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} -1 & -3 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1\times r2]{-1\times r1}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r1-2r2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -11 & 0 & 22 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得同解方程组: $\begin{cases} x_1 - 11x_2 \qquad + 22x_4 = -2 \\ \qquad 7x_2 + x_3 - 14x_4 = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 11c_1 - 22c_2 - 2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -7c_1 + 14c_2 + 2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1)方程组导出组$AX=0$的基础解系：$\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2）方程组的一个特解是$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

其所有解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

20.对λ不同的值，判断方程组是否有解，有解时求出全部解

（2） $$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}$$

解：

$$A=\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{r1\leftrightarrow r3}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r3-(\lambda+1)r1]{r2-r1}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & -\lambda & 1-(1+\lambda)^2 & 1-\lambda^2(1+\lambda)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r3+r2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-(1+\lambda)^2-\lambda & 1-\lambda^2(1+\lambda)+\lambda-\lambda^2 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & -\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+1 \end{array}\right)$$

当$\lambda=0$时, $A\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$r(A)=1<r(A)=2$，此时方程组无解；

当λ=-3时，$A \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$

$r(A)=2<r(A)=3$, 此时方程组无解;

当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$时，$r(A)=r(A)=3$, 方程组有唯一解。

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-\lambda^2+2}{\lambda(\lambda+3)} \\ x_2 = \dfrac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \\ x_3 = \dfrac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \end{cases}$$

21. 设A为$m\times n$矩阵，证明：若任一个n维向量都是$AX=0$的解，则$A=0$

解：设n个n维向量$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$,

由题意知，它们都是$AX=0$的解。

则 $Ae_1=0,\ Ae_2=0,\ \cdots,\ Ae_n=0$

$$A(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n)=0$$

即 $AE=0$ 得 $A=0$

23. 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是非齐次线性方程组$AX=b$的解。证明：

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

也是$AX=b$的一个解的充分必要条件是$k_1+k_2+\cdots+k_t=1$

证：充分性。设$k_1+k_2+\cdots+k_t=1$

由于$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是非齐次线性方程组$AX=b$的解，

则有 $A\eta_1=b,\quad A\eta_2=b,\quad \cdots,\quad A\eta_t=b$

那么 $A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_tA\eta_t$

$$=k_1b+k_2b+\cdots+k_tb=\left(k_1+k_2+\cdots+k\right)b=b$$

所以，$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$也是$AX=b$的一个解。

必要性。设$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$也是$AX=b$的一个解。

那么 $A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)=b$

$$k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_tA\eta_t=b$$

$$k_1b+k_2b+\cdots+k_tb=b$$

$$\left(k_1+k_2+\cdots+k_t\right)b=b$$

$\because \mathrm{b}\neq 0,\quad \therefore k_1+k_2+\cdots+k_t=1$

习题5 部分习题

1. 求矩阵的特征值和特征向量。

（2） $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{c1+c3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ \lambda-2 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r3-r1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 \\ -4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-4$

对特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，解方程组$(2E-A)X=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=-2c_1+c_2\\ x_2=c_1\\ x_3=c_2\end{cases}$

则 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ （c_1,c_2不全为0）

是对应$\lambda=2$的全部特征向量。

对特征值λ_3==-4，解方程组$(-4E-A)X=0$

$$-4E-A=\begin{pmatrix}-7 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -6 & -3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-7 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=c\\ x_2=-2c\\ x_3=3c\end{cases}$

则 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$ （c不为0）

是对应λ=-4的全部特征向量。

6. 设矩阵$B=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},A=C^{-1}B^{*}C,$

其中B^{*}是B的伴随矩阵。求$A+2E$的特征值和特征向量。

解：$A=C^{-1}B^{*}C=C^{-1}(|B|B^{-1})C=|B|C^{-1}B^{-1}C=|B|(BC)^{-1}C$

$=|B||C||C|^{-1}(BC)^{-1}C=|C|^{-1}|BC|(BC)^{-1}C=|C|^{-1}(BC)^{*}C$

$$BC=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&2&5\\2&2&5\end{pmatrix},(BC)^{*}=\begin{pmatrix}0&-7&7\\-5&2&2\\2&2&-5\end{pmatrix},$$

$$A=(-1)^{-1}\begin{pmatrix}0&-7&7\\-5&2&2\\2&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

$$A+2E=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-(A+2E)|=\begin{vmatrix} \lambda-9 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-7 & 4 \\ 2 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3)$$

$A+2E$的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=9$，$\lambda_3=3$

对$\lambda_1=\lambda_2=9$，解方程组$\left(9E-(A+2E)\right)X=0$：

$$9E-(A+2E)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得$\lambda_1=\lambda_2=9$的特征向量：$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2$不全为$0)$

对$\lambda_3=3$，解方程组$\big(3E-(A+2E)\big)X=0$：

$$3E-(A+2E)=\begin{pmatrix}-6&0&0\\2&-4&4\\2&2&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得$\lambda_3=3$的特征向量：$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $(k_1$不为$0)$

7. 试证对于可逆矩阵A, B，有$AB \sim BA$。

证： $\because BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}\left(AB\right)A$

$\therefore AB \sim BA$

8. 只对其自身相似的矩阵具有什么样的形式？

解： 设A只与自身相似，则对任意可逆矩阵P,

都有 $P^{-1}AP=A$

则 $AP=PA$

$$设A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

取$P=P(i,j(1))$ 这是第3类初等矩阵

$$P(i,j(1))\cdot A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & a_{ii}+a_{ji} & \cdots & a_{ij}+a_{jj} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot P(i,j(1))=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij}+a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj}+a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj}+a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则有　当$i \neq j$时，$a_{ji}=0,\ a_{ii}=a_{jj}$

由于i, j的任意性，得A的主对角元素都相等（令都等于k）不是猪对角元素都为0，因此有

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}=kE$$

10. 矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & a & 0\\ 7 & 9 & 2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$相似，试求$a,b$的值。

解: 因为$A\sim B$,有相同的特征多项式。

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ -2 & \lambda-a & 0\\ -7 & -9 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ -2 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-(a+1)\lambda+a+4)$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-b & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-b)(\lambda-3)$$

$$(\lambda-2)\left[\lambda^2-(a+1)\lambda+a+4\right]=(\lambda-2)(\lambda-b)(\lambda-3)$$

得 $\lambda^2-(a+1)\lambda+a+4=\lambda^2-(b+3)\lambda+3b$

$$\begin{cases} a+1=b+3 \\ a+4=3b \end{cases}$$

得到 $a=5, b=3$

12. 设A是$n(n \geq 3)$阶矩阵，如果$A \neq 0$, 但$A^3 = 0$, 试证A不可对角化。

证. 反证法。设A可对角化，则存在可逆矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1} \qquad A^3 = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^3 P^{-1}$$

$$0=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{3} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^{3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{3}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^{3} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^{3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{3}\end{pmatrix}=P^{-1}0P=0$$

则有$\lambda_1^{3}=0$，$\lambda_2^{3}=0,\cdots$，$\lambda_n^{3}=0$，

那么有$\lambda_1=0$，$\lambda_2=0,\cdots$，$\lambda_n=0$。

则 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}P^{-1}=0$

这与$A\neq 0$矛盾。

15. 试证明：设A是n阶实对称矩阵，且$A^2 = A$,则存在正交矩阵T,使得$T^T AT = diag(E_r, 0)$,其中r为秩，E_r为r阶单位矩阵。

证. 设A的特征值为λ，对应λ的特征向量为α。

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

$$A^2\alpha = \lambda\alpha$$

$$\lambda^2\alpha = \lambda\alpha$$

$\left(\lambda^2 - \lambda\right)\alpha = 0$, 则有 $\lambda^2 - \lambda=0$，即$\lambda=1$ 或 $\lambda=0$

A的特征值只能是1和0

设A有t个特征值为1，$n-t$个特征值为0.

则对实对称矩阵A，存在正交矩阵T, 使得

$$T^T AT = T^{-1}AT = diag(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{t\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{-}t\text{个}})=\begin{pmatrix} E_t & 0 \\ 0 & 0_{n-t} \end{pmatrix}$$

$$r(A)=r(T^T AT)=r\begin{pmatrix} E_t & 0 \\ 0 & 0_{n-t} \end{pmatrix}=t$$

所以，$t=r$

则有

$$T^T AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

习题6 部分习题

3. 用配方法把二次型化成标准形。

(3) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4$

解.

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \\ x_4=y_4 \end{cases}$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3+2y_1y_4$$

$$=y_1^2+y_1(y_3+2y_4)+\frac{1}{4}(y_3+2y_4)^2-\frac{1}{4}(y_3+2y_4)^2-y_2^{\ 2}+y_2y_3$$

$$=(y_1+\frac{y_3}{2}+y_4)^2-\frac{1}{4}y_3^2-y_3y_4-y_4^2-y_2^2+y_2y_3$$

$$=(y_1+\frac{y_3}{2}+y_4)^2-y_2^2+y_2y_3-\frac{1}{4}y_3^2-y_3y_4-y_4^2$$

$$=(y_1+\frac{y_3}{2}+y_4)^2-(y_2-\frac{1}{2}y_3)^2-y_3y_4-y_4^2$$

$$=(y_1+\frac{y_3}{2}+y_4)^2-(y_2-\frac{1}{2}y_3)^2+\frac{1}{4}y_3^2-\frac{1}{4}y_3^2-y_3y_4-y_4^2$$

$$=(y_1+\frac{y_3}{2}+y_4)^2-(y_2-\frac{1}{2}y_3)^2+\frac{1}{4}y_3^2-(\frac{1}{2}y_3+y_4)^2$$

$$=z_1{}^2-z_2{}^2+\frac{1}{4}z_3^2-z_4{}^2$$

其中，令$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{y_3}{2} + y_4 \\ z_2 = y_2 - \dfrac{1}{2} y_3 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = \dfrac{1}{2} y_3 + y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_4 \\ y_2 = z_2 + \dfrac{1}{2} z_3 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = -\dfrac{1}{2} z_3 + z_4 \end{cases}$

所用非退化线性替换：$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + \dfrac{1}{2} z_3 - z_4 \\ x_2 = z_1 - z_2 - \dfrac{1}{2} z_3 - z_4 \\ x_3 = z_3 \\ x_4 = -\dfrac{1}{2} z_3 + z_4 \end{cases}$

6. 判断二次型是否正定。

(3) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10 x_1 x_3 + 6 x_2 x_3$

解. f的矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

各阶的顺序主子式:

$$P_1 = 1, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2, P_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 30\lambda - 105$$

A正定的充要条件是$\begin{cases} 4-\lambda^2>0 \\ -\lambda^2+30\lambda-105>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2<\lambda<2 \\ 15-2\sqrt{30}<\lambda<15+2\sqrt{30} \end{cases}$$

该不等式无解。

所以，无论λ取任何实数值，f都不正定。

7. 设A, B分别是m, n阶矩阵，分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

是否是正定矩阵？

解. 对任意非零列向量$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$，则$X_1, X_2$至少有一个

是非零向量。其中，X_1是m维列向量，X_2是n维列向量。

$$X^T C X=\begin{pmatrix} X_1{}^T & X_2{}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} X_1{}^T & X_2{}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AX_1 \\ BX_2 \end{pmatrix}=X_1^T A X_1+X_2^T B X_2>0$$

则C是正定矩阵。

12. 设A是n阶正定矩阵，证明：

(1)A^{-1}也是正定矩阵；

(2)A的伴随矩阵A^*也是正定矩阵。

证. $\because$ 设A是n阶正定矩阵，则A是对称矩阵，且A的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都大于0.

(1) $\because \left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}, \therefore A^{-1}$是对称矩阵。

A^{-1}的n个特征值:$\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$都大于0, A^{-1}是正定矩阵。

(2) $A^*=|A|A^{-1}, |A|>0, A^*$的$n$个特征值:$\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}$都

大于0, A^*是正定矩阵。

13. 设A是正定矩阵，证明：必存在正定矩阵B，使得$A=B^2$

证. $\because$ 设A是n阶正定矩阵，则A是对称矩阵，且A的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都大于0.

$\because$ A是实对称矩阵，存在正交矩阵Q, 使得

$$Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}^2Q^{-1}$$

$$=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

令 $B=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{-1}$,则$B$是正定矩阵。

有 $A=B^2$

21. 将二次方程化成标准方程，并指出是什么曲面。

(1) $4x^2-6y^2-6z^2-4yz-4x+4y+4z-5=0$

解. $4x^2-6y^2-6z^2-4yz-4x+4y+4z-5$

$$=(x,y,z)\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -2\\ 0 & -2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(-4,4,4)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-5$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+6 & 2\\ 0 & 2 & \lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+4)(\lambda+8)$$

A的3个特征值：$\lambda_1=4,\ \lambda_2=-4,\lambda_3=-8$

A的3个特征值：$\lambda_1=4$，$\lambda_2=-4, \lambda_3=-8$分别对应的特征向量：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

将向量单位化后，得正交矩阵Q= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

则有正交变换:$(x,y,z)^T=Q(x_1,y_1,z_1)^T$

$$4x^2-6y^2-6z^2-4yz-4x+4y+4z-5$$

$$=4x_1^2-4y_1^2-8z_1^2+(-4,4,4)Q(x_1,y_1,z_1)^T-5$$

$$=4x_1^2-4y_1^2-8z_1^2-4x_1+4\sqrt{2}z_1-5$$

则二次方程简化为：$x_1^2-y_1^2-2z_1^2-x_1+\sqrt{2}z_1-5/4=0$

$$x_1^2-y_1^2-2z_1^2-x_1+\sqrt{2}z_1-5/4=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2-y_1^2-2\left(z_1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{5}{4}$$

作平移变换：$\begin{cases} x_2=x_1-\dfrac{1}{2} \\ y_2=y_1 \\ z_2=z_1-\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

则得到曲面的标准方程：$x_2^2-y_2^2-2z_2^2=5/4$

这是一个双叶双曲面

21. 将二次方程化成标准方程，并指出是什么曲面。

(2) $x^2-y^2+4xz-4yz=3$

解. $x^2-y^2+4xz-4yz-3=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-3$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda+1 & 2\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda=(\lambda-3)(\lambda+3)\lambda$$

A的3个特征值：$3,-3,0$

则有正交变换:$(x,y,z)^T=Q(x_1,y_1,z_1)^T$,其中$Q$是正交矩阵

$$x^2-y^2+4xz-4yz-3=3x_1{}^2-3y_1{}^2-3$$

得到曲面的标准方程：$3x_1^2 - 3y_1^2 - 3 = 0$

即：$x_1^2 - y_1^2 = 1$

这是一个双曲柱面。