

MODELOS DE MATERIA OSCURA: UNA PERSPECTIVA NUMÉRICA

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XI
1. Introducción a la Cosmología	1
1.1. La Expansión del Universo	3
1.2. Modelos de Evolución Cosmológica	11
1.2.1. Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM)	15
1.2.2. Scalar Field Dark Matter (SFDM)	21
1.2.3. Otros Candidatos a Materia Oscura	23
2. Simulaciones de N-cuerpos	25
2.1. Modelos de Fluidos Sin Colisión Autogravitantes	26
2.2. Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH)	30
2.2.1. Dinámica de Gases	33
3. GADGET	35
3.1. Modificación del Código: Axion-GADGET	38
3.1.1. Propiedades Físicas	38
3.2. Ejemplos	43
3.2.1. Colisión de galaxias	43
3.2.2. Formación de estructura a gran escala	43
4. Análisis de Resultados	47
4.1. Generar Condiciones Iniciales	47
4.2. Ejecución de los códigos	48
A. Instalación de GADGET-2	51

Índice de figuras

1.1.	El factor de escala cosmológico $a(t)$ para modelos de Universo abierto ($k = -1$), plano ($k = 0$) y cerrado ($k = 1$).	11
1.2.	Curva de rotación de la galaxia M33 (Triangulum). Se observa una discrepancia entre la medición real y el cálculo usando las leyes newtonianas.	12
1.3.	Espectro de radiación del CMB medido por el satélite COBE.	14
1.4.	Comparación del CMB medido por las misiones COBE (1992), WMAP (2003) y Planck (2013).	14
1.5.	Mapa tridimensional captado por SDSS de la distribución de galaxias, con la Tierra en el centro. Cada punto indica una galaxia mientras que el color representa la edad de las estrellas en las galaxias, siendo las rojas las estrellas más viejas.	16
1.6.	Ilustración de la línea de tiempo que detalla el origen del Universo según la teoría del Big Bang. Se observan diferentes épocas, tales como inflación, formación de estructura y expansión acelerada.	17
1.7.	Perfiles de densidad de los halos más y menos masivos de una simulación hecha con los modelos Λ CDM y SCDM (Navarro et al.; 1997). En los paneles superiores, los radios están dados en kpc y las densidades en unidades de $10^{10} M_{\odot} / \text{kpc}^3$. En el resto, las unidades son arbitrarias.	19
1.8.	Perfil de densidad parametrizado como $\rho(r) \sim r^{-\alpha}$. Las observaciones muestran que $\alpha \sim 0$ (núcleo de densidad constante). Las simulaciones predicen que $1 \leq \alpha \leq 1,5$ (perfil cusp o pico).	20
2.1.	Una simulación de 100-cuerpos utilizando el algoritmo Barnes-Hut visualmente como cajas azules.	29
3.1.	Ilustración entre un algoritmo BH y una descomposición de procesos Peano-Hilbert. Esta es una curva que recorre cada malla de la simulación solo una vez. El volumen de la simulación se reparte en dominios al segmentar esta curva en puntos arbitrarios entre los límites de la celda. Esto genera una manera de distribuir el conjunto de partículas en procesadores individuales.	36

3.2.	Distribución de materia oscura en la simulación del milenio.	37
3.3.	Evolución de dos galaxias colisionando para formar una sola. En la figura las partículas azules representan el halo de materia oscura, las partículas rojas representan el disco estelar.	44
3.4.	Evolución desde $z = 10$ hasta $z = 0$. En la figura se observan los halos de materia oscura y las agrupaciones de gas alrededor de los mismos. . .	45
4.1.	Formato del archivo de parámetro para GADGET-2.	49
4.2.	Parámetros adicionales para ejecutar Axion-GADGET.	49

Índice de tablas

3.1. Parámetros de la simulación de Λ CDM.	43
4.1. Condiciones iniciales para simulación de Λ CDM.	48

Capítulo 1

Introducción a la Cosmología

La cosmología es la ciencia que estudia y busca explicar el origen y la evolución del Universo como un todo, la física fundamental detrás de esos procesos y por lo tanto obtener un entendimiento más profundo de las leyes de la física que se supone que gobiernan a todo el Universo. Sin embargo existe solo un Universo que se puede estudiar y no se puede experimentar con el, sólo hacer observaciones. Esto conlleva bastantes limitantes sobre lo que se puede conocer acerca de su origen [1].

El Universo es homogéneo e isótropo en un espacio tridimensional a gran escala. Esta pequeña pero poderosa frase es lo que se conoce como el *Principio cosmológico*. Que sea homogéneo se refiere a que la materia está uniformemente distribuida en todo el espacio, mientras que isótropo hace referencia a que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones espaciales. Así, en un Universo homogéneo e isótropo la distribución de materia sería la misma para cualquier observador en cualquier ubicación del espacio, es decir, ningún lugar sería preferencial de acuerdo a este principio.

Suponer que el principio cosmológico implica un Universo infinito es un poco ingenuo. La teoría de la relatividad nos dice que el espacio puede ser curvo y que, por tanto, es imaginable un Universo finito que no tenga bordes. Una imagen intuitiva utilizada por Einstein y Hubble, que permite la captación de la posibilidad de un Universo finito compatible con el principio cosmológico es la de un Universo bidimensional formando una superficie esférica. Sobre ella, un observador bidimensional podría recorrer todo el Universo, por ser finito, y nunca encontrarse con el borde. Esta imagen, llevada a las tres dimensiones espaciales de nuestro Universo real, nos permite comprender el Universo finito y sin bordes.

Pero la concepción de un universo finito y cerrado conlleva a un problema de *coalescencia*. Esto es, la gravedad haría que, con tiempo suficiente, todas las galaxias se atrajeran, amontonando toda la masa del Universo en

un solo punto. ¿Hay alguna forma de evitar la coalescencia? La relatividad nos enseña que todo movimiento es siempre en referencia de algo; no hay movimiento absoluto. Si se introduce un Universo en expansión, ciertamente se evitaría la coalescencia. Las galaxias no se abalanzarían unas sobre otras si inicialmente hubo una “explosión” y estuvieran alejándose por su efecto. La autogravitación del Universo iría frenando la expansión y podría llegar a detenerla, o no podría, dependiendo de la violencia de la expansión inicial y de la densidad de galaxias.

Estas ideas están muy cercanas a la modelación del Big Bang, modelo del Universo aceptado hoy día. La idea intuitiva, aunque básica y simple, debe ajustarse a unas bases físicas más firmes. Por ejemplo, la homogeneidad del principio cosmológico anula los gradientes de parámetros termodinámicos, lo que reduce la expresión de las ecuaciones que gobiernan el Universo.

Se requieren algunas precisiones más para entender el principio cosmológico. Si un observador ve el Universo isótropo, otro que se mueva a gran velocidad con respecto a él ya no podrá verlo isótropo. Este segundo observador vería un *desplazamiento Doppler* hacia el azul de las galaxias en la dirección de su movimiento, y verá desplazadas hacia el rojo las galaxias que se alejan de él. Por lo tanto si el principio cosmológico se cumple para el primer observador, no lo haría para el segundo.

La teoría de la relatividad general nos resuelve el problema. Esta teoría establece que en todo punto del espacio, en un sistema cualquiera (no forzosamente el Universo) existe un observador que ve su microentorno plano, en el sentido de que para él no hay gravedad, de que para él se cumplen las leyes de la relatividad restringida. ¿Quién es ese individuo que goza de tan grande privilegio? Es muy sencillo: cualquiera puede adquirir ese título de observador inimaginable dejando de lado a la gravedad.

En uno de los experimentos mentales de Einstein, un observador en un ascensor que cayera libremente no pesaría sobre el suelo del ascensor ni notaría ningún efecto gravitatorio. Por eso, a dichos observadores privilegiados se les puede llamar *observadores cayentes*. Para ellos se cumple el principio cosmológico. En cuanto al Universo, estos observadores cayentes se les llama *observadores fundamentales*.

Otra precisión importante para entender el principio cosmológico es la de *tiempo cósmico*. La teoría de la relatividad nos dice que cada observador tiene su tiempo. Por tanto, podría pensarse que no todos los observadores fundamentales tienen el mismo tiempo. El principio cosmológico equivale a decir que sí, que todos los observadores fundamentales pueden tener el mismo tiempo. Todos los observadores ven el mismo Universo si lo hacen en ese tiempo común a todos ellos. Este tiempo común se le conoce como *tiempo cósmico*. El principio cosmológico, para atenerse a las premisas relativistas, debe

entenderse así: *todos los observadores fundamentales ven lo mismo cuando utilizan ese tiempo cósmico común a todos ellos* [2].

1.1. La Expansión del Universo

Según la *ley de Hubble* [3] la velocidad “aparente” \vec{v} de alejamiento de unas galaxias es proporcional a su distancia \vec{r}

$$\vec{v} = H\vec{r}. \quad (1.1)$$

Las tres cantidades de la ecuación cambian con el tiempo, por lo que se escriben como funciones $\vec{v}(t), H(t), \vec{r}(t)$. Para ser precisos $\vec{r}(t)$ es la *distancia propia*, esto es, la distancia que sería medida entre una galaxia y nosotros en un tiempo t . La velocidad de recesión \vec{v} es el ritmo al cual \vec{r} incrementa, y H , el *parámetro de Hubble*, es constante en todo el espacio debido a la homogeneidad. Muchas teorías predicen que cambia con el tiempo, $H = H(t)$. En cosmología se le da al valor de la época actual el subíndice cero. Así el parámetro de Hubble al día de hoy, a un tiempo $t = t_0$ es $H(t_0) = H_0$. Esta es la *constante de Hubble*.

Para un poco más de claridad, es de mucha ayuda introducir las *coordenadas comóviles*. Un sistema de referencia comóvil de una partícula es un sistema de referencia que se mueve junto con una partícula, y por tanto, respecto a un sistema de referencia comóvil una partícula siempre está en reposo. Las coordenadas comóviles se expanden junto con el Universo. Si nuestra galaxia tiene una coordenada comóvil $\vec{x} = 0$ y otra galaxia tiene una coordenada comóvil \vec{x} , entonces, la distancia propia hasta ella es

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (1.2)$$

donde $a(t)$ es llamado el *factor de escala* que depende del tiempo, no de la posición. Puede definirse ahora la velocidad v como

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = H\vec{r}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}(a\vec{x}) = Ha\vec{x}. \quad (1.4)$$

Por definición, la coordenada comóvil no depende del tiempo, por lo que todo el cambio en $(a\vec{x})$ debe ser solo para a . Esto lleva a cancelar \vec{x} de nuestra ecuación (1.4) y se tiene así la siguiente expresión para el parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.5)$$

Otro parámetro importante es el corrimiento al rojo o *redshift*. La luz de las galaxias y estrellas distantes no es monótona, sino que tiene diferentes características espectrales propias de los átomos de los gases de alrededor de las estrellas. Cuando se examinan estos espectros, se encuentran que están desplazados hacia el extremo rojo del espectro. Este cambio es al parecer por un desplazamiento Doppler, e indica que esencialmente todas las galaxias se están alejando del observador. El redshift se define entonces como

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (1.6)$$

siendo λ_0 la longitud de onda de una línea espectral de la galaxia y λ , la longitud de onda de esa misma línea espectral medida en la Tierra. Las velocidades se infieren con una fórmula aproximada

$$z \approx \frac{v}{c}.$$

En la actualidad, se observan galaxias con redshift mucho mayor que ese. Para entender esto, se requiere un análisis más profundo sobre la naturaleza del redshift. Considerando un fotón emitido desde una galaxia hacia una galaxia cercana con una distancia propia dr , por cercana entiéndase lo bastante próxima para suponer que la diferencia de velocidades entre las galaxias dv está dada por la fórmula $dv = cz$. El fotón hace su viaje en un tiempo $dt = dr/c$, durante este período, el factor de escala incrementa una pequeña cantidad $da = \dot{a}dt$. La velocidad relativa entre las galaxias es

$$d\vec{v} = H d\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} c dt = c \frac{da}{a}. \quad (1.7)$$

El pequeño cambio en la longitud de onda se escribe como $\lambda - \lambda_0 = d\lambda$; sustituyendo esto y la fórmula de velocidad-redshift, se obtiene

$$c \frac{da}{a} = d\vec{v} = cz = c \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (1.8)$$

Esto es, en el pequeño intervalo de tiempo dt , el cambio fraccional en la longitud de onda es la misma que el crecimiento fraccional en el Universo. Ahora, suponga que el fotón rebasa a la segunda galaxia y viaja un largo camino a través del Universo antes de ser detectado en una tercera galaxia (la Vía Láctea, por ejemplo). La misma formulación de las ecuaciones (1.7) y (1.8) puede hacerse para cualquier segmento pequeño de su camino, la longitud de onda y el factor de escala seguirán siendo proporcionales $\lambda \propto a$, es decir

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{t_0}{t_{em}}. \quad (1.9)$$

¡El fotón se expande en la misma proporción que lo hace el Universo! El significado profundo del redshift cosmológico

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \quad (1.10)$$

es que $(1 + z)$ dice cuánto se ha expandido el Universo desde que la luz fue emitida. Aunque se usó el efecto Doppler en el argumento, el resultado de añadir todos los efectos infinitesimales es muy diferente al de uno muy grande. Por ejemplo, el redshift no depende de la velocidad $v(t)$, ni en el presente t_0 ni en la época de emisión (t_{em}). Para comprobarlo, suponga que el Universo no estuvo expandiéndose cuando el fotón fue emitido, i.e. $H(t_{em} = 0)$, así $\vec{v}(t_{em}) = 0$. El Universo empieza su expansión, pero se detiene nuevamente antes de que el fotón llegue a su destino, es decir $\vec{v}(t_0) = 0$. El fotón aún tendría un redshift porque la expansión ocurrió mientras estaba en movimiento.

Todo esto indica que los altos redshifts de las galaxias distantes no necesariamente implica que las velocidades de recesión son mayores a la velocidad de la luz. Como se esperaría, la ecuación $cz = H\vec{r}$ es sólo válida para redshifts pequeños. Examinando nuevamente la ecuación (1.1), que como se puntualizó, siempre es cierta para *cualquier* separación. Si un observador fuese suficientemente lejos, \vec{v} sería más rápida que la velocidad de la luz. Los fotones emitidos desde esa distancia no lo alcanzarían, a menos que el Universo empezara a desacelerar en algún tiempo en el futuro. Podría ser capaces o no de observar que dejaron esa galaxia hace miles de millones de años, dependiendo de si el Universo ha acelerado en el pasado.

Algunos cosmólogos tratan de evitar esta conclusión diciendo que el valor del incremento en la distancia propia no es una velocidad “real”; argumentan que es el espacio entre las galaxias el que se está expandiendo, mientras las galaxias están mas o menos en reposo. En efecto, esta aproximación prefiere distancia comóvil a distancia propia. A veces es útil pensar de esta manera, pero no hay diferencia, almenos físicamente entre dos galaxias “realmente” separándose unas de otras y dos galaxias estacionarias con la intervención de la expansión del espacio. Ambas son descripciones equivalentes de la relatividad general.

Ecuaciones de Einstein

La Relatividad General, está conformada esencialmente por 10 ecuaciones diferenciales acopladas, la cual rige la física de los sistemas gravitacionales. Para trabajar con relatividad general, se inicia introduciendo un espacio-tiempo mediante la ecuación de la métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.11)$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.12)$$

donde $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann, R es el escalar de curvatura de Ricci, $g_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico y Λ es la constante cosmológica. En presencia de materia y energía, las ecuaciones de campo de Einstein se convierten en [21]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y κ es una constante, cuyo valor es $\kappa = 8\pi G/c^4$.

Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Basados en la suposición de homogeneidad e isotropía, las ecuaciones de movimiento del Universo se pueden deducir de la siguiente forma. Sean dos eventos en el espacio-tiempo, uno ocurriendo en el punto localizado en (t, r, θ, ϕ) y otro ocurriendo en el punto localizado en $(t+dt, r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$. La separación espacio-temporal entre estos dos eventos es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.14)$$

donde

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

La métrica descrita por la ecuación (1.14) es llamada *métrica de Minkowski*, y el espacio-tiempo que ella describe es el espacio-tiempo de Minkowski. De la teoría de la relatividad general se sabe el camino que describe un fotón en un espacio-tiempo es una *geodésica* y que para cualquier espacio-tiempo, ésta debe ser *nula*, es decir $ds = 0$. En un espacio-tiempo de Minkowski, la trayectoria de un fotón obedece la relación

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.15)$$

Si el fotón se mueve de forma radial alejándose del origen, lo que significa que θ y ϕ son constantes, entonces

$$c^2 dt^2 = dr^2, \quad (1.16)$$

es decir

$$\frac{dr}{dt} = \pm c. \quad (1.17)$$

La métrica de Minkowski de la ecuación (1.14) aplica solamente dentro del contexto de la relatividad especial, sin efectos gravitacionales, el resultado será una métrica que es plana. Al añadir la gravedad, sin embargo, el espacio-tiempo toma una forma más interesante. En la década de 1930 los físicos Howard Robertson y Arthur Walker llegaron a un resultado, de manera independiente, que se conoció como la *métrica de Robertson–Walker* y cuya forma es generalmente conocida como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.18)$$

donde $k > 0$, $k = 0$ o $k < 0$. Todos los modelos homogéneos e isotrópicos tienen esta forma. Para $k > 0$ se tiene un espacio-tiempo con curvatura positiva y se llaman modelos *cerrados*. Para $k = 0$ se tiene un espacio-tiempo Euclideano o *plano*. Por último, para $k < 0$ se tiene un espacio-tiempo con curvatura negativa y a estos modelos se les llama *abiertos*.

En escalas pequeñas, sin embargo, se ha observado que el Universo *no* es homogéneo. Por lo que la métrica de Robertson–Walker es sólo una aproximación que es buena para escalas mayores. En un sentido cosmológico, las ecuaciones de Einstein pueden usarse para encontrar una relación entre el factor de escala $a(t)$, la curvatura κ , y los contenidos de densidad de energía $\epsilon(t)$ y presión $p(t)$ del Universo. Las ecuaciones que hacen esto posible son las *Ecuaciones de Friedmann*, encontradas por Alexander Alexandrovich Friedmann en 1922, sorprendentemente 7 años antes de los trabajos publicados por Hubble y en ellas ya consideraba que un Universo homogéneo e isotrópico se expandía como función del tiempo.

Recordando la ley de Hubble (1.1) la ecuación de Friedmann puede escribirse de la siguiente manera

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)}. \quad (1.19)$$

Con $H(t) \equiv \dot{a}/a$.

En la época actual, esta ecuación es

$$H_0 = H(t_0) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (1.20)$$

donde H_0 es la constante de Hubble. Así, la ecuación de Friedmann en la época actual es ($a(t) = 1$)

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_0 - kc^2. \quad (1.21)$$

Lo anterior ofrece una relación entre H_0 , la cual dice la rapidez de expansión, ϵ_0 , la densidad de energía actual, y κ , que indica la curvatura actual. Esta ecuación es válida para todo Universo con una métrica de Robertson–Walker gobernada por las reglas de la relatividad general. En un Universo plano ($k = 0$) la ecuación de Friedmann se reduce a la expresión

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t). \quad (1.22)$$

Así, para un valor dado del parámetro de Hubble, existe una *densidad crítica*

$$\epsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G}H^2(t). \quad (1.23)$$

Si la densidad de energía $\epsilon(t)$ es mayor a este valor, el Universo tiene curvatura positiva ($k = +1$). Si $\epsilon(t)$ es menor a este valor, el Universo tiene curvatura negativa. Dado que se tiene un valor actual del parámetro de Hubble, se calcula la densidad crítica

$$\epsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G}H_0^2 = (8,3 \pm 1,7) \times 10^{-10} \text{J m}^{-3} = 5200 \pm 1000 \text{MeV m}^{-3}, \quad (1.24)$$

que suele escribirse de manera más común en términos de la *densidad de masa crítica*

$$\rho_{c,0} \equiv \epsilon_{c,0}/c^2 = (9,2 \pm 1,8) \times 10^{-27} \text{kg m}^{-3} = (1,4 \pm 0,3) \times 10^{11} \text{M}_\odot \text{Mpc}^{-3}. \quad (1.25)$$

M_\odot es una cantidad conocida como *Masa solar* y su valor es $M_\odot = 1,989 \times 10^{30} \text{kg}$. Se ha supuesto, basados en el principio cosmológico, que el Universo es homogéneo e isotrópico. Para resolver las ecuaciones de campo de Einstein bajo esa suposición se requiere un tensor de energía–momento que sea también homogéneo e isotrópico. La forma más general para tal tensor es la de un tensor para un fluido perfecto, que se escribe como [19, 20]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

donde ρ es la densidad propia de masa del fluido, u_μ es la cuatriveicidad y p es la presión ($p > 0$) o la tensión ($p < 0$). La homogeneidad implica que la presión y la densidad deberían ser independientes de la posición y sólo

deberían depender del tiempo. Para la métrica descrita en la ecuación (1.18), este tensor es diagonal

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p). \quad (1.27)$$

Insertando este resultado en las ecuaciones de campo de Einstein (1.11), tomando $\Lambda = 0$ y normalizando ($c = 1$) se tiene

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi G\rho \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi Gp. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Esta es otra forma de escribir las ecuaciones de Friedmann, sin la constante cosmológica. Al combinar ambas ecuaciones se tiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.29)$$

donde la energía gravitacional efectiva viene dada por $(\rho + 3p)$; se observa que la presión también contribuye a la gravitación. Se puede deducir también una ecuación que relacione a la energía, la presión y el factor de escala. Usando la conservación de la energía, al diferenciar la ecuación (1.28) conduce a una expresión como la siguiente

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.30)$$

que puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (1.31)$$

Considerando un volumen comóvil $V = a^3$ e interpretando $\rho a^3 = U$ como la energía en el volumen comóvil, se obtiene lo siguiente

$$dU + pdV = 0. \quad (1.32)$$

Recordando la primera ley de la termodinámica, dice que para un fluido en equilibrio se cumple que

$$TdS = dU + pdV, \quad (1.33)$$

donde T es la temperatura y S es la entropía de fluido. Un proceso en el cual el cambio en la entropía es $dS = 0$ es llamado *adiabático*. la ecuación 1.32 muestra que el modelo homogéneo e isotrópico se expande de forma

adiabática. No es extraño ya que la propia homogeneidad e isotropía implican que no haya gradientes de temperatura y no haya flujo de calor.

Si además se asume que el fluido perfecto obedece la ecuación de estado barotrópica, es decir, que la presión sea proporcional a la densidad

$$p = w\rho, \quad (1.34)$$

la ecuación (1.31) se reescribe como sigue

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + wp \frac{d}{dt}a^3 = 0, \quad (1.35)$$

cuya solución es

$$\rho a^{3(w+1)} = \rho_0, \quad (1.36)$$

donde ρ_0 es el valor de la densidad en la época presente. w puede tomar diferentes valores que dependen de la época en la cual se esté considerando, esto es, existe una única presión para cada densidad dependiendo de la época:

- Época actual (polvo) $\rightarrow p = 0$.
- Época dominada por la radiación $\rightarrow p = 1/3\rho$.

Las ecuaciones de Friedmann (1.28) para un Universo dominado por un fluido perfecto con ecuación de estado (1.34) pueden escribirse como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(w+1)}} - \frac{k}{a^2}. \quad (1.37)$$

Si $w > -1/3$ esta última ecuación indica que la evolución y posible destino del Universo dependerá de la curvatura espacial. Un Universo plano y uno con curvatura negativa se expandirá indefinidamente, mientras que un Universo con curvatura positiva detendrá su expansión y empezará a contraerse en algún punto. Si $w < -1/3$ la expansión seguirá para cualquier tiempo independientemente de la curvatura. Y el caso límite $w = -1/3$, representa un Universo con velocidad de expansión \dot{a} constante (Figura 1.1).

Las ecuaciones de Friedmann se pueden expresar de una forma más general (1.28) en términos de la densidad relativa a la densidad crítica. La densidad crítica se denota Ω y se le llama *parámetro de densidad* o *densidad relativa*, es decir

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.38)$$

además de definir un parámetro de curvatura espacial

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (1.39)$$

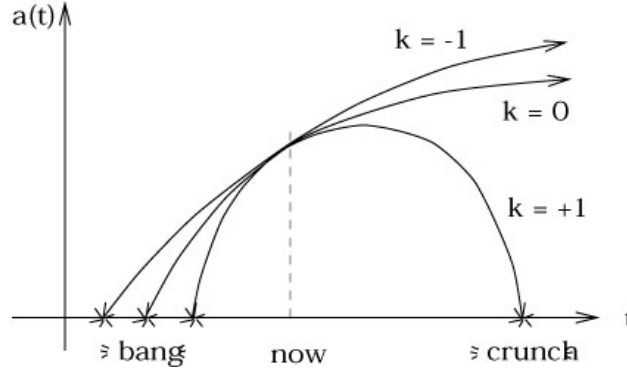


Figura 1.1: El factor de escala cosmológico $a(t)$ para modelos de Universo abierto ($k = -1$), plano ($k = 0$) y cerrado ($k = 1$).

Insertando estos valores en la ecuación de Friedmann (1.28) se tiene lo siguiente

$$\Omega + \Omega_k = 1 \quad (1.40)$$

donde Ω es la densidad total relativa de energía y materia. Dado que para un modelo de Universo abierto, $\Omega_k < 0$, un modelo plano $\Omega_k = 0$ y un modelo cerrado $\Omega_k > 0$, se tienen los siguientes valores para Ω

$$\Omega \begin{cases} > 1, & \text{para } k > 0, \\ = 1, & \text{para } k = 0, \\ < 1, & \text{para } k < 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Así que, en principio se puede medir la cantidad de materia contenida en el Universo y determinar su geometría. En las siguientes secciones se describirán un par de modelos que utilizan estos parámetros para estudiar estas propiedades.

1.2. Modelos de Evolución Cosmológica

El primer intento de aplicar la relatividad al Universo se debió al propio Einstein. Aunque con este primer intento se llegaba a la “absurda” conclusión de que el Universo estaba en expansión (o bien en contracción, que es una expresión negativa). Para conseguir un Universo estático, Einstein admitió el llamado *término cosmológico* o *constante cosmológica*, lo que hoy se interpretaría como una forma de energía oscura. Este término le daba al Universo una facultad expansiva que contrarrestaba la autogravitación de todo el Universo, evitando la coalescencia y consiguiendo una situación estática.

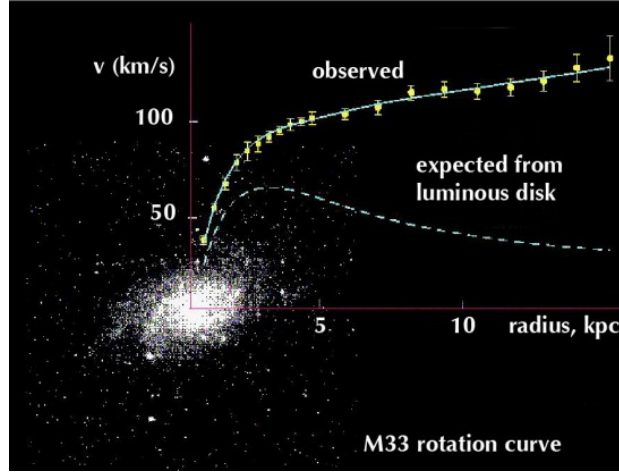


Figura 1.2: Curva de rotación de la galaxia M33 (Triangulum). Se observa una discrepancia entre la medición real y el cálculo usando las leyes newtonianas.

Lo más novedoso de aquella deducción era que, al contrario de la gravitación newtoniana, que era generada por la masa, esta fuerza expansiva del término cosmológico era generada por el vacío, y quizá como consecuencia, constante en el tiempo.

La necesidad de crear estos modelos de evolución fue precisamente la detección de un tipo de materia “faltante” en el Universo. Para la década de 1930, el astrofísico Fritz Zwicky [4] examinó la dinámica interna del cúmulo de galaxias Coma Berenice. En dicha publicación, Zwicky proporciona evidencia de que la masa luminosa en el cúmulo era mucho menor que el total de masa necesaria para mantener a estas galaxias unidas gravitacionalmente. Debía existir otro tipo de materia que permitiera que este conjunto de galaxias se mantuviese unido. En esa época ya se tenían los primeros indicios de la *materia oscura*.

A pesar de numerosas contribuciones de la comunidad científica, el tema de la materia oscura no fue considerado seriamente hasta la época de 1970, cuando la astrónoma Vera Cooper Rubin [5] indicó que la estabilidad gravitacional de las galaxias es por una cantidad de masa mayor a la observada. En su trabajo, calcula las curvas de rotación de distintas galaxias espirales, las cuales miden la velocidad radial de las estrellas dentro de las galaxias en función de su distancia hacia el centro de las mismas, como se observa en la siguiente ecuación

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (1.42)$$

De acuerdo a las leyes de Newton, se esperaría que dicho movimiento tuviese

un comportamiento Kepleriano, es decir, que la velocidad de las estrellas fuese decayendo conforme la distancia era mayor hacia el centro. La gran sorpresa sobre estas observaciones fue que esta curva no obedecía el comportamiento Kepleriano, si no que la velocidad de las estrellas permanecía casi constante e incluso, en algunos casos, aumentaba (Figura 1.2) . Si la teoría de Newton era correcta, entonces lo que hacía falta era materia para poder explicar este extraño comportamiento. Esto fue un gran impacto para la física y la astronomía, ya que esta evidencia conlleva a crear modelos que incluyan esta *materia oscura* en las galaxias y, por tanto también en el Universo.

Radiación del Fondo Cósmico de Microondas

Otro fenómeno importante para el desarrollo de los modelos de evolución es la *Radiación del Fondo Cósmico de Microondas* o por sus siglas en inglés *Cosmic Microwave Background* (CMB). El CMB es un tipo de radiación de alrededor de 400,000 años después del comienzo del Universo. Antes de este tiempo, el Universo era tan caliente y denso que era opaco para toda la radiación. Ni siquiera los átomos simples podrían formarse sin ser instantáneamente desgarrados en sus protones y electrones constituyentes por la radiación intensa. El Universo estaba hecho de un "plasma", o gas ionizado, que es de lo que está hecha la superficie del Sol.

Esta radiación fue detectada por primera vez por Arno Penzias y Robert Wilson en 1965 y es una de las pruebas más contundentes a favor del Big Bang. En particular, la teoría del Big Bang predice ciertas características para la radiación en épocas primitivas que han sido confirmadas por el CMB:

1. La dispersión múltiple de fotones por un plasma caliente en el Universo temprano debería dar como resultado un espectro de cuerpo negro para los fotones una vez que han escapado en la época de reionización. Esto es exactamente lo que se observa para el CMB.
2. Los fotones del CMB se emitieron en la época de recombinación cuando el Universo tenía una temperatura de aproximadamente 3.000 Kelvin. Sin embargo, han sido desplazados cosmológicamente hacia el rojo a longitudes de onda más largas durante su viaje en un Universo en expansión, y ahora se detectan en la región de microondas del espectro electromagnético a una temperatura promedio de 2.725 Kelvin. Esto está de acuerdo con lo que predice la teoría del Big Bang.

En la década de 1990, el satélite COBE midió el CMB y ayudó a establecer varias cosas. En primer lugar, el CMB es casi completamente uniforme, con una temperatura casi constante. El que no sea constante es debido a que

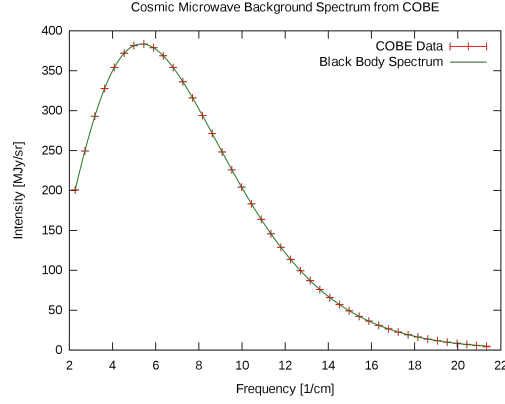


Figura 1.3: Espectro de radiación del CMB medido por el satélite COBE.

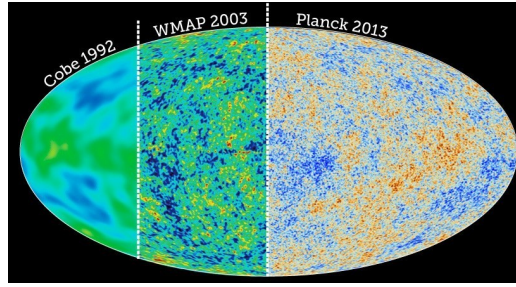


Figura 1.4: Comparación del CMB medido por las misiones COBE (1992), WMAP (2003) y Planck (2013).

hubo pequeñas fluctuaciones en la temperatura, al nivel de una sola parte en 100,000.

En las últimas dos décadas, muchos experimentos han medido las pequeñas fluctuaciones de CMB, tales como WMAP en 2007 [6] . Estas pequeñas fluctuaciones están ahí debido a pequeñas variaciones en la densidad del Universo inmediatamente después del Big Bang. Cualquier región que sea ligeramente más densa tiende a atraer más materia, y se vuelve aún más densa y atrae más material. Este proceso fuera de control es lo que llevó a la formación de las primeras estrellas y galaxias. Las propiedades de las fluctuaciones se han utilizado para ayudar a determinar la edad del Universo, de qué está hecho e incluso cómo podría terminar. En el año 2013 la misión Planck [7] ha proporcionado la imagen más detallada hasta ahora del Universo tal como apareció a solo 380,000 años después del Big Bang.

1.2.1. Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM)

Aunque la primera evidencia de materia oscura fue descubierta en la década de 1930, no fue hasta la década de 1980 que los astrónomos se convencieron de que esta es el componente responsable que mantiene unidas a las galaxias y los cúmulos de galaxias de manera gravitacional.

El modelo *Lambda Cold Dark Matter* (Λ CDM) es una parametrización del modelo del Big Bang Cosmológico. Su aceptación ha sido tal que ha llegado a ser denominado el “modelo estándar de la cosmología” se fundamenta, principalmente, sobre las siguientes bases teóricas y experimentales.

1. Un marco teórico basado en la teoría general de la relatividad, que proporciona la teoría del campo gravitatorio en escalas cosmológicas.
2. El principio cosmológico. Requisito indispensable para cualquier modelo cosmológico.
3. El modelo de fluidos, que considera a las galaxias como constituyentes básicos del universo, las incluye en la teoría mediante la ecuación de fluido (ecuación 1.31).
4. La Ley de Hubble, que establece la expansión del Universo con una velocidad de recesión de las galaxias proporcional a su distancia.
5. La Radiación del Fondo Cósmico de Microondas. Los resultados del CMB ayudan a resolver paradigmas sin resolver del modelo del Big Bang cosmológico.
6. La concordancia de los distintos métodos de estimación de la edad del Universo [8].
7. La determinación de la abundancia relativa de elementos primigenios ^1H , ^2D , ^3He , ^4He y ^7Li formados en las reacciones nucleares en la época de Big Bang Nucleosíntesis (BBN)[9, 10, 11].
8. El análisis de la estructura a gran escala del Universo, mediante experimentos como el SDSS [12], que atestiguan la homogeneidad y ayudan a la determinación de los distintos parámetros del modelo estándar.

Otras características del modelo estándar

Además de basarse en los anteriores pilares básicos, incorpora algunas características especiales a fin de explicar la evolución y la estructura actual del Universo:

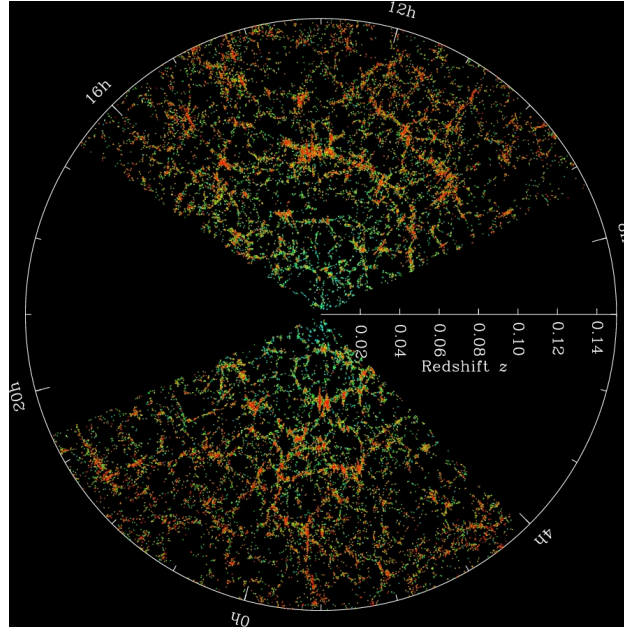


Figura 1.5: Mapa tridimensional captado por SDSS de la distribución de galaxias, con la Tierra en el centro. Cada punto indica una galaxia mientras que el color representa la edad de las estrellas en las galaxias, siendo las rojas las estrellas más viejas.

- Perturbaciones a la densidad. También conocidas como fluctuaciones de densidad o fluctuaciones cuánticas, son las responsables de la formación de las grandes estructuras del Universo [15].
- La *Inflación* [13], una expansión acelerada, propuesta originalmente por Alan Guth, y que explica la planitud y la homogeneidad actuales del Universo.
- El Hot Big Bang, origen extremadamente caliente que da lugar a BBN.
- La *constante cosmológica* Λ , que Einstein introdujo en las ecuaciones de la relatividad general, originalmente para forzar un Universo estático. Hoy, al saber que el Universo está expandiéndose y de forma acelerada, se le denomina *energía del vacío* o *energía oscura* [14]. Recordando la ecuación (1.18) al introducir el parámetro Λ se tiene lo siguiente:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.43)$$

- La *materia oscura fría*, Cold Dark Matter (CDM). Un tipo de materia que debe actuar de forma exclusivamente gravitatoria, que es oscura

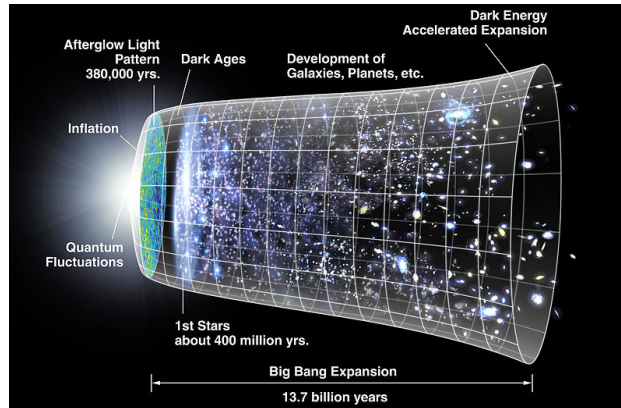


Figura 1.6: Ilustración de la línea de tiempo que detalla el origen del Universo según la teoría del Big Bang. Se observan diferentes épocas, tales como inflación, formación de estructura y expansión acelerada.

o *transparente* (no interactúa con ningún tipo de materia bariónica o radiación) y que no debe moverse a velocidades relativistas (es fría).

Problemas con el modelo

El modelo Λ CDM describe satisfactoriamente la expansión acelerada del Universo, explica la radiación del Fondo Cósmico de Microondas y otorga un marco de referencia dentro del cual es posible entender la homogeneidad e isotropía en el Universo, también describe las características del origen, naturaleza y evolución de las fluctuaciones de densidad que se creen son las responsables de la formación de las galaxias o otras estructuras cósmicas, la distribución de materia a gran escala, y los aspectos principales de la formación y evolución de objetos cosmológicos virializados. Hasta ahora Λ CDM es consistente con la abundancia de cúmulos observados en $z \sim 0$, predice un cambio relativamente pequeño en la densidad de número de cúmulo como función del corrimiento al rojo pues, dada la baja densidad de materia, escaso crecimiento de estructuras se ha visto desde $z \sim 1$. El modelo Λ CDM puede “forzarse” a concordar de manera aproximada con la abundancia de cúmulos en escalas pequeñas y con las fluctuaciones del CMB a grandes escalas modificando el espectro de potencias de su forma habitual. Este cambio en el modelo tiene consistencia con las observaciones, el espectro de potencias de Λ CDM puede normalizarse para así coincidir con el CMB y las observaciones de cúmulos. Pero a medida que las estimaciones de la densidad de materia oscura se hacen más y más precisas, es necesario saber cuál es su composición.

Existen, sin embargo, ciertos problemas con el modelo a escalas más pequeñas, tales como los perfiles cusp de densidades de halos galácticos, la sobrepoblación de subestructuras predicha por simulaciones de N -cuerpos, entre otras. Hasta hoy, la naturaleza de la materia oscura que mantiene unida a las galaxias y cúmulos de galaxias es una discusión abierta.

El problema CUSP-CORE

Una de las predicciones fundamentales del modelo Λ CDM es que la materia oscura debido a su naturaleza autogravitante, colapsa en halos que, en ausencia de efectos causados por materia bariónica, desarrollan un perfil de densidad que aumenta de manera abrupta. Este importante resultado surge de simulaciones de N -cuerpos, que serán descritas en el capítulo siguiente. Estas simulaciones mostraron que la distribución de densidad de un halo de materia oscura de cualquier masa es perfectamente descrita por el perfil de densidad Navarro-Frenk-White o NFW (Navarro et al. 1996, 1997) [22], independientemente de condiciones iniciales o de parámetros cosmológicos. Por ejemplo, la pendiente interna principal de un perfil NFW cumple que la densidad ρ es proporcional al inverso de la distancia r es decir $\rho \propto r^{-1}$, un resultado similar a la pendiente principal externa mostró que la densidad debía ser proporcional a r^{-3} . Navarro et al. (1997) llamaron a esto el “perfil de densidad universal” que viene dado por

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_i}{(r/R_s)(1 + r/R_s)^2}, \quad (1.44)$$

donde ρ_i se relaciona a la densidad del Universo en la época del colapso del halo y R_s es el radio característico del halo. Simulaciones hechas por Moore et al. (1999) [24] mostraron un perfil de densidad incluso más pronunciado, pues encontraron que los halos que ellos simularon pueden ser descritos mejor con el siguiente perfil de densidad

$$\rho_{M99}(r) = \frac{\rho_i}{(r/R_s)^{1.5}(1 + r/R_s)^{1.5}}, \quad (1.45)$$

es decir con una proporción interna de $r^{-1.5}$ y proporción externa de r^{-3} . La diferencia entre estos dos resultados indicaba que detalles como la convergencia numérica, condiciones iniciales, análisis o interpretación aún podían ser un reto al definir la pendiente interna. A medida que el poder de cómputo fue creciendo y las simulaciones tuvieron mejor resolución, el valor y comportamiento de la pendiente interna de los halos de CDM ha sido discutido de manera extendida en los últimos años.

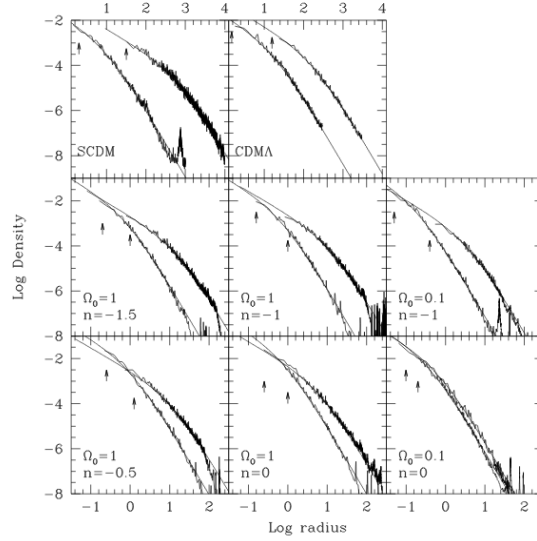


Figura 1.7: Perfiles de densidad de los halos más y menos masivos de una simulación hecha con los modelos Λ CDM y SCDM (Navarro et al.; 1997). En los paneles superiores, los radios están dados en kpc y las densidades en unidades de $10^{10} M_{\odot} / \text{kpc}^3$. En el resto, las unidades son arbitrarias.

Pero las mediciones hechas para las curvas de rotación y modelos de galaxias esferoidales enanas requieren una densidad más suave, casi superficial, que son consistentes con un núcleo de densidad constante en el centro (Moore, 1994)[23]. Esta discrepancia es conocida como el problema *cusp-core*. Para tener una idea de las muchas publicaciones que se han hecho al respecto Klypin et al. (2001) derivaron pendientes proporcionales a $r^{-1.5}$ en sus simulaciones. De argumentos de la densidad del espacio-fase, Taylor & Navarro (2001) argumentaron que el perfil de densidad debe parecerse al del perfil NFW, pero con convergencia a $r^{-0.75}$ en lugar del valor de r^{-1} . Colín et al. (2004) investigaron halos de baja masa y encontraron que se describían mejor usando perfiles de densidad NFW. Diemand et al. (2005) encontraron que los halos de CDM tenían perfiles cusp con pendiente $r^{-1.2}$. Muchos estudios suponen que el cusp central consiste de una región donde la densidad de masa se comporta como una ley de potencias con pendiente constante aunque se ha sugerido que este no tendría que ser el caso (Navarro et al. 2004; Hayashi et al. 2004) [25] dado que no encuentran evidencia de una pendiente que se comporte como una ley de potencias, si no que esta pendiente sigue una línea que a medida que el radio se hacía más pequeño, ésta no converge a un solo valor asintótico.

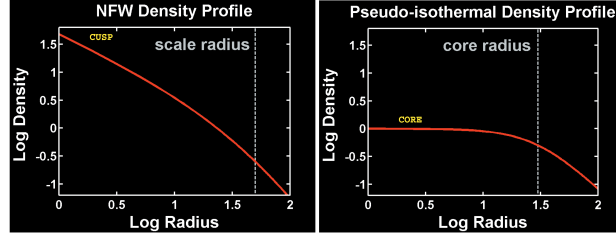


Figura 1.8: Perfil de densidad parametrizado como $\rho(r) \sim r^{-\alpha}$. Las observaciones muestran que $\alpha \sim 0$ (núcleo de densidad constante). Las simulaciones predicen que $1 \leq \alpha \leq 1,5$ (perfil cusp o pico).

Satélites Faltantes

Otra serie de observaciones parece estar en contradicción con Λ CDM. Utilizando simulaciones de alta resolución, Moore et al. (1999) [24] y Klypin et al. (2001) [16] hicieron notar que el número de subhalos masivos predichos por estas simulaciones excede el número observado de satélites luminosos de la Vía Láctea en al menos un orden de magnitud. Esto se le conoce como el problema de los *satélites faltantes*. Este tipo de resultado sigue siendo una discrepancia considerable entre el número de satélites observados en la Vía Láctea y el número predicho por simulaciones de Λ CDM.

Las simulaciones predicen que una galaxia, como la Vía Láctea debería tener alrededor de 10 veces más galaxias satélites que las que se observan. Lo mismo sucede para galaxias de mayor tamaño. Así que, ¿Cuáles son las posibles soluciones? Lo primero sería que la física utilizada en simulaciones esté fallando, es decir, no toman en cuenta física suficiente. Sin embargo, estas simulaciones han mostrado resultados bastante satisfactorios al explicar el resto del Universo [17], aunque es posible que la física utilizada necesite más detalle. Además, muchas de estas simulaciones solo utilizan modelos de materia oscura y no toman en cuenta materia bariónica, pero incluso al añadir estos componentes a las simulaciones, el problema persiste.

Otra alternativa es que el poder de observación sea muy limitado, pero la sensibilidad de los instrumentos está mejorando década con década, se han encontrado más galaxias satélites [18], aún así, el orden de satélites observados es mucho menor al obtenido en simulaciones.

Una tercera posibilidad es la existencia de “galaxias oscuras”. Todas las galaxias tienen un halo de materia oscura. En simulaciones, estos halos representan a su galaxia y muchas de las galaxias satélites son sub-halos de materia oscura. Cada halo tiene muchos sub-halos.

Estas discrepancias dentro del modelo estándar pueden ser evidencia de la importancia de procesos físicos en la materia bariónica. Pero también pueden

ser indicativos de un nuevo tipo de materia oscura, con propiedades diferentes a las propuestas por Λ CDM y con la posibilidad de resolver estas dificultades mencionadas.

1.2.2. Scalar Field Dark Matter (SFDM)

Con los problemas que presenta el modelo Λ CDM parece necesario introducir alternativas al paradigma de la formación de estructura. Estas son algunas razones por las que deben buscarse propuestas diferentes que puedan explicar la formación de estructura a un nivel cosmológico, la cantidad observada de galaxias enanas y los perfiles de densidad de materia oscura en los núcleos galácticos. Una propuesta es la de un campo escalar como materia oscura en el Universo. Este modelo supone que la materia oscura es un campo escalar real o complejo Φ mínimamente acoplado a la gravedad, dotado de un potencial escalar $V(\Phi)$ y que a cierta temperatura la interacción del campo es puramente gravitacional junto con el resto de la materia. Este campo escalar puede agregarse al lagrangiano de las partículas del modelo estándar o al de la relatividad general, suponiendo que la constante de acoplamiento con el resto de la materia sea muy pequeña.

Muchos autores han propuesto alternativas de interés en las cuales tratan de resolver las dificultades que Λ CDM no ha podido resolver hasta ahora. En el modelo de Campo Escalar (Guzmán, F. & Matos, T. (2000)) [26], se propone que los halos galácticos se forman de condensados de Bose-Einstein de un campo escalar (SF) cuyo bosón tiene una masa ultra ligera del orden de $m \sim 10^{-22}$ eV. De este valor se sigue que la temperatura crítica de condensación $T_c \sim 1/m^{5/3} \sim$ TeV, es muy alta, por lo tanto, se forman semillas de Condensados de Bose-Einstein (BEC) en épocas tempranas en el Universo. Además, la longitud de Compton $\lambda_c = 2\pi\hbar/m$ asociada a este bosón es del orden de kpc que corresponde al tamaño de los halos de materia oscura de las galaxias en el Universo. Por otra parte, las grandes estructuras del Universo se forman al igual que en el modelo Λ CDM, por lo que todas las predicciones correctas del modelo estándar se reproducen de buena manera por el modelo SFDM. En otras palabras, en el modelo SFDM los halos de galaxias no son formados de manera jerárquica, son formados en la misma época y del mismo modo en que el Universo alcanza la temperatura crítica de condensación del SF. De esto se sigue que todas las galaxias deben ser similares porque son formadas de la misma forma y en el mismo momento.

Descripción Física del Modelo

Para estudiar la dinámica de SFDM en el Universo se utiliza la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) con factor de escala $a(t)$. El background del Universo está compuesto de un campo escalar SFDM ($\Phi_0(t)$) dotado de un potencial escalar $V \equiv V(\Phi_0)$, radiación (z), neutrinos (ν), bariones (b) y una constante cosmológica (Λ) (Magaña & Matos, (2012)). Recordando las ecuaciones del background, del tensor energía-momento \mathbf{T} para un campo escalar, la densidad de energía escalar T_0^0 y la presión escalar T_j^i están dadas por

$$T_0^0 = -\rho_{\Phi_0} = -\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 + V\right), \quad (1.46)$$

y

$$T_j^i = P_{\Phi_0} = \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - V\right)\delta_j^i, \quad (1.47)$$

donde el punto se entiende como la derivada respecto al tiempo cosmológico y δ_j^i es la delta de Kronecker. Así, la Ecuación de Estado para el campo escalar es $P_{\Phi_0} = \omega_{\Phi_0}\rho_{\Phi_0}$ con

$$\omega_{\Phi_0} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 + V}. \quad (1.48)$$

Para resolver las ecuaciones de Friedmann con métodos analíticos con la aproximación $m \gg H$ ellos utilizaron una transformación que compararon después con resultados analíticos. Aquí el campo escalar y las variables del background dependen solamente del tiempo, i.e. $\Phi = \Phi_0(t)$.

Calcularon el crecimiento de las sobredensidades de SFDM $\delta\rho_\Phi$ en el régimen lineal, el contraste de densidad $\delta \equiv \delta\rho_\Phi/\rho_{\Phi_0}$ es mucho más pequeño que la unidad. Se piensa que el Universo era casi uniforme después de la inflación, con un contraste de densidad muy pequeño. A medida que el Universo se expande, las pequeñas sobredensidades crecieron hasta el punto que empezaron a colapsar, llevando a la formación de estructura del Universo. Así, solo pequeñas desviaciones del modelo FRWL se consideran, para que puedan ser tratada con la teoría lineal de perturbaciones. Dentro de la teoría de perturbaciones escalares, la evolución del contraste de densidad puede escribirse como

$$\dot{\delta} + 3H \left(\left\langle \frac{\delta P_\Phi}{\delta \rho_\Phi} \right\rangle - \langle w_{\Phi_0} \rangle \right) \delta = 3\dot{\Phi}_k \langle F_\Phi \rangle - \langle G_\Phi \rangle \quad (1.49)$$

donde

$$\begin{aligned} F_\Phi &= 1 + w_{\Phi_0} \\ G_\Phi &= \frac{2k^2}{a^2 k^2} \frac{\dot{\phi}_k + H\phi_k}{\rho_{\Phi_0}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

1.2.3. Otros Candidatos a Materia Oscura

Con el paso de los años, las observaciones del Universo son cada vez más precisas y con éstas, la presencia de la materia oscura es más evidente [29]. Se sabe que se agrupa formando halos galácticos y que es la responsable de la formación a gran escala del Cosmos. Descifrar la naturaleza de la materia oscura es una tarea para físicos de partículas y cosmólogos por igual, ya que las partículas elementales son los principales candidatos a materia oscura en el Universo.

En las secciones anteriores se han descrito dos modelos de materia oscura, el modelo estándar Λ CDM y el modelo de materia oscura escalar SFDM. Estos no son los únicos modelos que se han desarrollado. Existe una gran variedad de candidatos que no por ser menos conocidos, son menos interesantes. Se describirán, algunos de ellos, brevemente:

- Materia oscura auto-interactuante (SIDM): Las partículas de materia oscura fría tienen auto-interacción con poca disipación o aniquilación [27].
- Materia oscura tibia (WDM): Las partículas se mueven a velocidades altas pero no relativistas, los halos de materia oscura se forman en épocas similares a CDM pero se forma menos subestructura en simulaciones de N -cuerpos [28].
- Materia oscura repulsiva (RDM): la materia oscura se comporta como un condensado de bosones masivos que interactúan por un potencial repulsivo entre partículas además de la gravedad, lo cual conduce a un comportamiento de superfluidez [30].
- Materia oscura difusa (FDM): Las partículas están compuestas de partículas ultra-ligeras, similares a materia oscura escalar [31].
- Materia oscura auto-aniquilante (SADM): La aniquilación de materia oscura permite suavizar los perfiles cusp de halos galácticos [32].
- Materia oscura que decae (DDM): La formación de estructura en $z \sim 2$ mejora para el modelo de DDM [33].

Por mencionar algunos más.

WIMP

Los *Weak Interactive Massive Particles* (WIMP) son candidatos a materia oscura fría. Estas partículas solo interactúan de manera gravitacional con la

materia bariónica y están predichas por teorías de unificación. En la mayoría de los modelos de partículas, la partícula supersimétrica más conocida es el *neutralino*, el cual posee características que coinciden con las de un WIMP: Es estable, no tiene carga eléctrica, sus interacciones son solo de tipo débil, su masa está en un rango adecuado para que se produzca con abundancia necesaria y da lugar a materia oscura fría [34].

Modificaciones a la teoría newtoniana

En 1983, Mordehai Milgrom propone que la teoría newtoniana debe modificarse para aceleraciones pequeñas ($a_0 \approx 1,2 \pm 0,1 \times 10^{-10} \text{m/s}^2$), y que la física de Newton es sólo una buena aproximación para aceleraciones mayores a a_0 [35]. Esta modificación conduce a que la segunda ley de Newton debe replantearse para pequeñas aceleraciones de la siguiente manera

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}. \quad (1.51)$$

Esta modificación permite explicar muchos datos observados sin recurrir a postular materia oscura no-bariónica. Su rango de aplicabilidad y éxito es muy amplio: desde galaxias enanas esferoidales hasta supercúmulos galácticos.

Dimensiones extra

Entre las ideas propuestas por la comunidad científica, la de dimensiones extra es algo intrigante. Se postula que nuestro Universo está inmerso en un sub-espacio de (3+1) dimensiones, el cuál a su vez está inmerso en un espacio de mayor dimensión. La idea de postular esto es que la materia oscura no es visible, pero su presencia en las galaxias se detecta a través de efectos gravitacionales en estrellas visibles.

Capítulo 2

Simulaciones de N -cuerpos

En el capítulo anterior, se llega a la conclusión de que la naturaleza de la materia oscura es incierta. El crear teorías que expliquen esa naturaleza y además concuerden con las observaciones actuales del Universo no es tarea fácil. Al no conocer su composición, una de las soluciones que se proponen es el de emplear simulaciones que involucren toda la física desarrollada en la teoría y que a su vez permitan tener resultados comparables con observaciones. Las simulaciones de N -cuerpos son uno de los enfoques más amplios para comprender la formación a gran escala del Universo. En años recientes, el poder computacional ha permitido crear simulaciones de alta resolución y que muestran la evolución del Universo desde épocas extremadamente tempranas ($z \sim 1100$). Aproximadamente 13 Gyr, dependiendo del modelo que se esté simulando.

La evolución de estructura se aproxima con aglomeramiento gravitacional no lineal a partir de condiciones iniciales específicas de partículas de materia oscura y puede refinarse introduciendo efectos de dinámica de gases, procesos químicos, transferencia radiativa y otros procesos astrofísicos. La fiabilidad de una simulación se mide por su resolución en masa, longitud y tiempo. La resolución de masa es especificada por la masa de la partícula más pequeña considerada, siendo la escala por debajo de la cual las fluctuaciones son despreciables. La resolución en longitud está limitada por una escala de “suavizado” (softening), introducida para evitar infinitos en la fuerza gravitacional cuando las partículas colisionan.

La formación de estructura en el Universo es originada por pequeñas perturbaciones en la densidad de materia, o fluctuaciones cuánticas que se expanden a escalas cosmológicas en la época de inflación. Al simular materia oscura se debe enfocar en su colapso gravitacional, al haber más colapso, las perturbaciones crecen. La teoría de perturbaciones lineal es una excelente primera aproximación a la evolución temprana del Universo. El resultado de

este conjunto de consideraciones es una red de halos que se forman a lo largo de paredes y filamentos, creando un entramado cósmico. Este entramado es consistente con mediciones de aglomeraciones de galaxias en un amplio intervalo de escalas.

Existe una gran variedad de códigos que involucran teoría de simulaciones de N -cuerpos, incluyendo dinámica de gases, conocida como Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) y que han sido utilizados en numeradas ocasiones para obtener resultados consistentes con observaciones. Por mencionar algunos: ART [36], ENZO [37], RAMSES [38], GADGET [40] etc.

Este capítulo está dedicado a describir las bases teóricas para simulaciones de N -cuerpos e Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH) que utiliza el código GADGET.

2.1. Modelos de Fluidos Sin Colisión Auto-gravitantes

Para este tipo de interacciones se hace uso de la ecuación de Boltzmann no colisional acoplada en conjunto con la ecuación de Poisson que describe el comportamiento y evolución de un gas sujeto a fuerzas externas y que tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v = 0, \quad (2.1)$$

donde $f = f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ es una función de la densidad de probabilidad, \vec{v} es la velocidad, \vec{r} es la posición, \vec{F} es la fuerza y m la masa que describen completamente al fluido [39].

En el caso de que esta fuerza \vec{F} se derive de un potencial, tal que

$$\vec{F} = -m\nabla\Phi, \quad (2.2)$$

donde m es la masa de la partícula del sistema. Sustituyendo (2.2) en (2.1) se encuentra

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r - \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}_v = 0 \quad (2.3)$$

Este potencial Φ debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}, t) = 4\pi \int_S f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.4)$$

donde S es todo el espacio y f se define mediante la siguiente expresión

$$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v d^3r \quad (2.5)$$

que viene dada por la masa total de las partículas que se encuentran en un cubo de volumen d^3r centrado en \vec{r} y velocidad ubicada en un cubo de volumen d^3v centrado en \vec{v} . Al integrar en el espacio, lo que se obtiene es la densidad de masa que puede depender del tiempo $\rho(t)$, con esto la ecuación de Poisson presentada en la Ec. (2.4) se reduce a la conocida.

Las expresiones (2.1) y (2.4) conforman la totalidad de las ecuaciones necesarias para describir la dinámica de un gas sin colisiones autogravitante dentro de un Universo meramente Newtoniano. Sin embargo, dada la complejidad para resolver las ecuaciones acopladas se utiliza un método conocido como el de N -cuerpos, gracias a esto, la función f definida en la ecuación (2.5) pasa de ser continua a discreta, dada por funciones deltas de Dirac (Springel et al., 2001) [40], esto permite realizar cálculos numéricos de forma más eficiente.

Para este propósito se introduce un parámetro ϵ conocido como “suavizamiento gravitacional” que permite evitar una divergencia repentina en el cálculo de la fuerza. La idea es la siguiente: En un caso estrictamente Newtoniano en donde se tienen dos partículas i y j , la fuerza entre ellas debe ser simplemente

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}, \quad (2.6)$$

dado que si \vec{r}_i se acerca mucho a \vec{r}_j se tendría una divergencia, pues la fuerza aumentaría indefinidamente si la distancia entre las partículas se aproxima al cero, lo que provocaría una aceleración muy alta. Esto se soluciona si se agrega un parámetro ϵ^2 de manera que

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{\|\epsilon^2 + \vec{r}_i - \vec{r}_j\|}, \quad (2.7)$$

donde ϵ es el parámetro de suavización o “softening length” (Bodenheimer et al., 2007) [41]. Físicamente, se puede interpretar a este parámetro ϵ como la distancia entre los centros de dos partículas que están “unidas”.

En el caso descrito al comienzo de la sección, el potencial puede escribirse de la siguiente manera

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int_S \int_S \frac{f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v' d^3r'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}, \quad (2.8)$$

e introduciendo el parámetro ϵ se obtiene

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int_S \int_S \frac{f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v' d^3r'}{\|\epsilon^2 + \vec{r} - \vec{r}'\|}. \quad (2.9)$$

Estos resultados son válidos para el caso de un Universo Newtoniano.

Al considerar el modelo de Friedman–Lemaître–Robertson–Walker, es decir, el de un Universo homogéneo e isótropo en expansión, la dinámica de las partículas se describe mejor con el siguiente Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i a^2(t)} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1, i \neq j}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_i m_j \Phi(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{a(t)}, \quad (2.10)$$

donde \vec{p}_k y \vec{x}_k son los vectores de momento y posición en el sistema de coordenadas comóviles, a es el factor de escala de la métrica FLRW. El caso Newtoniano se recupera al tomar $a = 1$. El momento canónico viene dado por $\vec{p}_k = a^2(t) m_k \dot{\vec{x}}_k$.

Se suponen además condiciones periódicas a la frontera para una caja de volumen L^3 . Así el potencial de interacción $\Phi(\vec{x})$ será solución de la ecuación

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \left[-\frac{1}{L^3} + \sum_{\vec{n}} \tilde{\delta}(\vec{x} - \vec{n}L) \right], \quad (2.11)$$

aquí \vec{n} simboliza un vector de números naturales. Esta solución corresponde a un “potencial peculiar”

$$\Phi = \sum_{i=1}^N m_i \phi(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (2.12)$$

cuya dinámica la gobierna la ecuación

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G [\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}] \quad (2.13)$$

la Ec. (2.13) es la ecuación de Poisson con un campo de fluctuaciones de densidad $\rho(\vec{x})$ y densidad media $\bar{\rho}$. El softening gravitacional es normalizado en forma de kernel con factor de escala comóvil ϵ , para esto se aplica el kernel de Spline (Monaghan & Lattanzio, 1985) [47] usado en SPH y se toma $\tilde{\delta} = W(\vec{x} - \vec{n}L, 2, 8\epsilon)$ (véase sección 2.2 Hidrodinámica de Partículas Suavizadas), la Ec. (2.11) se convierte en

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \left[-\frac{1}{L^3} + \sum_{\vec{n}} W(\vec{x} - \vec{n}L, 2, 8\epsilon) \right]. \quad (2.14)$$

La dinámica descrita en esta sección es la que se utiliza para describir a las partículas de materia oscura fría (CDM). Se observa que se calcula solo la fuerza entre partículas de materia oscura. Si se utilizara un método tradicional de cálculo, requeriría $N(N-1)$ fuerzas para N partículas. Si N es grande, la fuerza será de un orden de $\mathcal{O}(N^2)$. La ventaja de el método descrito aquí es que reduce ese orden a un cálculo de $N \ln N$.

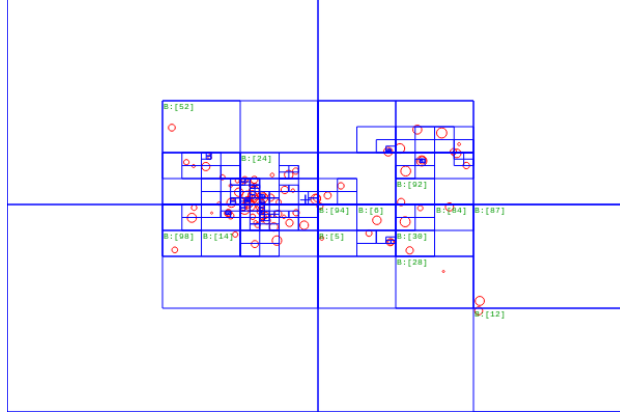


Figura 2.1: Una simulación de 100-cuerpos utilizando el algoritmo Barnes–Hut visualmente como cajas azules.

Esto es debido a que se considera un cubo mínimo que reúne a todas las partículas. Al calcular la expansión multipolar del potencial de las partículas, considerando el suavizamiento y el centro de masas, se ubica una partícula y se hace la pregunta : ¿Es la distancia del centro de masa del conjunto agrupado mayor que el tamaño del cubo inicial dividido por algún parámetro a escoger?

Es decir, se pregunta si se cumple la relación

$$r > \frac{l}{\theta}, \quad (2.15)$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de masa del agrupamiento, l es el largo del cubo inicial y θ es un parámetro de precisión. Si la expresión (2.15) resulta ser cierta para todas las partículas de la simulación, ésta sigue su evolución, si una o más de ellas no satisface esa condición, el cubo inicial se divide en un cubo pequeño de lado $l/2$ y se repite el proceso. Se calculan las expansiones multipolares y los centros de masa para cada cubo y la pregunta se vuelve a repetir para cada proceso. Lo anterior es lo que se conoce como un *Tree algorithm*, algoritmo tipo árbol o algoritmo Barnes–Hut [48].

Las simulaciones de N -cuerpos requieren de gran poder computacional, pues cada cálculo de fuerza se efectúa para cada una de las partículas dentro de la simulación. Con el paso del tiempo han surgido nuevos métodos para calcular estas fuerzas.

Ejemplo de esto es el *Particle Mesh algorithm*. El principio básico es que un sistema de partículas se convierte en una rejilla (o “malla”) de valores de densidad. El potencial se resuelve luego para esta cuadrícula de densidad, y las fuerzas se aplican a cada partícula en función de en qué celda se encuentra y en qué parte de la celda se encuentra. Una vez que se encuentra la distribución de densidad, la energía potencial de cada punto en la malla se puede

determinar a partir de la forma diferencial de la ley de Gauss, que después da lugar a una ecuación de Poisson que se resuelve fácilmente después de aplicar transformadas de Fourier (Klypin & Shadarin 1983; White, Frenk & Davis 1983) [42, 43].

2.2. Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH)

El método de Hidrodinámica de Partículas Suavizadas, por sus siglas en inglés, Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) utiliza un conjunto de partículas discretas para describir el estado de un fluido con cantidades continuas asociadas a la dinámica de fluidos definidas por un método de kernel de interpolación (Gingold & Monaghan, 1977; Lucy, 1977; Monaghan 1997)[44, 45]. Las partículas se mueven como elementos de un fluido que representa al gas en un sentido Lagrangiano. Respecto al medio intergaláctico, se trata como fluido perfecto y está regido por las ecuaciones de Euler de hidrodinámica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} - \vec{\nabla} \Phi, \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.18)$$

Estas ecuaciones ofrecen una visión global del fluido. En la representación de Lagrange, se elige un punto del campo vectorial obtenido por el esquema de Euler en algún tiempo $t = t_0$ y se analiza su evolución temporal, lo que permite estudiar la dinámica de las partículas de manera individual que conforman al fluido. Expresando la derivada total como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}, \quad (2.19)$$

entonces la Ec. (2.16) será

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (2.20)$$

y la Ec. (2.17)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} - \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.21)$$

El modelo de SPH es el siguiente (Monaghan, 1992; Price, D., 2004) [46, 49] se comienza definiendo la interpolación integral de una función $A(r)$ como

$$A_I(\vec{r}) = \int_S A(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \quad (2.22)$$

W es el núcleo o kernel de interpolación y debe satisfacer

$$\int_S W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3 r' = 1 \quad (2.23)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}', h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.24)$$

En el caso de partículas expresadas como deltas de Dirac, la densidad en todo el espacio se define como

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (2.25)$$

para el modelo de SPH, se suaviza el campo de densidad de la siguiente manera

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N m_j W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (2.26)$$

Donde h es un parámetro con dimensiones de longitud. En este ambiente, las smoothing lengths adaptivas se definen de tal manera que el volumen del kernel contenga una masa constante para la densidad estimada

$$\frac{4\pi}{3} h_i^3 \rho_i = N_{SPH} \bar{m}, \quad (2.27)$$

donde N_{SPH} es el número de vecinos de smoothing y \bar{m} es la masa promedio de las partículas. Los cálculos originales de Gingold & Monaghan (1977) [50] utilizan un término Gaussiano unidimensional

$$W(x, h) = \frac{1}{h\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-(x^2/h^2)}. \quad (2.28)$$

En general, el kernel basado en funciones de Spline se obtuvo de los cálculos hechos por Monaghan & Lattanzio (1985) [47] y tiene la siguiente forma

$$W(\vec{r}, h) = \frac{\sigma}{h^\nu} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{h}\right)^3 & \text{si } 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{r}{h}\right)^2 & \text{si } 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}, \quad (2.29)$$

donde ν es el número de dimensiones y σ es una constante de normalización, con valores $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{7\pi}$, $\frac{1}{\pi}$ en una, dos y tres dimensiones respectivamente. Este kernel es de soporte compacto, su segunda derivada es continua y el término dominante del error en la integral de interpolación es $\mathcal{O}(h^2)$. Que sea de soporte compacto significa que las interacciones son exactamente cero para $r > 2h$ y la continuidad de la segunda derivada permite que el kernel no sea sensible ante errores al aproximar la integral por medio de la suma. El resultado es el de un suavizamiento de la densidad, lo que permite, por ejemplo, en el caso de un núcleo gaussiano como el anterior, obtener una densidad continua en todo el espacio. Al tener expresada la densidad, el cálculo numérico de la interpolación integral de la Ec. (2.22) se hace utilizando la siguiente aproximación

$$A_I(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \quad (2.30)$$

donde $A_j = A(\vec{r}_j)$ y $\rho_j = \rho(\vec{r}_j)$. El punto esencial de este método es que puede construir un interpolador diferenciable de una función a partir de sus valores (en este caso, las partículas) usando un kernel diferenciable.

La ecuación de movimiento para el fluido discretizado (Springel & Hernquist, 2002) es

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left[f_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \vec{\nabla}_i W_{ij}(h_i) + f_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \vec{\nabla}_i W_{ij}(h_j) \right] \quad (2.31)$$

los coeficientes f_i se definen por:

$$f_i = \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right) \quad (2.32)$$

y $W_{ij}(h) = W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h)$.

Si no hay fuentes externas de calor, estas ecuaciones describen completamente la dinámica de un fluido en SPH con procesos reversibles. Definiendo una función de la entropía $A \equiv P/\rho^\gamma$, esta permanece constante para cada partícula. Se necesita además una viscosidad artificial para evitar discontinuidad en el flujo de gases ideales

$$\left. \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right|_{visc} = - \sum_{j=1}^N m_j \Pi_{ij} \vec{\nabla}_i \overline{W_{ij}} \quad (2.33)$$

donde Π_{ij} es diferente de cero solo cuando las partículas se acercan unas a otras en el espacio físico. La entropía de esta viscosidad se crea a una razón

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_i^{\gamma-1}} \sum_{j=1}^N m_j \Pi_{ij} \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i \overline{W_{ij}} \quad (2.34)$$

que transforma energía cinética del movimiento del gas de manera irreversible en calor. $\overline{W_{ij}}$ es la media aritmética de los dos kernel $W_{ij}(h_i)$ y $W_{ij}(h_j)$. La forma artificial de la viscosidad se obtiene del cálculo de Monaghan & Lattanzio (1985) [47]

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta_{ij}^2) / \rho_{ij} & \text{si } \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases} \quad (2.35)$$

con

$$\mu_{ij} = \frac{h_{ij} \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^2} \quad (2.36)$$

y c_{ij} es la velocidad media del sonido. Esta viscosidad tiene 3 ventajas: 1.- Es invariante ante transformaciones de Galileo, 2.- Desaparece para rotación de cuerpo rígido y 3.- Se conserva el momento angular. Se han hecho muchos cálculos y pruebas que confirman que, con esta viscosidad, los frentes de choque se esparcen alrededor de $3h$. Los valores de α y β no son críticos y rondan $\alpha \approx 1$ y $\beta \approx 2\alpha$.

2.2.1. Dinámica de Gases

La ecuación para el cambio en la razón de la energía térmica por unidad de masa

$$\frac{du}{dt} + \frac{P}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.37)$$

donde u es la energía por unidad de masa y del lado derecho de la Ec.(2.37) se puede agregar un término correspondiente a una fuente. LA energía térmica para una partícula i

$$\frac{du_i}{dt} = \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \sum_j m_j \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}. \quad (2.38)$$

Esto es

$$\frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{P\vec{v}}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (2.39)$$

la ecuación de energía térmica para la partícula i será

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} \quad (2.40)$$

tomando el promedio de las dos ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}. \quad (2.41)$$

Cualquiera de las formas de las ecuaciones de energía presentadas arriba, al ser interpretadas usando un kernel Gaussiano, muestran que la energía térmica de una partícula i incrementa cuando la partícula j se acerca a ella. Al considerar que la energía es conservada, para un gas ideal se cumple

$$P = (\gamma - 1)\rho u \quad (2.42)$$

que para un gas monoatómico $\gamma = 5/3$.

El método SPH describe la dinámica de un gas de partículas, en este caso, materia visible o bariónica, junto con la dinámica de fluidos sin colisión autogravitantes, se tiene lo necesario para llevar a cabo una simulación cosmológica que pueda incluir ambos componentes. En el capítulo 3 se describe la función lógica, aunque de manera breve, del código GADGET-2.

Capítulo 3

GADGET

GALaxies with Dark matter and Gas intERacT (GADGET) es un código libre que utiliza el método de N -cuerpos en conjunto con SPH para el cálculo de simulaciones cosmológicas y que ha tenido varias etapas y modificaciones desde su primer etapa pública en 2001. El código fue desarrollado en su mayoría por Volker Springel [40] como parte de su tesis de doctorado en el Max Planck Institute for Astrophysics. El código puede utilizarse para analizar sistemas aislados o para simulaciones que involucren la expansión del espacio. En ambos casos con o sin condiciones periódicas a la frontera. En todas las simulaciones, GADGET sigue la evolución de un sistema de N -cuerpos sin colisión autogravitante, descrito en el capítulo 2 y permite la inclusión de dinámica de gases, descrita por el método SPH. GADGET es capaz de simular sistemas aislados, tales como la colisión y formación de galaxias hasta la formación a gran escala del Universo. La versión pública del código, GADGET-2 [51], lanzada en 2005 es la que se utilizó para las diversas simulaciones de este trabajo.

En la sección 2.1, se comenta que GADGET hace uso de distintos algoritmos para calcular fuerzas entre partículas de materia oscura y la dinámica de gases para materia bariónica. Se describe de forma breve dos algoritmos para calcular la fuerza entre partículas, los algoritmos tree y PM. GADGET-2 utiliza una combinación de ambos algoritmos, el *TreePM method* (Bode, Ostriker & Xu (2000); Bagla 2002) [52, 53]. Este método construye un campo de densidades de masa en la malla, en la cual se efectúa una transformada de Fourier discreta. Se deja evolucionar en el tiempo y se aplica una transformada de Fourier inversa para obtener el potencial gravitacional de la malla.

Una simulación cosmológica requiere de un poder computacional más allá del de un simple ordenador, se necesita un arreglo de computadoras que permitan el cálculo de manera paralela. Esto es un clúster computacional. Este es un conjunto de ordenadores unidos entre sí normalmente por una red de

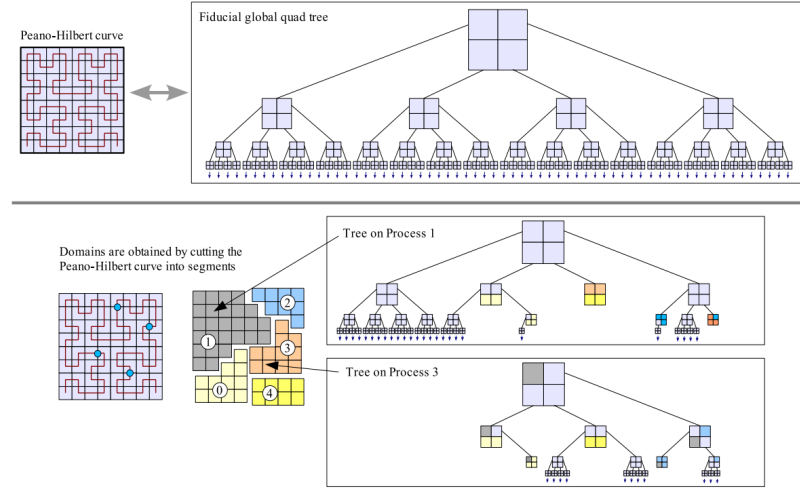


Figura 3.1: Ilustración entre un algoritmo BH y una descomposición de procesos Peano-Hilbert. Esta es una curva que recorre cada malla de la simulación solo una vez. El volumen de la simulación se reparte en dominios al segmentar esta curva en puntos arbitrarios entre los límites de la celda. Esto genera una manera de distribuir el conjunto de partículas en procesadores individuales.

alta velocidad y que se comportan como si fuesen una única computadora. El clúster es un recurso vital para llevar a cabo una simulación de tal magnitud. GADGET-2 utiliza una serie de algoritmos de descomposición. Este arreglo permite distribuir la carga de memoria en procesadores individuales, reduciendo el tiempo de cálculo de manera jerárquica, es decir, se le da prioridad a los cálculos que requieran mayor memoria, por ejemplo en el método TreePM, que divide el espacio en celdas cada vez más pequeñas. Los cálculos que requieren mayor memoria son distribuidos a más procesadores, se les da más prioridad, un proceso como esto se observa mejor en la figura 3.1.

El equipo de Volker Springel realizó la simulación del milenio [54] utilizando GADGET-2; esta simulación utilizó más de 10 mil millones de partículas para rastrear la evolución de la distribución de la materia en una región cúbica del Universo de 2 mil millones de años luz en un lado. Mantuvo ocupado el superordenador principal en el Centro de Supercomputación de la Sociedad Max Planck en Garching, Alemania, durante más de un mes y la cantidad de información obtenida durante esa simulación rebasa los 25 Tbytes.

La simulación incluye 20 millones de galaxias dentro de este enorme volumen agrupadas en halos de materia oscura, visualizada a esta escala como filamentos. Al comparar estos datos simulados con grandes estudios observacionales, se pueden aclarar los procesos físicos subyacentes a la acumulación de galaxias reales.

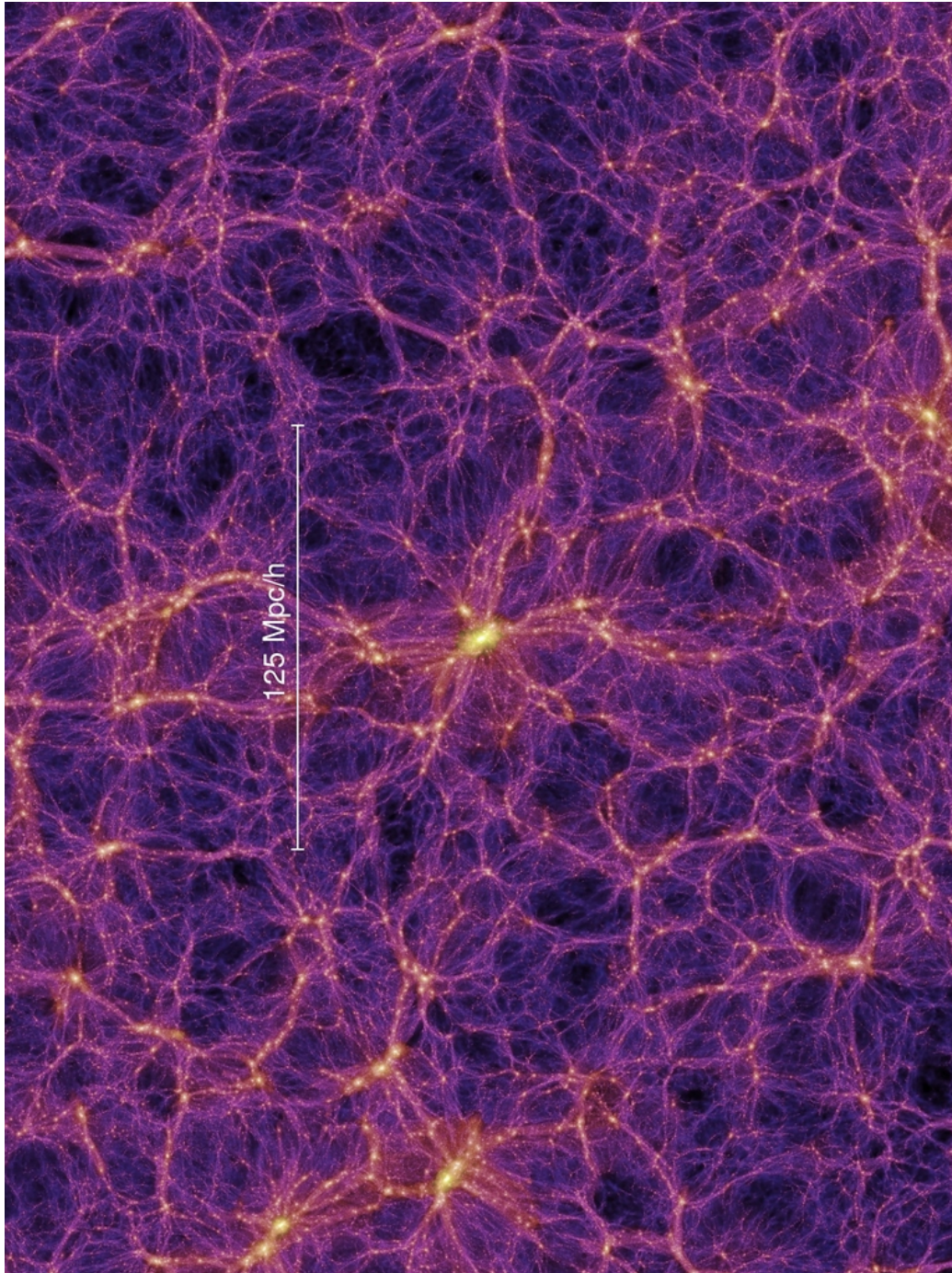


Figura 3.2: Distribución de materia oscura en la simulación del milenio.

3.1. Modificación del Código: Axion-GADGET

Axion-GADGET [55] es una modificación del código de simulaciones de N -cuerpos/SPH de GADGET-2. Está basado en un modelo diferente de materia oscura, el Axion Ultra-Ligero o Ultra-Light Axion DM, también llamado Fuzzy DM (Guzmán & Ureña-López, 2003) sugiere la utilización del modelo SFDM para resolver los problemas que se han encontrado en simulaciones usando diversos códigos para simular las estructuras a gran escala. el FDM es un bosón escalar, ya discutido en la sección 1.2.3., con una masa ultra ligera ($m \sim 10^{-22}$) eV, la cuál es requerida debido a una reciente observación de la época de reionización del Universo.

Algunos de los valores discutidos entre los que debe valer esta masa dicen que su masa debe estar en el orden de 100 km s^{-1} , y que la longitud de onda de de Broglie del FDM debe rondar $\sim \mathcal{O}(\text{kpc})$. Este FDM se produce de manera no térmica y en el régimen no relativista se comporta como CDM. La característica más llamativa del FDM es que el halo tiene un núcleo solitónico de tamaño $\sim \mathcal{O}(\text{kpc})$ resultante de la presión cuántica de las partículas FDM, que puede ser más grande que su propia gravedad. Por lo tanto, la presión cuántica juega un papel esencial en la resolución de la crisis de pequeña escala. Por otra parte, si la estructura de pequeña escala de halo se puede medir con mayor precisión en el futuro, la masa de partículas FDM puede restringirse.

La modificación propone un nuevo esquema de la interacción efectiva Partícula-Partícula del algoritmo PM para simular el modelo FDM, mediante el cual se puede calcular el efecto cuántico del FDM en la simulación de N -cuerpos con alta resolución.

3.1.1. Propiedades Físicas

La naturaleza del FDM se describe mediante las ecuaciones de Schrödinger-Poisson C. (Bardos et al., 2002) [56]

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m_\chi^2} \vec{\nabla}^2 \Psi + m_\chi V \Psi, \quad (3.1)$$

y

$$\vec{\nabla}^2 = 4\pi G m_\chi |\Psi|^2, \quad (3.2)$$

donde \hbar , m_χ y V son la constante de Planck, la masa de la partícula y el potencial gravitacional actuando sobre la partícula, respectivamente. La función de onda puede escribirse como

$$\Psi = \sqrt{\frac{\rho}{m_\chi}} \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) \quad (3.3)$$

en términos de la densidad de número $\frac{\rho}{m_\chi}$, mientras que se puede definir el gradiente de S como el momento lineal de la DM

$$\vec{\nabla} S = m_\chi \vec{v}. \quad (3.4)$$

Después de resolver las ecuaciones de Schrödinger-Poisson, de las partes real e imaginaria, se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \quad (3.5)$$

y la ecuación de conservación de momento

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla}(Q + V) \quad (3.6)$$

y la presión cuántica viene definida por

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m_\chi^2} \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (3.7)$$

Estas dos últimas son llamadas las ecuaciones de Madelung (Spiegel 1980; Uhleman et al. 2014, Marsh 2015) [57, 58, 59]. Se puede ver que esta presión solo está definida por la densidad de masa ρ y puede identificarse como una fuerza adicional ejercida sobre las partículas.

Para discutir el efecto de la presión cuántica, se inicia con el Hamiltoniano sin el término de gravedad

$$H = \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} |\vec{\nabla} \Psi|^2 d^3x = \int \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 d^3x + \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} (\vec{\nabla} \sqrt{\rho})^2 d^3x. \quad (3.8)$$

Entonces la energía cinética en forma discreta con índice j para identificar a cada partícula se escribe como

$$T = \int \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 d^3x = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(\frac{dq_j}{dt} \right)^2, \quad (3.9)$$

donde q_j es la coordenada de la j -ésima partícula y el potencial efectivo de la presión cuántica es

$$K_p = \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} (\vec{\nabla} \sqrt{\rho})^2 d^3x, \quad (3.10)$$

el Lagrangiano del sistema será entonces

$$L = T - K_p = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(\frac{dq_j}{dt} \right)^2 - \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} (\vec{\nabla} \sqrt{\rho})^2 d^3x, \quad (3.11)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange tendrán la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow m_j \ddot{q}_j = - \frac{\partial K_p}{\partial q_j}. \quad (3.12)$$

K_p es una función continua y no puede usarse en el método Particle-Particle (PP). Para eso debe implementarse una aproximación numérica con funciones delta de Kronecker que discreticen a la densidad de número de cada partícula individual

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.13)$$

Para hacer este método todavía mejor y con mucho más ventaja, la función δ puede aproximarse a una función tipo Gaussiana que esté muy estrecha. Las ventajas de esta aproximación son que:

- i) Mantiene naturalmente el suavizamiento del kernel, es diferenciable y esféricamente simétrico.
- ii) La interacción PP evita singularidades en posiciones donde no haya densidad.

Debido al tamaño infinito de la red, esa singularidad puede hacer que numéricamente, el resultado no tenga sentido físico. Con esto en mente, se escribe la función δ como una Gaussiana de la forma

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda^3 \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_i|^2}{\lambda^2}\right). \quad (3.14)$$

El valor de λ no es arbitrario, debe ser del mismo orden de la longitud de onda de deBroglie puesto que una partícula de FDM debe tener probabilidad alta de ser encontrada dentro de un paquete de onda descrito por la ecuación (3.3). Con estos valores, la probabilidad de encontrar una partícula de FDM en una longitud de onda es de 95 %. Tomando la masa del FDM del orden $\mathcal{O}(10^{-22})$ eV como ejemplo, su longitud de onda λ es del orde de kpc. Utilizando la ecuación (3.14) en el término $(\vec{\nabla} \sqrt{\rho})^2$ de la ecuación (3.10) usando la función kernel

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \sqrt{\rho(\vec{r})} \right]^2 &= \frac{1}{4\rho(\vec{r})} \left[\sum_i m_i \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2, \\ &= \frac{1}{4\rho(\vec{r})} \left[\sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \left(-\frac{4}{\lambda^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2, \\ &= \frac{4}{\lambda^4 \rho(\vec{r})} \left[\sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En la simulación, esas partículas de FDM se agrupan en un cúmulo masivo en el espacio. La densidad de masa (3.13) se vuelve

$$\rho(\vec{r}) = \sum_j \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_j), \quad (3.16)$$

con el índice j para cada agrupación de partículas.

Matemáticamente, se puede pensar que la densidad de masa se expande alrededor de \vec{r}_j para incluir todas las partículas de FDM: $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_j$ y $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Tomando eso en consideración, la suma de partículas individuales de FDM es efectivamente la misma que sumando sobre todos los puntos y la ecuación (3.15) puede reescribirse como

$$\left[\vec{\nabla} \sqrt{\rho(\vec{r})} \right]^2 \simeq \frac{4}{\lambda^4} \left[\sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) (\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^2 \left[\sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.17) son prácticamente iguales pero su significado no debe confundirse en este punto; el paquete de onda Gaussiano se vuelve un kernel imaginario de suavizamiento de partículas.

Para discretizar completamente $\partial K_p / \partial q_j$ debe integrarse la ecuación (3.17) en todo el espacio; dada la naturaleza de la propia función δ , se hace énfasis en el volumen que rodea los puntos imaginarios de las partículas. Así, la integración total con la aproximación del kernel da

$$\int |\vec{\nabla} \sqrt{\rho(\vec{r})}|^2 \simeq \int \frac{4d^3x}{\lambda^4} \left[\sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) (\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^2 \left[\sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^{-1} \quad (3.18)$$

$$\simeq 4\lambda^{-4} \sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) (\vec{r} - \vec{r}_j)^2 \Delta V_j B_j, \quad (3.19)$$

$$\simeq 4\lambda^{-4} \sum_j m_j \frac{\Delta V_j B_j}{\lambda^3 \pi^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)^2}{\lambda^2} \right] (\vec{r} - \vec{r}_j)^2, \quad (3.20)$$

donde V_j y B_j son el volumen efectivo y el factor de corrección de la j -ésima partícula.

Se propone un factor de corrección B_j para la j -ésima partícula en la simulación para que numéricamente pueda distinguirse entre los resultados de la integración de la función δ como un kernel Gaussiano. Cuando se trata a esta función como kernel cuya anchura es igual a una longitud de onda

de una partícula, no se comporta como una función δ en la región donde la distancia entre dos centros del kernel es menor a una longitud de onda. En rangos tan pequeños, la superposición entre dos Gaussianas puede contribuir significativamente, especialmente al hacer integraciones con alta densidad de partículas.

Teóricamente, el volumen efectivo V_j para cada partícula en la simulación es del orden de $\lambda^3 \pi^{3/2}$, resultado de una integral del kernel Gaussiano; el valor exacto de ΔV_j puede diferir de sistema a sistema por la propia complejidad de la región central del kernel. Se trata de un parámetro libre fenomenológico o constante, pero se ajusta su valor para hacer coincidir el resultado dentro del núcleo del solitón obtenido con otras aproximaciones. (Schieve et al. 2014) [60].

Finalmente; la ecuación (3.10) se reacomoda

$$\sum_j \frac{\partial K_p}{\partial q_j} = \frac{4\hbar^2}{m_\chi^2 \lambda^4} \sum_j m_j \Delta V_j B_j \exp \left[-\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right] \left(1 - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (3.21)$$

al igual que la ecuación de movimiento (3.12)

$$\sum_j m_j \ddot{q}_j = \frac{4\hbar^2}{m_\chi^2 \lambda^4} \sum_j m_j \Delta V_j B_j \exp \left[-\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right] \left(1 - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (3.22)$$

Sustituyendo q con \vec{r} , la aceleración adicional de la presión cuántica en la simulación se describe como

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{4M\hbar^2}{M_0 m_\chi^2 \lambda^4} \sum_j B_j \exp \left[-\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right] \left(1 - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right) (\vec{r}_j - \vec{r}). \quad (3.23)$$

M es la masa de la partícula en la simulación y M_0 es un factor de normalización que involucra a ΔV_j , cuyo valor se elige $M_0 = 10^6 M_\odot$. Si se coloca cualquier partícula solitaria de prueba alrededor de fuentes de presión cuántica, la energía adicional dada al sistema por parte de esta presión es cero. El trabajo total, es decir la integración de la ecuación (3.23) de $r = 0$ a $r = \infty$ se anula. La presión cuántica es una interacción de rango corto mostrado en la ecuación (3.23) por el término exponencial que decrece.

La finalidad de utilizar esta modificación es la de comparar el modelo FDM con Λ CDM en escalas cosmológicas, dado que el código modificado solo cambia el cálculo de la fuerza entre partículas de materia oscura y no modifica la interacción entre partículas bariónicas. En la siguiente sección se describen algunos ejemplos que vienen incluidos dentro del propio código; la simulación se lleva a cabo con GADGET-2 y con Axion-GADGET.

3.2. Ejemplos

Para tener una idea del uso del código, se describen ciertos ejemplos incluidos dentro de la distribución de GADGET-2. Antes de ejecutar cualquier simulación se debe editar el `makefile` dentro del folder de `Gadget2`, este proceso se detalla más profundamente en el Apéndice A. Los diferentes ejemplos se explican abajo y fueron realizados en una laptop con un solo procesador.

3.2.1. Colisión de galaxias

Esta simulación consiste de dos discos de galaxias acercándose una a otra, llevando a una fusión entre ellas. Cada galaxia consiste de un disco estelar y un halo masivo extenso de materia oscura. Este ejemplo utiliza física Newtoniana, con 20000 partículas de disco y 40000 partículas de halo (figura 3.3).

3.2.2. Formación de estructura a gran escala

Este ejemplo consiste de 32^3 partículas de materia oscura, junto con 32^3 partículas de gas, la formación de estructura se lleva a cabo en una caja periódica de tamaño $(50h^{-1}\text{Mpc})^3$ en un Universo ΛCDM . La física involucrada es para gases adiabáticos y la temperatura mínima del gas se fija en 1000 K. Este ejemplo utiliza condiciones iniciales de malla, donde las partículas de gas se colocan en los centros de la malla rodeados por partículas de materia oscura. La simulación inicia en $z = 10$ y termina en la época presente (figura 3.4).

Los parámetros utilizados para esta simulación se indican en la tabla 3.1

	Parámetros cosmológicos		
	Descripción	Símbolo	Valor
Características	Densidad de materia oscura	Ω_0	0.3
	Densidad de energía oscura	Ω_Λ	0.7
	Densidad de materia bariónica	Ω_b	0.04
	Parámetro de Hubble	h	0.7
	Boxsize	L	50 Mpc

Tabla 3.1: Parámetros de la simulación de ΛCDM .

El ejemplo de la formación de estructura a gran escala es el que se analizará con ambos códigos.

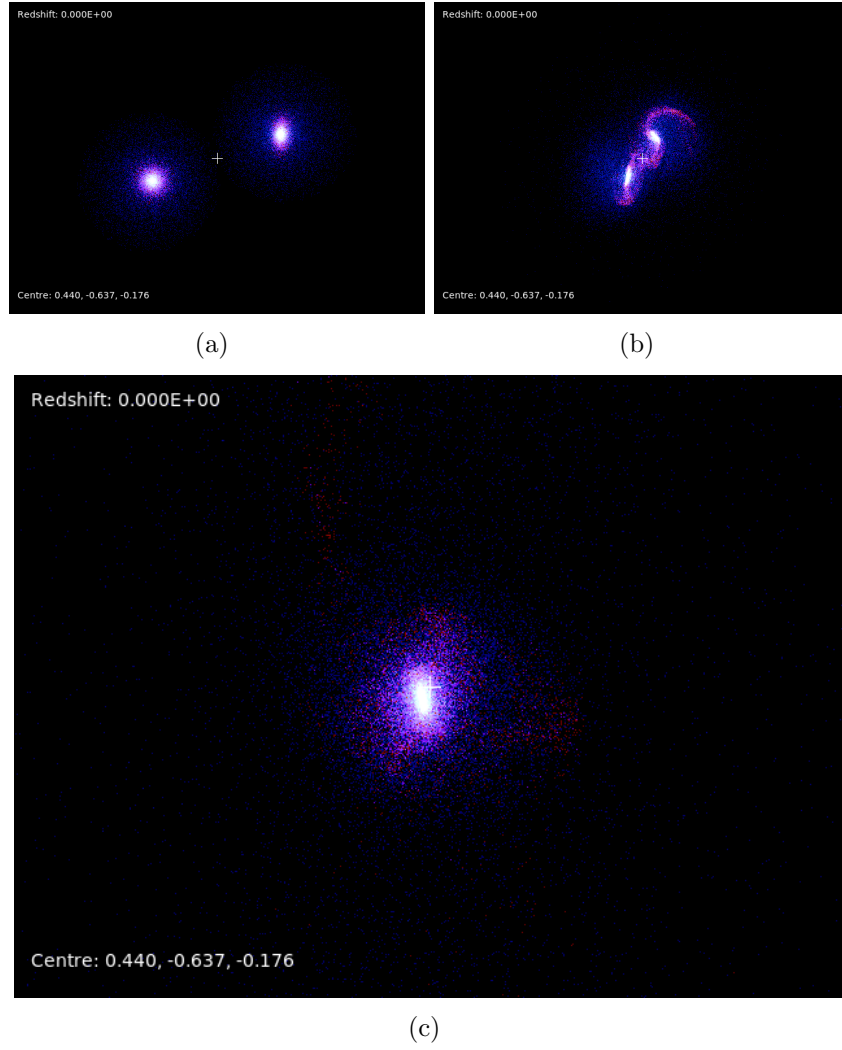


Figura 3.3: Evolución de dos galaxias colisionando para formar una sola. En la figura las partículas azules representan el halo de materia oscura, las partículas rojas representan el disco estelar.

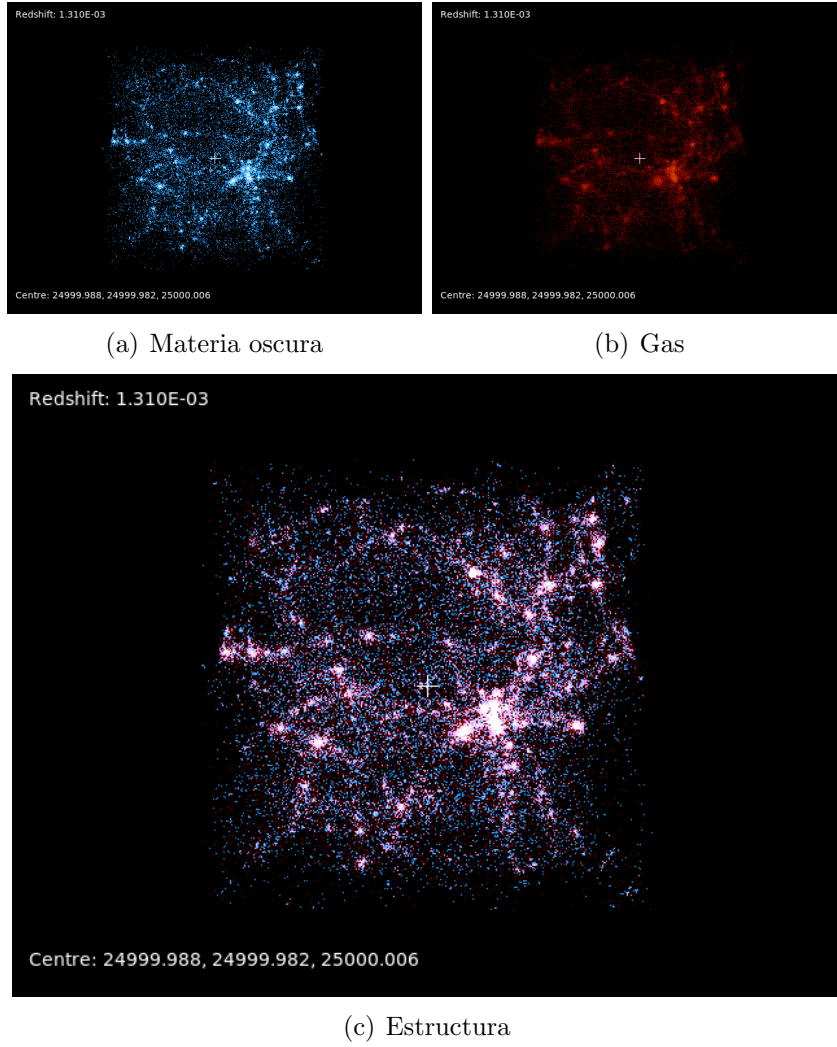


Figura 3.4: Evolución desde $z = 10$ hasta $z = 0$. En la figura se observan los halos de materia oscura y las agrupaciones de gas alrededor de los mismos.

Capítulo 4

Análisis de Resultados

Realizar un análisis de la cantidad de datos que se obtienen de una sola simulación no es tarea fácil. Existe una gran variedad de programas y códigos hechos para poder generar, visualizar e interpretar dichos resultados; muchos de ellos son de gran utilidad ya que permiten tabular distintas propiedades físicas que la simulación lleva a cabo. Otros ayudan a la visualización directa de las partículas y permiten una observación y manipulación en 3 dimensiones de los archivos de salida o **snapshots**. En esta sección se utilizarán diversas herramientas computacionales para crear condiciones iniciales de acuerdo a la capacidad de cálculo disponible; códigos para analizar los datos que se obtienen de cada snapshot y programas para interpretar resultados.

4.1. Generar Condiciones Iniciales

Para poder llevar a cabo una simulación cosmológica con GADGET-2 y en general, con cualquier otro código, se debe contar con un archivo de condiciones iniciales. En dicho archivo se indica:

1. El tipo de simulación que se va a llevar a cabo: cosmológica, galáctica, etc.
2. La cantidad de partículas que se usarán en la simulación.
3. El tiempo de inicio de la simulación en caso de que sea cosmológica (z).
4. La densidad de materia oscura (Ω_0).
5. La densidad de energía oscura (Ω_Λ).
6. La densidad de materia bariónica (Ω_b).

7. El parámetro de Hubble (h).
8. El tamaño de la caja de simulación (L).
9. El término de normalización del espectro de potencias (σ_8).

Entre otras cantidades, tales como la longitud, la masa y la velocidad en unidades convencionales, es decir kpc, M_\odot y km/s. El código que genere este archivo de parámetros lleva a cabo una aproximación, llamada *Aproximación Zeldovich* [61, 62]. Esta es una aproximación simple que describe la etapa no lineal de la evolución gravitacional de una distribución de materia, que se considera homogénea y sin colisiones. Utiliza teoría de perturbaciones no lineal para la densidad de materia. La aproximación Zeldovich se aplica de forma exitosa para describir la agrupación a gran escala de la distribución de los cúmulos de galaxias.

Hay gran cantidad de códigos para generar condiciones iniciales (MuSIC, pyICs, S-GenIC [63]); en este trabajo se hizo el uso de N-GenIC [54], dado que fue creado por Volker Springel en 2003 y sus archivos de salida son creados específicamente para GADGET, incluso este código fue utilizado para crear las condiciones iniciales para la simulación del milenio.

Las condiciones iniciales para la formación de estructura utilizada en este trabajo se indican en la tabla 4.1 No se utilizaron partículas de materia

	Condiciones Iniciales		
	Descripción	Símbolo	Valor
Características	Número de partículas	N	32^3
	Densidad de materia oscura	Ω_0	0.3
	Densidad de energía oscura	Ω_Λ	0.7
	Parámetro de Hubble	h	0.7
	Boxsize	L	1 Mpc
	Corrimiento al rojo inicial	z	10
	Normalización del espectro de potencias	σ_8	0.8

Tabla 4.1: Condiciones iniciales para simulación de Λ CDM.

bariónica debido a la implementación de Axion-GADGET. Más adelante se explica el porqué de esta elección.

4.2. Ejecución de los códigos

GADGET y Axion-GADGET cuentan con archivos de parámetros específicos para cada simulación, lo importante es especificar distintos valores

al ejecutar el código, ya que estos deben coincidir con los valores que se han generado en las condiciones iniciales. En la figura 4.1 se observa que las con-

```

ICFormat          1
SnapFormat        1
ComovingIntegrationOn 1

TypeOfTimestepCriterion 0
OutputListOn        0
PeriodicBoundariesOn 1

% Characteristics of run
TimeBegin          0.090909091 % z=10, Begin of the simulation
TimeMax            1          % z=0, End of the simulation

Omega0             0.3
OmegaLambda        0.7
OmegaBaryon        0.0
HubbleParam        0.7
BoxSize            1000.0

```

```

% System of units
UnitLength_in_cm   3.085678e21 ; 1.0 kpc
UnitMass_in_g      1.989e43    ; 1.0e10 solar masses
UnitVelocity_in_cm_per_s 1e5    ; 1 km/sec
GravityConstantInternal 0

% Softening lengths
MinGasHsmfFractional 0.25

SofteningGas       1.0
SofteningHalo      1.0
SofteningDisk      0
SofteningBulge     0
SofteningStars     0
SofteningBndry     1.0

SofteningGasMaxPhys 1.0
SofteningHaloMaxPhys 1.0
SofteningDiskMaxPhys 0
SofteningBulgeMaxPhys 0
SofteningStarsMaxPhys 0
SofteningBndryMaxPhys 1.0

```

(a) Condiciones Iniciales
(b) Unidades y softening length

Figura 4.1: Formato del archivo de parámetro para GADGET-2.

diciones iniciales son las mismas que las escritas en la sección anterior. Si por algún motivo estos valores no coincidieran, el propio código lo indica y termina su ejecución. Estos valores son ideales para una computadora pequeña o laptop, dado que el cálculo se hace sólo para 32768 partículas de materia oscura, sin incluir partículas de gas. El tiempo de ejecución para estos valores fue de aproximadamente 10 minutos.

Se debe señalar que los softening lengths escogidos no son arbitrarios. Al utilizar el código Axion-GADGET deben añadirse 3 parámetros más, La masa del campo escalar o de las partículas de FDM M_χ , un parámetro de normalización para la masa y su longitud de onda de Compton λ (figura 4.2). Se elige un softening length de 1 kpc dado que la longitud de onda de Compton es de ese mismo orden, si se cambia el softening del archivo para ejecutar Axion-GADGET, el programa se detiene, esto es debido a que no puede iterar de manera correcta los cálculos de la fuerza entre partículas. La modificación del código sólo se hace para esta parte, la presión entre las partículas de materia oscura es de naturaleza cuántica, al elongar o acortar esta longitud, la ejecución se detiene.

```

FdmAxionMass 1.0 %1e-22eV
FdmNormMass 0.00775466
FdmKernelLambda 1.414213562 %kpc

```

Figura 4.2: Parámetros adicionales para ejecutar Axion-GADGET.

Apéndice A

Instalación de GADGET-2

GADGET-2 es un código fuente de dominio libre, de manera que cualquier persona pueda hacer simulaciones con el. Las instrucciones para compilar y correr el código dependen en gran manera de la plataforma que se utilice; si el usuario tiene Linux o UNIX, las herramientas necesarias para compilarlo están completas. En MacOS, se necesita una actualización de Xcode, el cual incluye todos los compiladores necesarios para instalar el código. En Windows, es probable que tenga que obtenerse cygwin, el cual proporciona soporte completo de UNIX en sistemas.

Primero, se necesita descargar el siguiente software:

1. Gadget-2.0.7.
2. Versión 1.9 o superior de GNU scientific library (GSL).
3. Versión 2.1.5 de FFTW fast Fourier Transform in the West.
4. Una librería de procesamiento en paralelo, como Message Passing Interface (MPI) o como Open-MPI o MPICH.

Open-MPI viene incluido en MacOS, por lo que usuarios con ese sistema operativo no requieren descargarlo. No descargar una versión 3.x de FFTW, ya que no incluye soporte para procesamiento en paralelo.

Una vez que se tiene todo el software descargado, se requiere extraer el `.tar.gz` e instalar. Todo el proceso se hace en una Terminal para un sistema operativo Linux, la instalación prosigue de la siguiente manera:

1. Extraer el software:

```
jazhiel@PC~/Documents/code: tar -xvzf fftw-2.1.5.tar.gz
```

```
jazhiel@PC~/Documents/code: tar -xvzf gsl-1.9.tar.gz
```

```
jazhiel@PC~/Documents/code: tar -xvzf gadget-2.0.7.tar.gz
```

2. Instalar GSL:

```
jazhiel@PC~/Documents/code: cd gsl-1.9/
jazhiel@PC~/Documents/code/gsl-1.9: ./configure
snip: muchos outputs de diagnóstico
jazhiel@PC~/Documents/code/gsl-1.9: make
jazhiel@PC~/Documents/code/gsl-1.9: sudo make install
```

Esta es una instalación en una carpeta `root`. Si no se tienen privilegios de administrador es probable que se necesite instalar en una carpeta aparte, esto se hace con el comando

```
--prefix=/path/to/folder/
```

donde `path` es la dirección del directorio donde se instalará el software.

3. Instalar FFTW:

```
jazhiel@PC~/Documents/code: cd fftw-2.1.5/
jazhiel@PC~/Documents/code/fftw-2.1.5: ./configure - -enable-mpi - -
enable-type-prefix - -enable-float
jazhiel@PC~/Documents/code/fftw-2.1.5: make
Este es un buen momento para ir por un café.
jazhiel@PC~/Documents/code/fftw-2.1.5: sudo make install
```

4. Editar el Makefile de Gadget:

GADGET tiene una increíble cantidad de parámetros para compilar, los cuales se describen de manera extensa en la guía de usuario. Hay muchos cambios que se deben hacer al `makefile` de Gadget para que compile correctamente. En el directorio donde se extrajo Gadget, luego al directorio de **Gadget-2** dentro de ese directorio. Abrir el `makefile` en un editor de textos (e.g. `vim`, `emacs`, `textedit`, `notepad`), editar los parámetros de compilación para que la parte inicial del `makefile` luzca así:

```
#----- Basic operation mode of code
#OPT += -DPERIODIC
OPT += -DUNEQUALSOFTENINGS
```

```

#-----Things that are always recommended
OPT += -DPEANOHILBERT
OPT += -DWALLCLOCK

#-----TreePM Options
#OPT += -DPMGRID=128
#OPT += -DPLACEHIGHRESREGION=3
#OPT += -DENLARGEREGION=1.2
#OPT += -DASMTH=1.25
#OPT += -DRCUT=4.5

#-----Single/Double Precision
#OPT += -DDOUBLEPRECISION
#OPT += -DDOUBLEPRECISION_FFTW

#-----Time integration options
OPT += -DSYNCHRONIZATION
#OPT += -DFLEXSTEPS
#OPT += -DPSEUDOSYMMETRIC
#OPT += -DNOSTOP_WHEN_BELOW_MINTIMESTEP
#OPT += -DNOPMSTEPADJUSTMENT

#-----Output
#OPT += -DHAVE_HDF5
#OPT += -DOUTPUTPOTENTIAL
#OPT += -DOUTPUTACCELERATION
#OPT += -DOUTPUTCHANGE OF ENTROPY
#OPT += -DOUTPUTTIMESTEP

#-----Things for special behaviour
#OPT += -DNOGRAVITY
#OPT += -DNOTREERND
#OPT += -DNOTYPEPREFIX_FFTW
#OPT += -DLONG_X=60
#OPT += -DLONG_Y=5
#OPT += -DLONG_Z=0.2
#OPT += -DTWODIMS
#OPT += -DSPH_BND_PARTICLES
#OPT += -DNOVISCOSITYLIMITER
#OPT += -DCOMPUTE_POTENTIAL_ENERGY
#OPT += -DLONGIDS

```

```
#OPT += -DISOTHERM_EQS
#OPT += -DADAPTIVE_GRAVSOFT_FORGAS
#OPT += -DSELECTIVE_NO_GRAVITY=2+4+8+16
```

```
#-----Testing and Debugging options
#OPT += -DFORCETEST=0.1
```

```
#----- Glass making
#OPT += -DMAKEGLASS=262144
```

El cambio más importante es comentar la opción de HAVE_HDF5 para evitar errores de compilación.

Luego, se debe editar nuevamente el makefile para indicar dónde se han instalado las librerías GSL y FFTW, mi makefile luce así:

```
#-----
# Here, select compile environment for the target machine.
#This may need adjustment, depending on your local system.
#Follow the examples to add additional target platforms,
#and to get things properly compiled.
#-----
```

```
#----- Select some defaults
```

```
CC = mpicc # sets the C-compiler
OPTIMIZE = -O2 -Wall -g # sets optimization and warning flags
MPICHLIB = -lmpich
```

```
#-----Select target computer
```

```
SYSTYPE="MPA"
```

```
#-----Adjust settings for target computer
```

```
ifeq ($(SYSTYPE),"MPA")
CC      = mpicc
OPTIMIZE = -O3 -Wall
GSL_INCL = -I/usr/local/include
GSL_LIBS = -L/usr/local/lib -Wl,"-R /usr/common/pdsoft/lib"
```

```

FFTW_INCL= -I/usr/local/include
FFTW_LIBS= -L/usr/local/lib
MPICHLIB = -L/usr/lib
#HDF5INCL =
#HDF5LIB  = -lhdf5 -lz
endif

```

Puede definirse un `SYSTYPE` propio para indicar a GADGET las direcciones donde se ha instalado las librerías de GSL y FFTW. Por default, están en `/usr/local/`. Es importante guardar los cambios que se han hecho y leer el manual del usuario de GADGET, ya que dependiendo de lo que se quiera simular, el `makefile` tiene que editarse; la configuración anterior es para simular la colisión de dos galaxias.

Para correr esta colisión, se recomienda crear un folder de trabajo con los ejecutables y archivos de parámetros:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: mkdir galaxy
```

Copiar el ejecutable Gadget2 en el folder galaxy:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: cp Gadget2/Gadget2 galaxy/
```

Copiar los archivos de parámetros en el folder galaxy:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: cp Gadget2/parameterfiles/
galaxy.param galaxy/
```

Entrar en el folder galaxy:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: cd galaxy
```

Editar el archivo `galaxy.param` para que las dos primeras líneas luzcan de la siguiente manera:

```
% Relevant files
```

```
InitCondFile /path/to/Gadget-2.0.7/ICs/galaxy_littleendian.dat
OutputDir /path/to/Gadget-2.0.7/galaxy/
```

Debe cambiarse la dirección al folder de condiciones iniciales del código y el directorio de `output` en donde se ha creado el folder `galaxy`. Ahora se tiene todo para correr la primera simulación con el siguiente comando:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7/galaxy: mpirun -np 2 ./Gad-
get2 galaxy.param
```

Este comando llama un programa de MPI para procesamiento en paralelo, en este caso Gadget. El parámetro `-np 2` indica cuántos procesadores se utilizarán para la ejecución de Gadget, es decir, 2. Si se cuenta con más de dos procesadores puede cambiarse `-np 2` al número de procesadores disponibles. Si no se cuenta con procesamiento en paralelo, invocar el comando:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7/galaxy: ./Gadget2 galaxy.param
```

será suficiente, aunque más tardado. Se recomienda incrementar el número de archivos de salida para crear una animación de la colisión de las galaxias.

Bibliografía

- [1] RYDEN, B. S. (2003), *Introduction To Cosmology*, San Francisco: Addison-Wesley
- [2] BATTANER, E. (2015), *Grandes estructuras del universo: El cosmos a gran escala*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U.
- [3] HUBBLE, E. (1929) *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 15, Issue 3, pp. 168-173
- [4] ZWICKY, F. (1937), *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, Astrophysical Journal, vol. 86, p.217
- [5] RUBIN, V. C.; FORD, W. K. (1970), *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, Astrophysical Journal, vol. 159, p.379
- [6] SPERGEL, D.N. ET AL. (2007), *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Observations: Implications for Cosmology*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/0603449v2
- [7] MANDOLESI, N.; BURIGANA, C.; GRUPPUSO, A.; NATOLI, P. (2013), *The Planck Mission: Recent Results, Cosmological and Fundamental Physics Perspectives*, International Journal of Modern Physics D, vol. 22, Issue 14, id. 1330029
- [8] SPERGEL, D. N.; BOLTE, M.; FREEDMAN, W. (1997), *The age of the universe*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 94 pp. 6579-6584
- [9] SARKAR, S. (1996), *Big Bang nucleosynthesis and physics beyond the Standard Model*, ArXiv preprint, arXiv:hep-ph/9602260v2

- [10] BURLES, S.; NOLLET, K. M.; TURNER, M. S. (2000), *What Is The BBN Prediction for the Baryon Density and How Reliable Is It?*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/0008495v4
- [11] OLIVE, K. A.; STELGMAN G.; WALKER, T. P.; (1999), *Primordial Nucleosynthesis: Theory and Observations*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/9905320v1
- [12] BLANTON, M. R. ET AL. (2017), *Sloan Digital Sky Survey IV: Mapping the Milky Way, Nearby Galaxies, and the Distant Universe*, The Astronomical Journal, vol. 154, Issue 1, pp. 35 (2017)
- [13] GUTH, A. H. (1981), *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Physical Review D (Particles and Fields), vol. 23, Issue 2, 15 January 1981, pp.347-356
- [14] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. (2002), *The Cosmological Costant and Dark Energy*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0207347v2
- [15] SASAKI, M. (1986), *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, Progress of Theoretical Physics, vol. 76, Issue 5, pp. 1036–1046
- [16] SPRINGEL, V. ET AL. (2005), *Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars*, Nature, vol 435, Issue 7042, pp. 629-636
- [17] KLYPIN, A. A.; KRAVSTOV, A. V.; BULLOCK, J. S.; PRIMACK, J. R. (2001), *Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos*, The Astrophysical Journal, vol. 554, Issue 2, pp. 903-915
- [18] HOMMA, D.; CHIBA, M.; OKAMOTO, S. ET AL. (2016), *A New Milky Way satellite discovered in the SUBARU/HYPER SUPRIME-CAM survey*, The Astrophysical Journal, vol. 832, 1
- [19] GRØN, O. HERVIK, S. (2004), Dynamics of Homogeneous and Isotropic cosmologies. In *Einstein's General Theory of Relativity*, University of Oslo, pp. 265-267
- [20] SCHUTZ, B. (2009), Perfect fluids in special relativity. In *A first Course in General Relativity*, pp. 84-110, Cambridge: Cambridge University Press
- [21] SCHUTZ, B. (2009), The Einstein field equations. In *A first Course in General Relativity*, pp. 184-202, Cambridge: Cambrige University Press

- [22] NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. (1996), *The Structure of Cold Dark Matter Halos*, Astrophysical Journal vol. 462, p.563
- [23] MOORE, B. (1994), *Evidence against dissipation-less dark matter from observations of galaxy haloes*, Nature, vol. 370, pp. 629-631
- [24] MOORE, B., QUINN, T., GOVERNATO, F., STADEL, J., LAKE, G (1999), *Cold collapse and the core catastrophe* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 310, Issue 4, pp. 1147-1152
- [25] NAVARRO, J. F.; HAYASHI, E.; POWER, C.; JENKINS, A. R.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M.; SPRINGEL, V.; STADEL, J.; QUINN, T. R. (2004), *The inner structure of Λ CDM haloes - III. Universality and asymptotic slopes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 349, Issue 3, pp. 1039-1051
- [26] GUZMÁN, F. S.; MATOS T. (2000), *Scalar fields as dark matter in spiral galaxies*, Classical and Quantum Gravity, vol. 17, Issue 1, pp. L9-L16
- [27] SPERGEL, D. N.; STEINHARDT P. J. (2000), *Observational Evidence for Self-Interacting Cold Dark Matter*, Physical Review Letters, vol. 84, Issue 3760
- [28] COLÍN, P.; AVILA-REESE, V.; VALENZUELA, O. (2000), *Substructure and halo density profiles in a Warm Dark Matter Cosmology*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0004115
- [29] CLOWE, D.; ET AL. (2006), *A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter*, The Astrophysical Journal, vol. 648, Issue 2, pp L109-L113
- [30] GOODMAN, J. (2000), *Repulsive Dark Matter*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0003018
- [31] HU, W.; BARKANA, R.; GRUZINOV, A. (2000), *Cold and Fuzzy Dark Matter* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0003365
- [32] KAPLINGHAT, M.; KNOX, L. TURNER, M. S. (2000), *Annihilating Cold Dark Matter* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0005210
- [33] CEN, R. (2000), *Decaying Cold Dark Matter Model and Small-Scale Power*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0005206

- [34] ELLIS, J. (2007), BEYOND THE STANDARD MODEL WITH THE LHC, *Nature*, vol. 448, Issue 7151, pp. 297-301
- [35] MILGROM, M. (2002), *MOND-theoretical aspects* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0207231
- [36] KRAVSTOV, A. V. (1999), *High-resolution simulations of structure formation in the universe* Thesis (PhD). NEW MEXICO STATE UNIVERSITY, Source DAI-B 60/11, p. 5564, May 2000, 256 pages
- [37] O'SHEA, B. W.; BRYAN, G.; BORDNER, J.; NORMAN, M. L.; ABEL, T.; HARKNESS, R.; KRITSUK, A. (2004), *Introducing Enzo, an AMR Cosmology Application* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0403044
- [38] TEYSSIER, R. (2002), *Cosmological hydrodynamics with adaptative mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES*, *Astronomy and Astrophysics*, vol.385, pp.337-364
- [39] REIF, F.; SCOTT, H. L.,(1998), *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* American Journal of Physics, vol. 66, Issue 2, pp. 164-167
- [40] SPRINGEL, V.; YOSHIDA, N.; WHITE, S. D. M., (2001) *GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations* , *New Astronomy* Volume 6, pp. 79-117
- [41] BODENHEIMER, P.; LAUGHLIN, G. P.; RÓZYCZKA, M.; YORKE, H. W., (2007) *Numerical Methods in Astrophysics: An Introduction*, CRC Press, December 2006
- [42] Klypin, A. A.; Shadarin, S. F. (1983), *Three-dimensional numerical model of the formation of large-scale structure in the Universe* *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (ISSN 0035-8711), vol. 204, pp. 891-907
- [43] White, S. D. M.; Frenk, C. S.; Davis, M. (1983), *Clustering in a neutrino-dominated universe*, *Astrophysical Journal*, Part 2 - Letters to the Editor (ISSN 0004-637X), vol. 274, pp. L1-L5
- [44] GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J.J. (1977) *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, pp. 375-389
- [45] MONAGHAN, J. J., (1997) *SPH and Riemman Solvers*, *Journal of Computational Physics*, vol. 136, Issue 2 pp. 298-307

- [46] MONAGHAN, J. J. (1992) *Smoothed Particle Hydrodynamics*,
- [47] MONAGHAN, J.J.; LATTANZIO, J. C. (1985), *A refined particle method for astrophysical problems*, Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361), vol. 149, no. 1, pp. 135-143 Annual review of astronomy and astrophysics, vol. 30 (A93-25826 09-90), pp. 543-574
- [48] BARNES, J.; HUT, P. (1986), *A hierarchical $\mathcal{O}N \log N$ force-calculation algorithm* Nature, vol. 324, Issue 4, pp. 446-449
- [49] PRICE, D. J. (2004) *Smoothed Particle Magnetohydrodynamics-II. Variational principles and variable smoothing-length terms*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 348, Issue 1, pp. 139-152
- [50] GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J.J. (1977), *Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 181, pp. 375-389
- [51] SPRINGEL, V. (2005), *The cosmological simulation code: GADGET-2*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 364, pp. 1105-1134
- [52] BODE, P.; OSTRICKER, J. P.; XU, G. (2000) *The Tree-Particle-Mesh N-body Gravity Solver* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/9912541
- [53] BAGLA, J. S. (2002), *TreePM: A code for cosmological N-body simulations* Journal of Astrophysics and Astronomy, vol. 23, Issue 3-4, pp.185-196
- [54] SPRINGEL, V.; WHITE, S. D. M.; JENKINS, A.; FRENK, C. S.; YOSHIDA, N.; GAO, L.; NAVARRO, J.; THACKER, R.; CROTON, DA.; HELLY, J.; PEACOCK, J. A.; COLE, S.; THOMAS, P.; COUCHMAN, H.; EVRARD, A.; COLBERG, J.; PEARCE, F. (2005) *Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars* Nature, vol. 435, pp. 629
- [55] ZHANG, J., TSAI, Y.-L. S., KUO, J.-L., CHEUNG, K., CHU, M.-C (2017), *Ultra-Light Axion Dark Matter and its Impacts on Dark Halo Structure in N-body Simulation*, ArXiv preprint arXiv:1611.00892v6
- [56] BARDOS, C., ERDÖS, L., GOISE, F., MAUSER, N., YAU, H.-T (2002), *Derivation of the Schrödinger-Poisson equation from the quantum N-body problem* Comptes Rendus Mathématique, vol. 334, Issue 6, pp. 515-520

- [57] SPIEGEL, E. A. (1980), *Fluid form of the linear and nonlinear Schrödinger equations*, Physica D: Nonlinear Phenomena vol. 1 Issue 2, pp. 236-240
- [58] UHLEMAN, C., KOPP, M., HAUGG, T. (2014), *Schrödinger method as N-body double and UV completion of dust*, Physical Review D. vol. 90, Issue 2
- [59] MARSH, D. J. E. (2015), *Nonlinear hydrodynamics of axion dark matter: Relative velocity effects and quantum forces*, Physical Review, vol. 91, Issue 12
- [60] SCHIVE, H.-Y.M CHIUEH, T., BROADHURST, T. (2014), *Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave*, Nature Physics, vol. 10, Issue 7, pp. 496
- [61] ZELDOVICH, Y. B. (1970), *Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations*, Astronomy and Astrophysics, vol. 5, pp. 84 - 89
- [62] SHANDARIN, S. F.; ZELDOVICH, Y. B. (1989), *The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium*, Reviews of Modern Physics, vol. 61, pp. 185
- [63] HAHN, O.; ABEL, T. (2011), *Multi-scale initial conditions for cosmological simulations*, ArXiv preprint, arXiv:1103.6031