Magnetohydrodynamics (MHD)

基本方程

本章内容

两种途径

1. 统计物理—从微观出发，直接，但不完善
2. 导电流体假设—从宏观出发，等离子体由导电的流体质点填充组成
   - 适用条件
     - 空间上：λ（问题特征尺度）$\gg dr$（流体质点尺度）$\gg \lambda_c$（带电粒子平均自由程）
     - 时间上：τ（问题特征时标）$\gg d\tau$（流体质点宏观物理量统计平均时标）$\gg \tau_c$（带电粒子间平均碰撞时间）
   - 特例
     - 冷等离子体，$|\boldsymbol{U}| \gg |\boldsymbol{W}|$：流体元由自洽场维持
     - 强磁场中，“无碰撞等离子体”：垂直磁场方向，满足 $\lambda_\perp \gg r_c$

描写流体运动的两种方法：Lagrange 法和 Euler 法

- Lagrange 法—着眼于流体质点：流体质点运动规律的数学表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t) \quad (a,b,c,t \text{ 为 Lagrange 变数})$$

质点速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t}$，加速度 $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2}$

- Euler 法—着眼于空间点：流场中流体质点运动规律的数学表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{v}(x,y,z,t) \quad (x,y,z,t \text{ 为 Euler 变数})$$

一般物理量 $f=f(\boldsymbol{r},t)$：与 $\boldsymbol{r}$ 无关，均匀场；与 t 无关，定常场

质点加速度 $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ （此关系对标量也成立）

MHD 基本方程

HD 方程 +Maxwell 方程 + 耦合

- 连续性方程 $\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$
- 动量方程 $\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_q \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}$

  其中 $\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + 2\eta[\mathbf{S} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\mathbf{I}]$ （本构方程）
- 能量方程

  $\rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T)$
- Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- 电流方程（欧姆定律） $\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \rho_q \boldsymbol{v}$
- 物态方程

$$p = \rho R T$$
$$\varepsilon = C_v T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

连续性方程

- Lagrange 观点：任取一定流体质点组成的流体团，其体积为 τ，质量 $m=\int_\tau \rho\delta\tau$。流体团中没有源和汇，则其质量在流动过程中不变

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\delta\tau=\int_\tau\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\delta\tau=\int_\tau\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]\delta\tau=0$$

考虑到流体团任意选取，有

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \text{ 或者 } \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

- Euler 观点：在空间中取一以 S 面为界的有限体积 τ（空间点组成，固定在空间中），考虑 τ 内流体质量变化
  - 单位时间通过表面 S 流入或流出：$\oint_S \rho v_n\delta S=\oint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{S}$
  - 由于密度场不定常性，单位时间 τ 内质量变化：$\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau$

根据质量守恒，有 $\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau+\oint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{S}=\int_\tau\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]\delta\tau=0$

考虑到 τ 选取任意，有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

任取一体积为 τ 的流体团，它的边界为 S，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线单位矢量

动量守恒：τ 内流体的动量改变率等于作用在流体上的力

τ 内总动量：$\int_\tau \rho\boldsymbol{v}\delta\tau$

作用在流体上的力（质量力 + 面力）：$\int_\tau(\rho_q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F})\delta\tau+\oint_S\boldsymbol{p}_n\delta S$

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\boldsymbol{v}\delta\tau=\int_\tau(\rho_q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F})\delta\tau+\oint_S\boldsymbol{p}_n\delta S$$

- $\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\boldsymbol{v}d\delta\tau=\frac{d}{dt}\int_\tau\boldsymbol{v}\delta m=\int_\tau\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\delta m+\int_\tau\boldsymbol{v}\frac{d}{dt}\delta m=\int_\tau\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\delta\tau$
- $\oint_S\boldsymbol{p}_n\delta S=\oint_S\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}\delta S=\oint_S\mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{S}=\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{P}\delta\tau$

考虑到 τ 选取任意，有 $\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\nabla\cdot\mathbf{P}+\rho_q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F}$

能量方程

任取一体积为 τ 的流体团，它的边界为 S，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线单位矢量

能量守恒：τ 内流体的能量改变率等于单位时间力做功即加上传热

τ 内总能量（动能 + 内能）：$\displaystyle\int_\tau \rho\left(U+\frac{v^2}{2}\right)\delta\tau$

非电磁力做功：$\displaystyle\int_\tau \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\delta\tau+\oint_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\delta S$

电磁力做功：$\displaystyle\oint_s -\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\delta\boldsymbol{S}-\int_\tau(W_B+W_E)\delta\tau$

传热（热传导）：$\displaystyle\oint_S k\frac{\partial T}{\partial n}\delta S \quad (\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T)$

仿照动量方程中相关推导，并考虑到 τ 选取任意，有

$$\rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{v^2}{2}\right)=-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

简化 MHD 基本方程

宇宙等离子体下的简化

1. 无粘滞流体 $P_{ij} = -p\delta_{ij}$
2. 忽略位移电流 $\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
3. 忽略运流电流 $\rho_q\boldsymbol{v}$
4. 忽略电场力 $\rho_q\boldsymbol{E}$

由此可简化 MHD 方程

σ 有限

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$
$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$
$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

$\sigma \to \infty$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$
$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

完全电离等离子体二流体模型

- 连续性方程

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha) = 0 \quad (\alpha = i, e)$$

- 动量方程

$$n_\alpha m_\alpha \frac{d\boldsymbol{u}_\alpha}{dt} = -\nabla p_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_\alpha \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{M}_\alpha$$

- Maxwell 方程

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha
\end{aligned}$$

- 耦合项

$$\boldsymbol{M}_e = -\boldsymbol{M}_i = \nu_{ei} n \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_e)$$

二流体 ⇒ 单流体

- 大多数情况下
  1. 电中性 $n_e = n_i = n$
  2. 宏观速度为小量，忽略 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{j}$ 及其微商的二次项
  3. $m_e \ll m_i$，忽略 m_e/m_i 有关项

  定义宏观物理量与二流体模型下相应物理量间的关系
  - 密度 $\rho = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha = n(m_e + m_i)$
  - 动量 $\rho \boldsymbol{v} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = n(m_e \boldsymbol{u}_e + m_i \boldsymbol{u}_i)$
  - 速度 $\boldsymbol{v} = \dfrac{m_e \boldsymbol{u}_e + m_i \boldsymbol{u}_i}{m_e + m_i} \approx \dfrac{m_e \boldsymbol{u}_e + m_i \boldsymbol{u}_i}{m_i}$
  - 电流 $\boldsymbol{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = ne(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_e)$
- 二流体 → 单流体
  - 连续性方程求和

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} = 0$$

  - 动量方程求和

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \quad (p = p_e + p_i)$$

广义欧姆定律

- 满足条件
  1. 电中性 $n_e = n_i = n$
  2. $m_e \ll m_i$，忽略 m_e/m_i 有关项
  3. 局部热动平衡 $p_e = p_i\ (m_e W_e^2 = m_i W_i^2)$
  4. $u_\alpha \ll W_\alpha$，故 $\boldsymbol{u}_e$，$\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{j}$ 及其微商的二次项与压力项相比可忽略
- 由二流体动量方程可推得

$$\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + \frac{1}{2ne}\nabla p - \frac{1}{ne}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} - \frac{m_e\nu_{ei}}{ne^2}\boldsymbol{j}$$

  - $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$：洛伦兹力
  - $\dfrac{1}{2ne}\nabla p$：热压力
  - $\dfrac{1}{ne}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$：霍尔电动力
  - $\dfrac{m_e\nu_{ei}}{ne^2}\boldsymbol{j}$：电阻效应

$\partial/\partial t = 0, \boldsymbol{B} = 0, \nabla p = 0 \to \boldsymbol{j} = \dfrac{ne^2}{m_e\nu_{ei}}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E}$

低频高密度（MHD 方程组成立条件），$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

若进一步满足 $\dfrac{\omega\nu_{ei}}{\omega_p^2} \ll \left(\dfrac{V}{c}\right)^2\ (\sigma\to\infty)$，则 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = 0$

冷等离子体方程

- 冷等离子体：$|\boldsymbol{W}| \approx 0$ 或 $|\boldsymbol{u}| \gg |\boldsymbol{W}|$
  - $v/c \ll 1$ 条件不满足，不再局限于低频，不可忽略位移电流、运流电流及电场力
  - $|\boldsymbol{W}| \approx 0 \to p \approx 0, \boldsymbol{q} \approx 0$
- 冷等离子体方程
  - 连续性方程
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$
  - 电荷守恒方程
$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$
  - 动量方程
$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho_q \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$$
  - Maxwell 方程
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{j}$$
  - 欧姆定律
$$\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{ne} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$$

导电流体中磁场的变化

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \boldsymbol{B} \right)$$

若电导率 σ 均匀，则 $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \eta_m \nabla^2 \boldsymbol{B}$ $(\eta_m = \dfrac{1}{\sigma \mu_0})$

- 磁场的扩散效应

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \eta_m \nabla^2 \boldsymbol{B}$$

  磁场扩散：磁能 $\rightarrow$ 热能

- 磁场的冻结效应

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

  磁冻结条件下的几个定理

  1. 通过和流体一起运动的任意曲面的磁通量守恒
  2. 起初位于某根磁力线上的流体质点，以后将一直位于该磁力线上
  3. 封闭系统的磁螺度守恒

  磁场冻结：磁能 $\leftrightarrow$ 机械能

- 量纲分析法，磁雷诺数 R_m

$$R_m = \frac{VL}{\eta_m}$$

磁场应力

安培力（洛伦兹力）

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0}[-\frac{B^2}{2}\mathbf{I} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}] \text{ and } \boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0}[-\frac{B^2}{2}\boldsymbol{n} + B_n\boldsymbol{B}]$$

- 两个等效面积力
  1. $-\dfrac{B^2}{2\mu_0}\boldsymbol{n}$：方向取面元外法向反方向，磁压力
  2. $\dfrac{B_n}{\mu_0}\boldsymbol{B}$：方向与磁场方向平行（反平行），磁张力
- 天体物理中的应用
  1. 太阳黑子的平衡
  $$p_{\rm sp} + \frac{B^2}{2\mu_0} = p_{\rm ph} \Rightarrow nk(T_{\rm ph} - T_{\rm sp}) = \frac{B^2}{2\mu_0}$$
  2. 瓜子效应（Melon-seed effect），日浪