Magnetohydrodynamics (MHD)

绪论

等离子体定义

等离子体 由带电粒子和中性粒子组成，且表现出集体行为的一种准中性气体。

- 准中性：对电中性的破坏极其敏感
- 集体行为：不仅取决于局部条件，还受远距离等离子体状态影响

$$f \sim 1/r^2, n \sim r^3 \rightarrow F = nf \sim r$$

等离子体产生条件

- 高温（碰撞主导）
  Saha 公式

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{2u_{r+1}(T)}{u_r(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_r/kT} \rightarrow$$

  纯氢大气 $\frac{n_1}{n_0} = 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_e} e^{-1.58\times10^5/T}$
  - 太阳光球（$T \sim 6000$ K, $n \sim 10^{16}$ cm^{-3}）：$n_1/n_0 \sim 6.4 \times 10^{-4}$
  - 太阳日冕（$T \sim 10^6$ K, $n_e \sim 10^8$ cm^{-3}）：$n_1/n_0 \sim 2.0 \times 10^{16}$ (if LTE)
- 光致电离（辐射主导）$A + h\nu \rightarrow A^+ + e$
  维恩位移定律

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{4.97kT} = \frac{2.9 \times 10^7}{T} \text{ Å}$$

  OB-type Stars ($T \sim 3 \times 10^4$ K)：$\lambda_{\max} \sim 1000$ Å (13.6 eV$\sim$ 912 Å)

等离子体基本参量

- 独立参量 n 和 T
- 德拜长度 $\lambda_D = \left(\dfrac{\varepsilon_0 kT}{n_e e^2}\right)^{1/2}$ ：偏离电中性的空间尺度
- 等离子体振荡频率 $\omega_p = \left(\dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2}$ ：恢复电中性的快慢程度
- 电导率 $\sigma = \dfrac{n_e e^2 \tau}{m_e}$

  （磁场条件下，$\sigma \to$ 张量）

单粒子轨道理论

- 模型假设
  1. 忽略粒子间相互作用；
  2. 不计粒子运动产生的电磁场；
  3. 仅考虑非相对论情形；
  4. 忽略辐射阻尼。
- 数学方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) + \boldsymbol{F}$$

- $\boldsymbol{E}=0, \boldsymbol{F}=0, \boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \dfrac{qB}{m} v_y \\ \dot{v}_y = -\dfrac{qB}{m} v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{v}_x + \Omega^2 v_x = 0 \\ \ddot{v}_y + \Omega^2 v_y = 0 \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (\Omega = \frac{qB}{m})$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_x = v_\perp \cos(\Omega t + \alpha) \\ v_y = -v_\perp \sin(\Omega t + \alpha) \\ v_z = v_\parallel \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v_\perp}{\Omega} \sin(\Omega t + \alpha) + x_0 \\ y = \dfrac{v_\perp}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha) + y_0 \\ z = v_\parallel t + z_0 \end{cases}$$

粒子绕引导中心 (x_0, y_0) 做回旋运动

$|\Omega| = \dfrac{|q|B}{m}$：回旋频率，$r_L = \dfrac{v_\perp}{|\Omega|} = \dfrac{mv_\perp}{|q|B}$：回旋半径

- $\boldsymbol{E} = E_{\|}\boldsymbol{k} + E_{\perp}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$

z 分量

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}E_{\|} \to v_z = \frac{qE_{\|}}{m}t + v_{\|}$$

垂直分量

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \Omega v_y \\ \dot{v}_y = \dfrac{qE_{\perp}}{m} - \Omega v_x \end{cases} \to \begin{cases} \ddot{v}_x + \Omega^2(v_x - \dfrac{v_{\perp}}{B}) = 0 \\ \ddot{v}_y + \Omega^2 v_y = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} v_x = v_{\perp}\cos(\Omega t + \alpha) + v_E \quad (v_E = E_{\perp}/B) \\ v_y = -v_{\perp}\sin(\Omega t + \alpha) \end{cases}$$

引导中心漂移速度 $(v_E, 0)$，矢量形式 $\boldsymbol{v}_E = \dfrac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$

均匀电磁场中

- 一般公式 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\parallel}+\boldsymbol{F}_{\perp}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{v}_{\parallel}}{dt}=\dfrac{\boldsymbol{F}_{\parallel}}{dt} \\ m\dfrac{d\boldsymbol{v}_{\perp}}{dt}=q(\boldsymbol{v}_{\perp}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{F}_{\perp}\rightarrow m\dfrac{d\boldsymbol{v}'_{\perp}}{dt}=q(\boldsymbol{v}'_{\perp}\times\boldsymbol{B})+q(\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{F}_{\perp} \end{cases}$$

选择 $\boldsymbol{v}_D$ 使得 $q(\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B})$ 与附加力 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ 相消，有

$$\boldsymbol{v}_D=\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{qB^2}$$

- 电场 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{v}_{DE}=\dfrac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$，与电荷无关，不产生宏观电流
- 重力场 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{v}_{DG}=\dfrac{m\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{B}}{qB^2}$，与电荷相关，产生宏观电流

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}_0 + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \delta\boldsymbol{B}$$

- 梯度漂移

$$\delta\boldsymbol{B} = -\frac{v_\perp}{\Omega}\sin\Omega t(\boldsymbol{j}\cdot\nabla_\perp B)\frac{\boldsymbol{B}}{B} \to \overline{\boldsymbol{F}}_{\nabla_\perp B} = -\frac{W_\perp}{B}\nabla_\perp B \to$$

$$\boldsymbol{v}_{DBG} = \frac{W_\perp}{qB^3}(\boldsymbol{B}\times\nabla_\perp B)$$

- 曲率漂移

$$\boldsymbol{F}_c = -\frac{mv_\parallel^2}{R}\boldsymbol{j} = -\frac{2\,W_\parallel}{B}\frac{dB_y}{dz}\boldsymbol{j} = -\frac{2\,W_\parallel}{B^2}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \to$$

$$\boldsymbol{v}_{DBC} = -\frac{2\,W_\parallel}{qB^2}\frac{dB_y}{dz}\boldsymbol{i} = \frac{2\,W_\parallel}{qB^4}[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}]$$

Magnetohydrodynamics (MHD)

基本方程

导电流体模型

两种途径

1. 统计物理—从微观出发，直接，但不完善
2. 导电流体假设—从宏观出发，等离子体由导电的流体质点填充组成
    - 适用条件
        - 空间上：λ（问题特征尺度）$\gg dr$（流体质点尺度）$\gg \lambda_c$（带电粒子平均自由程）
        - 时间上：τ（问题特征时标）$\gg d\tau$（流体质点宏观物理量统计平均时标）$\gg \tau_c$（带电粒子间平均碰撞时间）
    - 特例
        - 冷等离子体，$|\boldsymbol{U}| \gg |\boldsymbol{W}|$：流体元由自洽场维持
        - 强磁场中，“无碰撞等离子体”：垂直磁场方向，满足 $\lambda_\perp \gg r_c$

MHD 基本方程

HD 方程 +Maxwell 方程 + 耦合

- 连续性方程 $\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$
- 动量方程 $\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla\cdot\mathbf{P} + \rho_q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}$

  其中 $\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + 2\eta[\mathbf{S} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I}]$（本构方程）
- 能量方程

  $\rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T)$
- Maxwell 方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- 电流方程（欧姆定律） $\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + \rho_q\boldsymbol{v}$
- 物态方程

$$p = \rho RT$$
$$\varepsilon = C_v T = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$$

连续性方程

- Lagrange 观点：任取一定流体质点组成的流体团，其体积为 τ，质量 $m=\int_\tau \rho\delta\tau$。流体团中没有源和汇，则其质量在流动过程中不变

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\delta\tau=\int_\tau\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\delta\tau=\int_\tau\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]\delta\tau=0$$

考虑到流体团任意选取，有

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \text{ 或者 } \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

- Euler 观点：在空间中取一以 S 面为界的有限体积τ（空间点组成，固定在空间中），考虑 τ 内流体质量变化
  - 单位时间通过表面 S流入或流出：$\oint_S \rho v_n\delta S=\oint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{S}$
  - 由于密度场不定常性，单位时间 τ 内质量变化：$\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau$

根据质量守恒，有 $\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau+\oint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{S}=\int_\tau\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]\delta\tau=0$

考虑到 τ 选取任意，有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

任取一体积为 τ 的流体团，它的边界为 S，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线单位矢量

动量守恒：τ 内流体的动量改变率等于作用在流体上的力

τ 内总动量：$\displaystyle\int_\tau \rho\boldsymbol{v}\delta\tau$

作用在流体上的力（质量力 + 面力）：$\displaystyle\int_\tau(\rho_q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F})\delta\tau+\oint_S\boldsymbol{p}_n\delta S$

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\boldsymbol{v}\delta\tau=\int_\tau(\rho_q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F})\delta\tau+\oint_S\boldsymbol{p}_n\delta S$$

- $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_\tau\rho\boldsymbol{v}d\delta\tau=\frac{d}{dt}\int_\tau\boldsymbol{v}\delta m=\int_\tau\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\delta m+\int_\tau\boldsymbol{v}\frac{d}{dt}\delta m=\int_\tau\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\delta\tau$
- $\displaystyle\oint_S\boldsymbol{p}_n\delta S=\oint_S\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}\delta S=\oint_S\mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{S}=\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{P}\delta\tau$

考虑到 τ 选取任意，有 $\displaystyle\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\nabla\cdot\mathbf{P}+\rho_q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F}$

能量方程

任取一体积为 τ 的流体团，它的边界为 S，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线单位矢量

能量守恒：τ 内流体的能量改变率等于单位时间力做功即加上传热

τ 内总能量（动能 + 内能）：$\displaystyle\int_\tau \rho\left(U+\frac{v^2}{2}\right)\delta\tau$

非电磁力做功：$\displaystyle\int_\tau \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\delta\tau+\oint_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\delta S$

电磁力做功：$\displaystyle\oint_s -\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\delta\boldsymbol{S}-\int_\tau (W_B+W_E)\delta\tau$

传热（热传导）：$\displaystyle\oint_S k\frac{\partial T}{\partial n}\delta S \quad (\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T)$

仿照动量方程中相关推导，并考虑到 τ 选取任意，有

$$\rho\frac{d}{dt}\left(U+\frac{v^2}{2}\right)=-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

简化 MHD 基本方程

宇宙等离子体下的简化

1. 无粘滞流体 $P_{ij} = -p\delta_{ij}$
2. 忽略位移电流 $\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
3. 忽略运流电流 $\rho_q\boldsymbol{v}$
4. 忽略电场力 $\rho_q\boldsymbol{E}$

由此可简化 MHD 方程

σ 有限

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$
$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$
$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

$\sigma \to \infty$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$
$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

完全电离等离子体二流体模型

- 连续性方程

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha) = 0 \quad (\alpha = i, e)$$

- 动量方程

$$n_\alpha m_\alpha \frac{d\boldsymbol{u}_\alpha}{dt} = -\nabla p_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_\alpha \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{M}_\alpha$$

- Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha$$

- 耦合项

$$\boldsymbol{M}_e = -\boldsymbol{M}_i = \nu_{ei} n \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_e)$$

二流体 $\Rightarrow$ 单流体

- 大多数情况下
  1. 电中性 $n_e = n_i = n$
  2. 宏观速度为小量，忽略 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{j}$ 及其微商的二次项
  3. $m_e \ll m_i$，忽略 m_e/m_i 有关项

  定义宏观物理量与二流体模型下相应物理量间的关系
  - 密度 $\rho = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha = n(m_e + m_i)$
  - 动量 $\rho\boldsymbol{v} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = n(m_e\boldsymbol{u}_e + m_i\boldsymbol{u}_i)$
  - 速度 $\boldsymbol{v} = \dfrac{m_e\boldsymbol{u}_e + m_i\boldsymbol{u}_i}{m_e + m_i} \approx \dfrac{m_e\boldsymbol{u}_e + m_i\boldsymbol{u}_i}{m_i}$
  - 电流 $\boldsymbol{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = ne(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_e)$
- 二流体 $\rightarrow$ 单流体
  - 连续性方程求和

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v} = 0$$

  - 动量方程求和

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \quad (p = p_e + p_i)$$

广义欧姆定律

- 满足条件
  1. 电中性 $n_e = n_i = n$
  2. $m_e \ll m_i$，忽略 m_e/m_i 有关项
  3. 局部热动平衡 $p_e = p_i$ $(m_e W_e^2 = m_i W_i^2)$
  4. $u_\alpha \ll W_\alpha$，故 $\boldsymbol{u}_e$，$\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{j}$ 及其微商的二次项与压力项相比可忽略
- 由二流体动量方程可推得

$$\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{2ne}\nabla p - \frac{1}{ne}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{m_e \nu_{ei}}{ne^2}\boldsymbol{j}$$

  - $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$：洛伦兹力
  - $\frac{1}{2ne}\nabla p$：热压力
  - $\frac{1}{ne}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$：霍尔电动力
  - $\frac{m_e \nu_{ei}}{ne^2}\boldsymbol{j}$：电阻效应

$$\partial/\partial t = 0, \boldsymbol{B} = 0, \nabla p = 0 \rightarrow \boldsymbol{j} = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}}\boldsymbol{E} = \sigma \boldsymbol{E}$$

低频高密度（MHD 方程组成立条件），$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$

若进一步满足 $\frac{\omega \nu_{ei}}{\omega_p^2} \ll \left(\frac{V}{c}\right)^2$ $(\sigma \rightarrow \infty)$，则 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0$

导电流体中磁场的变化

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \end{cases} \to \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \boldsymbol{B} \right)$$

若电导率 σ 均匀，则 $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \eta_m \nabla^2 \boldsymbol{B}$ $(\eta_m = \dfrac{1}{\sigma \mu_0})$

- 磁场的扩散效应

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \eta_m \nabla^2 \boldsymbol{B}$$

  磁场扩散：磁能 $\to$ 热能

- 磁场的冻结效应

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

  磁冻结条件下的几个定理

  1. 通过和流体一起运动的任意曲面的磁通量守恒
  2. 起初位于某根磁力线上的流体质点，以后将一直位于该磁力线上
  3. 封闭系统的磁螺度守恒

  磁场冻结：磁能 $\leftrightarrow$ 机械能

- 量纲分析法，磁雷诺数 R_m

$$R_m = \frac{VL}{\eta_m}$$

磁场应力

安培力（洛伦兹力）

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=-\nabla\frac{B^2}{2\mu_0}+\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{BB}}{\mu_0}=\nabla\cdot\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T}=\frac{1}{\mu_0}[-\frac{B^2}{2}\mathbf{I}+\boldsymbol{BB}]\text{ and }\boldsymbol{T}_n=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{T}=\frac{1}{\mu_0}[-\frac{B^2}{2}\boldsymbol{n}+B_n\boldsymbol{B}]$$

- 两个等效面积力
  1. $-\frac{B^2}{2\mu_0}\boldsymbol{n}$：方向取面元外法向反方向，磁压力
  2. $\frac{B_n}{\mu_0}\boldsymbol{B}$：方向与磁场方向平行（反平行），磁张力
- 天体物理中的应用
  1. 太阳黑子的平衡

$$p_{\rm sp}+\frac{B^2}{2\mu_0}=p_{\rm ph}\Rightarrow nk(T_{\rm ph}-T_{\rm sp})=\frac{B^2}{2\mu_0}$$

  2. 瓜子效应（Melon-seed effect），日浪

Magnetohydrodynamics (MHD)

磁流体静力学

MHD 静力学一般方程

$$\begin{cases} -\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \rightarrow \nabla(p + \frac{B^2}{2\mu_0}) = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\rightarrow \nabla \times (\boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{B}) = 0$$

一些性质

1. $\boldsymbol{B} \cdot \nabla p = 0, \boldsymbol{j} \cdot \nabla p = 0$：等压面、磁面、电流面重合
2. $\boldsymbol{j}_\perp = \dfrac{\boldsymbol{B} \times \nabla p}{B^2}$：压强梯度产生横越磁力线的电流

定义及基本方程

- 无作用力场（Force-Free Field, FFF）：局部强磁场区域中的磁静平衡位型

$$-\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \xrightarrow{\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0} \ll 1} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0$$

- FFF 基本方程
  - 形式一：$\begin{cases} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$
  - 形式二：$\begin{cases} (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$
  - 形式三：$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$ ($\alpha(\boldsymbol{r}, t)$：无力因子)

  α 性质：$\boldsymbol{B} \cdot \nabla \alpha = 0 \rightarrow$ 沿同一根磁力线 $\alpha = \text{const}$

势场（无电流场）：$\alpha = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\times\boldsymbol{B}=0(\boldsymbol{j}=0)\rightarrow\boldsymbol{B}=\nabla\Psi \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\nabla^2\Psi=0$$

- 直角坐标解:

$$\Psi=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2m\pi y}{b}\right)e^{-k_{nm}z}\ (k_{nm}^2=(2n\pi/a)^2+(2m\pi/b)^2)$$

- 球坐标解（Potential Field Source-Surface, PFSS）:

$$\Psi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{lm}r^l+b_{lm}r^{-(l+1)}\right]P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

边界条件:

1. Lower: $B_r=\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}$，光球径向磁场（观测获得）
2. Upper: $\Psi=0$，太阳风拖曳作用

线性无立场（LFFF）:$\alpha = \text{const}$

- 满足方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} + \alpha^2 \boldsymbol{B} = 0$$

- 方程解

$$\boldsymbol{L} = \nabla\psi, \boldsymbol{T} = \nabla \times (\psi \boldsymbol{a}), \boldsymbol{S} = \frac{1}{\alpha}\nabla \times \boldsymbol{T}$$

（ψ 为标量 Helmholtz 方程 $\nabla^2\psi + \alpha^2\psi = 0$ 解）

磁场要求满足无源条件，故

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} = \nabla \times (\psi \boldsymbol{a}) + \frac{1}{\alpha}\nabla \times \nabla \times (\psi \boldsymbol{a})$$

数学困难：非物理、不唯一！

- 线性无力场性质：
  1. 冻结型 LFFF 对应于一个封闭系统中磁能极小状态
  2. 扩散型 LFFF 衰变过程中无力性质不变

一般 MHD 平衡位型

- 地球磁层尾的平衡位型（二维问题 $\partial/\partial y = 0$）

$$\boldsymbol{B}(x, z) = \nabla \times (A(x, z)\boldsymbol{e}_y) + B_y(x, z)\boldsymbol{e}_y$$

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = 0 \to \text{推广的 G-S 方程}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left[\nabla^2 A + \frac{d}{d\,A}({B_y}^2/2)\right] = -\frac{d\,p(A)}{d\,A}$$

- 宁静日珥的平衡位型

$$\boldsymbol{B}(x, z) = \nabla \times (F(x, z)\boldsymbol{e}_y)$$

$$-\nabla p + \tfrac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} + \rho\boldsymbol{g} = 0 \to$$

$$\nabla^2 F = \phi(F)\exp(-z/H_0) \quad \text{(Menzel 模型)}$$

- 平衡方程（$\boldsymbol{j} = j(r)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B} = B(r)\boldsymbol{e}_\theta$）

$$\begin{cases} -\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dr} = -\dfrac{B}{\mu_0 r}\dfrac{d}{dr}(rB) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rB) = \mu_0 j \end{cases}$$

1. 电流密度为常数，$j(r) = j_0$

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r & r \leq a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > a \end{cases}, \quad p(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2}(1 - r^2/a^2) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

2. $\sigma \to \infty$，“趋肤效应”

$$B(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > a \end{cases}, \quad p(r) = \begin{cases} p_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

- 本奈特关系

$$I^2 = \frac{16\pi}{\mu_0} kTN$$

平衡箍缩-角箍缩（Pinch-θ）、圆环箍缩

- 角箍缩
  - 平衡方程

$$\nabla\left(p+\frac{{B_z}^2}{2\mu_0}\right)=0\rightarrow\frac{dp}{dr}+\frac{d}{dr}\left(\frac{{B_z}^2}{2\mu_0}\right)=0$$

  - 平衡条件

$$\langle p\rangle+\left\langle\frac{{B_z}^2}{2\mu_0}\right\rangle=p_a+\left.\frac{{B_z}^2}{2\mu_0}\right|_{r=a}$$

- 圆环箍缩
  - 无纵向电流，$\beta\ll 1$，无法平衡
  - 一般情况（纵向磁场 + 角向磁场），小量 a/R 展开

动力箍缩-“雪耙模型”

- 等离子体圆柱（$L \gg a, \sigma \to \infty, \boldsymbol{j} = j_z \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{B} = B_\theta \boldsymbol{e}_\theta$）
- 基本方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \end{cases} \to \frac{d}{dt}\left[\rho(r)\frac{dr}{dt}\right] = -\frac{B_\theta}{\mu_0 r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)$$

- 动壳层满足的方程

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{\pi r {B_\theta}^2}{\mu_0} \to \frac{d}{dt}\left[(a^2 - r^2)\frac{dr}{dt}\right] = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho_0 r}$$

设 I 满足：$I(t) = bt$，引入无量纲量 $R = r/a$，$T = t/t_1$，则有

$$\frac{d}{dT}\left[(1 - R^2)\frac{dR}{dT}\right] = -\frac{T^2}{R}$$

- 后期过程，动压不可忽略

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{\pi r {B_\theta}^2}{\mu_0} + 2\pi r p$$

Magnetohydrodynamics (MHD)

波动理论

- 基本方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\mu_0 \rho}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p \end{cases}$$

- 平衡时：不可压缩均质流体 $\rho = \text{const}$，均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$。引入小扰动:$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}', \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}', p = p_0 + p'$，并设扰动沿 z 方向传播（$\partial/\partial x = 0, \partial/\partial y = 0$ ）。将小扰动方程线性化，得:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}_0) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0 \rho}(\nabla \times \boldsymbol{B}') \times \boldsymbol{B}_0 - \dfrac{1}{\rho}\nabla p' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_z'}{\partial z} = 0 \rightarrow v_z' = 0 \\ \dfrac{\partial B_x'}{\partial t} = B_0 \dfrac{\partial v_x'}{\partial z} \quad (\dfrac{\partial B_y'}{\partial t} = B_0 \dfrac{\partial v_y'}{\partial z}) \\ \dfrac{\partial B_z'}{\partial t} = 0 \quad \dfrac{\partial B_z'}{\partial z} = 0 \rightarrow B_z' = 0 \\ \dfrac{\partial v_x'}{\partial t} = \dfrac{B_0}{\mu_0 \rho} \dfrac{\partial B_x'}{\partial z} \quad (\dfrac{\partial v_y'}{\partial t} = \dfrac{B_0}{\mu_0 \rho} \dfrac{\partial B_y'}{\partial z}) \\ \dfrac{\partial v_z'}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p'}{\partial z} = 0 \rightarrow p' = 0 \end{cases}$$

完全导电理想流体中的 Alfvén 波 2

- 不失一般性，仅考虑 y 方向的扰动

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial B_y{}'}{\partial t}=B_0\dfrac{\partial v_y{}'}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v_y{}'}{\partial t}=\dfrac{B_0}{\mu_0\rho}\dfrac{\partial B_y{}'}{\partial z}\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 B_y{}'}{\partial t^2}-\dfrac{B_0{}^2}{\mu_0\rho}\dfrac{\partial^2 B_y{}'}{\partial z^2}=0\\ \dfrac{\partial^2 v_y{}'}{\partial t^2}-\dfrac{B_0{}^2}{\mu_0\rho}\dfrac{\partial^2 v_y{}'}{\partial z^2}=0\end{array}\right.$$

关于 $B_y{}'$ 和 $v_y{}'$ 的波动方程，其解为以 $t\pm z/v_A$ 为参量的任意函数。其传播速度

$$v_A=\pm\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho}}$$

称为 Alfvén 速度，而这种磁场和流体的波动就是 Alfvén 波。

- 导电流体与磁场的“冻结”，取 $B_y{}'=A\sin\omega(t-z/v_A)$

磁力线方程 $\dfrac{dy}{B_y{}'}=\dfrac{dz}{B_0}\rightarrow y=y_0+\dfrac{A}{\omega}\dfrac{v_A}{B_0}\cos\omega(t-z/v_A)$

扰动速度 $\dfrac{\partial v_y{}'}{\partial z}=\dfrac{1}{B_0}\dfrac{\partial B_y{}'}{\partial t}\rightarrow v_y{}'=-\dfrac{A}{\sqrt{\mu_0\rho}}\sin\omega(t-z/v_A)$

比较可得

$$v_y{}'=\frac{dy}{dt}$$

阻尼 Alfvén 波 1

- 考虑有限电导率、粘性不可压缩均质流体

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \\ \rho\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla p+\dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}+\eta\nabla^2\boldsymbol{v} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\eta_m\nabla^2\boldsymbol{B} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{cases}$$

- 平衡位型与前例相同，仍然引入沿 z 方向传播的小扰动 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}',\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}',p=p_0+p'$。线性化方程，得

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}=\dfrac{B_0}{\mu_0}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial z}-\nabla\left(p'+\dfrac{B_0{B_z}'}{\mu_0}\right)+\eta\nabla^2\boldsymbol{v}'\rightarrow(\dfrac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2)\boldsymbol{v}'=\dfrac{B_0}{\mu_0\rho}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t}=B_0\dfrac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial z}+\eta_m\nabla^2\boldsymbol{B}'\rightarrow(\dfrac{\partial}{\partial t}-\eta_m\nabla^2)\boldsymbol{B}'=B_0\dfrac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial z} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}'=0\rightarrow{B_z}'=0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0\rightarrow{v_z}'=0 \end{cases}$$

阻尼 Alfvén 波 2

- 消去 $\boldsymbol{B}'$ 得

$$(\partial/\partial t - \eta_m \nabla^2)(\partial/\partial t - \nu \nabla^2)\boldsymbol{v}' = \frac{{B_0}^2}{\mu_0 \rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}'}{\partial z^2}$$

- 考虑到 $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0, v_z' = 0$，故

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_\perp{}'}{\partial t^2} - {v_{a0}}^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_\perp{}'}{\partial z^2} = (\eta_m + \nu)\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}_\perp{}'}{\partial t \partial z^2} \quad (v_{a0} = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho})$$

$\eta_m = \nu = 0 \rightarrow$ 完全导电理想流体中 Alfvén 波传播方程

- 考虑 $\exp i(\omega t - kz)$ 形式的平面波解，带入波动方程，得色散关系

$$\omega^2 - {v_{a0}}^2 k^2 - i(\eta_m + \nu)\omega k^2 = 0 \rightarrow$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left[i(\eta_m + \nu)k^2 \pm \sqrt{4{v_{a0}}^2 k^2 - (\eta_m + \nu)^2 k^4}\right]$$

1. 平面波解以 $e^{-(\eta_m+\nu)k^2 t/2}$ 衰减
2. 平面波解存在要求 $v_{a0} > \dfrac{\eta_m + \nu}{2}k$，即波速大于（磁）扩散速度

- 考虑导电流体的可压缩性 ($d\rho/dt \neq 0$)，忽略粘滞 ($\eta = 0$)，电导率无穷大 ($\sigma \to \infty$)，绝热过程 ($dS/dt = 0$)，故

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\mu_0 \rho}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p \\
\dfrac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) S = 0 \\
p = p(\rho, S)
\end{cases}
$$

未知量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}, \rho, p, S$，方程数（除去磁场控制方程）9，故方程组封闭。

可压缩磁流体中的波动–小扰动方程组

- 引入扰动 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}'$,$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$,$p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$,$S = S_0 + S'$。线性化方程，并用 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{B}_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$, $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{B}'/\sqrt{\mu_0\rho_0}$ 替代 $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}'$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}' = (\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}_0(\nabla \cdot \boldsymbol{v}') \\
\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0 \\
\dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\rho' = -\rho_0(\nabla \cdot \boldsymbol{v}') \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}' = -\dfrac{1}{\rho_0}\nabla(p' + \rho_0 \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}_0) + (\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}' \\
\dfrac{\partial S'}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)S' = 0 \\
p' = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \rho' + \left(\dfrac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho S' = {c_s}^2 \rho' + bS'
\end{cases}
$$

- 均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 位于 xoz 平面中，与 x 轴夹角为 θ，将所有扰动量表示为沿 x 轴传播的平面谐波：

$$Q'(x,t) = Q' e^{i(\omega t - kx)}$$

考虑到 $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0, \partial/\partial x = -ik, \partial/\partial t = i\omega$，有

$$\begin{cases}
(\omega - kv_{0x})u_x{}' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})u_y{}' + ku_{0x}v_y{}' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})u_z{}' + ku_{0x}v_z{}' - ku_{0z}v_x{}' = 0 \\
ku_x{}' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})v_x{}' - kp'/\rho_0 - ku_{0z}u_z{}' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})v_y{}' + ku_{0x}u_y{}' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})v_z{}' + ku_{0x}u_z{}' = 0 \\
p' - c_s{}^2\rho' - bS' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})\rho' - k\rho_0 v_x{}' = 0 \\
(\omega - kv_{0x})S' = 0
\end{cases}$$

可压缩磁流体中的波动–色散关系

- 令 $\omega_0=\omega-kv_{0x}$，即 $v=\dfrac{\omega_0}{k}=\dfrac{\omega}{k}-v_{0x}$。方程组有非零解，要求系数行列式 $=0$，即

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & {u_x}' & {u_y}' & {u_z}' & {v_x}' & {v_y}' & {v_z}' & p' & \rho' & S' \\
\hline
1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & ku_{0x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & \omega_0 & -ku_{0z} & 0 & ku_{0x} & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & -ku_{0z} & \omega_0 & 0 & 0 & -k/\rho_0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & ku_{0x} & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & ku_{0x} & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -{c_s}^2 & -b \\
8 & 0 & 0 & 0 & -k\rho_0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0
\end{array} = 0
$$

考虑到 $u_{0x}=u_0\cos\theta, u_{0z}=u_0\sin\theta$，可得色散关系

$$
{\omega_0}^2[{\omega_0}^2-(ku_0\cos\theta)^2][{\omega_0}^4-k^2({c_s}^2+{u_0}^2){\omega_0}^2+k^2{c_s}^2(ku_0\cos\theta)^2]=0
$$

可压缩磁流体中的波动–波动模式

1. $\omega_0 = 0$

$$u_x{}' = u_y{}' = u_z{}' = 0$$
$$v_x{}' = v_y{}' = v_z{}' = 0$$
$$p' = 0,\ S' \neq 0,\ \rho' = -\frac{b}{c_s{}^2}S'$$

熵波：仅有密度和熵的扰动，且扰动不传播

2. $\omega_0{}^2 - (ku_0\cos\theta)^2 = 0 \rightarrow v_a = \frac{\omega_0}{k} = \pm u_0\cos\theta = \pm\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}\cos\theta$

斜 Alfvén 波：传播方向与磁力线有一夹角

$$u_x{}' = u_z{}' = 0,\ u_y{}' \neq 0$$
$$v_x{}' = v_z{}' = 0,\ v_y{}' = \pm u_y{}'$$
$$p' = 0,\ S' = 0,\ \rho' = 0$$

3. $\omega_0{}^4 - k^2(c_s{}^2 + u_0{}^2)\omega_0{}^2 + k^4c_s{}^2(u_0\cos\theta)^2 = 0$

$$(v_m{}^2)_\pm = \frac{(\omega_0{}^2)_\pm}{k^2} = \frac{1}{2}\{(c_s{}^2 + u_0{}^2) \pm \sqrt{(c_s{}^2 + u_0{}^2)^2 - 4c_s{}^2u_0{}^2\cos^2\theta}\}$$

快磁声波 v_{m+}+ 慢磁声波 v_{m-}

- $\theta = 0 \to ({v_m}^2)_\pm = \frac{1}{2}\{({c_s}^2 + {u_0}^2) \pm |{c_s}^2 - {u_0}^2|\}$，则

$$\begin{aligned} v_{m+} &= \max(c_s, u_0) \\ v_{m-} &= \min(c_s, u_0) \end{aligned}$$

沿磁场方向传播的快慢磁声波就是 Alfvén 波和声波

当 $v_m = c_s$ 时，有

$$\begin{gathered} {u_x}' = {u_y}' = {u_z}' = 0 \\ {v_x}' = \frac{\rho'}{\rho_0} c_s, \ \ {v_y}' = {v_z}' = 0 \\ S' = 0, \ \ p' = {c_s}^2 \rho' \end{gathered}$$

声波模式

当 $v_m = u_0$ 时，有

$$\begin{gathered} {u_x}' = 0, \ \ {u_y}' \neq 0, \ \ {u_z}' \neq 0 \\ {v_x}' = 0, \ \ {v_y}' = \pm {u_y}', \ \ {v_z}' = \pm {u_z}' \\ S' = 0, \ \ p' = 0, \ \ \rho' = 0 \end{gathered}$$

Alfvén 波模式

- $\theta = \pi/2 \rightarrow ({v_m}^2)_\pm = \frac{1}{2}\{({c_s}^2 + {u_0}^2) \pm ({c_s}^2 + {u_0}^2)\}$，则

$$
\begin{aligned}
v_{m+} &= \sqrt{{c_s}^2 + {u_0}^2} = \sqrt{{c_s}^2 + {v_a}^2} \\
v_{m-} &= 0
\end{aligned}
$$

v_{m-} 对应熵波模式
当 $v_{m+} = \sqrt{{c_s}^2 + {u_0}^2}$ 时，有

$$
\begin{aligned}
{u_x}' = {u_y}' = 0,\ {u_z}' &= \frac{u_0}{\sqrt{{c_s}^2 + {u_0}^2}} {v_x}' \\
{v_x}' &= \frac{\rho'}{\rho_0}\sqrt{{c_s}^2 + {u_0}^2},\ {v_y}' = {v_z}' = 0 \\
S' &= 0,\ p' = {c_s}^2 \rho'
\end{aligned}
$$

1. 热压力和磁压力的“弹性”在 $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}_0$ 情形下产生最佳叠加。
2. 速度扰动在波传播方向，磁场扰动垂直波传播方向。故波为一种纵波和横波的混杂波。

可压缩磁流体中的波动—一般情形下的磁声波

- $0 < \theta < \pi/2$，一般情形，有

$$\max(c_s, v_a) \le (v_m)_+ \le \sqrt{{c_s}^2 + {v_a}^2}$$
$$0 \le (v_m)_- \le \min(c_s, v_a)$$

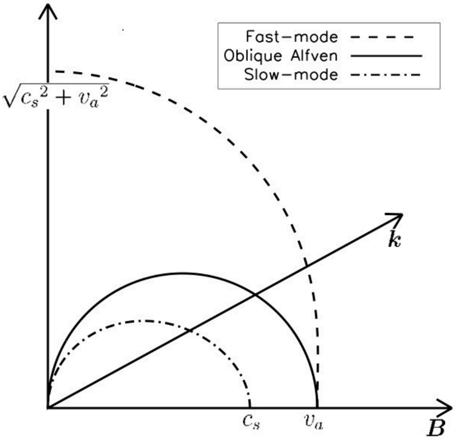
对任一给定方向，有

$$(v_m)_- \le v_a \le (v_m)_+$$
$$(v_m)_- \le c_s \le (v_m)_+$$

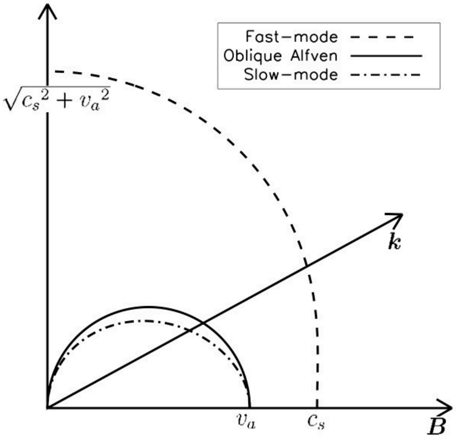
当 $v = v_m$ 时，有

$$u_x{}' = u_y{}' = 0,\ \ u_z{}' = \frac{1}{\rho_0 u_0 \sin\theta}({v_m}^2 - {c_s}^2)\rho'$$
$$v_x{}' = \frac{\rho'}{\rho_0} v_m,\ \ v_y{}' = 0,\ \ v_z{}' = -\frac{\rho'}{\rho_0 v_m}\cot\theta({v_m}^2 - {c_s}^2)$$
$$S' = 0,\ \ p' = {c_s}^2\rho'$$

沿扰动传播方向，只有速度扰动；垂直扰动传播方向，速度和磁场扰动均存在，故快慢磁声波都是混杂波。


Fast−mode
Oblique Alfven
Slow−mode
$\sqrt{c_s{}^2 + v_a{}^2}$
$\boldsymbol{k}$
c_s
v_a
$\boldsymbol{B}$

$(v_a > c_s)$


Fast−mode
Oblique Alfven
Slow−mode
$\sqrt{c_s{}^2 + v_a{}^2}$
$\boldsymbol{k}$
v_a
c_s
$\boldsymbol{B}$

$(c_s > v_a)$

- 基本方程组，理想流体

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p \\ \dfrac{dS}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

假定 p, ρ, v 互为单值函数

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + (v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv})\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = v + \rho\frac{dv}{d\rho} \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv} \end{aligned} \rightarrow \rho\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}$$

故 $\dfrac{dv}{d\rho} = \pm\dfrac{c_s}{\rho}$, $dv = \pm\dfrac{c_s}{\rho}d\rho = \pm\dfrac{dp}{\rho c_s}$

一维非定常流动一般解

$$x = (v \pm c_s)t + f(v), \quad \text{or} \quad v = F[x - (v \pm c_s)t]$$

- 基本方程组，完全导电理想流体

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \dfrac{1}{\mu_0\rho}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0\rho}\left(B_y\frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

$$B_x\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0, \quad B_x\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vB_y), \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vB_z)$$

1. $B_x \neq 0$，运动方程退化为 $\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}$，退化到 HD 情形
2. $B_x = 0$，有 $B = \alpha\rho$（磁冻结），引入 $p_m = p + B^2/(2\mu_0)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_m}{\partial x}$$

与 HD 形式上一致，$dv = \pm\dfrac{c_m}{\rho}d\rho = \pm\dfrac{dp_m}{c_m\rho}$，其中 $c_m = \sqrt{c_s^2 + v_A^2}$，

而流动一般解为 $v = F[x - (v \pm c_m)t]$ $(x = (v \pm c_m)t + f(v))$

简单波–激波

- 简单波与线性波的区别
  - 线性波：波轮廓上各点速度 $c_s(c_m)$ 相同，波形不发生变化
  - 简单波：波轮廓上各点速度 $v \pm c_s (v \pm c_m)$ 不同，扰动大（小）的点传播速度快（慢），波形不断变化
- 简单波传播速度
  考虑绝热情况 $p\rho^{-\gamma} = \text{const} = A$
  $$c_s = \sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$$
  $$v = \pm \int \frac{c_s}{\rho} d\rho = \pm \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1}\left(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) = \pm \frac{2}{\gamma-1}(c_s - c_{s0}) \text{ or}$$
  $$c_s = c_{s0} \pm \frac{\gamma-1}{2} v$$
- 简单波 $\rightarrow$ 激波
  波峰上 $U_p = c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2} v_m$；波谷上 $U_v = c_{s0} - \frac{\gamma+1}{2} v_m$ 形成激波的条件（t^*, X^*）
  $$\int_0^{t^*} (U_p - U_v)\, dt = \int_0^{t^*} (\gamma+1) v_m\, dt = \frac{\lambda}{2}, \quad \int_0^{X^*} \frac{\gamma+1}{c_{s0}} v_m\, dx = \frac{\lambda}{2}$$
  或者，从数学上考虑，当激波形成时
  $$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t \rightarrow \infty, \text{or} \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t \rightarrow 0, \text{and} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_t = 0$$

Magnetohydrodynamics (MHD)

等离子体中的激波

引言

- 激波的定义
  一个以大于等离子体特征速度传播的物理量（$\rho, p, T...$）的突变面
- 处理激波问题时的简化
  1. 将激波看作间断面
  2. 将激波看作两个状态均匀区域的过渡区
- 激波的耗散机制
  1. 流体力学激波：碰撞耗散（激波厚度为流体质点平均自由程）
  2. 磁流体力学激波：碰撞耗散 + 焦耳耗散（可以存在小于平均自由程厚度的无碰撞激波）
- 宇宙等离子体中的激波
  1. 太阳高层大气：日冕/行星际激波（射电 II 型暴）
  2. 磁层顶：弓激波
  3. ……
- 激波的形成
  线性波 $\rightarrow$ 有限振幅波 $\rightarrow$ 激波

- 相容性条件

$$\begin{cases} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \\ \dfrac{p_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 + \dfrac{1}{2} v_1^2 = \dfrac{p_2}{\rho_2} + \varepsilon_2 + \dfrac{1}{2} v_2^2 \\ \left(\dfrac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \dfrac{1}{2} v_1^2 = \dfrac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \dfrac{1}{2} v_2^2 \right) \end{cases}$$

- Rankine-Hugoniot (R-H) 关系

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma-1)+(\gamma+1)p_2/p_1}{(\gamma+1)+(\gamma-1)p_2/p_1} \text{ or } \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2/\rho_1-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)\rho_2/\rho_1}$$

由 R-H 关系得 $v_1^2 = \dfrac{p_1}{2\rho_1}[(\gamma-1)+(\gamma+1)p_2/p_1]$, $v_2 = v_1\rho_1/\rho_2$

1. $p_2 = p_1$, $v_1 = v' = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1} = c_{s1}$, 声波
2. $p_2 > p_1$, $v_1 = v' > c_{s1}$, 激波速度必须大于声速
3. $p_2/p_1 \to \infty$, $\rho_2/\rho_1 \to (\gamma+1)/(\gamma-1)$, $T_2/T_1 \to (\gamma-1)p_2/(\gamma+1)p_1$, 强激波, 密度有限增加, 温度剧烈增加

- 定义上游马赫数 $M_1 = v'/c_{s1} = v_1/c_{s1}$, 有

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma {M_1}^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1){M_1}^2}{2+(\gamma-1){M_1}^2}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} = \cdots$$

MHD 激波–相容性条件

1. 磁场法向分量连续

$$\{B_n\} = 0 \to \{B_x\} = 0$$

2. 电场切向分量连续

$$\{v_n\boldsymbol{B}_t - B_n\boldsymbol{v}_t\} = 0 \to \begin{cases} \{v_xB_y - v_yB_x\} = 0 \\ \{v_xB_z - v_zB_x\} = 0 \end{cases}$$

3. 质量守恒

$$\{\rho v_n\} = 0 \to \{\rho v_x\} = 0$$

4. 动量守恒

$$\{\rho v_n\boldsymbol{v} + (p + \frac{B^2}{2\mu_0})\boldsymbol{n} - \frac{B_n}{\mu_0}\boldsymbol{B}\} = 0 \to \begin{cases} \{\rho v_x^2 + p + \dfrac{B_y^2 + B_z^2}{2\mu_0}\} = 0 \\ \{\rho v_xv_y - \dfrac{B_xB_y}{\mu_0}\} = 0 \\ \{\rho v_xv_z - \dfrac{B_xB_z}{\mu_0}\} = 0 \end{cases}$$

5. 能量守恒

$$\{(p + \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2)v_n + \frac{1}{\mu_0}[B^2v_n - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v})B_n]\} = 0 \to$$

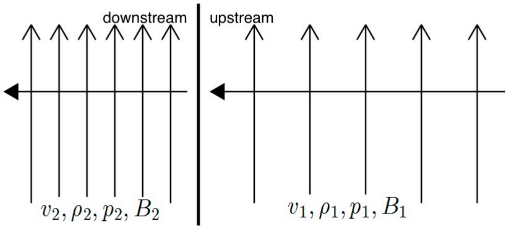
$$\{(p + \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2)v_x + \frac{v_x(B_y^2 + B_z^2)}{\mu_0} - B_x\frac{B_yv_y + B_zv_z}{\mu_0}\} = 0$$

MHD 激波–间断面

- HD 间断面
  1. HD 激波 $v_n \neq 0$
  2. 切向间断 $v_n = 0$
  $$\{\rho\} \neq 0, \{\boldsymbol{v}_t\} \neq 0$$
- MHD 间断
  1. 切向间断 $v_n = 0, B_n = 0$
  $$\{\boldsymbol{B}_t\} \neq 0, \{\boldsymbol{v}_t\} \neq 0, \{\rho\} \neq 0$$
  2. 接触间断 $v_n = 0, B_n \neq 0$
  $$\{\boldsymbol{v}_t\} = 0, \{\boldsymbol{B}_t\} = 0, \{p\} = 0, \{\rho\} \neq 0$$
  3. 旋转间断 $v_n \neq 0, \{\rho\} = 0$

     利用相容性条件可得 $\boldsymbol{v}_{t_2} - \dfrac{\boldsymbol{B}_{t_2}}{\sqrt{\mu_0\rho}} = \boldsymbol{v}_{t_1} - \dfrac{\boldsymbol{B}_{t_1}}{\sqrt{\mu_0\rho}} = \boldsymbol{u}$，选择以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的坐标系，在该坐标系中 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}, {v_n}' = v_n, {\boldsymbol{v}_t}' = \dfrac{\boldsymbol{B}_t}{\sqrt{\mu_0\rho}}$，故
  $$\{B'\} = 0, \{{v_n}'\} = 0, \boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{\mu_0\rho}}$$
  4. MHD 激波 $v_n \neq 0, \{\rho\} \neq 0$
     - 正激波（垂直激波）$\{\boldsymbol{v}_t\} = 0, B_n = 0$
     - 斜激波 $\{\boldsymbol{v}_t\} \neq 0, B_n \neq 0$

MHD 激波–垂直激波 1



- 上游区： $p_1, \rho_1, \boldsymbol{B} = \{0, B_1, 0\}, \boldsymbol{v} = \{v_1, 0, 0\}$
  下游区： $p_2, \rho_2, \boldsymbol{B} = \{0, B_2, B_z\}, \boldsymbol{v} = \{v_2, 0, 0\}$
  由电场切向分量连续相容性条件得： $B_z = 0$
- 代入其他相容性条件，得

$$\begin{cases} \rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 \\ p_2 + B_2^2/(2\mu_0) + \rho_2 v_2^2 = p_1 + B_1^2/(2\mu_0) + \rho_1 v_1^2 \\ \varepsilon_2 + \dfrac{p_2}{\rho_2} + \dfrac{B_2^2}{\mu_0 \rho_2} + \dfrac{1}{2} v_2^2 = \varepsilon_1 + \dfrac{p_1}{\rho_1} + \dfrac{B_1^2}{\mu_0 \rho_1} + \dfrac{1}{2} v_1^2 \quad (*) \\ B_2 v_2 = B_1 v_1 \end{cases}$$

- 定义无量纲量 $X=\rho_2/\rho_1, M_1=v_1/c_{s1}, \beta_1=2\mu_0 p_1/B_1^2=\dfrac{2c_{s1}^2}{\gamma v_{a1}^2}$，有

$$\begin{aligned} v_2/v_1 &= X^{-1} \\ B_2/B_1 &= X \\ p_2/p_1 &= \gamma M_1^2(1-X^{-1})+\beta_1^{-1}(1-X^2)+1 \end{aligned}$$

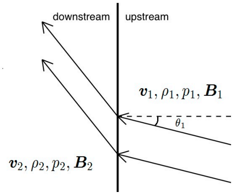
代入 (*) 可得 $(X-1)f(X)=0$，其中
$f(X)=2(2-\gamma)X^2+[2(\beta_1+1)+(\gamma-1)\beta_1 M_1^2]\gamma X-\gamma(\gamma+1)\beta_1 M_1^2$

1. $X=1$，无间断情形
2. $f(X)=0$，激波解要求有一解 $X\geq 1$，则 $f(1)\leq 0$，故有

$$M_1^2\geq 1+2/(\gamma\beta_1)=1+v_{a1}^2/c_{s1}^2\rightarrow v_1\geq\sqrt{c_{s1}^2+v_{a1}^2}=v_{fm1}$$

$$X=\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}-\frac{2}{\beta_1\gamma}\frac{(2-\gamma)X^2+\gamma X}{2+(\gamma-1)M_1^2}$$

- 对于相同的 M_1，有 $X_{\mathrm{MHD}}<X_{\mathrm{HD}}$
- $\beta_1\rightarrow\infty$，退化到流体力学激波，$X\rightarrow X_{\mathrm{HD}}$
- $M_1\rightarrow\infty$，强激波情形，$X\rightarrow(\gamma+1)/(\gamma-1)$，故 $1<\dfrac{B_2}{B_1}<\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}$



相容性条件

$$
\begin{cases}
\rho_2 v_{2x} = \rho_1 v_{1x} \\
p_2 + \dfrac{B_2^2}{2\mu_0} - \dfrac{B_{2x}^2}{\mu_0} + \rho_2 v_{2x}^2 = p_1 + \dfrac{B_1^2}{2\mu_0} - \dfrac{B_{1x}^2}{\mu_0} + \rho_1 v_{1x}^2 \\
\rho_2 v_{2x} v_{2y} - \dfrac{B_{2x} B_{2y}}{\mu_0} = \rho_1 v_{1x} v_{1y} - \dfrac{B_{1x} B_{1y}}{\mu_0} \\
(p_2 + \dfrac{B_2^2}{2\mu_0}) v_{2x} - \dfrac{B_{2x}(\boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2)}{\mu_0} + (\rho_2 \varepsilon_2 + \dfrac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \dfrac{B_2^2}{2\mu_0}) v_{2x} = \\
(p_1 + \dfrac{B_1^2}{2\mu_0}) v_{1x} - \dfrac{B_{1x}(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1)}{\mu_0} + (\rho_1 \varepsilon_1 + \dfrac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \dfrac{B_1^2}{2\mu_0}) v_{1x} \\
B_{2x} = B_{1x} \\
v_{2x} B_{2y} - v_{2y} B_{2x} = v_{1x} B_{1y} - v_{1y} B_{1x}
\end{cases}
$$

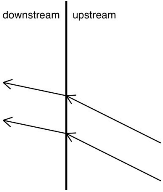
- 选择一运动坐标系（de Hoffmann & Teller 坐标系），该坐标系以 $v_{1x}B_{1y}/B_{1x}$ 沿 $-y$ 轴运动，则在这样的坐标系中有 $v_{1y}=v_{1x}B_{1y}/B_{1x}$，故
$$v_{2x}B_{2y}-v_{2y}B_{2x}=v_{1x}B_{1y}-v_{1y}B_{1x}=0$$
即上下游均有 $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{B}$，电场切向分量相容性条件消失
进一步，能量守恒相容性条件退化为流体力学形式
$$\frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2}+\frac{1}{2}v_2^2=\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1}+\frac{1}{2}v_1^2$$
- 定义 $X=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}, c_{s1}=\sqrt{\gamma\dfrac{p_1}{\rho_1}}, v_{a1}=\dfrac{B_1}{\sqrt{\mu_0\rho_1}}$，代入相容性条件，有
$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}}=X^{-1}$$
$$\frac{v_{2y}}{v_{1y}}=\frac{v_1^2-v_{a1}^2}{v_1^2-Xv_{a1}^2}$$
$$\frac{B_{2x}}{B_{1x}}=1$$
$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}}=\frac{(v_1^2-v_{a1}^2)X}{v_1^2-Xv_{a1}^2}$$
$$\frac{p_2}{p_1}=X+\frac{(\gamma-1)Xv_1^2}{2c_{s1}^2}\left(1-\frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

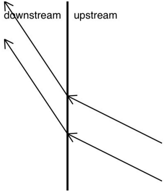
MHD 激波–斜激波 3

- X 满足

$$(v_1^2 - Xv_{a1}^2)^2\{Xc_{s1}^2 + \frac{1}{2}v_1^2\cos^2\theta[X(\gamma-1)-(\gamma+1)]\}+ \\ \frac{1}{2}v_{a1}^2 v_1^2\sin^2\theta X\{[\gamma+X(2-\gamma)]v_1^2 - Xv_{a1}^2[(\gamma+1)-X(\gamma-1)]\} = 0 \quad (*$$

1. 线性波：$X \to 1$，$(v_1^2 - v_{a1}^2)[v_{1x}^4 - (c_{s1}^2 + v_{a1}^2)v_{1x}^2 + c_{s1}^2 v_{a1}^2\cos^2\theta] = 0$
   三种模式：Alfvén 波 + 快慢磁声波
2. 激波：$X > 1$，有 $p_2 > p_1$，同时要求 $B_{2y}/B_{1y} > 0$
   1. $v_1^2 \le v_{a1}^2 (< Xv_{a1}^2)$，有 $B_2 < B_1$：慢激波（左）
   2. $v_1^2 \ge Xv_{a1}^2 (> v_{a1}^2)$，有 $B_2 > B_1$：快激波（右）





$\theta \to \pi/2$，快激波 $\to$ 垂直激波，慢激波 $\to$ 切向间断

MHD 激波–斜激波 4

- 对于慢激波，当 $v_1 = v_{a1}$ 且 $X \neq 1$，有 $B_{2y} = 0$（只要 $B_{1y} \neq 0$）该慢激波称消去（switch-off）激波，此时 (*)→
$(2c_{s1}^2/v_{a1}^2 + \gamma - 1)X^2 - [2c_{s1}^2/v_{a1}^2 + \gamma(1+\cos^2\theta)]X + (\gamma+1)\cos^2\theta = 0$
方程必有一根 $X > 1$
- 当 $\theta = 0$，(*)→ $(v_1^2 - Xv_{a1}^2)^2\{Xc_{s1}^2 + \frac{1}{2}v_1^2[X(\gamma-1) - (\gamma+1)]\} = 0$
  1. $\{\ \} = 0 \to X = \dfrac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}$，此时（慢）激波退化为 HD 激波
  2. $v_1^2 = Xv_{a1}^2$，$X > 1$ 要求 $v_1 > v_{a1}$，此时快激波称诱生（switch-on）激波，有 $B_{2y}^2/B_{2x}^2 = (X-1)[(\gamma+1) - (\gamma-1)X - 2c_{s1}^2/v_{a1}^2]$，则
$$1 < X \leq \frac{\gamma + 1 - 2c_{s1}^2/v_{a1}^2}{\gamma - 1}$$
上式要求 $v_{a1} > c_{s1}$，即诱生激波只存在于上游 Alfvén 速度大于声速的等离子体中！

Magnetohydrodynamics (MHD)

等离子体宏观不稳定性

引言

- 等离子体不稳定性
  - 定义：以集体运动的方式，趋向于热力学平衡的能量转换过程
  - 数学表述：$\dfrac{dx}{dt} = \gamma x$，$\gamma$ 为不稳定性增长率
  - 分类
    - 宏观不稳定性（MHD 不稳定性）
    - 微观不稳定性（动力学不稳定性）
  - 重要作用
    1. 爆发现象
    2. 反常输运
    3. 波动
    4. 湍流
- 等离子体宏观不稳定性
  - 分类
    - “狭义” MHD 不稳定性（电导率无穷大）
    - 电阻不稳定性（考虑有限电阻）
  - 研究方法
    1. 直观分析法
    2. 简正模分析法
    3. 能量原理

简正模分析法 1

- 所有扰动量 $q(\boldsymbol{r},t)$ 表为傅里叶分量形式

$$q(\boldsymbol{r},t) \to q(\boldsymbol{k},\omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\},\ \omega(k)=\omega_r(k)+i\gamma(k)$$

代入线性化 MHD 方程，得色散关系 $D(\omega,k)=0$，从中解得 ω:
  - 所有 ω 为实数，扰动量作简谐振荡 → 波或振荡
  - 有一 ω 有正虚部（$\gamma(k)>0$），扰动量随时间按 $e^{\gamma t}$ 增长 → 不稳定性
- 基本方程组（电中性、无耗散、各向同性、电导率无穷大）

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0\\
&\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla p+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\\
&\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma})=0\\
&\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0\\
&\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}
\quad\to\quad
\begin{aligned}
&\nabla p_0=\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_0\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{j}_0\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0=0
\end{aligned}$$

平衡状态: $\boldsymbol{v}=0,\boldsymbol{E}=0,\rho=\rho_0,p=p_0,\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_0,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0$

简正模分析法 2

- 扰动方程组，引入小扰动

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1, \rho=\rho_0+\rho_1$$
$$p=p_0+p_1, \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_0+\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1$$

线性化方程组，得

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}=-\nabla p_1+\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{j}_1\times\boldsymbol{B}_0$$
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{v}_1)=0$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=-\gamma p_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)p_0$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}_1=\nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}\right)=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)$$

整理得速度扰动方程

$$\rho_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2}=\gamma\nabla(p_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)+\nabla[(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)p_0]+\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0\times[\nabla\times\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)]$$

简正模分析法 3

- 引入相对于平衡位置的位移量 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}_0, t)$，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\xi}$，则扰动速度

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$$

于是有

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) \\ p_1 &= -\gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 \\ \boldsymbol{B}_1 &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0) \end{aligned}$$

故扰动位移方程 $\rho_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$，其中

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) + \gamma \nabla (p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B}_1 - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_1)$$

- 边界条件，考虑等离子体–真空情形
  - 总压强连续

$$-\gamma p_0(\boldsymbol{r}_0)\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\frac{\boldsymbol{B}_{0i}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{B}_{1i}(\boldsymbol{r}_0)}{\mu_0}+\frac{\xi_n}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial n}B_{0i}^2(\boldsymbol{r}_0)=\frac{\boldsymbol{B}_{0e}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{B}_{1e}(\boldsymbol{r}_0)}{\mu_0}+\frac{\xi_n}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial n}B_{0e}^2(\boldsymbol{r}_0)$$

  - 电场切向分量连续

$$\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E}_1=v_{1n}\boldsymbol{B}_{0e}\ \text{or}\ \boldsymbol{B}_{1e}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{0e})\ \text{or}\ \boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{A}=-\xi_n\boldsymbol{B}_{0e}$$

- 将 $\boldsymbol{\xi}$ 写成所有可能简正方式的和 $\boldsymbol{\xi}=\sum_n\boldsymbol{\xi}_n(\boldsymbol{r}_0,\omega_n)\exp\{-i\omega_n t\}$，有

$$-\rho_0\omega_n^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$$

只要出现一个 ω_n^2 为负，就会发生不稳定性

能量原理

- 破坏平衡的条件：对于某一位移，系统的位能的变化为负
- 孤立系统总能量

$$\int d\tau(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}+\frac{B^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0 E^2}{2})=T+W=\text{const}$$

系统微扰 $\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}_0)$ 后，封闭系统中总能量变化率为 0，有

$$\frac{1}{2}\int \rho_0\dot{\boldsymbol{\xi}}^2 d\tau+\delta W=\text{const}\to\int \rho_0\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\xi}}d\tau+\frac{d}{dt}(\delta W)=0\to$$

$$\int \dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})d\tau+\frac{d}{dt}(\delta W)=0\to\delta W=-\frac{1}{2}\int d\tau\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$$

代入 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 表达式可得 $\delta W=\delta W_p+\delta W_s+\delta W_v$，其中

$$\delta W_p=\frac{1}{2}\int_{V_i}\left\{\frac{B_1^2}{\mu_0}-p_1\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_1)\right\}d\tau$$

$$\delta W_s=\frac{1}{2}\int_{S_0}\xi_n^2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{B_{0e}^2}{2\mu_0}-\frac{B_{0i}^2}{2\mu_0}-p_0\right)dS$$

$$\delta W_v=\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_e}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2d\tau=\int_{V_e}\frac{B_1^2}{2\mu_0}d\tau$$

δW_p：内部能量变化；δW_s：边界面做功；δW_v：外部能量增加

- $\delta W_p+\delta W_s>0$，系统肯定稳定
- 稳定条件：对于所有满足边条的 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{A}$，有 $(\delta W)_{\min}>0$

电流不稳定性–直观分析

1. “腊肠”不稳定性（Sausage Instability）

   平衡条件 $p+\dfrac{B_z^2}{2\mu_0}=\dfrac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}$，发生小扰动（$a\to a-\delta a$）后

   - 等离子柱外

     $$B'_{\theta a}=\frac{\mu_0 I_p}{2\pi(a-\delta a)}\approx\frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}(1+\delta a/a)=B_{\theta a}(1+\delta a/a),\ \Delta P_{m\theta}=\frac{B'^2_{\theta a}}{2\mu_0}-\frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}\approx\frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0}\frac{\delta a}{a}$$

   - 等离子柱内

     $$B'_z=\frac{\pi a^2}{\pi(a-\delta a)^2}B_z\approx B_z(1+2\frac{\delta a}{a}),\ \Delta P_{mz}\approx\frac{B_z^2}{\mu_0}\frac{2\delta a}{a}$$

   稳定要求 $\Delta P_{mz}>\Delta P_{m\theta}$，即 $B_z^2>\dfrac{B_\theta^2}{2}$

2. 扭曲不稳定性（Kink Instability）

   等离子体柱产生扭曲后

   - 恢复力 $F_z=\dfrac{B_z^2}{2\mu_0}\pi a^2 2\sin\alpha\approx\dfrac{B_z^2}{\mu_0}\pi a^2\alpha=\dfrac{B_z^2}{2\mu_0}\pi a^2\dfrac{\lambda}{R}$
   - 弯曲力 $F_\theta=2\sin\alpha\displaystyle\int_a^\lambda\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}2\pi r dr\approx\frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0}\pi a^2\frac{\lambda}{R}\ln\frac{\lambda}{a}$

   稳定要求 $F_z>F_\theta$，即 $\dfrac{B_z^2}{B_{\theta a}^2}>2\ln\dfrac{\lambda}{a}$，同时 $\dfrac{B_z^2}{B_{\theta a}^2}<1$，有 $\ln\dfrac{\lambda}{a}<1/2$

3. 螺旋不稳定性（Screw Instability）

   稳定条件 $\left|\dfrac{B_\theta}{B_z}\right|<\dfrac{2\pi a}{L}$

- 柱对称，$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\xi}(r)\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$
  选择 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=0$（不可压）
- 面电流情况下，柱内无角向磁场，只有轴向均匀附加磁场 $\boldsymbol{B}_i$，气压 p 为常数，于是柱内扰动位移方程

$$\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2}=-\nabla\left(p_1+\frac{\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{B}_{1i}}{\mu_0}\right)+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{1i}$$

  $\boldsymbol{B}_{1i}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_i)=(\boldsymbol{B}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}=ikB_i\boldsymbol{\xi}$，故

$$\left(-\omega^2\rho_0+\frac{k^2B_i^2}{\mu_0}\right)\boldsymbol{\xi}=-\nabla\left(p_1+\frac{\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{B}_{1i}}{\mu_0}\right)=-\nabla\widetilde{p}$$

  两边取散度，有 $\nabla^2\widetilde{p}=0\rightarrow\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\left(k^2+\frac{m^2}{r^2}\right)\right]\widetilde{p}(r)=0$

  解得 $\widetilde{p}(r)=\widetilde{p}(a)\dfrac{I_m(kr)}{I_m(ka)}$，故 $\xi_r(a)=\dfrac{k\widetilde{p}(a)}{\omega^2\rho_0-k^2B_i^2/\mu_0}\dfrac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}$ (1)
- 柱外真空，存在均匀的纵向磁场和柱面电流产生的角向磁场。
  $\boldsymbol{j}_e\equiv0$，故 $\nabla\times\boldsymbol{B}_{1e}=0$；引入磁势 ψ，$\boldsymbol{B}_{1e}=\nabla\psi$，$\psi$ 满足

$$\nabla^2\psi=0$$

  解得 $\psi(\boldsymbol{r},t)=c\dfrac{K_m(kr)}{K_m(ka)}\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$

电流不稳定性–简正模分析 2

考虑柱面上（$r=a$）边界条件

- 总压强连续 $\dfrac{\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{B}_{1i}}{\mu_0}=\widetilde{p}=\dfrac{\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{B}_{1e}}{\mu_0}+\dfrac{\xi_r}{2\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial r}B_e^2$，其中

$$\left.\frac{\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{B}_{1e}}{\mu_0}\right|_{r=a}=\frac{i}{\mu_0}c(kB_{ez}+\frac{m}{a}B_\theta(a))\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$$
$$\left.\frac{\xi_r}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}B_e^2\right|_{r=a}=-\frac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a}\xi_r(a)\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$$

故 $\widetilde{p}(a)=\dfrac{ic}{\mu_0}(kB_{ez}+\dfrac{m}{a}B_\theta(a))-\dfrac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a}\xi_r(a)\quad(2)$

- 电场切向分量连续（$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_{1e}=\boldsymbol{n}_0\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_e)]$）
其中 $\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{B}_e=\boldsymbol{B}_{ez}+\boldsymbol{B}_\theta, \boldsymbol{B}_{1e}=\nabla\psi$，可得

$$i(kB_{ez}+\frac{m}{a}B_\theta(a))\xi_r(a)=ck\frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)}\quad(3)$$

电流不稳定性–简正模分析 3

- 联立 (1)、(2)、(3)，可得关于 $\xi_r(a), \widetilde{p}(a), c$ 的线性齐次代数方程组非零解要求

$$\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{k}{\omega^2\rho_0 - k^2 B_i^2/\mu_0}\dfrac{I_m'(ka)}{I_m(ka)} & 0 \\ \dfrac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a} & 1 & -\dfrac{i}{\mu_0}(kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta(a)) \\ i(kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta(a)) & 0 & -k\dfrac{K_m'(ka)}{K_m(ka)} \end{vmatrix} = 0$$

- 展开系数行列式，得色散关系

$$\rho_0\mu_0\omega^2 = B_i^2k^2 - (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta)^2\frac{I_m'(ka)}{I_m(ka)}\frac{K_m(ka)}{K_m'(ka)} - k\frac{B_\theta^2}{a}\frac{I_m'(ka)}{I_m(ka)} \quad (*)$$

电流不稳定性–简正模分析 4

- 稳定要求 $\omega^2 > 0$，讨论色散关系等式右边三项
  - 第一项 > 0，柱内轴向磁场总是起致稳作用
  - $\dfrac{I'_m}{I_m} > 0, \dfrac{K_m}{K'_m} < 0$，故第二项 ≥ 0，一般也起致稳作用，其作用来源于柱外磁力线的张力，除非当 $kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta = 0$，此项消失
  - 第三项 < 0，柱外角向磁场总是产生不稳定因素
- 对于 $kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta = 0$ 情形，考虑到扰动波矢 $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z + \dfrac{m}{a}\boldsymbol{e}_\theta$，有 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_e = 0$，即扰动传播与磁场垂直时，磁场便不再阻碍扰动发展
  引入磁螺距 ζ_B 和扰动螺距 ζ，在柱面上
  $$\zeta_B = 2\pi a \frac{B_z}{B_\theta}, \quad \zeta = \frac{2\pi m}{k}$$
  当 $|\zeta_B| = \zeta$，即 $kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta = 0$ 时，扰动不引起磁力线畸变，不稳定性最容易发生，此类不稳定性称作螺旋不稳定性

电流不稳定性–简正模分析 5

柱外无纵向磁场，$B_{ez}=0$

- $m=0$ 模（“腊肠”模）: $\omega^2=\dfrac{B_i^2k^2}{\mu_0\rho_0}\left[1-\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}\dfrac{I_0'(ka)}{kaI_0(ka)}\right]$

  由于 $\left[\dfrac{I_0'(x)}{xI_0(x)}\right]_{\max}=\dfrac{1}{2}$，故只要 $\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}<2$，便能保证 $\omega^2>0$

- $m=1$ 模（Kink 模）: $\omega^2=\dfrac{B_i^2k^2}{\mu_0\rho_0}\left[1+\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}\dfrac{I_1'(ka)}{kaI_1(ka)}\dfrac{K_0(ka)}{K_1'(ka)}\right]$
  - 短波扰动 $ka\gg1$，可能有 $\omega^2>0$，等离子体柱稳定
  - 长波扰动 $ka\ll1$，将有 $\omega^2<0$，等离子体柱不稳定

  当 $ka\to0$ 时，$\omega^2=\dfrac{B_i^2k^2}{\mu_0\rho_0}\left[1-\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}\ln(\dfrac{1}{ka})\right]$，对于长波扰动不稳定

柱外纵向磁场远大于角向磁场，$B_{ez} \gg B_\theta$

- 考虑长波极限 $ka \ll 1$，有 $\mu_0\rho_0\omega^2 = B_i^2 k^2 + (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta)^2 - \frac{m}{a^2}B_\theta^2$

  求 ω^2 极小值，由 $\frac{\partial\omega^2}{\partial k} = 0$，得 $\omega^2_{\min} = \frac{B_\theta^2}{\mu_0\rho_0 a^2}(\frac{m^2 B_i^2}{B_{ez}^2 + B_i^2} - m)$

  定义 $\beta = 2\mu_0 p/(B_{ez}^2 + B_\theta^2)$，由平衡条件得 $1 - \beta \approx \frac{B_i^2}{B_{ez}^2}$，故而

  $$\omega^2_{\min} = \frac{B_\theta^2}{\mu_0\rho_0 a^2} m(m\frac{1-\beta}{2-\beta} - 1)$$

  当 $0 < m < \frac{2-\beta}{1-\beta}$ 时，$\omega^2_{\min} < 0$，小 β，$m = 1$ 的模不稳定

考虑沿轴向均匀流动 $\boldsymbol{v}=v_0\boldsymbol{e}_z$，仿照之前讨论，可得色散关系

$$\left[-v_A^2+v_s^2/\left(\frac{k^2v_s^2}{\omega_1^2}-1\right)\right]KJ_m(Ka)=$$

$$\frac{1}{\mu_0\rho_0}\left[\frac{m}{a}B_{e\theta}(a)+kB_{ez}\right]^2\frac{K_m(ka)J_m'(Ka)}{kK_m'(ka)}+\left(1+\frac{kv_0}{\omega_1-kv_0}\right)\frac{B_{e\theta}^2(a)J_m'(Ka)}{\mu_0a\rho_0},$$

其中

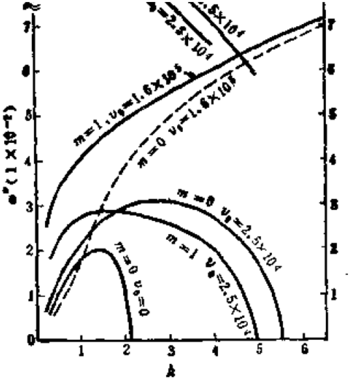
$$K^2=\frac{\omega_1^2(1-k^2v_s^2/\omega_1^2)(1-k^2v_A^2/\omega_1^2)}{(v_A^2+v_s^2-v_A^2v_s^2k^2/\omega_1^2)},$$

这里 $v_A=B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}, v_s=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}, \omega_1=\omega+kv_0$。

- 与之前区别
  - 增加一项 $kv_0/(\omega_1-kv_0)$
  - $\omega\to\omega_1$
  - $I_m\to J_m$
- 当 $v_0=0$，同时考虑不可压缩流体，色散关系回退到之前形式 $(*)$

电流不稳定性–有流动情况 2

代入太阳活动区特征参数，求解色散关系得 $\omega = \omega' - i\omega''$，考虑 v_0 对不稳定性（$\omega'' > 0$）作用



结论：v_0 的存在将加剧不稳定性的发生！

HD 情况下的 Rayleigh-Taylor（RT）不稳定性 1

- 重力场下平衡的两种流体：$z>0,\rho_1$；$z<0,\rho_2$，基本方程

$$\begin{cases} \rho_i\dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + \rho_i\boldsymbol{g} \\ \dfrac{\partial\rho_i}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_i\boldsymbol{v}_i) = 0 \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

小扰动 ($\boldsymbol{v}$ 小)，流体不可压，同时认为流体均质，故 ρ 为常数；同时 $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \approx \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$；重力场中 $\boldsymbol{g} = -\nabla(gz)$，对运动方程两边取旋度可得 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，故速度有势：$v=\nabla\phi$。代入基本方程

$$\begin{cases} \rho_i\dfrac{\partial\phi_i}{\partial t} + \rho_i gz + p_i = 0 \\ \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

- 边界条件

1. $p_1=p_2$：$\rho_1\left(\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + g\dfrac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = \rho_2\left(\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + g\dfrac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}$
2. $v_{1z}=v_{2z}$：$\dfrac{\partial\phi_1}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = \dfrac{\partial\phi_2}{\partial z}\Bigg|_{z=0}$

- 考虑平面波解

$$\begin{cases} \phi_1 = A_1(z)\exp\{i(\omega t - kx)\} \\ \phi_2 = A_2(z)\exp\{i(\omega t - kx)\} \end{cases}$$

代入 Laplace 方程，有 $\dfrac{d^2A_i(z)}{dz^2} - k^2A_i(z) = 0 \ (i = 1, 2)$

由无穷远处边条 $z \to \infty, A_1 = 0$ 和 $z \to -\infty, A_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} A_1(z) = c_1\exp\{-kz\} \\ A_2(z) = c_2\exp\{kz\} \end{cases} \to \begin{cases} \phi_1 = c_1\exp\{-kz + i(\omega t - kx)\} \\ \phi_2 = c_2\exp\{kz + i(\omega t - kx)\} \end{cases}$$

代入速度连续边条得 $c_1 = -c_2$

结果再代入压力连续边条，得色散关系

$$\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)kg}$$

  - $\rho_2 > \rho_1$，ω 为实数，振幅与时间无关，稳定
  - $\rho_2 < \rho_1$，ω 为虚数，振幅随时间无限增大，平衡破坏，直到上下流体互换位置（RT 不稳定性、“互换不稳定性”）
    发生不稳定性时，$\gamma \propto \sqrt{k}$，短波扰动增长快

MHD 情况下的 RT 不稳定性 1

- 基本位型：密度存在梯度 $\nabla\rho_0(z)$，磁场在 xoy 平面中，随 z 轴有
$$\boldsymbol{B}_0(z) = B_{ox}(z)\boldsymbol{e}_x + B_{0y}(z)\boldsymbol{e}_y$$
重力加速度沿 z 轴向下，平衡时有 $\dfrac{d}{dz}\left(p_0 + \dfrac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\rho_0 g$

- 速度扰动方程

$$\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} = \nabla[(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)p_0] + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{R} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)(\rho_0\boldsymbol{g})$$
$$(\boldsymbol{R} = \nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0) = \frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t})$$

假定 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r},t) = [v_{1x}(z)\boldsymbol{e}_x + v_{1y}(z)\boldsymbol{e}_y + v_{1z}(z)\boldsymbol{e}_y]\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\}$

再假定扰动在 xoy 平面传播，即 $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{e}_x + k_y\boldsymbol{e}_y$，$k^2 = k_x^2 + k_y^2$

代入 $\boldsymbol{R}$ 中有

$$R_x = i(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})v_{1x} - v_{1z}\frac{dB_{ox}}{dz}$$
$$R_y = i(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})v_{1y} - v_{1z}\frac{dB_{oy}}{dz}$$
$$R_z = i(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})v_{1z}$$

而流体不可压有

$$ik_xv_{1x} + ik_yv_{1y} + \frac{dv_{1z}}{dz} = 0$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 2

- 将 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{k}$ 代入扰动方程，有

$$-\omega^2\rho_0 v_{1x} = ik_x v_{1z}\frac{dp_0}{dz} + \frac{1}{\mu_0}\frac{dB_{0x}}{dz}R_z - \frac{i}{\mu_0}B_{0y}(k_xR_y - k_yR_x) \quad (1)$$

$$-\omega^2\rho_0 v_{1y} = ik_y v_{1z}\frac{dp_0}{dz} + \frac{1}{\mu_0}\frac{dB_{0y}}{dz}R_z + \frac{i}{\mu_0}B_{0x}(k_xR_y - k_yR_x) \quad (2)$$

$$-\omega^2\rho_0 v_{1z} = \frac{d}{dz}(v_{1z}\frac{dp_0}{dz}) - \frac{1}{\mu_0}\frac{d}{dz}(B_{0y}R_y + B_{0x}R_x)$$
$$+\frac{i}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)R_z + v_{1z}\frac{d\rho_0}{dz}g \quad (3)$$

- $B_{0x}\times(1) + B_{0y}\times(2)$，有

$$-\omega^2\rho_0(B_{0x}v_{1x} + B_{0y}v_{1y}) = i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)v_{1z}\frac{dp_0}{dz} + R_z\frac{d}{dz}\left(\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)$$

故 $B_{0x}v_{1x} + B_{0y}v_{1y} = -\frac{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)v_{1z}}{\omega^2\rho_0}\frac{d}{dz}(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0}) = \frac{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}{\omega^2}gv_{1z}$ (4)

- $ik_x\times(1) + ik_y\times(2)$，有

$$\omega^2\rho_0\frac{dv_{1z}}{dz} = -k^2v_{1z}\frac{dp_0}{dz} - v_{1z}\frac{d}{dz}\left[\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{2\mu_0}\right]$$
$$+\frac{1}{\mu_0}(k_xB_{0y} - k_yB_{0x})(k_xR_y - k_yR_x)$$

整理可得 $\left[\omega^2\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0}\right]\left(\frac{dv_{1z}}{dz} - \frac{k^2}{\omega^2}gv_{1z}\right) = 0 \quad (5)$

- 由（5）可得
  1. $\omega^2 = \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\rho_0} = \frac{B_0^2 k^2\cos^2\theta}{\mu_0\rho_0}$：斜 Alfvén 波
  2. $\frac{dv_{1z}}{dz} - \frac{k^2}{\omega^2} g v_{1z} = 0$ (6)：可能发生不稳定性的模式
- 讨论（6）式对应模式
  - 将 R_x, R_y 代入（3）等式右边第二项，有

$$B_{0y}R_y + B_{0x}R_x = -\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\omega^2} g v_{1z} - v_{1z}\frac{d}{dz}\left(\frac{B_0^2}{2}\right)$$

  - 上式代入（3）式，并利用平衡条件，有

$$-\frac{d}{dz}\left\{\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right] g v_{1z}\right\} + \left\{g\frac{d\rho_0}{dz} + \omega^2\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\right\} v_{1z} = 0$$

$k^2/\omega^2\times$ 上式，并将（6）式代入，有

$$\frac{d}{dz}\left\{\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\frac{dv_{1z}}{dz}\right\} - \frac{k^2}{\omega^2}\left\{g\frac{d\rho_0}{dz} + \omega^2\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\right\} v_{1z} =$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 4

- 锐边界情形

$$\rho_0(z) \approx \begin{cases} \rho_1 & (z>0) \\ \rho_2 & (z<0) \end{cases}, \quad \frac{d\rho_0(z)}{dz} = (\rho_1-\rho_2)\delta(z)$$

  - 边界面附近，对（*）式从 0^- 积分至 0^+，有

$$\left[\rho_1 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1^2}{\mu_0\omega^2}\right]\left(\frac{dv_{1z}}{dz}\right)_{0^+} - \left[\rho_2 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2^2}{\mu_0\omega^2}\right]\left(\frac{dv_{1z}}{dz}\right)_{0^-} - \frac{gk^2}{\omega^2}(\rho_1-\rho_2)v_{1z}(0) = 0 \quad (7)$$

  - 边界面以外，$\rho_0, \boldsymbol{B}_0$ 变化很缓慢，（*）式变为

$$\frac{d^2v_{1z}}{dz^2} - k^2 v_{1z} = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{1z} = v_{1z}(0)\exp(-kz) & (z \geq 0) \\ v_{1z} = v_{1z}(0)\exp(kz) & (z<0) \end{cases}$$

  由此得 $\left(\dfrac{dv_{1z}}{dz}\right)_{0^\pm} = \mp k v_{1z}(0) \quad (8)$

联立（7）、（8）可得色散关系

$$\omega^2 = \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{01})^2 + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{02})^2}{\mu_0(\rho_1+\rho_2)} - gk\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \quad (9)$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 5

1. 当 $\boldsymbol{B}_{01}=0, \boldsymbol{B}_{02}=0$，即无磁场时，$\omega^2=-gk\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\rightarrow$ HD 情形
2. $\dfrac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{01})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{02})^2}{\mu_0(\rho_1+\rho_2)}\geq 0$，磁场总是起致稳作用，除非 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0=0$，此时扰动不改变磁场的分布
3. 当 $\rho_1=\rho, \rho_2=0$，即等离子体受磁场支撑时
$$\omega^2=\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{01})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{02})^2}{\mu_0\rho}-gk$$
4. 当磁场具有剪切时
设真空磁场 $\boldsymbol{B}_{02}=(\alpha_x B_0, \alpha_y B_0, 0)$，其中 $\alpha_x^2+\alpha_y^2=1$;
等离子中磁场 $\boldsymbol{B}_{01}=(\gamma_x B_0, \gamma_y B_0, 0)$；再设 $v_A=B_0/\sqrt{\mu_0\rho}$
色散关系变为 $\omega^2=[(k_x\alpha_x+k_y\alpha_y)^2+(k_x\gamma_x+k_y\gamma_y)^2]v_A^2-gk$
压力平衡要求 $p_0+\dfrac{(\gamma_x^2+\gamma_y^2)B_0^2}{2\mu_0}=\dfrac{B_0^2}{2\mu_0}$
简化问题，假定 $\boldsymbol{B}_{01}\perp\boldsymbol{B}_{02}$，并取 $\alpha_y=1$，于是 $\alpha_x=\gamma_y=0$
所以 $\gamma_x^2=1-\beta$ $(\beta=2\mu_0 p_0/B_0^2)$，$\omega^2=[k_x^2(1-\beta)+k_y^2]v_A^2-gk$
当 $k_y=0$，扰动沿 x 轴传播，$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{B}_{02}$，最容易发生不稳定性，稳定要求
$$\lambda_x<\lambda_c=\left(\frac{2\pi}{g}\right)(1-\beta)v_A^2=\frac{2\pi(1-\beta)B_0^2}{\mu_0\rho_0 g}$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 6

- 等离子体密度随 z 按指数变化情形，即 $\rho_0(z) = \rho_0 \exp\{cz\}$

考虑 $v_{1z} = \text{const}$，即 $\frac{dv_{1z}}{dz} = 0$, $\frac{d^2 v_{1z}}{dz^2} = 0$，（*）式变为

$$\frac{k^2}{\omega^2}\left\{g\frac{d\rho_0}{dz} + \omega^2\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\right\} v_{1z} = 0$$

$v_{1z} \neq 0$ 要求 $g\frac{d\rho_0}{dz} + \omega^2\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right] = 0$，得色散关系

$$\omega^2 = \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\rho_0} - \frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}$$

磁场仍起致稳作用，除非 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0$，此时 $\omega^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}$

- $\frac{d\rho_0}{dz} > 0$，密度梯度方向与重力方向相反，$\omega^2 < 0$，不稳定
- $\frac{d\rho_0}{dz} < 0$，密度梯度方向与重力方向一致，$\omega^2 > 0$ 稳定

重力场中等温流体静力学平衡分层大气中，$\rho(z) = \rho(0)\exp\{-\frac{z}{H}\}$，

其中 $H = \frac{kT}{mg}$，故平衡稳定

MHD 情况下的 RT 不稳定性 7

考虑重力场（$\boldsymbol{g}=-g\boldsymbol{e}_z$）中等离子体—磁场（真空）边界平衡位型: $z>0$，均匀等离子体（$\rho, \boldsymbol{B}_i=B_i\boldsymbol{e}_x$）; $z<0$，真空（$\boldsymbol{B}_e=B_e\boldsymbol{e}_x$）

- 等离子体中带电粒子在重力场和磁场作用下发生漂移
$$\boldsymbol{v}_{Dg}=\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{qB^2}=\frac{m\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{B}_i}{qB_i^2}=-\frac{mg}{qB_i}\boldsymbol{e}_y$$
- 形成电流
$$\boldsymbol{j}=nq\boldsymbol{v}_{Dg}=-\frac{nmg}{B_i}\boldsymbol{e}_y=-\frac{\rho g}{B_i}\boldsymbol{e}_y$$
- 单位体积电磁力
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}_i=\rho g\boldsymbol{e}_z=-\rho\boldsymbol{g} \quad \text{（等离子体平衡）}$$
- 边界面上引入 y 方向传播（垂直磁场）小扰动 $\xi=\xi_0\sin ky$，电流将在扰动界面上形成面电荷分布，产生 y 方向电场 $\boldsymbol{E}$。这一电场将导致边界面附近等离子体电场漂移
$$v_E=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}_i}{B_i^2}=-|E/B_i|\boldsymbol{e}_z$$
此漂移加剧扰动发展，破坏稳定！

- 基本方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i = 0 \\ \rho_i\dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\nabla p_i \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

- 引入小扰动 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_{10}+\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_{20}+\boldsymbol{v}_2',p_1=p_{10}+p_1',p_2=p_{20}+p_2'$
其中 $\boldsymbol{v}_{10}=v_{10}\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{v}_{20}=v_{20}\boldsymbol{e}_x,p_{10},p_{20}$ 均为常数，得扰动方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i' = 0 \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}_i'}{\partial t}+v_{i0}\dfrac{\partial\boldsymbol{v}_i'}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_i}\nabla p_i \end{cases} \quad (i=1,2)\rightarrow \begin{cases} \nabla^2p_1'=0 \\ \nabla^2p_2'=0 \end{cases}$$

- 设 p' 取形式 $p_i'=f_i(z)\exp\{i(\omega t-kx)\}$，代入 Laplace 方程有

$$\frac{d^2f_i}{dz^2}-k^2f_i=0$$

考虑 $|z|\rightarrow\infty$，p_i' 有限边条，有

$$\begin{cases} f_1(z)=\bar{p}_1'\exp\{-kz\} \\ f_2(z)=\bar{p}_2'\exp\{kz\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1'(x,z,t)=\bar{p}_1'\exp\{i(\omega t-kx)-kz\} \\ p_2'(x,z,t)=\bar{p}_2'\exp\{i(\omega t-kx)+kz\} \end{cases}$$

可以认为 $\boldsymbol{v}_i'$ 也有类似形式，故

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1'(x,z,t)=\bar{\boldsymbol{v}}_1'\exp\{i(\omega t-kx)-kz\} \\ \boldsymbol{v}_2'(x,z,t)=\bar{\boldsymbol{v}}_2'\exp\{i(\omega t-kx)+kz\} \end{cases}$$

- p_i', $\boldsymbol{v}_i'$ 代入扰动运动方程，取 z 分量得

$$\begin{cases} \bar{p}_1' = \dfrac{i\rho_1(\omega - kv_{10})}{k}\bar{v}_{1z}' \\ \bar{p}_2' = -\dfrac{i\rho_2(\omega - kv_{20})}{k}\bar{v}_{2z}' \end{cases} \qquad (1)$$

- 考虑扰动界面方程 $z = \xi(x,t)$，在界面上，有

$$v_z'\big|_{\rm bd} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + v_{x0}\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

取 $\xi = \bar{\xi}\exp\{i(\omega t - kx)\}$，有

$$\begin{cases} \bar{v}_{1z}'\big|_{\rm bd} = i(\omega - kv_{10})\bar{\xi} \\ \bar{v}_{2z}'\big|_{\rm bd} = i(\omega - kv_{20})\bar{\xi} \end{cases} \qquad (2)$$

- 联立（1）、（2），考虑到扰动界面上 $p_1 = p_2$，由此得色散关系

$$\rho_1(\omega - kv_{10})^2 + \rho_2(\omega - kv_{20})^2 = 0 \quad \text{or}$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{(\rho_1 v_{10} + \rho_2 v_{20}) \pm i(v_{10} - v_{20})\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

ω 总有一个非零虚部使得扰动振幅随时间指数增长，最终破坏界面，即发生 KH 不稳定性

- 方程组

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i=0 \\ \rho_i\dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\nabla p_i+\rho_i\boldsymbol{g} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_1'=0 \\ \rho_i(\dfrac{\partial\boldsymbol{v}_i'}{\partial t}+v_{i0}\dfrac{\partial\boldsymbol{v}_1'}{\partial x})=-\nabla p_i+\rho_i\boldsymbol{g} \end{cases}$$

- 运动方程求旋度，可得 $\nabla\times\boldsymbol{v}_i'=0$，故引入速度势 ϕ_i，有

$$\begin{cases} \rho_1(\dfrac{\partial\phi_1}{\partial t}+v_{10}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x})=-p_1-\rho_1 gz \\ \rho_2(\dfrac{\partial\phi_2}{\partial t}+v_{20}\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x})=-p_2-\rho_2 gz \end{cases} \text{and} \begin{cases} \nabla^2\phi_1=0 \\ \nabla^2\phi_2=0 \end{cases}$$

- 解 Laplace 方程得

$$\begin{cases} \phi_1=c_1\exp\{i(\omega t-kx)-kz\} \\ \phi_2=c_2\exp\{i(\omega t-kx)+kz\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{v}_{1z}'|_{\rm bd}=-c_1k \\ \bar{v}_{2z}'|_{\rm bd}=c_2k \end{cases}$$

同前，取扰动界面方程为 $z=\xi(x,t)=\bar{\xi}\exp\{i(\omega t-kx)\}$，故

$$\begin{cases} \bar{v}_{1z}'|_{\rm bd}=i(\omega-kv_{10})\bar{\xi} \\ \bar{v}_{2z}'|_{\rm bd}=i(\omega-kv_{20})\bar{\xi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=-i(\omega-kv_{10})\bar{\xi}/k \\ c_2=i(\omega-kv_{20})\bar{\xi}/k \end{cases}$$

- 再代入 $p_1|_{\rm bd}=p_2|_{\rm bd}$ 边条得

$$\rho_1[(\omega-kv_{10})^2+gk]=\rho_2[-(\omega-kv_{20})^2+gk]$$

由此解得色散关系

$$\omega=\frac{k(\rho_1 v_{10}+\rho_2 v_{20})\pm\sqrt{-\rho_1\rho_2k^2(v_{10}-v_{20})^2+gk(\rho_2^2-\rho_1^2)}}{\rho_1+\rho_2}$$

1. $\rho_2>\rho_1$，不稳定发生条件为 $k>\dfrac{g(\rho_2^2-\rho_1^2)}{\rho_1\rho_2(v_{10}-v_{20})^2}$，短波扰动不稳定
2. $\rho_2<\rho_1$，绝对不稳定，其增长率 $\gamma=\sqrt{\gamma_{\rm KH}^2+\gamma_{\rm RT}^2}$

- MHD 切向间断满足

  $B_n=0, v_n=0, \{\boldsymbol{v}_t\}\neq 0, \{\boldsymbol{B}_t\}\neq 0, \{\rho\}\neq 0, \{p+B_t^2/(2\mu_0)\}=0$

  故设 $\boldsymbol{v}_{i0}, \boldsymbol{B}_{i0}$ 均在 xoy 平面；显然扰动波矢也在 xoy 平面内
- 基本方程组

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \\ \rho\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla\left(p+\dfrac{B^2}{2\mu_0}\right)+\left(\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{cases}$$

- 引入小扰动 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{i0}+\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}_{i0}+\boldsymbol{B}_i', pi=p_{i0}+p_i'$，故

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i'=0 \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}_i'}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_{i0}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_i'=-\dfrac{1}{\rho_i}\nabla\left(p_i'+\dfrac{\boldsymbol{B}_{i0}\cdot\boldsymbol{B}_i'}{\mu_0}\right)+\left(\dfrac{\boldsymbol{B}_{i0}}{\mu_0\rho_i}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B}_i' \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}_i'}{\partial t}=(\boldsymbol{B}_{i0}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_i'-(\boldsymbol{v}_{i0}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_i' \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}_i'=0 \end{cases}$$

  对运动方程两边取散度，有

$$\nabla^2(p_i'+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{i0}\cdot\boldsymbol{B}_i')=0$$

MHD KH 不稳定性 2

- 同前，可以认为所有扰动量 f_i' 可取以下形式

$$f_1'(\boldsymbol{r},t)=\bar{f}_1'\exp\{i(\omega t-k_x x-k_y y)-kz\}$$
$$f_2'(\boldsymbol{r},t)=\bar{f}_2'\exp\{i(\omega t-k_x x-k_y y)+kz\}$$

代入运动、磁场方程 z 分量中，有

$$\begin{cases}\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})\bar{v}_{1z}'=-ik(\bar{p}_1'+\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_1')-\dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})\bar{B}_{1z}'\\ \rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})\bar{v}_{2z}'=ik(\bar{p}_2'+\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_2')-\dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})\bar{B}_{2z}'\\ (\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})\bar{B}_{1z}'=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})\bar{v}_{1z}'\\ (\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})\bar{B}_{2z}'=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})\bar{v}_{2z}'\end{cases}$$

消去 $\bar{B}_{1z}',\bar{B}_{2z}'$，得

$$[\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2]\bar{v}_{1z}'=-ik(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})(\bar{p}_1'+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_1')$$
$$[\rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]\bar{v}_{2z}'=ik(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})(\bar{p}_2'+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_2')\quad *$$

MHD KH 不稳定性 3

- 同前，设扰动界面方程 $\xi(x,t)=\bar{\xi}\exp\{i(\omega t-k_x x-k_y y)\}$，得
$$\bar{v}'_{iz}|_{\rm bd}=i(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{i0})\bar{\xi}$$
代入（*）式中，有
$$\begin{aligned}&[\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2]\bar{\xi}=-k(\bar{p}'_1+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_1)\\&[\rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]\bar{\xi}=k(\bar{p}'_2+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_2)\end{aligned}\qquad (*')$$
- 间断面两侧压力连续条件
$$\bar{p}'_1+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_1=\bar{p}'_2+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_2$$
代入（*′）式，有
$$[\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2]=-[\rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]$$
从中解 ω 得
$$\begin{aligned}\omega=&\frac{1}{\rho_1+\rho_2}\{[\rho_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})+\rho_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})]\\&\pm\sqrt{\frac{\rho_1+\rho_2}{\mu_0}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]-\rho_1\rho_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2}\}\end{aligned}$$
不发生 KH 不稳定性条件
$$\frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]\geq\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2$$
磁场总是起致稳作用，除非 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$

MHD KH 不稳定性 4

- 取 $\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20}$ 沿 x 方向，稳定条件变为

$$\frac{1}{\mu_0}[(B_{10x}^2+B_{20x}^2)+2\frac{k_y}{k_x}(B_{10x}B_{10y}+B_{20x}B_{20y})+(\frac{k_y}{k_x})^2(B_{10y}^2+B_{20y}^2)] \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

  - 当磁场都沿 x 轴，即 $B_{10y}=B_{20y}=0$ 时，稳定条件进一步变为

$$\frac{1}{\mu_0}(B_{10}^2+B_{20}^2) \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

    稳定与否与扰动传播方向及波长均无关，磁场致稳作用最有效
  - 当 $\boldsymbol{B}_{10}$ 和 $\boldsymbol{B}_{20}$ 的 x 分量和 y 分量均不为零时，定义

$$f(\frac{k_y}{k_x})=\frac{1}{\mu_0}[(B_{10x}^2+B_{20x}^2)+2\frac{k_y}{k_x}(B_{10x}B_{10y}+B_{20x}B_{20y})+(\frac{k_y}{k_x})^2(B_{10y}^2+B_{20y}^2)]$$

    由此得 $f_{\min}=\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{(B_{10x}B_{20y}-B_{10y}B_{20x})^2}{B_{10y}^2+B_{20y}^2}$，绝对稳定要求

$$f_{\min} \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

  - 当磁场与 $\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20}$ 垂直，即 $B_{10x}=B_{20x}=0$ 时，稳定条件

$$\frac{1}{\mu_0}(\frac{k_y}{k_x})^2(B_{10y}^2+B_{20y}^2) \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

    - $k_y=0$，磁场不起致稳作用，相当于 HD 切向间断不稳定性
    - $k_y\neq 0$，总可以找到一个传播方向，其与 x 夹角

$$\theta_c=\arctan\sqrt{\frac{\mu_0\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\frac{(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2}{B_{10y}^2+B_{20y}^2}}$$

      $\theta\geq\theta_c$ 时稳定，$\theta<\theta_c$ 时不稳定

Magnetohydrodynamics (MHD)

磁场重联

磁场湮灭–Parker-Sweet 机制

- Sweet 机制：无流动，完全依靠磁场耗散，$\tau_d = \mu_0 \sigma L^2$ 太大使得磁能转化效率太低!
- Parker-Sweet 机制：有导电流体携带磁场流入电流片（边界层），同时尽量减小电流片厚度。边界层：$L \gg \delta$，仅有电流，无磁场
  - 考虑稳定流动不可压缩流体，有 $u_{x0} L = v\delta$
  - 根据 Bernoulli 方程，有 $\dfrac{\rho v^2}{2} = p - p_0$。考虑到 u_{x0} 是小量，故沿 x 轴边界层内外压力平衡为一静力学问题，有 $p - p_0 = B_{y0}^2/(2\mu_0)$，故

$$v = \frac{B_{y0}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = v_A$$

  - 边界层中，有 $j_z = \sigma E_z$，而 $j_z = B_{y0}/(\delta \mu_0), E_z = u_{x0} B_{y0}$，故

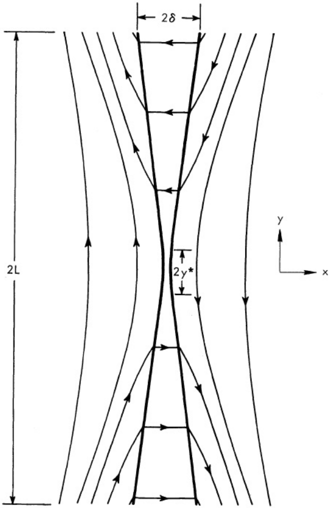
$$u_{x0} = \frac{1}{\mu_0 \sigma \delta} = \left(\frac{v_A}{\mu_0 \sigma L} \right)^{1/2}$$

  - 引入无量纲流动速度 $M_0 = u_{x0}/v_A$ 表征磁场湮灭率，有

$$M_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \sigma v_A L} = \sqrt{1/R_m}$$

大多数天体物理问题中 R_m 相当大故而磁场湮灭率仍然非常低!

磁场快速湮灭–Petschek 机制



- 相比 Parker-Sweet 机制的改进

  B_x 分量 → 向两侧传播的 Alfvén 波 → 部分磁能通过波转化，转化速率取决于波速（与电导率无关！）
- 磁场拓扑
  - o 点附近：$B_x = 0$，扩散主导（同 Sweet-Parker 机制）
  - 远离 o 点：B_x 逐渐增加，波逐渐占主导
- 两个区域
  - 边界层：反向磁场的边界附近，磁场与远离边界处有量级上的差别
  - 外部流动区：磁场、流场有微小畸变，离边界层越近畸变越大

Petschek 机制–边界层

作零级近似，边界层边缘处流动与无穷远处流动相同

- 边界层中质量守恒 $u_{x0}y = v(y)\delta(y)$；

  流体元上受磁张力为 $-\dfrac{B_{y0}B_x}{\mu_0}\mathbf{y}_1$，故 $\dfrac{d}{dy}(\rho v^2\delta) = -\dfrac{B_{y0}B_x}{\mu_0}$。

  令 $b_x = B_x/B_{y0}, M_0 = u_{x0}/v_A, v_A = B_{y0}/\sqrt{\mu_0\rho}$，则

$$M_0^2\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{\delta}\right) = -b_x$$

  - 远离中性点（波区），定常解要求 $u_{x0} = B_x/\sqrt{\mu_0\rho}$，即 $M_0 = |b_x|$，故 $\delta = M_0|y|$，边界层厚度随 y 线性增加
  - 靠近中性点（扩散区），定常解要求 $u_{x0} = \dfrac{\eta_m}{\delta}, M_0 = \dfrac{1}{\mu_0\sigma v_A\delta}$，故边界层厚度 δ 为常数，而 $b_x = -2M_0^3\mu_0\sigma v_A y$
  - 估计扩散区大小 y^*：$y = y^*$ 时，有 $b_x = -M_0$，故

$$y^* = \frac{1}{2\mu_0\sigma v_A M_0^2}$$

  $|y| < y^*$，扩散作用占优势，$b_x = -M_0\dfrac{y}{y^*}$；

  $y^* < |y| < L$，波机制发挥作用，$|b_x| = M_0$。

Petschek 机制–外部流动区

- 外流区中流场、磁场有微小畸变

$$\boldsymbol{u} = u_{x0}(\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{u}')$$
$$\boldsymbol{B} = B_{y0}(\mathbf{y}_1 + \boldsymbol{B}')$$

可以证明 $\nabla \times \boldsymbol{B}' = 0, \nabla \times \boldsymbol{u}' = 0$。

- 引入磁势 ψ，$\boldsymbol{B}' = \nabla\psi$，磁场无源要求 $\nabla^2\psi = 0$

确定边界条件（边界近似取作 y 轴）：法向磁场连续要求

$$B_x \cos\theta = B_{y0} B'_x \cos\theta + B_{y0}(1 + B'_y)\sin\theta \to b_x = B'_x + \frac{d\delta}{dy}$$

  - 波区（$|y| > y^*$）：$b_x = -M_0, \frac{d\delta}{dy} = M_0$，故 $B'_x = -2M_0\frac{y}{|y|}$
  - 扩散区（$|y| < y^*$）：$b_x = -M_0\frac{y}{y^*}$，取 $\frac{d\delta}{dy} = -b_x$，故 $B'_x = -2M_0\frac{y}{y^*}$

解 Laplace 方程，可得

$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} \frac{B'_x(\eta)(\boldsymbol{r} - \eta\mathbf{y}_1)}{(\boldsymbol{r} - \eta\mathbf{y}_1)^2}\, d\eta$$

显然 $B'_{y_{\max}} = B'_y(0) = -\frac{2M_0}{\pi}\ln\left(\frac{L}{y^*}\right)$

Petschek 机制–极大湮灭速率

- 足够大的流速 $\to$ 大 y 处磁场有可观的 x 分量 $\to$ 小 y 处边界层电流减小 $\leftrightarrow$ 边界层外磁场 y 分量减少
  - 波区边界层边缘 $B_y\downarrow\to v\downarrow, \delta\uparrow\to b_x\uparrow\to j\downarrow$
  - 同时 $B_y\downarrow\to M_0\uparrow\to y^*\downarrow$

  两者结合，使得边界层更快消失！
  1. $B_y'(0)\ll -1$，Petschek 解存在
  2. $B_y'(0)$ 比线性分析所得结果更快趋近于-1
  3. $B_y'(0)$ 不能超过-1
- 估计极大湮灭率，仅仅考虑 M_0 量级，取 $B_y'(0)=-1/2$，故

$$M_{0\max}=\pi/4\ln(\frac{L}{y^*})$$

代入 y^* 表达式，有

$$M_{0\max}=\pi/4\ln(2\mu_0\sigma v_A L M_{0\max}^2)=\pi/4\ln(2M_{0\max}^2 R_m)$$

$M_{0\max}\propto 1/\ln(R_m)$，故湮灭率大大提高！

可压导电流体中的 Petschek 机制

- 可压缩：Alfvén 波 $\to$ 一对消去激波，横越激波有密度增加
- 相对于不可压流体的修正，定义密度比 $\alpha = \rho_0/\rho_b$，则

  连续性方程 $\alpha u_{x0} y = v\delta$

  运动方程 $\dfrac{d}{dy}(\rho_0 v^2 \delta) = -\alpha \dfrac{B_{y0} B_x}{\mu_0}$

  波区中 $b_x = -M_0$，$\delta = \alpha M_0 |y|$

  扩散区中 $b_x = -\alpha 2 M_0^3 \mu_0 \sigma v_A y$，$\delta = 1/(\mu_0 \sigma v_A M_0)$

  扩散区长度 $y^* = \dfrac{1}{2\alpha \mu_0 \sigma v_A M_0^2}$

  畸变磁场边界条件及解

$$B'_x = \begin{cases} -(1+\alpha) M_0 y/|y|, & (y > y^*) \\ -(1+\alpha) M_0 y/y^*, & (y < y^*) \end{cases} \quad \text{and } B'_y(0) = -\frac{(1+\alpha) M_0}{\pi} \ln\left(\frac{L}{y^*}\right)$$

  最大湮灭率

$$M_{0\max} = \pi/2(1+\alpha) \ln(2\mu_0 \sigma v_A L \alpha M_{0\max}^2) = \pi/2(1+\alpha) \ln(2 M_{0\max}^2 \alpha R_m)$$

  $0 < \alpha < 1$，结果差别小于因子 2，故而不重要!