气体分子平均相对运动速率的推导

刘伟涛,张 婷,李承祖
(国防科学技术大学 理学院 物理系,湖南 长沙 410073)

摘要:从相对速度的定义和气体分子的速度分布律出发,分别得到了气体分子相对运动速度和速率的分布律,简洁的给出了平均相对运动速率和平均速率之间的关系.

关键词:气体分子;相对运动速度;平均相对运动速率

中图分类号:O 414.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-0712(2011)12-0036-02

在大学物理和普通物理热学教学中,推导气体分子的平均碰撞频率及平均自由程时,需要用到气体分子平均相对运动速率$\bar{u}$和平均速率$\bar{v}$之间的关系

$$\bar{u}=\sqrt{2}\,\bar{v} \tag{1}$$

一些教科书[1-3]中直接给出此式,一些书中用近似的方法来推导[4],也有书中给出了较为严格的推导[5].本文提出一种新的方法,给出该式的严格推导.从气体分子的麦克斯韦速度分布律以及相对运动速度的定义出发,首先给出气体分子相对运动速度和速率的分布律,然后求出气体分子平均相对运动速率,清楚的给出平均相对运动速率$\bar{u}$和平均速率$\bar{v}$之间的关系.

设分子的速度矢量为 $\boldsymbol{v}$,在 x、y、z 方向的分量分别记为 $v_i(i=x、y、z)$. 根据麦克斯韦速度分布律,处于热平衡态的气体,v_i的分布为

$$f(v_i)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-mv_i^2/2kT} \tag{2}$$

其中 m 为单个气体分子质量,k 为玻尔兹曼常量,T 是气体系统的热力学温度.

根据相对运动速度的定义,速度为 $\boldsymbol{v}$ 的分子与另一个速度为 $\boldsymbol{v}'$的分子的相对速度为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$,在各坐标方向的分量为

$$u_i=v_i'-v_i,\quad (i=x,y,z) \tag{3}$$

由概率论知识知道,两独立变量和的概率分布为[6]

$$F_{x+y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}F_x(x)F_y(z-x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

其中 $F_{x+y}(z)$表示 $z=x+y$ 的概率分布函数,$F_x(x)$、$F_y(y)$分别为独立变量 x 和 y 的概率分布函数. 可以得到

$$f(u_i)=\int_{-\infty}^{\infty}f(-v_i)f(u_i+v_i)\,\mathrm{d}v_i=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m}{2\pi kT}\mathrm{e}^{-\frac{mv_i^2}{2kT}}\mathrm{e}^{-\frac{m(u_i+v_i)^2}{2kT}}\mathrm{d}v_i=\frac{m}{2\pi kT}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}\left[2\left(\frac{u_i}{2}+v_i\right)^2+\frac{1}{2}u_i^2\right]}\mathrm{d}v_i \tag{5}$$

做变量代换 $x=\sqrt{\frac{m}{kT}}\left(v_i+\frac{1}{2}u_i\right)$,并利用积分公式 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$得到

$$f(u_i)=\frac{m}{2\pi kT}\mathrm{e}^{-\frac{mu_i^2}{4kT}}\sqrt{\frac{kT}{m}}2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi kT}}\mathrm{e}^{-\frac{mu_i^2}{4kT}} \tag{6}$$

这样就得到了气体分子相对运动速度在各个方向上的分布律,下面求相对运动速率的分布律.

由于相对运动速率和方向无关,仅取决于相对运动速度的大小,因此需要对式(6)中不同方向的相对速度积分. 在相对运动速度空间中建立球坐标系,取体积元 $\mathrm{d}u_x\mathrm{d}u_y\mathrm{d}u_z=u^2\sin\theta\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$,对不同方向相对速度的积分就变成对角变量 θ 和 φ 的积分. 即

$$f(u)=\int f(u_x)f(u_y)f(u_z)u^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi kT}}\right)^3 4\pi\mathrm{e}^{-\frac{mu^2}{4kT}}u^2 \tag{7}$$

这就得到了相对运动速率分布律. 由此可以求出平均相对运动速率为

$$\bar{u}=\int_0^{\infty}f(u)u\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}\left(\frac{m}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{mu^2}{4kT}}u^2 2u\,\mathrm{d}u \tag{8}$$

做变量代换 $x=u^2$,得到

收稿日期:2010-12-23; **修回日期**:2011-05-25

基金项目:国家自然科学基金项目(11004248)资助

作者简介:刘伟涛(1981—),男,山东泰安人,国防科学技术大学理学院物理系讲师,博士,主要从事量子信息研究工作.

$$\overline{u}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{m}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{mx}{4kT}}x\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

再利用积分公式 $\int_0^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{n!}{a^{n+1}}$（$n$ 为正整数，$a>0$）[7]，上式对应取 $a=m/(4kT)$，$n=1$ 得到

$$\overline{u}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{m}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4kT}{m}\right)^{2}=4\sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \tag{10}$$

而前面课程已经给出气体分子的平均运动速率 $\overline{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$[1]，由此得到平均相对运动速率与之的关系为 $\overline{u}=\sqrt{2}\,\overline{v}$.

上述推导过程中所用的相对运动速度的概念以及分子运动速度分布函数都是学生熟悉的知识内容，便于学生理解和接受.

参考文献：

[1] 李承祖，杨丽佳．大学物理学（上册）[M]．北京：科学出版社，2009：133-136；145-146.

[2] 顾建中．热学教程（修订本）[M]．北京：人民教育出版社，1981：86-88.

[3] 赵凯华，罗蔚茵．热学[M]．北京：高等教育出版社，1998：246-248.

[4] 秦允豪．热学[M]．北京：高等教育出版社，1999：127-128.

[5] 包科达．热学物理基础[M]．北京：高等教育出版社，2001：322-324.

[6] 金治明，李永乐．概率论与数理统计[M]．北京：科学出版社，2007：73.

[7] 《数学手册》编写组．数学手册[M]．北京：人民教育出版社，1979：281.

Derivation of the average relative speed of gas molecules

LIU Wei-tao, ZHANG Ting, LI Cheng-zu

(Department of Physics, College of Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Based on the Maxwell velocity distribution and the definition of relative velocity, the distributions of relative velocity and the relative speed of gas molecules are given, thus the average relative speed is clearly expressed.

Key words: gas molecules; relative velocity; average relative speed

（上接32页）

[7] 谭志中，罗达峰，等．2×N 阶网络对角等效电阻的再研究[J]．南通大学学报，2008，7(2)：73-81.

[8] 谭志中，罗礼进．2×n 阶网络等效电阻的再研究[J]．南通大学学报（自然科学版），2010，9(1)：86-89.

[9] 谭志中，方靖淮．3×n 阶电阻网络等效电阻的研究[J]．大学物理，2008，27(9)：7-10.

[10] 谭志中，李　颂．3×n 阶网络等效电阻的另一个普适规律[J]．大学物理，2009，28(4)：23-25.

Research on equivalent resistance or capacitor of enhanced polygon network

TAN Zhi-zhong

(College of Science, Nantong University, Nantong, Jiangsu 226007, China)

Abstract: Some results for the study of equivalent resistance of regularly connected polygon resistance network have already obtained, however, the study of unitive equivalent is still lacked if the parameter value (resistance or capacitor) in the polygon network is arbitrary constant. We analyze the network, construct a model based on difference equation and study unifying of equivalent resistance or capacitor of enhanced polygon network. We get a laconic general formula of equivalent resistance or capacitor of enhanced polygon network by analyzing the network, and obtain a simple expression of Fibonacci sequence in the meantime. We also expand the polygon concept arrives to two sides structure of the non-Euclid space. The results are compared with connected argument. The conclusion is also suitable to some regularly connected polygon impedance networks.

Key words: regular polygon; network analyze; equivalent resistance or capacitor; unify structure; non-Euclid space; Fibonacci sequence