Physics Cosmology 物理宇宙学
Assignment I 作业一

---

1. 度规张量 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ 描述了 ________ 的几何性质?

   a). 2D sphere b). 2D flat

   请写出：$g_{rr}, g_{r\theta}, g_{\theta\theta}, g^{rr}, g^{r\theta}, g^{\theta\theta}$ 分别的表达

   请写出 Γ^a_{bc} 的全部非零分量，用 r, θ 表达

   计算求证 $\nabla_a g_{mn} = 0$

(9 Marks)

Ans: I.1

(a) 2D flat (1)

(b) $g_{rr} = 1$, $g_{r\theta} = 0$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g^{rr} = 1$, $g^{r\theta} = 0$, $g^{\theta\theta} = 1/r^2$ (3)

(c) $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$, $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$，其它均为 0 (2)

(d) 分三种情况计算： (3)

1. $m = n = r$:

$$\nabla_a g_{rr} = -2\Gamma^\lambda_{ar} g_{\lambda r}$$

当且仅当 $\lambda = r$ 时 $g_{rr} = 1$，但此时 $\Gamma^r_{ar} = 0$，因此 $\nabla_a g_{rr} = 0$

1 分

2. $m = r, n = \theta$:

$$\nabla_a g_{r\theta} = -\Gamma^\lambda_{ar} g_{\lambda\theta} - \Gamma^\lambda_{a\theta} g_{r\lambda}$$

若 $a = r$, 第一项中 $\Gamma^\lambda_{rr} = 0$, 第二项仅当 $\lambda = r$ 时 $g_{r\lambda} = 1$, 但此时 $\Gamma^r_{r\theta} = 0$, 因此 $\nabla_r g_{r\theta} = 0$

若 $a = \theta$，第一项 $\lambda = \theta$ 时非零，为 r，第二项 $\lambda = r$ 时非零，为 $-r$，因此 $\nabla_\theta g_{r\theta} = 0$

1 分

3. $m = n = \theta$:

$$\nabla_a g_{\theta\theta} = \partial_a g_{mn} - 2\Gamma^\lambda_{a\theta} g_{\lambda\theta}$$

若 $a = r$，$\partial_r g_{\theta\theta} = 2r$，$-2\Gamma^\theta_{r\theta} g_{\theta\theta} = -2r$，因此 $\nabla_r g_{\theta\theta} = 0$

若 $a=\theta$，$\partial_\theta g_{\theta\theta}=0$，$-2\Gamma^\lambda_{\theta\theta}g_{\lambda\theta}=0$，因此 $\nabla_\theta g_{\theta\theta}=0$

1 分

综上所计算，$\nabla_a g_{mn}=0$

另解：该结论是度规相容条件，在广义相对论所使用的黎曼几何中不依赖具体坐标系的选择而成立。因此我们可以直接展开：

$$\begin{aligned}
\nabla_a g_{mn} &= \partial_a g_{mn} - \Gamma^\rho_{am} g_{\rho n} - \Gamma^\rho_{an} g_{m\rho} && (1)\\
&= \partial_a g_{mn} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\partial_m g_{\sigma a} + \partial_a g_{m\sigma} - \partial_\sigma g_{ma}\right) g_{\rho n} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\partial_n g_{\sigma a} + \partial_a g_{n\sigma} - \partial_\sigma g_{na}\right) g_{m\rho} && (2)\\
&= \partial_a g_{mn} - \frac{1}{2}\delta^\sigma_n \left(\partial_m g_{\sigma a} + \partial_a g_{m\sigma} - \partial_\sigma g_{ma}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\delta^\sigma_m \left(\partial_n g_{\sigma a} + \partial_a g_{n\sigma} - \partial_\sigma g_{na}\right) && (3)\\
&= 0 && (4)
\end{aligned}$$

评分细则：(b) 每个分量 0.5 分，(c) 每个分量 1 分，写出其他扣 0.5 分吗，(d) 一共六种情况，每漏一种/计算错误扣 0.5 分

2. 在低速弱引力场条件下，时空近似平直。我们可以假设度规是 Minkowski 时空度规上加一个微小的扰动项：$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$，其中 $\eta_{\mu\nu}$ 即为 Minkowski 时空度规，$h_{\mu\nu}\ll 1$。将测地线方程：$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$ 在上述条件下近似，通过与牛顿引力对比，证明：
   (a) $h_{00}=-2\phi$，这里 ϕ 是牛顿引力势（$\nabla^2\phi=4\pi G\rho$）
   (b) 我们对引力场中静钟计时间隔 $dt\simeq(1-\phi)d\tau$，其中 $d\tau$ 为固有时间间隔。

(6 Marks)

Ans: I.2

(a) 低速弱引力场条件下，粒子运动速度远小于光速，有： (4)

$$\frac{dx^i}{d\tau}\ll\frac{dt}{d\tau}$$

假设弱场随时间变化较慢，可近似为静态场：

$$\partial_t h_{\mu\nu}=0$$

代入测地线方程，展开到一阶近似，得到：

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=0$$

1 分

计算克里斯托弗符号，近似到一阶：

$$\Gamma^\mu_{00}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_t h_{0\nu}+\partial_t h_{\nu 0}-\partial_\nu h_{00}\right)=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}$$

因此，克里斯托弗符号的空间分量和时间分量分别为：

$$\Gamma^i_{00}=-\frac{1}{2}\partial_i h_{00},\quad \Gamma^0_{00}=\frac{1}{2}\partial_t h_{00}=0$$

2 分

代入测地线方程，得到：

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\frac{1}{2}\nabla h_{00}$$

对比牛顿引力 $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=-\nabla\phi$ 可得：

$$h_{00}=-2\phi$$

1 分

(b) 静钟满足 $d\vec{x}=0$，则时空间隔为： (2)

$$ds^2=-(1+2\phi)dt^2=-d\tau$$

1 分

则静钟计时间隔为：

$$dt=\frac{d\tau}{1+2\phi}\simeq(1-\phi)d\tau$$

1 分

3. 利用 1. 中极坐标表述考虑时空度规 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2$，$d\tau = \sqrt{-ds^2}$，写出测地线方程所有非零项对应的表达。

   另：自由粒子平直空间中 Lagrangian 拉氏量为 $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$，在极坐标下利用 Euler-Lagrange Equation，写出自由粒子 Equation of motion，考察和理解二者等价。

(5 Marks)

Ans: I.3

1）计算克里斯托弗符号并代入测地线方程

时间分量：$\Gamma^0_{\mu\nu} = 0$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

非零坐标分量：$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$, $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{d\tau^2} - r\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 & = 0 \\ \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}\right) & = 0 \end{cases}$$

2 分

2）极坐标下自由粒子拉氏量为：$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

对 r、θ 分别应用 Euler-Lagrange Equation：$\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} & = 0 \end{cases}$$

2 分

两者关系：在本例中，$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$，$\frac{dt}{d\tau} = Const.$，测地线方程中所有的 $d\tau$ 均可替换为 dt，于是粒子测地线方程与运动方程等价。对于自由粒子时空中两点的测地线能使得作用量取极值，即 E-L 方程所描述的粒子的运动轨迹。

1 分

注：利用后 Newton 方法可以得到 $d\tau = (1 - L)dt$ （详见温伯格《引力和宇宙学》第九章）