Magnetohydrodynamics Homework 4

1. $T=10^6\ \mathrm{K}$, $n_e=3\times10^8\ \mathrm{cm^{-3}}$, $B=5\ \mathrm{G}$, $\gamma=\frac{5}{3}$

因设日冕由纯H大气组成，可认此温度下H完全电离，故：

$$\rho\approx m_p n_H = m_p n_e \approx 5.012\times10^{-13}\ \mathrm{kg/m^3}\approx 5.01\times10^{-16}\ \mathrm{g/cm^3}$$

$$p = 2 n_H k_B T = n_e k_B T \approx 4.14\times10^{-3}\ \mathrm{N/m^2} = 4.14\times10^{-2}\ \mathrm{dyn/cm^2}$$

∴ 声速 $C_s=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}\approx 1.17\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ × $\sqrt{2}$

Alfvén速度 $v_A=\frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}\approx 6.3\times10^5\ \mathrm{m/s} = 6.3\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ ✓

等离子体 $\beta=\frac{2\mu_0 p}{B^2}\approx 0.0416$ × 2

2. Alfvén波的相速度大小 $\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}\cos\theta = v_A$

快慢磁声波的相速度大小 $\frac{1}{2}\left(C_s^2+u_0^2\pm\sqrt{(C_s^2+u_0^2)^2-4C_s^2u_0^2\cos^2\theta}\right)=C_{M\pm}^2$

(1) 波的传播方向平行于磁场，即 $\theta=0$ 时，

$v_A=\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}\approx 6.3\times10^7\ \mathrm{cm/s}=u_0=C_{M+}$ ✓ 即有Alfvén波，横波

$C_{M-}=C_s=1.17\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ 即有离子声波，纵波 × $\sqrt{2}$

(2) 波的传播方向垂直于磁场，即 $\theta=90^\circ$ 时，

$v_A=0$ 或 $\omega_0=0$ 为熵波，实际上并不传播

$C_{M-}=0$ 而 $C_{M+}=\sqrt{C_s^2+u_0^2}\approx 6.4\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ 为磁声波

(3) $\theta=45^\circ$ 时，

$v_A=\frac{B_0}{\sqrt{2\mu_0\rho_0}}\approx 4.45\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ 为Alfvén波 ✓

$C_{M+}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(C_s^2+u_0^2+\cancel{\sqrt{C_s^2+u_0^2}}\right)}\approx 4.87\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ 为快磁声波

$C_{M-}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(C_s^2+u_0^2-\sqrt{C_s^2+u_0^2}\right)}\approx 4.16\times10^7\ \mathrm{cm/s}$ 为慢磁声波

3. (1) 垂直于磁场方向传播的激波

$$2(2-\gamma)X^2+\left[2\beta_1+(\gamma-1)\beta_1\frac{v_1^2}{C_s^2}+2\right]\gamma X-\gamma(\gamma+1)\beta_1\frac{v_1^2}{C_s^2}=0$$

$$\Rightarrow M_a^2=\frac{v_1^2}{C_s^2}=2\,\frac{(2-\gamma)X^2+(\beta_1+1)\gamma X}{\gamma(\gamma+1)\beta_1-(\gamma-1)\beta_1\gamma X}$$

其中 $c_s^2=\gamma\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{\gamma}{2}\frac{2\mu_0 p_1}{B_1^2}\frac{B_1^2}{\mu_0\rho_1}=\frac{\gamma}{2}\beta_1 v_{A1}^2$

$$\Rightarrow M_{A1}=\frac{v_1}{v_{A1}}=\sqrt{\frac{v_1^2}{c_s^2}\frac{c_s^2}{v_{A1}^2}}=\sqrt{\frac{2X}{\gamma}\frac{(2-\gamma)X+(\beta_1+1)\gamma}{(\gamma+1)\beta_1-(\gamma-1)\beta_1 X}\frac{\gamma\beta_1}{2}}=\sqrt{X\frac{(2-\gamma)X+(\beta_1+1)\gamma}{\gamma+1-(\gamma-1)X}}$$

(2) 平行于磁场方向的激波传播，此时斜激波方程退化为：

$$(v_1^2-Xv_{A1}^2)^2\left\{Xc_{s1}^2+\frac{1}{2}v_1^2[X(\gamma-1)-(\gamma+1)]\right\}=0$$

故：

$$v_1^2=Xv_{A1}^2\Rightarrow M_{A1}=\frac{v_1}{v_{A1}}=\sqrt{X}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&X+\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{c_s^2}[X(\gamma-1)-(\gamma+1)]=0\\&c_s^2=\frac{\gamma\beta_1}{2}v_{A1}^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow X+M_{A1}^2\frac{X(\gamma-1)-(\gamma+1)}{\gamma\beta_1}=0$$

$$\Rightarrow M_{A1}=\sqrt{\frac{\gamma\beta_1 X}{\gamma+1-(\gamma-1)X}}$$