Magnetohydrodynamics (MHD)

磁流体静力学

本章内容

MHD 静力学一般方程

$$\begin{cases} -\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \quad \to \nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\to \nabla \times (\boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{B}) = 0$$

一些性质

1. $\boldsymbol{B} \cdot \nabla p = 0, \boldsymbol{j} \cdot \nabla p = 0$：等压面、磁面、电流面重合
2. $\boldsymbol{j}_{\perp} = \dfrac{\boldsymbol{B} \times \nabla p}{B^2}$：压强梯度产生横越磁力线的电流

定义及基本方程

- 无作用力场（Force-Free Field, FFF）：局部强磁场区域中的磁静平衡位型

$$-\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \xrightarrow{\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0} \ll 1} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0$$

- FFF 基本方程
  - 形式一：$\begin{cases} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$
  - 形式二：$\begin{cases} (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$
  - 形式三：$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$ $(\alpha(\boldsymbol{r}, t)$：无力因子$)$

  α 性质：$\boldsymbol{B} \cdot \nabla \alpha = 0 \rightarrow$ 沿同一根磁力线 $\alpha = \mathrm{const}$

势场（无电流场）: $\alpha = 0$

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times\boldsymbol{B}=0(\boldsymbol{j}=0)\rightarrow\boldsymbol{B}=\nabla\Psi\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\nabla^2\Psi=0$$

- 直角坐标解:

$$\Psi=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2m\pi y}{b}\right)e^{-k_{nm}z}\ (k_{nm}^2=(2n\pi/a)^2+(2m\pi/b)^2)$$

- 球坐标解（Potential Field Source-Surface, PFSS）:

$$\Psi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{lm}r^l+b_{lm}r^{-(l+1)}\right]P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

边界条件:

1. Lower: $B_r=\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}$，光球径向磁场（观测获得）
2. Upper: $\Psi=0$，太阳风拖曳作用

线性无立场（LFFF）:$\alpha = \text{const}$

- 满足方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} + \alpha^2 \boldsymbol{B} = 0$$

- 方程解

$$\boldsymbol{L} = \nabla\psi, \boldsymbol{T} = \nabla \times (\psi \boldsymbol{a}), \boldsymbol{S} = \frac{1}{\alpha}\nabla \times \boldsymbol{T}$$

（ψ 为标量 Helmholtz 方程 $\nabla^2\psi + \alpha^2\psi = 0$ 解）

磁场要求满足无源条件，故

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} = \nabla \times (\psi \boldsymbol{a}) + \frac{1}{\alpha}\nabla \times \nabla \times (\psi \boldsymbol{a})$$

数学困难：非物理、不唯一！

- 线性无力场性质：
  1. 冻结型 LFFF 对应于一个封闭系统中磁能极小状态
  2. 扩散型 LFFF 衰变过程中无力性质不变

非线性无力场（NLFFF）：$\alpha = \alpha(\boldsymbol{r}, t) \neq \text{const}$

- 无力场 Grad-Shafranov 方程

  考虑二维问题（$\frac{\partial}{\partial x} = 0$），设 $\boldsymbol{B}(y,z) = G(y,z)\boldsymbol{e}_x + \nabla \times (A(y,z)\boldsymbol{e}_x)$

  $$= \left(G(y,z), \frac{\partial A(y,z)}{\partial z}, -\frac{\partial A(y,z)}{\partial y} \right)$$

  代入 $(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = 0 \to \nabla^2 A + G\frac{dG}{dA} = 0$ $(\alpha = \frac{dG}{dA} \neq \text{const})$

  方程求解探讨：对于 Dirichlet 问题 $\nabla^2 A + F(A) = 0$，存在唯一解条件 $\frac{dF}{dA} < 0$，对于太阳大气不满足，故对于给定光球边界条件，上述方程的解不唯一，日冕中可能存在不同磁场位型（能量状态）
- 太阳光球双极黑子上空的非线性无力场的剪切及能量储存问题 (Low, B. C. (刘文才), 1977, ApJ, 212, 234)

一般 MHD 平衡位型

- 地球磁层尾的平衡位型（二维问题 $\partial/\partial y = 0$）

$$\boldsymbol{B}(x,z) = \nabla \times (A(x,z)\boldsymbol{e}_y) + B_y(x,z)\boldsymbol{e}_y$$

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = 0 \rightarrow \text{推广的 G-S 方程}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left[\nabla^2 A + \frac{d}{d\,A}({B_y}^2/2)\right] = -\frac{d\,p(A)}{d\,A}$$

- 宁静日珥的平衡位型

$$\boldsymbol{B}(x,z) = \nabla \times (F(x,z)\boldsymbol{e}_y)$$

$$-\nabla p + \tfrac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} + \rho\boldsymbol{g} = 0 \rightarrow$$

$$\nabla^2 F = \phi(F)\exp(-z/H_0) \quad \text{(Menzel 模型)}$$

平衡箍缩-线箍缩（Pinch-z）

- 平衡方程（$\boldsymbol{j} = j(r)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B} = B(r)\boldsymbol{e}_\theta$）

$$\begin{cases} -\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dr} = -\dfrac{B}{\mu_0 r}\dfrac{d}{dr}(rB) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB) = \mu_0 j \end{cases}$$

1. 电流密度为常数，$j(r) = j_0$

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r & r \le a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > a \end{cases}, \quad p(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2}(1 - r^2/a^2) & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

2. $\sigma \to \infty$，"趋肤效应"

$$B(r) = \begin{cases} 0 & r \le a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > a \end{cases}, \quad p(r) = \begin{cases} p_0 & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

- 本奈特关系

$$I^2 = \frac{16\pi}{\mu_0} kTN$$

- 角箍缩
  - 平衡方程

$$\nabla\left(p+\frac{B_z{}^2}{2\mu_0}\right)=0\rightarrow\frac{dp}{dr}+\frac{d}{dr}\left(\frac{B_z{}^2}{2\mu_0}\right)=0$$

  - 平衡条件

$$\langle p\rangle+\left\langle\frac{B_z{}^2}{2\mu_0}\right\rangle=p_a+\left.\frac{B_z{}^2}{2\mu_0}\right|_{r=a}$$

- 圆环箍缩
  - 无纵向电流，$\beta\ll 1$，无法平衡
  - 一般情况（纵向磁场 + 角向磁场），小量 a/R 展开

动力箍缩-“雪耙模型”

- 等离子体圆柱（$L \gg a, \sigma \to \infty, \boldsymbol{j} = j_z \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{B} = B_\theta \boldsymbol{e}_\theta$）
- 基本方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \end{cases} \to \frac{d}{dt}\left[\rho(r)\frac{dr}{dt}\right] = -\frac{B_\theta}{\mu_0 r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)$$

- 动壳层满足的方程

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{\pi r {B_\theta}^2}{\mu_0} \to \frac{d}{dt}\left[(a^2 - r^2)\frac{dr}{dt}\right] = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho_0 r}$$

设 I 满足：$I(t) = bt$，引入无量纲量 $R = r/a$，$T = t/t_1$，则有

$$\frac{d}{dT}\left[(1 - R^2)\frac{dR}{dT}\right] = -\frac{T^2}{R}$$

- 后期过程，动压不可忽略

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{\pi r {B_\theta}^2}{\mu_0} + 2\pi r p$$