06강

인공지능

논리에 의한 지식표현

컴퓨터과학과 이병래 교수

학습목차

01

명제논리

1. 명제와 진리표

명제(proposition)

- '참'과 '거짓'을 구분할 수 있는 문장

p = "영수는 한국인이다."

q = "존은 미국인이다."

기본명제

- 더 이상 분해할 수 없는 최소단위 명제
- p, q 등의 기호로 표시
  - 명제상수(propositional constant) 또는 원소식(atomic formula)이라고 부름

1. 명제와 진리표

합성명제

- 2개 이상의 기본명제를 결합한 명제

a = "영수는 한국인이고, 그리고 존은 미국인이다."

b = "영수는 한국인이거나, 또는 존은 미국인이다."

- 명제의 결합: 논리 연산자를 이용하여 표현함

$a = p$ **AND** q

$b = p$ **OR** q

1. 명제와 진리표

합성명제

- 진리표: 명제변수의 진릿값에 따른 합성명제의 진릿값을 표로 나타낸 것

$$Z = F_L(p, q)$$

p	q	Z
T	T	?
T	F	
F	T	
F	F	

2. 명제논리를 이용한 지식표현

명제논리(propositional logic)

- 참·거짓을 구분할 수 있는 명제를 기호로 표현
- 논리 연산자
  - ∨ : 선언, OR
  - ∧ : 연언, AND
  - ~ : 부정, NOT
  - → : 함의, 조건명제
  - ↔ : 동치

논리 연산자의
완전집합

2. 명제논리를 이용한 지식표현

조건명제

- $p \rightarrow q$: 'p이면 q이다' 라는 합성명제를 표현하는 기호

p = "비가 온다."

q = "야유회를 취소한다."

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

비가 오면 야유회를 취소한다.

비가 오며, 야유회를 취소한다.

비가 오는데, 야유회를 취소하지 않는다.

비가 오지 않지만, 야유회를 취소한다.

비가 오지 않고, 야유회를 취소하지 않는다.

2. 명제논리를 이용한 지식표현

조건명제

- $p \rightarrow q$: 'p이면 q이다' 라는 합성명제를 표현하는 기호

p = "비가 온다."

q = "야유회를 취소한다."

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \lor q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$\Rightarrow$ $p \rightarrow q \equiv \sim p \lor q$

2. 명제논리를 이용한 지식표현

명제논리의 정형식

1. 기본명제는 논리식이다.
2. p가 논리식일 때, $\sim p$도 논리식이다.
3. p, q가 논리식일 때, $p \rightarrow q$도 논리식이다.
4. ①~③에 의해 얻어지는 식만이 논리식이다.

※ $p \wedge q \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$

※ $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$

2. 명제논리를 이용한 지식표현

명제논리의 표준형

연언표준형 | 선언표준형

- 절들의 논리곱(연언) 형식으로 표현된 논리식

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n, n \geq 1$$

  - $F_i, i = 1, 2, \cdots, n$은 리터럴들의 논리합으로 이루어진 절

$$F_i = p_{i1} \vee p_{i2} \vee \cdots \vee p_{im},$$

$p_{ij}, j = 1, 2, \cdots, m$: 리터럴(기본명제 또는 기본명제의 부정)

예 $(p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee s \vee t)$

※ p, q, r, s, t는 기본명제

2. 명제논리를 이용한 지식표현

명제논리의 표준형

연언표준형	선언표준형

- 절들의 논리합(선언) 형식으로 표현된 논리식

$$G_1 \vee G_2 \vee \cdots \vee G_n, n \geq 1$$

  - $G_i, i = 1, 2, \cdots, n$은 리터럴들의 논리곱으로 이루어진 절

$$G_i = p_{i1} \wedge p_{i2} \wedge \cdots \wedge p_{im},$$

$p_{ij}, j = 1, 2, \cdots, m$: 리터럴(기본명제 또는 기본명제의 부정)

예 $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge s \wedge t)$

※ p, q, r, s, t는 기본명제

2. 명제논리를 이용한 지식표현

항진식

- 논리식을 구성하는 기본명제들의 값에 관계없이 항상 참인 논리식
- 예: $H = p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

2. 명제논리를 이용한 지식표현

항진식

- 논리식을 구성하는 기본명제들의 값에 관계없이 항상 참인 논리식
- 예: $H = \{p \wedge (p \rightarrow q)\} \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$\{p \wedge (p \rightarrow q)\} \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

2. 명제논리를 이용한 지식표현

항진식

- 논리식을 구성하는 기본명제들의 값에 관계없이 항상 참인 논리식
- 예: $H = \{(p \to q) \wedge (q \to r)\} \to (p \to r)$

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$\{(p \to q) \wedge (q \to r)\} \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

3. 명제논리의 추론

연역(deduction)

- 이미 알고 있는 전제를 이용하여 정확한 결론을 이끌어 내는 추론 과정

긍정논법(*modus ponens*)

"α와 $\alpha \rightarrow \beta$가 성립되면 β가 성립된다."

부정논법(*modus tollens*)

"$\sim\beta$와 $\alpha \rightarrow \beta$가 성립되면 $\sim\alpha$가 성립된다."

02

술어논리

1. 술어논리식의 표현

명제논리를 이용한 일반적 규칙 표현의 어려움

p = 소크라테스는 사람이다.

q = 플라톤은 사람이다.

r = 모든 사람은 죽음을 면할 수 없다.

소크라테스는 죽음을 면할 수 없다.

플라톤은 죽음을 면할 수 없다.

1. 술어논리식의 표현

기본명제의 표현

- 주어진 문장을 객체와 객체를 수식하는 술어로 분해하여 '술어(객체)' 형식으로 표현

"소크라테스는 사람이다."

소크라테스 → 객체, 사람이다 → 술어

→ $Man(SOCRATES)$

"플라톤은 사람이다."

→ $Man(PLATO)$

1. 술어논리식의 표현

객체 변수

- 하나 이상의 객체에 대해 적용되는 문장의 표현에는 변수를 사용함

"모든 사람은 죽음을 면할 수 없다."

➡ 모든 x에 대해, x가 사람이면 x는 죽음을 면할 수 없다.

➡ $\forall x \{Man(x) \rightarrow Mortal(x)\}$

1. 술어논리식의 표현

객체 변수

- 하나 이상의 객체에 대해 적용되는 문장의 표현에는 변수를 사용함

$$Man(SOCRATES)$$

$$Man(PLATO)$$

$$\forall x \{Man(x) \rightarrow Mortal(x)\}$$

$$\Downarrow$$

$$Mortal(SOCRATES)$$

$$Mortal(PLATO)$$

1. 술어논리식의 표현

술어논리식의 기본명제

- 기본 형식: 술어(객체$_1$, 객체$_2$, ⋯, 객체$_n$)
- 객체: 상수, 함수, 변수

객체 상수

"소크라테스는 사람이다."

⇨ $Man(SOCRATES)$

"X가 Y의 위에 있다."

⇨ $On(X, Y)$

1. 술어논리식의 표현

술어논리식의 기본명제

- 기본 형식: 술어(객체$_1$, 객체$_2$, ⋯, 객체$_n$)
- 객체: 상수, 함수, 변수

함수

"철수의 아버지는 한국인이다."

$father$(철수) ⟶ 영호

⇨ $Korean(father$(철수)$)$

⇨ $Korean$(영호)

1. 술어논리식의 표현

술어논리식의 기본명제

- 기본 형식: 술어(객체$_1$, 객체$_2$, ⋯, 객체$_n$)
- 객체: 상수, 함수, 변수
  - 객체변수: 한정기호(∀, ∃) 사용하여 정의역 내의 범위를 정할 수 있음

변수와 전칭기호 ∀

» 정의역의 모든 원소에 대해 성립함

(예) 모든 새는 날개가 있다.

⇨ $\forall x\ \{Bird(x) \rightarrow HasWings(x)\}$

1. 술어논리식의 표현

술어논리식의 기본명제

- 기본 형식: 술어(객체$_1$, 객체$_2$, ⋯, 객체$_n$)
- 객체: 상수, 함수, 변수
  - 객체변수: 한정기호(∀, ∃) 사용하여 정의역 내의 범위를 정할 수 있음

변수와 존재기호 ∃

» 조건을 만족하는 원소가 적어도 한 개는 존재함

(예) 농구선수 중에는 키가 크지 않은 선수도 있다.

⇨ $\exists x \ \{BasketballPlayer(x) \wedge \sim\boldsymbol{Tall}(\boldsymbol{x})\}$

1. 술어논리식의 표현

술어논리식의 기본명제

- 한정기호에 대한 등식

1. $\sim\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \{\sim P(x)\}$
2. $\sim\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \{\sim P(x)\}$
3. $\forall x\, \{P(x) \land Q(x)\} \equiv \forall x\, P(x) \land \forall y\, Q(y)$
4. $\exists x\, \{P(x) \lor Q(x)\} \equiv \exists x\, P(x) \lor \exists y\, Q(y)$

2. 술어논리식의 정형식

항(term)의 정의

1. 객체상수, 객체변수는 항이다.
2. $t_1, t_2, \cdots, t_n$을 항이라 하고, f를 n변수의 함수기호라 할 때, $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$은 항이다.
3. ①, ②에 의해 항이라고 정의되는 것만 항이다. 항은 정의역 D의 원소이다.

2. 술어논리식의 정형식

정형식(*wff*: well-formed formula)의 정의

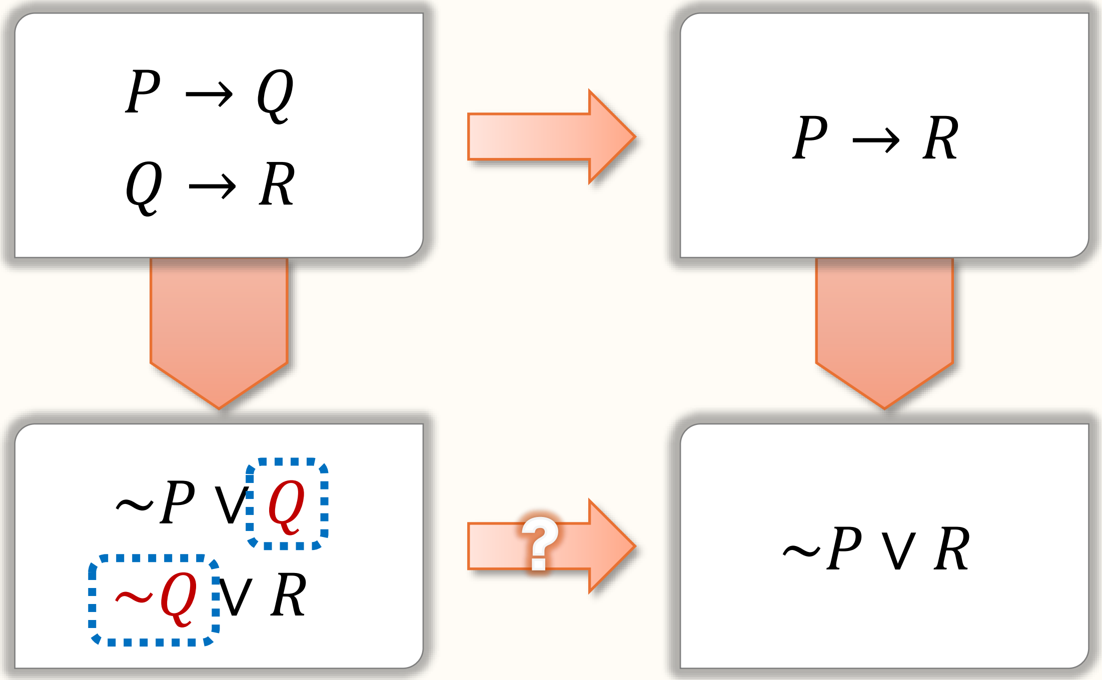
1. 참(*T*), 거짓(*F*)은 모두 *wff* 이다.
2. $t_1, t_2, \cdots, t_n$이 항이고, P가 n개의 항을 수식하는 술어논리기호인 경우 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$은 *wff* 이다.
3. P, Q가 *wff* 이면 $\sim P, P \rightarrow Q$도 *wff* 이다.
4. P가 *wff* 이고 x가 객체변수일 경우 $\forall x\ P, \exists x\ P$는 *wff* 이다.
5. ①~④에 의해 *wff* 라고 정의된 것만이 *wff* 이다.

03

술어논리의 추론

1. 술어논리와 도출연역

도출연역(resolution)



1. 술어논리와 도출연역

도출연역(resolution)

- 기본 도출식

부모절	도출절
P와 $\sim P \vee Q$	Q
$P \vee Q$와 $\sim P \vee Q$	Q
$\sim P$와 P	$false$
$\sim P \vee Q$와 $\sim Q \vee R$	$\sim P \vee R$

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 도출연역

- 두 부모절에서 객체를 포함한 논리식이 도출절의 쌍을 이루어야 함

$$\sim Father(A,B) \vee Male(A)$$
$$Father(A,B)$$

⇨ $Male(A)$

$$\sim Father(A,B) \vee Male(A)$$
$$Father(C,D)$$

⇨ 객체가 다르므로 도출이 이루어지지 않음

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 도출연역

- 단일화(unification): 객체변수를 포함하는 경우 객체가 일치하도록 객체변수를 대체함

$$\sim Father(x, y) \vee Male(x)$$

$$Father(A, B)$$

$$\Downarrow \quad x \leftarrow A, y \leftarrow B$$

$$\sim Father(A, B) \vee Male(A)$$

$$Father(A, B)$$

$$\Rightarrow Male(A)$$

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 절 분리

$$\forall x\ \left[P(x) \rightarrow \left\{\forall y \left(P(y) \rightarrow P\left(f(x,y)\right)\right) \wedge \sim\left(\forall y\ \left(Q(x,y) \rightarrow P(y)\right)\right)\right\}\right]$$

① $p \rightarrow q$를 $\sim p \vee q$로 표현

$$\forall x\ \left[\sim P(x) \vee \left\{\forall y \left(\sim P(y) \vee P\left(f(x,y)\right)\right) \wedge \sim\left(\forall y\ \left(\sim Q(x,y) \vee P(y)\right)\right)\right\}\right]$$

② 드모르강의 법칙으로
부정의 범위를 줄임

$$\forall x\ \left[\sim P(x) \vee \left\{\forall y \left(\sim P(y) \vee P\left(f(x,y)\right)\right) \wedge \left(\exists y\ \left(Q(x,y) \wedge \sim P(y)\right)\right)\right\}\right]$$

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 절 분리

$$\forall x\ \left[\sim P(x) \vee \left\{\forall y\left(\sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big)\right) \wedge \left(\exists y\ \big(Q(x,y) \wedge \sim P(y)\big)\right)\right\}\right]$$

③ 변수를 표준화

$$\forall x\ \left[\sim P(x) \vee \left\{\forall y\left(\sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big)\right) \wedge \left(\exists w\ \big(Q(x,w) \wedge \sim P(w)\big)\right)\right\}\right]$$

④ 존재기호를 제거

$$\forall x\ \left[\sim P(x) \vee \left\{\forall y\left(\sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big)\right) \wedge \left(Q(x,g(x)) \wedge \sim P(g(x))\right)\right\}\right]$$

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 절 분리

$$\forall x \left[\sim P(x) \vee \left\{ \forall y \left(\sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big) \right) \wedge \left(Q\big(x, g(x)\big) \wedge \sim P\big(g(x)\big) \right) \right\} \right]$$

⑤ 관두형으로 표현

$$\forall x \; \forall y \left[\sim P(x) \vee \left\{ \left(\sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big) \right) \wedge \left(Q\big(x, g(x)\big) \wedge \sim P\big(g(x)\big) \right) \right\} \right]$$

⑥ 연언 표준형으로 변환

$$\forall x \; \forall y \; [\{\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big)\} \wedge$$
$$\{\sim P(x) \vee Q\big(x, g(x)\big)\} \wedge$$
$$\{\sim P(x) \vee \sim P\big(g(x)\big)\}]$$

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 절 분리

$$\forall x\ \forall y\ [\{\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x,y))\} \wedge$$
$$\{\sim P(x) \vee Q(x, g(x))\} \wedge$$
$$\{\sim P(x) \vee \sim P(g(x))\}]$$

⑦ 전칭기호 제거
⑧ '∧' 기호 제거

$$\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x,y))$$
$$\sim P(x) \vee Q(x, g(x))$$
$$\sim P(x) \vee \sim P(g(x))$$

1. 술어논리와 도출연역

술어논리식의 절 분리

$$\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P\big(f(x,y)\big)$$

$$\sim P(x) \vee Q\big(x, g(x)\big)$$

$$\sim P(x) \vee \sim P\big(g(x)\big)$$

⑨ 변수 이름이 다르게 변경

$$\sim P(x_1) \vee \sim P(y) \vee P\big(f(x_1,y)\big)$$

$$\sim P(x_2) \vee Q\big(x_2, g(x_2)\big)$$

$$\sim P(x_3) \vee \sim P\big(g(x_3)\big)$$

2. 도출연역에 의한 정리 증명

정리 증명 알고리즘

```
증명하고자 하는 정리를 부정하여 공리의 리스트에 첨가;
공리들을 연언표준형으로 표현하여 절의 형태로 변환;
while 도출 가능한 절의 쌍이 존재 do
    도출할 수 있는 절의 쌍을 찾아 도출절을 구함;
    if 도출절 = false then
        return true;    // 정리가 참임이 증명됨
    else
        도출절을 절들의 리스트에 첨가;
    end-if;
end-while;
return false;           // 정리증명에 실패함
```

2. 도출연역에 의한 정리 증명

예제

- 공리

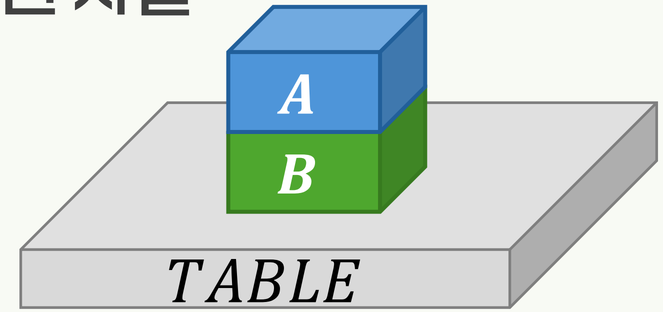
$\forall x\ \forall y\ \{On(x,y) \rightarrow Above(x,y)\}$

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\{Above(x,y) \wedge Above(y,z)\} \rightarrow Above(x,z)]$

※ $On(x,y)$: x가 y의 바로 위에 놓여있음을 의미하는 술어

※ $Above(x,y)$: x가 y보다 위에 있음을 의미하는 술어

- 관측된 사실



$On(A,B)$

$On(B,TABLE)$

'$Above(A,TABLE)$'임을 증명하라.

2. 도출연역에 의한 정리 증명

절 형태로 변환하기

- 공리

$\forall x\ \forall y\ \{On(x,y) \rightarrow Above(x,y)\}$

⇨ $\sim On(u,v) \lor Above(u,v)$

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\{Above(x,y) \land Above(y,z)\} \rightarrow Above(x,z)]$

⇨ $\sim Above(x,y) \lor \sim Above(y,z) \lor Above(x,z)$

- 관측된 사실

$On(A,B)$, $On(B,TABLE)$

- 증명할 정리의 부정

$Above(A,TABLE)$ ⇨ $\sim Above(A,TABLE)$

2. 도출연역에 의한 정리 증명

증명 과정

$\sim Above(x,y) \lor \sim Above(y,z) \lor Above(x,z)$

$\sim Above(A,TABLE)$

$x \leftarrow A, z \leftarrow TABLE$

$\sim On(u,v) \lor Above(u,v)$

$\sim Above(A,y) \lor \sim Above(y,TABLE)$

$u \leftarrow y, v \leftarrow TABLE$

$\sim On(u,v) \lor Above(u,v)$

$\sim On(y,TABLE) \lor \sim Above(A,y)$

$u \leftarrow A, v \leftarrow y$

$\sim On(A,y) \lor \sim On(y,TABLE)$

2. 도출연역에 의한 정리 증명

증명 과정

$\sim On(u,v) \vee Above(u,v)$

$\sim On(y,TABLE) \vee \sim Above(A,y)$

$u \leftarrow A, v \leftarrow y$

$On(A,B)$

$\sim On(A,y) \vee \sim On(y,TABLE)$

$y \leftarrow B$

$On(B,TABLE)$

$\sim On(B,TABLE)$

$false$

$\sim Above(A,TABLE)$로 인해 모순 발생

$Above(A,TABLE)$이 참임이 증명됨

정리하기

- 술어논리의 기본명제는 객체와 이를 수식하는 술어로 분해하여 '술어(객체)' 형식으로 표현한다. 객체는 객체상수, 객체변수, 함수가 사용될 수 있다.
- 객체변수에 대해 전칭기호(∀)나 존재기호(∃)라는 한정기호를 사용하여 변수에 대한 정의역 내의 범위를 정할 수 있다.
- 논리식의 표준형 중 연언표준형은 리터럴(기본명제 또는 기본명제의 부정)들이 논리합으로 연결되어 만들어진 절들이 논리곱으로 연결된 형태의 논리식이며, 선언표준형은 리터럴들이 논리곱으로 연결되어 만들어진 절들이 논리합으로 연결된 형태의 논리식이다.

정리하기

- 연역은 이미 알고 있는 판단(전제)을 근거로 새로운 판단(결론)을 이끌어 내는 추론 과정으로, $P \rightarrow Q$이고 P가 참이면 Q가 참으로 추론하는 긍정논법, $P \rightarrow Q$이고 Q가 거짓이면 P가 거짓으로 추론하는 부정논법이 있다.
- 술어논리식의 도출을 하려면 도출절의 쌍에서 변수가 존재할 경우 객체가 서로 일치하도록 단일화를 해야 한다.
- 도출연역에 의한 정리 증명은 증명하고자 하는 정리를 부정하여 공리의 리스트에 첨가한 다음 도출절을 구하는 과정을 반복한다. 이때 도출 결과 거짓이 나오면 증명하고자 하는 정리가 참임이 증명된다.

07강

다음시간안내 ▶▶▶

퍼지이론