Magnetohydrodynamics (MHD)

等离子体宏观不稳定性

本章内容

引言

- 等离子体不稳定性
  - 定义：以集体运动的方式，趋向于热力学平衡的能量转换过程
  - 数学表述：$\frac{dx}{dt} = \gamma x$, γ 为不稳定性增长率
  - 分类
    - 宏观不稳定性（MHD 不稳定性）
    - 微观不稳定性（动力学不稳定性）
  - 重要作用
    1. 爆发现象
    2. 反常输运
    3. 波动
    4. 湍流
- 等离子体宏观不稳定性
  - 分类
    - "狭义" MHD 不稳定性（电导率无穷大）
    - 电阻不稳定性（考虑有限电阻）
  - 研究方法
    1. 直观分析法
    2. 简正模分析法
    3. 能量原理

简正模分析法 1

- 所有扰动量 $q(\boldsymbol{r},t)$ 表为傅里叶分量形式

$$q(\boldsymbol{r},t) \rightarrow q(\boldsymbol{k},\omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\},\ \omega(k)=\omega_r(k)+i\gamma(k)$$

代入线性化 MHD 方程，得色散关系 $D(\omega,k)=0$，从中解得 ω:
  - 所有 ω 为实数，扰动量作简谐振荡 $\rightarrow$ 波或振荡
  - 有一 ω 有正虚部（$\gamma(k)>0$），扰动量随时间按 $e^{\gamma t}$ 增长 $\rightarrow$ 不稳定性
- 基本方程组（电中性、无耗散、各向同性、电导率无穷大）

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0\\
&\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla p+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\\
&\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma})=0\\
&\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0\\
&\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}
\quad\rightarrow\quad
\begin{aligned}
&\nabla p_0=\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_0\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{j}_0\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0=0
\end{aligned}$$

平衡状态: $\boldsymbol{v}=0,\boldsymbol{E}=0,\rho=\rho_0,p=p_0,\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_0,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0$

- 扰动方程组，引入小扰动

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1, \rho=\rho_0+\rho_1 \\ p=p_0+p_1, \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_0+\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1\end{gathered}$$

线性化方程组，得

$$\begin{aligned}
&\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}=-\nabla p_1+\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{j}_1\times\boldsymbol{B}_0\\
&\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{v}_1)=0\\
&\frac{\partial p_1}{\partial t}=-\gamma p_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)p_0\\
&\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}_1=\nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)\\
&\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}\right)=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)
\end{aligned}$$

整理得速度扰动方程

$$\rho_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2}=\gamma\nabla(p_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)+\nabla[(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)p_0]+\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0\times[\nabla\times\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1)]$$

- 引入相对于平衡位置的位移量 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}_0, t)$，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\xi}$，则扰动速度

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) \\
p_1 &= -\gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 \\
\boldsymbol{B}_1 &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0)
\end{aligned}$$

故扰动位移方程 $\rho_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$，其中

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) + \gamma \nabla(p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B}_1 - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_1)$$

简正模分析法 4

- 边界条件，考虑等离子体–真空情形
  - 总压强连续
    $$-\gamma p_0(\boldsymbol{r}_0)\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\frac{\boldsymbol{B}_{0i}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{B}_{1i}(\boldsymbol{r}_0)}{\mu_0}+\frac{\xi_n}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial n}B_{0i}^2(\boldsymbol{r}_0)=\frac{\boldsymbol{B}_{0e}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{B}_{1e}(\boldsymbol{r}_0)}{\mu_0}+\frac{\xi_n}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial n}B_{0e}^2(\boldsymbol{r}_0)$$
  - 电场切向分量连续
    $$\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E}_1=v_{1n}\boldsymbol{B}_{0e}\ \text{or}\ \boldsymbol{B}_{1e}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{0e})\ \text{or}\ \boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{A}=-\xi_n\boldsymbol{B}_{0e}$$
- 将 $\boldsymbol{\xi}$ 写成所有可能简正方式的和 $\boldsymbol{\xi}=\sum\limits_n\boldsymbol{\xi}_n(\boldsymbol{r}_0,\omega_n)\exp\{-i\omega_n t\}$，有
  $$-\rho_0\omega_n^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$$
  只要出现一个 ω_n^2 为负，就会发生不稳定性

能量原理

- 破坏平衡的条件：对于某一位移，系统的位能的变化为负
- 孤立系统总能量

$$\int d\tau\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}+\frac{B^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)=T+W=\text{const}$$

系统微扰 $\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}_0)$ 后，封闭系统中总能量变化率为 0 ，有

$$\frac{1}{2}\int \rho_0\dot{\boldsymbol{\xi}}^2 d\tau+\delta W=\text{const} \to \int \rho_0\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\xi}}d\tau+\frac{d}{dt}(\delta W)=0 \to$$

$$\int \dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})d\tau+\frac{d}{dt}(\delta W)=0 \to \delta W=-\frac{1}{2}\int d\tau\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$$

代入 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 表达式可得 $\delta W=\delta W_p+\delta W_s+\delta W_v$，其中

$$\delta W_p=\frac{1}{2}\int_{V_i}\left\{\frac{B_1^2}{\mu_0}-p_1\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_1)\right\}d\tau$$

$$\delta W_s=\frac{1}{2}\int_{S_0}\xi_n^2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{B_{0e}^2}{2\mu_0}-\frac{B_{0i}^2}{2\mu_0}-p_0\right)dS$$

$$\delta W_v=\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_e}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2 d\tau=\int_{V_e}\frac{B_1^2}{2\mu_0}d\tau$$

δW_p：内部能量变化；δW_s：边界面做功；δW_v：外部能量增加

- $\delta W_p+\delta W_s>0$，系统肯定稳定
- 稳定条件：对于所有满足边条的 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{A}$，有 $(\delta W)_{\min}>0$

电流不稳定性–直观分析

1. “腊肠”不稳定性（Sausage Instability）

平衡条件 $p+\dfrac{B_z^2}{2\mu_0}=\dfrac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}$，发生小扰动（$a\to a-\delta a$）后

- 等离子柱外

$$B'_{\theta a}=\frac{\mu_0 I_p}{2\pi(a-\delta a)}\approx\frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}(1+\delta a/a)=B_{\theta a}(1+\delta a/a),\ \Delta P_{m\theta}=\frac{B'^2_{\theta a}}{2\mu_0}-\frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}\approx\frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0}\frac{\delta a}{a}$$

- 等离子柱内

$$B'_z=\frac{\pi a^2}{\pi(a-\delta a)^2}B_z\approx B_z(1+2\frac{\delta a}{a}),\ \Delta P_{mz}\approx\frac{B_z^2}{\mu_0}\frac{2\delta a}{a}$$

稳定要求 $\Delta P_{mz}>\Delta P_{m\theta}$，即 $B_z^2>\dfrac{B_\theta^2}{2}$

2. 扭曲不稳定性（Kink Instability）
等离子体柱产生扭曲后

- 恢复力 $F_z=\dfrac{B_z^2}{2\mu_0}\pi a^2 2\sin\alpha\approx\dfrac{B_z^2}{\mu_0}\pi a^2\alpha=\dfrac{B_z^2}{2\mu_0}\pi a^2\dfrac{\lambda}{R}$
- 弯曲力 $F_\theta=2\sin\alpha\displaystyle\int_a^\lambda\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}2\pi r dr\approx\frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0}\pi a^2\frac{\lambda}{R}\ln\frac{\lambda}{a}$

稳定要求 $F_z>F_\theta$，即 $\dfrac{B_z^2}{B_{\theta a}^2}>2\ln\dfrac{\lambda}{a}$，同时 $\dfrac{B_z^2}{B_{\theta a}^2}<1$，有 $\ln\dfrac{\lambda}{a}<1/2$

3. 螺旋不稳定性（Screw Instability）

稳定条件 $\left|\dfrac{B_\theta}{B_z}\right|<\dfrac{2\pi a}{L}$

- 柱对称，$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\xi}(r)\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$
  选择 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=0$（不可压）
- 面电流情况下，柱内无角向磁场，只有轴向均匀附加磁场 $\boldsymbol{B}_i$，气压 p 为常数，于是柱内扰动位移方程

$$\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2}=-\nabla(p_1+\frac{\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{B}_{1i}}{\mu_0})+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{1i}$$

$\boldsymbol{B}_{1i}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_i)=(\boldsymbol{B}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}=ikB_i\boldsymbol{\xi}$，故

$$(-\omega^2\rho_0+\frac{k^2B_i^2}{\mu_0})\boldsymbol{\xi}=-\nabla(p_1+\frac{\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{B}_{1i}}{\mu_0})=-\nabla\widetilde{p}$$

两边取散度，有 $\nabla^2\widetilde{p}=0\rightarrow\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-(k^2+\frac{m^2}{r^2})\right]\widetilde{p}(r)=0$

解得 $\widetilde{p}(r)=\widetilde{p}(a)\dfrac{I_m(kr)}{I_m(ka)}$，故 $\xi_r(a)=\dfrac{k\widetilde{p}(a)}{\omega^2\rho_0-k^2B_i^2/\mu_0}\dfrac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}$ (1)

- 柱外真空，存在均匀的纵向磁场和柱面电流产生的角向磁场。
  $\boldsymbol{j}_e\equiv0$，故 $\nabla\times\boldsymbol{B}_{1e}=0$；引入磁势 ψ，$\boldsymbol{B}_{1e}=\nabla\psi$，$\psi$ 满足

$$\nabla^2\psi=0$$

解得 $\psi(\boldsymbol{r},t)=c\dfrac{K_m(kr)}{K_m(ka)}\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$

考虑柱面上（$r=a$）边界条件

- 总压强连续 $\dfrac{\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{B}_{1i}}{\mu_0}=\widetilde{p}=\dfrac{\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{B}_{1e}}{\mu_0}+\dfrac{\xi_r}{2\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial r}B_e^2$，其中

$$\left.\frac{\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{B}_{1e}}{\mu_0}\right|_{r=a}=\frac{i}{\mu_0}c(kB_{ez}+\frac{m}{a}B_\theta(a))\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$$

$$\left.\frac{\xi_r}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}B_e^2\right|_{r=a}=-\frac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a}\xi_r(a)\exp\{i(m\theta+kz)-i\omega t\}$$

故 $\widetilde{p}(a)=\dfrac{ic}{\mu_0}(kB_{ez}+\dfrac{m}{a}B_\theta(a))-\dfrac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a}\xi_r(a)\quad(2)$

- 电场切向分量连续（$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_{1e}=\boldsymbol{n}_0\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_e)]$）
  其中 $\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{B}_e=\boldsymbol{B}_{ez}+\boldsymbol{B}_\theta,\boldsymbol{B}_{1e}=\nabla\psi$，可得

$$i(kB_{ez}+\frac{m}{a}B_\theta(a))\xi_r(a)=ck\frac{K_m'(ka)}{K_m(ka)}\quad(3)$$

- 联立 (1)、(2)、(3)，可得关于 $\xi_r(a), \widetilde{p}(a), c$ 的线性齐次代数方程组非零解要求

$$\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{k}{\omega^2\rho_0 - k^2 B_i^2/\mu_0}\dfrac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} & 0 \\ \dfrac{B_\theta^2(a)}{\mu_0 a} & 1 & -\dfrac{i}{\mu_0}(kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta(a)) \\ i(kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta(a)) & 0 & -k\dfrac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} \end{vmatrix} = 0$$

- 展开系数行列式，得色散关系

$$\rho_0\mu_0\omega^2 = B_i^2 k^2 - (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta)^2 \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}\frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)} - k\frac{B_\theta^2}{a}\frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (*)$$

- 稳定要求 $\omega^2 > 0$，讨论色散关系等式右边三项
  - 第一项 > 0，柱内轴向磁场总是起致稳作用
  - $\dfrac{I'_m}{I_m} > 0, \dfrac{K_m}{K'_m} < 0$，故第二项 ≥ 0，一般也起致稳作用，其作用来源于柱外磁力线的张力，除非当 $kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta = 0$，此项消失
  - 第三项 < 0，柱外角向磁场总是产生不稳定因素
- 对于 $kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta = 0$ 情形，考虑到扰动波矢 $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z + \dfrac{m}{a}\boldsymbol{e}_\theta$，有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_e = 0$，即扰动传播与磁场垂直时，磁场便不再阻碍扰动发展

  引入磁螺距 ζ_B 和扰动螺距 ζ，在柱面上

$$\zeta_B = 2\pi a\frac{B_z}{B_\theta}, \quad \zeta = \frac{2\pi m}{k}$$

  当 $|\zeta_B| = \zeta$，即 $kB_{ez} + \dfrac{m}{a}B_\theta = 0$ 时，扰动不引起磁力线畸变，不稳定性最容易发生，此类不稳定性称作螺旋不稳定性

柱外无纵向磁场, $B_{ez}=0$

- $m=0$ 模（“腊肠”模）: $\omega^2=\dfrac{B_i^2k^2}{\mu_0\rho_0}\left[1-\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}\dfrac{I_0'(ka)}{kaI_0(ka)}\right]$

  由于 $\left[\dfrac{I_0'(x)}{xI_0(x)}\right]_{\max}=\dfrac{1}{2}$, 故只要 $\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}<2$, 便能保证 $\omega^2>0$

- $m=1$ 模（Kink 模）: $\omega^2=\dfrac{B_i^2k^2}{\mu_0\rho_0}\left[1+\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}\dfrac{I_1'(ka)}{kaI_1(ka)}\dfrac{K_0(ka)}{K_1'(ka)}\right]$
  - 短波扰动 $ka\gg 1$, 可能有 $\omega^2>0$, 等离子体柱稳定
  - 长波扰动 $ka\ll 1$, 将有 $\omega^2<0$, 等离子体柱不稳定

  当 $ka\to 0$ 时, $\omega^2=\dfrac{B_i^2k^2}{\mu_0\rho_0}\left[1-\dfrac{B_\theta^2}{B_i^2}\ln(\dfrac{1}{ka})\right]$, 对于长波扰动不稳定

柱外纵向磁场远大于角向磁场，$B_{ez} \gg B_\theta$

- 考虑长波极限 $ka \ll 1$，有 $\mu_0\rho_0\omega^2 = B_i^2 k^2 + (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta)^2 - \frac{m}{a^2}B_\theta^2$

  求 ω^2 极小值，由 $\frac{\partial \omega^2}{\partial k} = 0$，得 $\omega^2_{\min} = \frac{B_\theta^2}{\mu_0\rho_0 a^2}(\frac{m^2 B_i^2}{B_{ez}^2 + B_i^2} - m)$

  定义 $\beta = 2\mu_0 p/(B_{ez}^2 + B_\theta^2)$，由平衡条件得 $1 - \beta \approx \frac{B_i^2}{B_{ez}^2}$，故而

$$\omega^2_{\min} = \frac{B_\theta^2}{\mu_0\rho_0 a^2} m(m\frac{1-\beta}{2-\beta} - 1)$$

  当 $0 < m < \frac{2-\beta}{1-\beta}$ 时，$\omega^2_{\min} < 0$，小 β，$m = 1$ 的模不稳定

考虑沿轴向均匀流动 $\boldsymbol{v} = v_0 \boldsymbol{e}_z$，仿照之前讨论，可得色散关系

$$\left[-v_A^2 + v_s^2 / \left(\frac{k^2 v_s^2}{\omega_1^2} - 1\right)\right] K J_m(Ka) =$$
$$\frac{1}{\mu_0 \rho_0}\left[\frac{m}{a} B_{e\theta}(a) + k B_{ez}\right]^2 \frac{K_m(ka) J_m'(Ka)}{k K_m'(ka)} + \left(1 + \frac{k v_0}{\omega_1 - k v_0}\right) \frac{B_{e\theta}^2(a) J_m'(Ka)}{\mu_0 a \rho_0},$$

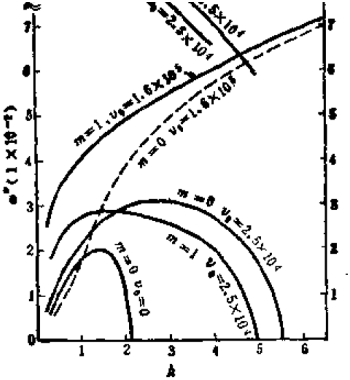
其中

$$K^2 = \frac{\omega_1^2 (1 - k^2 v_s^2/\omega_1^2)(1 - k^2 v_A^2/\omega_1^2)}{(v_A^2 + v_s^2 - v_A^2 v_s^2 k^2/\omega_1^2)},$$

这里 $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho_0}, v_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}, \omega_1 = \omega + k v_0$。

- 与之前区别
  - 增加一项 $k v_0/(\omega_1 - k v_0)$
  - $\omega \to \omega_1$
  - $I_m \to J_m$
- 当 $v_0 = 0$，同时考虑不可压缩流体，色散关系回退到之前形式 $(*)$

代入太阳活动区特征参数，求解色散关系得 $\omega = \omega' - i\omega''$，考虑 v_0 对不稳定性（$\omega'' > 0$）作用



结论：v_0 的存在将加剧不稳定性的发生！

HD 情况下的 Rayleigh-Taylor（RT）不稳定性 1

- 重力场下平衡的两种流体：$z>0,\rho_1$；$z<0,\rho_2$，基本方程

$$\begin{cases} \rho_i \dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + \rho_i \boldsymbol{g} \\ \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_i \boldsymbol{v}_i) = 0 \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

小扰动 ($\boldsymbol{v}$ 小)，流体不可压，同时认为流体均质，故 ρ 为常数；同时 $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \approx \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$；重力场中 $\boldsymbol{g} = -\nabla(gz)$，对运动方程两边取旋读可得 $\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$，故速度有势：$v=\nabla\phi$。代入基本方程

$$\begin{cases} \rho_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i g z + p_i = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

- 边界条件

1. $p_1 = p_2$：$\rho_1 \left(\dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g\dfrac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)\Bigg|_{z=0} = \rho_2 \left(\dfrac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g\dfrac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)\Bigg|_{z=0}$
2. $v_{1z} = v_{2z}$：$\dfrac{\partial \phi_1}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = \dfrac{\partial \phi_2}{\partial z}\Bigg|_{z=0}$

- 考虑平面波解

$$\begin{cases} \phi_1 = A_1(z)\exp\{i(\omega t - kx)\} \\ \phi_2 = A_2(z)\exp\{i(\omega t - kx)\} \end{cases}$$

代入 Laplace 方程，有 $\dfrac{d^2 A_i(z)}{dz^2} - k^2 A_i(z) = 0 \ (i = 1, 2)$

由无穷远处边条 $z \to \infty, A_1 = 0$ 和 $z \to -\infty, A_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} A_1(z) = c_1 \exp\{-kz\} \\ A_2(z) = c_2 \exp\{kz\} \end{cases} \to \begin{cases} \phi_1 = c_1 \exp\{-kz + i(\omega t - kx)\} \\ \phi_2 = c_2 \exp\{kz + i(\omega t - kx)\} \end{cases}$$

代入速度连续边条得 $c_1 = -c_2$

结果再代入压力连续边条，得色散关系

$$\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right) kg}$$

  - $\rho_2 > \rho_1$，ω 为实数，振幅与时间无关，稳定
  - $\rho_2 < \rho_1$，ω 为虚数，振幅随时间无限增大，平衡破坏，直到上下流体互换位置（RT 不稳定性、“互换不稳定性”）
    发生不稳定性时，$\gamma \propto \sqrt{k}$，短波扰动增长快

MHD 情况下的 RT 不稳定性 1

- 基本位型：密度存在梯度 $\nabla\rho_0(z)$，磁场在 xoy 平面中，随 z 轴有
$$\boldsymbol{B}_0(z) = B_{ox}(z)\boldsymbol{e}_x + B_{0y}(z)\boldsymbol{e}_y$$
重力加速度沿 z 轴向下，平衡时有 $\dfrac{d}{dz}\left(p_0 + \dfrac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\rho_0 g$
- 速度扰动方程

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} = \nabla[(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)p_0] + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{R} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)(\rho_0\boldsymbol{g})$$
$$(\boldsymbol{R} = \nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0) = \frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t})$$

假定 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r},t) = [v_{1x}(z)\boldsymbol{e}_x + v_{1y}(z)\boldsymbol{e}_y + v_{1z}(z)\boldsymbol{e}_y]\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\}$

再假定扰动在 xoy 平面传播，即 $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{e}_x + k_y\boldsymbol{e}_y$，$k^2 = k_x^2 + k_y^2$

代入 $\boldsymbol{R}$ 中有

$$R_x = i(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})v_{1x} - v_{1z}\frac{dB_{ox}}{dz}$$
$$R_y = i(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})v_{1y} - v_{1z}\frac{dB_{oy}}{dz}$$
$$R_z = i(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})v_{1z}$$

而流体不可压有

$$ik_x v_{1x} + ik_y v_{1y} + \frac{dv_{1z}}{dz} = 0$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 2

- 将 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{k}$ 代入扰动方程，有

$$-\omega^2\rho_0 v_{1x} = ik_x v_{1z}\frac{dp_0}{dz} + \frac{1}{\mu_0}\frac{dB_{0x}}{dz}R_z - \frac{i}{\mu_0}B_{0y}(k_xR_y - k_yR_x) \quad (1)$$

$$-\omega^2\rho_0 v_{1y} = ik_y v_{1z}\frac{dp_0}{dz} + \frac{1}{\mu_0}\frac{dB_{0y}}{dz}R_z + \frac{i}{\mu_0}B_{0x}(k_xR_y - k_yR_x) \quad (2)$$

$$-\omega^2\rho_0 v_{1z} = \frac{d}{dz}(v_{1z}\frac{dp_0}{dz}) - \frac{1}{\mu_0}\frac{d}{dz}(B_{0y}R_y + B_{0x}R_x) + \frac{i}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)R_z + v_{1z}\frac{d\rho_0}{dz}g \quad (3)$$

- $B_{0x}\times(1) + B_{0y}\times(2)$，有

$$-\omega^2\rho_0(B_{0x}v_{1x} + B_{0y}v_{1y}) = i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)v_{1z}\frac{dp_0}{dz} + R_z\frac{d}{dz}\left(\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)$$

故 $B_{0x}v_{1x} + B_{0y}v_{1y} = -\frac{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)v_{1z}}{\omega^2\rho_0}\frac{d}{dz}(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0}) = \frac{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}{\omega^2}gv_{1z} \; (4)$

- $ik_x\times(1) + ik_y\times(2)$，有

$$\omega^2\rho_0\frac{dv_{1z}}{dz} = -k^2v_{1z}\frac{dp_0}{dz} - v_{1z}\frac{d}{dz}\left[\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{2\mu_0}\right] + \frac{1}{\mu_0}(k_xB_{0y} - k_yB_{0x})(k_xR_y - k_yR_x)$$

整理可得 $\left[\omega^2\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0}\right]\left(\frac{dv_{1z}}{dz} - \frac{k^2}{\omega^2}gv_{1z}\right) = 0 \quad (5)$

- 由（5）可得
  1. $\omega^2 = \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\rho_0} = \frac{B_0^2k^2\cos^2\theta}{\mu_0\rho_0}$：斜 Alfvén 波
  2. $\frac{dv_{1z}}{dz} - \frac{k^2}{\omega^2}gv_{1z} = 0$ (6)：可能发生不稳定性的模式
- 讨论（6）式对应模式
  - 将 R_x, R_y 代入（3）等式右边第二项，有

$$B_{0y}R_y + B_{0x}R_x = -\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\omega^2}gv_{1z} - v_{1z}\frac{d}{dz}\left(\frac{B_0^2}{2}\right)$$

  - 上式代入（3）式，并利用平衡条件，有

$$-\frac{d}{dz}\left\{\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]gv_{1z}\right\} + \left\{g\frac{d\rho_0}{dz} + \omega^2\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\right\}v_{1z} = 0$$

$k^2/\omega^2\times$ 上式，并将（6）式代入，有

$$\frac{d}{dz}\left\{\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\frac{dv_{1z}}{dz}\right\} - \frac{k^2}{\omega^2}\left\{g\frac{d\rho_0}{dz} + \omega^2\left[\rho_0 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\right\}v_{1z} =$$

- 锐边界情形

$$\rho_0(z) \approx \begin{cases} \rho_1 & (z>0) \\ \rho_2 & (z<0) \end{cases}, \quad \frac{d\rho_0(z)}{dz} = (\rho_1-\rho_2)\delta(z)$$

  - 边界面附近，对（*）式从 0^- 积分至 0^+，有

$$\left[\rho_1 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1^2}{\mu_0\omega^2}\right]\left(\frac{dv_{1z}}{dz}\right)_{0^+} - \left[\rho_2 - \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2^2}{\mu_0\omega^2}\right]\left(\frac{dv_{1z}}{dz}\right)_{0^-} - \frac{gk^2}{\omega^2}(\rho_1-\rho_2)v_{1z}(0) = 0 \quad (7)$$

  - 边界面以外，$\rho_0, \boldsymbol{B}_0$ 变化很缓慢，（*）式变为

$$\frac{d^2v_{1z}}{dz^2} - k^2 v_{1z} = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{1z} = v_{1z}(0)\exp(-kz) & (z \geq 0) \\ v_{1z} = v_{1z}(0)\exp(kz) & (z<0) \end{cases}$$

由此得 $$\left(\frac{dv_{1z}}{dz}\right)_{0^\pm} = \mp k v_{1z}(0) \quad (8)$$

联立（7）、（8）可得色散关系

$$\omega^2 = \frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{01})^2 + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{02})^2}{\mu_0(\rho_1+\rho_2)} - gk\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \quad (9)$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 5

1. 当 $\boldsymbol{B}_{01}=0, \boldsymbol{B}_{02}=0$，即无磁场时，$\omega^2=-gk\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\rightarrow$ HD 情形
2. $\dfrac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{01})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{02})^2}{\mu_0(\rho_1+\rho_2)}\geq 0$，磁场总是起致稳作用，除非 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0=0$，此时扰动不改变磁场的分布
3. 当 $\rho_1=\rho, \rho_2=0$，即等离子体受磁场支撑时
$$\omega^2=\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{01})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{02})^2}{\mu_0\rho}-gk$$
4. 当磁场具有剪切时
设真空磁场 $\boldsymbol{B}_{02}=(\alpha_x B_0, \alpha_y B_0, 0)$，其中 $\alpha_x^2+\alpha_y^2=1$;
等离子中磁场 $\boldsymbol{B}_{01}=(\gamma_x B_0, \gamma_y B_0, 0)$; 再设 $v_A=B_0/\sqrt{\mu_0\rho}$
色散关系变为 $\omega^2=[(k_x\alpha_x+k_y\alpha_y)^2+(k_x\gamma_x+k_y\gamma_y)^2]v_A^2-gk$
压力平衡要求 $p_0+\dfrac{(\gamma_x^2+\gamma_y^2)B_0^2}{2\mu_0}=\dfrac{B_0^2}{2\mu_0}$
简化问题，假定 $\boldsymbol{B}_{01}\perp\boldsymbol{B}_{02}$，并取 $\alpha_y=1$，于是 $\alpha_x=\gamma_y=0$
所以 $\gamma_x^2=1-\beta$ $(\beta=2\mu_0 p_0/B_0^2)$，$\omega^2=[k_x^2(1-\beta)+k_y^2]v_A^2-gk$
当 $k_y=0$，扰动沿 x 轴传播，$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{B}_{02}$，最容易发生不稳定性，稳定要求
$$\lambda_x<\lambda_c=\left(\frac{2\pi}{g}\right)(1-\beta)v_A^2=\frac{2\pi(1-\beta)B_0^2}{\mu_0\rho_0 g}$$

MHD 情况下的 RT 不稳定性 6

- 等离子体密度随 z 按指数变化情形，即 $\rho_0(z)=\rho_0\exp\{cz\}$

考虑 $v_{1z}=\text{const}$，即 $\dfrac{dv_{1z}}{dz}=0, \dfrac{d^2v_{1z}}{dz^2}=0$，（*）式变为

$$\frac{k^2}{\omega^2}\left\{g\frac{d\rho_0}{dz}+\omega^2\left[\rho_0-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]\right\}v_{1z}=0$$

$v_{1z}\neq 0$ 要求 $g\dfrac{d\rho_0}{dz}+\omega^2\left[\rho_0-\dfrac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\omega^2}\right]=0$，得色散关系

$$\omega^2=\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)^2}{\mu_0\rho_0}-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}$$

磁场仍起致稳作用，除非 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0=0$，此时 $\omega^2=-\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{d\rho_0}{dz}$

- $\dfrac{d\rho_0}{dz}>0$，密度梯度方向与重力方向相反，$\omega^2<0$，不稳定
- $\dfrac{d\rho_0}{dz}<0$，密度梯度方向与重力方向一致，$\omega^2>0$ 稳定

重力场中等温流体静力学平衡分层大气中, $\rho(z)=\rho(0)\exp\{-\dfrac{z}{H}\}$,

其中 $H=\dfrac{kT}{mg}$，故平衡稳定

MHD 情况下的 RT 不稳定性 7

考虑重力场（$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$）中等离子体—磁场（真空）边界平衡位型:
$z > 0$，均匀等离子体（$\rho, \boldsymbol{B}_i = B_i\boldsymbol{e}_x$）; $z < 0$，真空（$\boldsymbol{B}_e = B_e\boldsymbol{e}_x$）

- 等离子体中带电粒子在重力场和磁场作用下发生漂移

$$\boldsymbol{v}_{Dg} = \frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}}{qB^2} = \frac{m\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{B}_i}{qB_i^2} = -\frac{mg}{qB_i}\boldsymbol{e}_y$$

- 形成电流

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}_{Dg} = -\frac{nmg}{B_i}\boldsymbol{e}_y = -\frac{\rho g}{B_i}\boldsymbol{e}_y$$

- 单位体积电磁力

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_i = \rho g\boldsymbol{e}_z = -\rho\boldsymbol{g} \quad \text{（等离子体平衡）}$$

- 边界面上引入 y 方向传播（垂直磁场）小扰动 $\xi = \xi_0 \sin ky$，电流将在扰动界面上形成面电荷分布，产生 y 方向电场 $\boldsymbol{E}$。这一电场将导致边界面附近等离子体电场漂移

$$v_E = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_i}{B_i^2} = -|E/B_i|\boldsymbol{e}_z$$

此漂移加剧扰动发展，破坏稳定！

- 基本方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i=0 \\ \rho_i\dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\nabla p_i \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

- 引入小扰动 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_{10}+\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_{20}+\boldsymbol{v}_2',p_1=p_{10}+p_1',p_2=p_{20}+p_2'$
  其中 $\boldsymbol{v}_{10}=v_{10}\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{v}_{20}=v_{20}\boldsymbol{e}_x,p_{10},p_{20}$ 均为常数，得扰动方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i'=0 \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}_i'}{\partial t}+v_{i0}\dfrac{\partial\boldsymbol{v}_i'}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho_i}\nabla p_i \end{cases} \quad (i=1,2)\rightarrow\begin{cases} \nabla^2 p_1'=0 \\ \nabla^2 p_2'=0 \end{cases}$$

- 设 p' 取形式 $p_i'=f_i(z)\exp\{i(\omega t-kx)\}$，代入 Laplace 方程有

$$\frac{d^2 f_i}{dz^2}-k^2 f_i=0$$

  考虑 $|z|\rightarrow\infty$，p_i' 有限边条，有

$$\begin{cases} f_1(z)=\bar{p}_1'\exp\{-kz\} \\ f_2(z)=\bar{p}_2'\exp\{kz\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1'(x,z,t)=\bar{p}_1'\exp\{i(\omega t-kx)-kz\} \\ p_2'(x,z,t)=\bar{p}_2'\exp\{i(\omega t-kx)+kz\} \end{cases}$$

  可以认为 $\boldsymbol{v}_i'$ 也有类似形式，故

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1'(x,z,t)=\bar{\boldsymbol{v}}_1'\exp\{i(\omega t-kx)-kz\} \\ \boldsymbol{v}_2'(x,z,t)=\bar{\boldsymbol{v}}_2'\exp\{i(\omega t-kx)+kz\} \end{cases}$$

HD 切向间断面的 KH 不稳定性 2

- $p'_i, \boldsymbol{v}'_i$ 代入扰动运动方程，取 z 分量得

$$\begin{cases} \bar{p}'_1 = \dfrac{i\rho_1(\omega - kv_{10})}{k}\bar{v}'_{1z} \\ \bar{p}'_2 = -\dfrac{i\rho_2(\omega - kv_{20})}{k}\bar{v}'_{2z} \end{cases} \quad (1)$$

- 考虑扰动界面方程 $z = \xi(x, t)$，在界面上，有

$$v'_z\big|_{\text{bd}} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + v_{x0}\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

取 $\xi = \bar{\xi}\exp\{i(\omega t - kx)\}$，有

$$\begin{cases} \bar{v}'_{1z}\big|_{\text{bd}} = i(\omega - kv_{10})\bar{\xi} \\ \bar{v}'_{2z}\big|_{\text{bd}} = i(\omega - kv_{20})\bar{\xi} \end{cases} \quad (2)$$

- 联立（1）、（2），考虑到扰动界面上 $p_1 = p_2$，由此得色散关系

$$\rho_1(\omega - kv_{10})^2 + \rho_2(\omega - kv_{20})^2 = 0 \quad \text{or}$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{(\rho_1 v_{10} + \rho_2 v_{20}) \pm i(v_{10} - v_{20})\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

ω 总有一个非零虚部使得扰动振幅随时间指数增长，最终破坏界面，即发生 KH 不稳定性

- 方程组

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_i = 0 \\ \rho_i \dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + \rho_i \boldsymbol{g} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{v}'_1 = 0 \\ \rho_i(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}'_i}{\partial t} + v_{i0}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}'_1}{\partial x}) = -\nabla p_i + \rho_i \boldsymbol{g} \end{cases}$$

- 运动方程求旋度，可得 $\nabla\times\boldsymbol{v}'_i = 0$，故引入速度势 ϕ_i，有

$$\begin{cases} \rho_1(\dfrac{\partial\phi_1}{\partial t} + v_{10}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}) = -p_1 - \rho_1 g z \\ \rho_2(\dfrac{\partial\phi_2}{\partial t} + v_{20}\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}) = -p_2 - \rho_2 g z \end{cases} \text{and} \begin{cases} \nabla^2\phi_1 = 0 \\ \nabla^2\phi_2 = 0 \end{cases}$$

- 解 Laplace 方程得

$$\begin{cases} \phi_1 = c_1\exp\{i(\omega t - kx) - kz\} \\ \phi_2 = c_2\exp\{i(\omega t - kx) + kz\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{v}'_{1z}|_{\rm bd} = -c_1 k \\ \bar{v}'_{2z}|_{\rm bd} = c_2 k \end{cases}$$

同前，取扰动界面方程为 $z = \xi(x,t) = \bar{\xi}\exp\{i(\omega t - kx)\}$，故

$$\begin{cases} \bar{v}'_{1z}|_{\rm bd} = i(\omega - kv_{10})\bar{\xi} \\ \bar{v}'_{2z}|_{\rm bd} = i(\omega - kv_{20})\bar{\xi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -i(\omega - kv_{10})\bar{\xi}/k \\ c_2 = i(\omega - kv_{20})\bar{\xi}/k \end{cases}$$

- 再代入 $p_1|_{\rm bd} = p_2|_{\rm bd}$ 边条得

$$\rho_1[(\omega - kv_{10})^2 + gk] = \rho_2[-(\omega - kv_{20})^2 + gk]$$

由此解得色散关系

$$\omega = \frac{k(\rho_1 v_{10} + \rho_2 v_{20}) \pm \sqrt{-\rho_1\rho_2 k^2(v_{10} - v_{20})^2 + gk(\rho_2^2 - \rho_1^2)}}{\rho_1 + \rho_2}$$

1. $\rho_2 > \rho_1$，不稳定发生条件为 $k > \dfrac{g(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{\rho_1\rho_2(v_{10} - v_{20})^2}$，短波扰动不稳定
2. $\rho_2 < \rho_1$，绝对不稳定，其增长率 $\gamma = \sqrt{\gamma_{\rm KH}^2 + \gamma_{\rm RT}^2}$

- MHD 切向间断满足

  $$B_n = 0, v_n = 0, \{\boldsymbol{v}_t\} \neq 0, \{\boldsymbol{B}_t\} \neq 0, \{\rho\} \neq 0, \{p + B_t^2/(2\mu_0)\} = 0$$

  故设 $\boldsymbol{v}_{i0}, \boldsymbol{B}_{i0}$ 均在 xoy 平面；显然扰动波矢也在 xoy 平面内
- 基本方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\ \rho \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla \left(p + \dfrac{B^2}{2\mu_0} \right) + \left(\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{B} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

- 引入小扰动 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i0} + \boldsymbol{v}'_i, \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{B}_{i0} + \boldsymbol{B}'_i, pi = p_{i0} + p'_i$，故

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{v}'_i = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}'_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{i0} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}'_i = -\dfrac{1}{\rho_i} \nabla \left(p'_i + \dfrac{\boldsymbol{B}_{i0} \cdot \boldsymbol{B}'_i}{\mu_0} \right) + \left(\dfrac{\boldsymbol{B}_{i0}}{\mu_0 \rho_i} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{B}'_i \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}'_i}{\partial t} = (\boldsymbol{B}_{i0} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}'_i - (\boldsymbol{v}_{i0} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}'_i \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}'_i = 0 \end{cases}$$

  对运动方程两边取散度，有

$$\nabla^2 (p'_i + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_{i0} \cdot \boldsymbol{B}'_i) = 0$$

MHD KH 不稳定性 2

- 同前，可以认为所有扰动量 f_i' 可取以下形式

$$f_1'(\boldsymbol{r},t)=\bar{f}_1'\exp\{i(\omega t-k_x x-k_y y)-kz\}$$
$$f_2'(\boldsymbol{r},t)=\bar{f}_2'\exp\{i(\omega t-k_x x-k_y y)+kz\}$$

代入运动、磁场方程 z 分量中，有

$$\begin{cases}\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})\bar{v}_{1z}'=-ik(\bar{p}_1'+\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_1')-\dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})\bar{B}_{1z}'\\ \rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})\bar{v}_{2z}'=ik(\bar{p}_2'+\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_2')-\dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})\bar{B}_{2z}'\\ (\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})\bar{B}_{1z}'=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})\bar{v}_{1z}'\\ (\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})\bar{B}_{2z}'=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})\bar{v}_{2z}'\end{cases}$$

消去 $\bar{B}_{1z}',\bar{B}_{2z}'$，得

$$[\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2]\bar{v}_{1z}'=-ik(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})(\bar{p}_1'+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_1')$$
$$[\rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]\bar{v}_{2z}'=ik(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})(\bar{p}_2'+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}_2')$$

*

MHD KH 不稳定性 3

- 同前，设扰动界面方程 $\xi(x,t)=\bar{\xi}\exp\{i(\omega t-k_x x-k_y y)\}$，得

$$\bar{v}'_{iz}|_{\mathrm{bd}}=i(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{i0})\bar{\xi}$$

代入（*）式中，有

$$\left.\begin{aligned}
&[\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2]\bar{\xi}=-k(\bar{p}'_1+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_1)\\
&[\rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]\bar{\xi}=k(\bar{p}'_2+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_2)
\end{aligned}\right\}\quad(*')$$

- 间断面两侧压力连续条件

$$\bar{p}'_1+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{10}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_1=\bar{p}'_2+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{20}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}'_2$$

代入（*′）式，有

$$[\rho_1(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2]=-[\rho_2(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]$$

从中解 ω 得

$$\omega=\frac{1}{\rho_1+\rho_2}\{[\rho_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10})+\rho_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})]\pm\sqrt{\frac{\rho_1+\rho_2}{\mu_0}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]-\rho_1\rho_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2}\}$$

不发生 KH 不稳定性条件

$$\frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{10})^2+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_{20})^2]\geq\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{20})^2$$

磁场总是起致稳作用，除非 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$

- 取 $\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20}$ 沿 x 方向，稳定条件变为

$$\frac{1}{\mu_0}[(B_{10x}^2+B_{20x}^2)+2\frac{k_y}{k_x}(B_{10x}B_{10y}+B_{20x}B_{20y})+(\frac{k_y}{k_x})^2(B_{10y}^2+B_{20y}^2)] \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

  - 当磁场都沿 x 轴，即 $B_{10y}=B_{20y}=0$ 时，稳定条件进一步变为

$$\frac{1}{\mu_0}(B_{10}^2+B_{20}^2)\geq\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

    稳定与否与扰动传播方向及波长均无关，磁场致稳作用最有效
  - 当 $\boldsymbol{B}_{10}$ 和 $\boldsymbol{B}_{20}$ 的 x 分量和 y 分量均不为零时，定义

$$f(\frac{k_y}{k_x})=\frac{1}{\mu_0}[(B_{10x}^2+B_{20x}^2)+2\frac{k_y}{k_x}(B_{10x}B_{10y}+B_{20x}B_{20y})+(\frac{k_y}{k_x})^2(B_{10y}^2+B_{20y}^2)]$$

    由此得 $f_{\min}=\frac{1}{\mu_0}\frac{(B_{10x}B_{20y}-B_{10y}B_{20x})^2}{B_{10y}^2+B_{20y}^2}$，绝对稳定要求

$$f_{\min}\geq\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

  - 当磁场与 $\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20}$ 垂直，即 $B_{10x}=B_{20x}=0$ 时，稳定条件

$$\frac{1}{\mu_0}(\frac{k_y}{k_x})^2(B_{10y}^2+B_{20y}^2)\geq\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2$$

    - $k_y=0$，磁场不起致稳作用，相当于 HD 切向间断不稳定性
    - $k_y\neq 0$，总可以找到一个传播方向，其与 x 夹角

$$\theta_c=\arctan\sqrt{\frac{\mu_0\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\frac{(\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20})^2}{B_{10y}^2+B_{20y}^2}}$$

      $\theta\geq\theta_c$ 时稳定，$\theta<\theta_c$ 时不稳定