Magnetohydrodynamics (MHD)

磁场重联

本章内容

1. 磁场快速湮灭
2. 有限电阻不稳定性 (Furth, H. P., Killeen, J., and Rosenbluth, M. 1963, Physics of Fluids, 6, 459)

磁场湮灭–Parker-Sweet 机制

- Sweet 机制：无流动，完全依靠磁场耗散，$\tau_d = \mu_0 \sigma L^2$ 太大使得磁能转化效率太低!
- Parker-Sweet 机制：有导电流体携带磁场流入电流片（边界层），同时尽量减小电流片厚度。边界层：$L \gg \delta$，仅有电流，无磁场
  - 考虑稳定流动不可压缩流体，有 $u_{x0} L = v\delta$
  - 根据 Bernoulli 方程，有 $\dfrac{\rho v^2}{2} = p - p_0$。考虑到 u_{x0} 是小量，故沿 x 轴边界层内外压力平衡为一静力学问题，有 $p - p_0 = B_{y0}^2/(2\mu_0)$，故

$$v = \frac{B_{y0}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = v_A$$

  - 边界层中，有 $j_z = \sigma E_z$，而 $j_z = B_{y0}/(\delta\mu_0), E_z = u_{x0} B_{y0}$，故

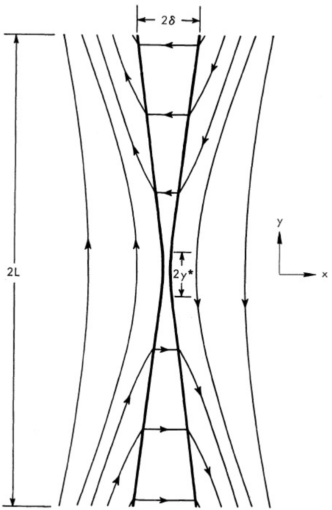
$$u_{x0} = \frac{1}{\mu_0 \sigma \delta} = \left(\frac{v_A}{\mu_0 \sigma L}\right)^{1/2}$$

  - 引入无量纲流动速度 $M_0 = u_{x0}/v_A$ 表征磁场湮灭率，有

$$M_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \sigma v_A L} = \sqrt{1/R_m}$$

大多数天体物理问题中 R_m 相当大故而磁场湮灭率仍然非常低!

磁场快速湮灭–Petschek 机制



- 相比 Parker-Sweet 机制的改进
  B_x 分量 → 向两侧传播的 Alfvén 波 → 部分磁能通过波转化，转化速率取决于波速（与电导率无关！）
- 磁场拓扑
  - o 点附近：$B_x = 0$，扩散主导（同 Sweet-Parker 机制）
  - 远离 o 点：B_x 逐渐增加，波逐渐占主导
- 两个区域
  - 边界层：反向磁场的边界附近，磁场与远离边界处有量级上的差别
  - 外部流动区：磁场、流场有微小畸变，离边界层越近畸变越大

作零级近似，边界层边缘处流动与无穷远处流动相同

- 边界层中质量守恒 $u_{x0}y = v(y)\delta(y)$；

  流体元上受磁张力为 $-\dfrac{B_{y0}B_x}{\mu_0}\mathbf{y}_1$，故 $\dfrac{d}{dy}(\rho v^2\delta) = -\dfrac{B_{y0}B_x}{\mu_0}$。

  令 $b_x = B_x/B_{y0}, M_0 = u_{x0}/v_A, v_A = B_{y0}/\sqrt{\mu_0\rho}$，则

$$M_0^2\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{\delta}\right) = -b_x$$

  - 远离中性点（波区），定常解要求 $u_{x0} = B_x/\sqrt{\mu_0\rho}$，即 $M_0 = |b_x|$，故 $\delta = M_0|y|$，边界层厚度随 y 线性增加
  - 靠近中性点（扩散区），定常解要求 $u_{x0} = \dfrac{\eta_m}{\delta}, M_0 = \dfrac{1}{\mu_0\sigma v_A\delta}$，故边界层厚度 δ 为常数，而 $b_x = -2M_0^3\mu_0\sigma v_A y$
  - 估计扩散区大小 y^*：$y = y^*$ 时，有 $b_x = -M_0$，故

$$y^* = \frac{1}{2\mu_0\sigma v_A M_0^2}$$

    $|y| < y^*$，扩散作用占优势，$b_x = -M_0\dfrac{y}{y^*}$；

    $y^* < |y| < L$，波机制发挥作用，$|b_x| = M_0$。

- 外流区中流场、磁场有微小畸变

$$\boldsymbol{u} = u_{x0}(\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{u}')$$
$$\boldsymbol{B} = B_{y0}(\mathbf{y}_1 + \boldsymbol{B}')$$

可以证明 $\nabla \times \boldsymbol{B}' = 0, \nabla \times \boldsymbol{u}' = 0$。

- 引入磁势 ψ，$\boldsymbol{B}' = \nabla\psi$，磁场无源要求 $\nabla^2\psi = 0$

确定边界条件（边界近似取作 y 轴）：法向磁场连续要求

$$B_x \cos\theta = B_{y0} B'_x \cos\theta + B_{y0}(1 + B'_y)\sin\theta \to b_x = B'_x + \frac{d\delta}{dy}$$

  - 波区（$|y| > y^*$）：$b_x = -M_0, \frac{d\delta}{dy} = M_0$，故 $B'_x = -2M_0 \frac{y}{|y|}$
  - 扩散区（$|y| < y^*$）：$b_x = -M_0 \frac{y}{y^*}$，取 $\frac{d\delta}{dy} = -b_x$，故 $B'_x = -2M_0 \frac{y}{y^*}$

解 Laplace 方程，可得

$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} \frac{B'_x(\eta)(\boldsymbol{r} - \eta\mathbf{y}_1)}{(\boldsymbol{r} - \eta\mathbf{y}_1)^2} d\eta$$

显然 $B'_{y\max} = B'_y(0) = -\frac{2M_0}{\pi} \ln\left(\frac{L}{y^*}\right)$

Petschek 机制–极大湮灭速率

- 足够大的流速 $\rightarrow$ 大 y 处磁场有可观的 x 分量 $\rightarrow$ 小 y 处边界层电流减小 $\leftrightarrow$ 边界层外磁场 y 分量减少
  - 波区边界层边缘 $B_y\downarrow\rightarrow v\downarrow, \delta\uparrow\rightarrow b_x\uparrow\rightarrow j\downarrow$
  - 同时 $B_y\downarrow\rightarrow M_0\uparrow\rightarrow y^*\downarrow$

  两者结合，使得边界层更快消失！
  1. $B_y'(0)\ll -1$，Petschek 解存在
  2. $B_y'(0)$ 比线性分析所得结果更快趋近于-1
  3. $B_y'(0)$ 不能超过-1
- 估计极大湮灭率，仅仅考虑 M_0 量级，取 $B_y'(0)=-1/2$，故

$$M_{0\max}=\pi/4\ln\left(\frac{L}{y^*}\right)$$

代入 y^* 表达式，有

$$M_{0\max}=\pi/4\ln(2\mu_0\sigma v_A L M_{0\max}^2)=\pi/4\ln(2M_{0\max}^2 R_m)$$

$M_{0\max}\propto 1/\ln(R_m)$，故湮灭率大大提高！

可压导电流体中的 Petschek 机制

- 可压缩：Alfvén 波 $\to$ 一对消去激波，横越激波有密度增加
- 相对于不可压流体的修正，定义密度比 $\alpha = \rho_0/\rho_b$，则

  连续性方程 $\alpha u_{x0} y = v\delta$

  运动方程 $\dfrac{d}{dy}(\rho_0 v^2 \delta) = -\alpha \dfrac{B_{y0} B_x}{\mu_0}$

  波区中 $b_x = -M_0$，$\delta = \alpha M_0 |y|$

  扩散区中 $b_x = -\alpha 2 M_0^3 \mu_0 \sigma v_A y$，$\delta = 1/(\mu_0 \sigma v_A M_0)$

  扩散区长度 $y^* = \dfrac{1}{2\alpha \mu_0 \sigma v_A M_0^2}$

  畸变磁场边界条件及解

$$B_x' = \begin{cases} -(1+\alpha) M_0 y/|y|, & (y > y^*) \\ -(1+\alpha) M_0 y/y^*, & (y < y^*) \end{cases} \quad \text{and } B_y'(0) = -\frac{(1+\alpha) M_0}{\pi} \ln(\frac{L}{y^*})$$

  最大湮灭率

$$M_{0\max} = \pi/2(1+\alpha) \ln(2\mu_0 \sigma v_A L \alpha M_{0\max}^2) = \pi/2(1+\alpha) \ln(2 M_{0\max}^2 \alpha R_m)$$

  $0 < \alpha < 1$，结果差别小于因子 2，故而不重要！

有限电阻不稳定性 1

- 磁场位型 $\boldsymbol{B}_0 = B_{x0}(y)\boldsymbol{e}_x + B_{z0}(y)\boldsymbol{e}_z$
- 假设和基本方程
  - 导电流体处理，广义欧姆定律中忽略热压力和惯性项
  $$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \times (\frac{\eta}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B})$$
  - 流体不可压 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$
  - 忽略粘性 $\nabla \times (\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}) = \nabla \times [\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} + \rho\boldsymbol{g}]$
  - 电阻扰动仅由对流引起 $\frac{d\eta}{dt} = 0$ $(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\eta = 0)$
  - $\rho\boldsymbol{g}$ 项的扰动仅由对流引起 $\frac{\partial(\rho\boldsymbol{g})}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)(\rho\boldsymbol{g}) = 0$
  - 平衡态 $\boldsymbol{v}_0 = 0$（“标准状况”）$\nabla \times (\eta_0\nabla \times \boldsymbol{B}_0) = 0$

引入扰动 $f_1(\boldsymbol{r}, t) = f_1(y)\exp\{i(k_x x + k_z z) + \omega t\}$，得扰动方程

$$\omega\boldsymbol{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_0) - \frac{1}{\mu_0}[\eta_0\nabla \times \boldsymbol{B}_1 + \eta_1\nabla \times \boldsymbol{B}_0]$$

$$\omega\nabla \times (\rho_0\boldsymbol{v}_1) = \nabla \times \{\frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_1 + (\boldsymbol{B}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_0] + (\rho\boldsymbol{g})_1\}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = \nabla \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0$$

$$\omega\eta_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\eta_0 = 0 \to \eta_1 = -\eta_0' v_{y1}/\omega$$

$$\omega(\rho\boldsymbol{g})_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)(\rho\boldsymbol{g})_0 = 0$$

有限电阻不稳定性 2

- 含有 B_{y1} 和 v_{y1} 的方程

$$\frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial y^2} = (k^2 + \frac{\mu_0\omega}{\eta_0})B_{y1} - i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\frac{\mu_0}{\eta_0}[1 + \frac{\eta_0'}{\mu_0\omega}\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)'}{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}]v_{y1} \quad (1)$$

$$\mu_0\omega i\left\{(k^2\rho_0 + \frac{k^2}{\omega^2}(g\rho_0)' + \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\eta_0\omega}[1 + \frac{\eta_0'}{\mu_0\omega}\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)'}{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}])v_{y1} - (\rho_0 v_{y1}')'\right\}$$

$$= (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)[\frac{\mu_0\omega}{\eta_0} - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)''}{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}]B_{y1} \quad (2)$$

- 变量代换，引入无量纲量

$$\psi = \frac{B_{y1}}{B}\text{（无量纲磁场）},\quad W = -iv_{y1}k\tau_R\text{（无量纲速度）},$$

$$\mu = \frac{y}{a},\quad F = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0}{kB},\quad \tilde{\eta} = \frac{\eta_0}{<\eta>},\quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{<\rho>},$$

$$G = \tau_H^2 A_1,\quad p = \omega\tau_R\text{（增长率）},\quad S = \tau_R/\tau_H\text{（磁雷诺数）},\quad \alpha = ka,$$

$$\tau_R = \frac{\mu_0 a^2}{<\eta>}\text{（扩散时标）},\quad \tau_H = \frac{a(\mu_0 <\rho>)^{1/2}}{B}\text{（Alfvén 渡越时标）}$$

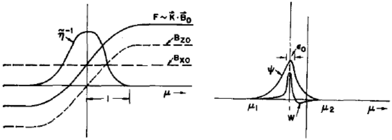
- 方程 (1)、(2) 无量纲化后得

$$\frac{\psi''}{\alpha^2} = \psi\left(1 + \frac{p}{\tilde{\eta}\alpha^2}\right) + \frac{W}{\alpha^2}\left(\frac{F}{\tilde{\eta}} + \frac{\tilde{\eta}' F'}{\tilde{\eta} p}\right) \quad (3)$$

$$\frac{(\tilde{\rho} W')'}{\alpha^2} = W\left[\tilde{\rho} - \frac{S^2 G}{p^2} + \frac{F S^2}{p}\left(\frac{F}{\tilde{\eta}} + \frac{\tilde{\eta}' F'}{\tilde{\eta} p}\right)\right] + \psi S^2\left(\frac{F}{\tilde{\eta}} - \frac{F''}{p}\right) \quad (4)$$

- 对于“标准状况”，有 $(\tilde{\eta} F')' = 0$，选取适当的 $< \eta >$，可有

$$\tilde{\eta} F' = 1 \text{ and } \tilde{\eta}' / \tilde{\eta} F' = -F'' \ (5)$$



- 将 (5) 代入 (3)、(4) 可得

$$\frac{p^2}{\alpha^2 S^2 F}\left[(\tilde{\rho} W')' + \alpha^2 W\left(\frac{S^2 G}{p^2} - \tilde{\rho}\right)\right] = (p\psi + WF)\left(pF' - \frac{F''}{F}\right) \quad (6)$$

$$\frac{p^2}{\alpha^2 S^2 F}\left[(\tilde{\rho} W')' + \alpha^2 W\left(\frac{S^2 G}{p^2} - \tilde{\rho}\right)\right] = p\psi'' - p\psi\left(\alpha^2 + \frac{F''}{F}\right) \quad (7)$$

有限电阻不稳定性 4

- 由 (6)、(7) 得关系式

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \left\{ \frac{p^2}{|p|^2\alpha^2 S^2} \left[\tilde{\rho}|W'|^2 + \alpha^2 |W|^2 \left(\tilde{\rho} - \frac{S^2 G}{p^2} \right) \right] \right.$$
$$+ \frac{pF' - F''/F}{|pF' - F''/F|^2} \left| \psi'' - \psi \left(\alpha^2 + \frac{F''}{F} \right) \right|^2$$
$$\left. + |\psi'|^2 + |\psi|^2 \left(\alpha^2 + \frac{F''}{F} \right) \right\} = 0 \ (8)$$

对于不稳定模，所有量都是实数，可有三种不稳定模:

1. 对于 $G > 0$，有重力驱动模（Gravitationally driven mode）；
2. 如果 ψ 在 $F = 0$ 附近有峰值，且在这一点 $F''/F > 0$ $(\eta' \neq 0)$，有波纹模（Rippling mode）；
3. 如果 F''/F 主要为负，对于足够小的 α^2，有撕裂模（Tearing mode）。

有限电阻不稳定性 5

外部区（除 $F=0$ 附近的小区域 R_0 以外），$S\to\infty$，磁冻结

$$p\psi = -FW \quad (9)$$

由 (7)、(9) 得外部区扰动磁场方程

$$\psi'' - \psi(\alpha^2 + F''/F - G/F^2) = 0 \quad (10)$$

边条 $\mu=\mu_1(\to-\infty),\mu_2(\to\infty),\psi=0$，为使解在 $F=0$ 处衔接，定义

$$\Delta' = \frac{\psi_2'}{\psi_2} - \frac{\psi_1'}{\psi_1} = -2\alpha - \frac{1}{\psi_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\mu|}\psi\frac{F''}{F}d\mu + O\left(\frac{G}{(F')^2\epsilon_0}\right) \quad (11)$$

- $\alpha^2 \gg 1,\ \ \Delta' = -2\alpha + O(1/\alpha) \quad (12)$
- $\alpha^2 \ll 1,\ \ \Delta' = (1/\alpha)(F')^2(1/F^2_{-\infty} + 1/F^2_{\infty}) \quad (13)$

有限电阻不稳定性 6

间断区（R_0），近似把 $F', F'', \widetilde{\eta}, \widetilde{\eta}', G, \rho$ 当做常数，并取 $F = F'(\mu - \mu_0)$
引入新宗量 θ 代替 μ，新变量 U 代替 W

$$\theta = (1/\epsilon)(\mu - \mu_0 + \widetilde{\eta}'/2p) \quad (14)$$
$$U = W(4\epsilon F'/p) \quad (15)$$

方程 (3)，(4) 可改写成

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \epsilon^2\alpha^2\psi = \epsilon\Omega[4\psi + U(\theta + \delta_1)] \quad (16)$$
$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} + (\Lambda - \frac{1}{4}\theta^2)U = (\theta - \delta)\psi \quad (17)$$

这里

$$\epsilon = [p\widetilde{\eta}\widetilde{\rho}/4\alpha^2 S^2(F')^2]^{\frac{1}{4}} \quad (18), \qquad \Omega = p\epsilon/4\widetilde{\eta} \quad (19)$$
$$\delta = (1/4\Omega)(F''/F + \widetilde{\eta}'/2\widetilde{\eta}) \ (20), \quad \delta_1 = (1/8\Omega)(\widetilde{\eta}'/\widetilde{\eta}) \ (21)$$
$$\Lambda = \frac{(\widetilde{\eta}')^2}{16\epsilon^2 p^2} + \frac{S^2\alpha^2\epsilon^2 G}{p^2\widetilde{\rho}} - \alpha^2\epsilon^2 \quad (22)$$

求解 (17)，将 U 用标准化 Hermite 函数展开 $U=\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$，其中

$$\frac{d^2 u_n}{d\theta^2}+(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\theta^2)u_n=0$$

代入 (17) 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n[\Lambda-(n+\frac{1}{2})]=\psi(\theta-\delta)$$

利用 Hermite 函数正交性质，可得系数

$$a_n=\frac{1}{\Lambda-(n+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 u_n \psi(\theta_1-\delta) \quad (23)$$

(23) 式替代 (17) 式，与 (16) 式组成 R_0 内的扰动方程组，同时间断区解在 ϵ_0 宽度内成立要求 $\epsilon_0>\epsilon$！

有限电阻不稳定性 8

最重要的不稳定模对应 R_0 内 ψ 近似为常数，此条件大致相当于

$$\epsilon_0|\Delta'| < 1$$

与外部区解衔接，利用 (12)，(13) 式，有

$$\epsilon(F')^2\left(\frac{1}{F_{-\infty}^2}+\frac{1}{F_{\infty}^2}\right) < \alpha < \frac{1}{2\epsilon} \quad (24)$$

为使重力互换模不掩盖其他模，要求

$$\frac{G}{(F')^2} < \frac{1}{4}, \text{and } \frac{G}{(F_{\pm\infty})^2} < \alpha^2 \quad (25)$$

当 $\psi = \text{const}$ 并满足 (24) 和 (25) 时，利用 (23) 和 (16) 可得

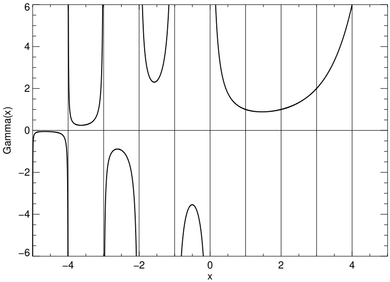
$$\Delta' = \Omega \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 4 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 u_n \right]^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\Lambda - (n + \frac{1}{2})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 u_n(\theta_1 + \delta_1) \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_2 u_n(\theta_2 - \delta) \right] \right\}$$

利用 Hermite 函数积分性质，有

$$\Delta' = 2^{7/2} \pi \Omega \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\Lambda)}{\Gamma(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Lambda)} + \frac{\delta\delta_1}{8} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Lambda)}{\Gamma(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\Lambda)} \right] \tag{26}$$

有限电阻不稳定性 10



1. $\delta\delta_1 < 0$（标准状况）: Λ 从 $\frac{1}{2}$ 到 $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ 到 $\frac{5}{2}$... Δ'/Ω 从 $-\infty$ 到 ∞, 故 Λ 取值可大致为 1,2,3..., 还可有 $< \frac{1}{2}$ 的本征值
2. $\delta\delta_1 = 0$: Λ 从 $2m + \frac{1}{2}$ 到 $2m + \frac{3}{2}$, Δ'/Ω 从 $-\infty$ 到 ∞, 故 Λ 取值可大致为 2,4,6..., 还可有 $< \frac{3}{2}$ 的本征值
3. $0 < \delta\delta_1 \ll \Lambda$: Λ 从 $2m + \frac{1}{2}$ 到 $2m + \frac{3}{2}$, Δ'/Ω 取 $|\Delta'/\Omega| < 4\pi(\delta\delta_1)^{\frac{1}{2}}$ 之外的值，此区域外还可有 $< \frac{3}{2}$ 的本征值
4. $\Lambda \ll \frac{1}{2}$: $\Delta' = \Omega(12 + 13\delta\delta_1)$ 恒正

三种不稳定模

- 波纹模：由于电阻梯度引起，以 Λ 的有限性及 (22) 中第一项占主导为特征，其增长率

$$p = \left[\frac{(\widetilde{\eta}')^2 \alpha S |F'|}{8\Lambda \widetilde{\eta}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\rho}^{\frac{1}{2}}} \right]^{2/5}$$

- 撕裂模：由于电阻和磁场剪切引起，以 $\Lambda \ll \frac{1}{2}$ 为特征，其增长率

$$p = (F')^2 \left(\frac{2S\widetilde{\eta}^{\frac{3}{2}}}{9\alpha\widetilde{\rho}^{\frac{1}{2}}} \right)^{2/5} \left(\frac{1}{F_{-\infty}^2} + \frac{1}{F_{\infty}^2} \right)^{4/5}$$

- 重力互换模：当 $G > 0$ 时产生，以 Λ 的有限性及（22）中第二项占主导为特征，其增长率

$$p = \left(\frac{S\alpha G \widetilde{\eta}^{\frac{1}{2}}}{2\Lambda |F'| \widetilde{\rho}^{\frac{1}{2}}} \right)^{2/3}$$

讨论

- 作用于相对于磁场以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 运动的单位体积等离子体上的阻力
$$\boldsymbol{F}_s = \frac{\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{B}_0) - \boldsymbol{v}_1 B_0^2}{\eta}$$
这样的相对运动能够发生在 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0$ 的点周围 εa 大小区域中。对于每一种发生不稳定性的模，我们能找到相应的驱动力 $\boldsymbol{F}_d$，在此区域中超过阻力 $\boldsymbol{F}_s$；而在这个区域之外，仍然是 $\boldsymbol{F}_s$ 占优势。
- 阻力对流体做功的功率 $N \sim -\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{F}_s \sim v_{y1}^2 (B_0')^2 (\varepsilon a)^2 / \eta_0$
驱动力增加的运动主要在 $\boldsymbol{k}$ 方向，使驱动功率和能量变化率相等有
$$v_{y1}^2 (B_0')^2 (\varepsilon a)^2 / \eta_0 = \omega \rho_0 v_{y1}^2 / (k \varepsilon a)^2$$
由此可得“趋肤深度”
$$\varepsilon a \sim \left\{ \frac{\omega \rho_0 \eta_0}{k^2 (B_0')^2} \right\}^{1/4}$$

- 波纹模–存在电阻梯度，此时 $\eta_0\boldsymbol{j}_1=-\eta_1\boldsymbol{j}_0$，驱动力

$$\boldsymbol{F}_{dr}=-\frac{\eta_1}{\eta_0}\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_0=\left(\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla\eta_0}{\omega\eta_0}\right)\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_0$$

  - 扰动向着电阻较高区域时，$\boldsymbol{F}_{dr}$ 是致稳力
  - 扰动向着电阻较低区域时，$\boldsymbol{F}_{dr}$ 是不稳力，发生波纹模不稳定性

  若低电阻处的无耦合区域厚度为 εa，则 $\varepsilon a\sim\eta'/(\mu_0\omega)$，于是

$$\omega=\left[\frac{(\eta_0')^4k^2(B_0')^2}{\mu_0^4\rho_0\eta_0}\right]^{1/5}$$

- 重力互换模–存在 y 方向得重力场和密度梯度，由此产生的驱动力

$$\boldsymbol{F}_{dg}=\rho_1\boldsymbol{g}=-\frac{v_{y1}\rho_0'}{\omega}\boldsymbol{g}$$

  若 $\boldsymbol{g}$ 指向密度减小方向，则 $\boldsymbol{F}_{dg}$ 将始终与扰动速度 v_{y1} 同向，从何产生重力互换模不稳定性，由 $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{F}_{dg}\sim-\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{F}_s$ 得

$$\varepsilon a\sim\left[\frac{\rho_0'g\eta_0}{(B_0')^2\omega}\right]^{1/2},\quad\omega=\left[\frac{(\rho_0')^2g^2k^2\eta_0}{(B_0')^2\rho_0}\right]^{1/3}$$

有限电阻不稳定性 14

- 撕裂模–无耦合区发生的磁场扰动产生的洛伦兹力总是指向初始扰动增长的方向，引发撕裂模不稳定性

  由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 得

$$\boldsymbol{E}_1\sim\frac{\omega B_{y1}}{k}\boldsymbol{n}$$

  由欧姆定律线性化得

$$\eta_0\boldsymbol{j}_1=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0$$

  利用 $\boldsymbol{j}_1=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}_1$ 和长波条件 $\lambda\gg\varepsilon a$ 得

$$\boldsymbol{j}_1\sim\frac{1}{\mu_0 k}B''_{y1}\boldsymbol{n}$$

  为促使扰动，必须选择 εa，使得 $\boldsymbol{E}_1$ 的作用超过 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0$，于是

$$\eta_0\boldsymbol{j}_1\approx\boldsymbol{E}_1$$

  考虑到 $B''_{y1}\sim\dfrac{B_{y1}}{\varepsilon k a^3}$，有 $\varepsilon a\sim\eta_0/(\mu_0 k\omega a^2)$，于是

$$\omega=\left[\frac{\eta_0^3(B'_0)^2}{\mu_0^4\rho_0 k^2 a^8}\right]^{1/5}$$