ALGORITHM
알고리즘

Lecture 15

NP-완전 문제

컴퓨터과학과 | 김진욱 교수

학습목차

01. 기본 개념

NP-완전 문제?

다음을 모두 만족하는 문제 A

- 클래스 NP에 속하는 모든 문제가 문제 A로 다항 시간에 변환됨
- 문제 A가 클래스 NP에 속함

클래스 NP

비결정론적 튜링 기계를 이용하여 다항 시간에 해결할 수 있는 모든 판정 문제의 집합

- 튜링 기계 Turing machine → 컴퓨터의 이론적 모델
  - ✓ 구성요소 → 테이프, 기호, 헤드, 상태, 규칙
  - ✓ 결정론적 튜링 기계

…	6	7	8	9	10	…

  - ✓ 비결정론적 튜링 기계

…	6	7	8	9	10	…

클래스 NP

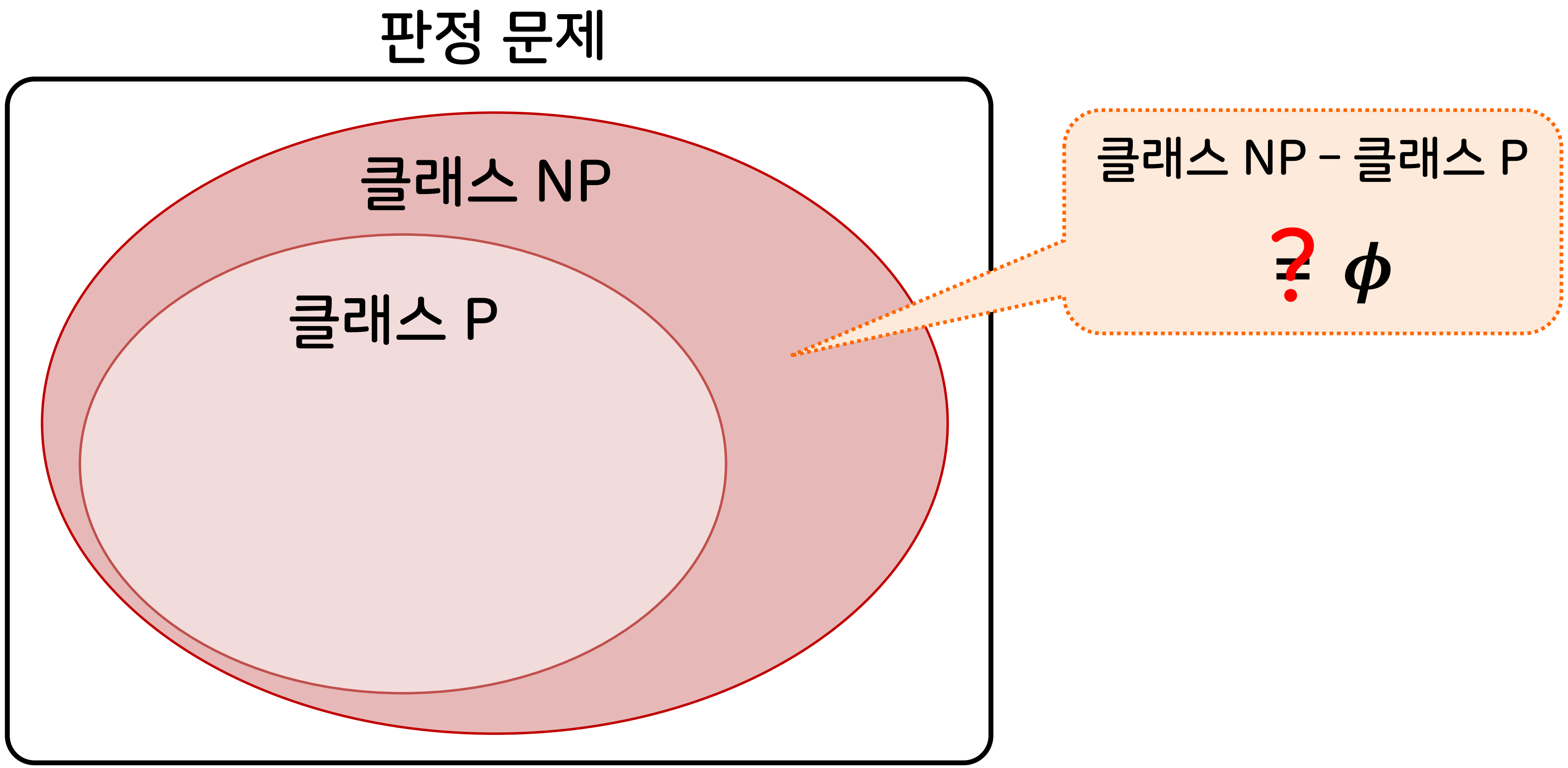
비결정론적 튜링 기계를 이용하여 다항 시간에 해결할 수 있는 모든 판정 문제의 집합

- 다항 시간 알고리즘 → 수행시간이 입력 크기에 대한 다항식으로 표현됨
  - ✓ $O(1)$, $O(\log n)$, $O(n)$, $O(n\log n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, …
- 지수 시간 알고리즘 → $O(2^n)$, $O(3^n)$, …

- 판정 문제 decision problem → '예' 또는 '아니요' 중 하나를 답으로 요구하는 문제
- 최적화 문제 optimization problem → 최솟값 또는 최댓값을 구하는 형태의 문제

클래스 P

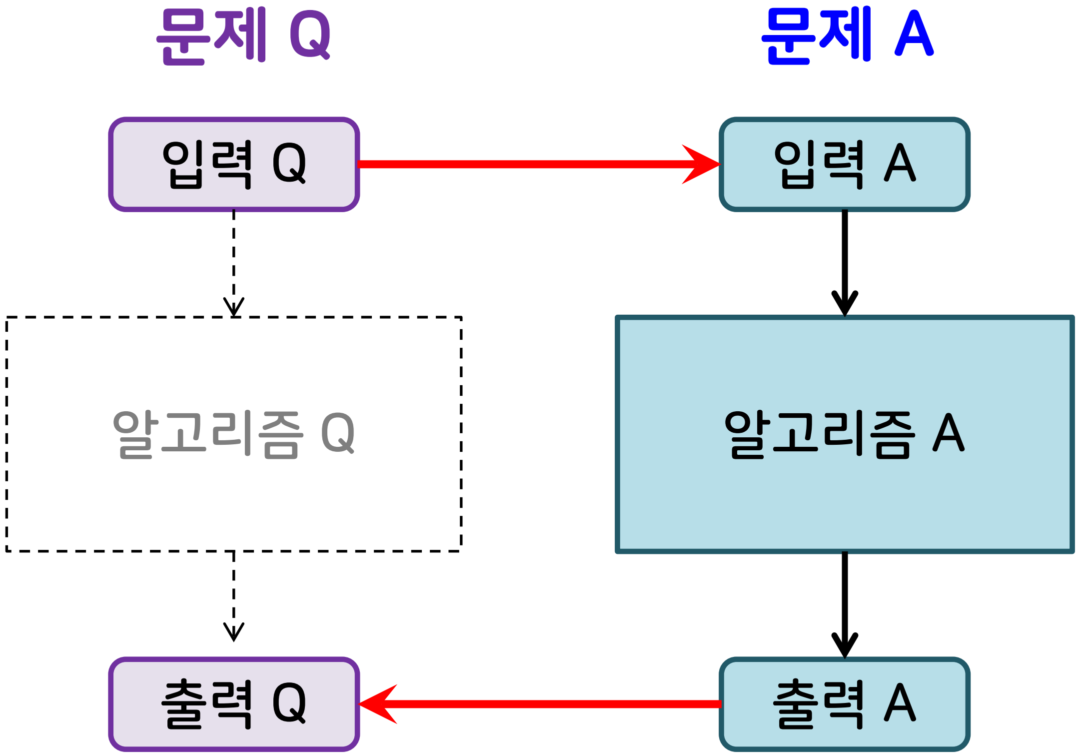
- **결정론적 튜링 기계를 이용하여 다항 시간에 해결할 수 있는 모든 판정 문제의 집합**



변환 reduction

문제 Q가 문제 A로 변환됨

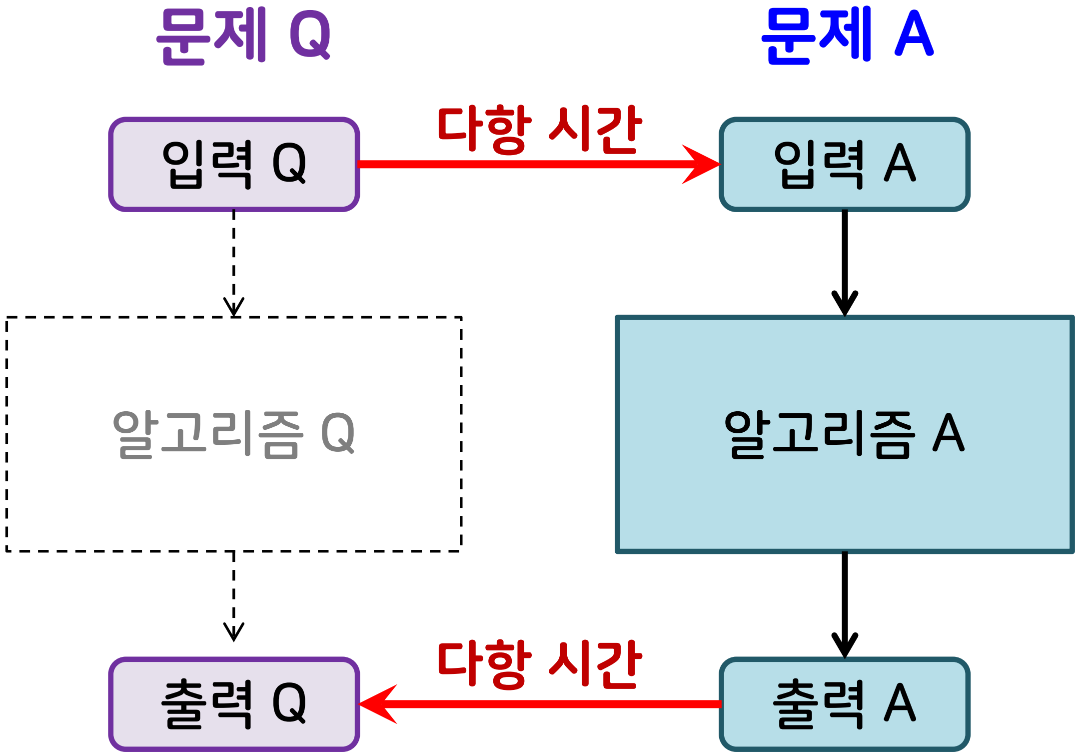
- 문제 Q의 입력과 출력을 문제 A의 입력과 출력 형태로 바꿀 수 있고
- 여기에 문제 A를 해결하는 알고리즘을 적용하여 문제 Q를 해결 가능



변환 reduction

문제 Q가 문제 A로 다항 시간에 변환됨

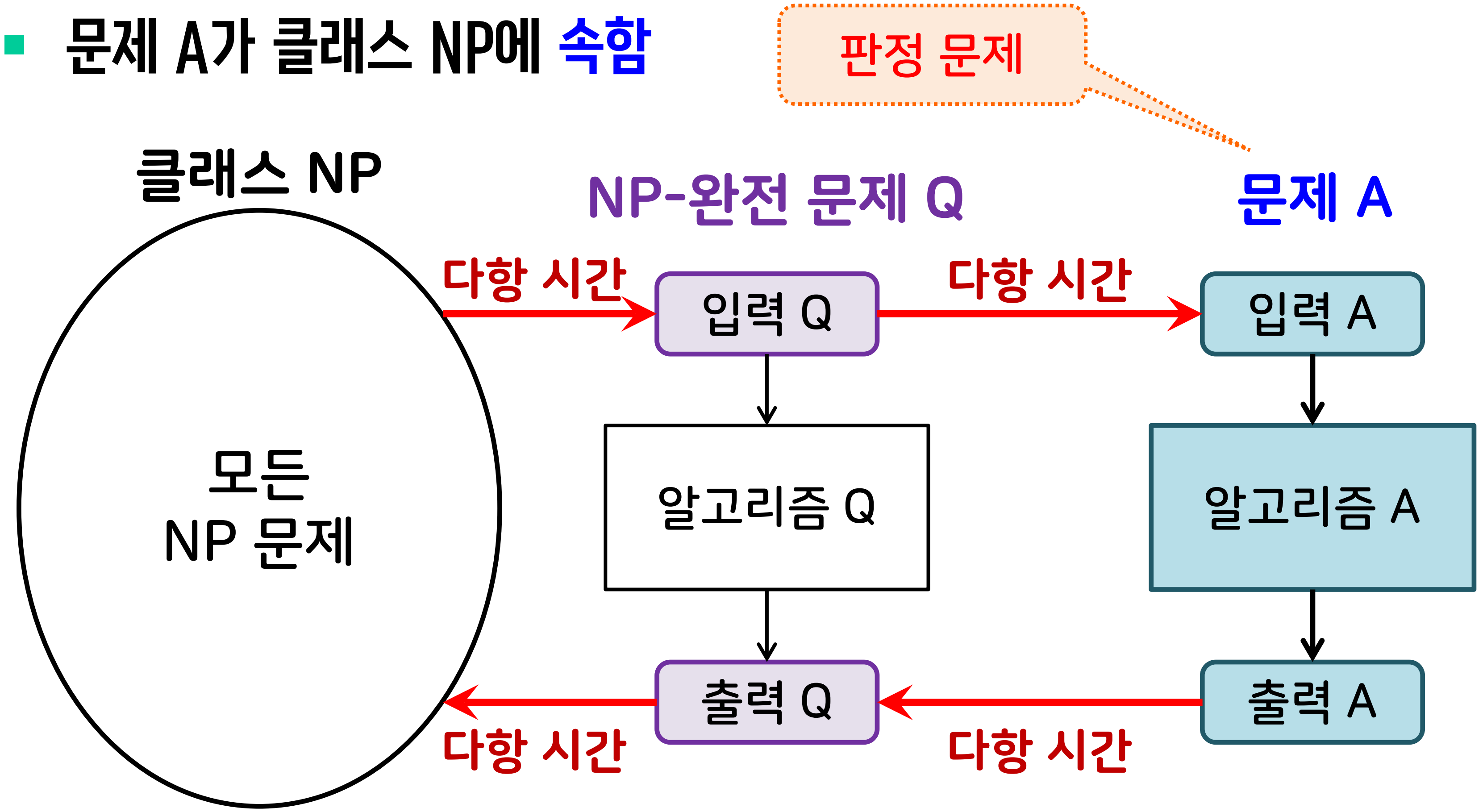
- 문제 Q의 입력과 출력을 문제 A의 입력과 출력 형태로 다항 시간에 바꿀 수 있고
- 여기에 문제 A를 해결하는 알고리즘을 적용하여 문제 Q를 해결 가능



NP-완전 문제

다음을 모두 만족하는 문제 A

- 클래스 NP에 속하는 모든 문제가 문제 A로 다항 시간에 변환됨
- 문제 A가 클래스 NP에 속함



NP-완전 문제_예

- CNF 만족성 문제
- 클리크 판정 문제
- 버텍스 커버 문제
- 해밀토니언 사이클 문제
- 외판원 문제
- 통 채우기 문제

02. 근사 알고리즘

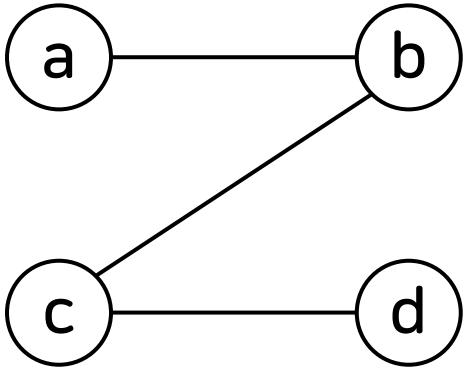
근사 알고리즘?

- **최적화 문제에 대하여 최적의 해에 가까운 근사해를 다항 시간에 구하는 알고리즘**

- **NP-하드 문제에 많이 이용됨**
  - NP-하드 문제 → 클래스 NP에 속하는 모든 문제가 그 문제로 다항 시간에 변환되는 문제
    - ✓ 모든 NP-완전 문제는 NP-하드 문제임
    - ✓ NP-하드 문제이지만 NP-완전 문제가 아닌 경우 → 판정 문제가 아닌 **최적화 문제**, 판정 문제이지만 클래스 NP에 속하지 못하는 정지(halting) 문제 등

버텍스 커버 문제

주어진 그래프의 모든 간선과 맞닿은 최소 크기의 정점의 부분 집합을 찾는 문제



{a, b, c, d}

{a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}

{a, c}, {b, c}, {b, d}

{a, b}, {a, d}, {c, d}

{a}, {b}, {c}, {d}

ϕ

버텍스 커버 문제_근사 알고리즘

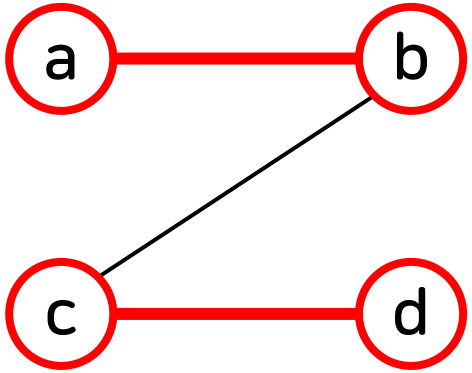
선택한 간선의 양 끝 정점을 포함시키는 방식

```
ApproxVertexCover (G)
{
  int Size = 0;
  while (E != Φ) {
    e = E에 속하는 임의의 간선 (u,v);
    C[++Size] = e.u;
    C[++Size] = e.v;
    E에서 u에 맞닿은 모든 간선과
          v에 맞닿은 모든 간선을 제거;
  }
  return (C[ ]);
}
```

C[ ]와 맞닿지 않은 간선이 존재하는 동안

O(|E|)

선택한 간선의 두 정점을 C[ ]에 추가

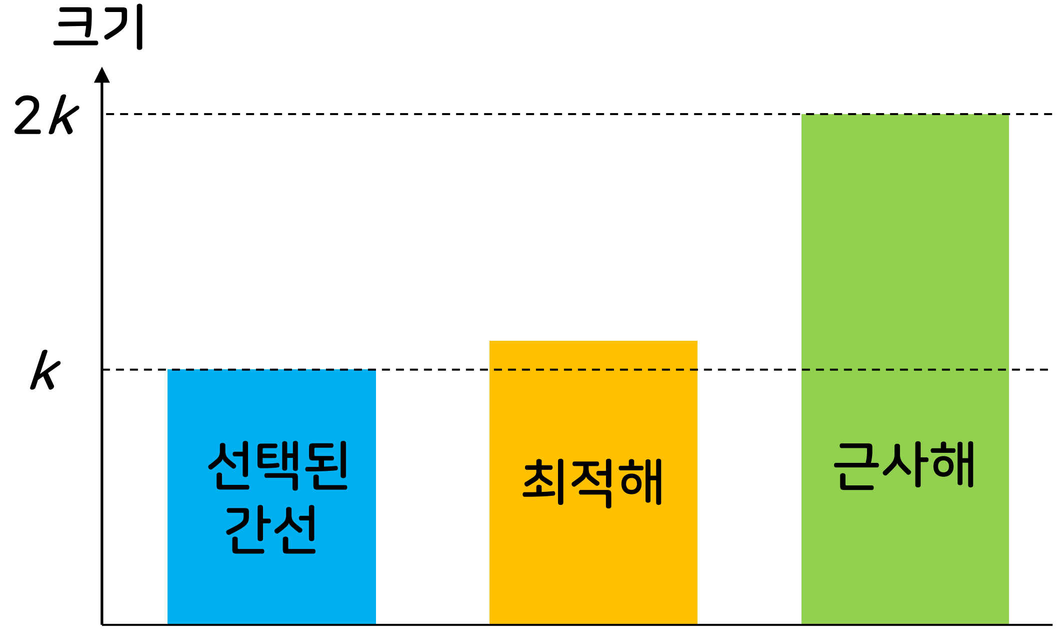


C = {a, b, c, d}

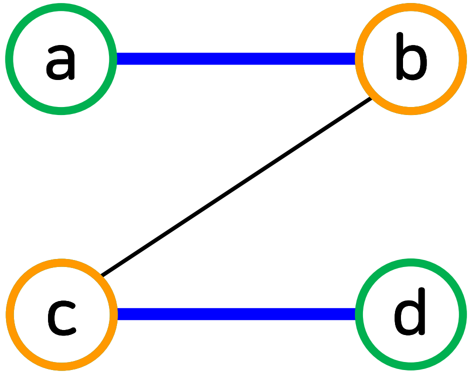
버텍스 커버 문제_근사 알고리즘_특징

선택한 간선의 양 끝 정점을 포함시키는 방식

- 근사해는 최적해의 **두 배**가 넘지 않음

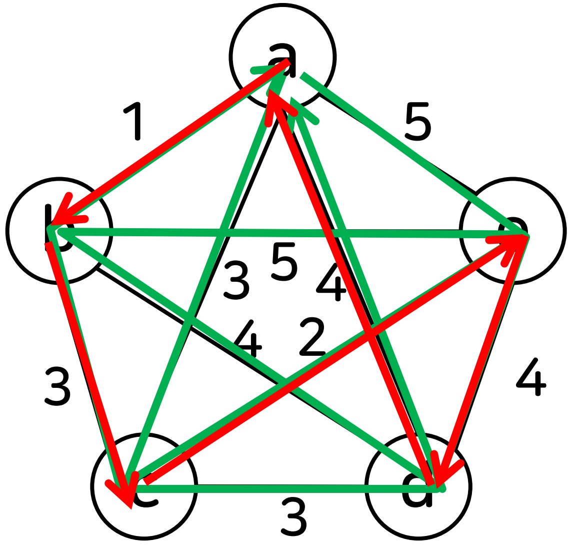


k : 루프 반복 횟수



외판원 문제

여러 도시 및 도시 간의 이동에 필요한 비용이 주어진 경우
최소 비용으로 모든 도시를 한 번씩만 방문하고 처음 도시로 돌아오는 방법을 찾는 문제



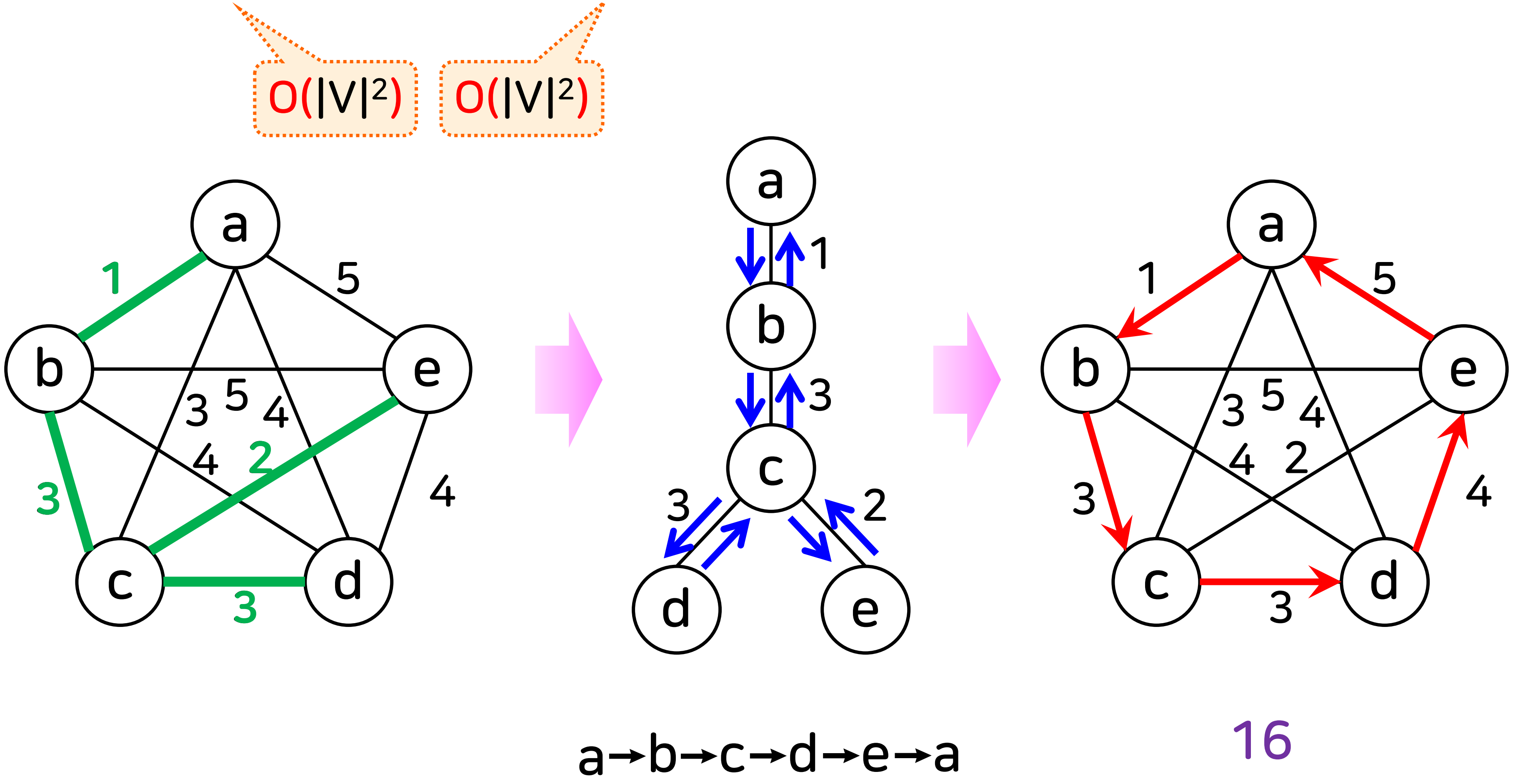
16

18

14

외판원 문제_근사 알고리즘

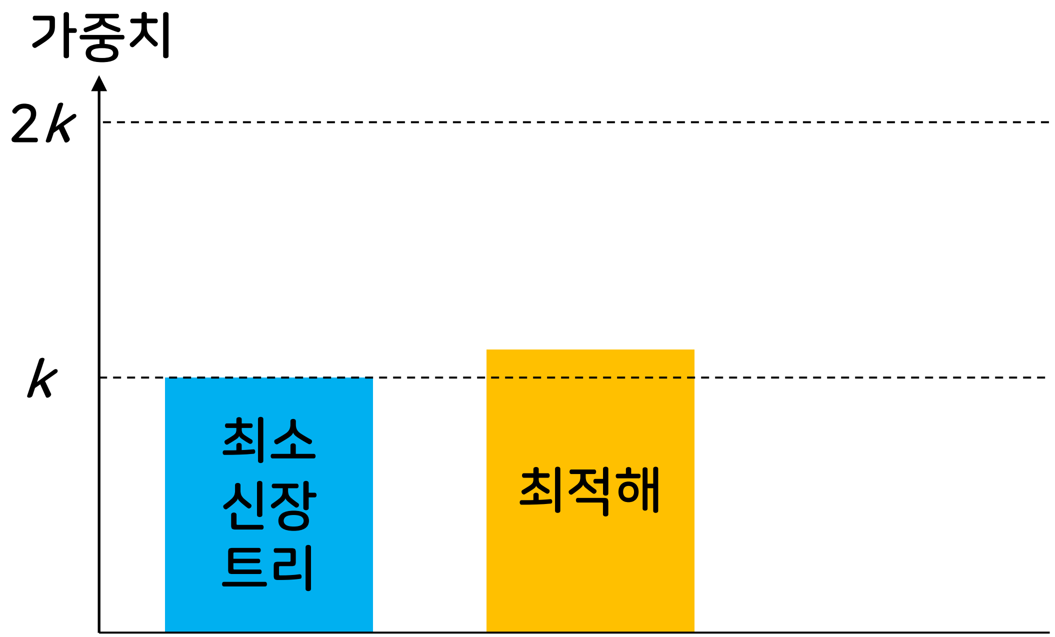
최소 신장 트리와 깊이 우선 탐색을 이용하는 방식

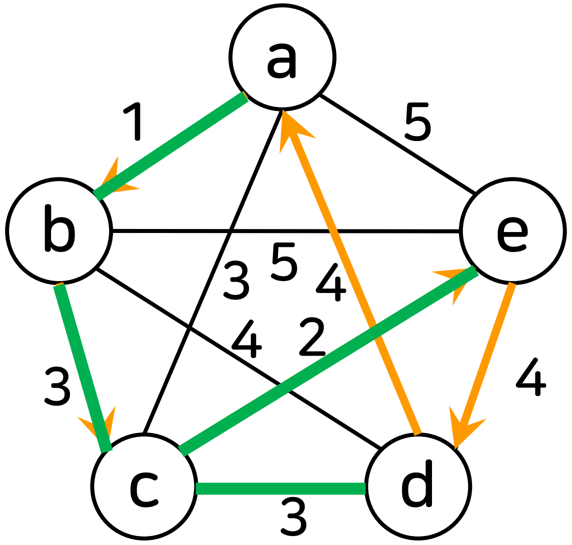


외판원 문제_근사 알고리즘_특징

최소 신장 트리와 깊이 우선 탐색을 이용하는 방식

- 가정 → 이동 비용이 삼각부등식을 만족
- 근사해는 최적해의 두 배가 넘지 않음



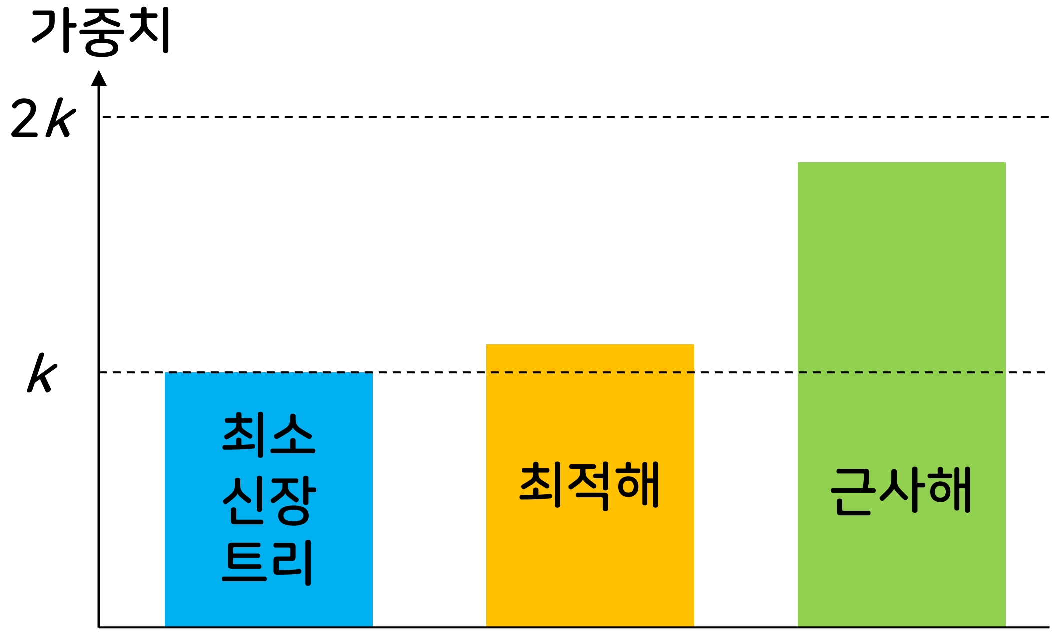


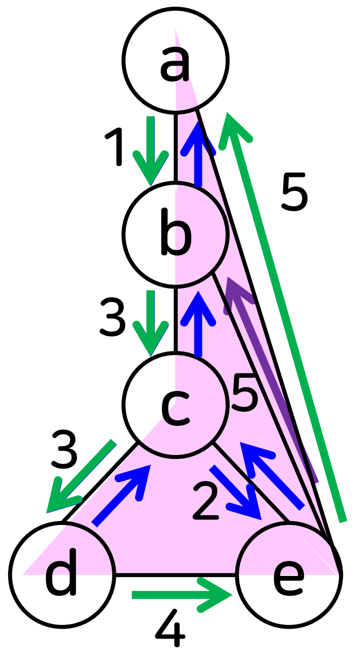
최소 신장 트리		신장 트리		사이클
$k=9$	≤	10	≤	14 =최적해

외판원 문제_근사 알고리즘_특징

최소 신장 트리와 깊이 우선 탐색을 이용하는 방식

- 가정 → 이동 비용이 **삼각부등식**을 만족
- 근사해는 최적해의 **두 배**가 넘지 않음





깊이 우선 탐색

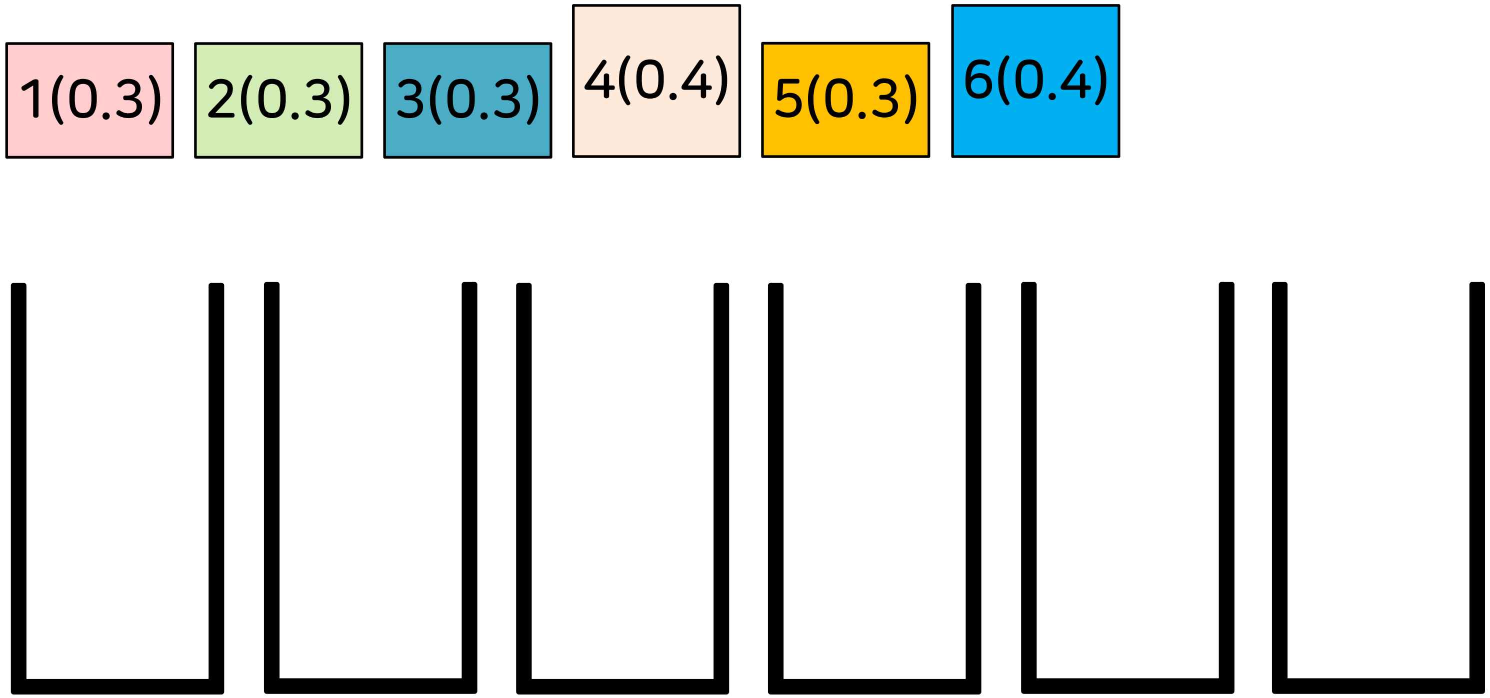
$2k = 18 \geq 17 \geq 17 \geq 16$

=근사해

통 채우기 문제

주어진 다양한 크기의 물체 n개를 최소 개수의 통에 넣는 문제

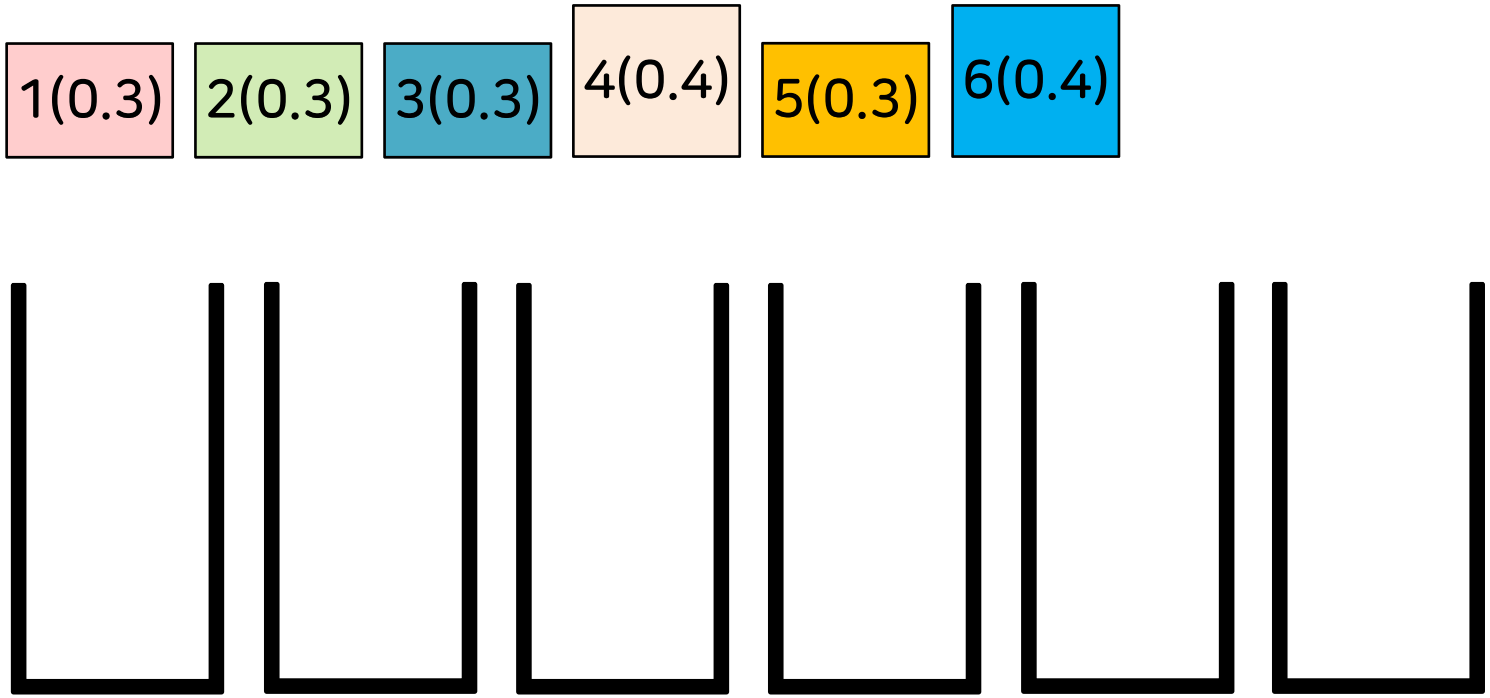
- 가정 → 통 크기 1, 물체 크기 0 이상 1 이하



통 채우기 문제

주어진 다양한 크기의 물체 n개를 최소 개수의 통에 넣는 문제

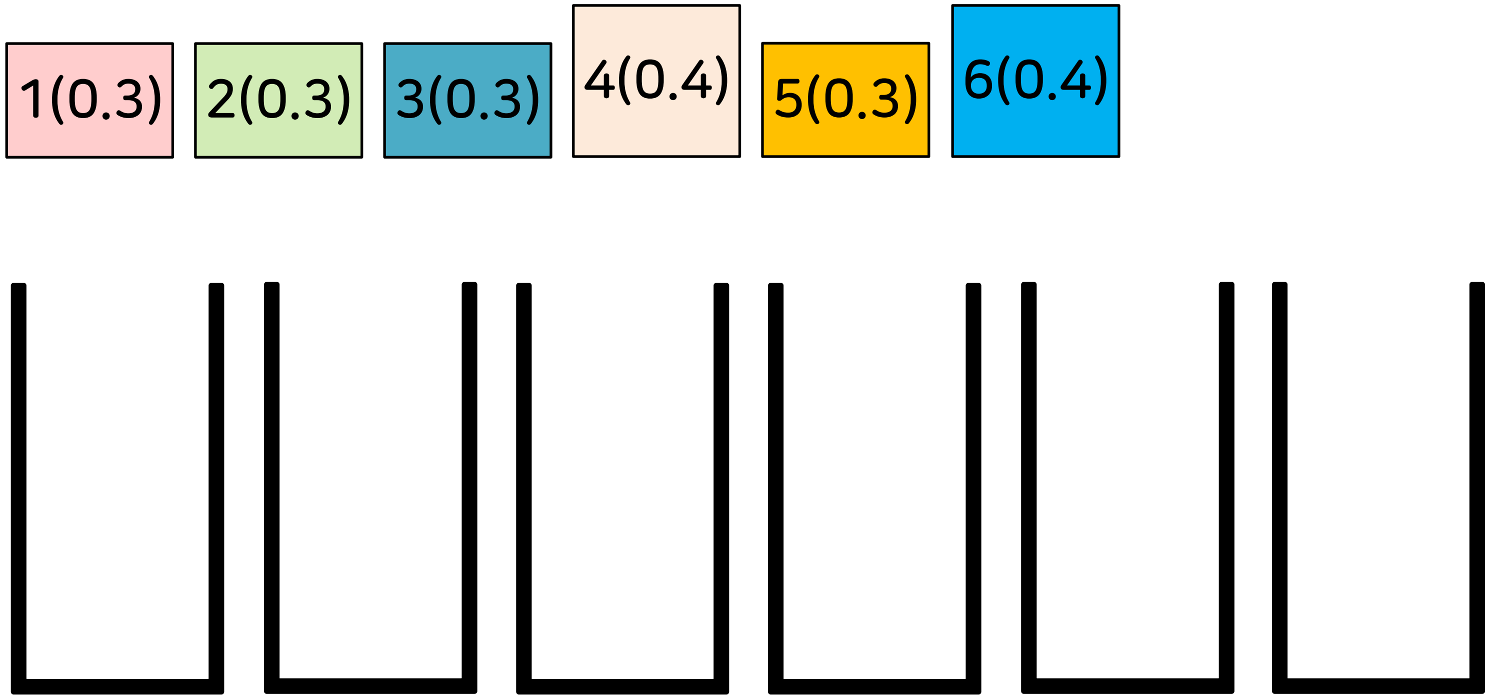
- 가정 → 통 크기 1, 물체 크기 0 이상 1 이하



통 채우기 문제

주어진 다양한 크기의 물체 n개를 최소 개수의 통에 넣는 문제

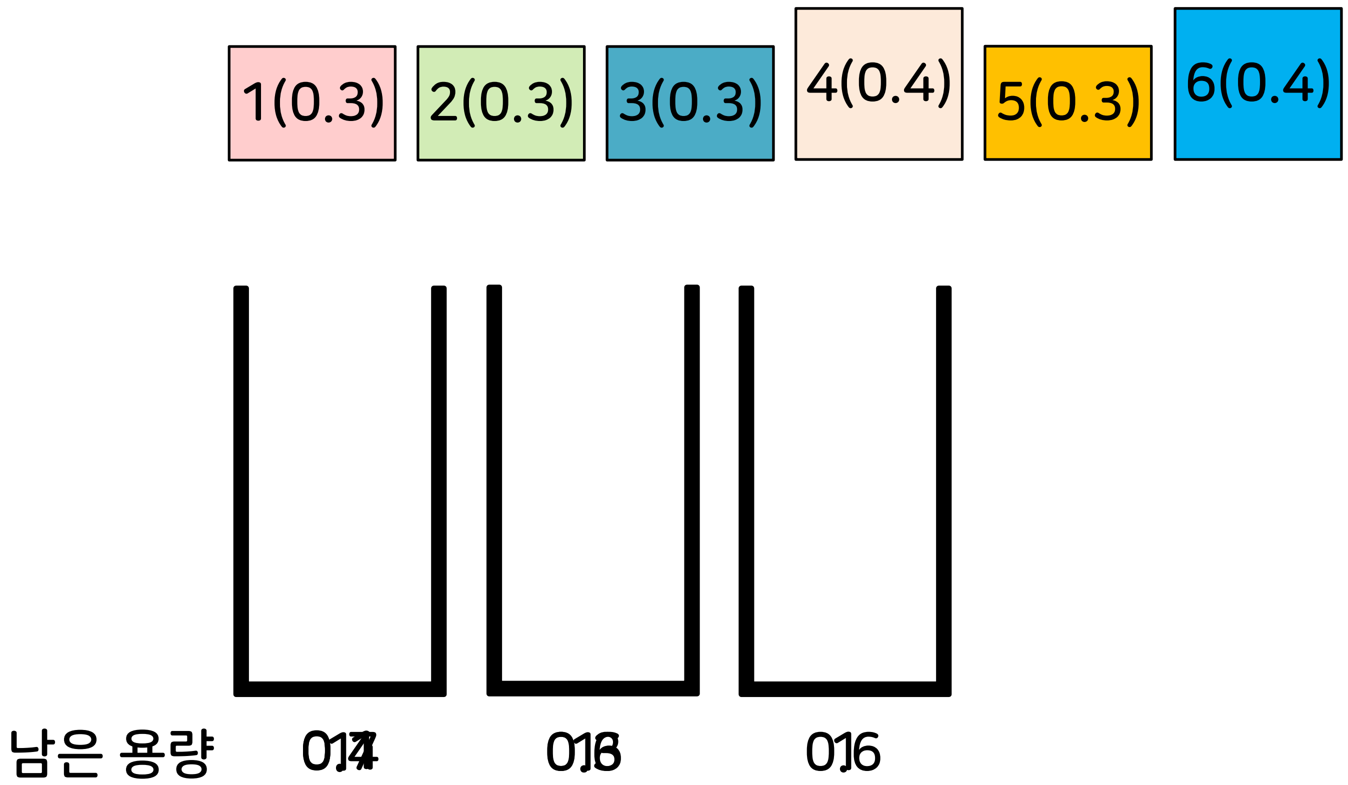
- 가정 → 통 크기 1, 물체 크기 0 이상 1 이하



통 채우기 문제_근사 알고리즘_최초법

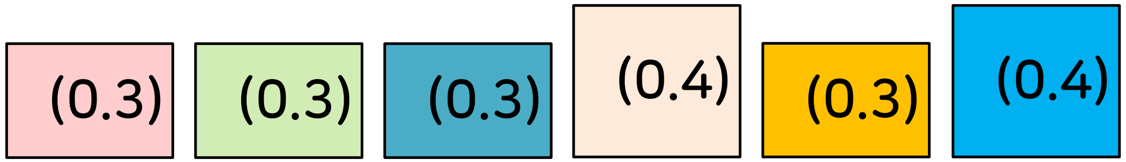
선택한 물체를 넣을 수 있는 최초의 통에 넣는 방식

O(n) O(n) → O(n^2)



통 채우기 문제_근사 알고리즘_감소순 최초법

물체들을 크기의 감소순으로 정렬 후 최초법을 적용하는 방식



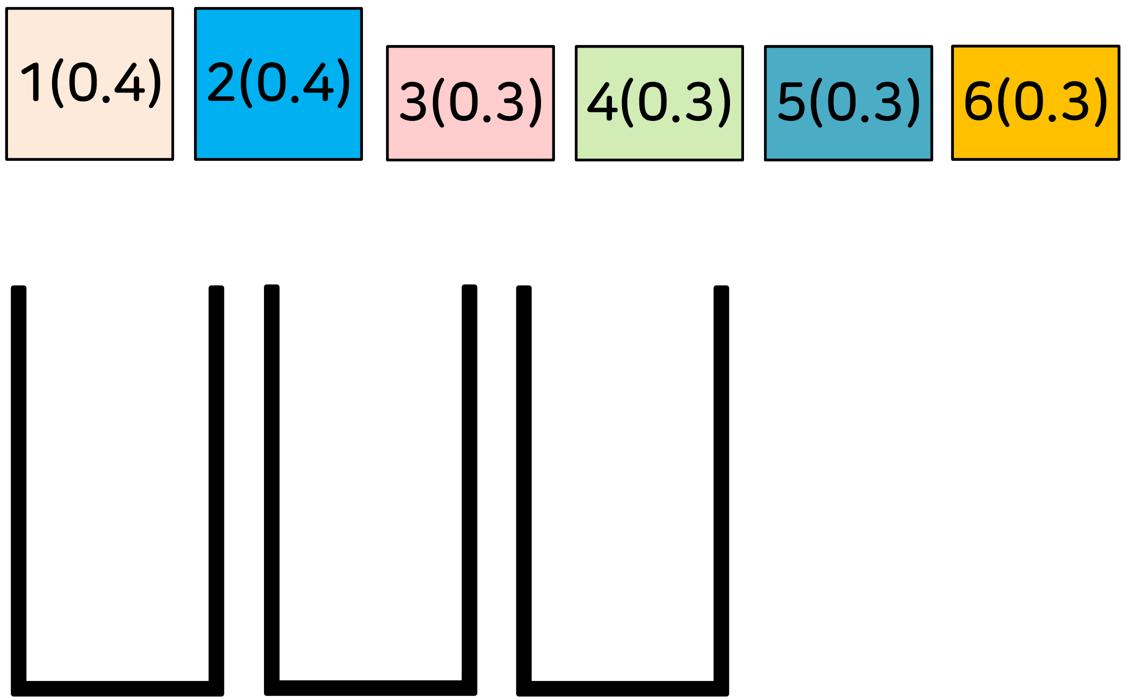
통 채우기 문제_근사 알고리즘_감소순 최초법

물체들을 크기의 감소순으로 정렬 후 최초법을 적용하는 방식

감소순으로 정렬: $O(nlogn)$

최초법: $O(n^2)$

→ $O(n^2)$

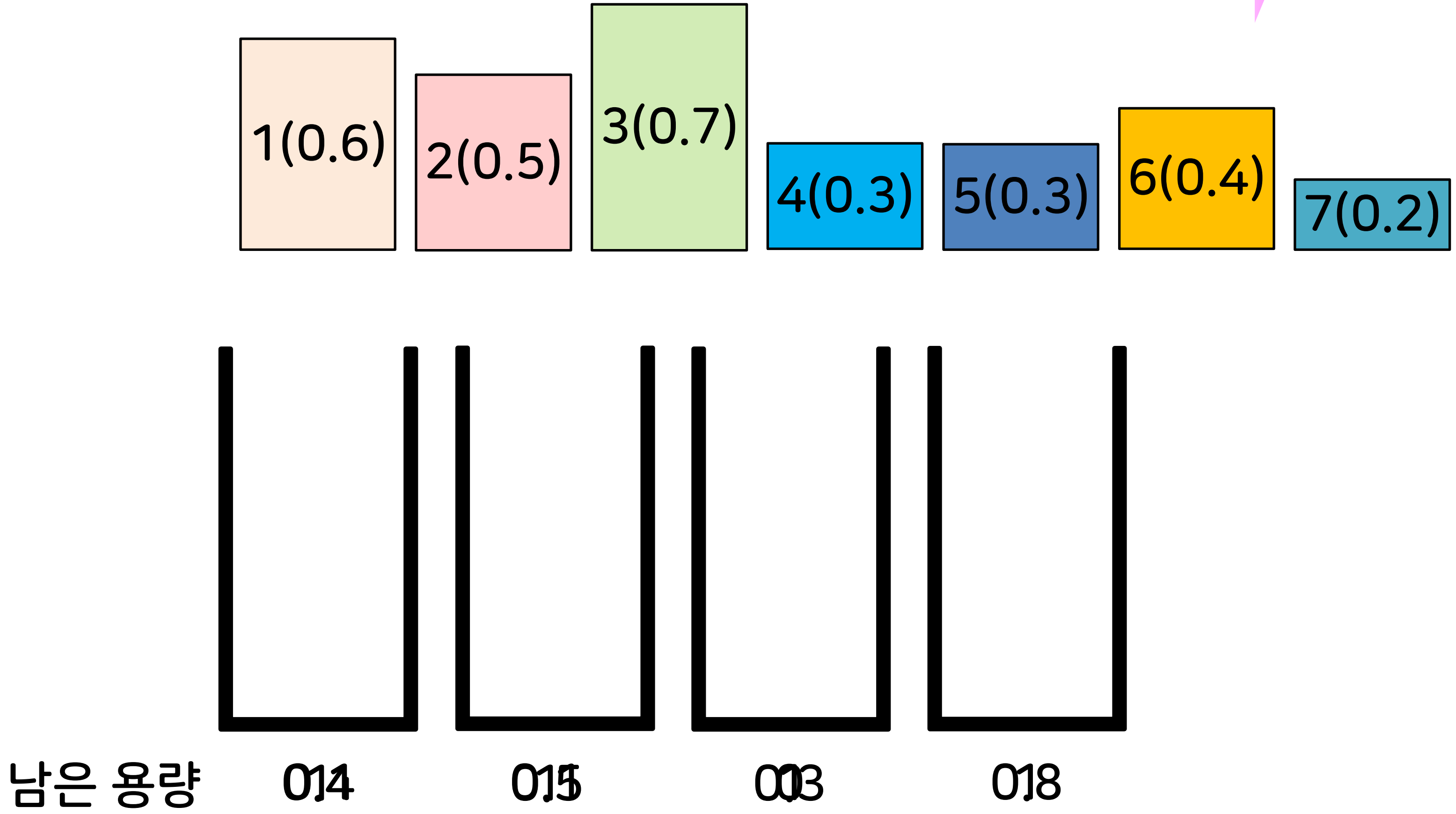


남은 용량 0.6 / 0.2 0.7 / 0.4 0.7

통 채우기 문제_근사 알고리즘_최선법

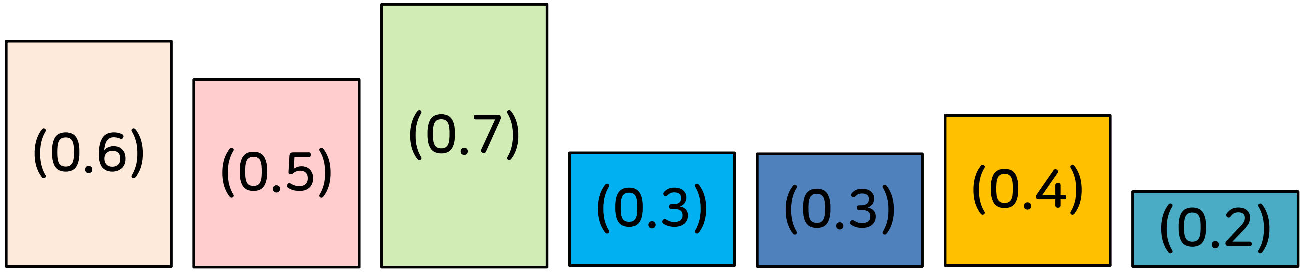
- **선택한 물체를 넣었을 때 남는 부분이 가장 작은 통에 넣는 방식**

O(n)　O(n)　→ $O(n^2)$



통 채우기 문제_근사 알고리즘_감소순 최선법

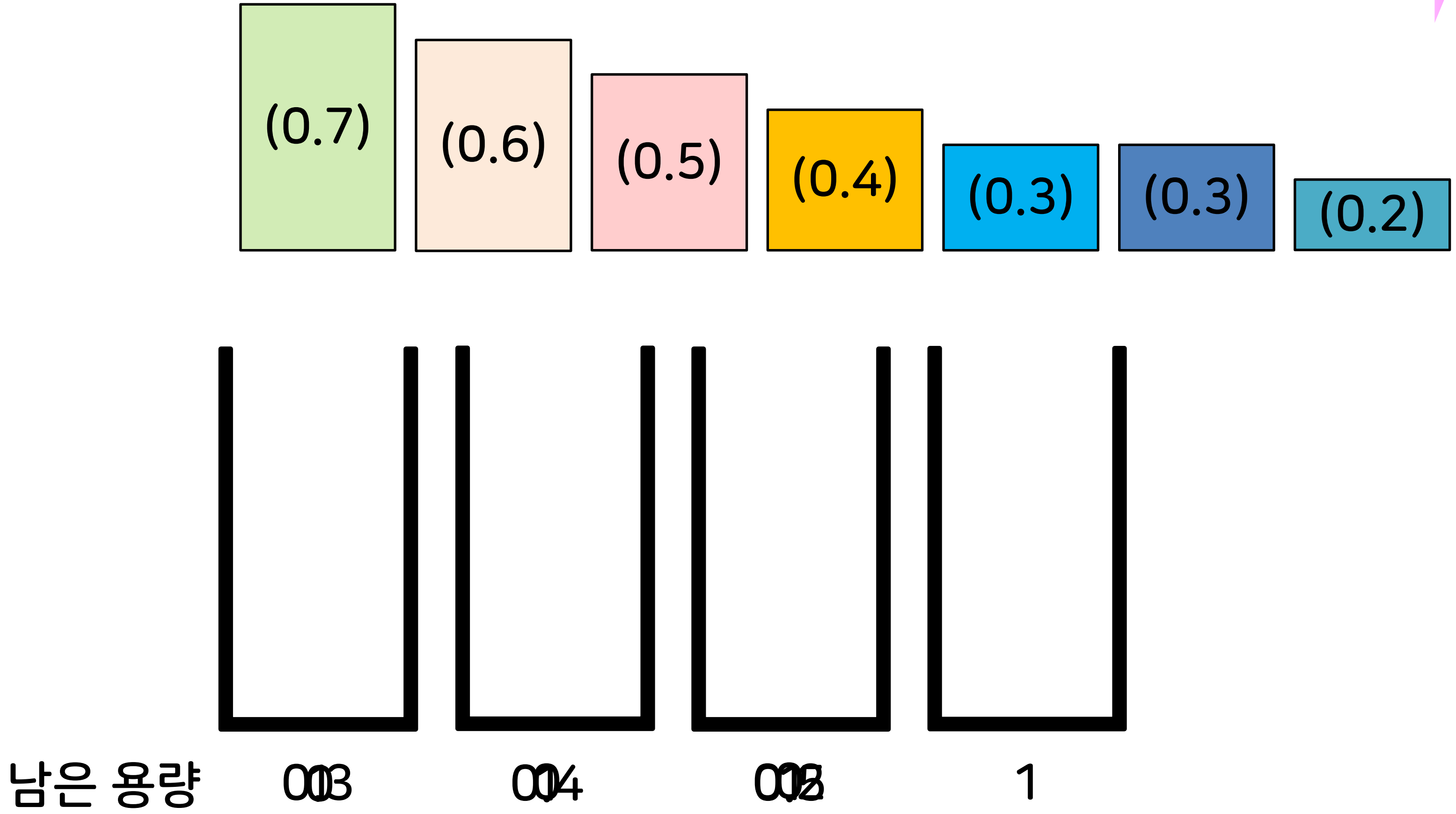
물체들을 크기의 감소순으로 정렬 후 최선법을 적용하는 방식



통 채우기 문제_근사 알고리즘_감소순 최선법

▶ 물체들을 크기의 감소순으로 정렬 후 최선법을 적용하는 방식

O(nlogn) $O(n^2)$ ⇨ $O(n^2)$



통 채우기 문제_근사 알고리즘_특징

근사해는 최적해의 두 배가 넘지 않음

- 최초법, 최선법 → 근사해는 최적해의 약 1.7배가 넘지 않음
- 감소순 최초법, 감소순 최선법 → 근사해는 최적해의 약 1.3배가 넘지 않음

정리하기

1. 기본 개념

- 클래스 NP는 비결정론적 튜링 기계를 이용하여 다항 시간에 해결할 수 있는 모든 판정 문제의 집합
- 변환은 문제 Q의 입력과 출력을 문제 A의 입력과 출력 형태로 바꿀 수 있고 여기에 문제 A를 해결하는 알고리즘을 적용함으로써 궁극적으로 문제 Q를 해결할 수 있다는 것
- NP-완전 문제는 클래스 NP에 속하는 모든 문제가 어떤 문제로 다항 시간에 변환되면서 그 문제가 클래스 NP에 속하는 문제

2. 근사 알고리즘

- 최적화 문제에 대하여 최적의 해에 가까운 근사해를 다항 시간에 구하는 알고리즘
- NP-하드 문제는 클래스 NP에 속하는 모든 문제가 그 문제로 다항 시간에 변환되는 문제
- 버텍스 커버 문제는 선택한 간선의 양 끝 정점을 포함시키는 방식 이용
- 외판원 문제는 최소 신장 트리와 깊이 우선 탐색을 이용
- 통 채우기 문제는 최초법, 최선법, 감소순 최초법, 감소순 최선법 등 이용

감사합니다.

한 학기 동안 수고하셨습니다.