4강.

부울함수의 간소화 및 구현(1)

컴퓨터과학과 강지훈 교수

학습 목차

4 강

contents

01 개요

02 카르노 도표 방법(1)

- 카르노 도표 방법 개요
- 2변수 카르노 도표
- 3변수 카르노 도표

제4장. 부울함수의 간소화 및 구현

4.1
개요

• 부울함수의 간소화 방법

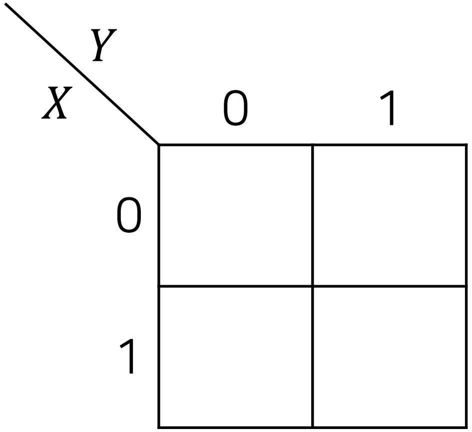
대수적인 방법	도표 방법	테이블 방법
• 부울대수의 정리를 대수적으로 적용하여 간소화 • 도표 및 테이블 방법의 이론적 바탕	• 카르노 도표(Karnaug map) 사용 • 각 항을 곱이나 합 형태로 간소화 • 여섯 개 이하의 변수를 가진 부울함수에 사용	• 퀸-맥클러스키(Quine - Mcluskey) 방법 • 테이블을 사용하여 간소화 알고리즘을 구현 • 많은 변수를 가진 부울함수에 적합

제4장. 부울함수의 간소화 및 구현

4.2
카르노 도표 방법(1)

4.2.1 카르노 도표 방법 개요

- 카르노 도표(Karnaugh Map, K-map)는 부울 대수를 간소화하는 방법 중 하나
- 데이터를 격자 형태로 표현하여 시각적으로 그룹화
- 각각의 사각형은 하나의 최소항 또는 최대항을 의미



4.2.1 카르노 도표 방법 개요

- 카르노 도표는 부울함수의 입력변수 개수에 따라 기본 도표의 형태가 결정됨
- 입력변수가 n개라면, 변수 카르노 도표라고 하며, 2^n개의 사각형으로 구성됨

2변수 카르노 도표

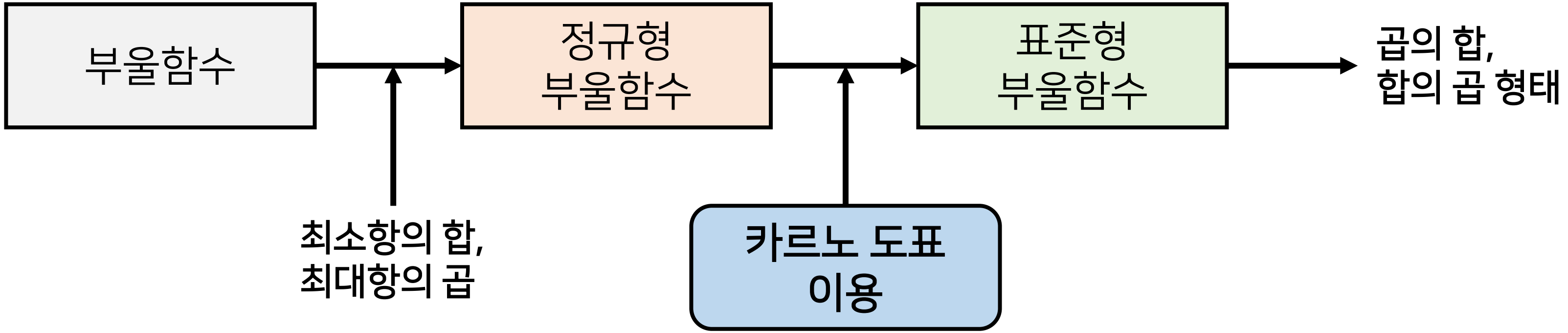
$X \backslash Y$	0	1
0		
1		

3변수 카르노 도표

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0				
1				

4.2.1 카르노 도표 방법 개요

- 카르노 도표를 사용한 부울함수의 간소화
  - 도표를 사용해 부울 함수를 표준형 부울함수로 표현할 수 있음



• 최소항의 합형을 곱의 합형으로 간소화(1)

1. 입력된 변수의 개수에 따라 n 변수 카르노 도표 작성

$X \backslash Y$	0	1
0		
1		

2. 최소항의 인덱스에 대응되는 사각형을 1로 표시

➡ 출력 값 F가 1에 대응되는 곳에 1 표시

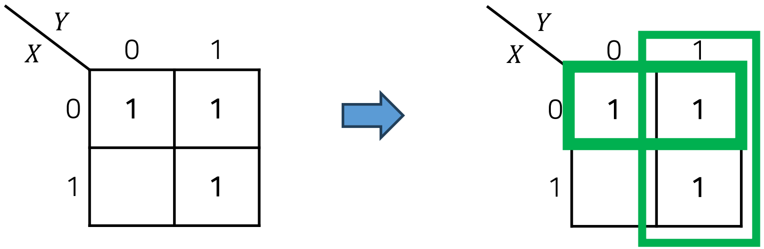
X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

➡

$X \backslash Y$	0	1
0	1	1
1		1

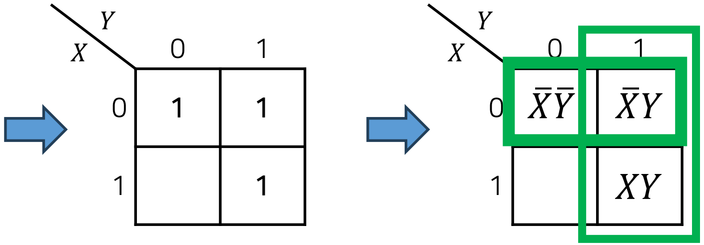
• 최소항의 합형을 곱의 합형으로 간소화(2)

3. 1로 표시된 사각형들 중 서로 인접한 사각형 끼리 묶음



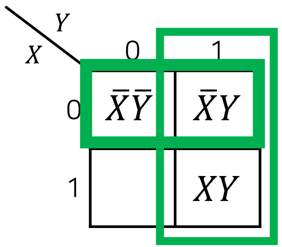
4. 각 묶음이 도표상 어떤 위치에 있는지 파악

X	Y	F	최소항
0	0	1	$\bar{X}\bar{Y}$
0	1	1	$\bar{X}Y$
1	0	0	$X\bar{Y}$
1	1	1	XY



• 최소항의 합형을 곱의 합형으로 간소화(3)

5. 각 묶음의 변수를 비교하여 공통 변수만 남기기



묶음 1: $\bar{X}\bar{Y}$, $\bar{X}Y$

묶음 2: $\bar{X}Y$, XY

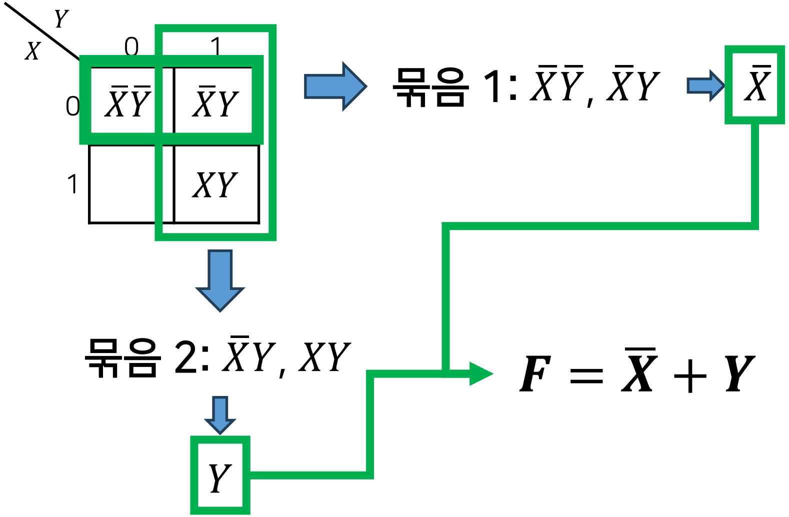
각 묶음에는 입력변수 X, Y가 있음

묶음의 각 최소항의 입력변수 A가 둘 다 0이라면 $\bar{A}$ 유지
묶음의 각 최소항의 입력변수 A가 둘 다 1이라면 A 유지
묶음의 각 최소항의 입력변수 A가 0과 1이라면 제거

→ 각 묶음의 입력 변수가 동일하면 그대로 유지
아니라면 삭제

• 최소항의 합형을 곱의 합형으로 간소화(4)

6. 각 묶음의 곱항을 논리합(OR)으로 연결



• 최대항의 곱형을 합의 곱형으로 간소화(1)

1. 입력된 변수의 개수에 따라 n 변수 카르노 도표 작성

$X \backslash Y$	0	1
0		
1		

2. 최대항의 인덱스에 대응되는 사각형을 0로 표시

➡ 출력 값 F가 0에 대응되는 곳에 0 표시

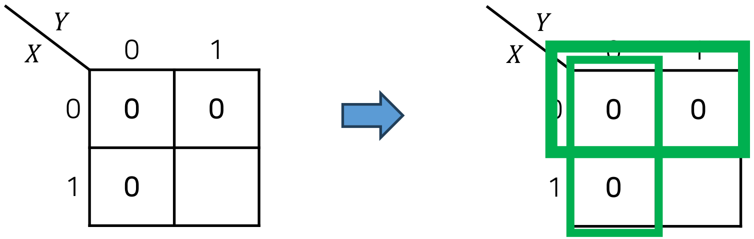
X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

➡

$X \backslash Y$	0	1
0	0	0
1	0	

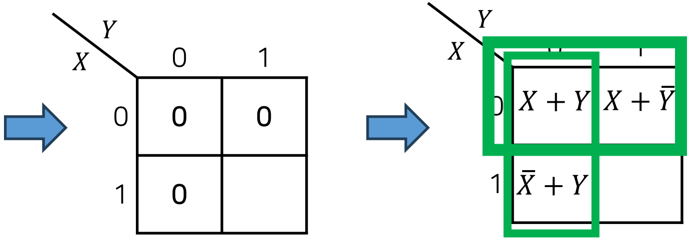
• 최대항의 곱형을 합의 곱형으로 간소화(2)

3. 0으로 표시된 사각형들 중 서로 인접한 사각형 끼리 묶음



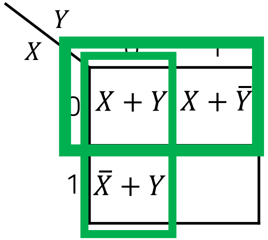
4. 각 묶음이 도표상 어떤 위치에 있는지 파악

X	Y	F	최대항
0	0	0	$X+Y$
0	1	0	$X+\bar{Y}$
1	0	0	$\bar{X}+Y$
1	1	1	$\bar{X}+\bar{Y}$



• 최대항의 곱형을 합의 곱형으로 간소화(3)

5. 각 묶음의 변수를 비교하여 공통 변수만 남기기



묶음 1: $X+Y,\ X+\bar{Y}$

묶음 2: $X+Y,\ \bar{X}+Y$

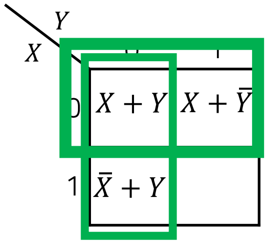
각 묶음에는 입력변수 X, Y가 있음

묶음의 각 최소항의 입력변수 A가 둘 다 0이라면 A 유지
묶음의 각 최소항의 입력변수 A가 둘 다 1이라면 $\bar{A}$ 유지
묶음의 각 최소항의 입력변수 A가 0과 1이라면 제거

각 묶음의 입력 변수가 동일하면 그대로 유지
아니라면 삭제

• 최대항의 곱형을 합의 곱형으로 간소화(4)

6. 각 묶음의 합항을 논리곱(AND)으로 연결



묶음 1: $X+Y,\ X+\bar{Y}$ ⇒ $\boxed{X}$

묶음 2: $X+Y,\ \bar{X}+Y$ ⇒ $\boxed{Y}$

$$\boldsymbol{F = X \cdot Y}$$

4.2.1 카르노 도표 방법 개요

- 인접 사각형의 정의
  - 카르노 도표의 각 칸은 하나의 최소항 또는 최대항을 의미함
  - 도표의 순서는 그레이 코드 형태로 나열되어 있음
    - 다음 칸으로 넘어갈 때 1개의 비트 값만 변경되도록 나열
  - 즉, 인접 칸에 배치된 값들은 서로 구성 변수 중 단 하나의 변수만 서로 보수 관계이고 다른 변수들은 모두 동일함
    - 이를 서로 인접한다라고 정의

$$m_4 = X\bar{Y}\bar{Z}$$

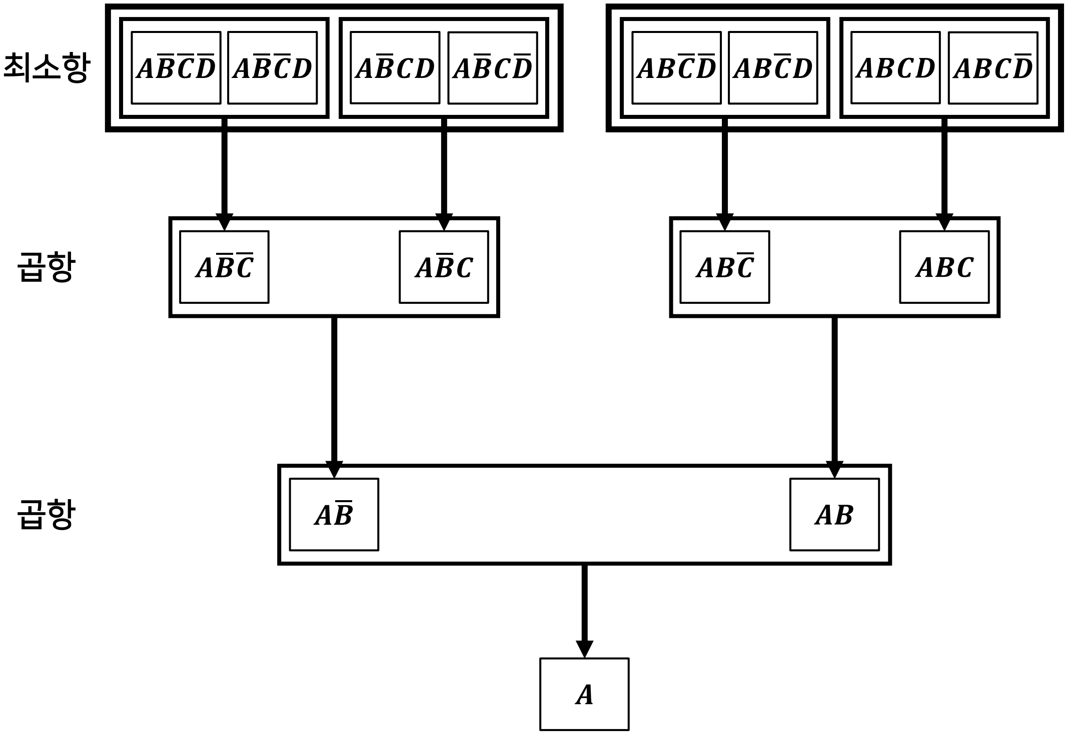
$$m_6 = XY\bar{Z}$$

$$\begin{aligned} m_4 + m_6 &= X\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z} \\ &= X\bar{Z}(\bar{Y} + Y) \\ &= X\bar{Z}(1) \\ &= X\bar{Z} \end{aligned}$$

4.2.1 카르노 도표 방법 개요

- 인접 사각형끼리 묶는 방법
  - 한 묶음은 크게, 묶음의 전체 개수는 최소화 해야 함
  - 하나의 묶음을 최대한 크게 만들어야 많은 변수를 제거할 수 있음
  - 하나의 묶음을 만들 때는 가능한 가장 큰 2의 거듭제곱 크기로 묶어야 함
    - 2^n(2, 4, 8, 16.....)
  - 묶음이 많을 수록 논리식의 항이 증가하여 복잡해짐

4.2.1 카르노 도표 방법 개요



4.2.1 카르노 도표 방법 개요

• 카르노 도표의 원리

- 공통된 변수만 유지하고 변하는 변수는 제거
- 부울 대수의 기본 공식을 활용하는 것과 동일하며, 이를 시각적으로 표현한 도구임

$$
\begin{aligned}
F &= XY + X\overline{Y} \\
&= X(Y + \overline{Y}) && \text{분배 법칙} \\
&= X(1) && \text{보수 법칙} \\
&= X
\end{aligned}
$$

$$XY + X\overline{Y} = X$$

4.2.2 2변수 카르노 도표

- 두 개의 입력변수를 가지는 부울함수
  - 4개의 최소항이 존재하여 4개의 사각형으로 구성됨
  - 각 사각형은 하나의 최소항에 대응함

$X \backslash Y$	0	1
0	m_o	m_1
1	m_2	m_3

$X \backslash Y$	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	$X\bar{Y}$	XY

4.2.2 2변수 카르노 도표

• 2변수 카르노 도표 간소화

X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$X \backslash Y$	0	1
0		
1		1

$$F = XY$$

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$X \backslash Y$	0	1
0		1
1	1	1

$$F = X + Y$$

4.2.3 3변수 카르노 도표

- 3개의 변수를 가지는 부울함수
  - 8개의 최소항을 가짐
  - 즉, 3변수 카르노 도표는 8개의 사각형으로 구성
  - 각 사각형은 하나의 최소항에 대응함

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	m_o	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

• 3변수 카르노 도표 간소화

$$F(X,Y,Z) = \Sigma m(0,1,2,6)$$

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	m_o	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	1	1		1
1				1

묶음 1: $\bar{X}\bar{Y}\cancel{\bar{Z}}, \bar{X}\bar{Y}\cancel{Z}$

묶음 2: $\cancel{\bar{X}}Y\bar{Z}, \cancel{X}Y\bar{Z}$

$$F(X,Y,Z) = \bar{X}\bar{Y} + Y\bar{Z}$$

4.2.3 3변수 카르노 도표

• 3변수 진리표를 만족하는 간소화된 논리회로도

입력	X	0	0	0	0	1	1	1	1
	Y	0	0	1	1	0	0	1	1
	Z	0	1	0	1	0	1	0	1
출력	F	1	0	1	0	1	0	1	1

$$F(X,Y,Z) = \Sigma m(0,2,4,6,7)$$

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

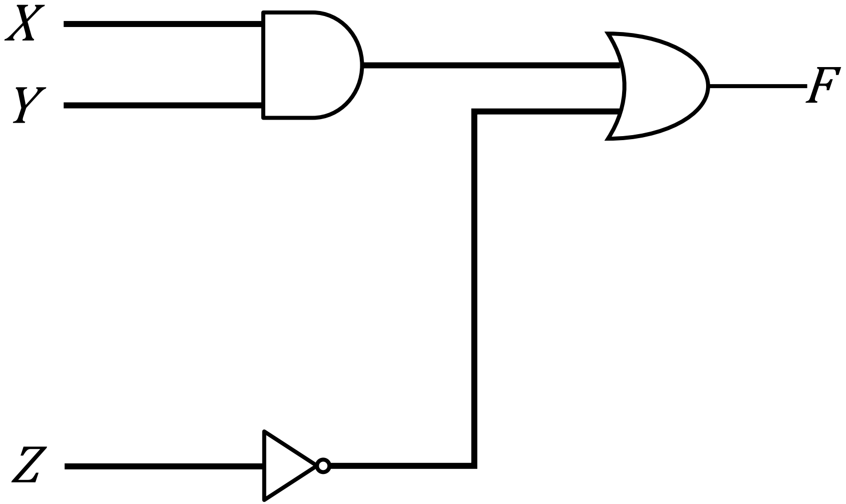
$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

묶음 1: $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}, X\bar{Y}\bar{Z}, \bar{X}Y\bar{Z}, XY\bar{Z}$

묶음 2: $XYZ, XY\bar{Z}$

$$F(X,Y,Z) = XY + \bar{Z}$$

- $F(X, Y, Z) = XY + \overline{Z}$의 논리 회로도



내용 정리

Summary

Contents

01 카르노 도표를 이용한 부울함수의 간소화

02 인접 사각형의 개념

03 2, 3변수의 카르노 도표

다음시간에는

5강.

부울함수의 간소화 및 구현(2)