座位号________

专业班级________

学院________

学号________

姓名________

（密封线内不答题）

线　　封　　密

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生考试

2023-2024-1 学期期中考试《(双语）微积分 II（一)》

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在答题纸上；
3．考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 二 大题，满分 100 分， 考试时间 95 分钟。

I Please fill the correct answers in the following blanks.（$4'\times 6=24'$）

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{ax}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$ is continuous at $x=0$, then $a=$____;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+e}+\frac{n}{n^2+2e}+\cdots+\frac{n}{n^2+ne}\right)=$_______;

3. $e^{x\cos x^2}-e^x\sim kx^n(x\to 0)$，then $k=$ __,$n=$____;

4. $f'(x_0)=3$, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0-h^2)}{h^2}$=________;

5. Let $y=f(e^{\sqrt{x^2+1}})$, where f is differentiable，then dy =________;

6. The equation of tangent line of $r=1+\cos\theta$ at $\theta=\frac{\pi}{2}$ is __________________.

II Finish the following questions(76′).

7.（7′）Please describe the intuitive definition and $\varepsilon-\delta$ definition of $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, then prove $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+2}{x-1}=2$ by $\varepsilon-\delta$ definition.

8. （7′） Find $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\ln(1+x^2)}$.

9. (**7′**) Suppose the sequence $\{x_n\}$ satisfies the conditions

$$x_0 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \text{ find } \lim_{n\to\infty} x_n.$$

10. (**7′**) Find $\lim_{x\to+\infty}[x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$.

11. (**7′**) Let $\boldsymbol{y} = \frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^2}\,(x > 1)$, find y'.

12. （**7′**） Let $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$

(1) find $f'(x)$; (2) discuss the continuity of $f(x)$ and $f'(x)$ at the point $x=0$.

13. （**7′**） Let $y=x\mathrm{e}^{-x}$, find $y^{(n)}$.

14. （**7′**） Suppose that $y=y(x)$ is determined by $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^2+t^3 \end{cases}$, find $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

15. （7′） Determine the monotonicity and concavity of $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

16. （7′） Find a point M of the curve $y = x^2 + 1$ such that the distance of M and $P(5,0)$ is the smallest.

17. （6′） Let $x > 0$，prove $x \ln x \geq (x+1) \ln \frac{x+1}{2}$.