磁流体力学习题一

1. 求下列条件下带电粒子的回旋半径和回旋频率：a）0.5 G 磁场中，能量为 10 keV 的质子；b）磁场强度为 5×10^{-5} G，速度为 300 km s^{-1} 太阳风中的电子。

2. 在下列条件下，求德拜长度 λ_d，等离子体振荡频率 ω_{pe} 以及线频率 f_{pe}：a）地磁层，$n_e \approx n_i = 10^4$ cm^{-3}，$T_e \approx T_i = 10^3$ K；b）日冕，$n_e \approx n_i = 10^8$ cm^{-3}，$T_e \approx T_i = 10^6$ K。

本次作业 10 月 7 日上课时交。

磁流体力学习题二

1. 试推导考虑磁力的动量方程守恒型形式:

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{T}_B,\ \mathbf{T}_B = \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu_0} + \frac{B^2}{2\mu_0}\mathbf{I},$$

   其中 $\mathbf{P}$ 为应力张量。

2. 证明当热流 $\boldsymbol{q}=0$，无焦耳耗散，且 $\mathbf{P}=-p\mathbf{I}$，能量方程

$$\rho\frac{d}{dt}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) = \nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} - \nabla\cdot\boldsymbol{q}$$

   变为绝热方程 $\dfrac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma})=0$。

3. 根据一维磁扩散方程 $\dfrac{\partial B}{\partial t} = \eta_m\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ 的形式解，推导当初始条件为 $B(x,0)=\begin{cases} B_0 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -B_0 & x<0 \end{cases}$ 时，上述一维磁扩散方程的解为 $B(x,t)=\dfrac{2B_0}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\eta_m t}}} e^{-\alpha^2}d\alpha$。

Note：本次作业 10 月 17 日上课时交。

磁流体力学习题三

1. 试判别下列磁场是否是无作用力磁场？如果是，则是何种无作用力磁场？

   (a)

$$
\begin{aligned}
B_r &= \frac{l}{k} B_0 J_1(kr)\exp(-lz),\\
B_\theta &= (1-\frac{l^2}{k^2})^{1/2} B_0 J_1(kr)\exp(-lz),\\
B_z &= B_0 J_0(kr)\exp(-lz),
\end{aligned}
$$

   其中 k, l 为常数。

   (b)

$$
\begin{aligned}
B_r &= 0,\\
B_\theta &= \frac{brB_0}{1+b^2r^2} = brB_z,\\
B_z &= \frac{B_0}{1+b^2r^2},
\end{aligned}
$$

   其中 B_0，b 为常数。

2. (1) 证明对于无作用力场，有 $(\nabla^2+\alpha^2)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\times\nabla\alpha\ (*)$ 成立，其中 α 为无力因子；(2) 判断如果 (*) 式成立，所对应的磁场是否一定为无作用力场？

3. 对于一磁静力平衡位型，请证明 (1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla p) = 0$；(2) $(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{j}$。

note: 本次作业 11 月 2 日上课时交纸质版。

磁流体力学习题四

1. 设日冕由纯氢大气组成，其温度为 1 MK，电子数密度为 $3 \times 10^8\ \mathrm{cm}^{-3}$，磁场为 5 G。请计算在上述特征参量下日冕中的声速、阿尔芬速度以及等离子体 β 值（取 $\gamma = 5/3$）。

2. 在上述均匀日冕大气中激发一小扰动，请说明在平行磁场、垂直磁场及与磁场成 $45°$ 三个方向上各自能接收到什么波，并计算波动传播的速度。

3. 对于 MHD 激波，可定义 Alfvén 马赫数 $M_{A1} = v_1/v_{A1}$，其中 v_1 和 v_{A1} 分别为激波上游流速和 Alfvén 速度。请分别在垂直激波和平行激波位型下用激波压缩比（X）、上游等离子体 β 值（β_1）等无量纲量表出 M_{A1}。

note：本次作业 11 月 30 日上课时交。

磁流体力学习题五

1. 重力场下扰动速度方程写成

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{B_0} + (\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B_1}\right] + \rho_1 \boldsymbol{g}.$$

设系统平衡位型为 $\boldsymbol{B}_0(z) = [B_0(z), 0, 0]$,$p_0 = p_0(z)$,$\rho_0 = \rho_0(z)$。(1) 证明当扰动取 $f(x, y, z, t) = f(z)\exp[i(ky - \omega t)]$ 的形式时, 扰动速度方程各分量为

$$\begin{cases} -i\omega\rho_0 v_{1x} = \dfrac{B_{1z}}{\mu_0}\dfrac{dB_0}{dz}, \\ -i\omega\rho_0 v_{1y} = -ik\left(p_1 + \dfrac{B_0 B_{1x}}{\mu_0}\right), \\ -i\omega\rho_0 v_{1z} = -\dfrac{d}{dz}\left(p_1 + \dfrac{B_0 B_{1x}}{\mu_0}\right) - \rho_1 g. \end{cases}$$

(2) 证明当波数 $k \to \infty$ 时，z 方向扰动速度方程可简化为

$$-i\omega\rho_0 v_{1z} = -\rho_1 g.$$

note：本次作业 12 月 19 日交。