作业1

① 度规张量 $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$ 描述了____的几何性质?

a) 2D sphere

b) 2D flat

· 请写出: $g_{rr}, g_{r\theta}, g_{\theta\theta}, g^{rr}, g^{r\theta}, g^{\theta\theta}$ 分别的表达(以 r,θ)

· 请写出 Γ^a_{bc} 的全部非零分量, 用 r,θ 表达. 计算并证 $\nabla_a g_{mn}=0$

② 在低速弱引力场条件下, 时空近似平直. 我们可以假设度规是 Minkowski 时空度规上加一个微小的扰动项: $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$

$\eta_{\mu\nu}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}$, $h_{\mu\nu}$ 为小量. $\left(\begin{array}{l}ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\\ d\tau=\sqrt{-ds^2}\end{array}\right)$

将测地线方程: $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\sigma\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0$ 在上述条件下近似.

通过与牛顿引力对比, 证明:

(1) $h_{00}=-2\phi$, 这里 ϕ 是牛顿引力势 ($\nabla^2\phi=4\pi G\rho$)

(2) 我们对引力场中静钟计时间隔 $dt=(1-\phi)d\tau$, 其中 $d\tau$ 为固有时间间隔.

③ 利用①中极坐标表达考虑时空度规 $ds^2=-dt^2+dr^2+r^2d\theta^2$, $d\tau=\sqrt{-ds^2}$, 写出测地线方程所有非零项对应的表达.

另: 自由粒子平直空间中 Lagrangian: $L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, 在极坐标下利用 Euler-Lagrange Equation, 写出自由粒子 Equation of motion. 考察和理解二者等价.