Magnetohydrodynamics (MHD)

绪论

本章内容

等离子体定义

等离子体 由带电粒子和中性粒子组成，且表现出集体行为的一种准中性气体。

- 准中性：对电中性的破坏极其敏感
- 集体行为：不仅取决于局部条件，还受远距离等离子体状态影响

$$f \sim 1/r^2, n \sim r^3 \rightarrow F = nf \sim r$$

等离子体产生条件

- 高温（碰撞主导）
  Saha 公式

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{2u_{r+1}(T)}{u_r(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_r/kT} \rightarrow$$

纯氢大气 $\frac{n_1}{n_0} = 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_e} e^{-1.58\times 10^5/T}$

  - 太阳光球（$T \sim 6000$ K, $n \sim 10^{16}$ cm^{-3}）：$n_1/n_0 \sim 6.4 \times 10^{-4}$
  - 太阳日冕（$T \sim 10^6$ K, $n_e \sim 10^8$ cm^{-3}）：$n_1/n_0 \sim 2.0 \times 10^{16}$ (if LTE)

- 光致电离（辐射主导）$A + h\nu \rightarrow A^+ + e$
  维恩位移定律

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{4.97kT} = \frac{2.9 \times 10^7}{T} \text{ Å}$$

OB-type Stars ($T \sim 3 \times 10^4$ K)：$\lambda_{\max} \sim 1000$ Å (13.6 eV$\sim$ 912 Å)

- 独立参量 n 和 T
- 德拜长度 $\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{n_e e^2}\right)^{1/2}$：偏离电中性的空间尺度
- 等离子体振荡频率 $\omega_p = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2}$：恢复电中性的快慢程度
- 电导率 $\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$
  （磁场条件下，$\sigma \to$ 张量）

单粒子轨道理论

- 模型假设
  1. 忽略粒子间相互作用;
  2. 不计粒子运动产生的电磁场;
  3. 仅考虑非相对论情形;
  4. 忽略辐射阻尼。
- 数学方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) + \boldsymbol{F}$$

- $\boldsymbol{E}=0, \boldsymbol{F}=0, \boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \dfrac{qB}{m} v_y \\ \dot{v}_y = -\dfrac{qB}{m} v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{v}_x + \Omega^2 v_x = 0 \\ \ddot{v}_y + \Omega^2 v_y = 0 \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (\Omega = \frac{qB}{m})$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_x = v_\perp \cos(\Omega t + \alpha) \\ v_y = -v_\perp \sin(\Omega t + \alpha) \\ v_z = v_\parallel \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v_\perp}{\Omega} \sin(\Omega t + \alpha) + x_0 \\ y = \dfrac{v_\perp}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha) + y_0 \\ z = v_\parallel t + z_0 \end{cases}$$

粒子绕引导中心 (x_0, y_0) 做回旋运动

$|\Omega| = \dfrac{|q|B}{m}$：回旋频率，$r_L = \dfrac{v_\perp}{|\Omega|} = \dfrac{mv_\perp}{|q|B}$：回旋半径

- $\boldsymbol{E} = E_{\|}\boldsymbol{k} + E_{\perp}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$

z 分量

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}E_{\|} \rightarrow v_z = \frac{qE_{\|}}{m}t + v_{\|}$$

垂直分量

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{v}_x = \Omega v_y \\ \dot{v}_y = \dfrac{qE_{\perp}}{m} - \Omega v_x \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{v}_x + \Omega^2(v_x - \dfrac{v_{\perp}}{B}) = 0 \\ \ddot{v}_y + \Omega^2 v_y = 0 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_x = v_{\perp}\cos(\Omega t + \alpha) + v_E \quad (v_E = E_{\perp}/B) \\ v_y = -v_{\perp}\sin(\Omega t + \alpha) \end{array}\right.$$

引导中心漂移速度 $(v_E, 0)$，矢量形式 $\boldsymbol{v}_E = \dfrac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$

- 一般公式 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\parallel} + \boldsymbol{F}_{\perp}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{v}_{\parallel}}{dt} = \dfrac{\boldsymbol{F}_{\parallel}}{dt} \\ m\dfrac{d\boldsymbol{v}_{\perp}}{dt} = q(\boldsymbol{v}_{\perp} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{F}_{\perp} \rightarrow m\dfrac{d\boldsymbol{v}'_{\perp}}{dt} = q(\boldsymbol{v}'_{\perp} \times \boldsymbol{B}) + q(\boldsymbol{v}_D \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{F}_{\perp} \end{cases}$$

选择 $\boldsymbol{v}_D$ 使得 $q(\boldsymbol{v}_D \times \boldsymbol{B})$ 与附加力 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ 相消，有

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}}{qB^2}$$

- 电场 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{v}_{DE} = \dfrac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2}$，与电荷无关，不产生宏观电流
- 重力场 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{v}_{DG} = \dfrac{m\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{B}}{qB^2}$，与电荷相关，产生宏观电流

非均匀磁场中

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}_0 + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \delta\boldsymbol{B}$$

- 梯度漂移

$$\delta\boldsymbol{B} = -\frac{v_\perp}{\Omega}\sin\Omega t(\boldsymbol{j}\cdot\nabla_\perp B)\frac{\boldsymbol{B}}{B} \rightarrow \overline{\boldsymbol{F}}_{\nabla_\perp B} = -\frac{W_\perp}{B}\nabla_\perp B \rightarrow$$

$$\boldsymbol{v}_{DBG} = \frac{W_\perp}{qB^3}(\boldsymbol{B}\times\nabla_\perp B)$$

- 曲率漂移

$$\boldsymbol{F}_c = -\frac{mv_\parallel^2}{R}\boldsymbol{j} = -\frac{2\,W_\parallel}{B}\frac{dB_y}{dz}\boldsymbol{j} = -\frac{2\,W_\parallel}{B^2}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{v}_{DBC} = -\frac{2\,W_\parallel}{qB^2}\frac{dB_y}{dz}\boldsymbol{i} = \frac{2\,W_\parallel}{qB^4}[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}]$$