2 강.

논리게이트와 부울대수 (1)

컴퓨터과학과 강지훈 교수

학습 목차

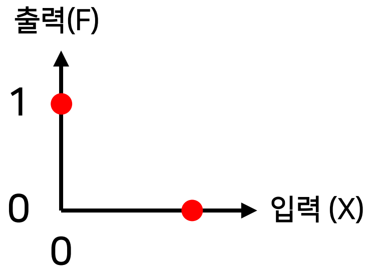
2 강

contents

제3장. 논리게이트와 부울대수

3.1
논리연산과 논리게이트

- 2진 디지털 시스템에서 입출력 관계를 표현하는 방법
  - 그래프와 진리표(Truth Table)



입력	출력
X	F
0	1
1	0

- 논리 함수
  - 입력에 따라 출력이 어떻게 변하는가를 나타내는 함수로 표현
  - $F = \bar{X}$, $F = XY$ 등 논리 함수를 통해 나타냄

3.1.1 논리연산

- **논리연산(부울 연산)**
  - 부울 대수(Boolean Algebra)에 기반하여 참(True) 또는 거짓(False)을 처리하는 연산
  - 두 개의 이산값인 0과 1에 적용되는 연산
- **논리집합(부울 집합)**
  - 0(거짓)과 1(참)로만 구성된 집합 {0, 1}
- **논리 집합 {0, 1} 에 대한 논리 연산**
  - 0과 1을 입력으로 받아 규칙에 따라 특정 값을 출력함
  - AND, OR, NOT 등의 논리 연산이 존재함

3.1.2 논리 게이트

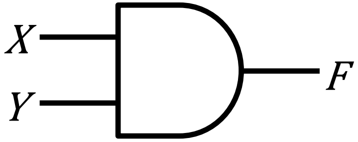
- 논리회로란
  입력 신호의 논리 연산을 통해 출력 신호를 생성하는 회로

- 입력 및 출력 신호는
  0 또는 1과 같이 2진 신호를 사용함

- 컴퓨터에서는 여러가지 논리회로를 조합하여
  산술 연산과 같은 복잡한 연산을 수행함

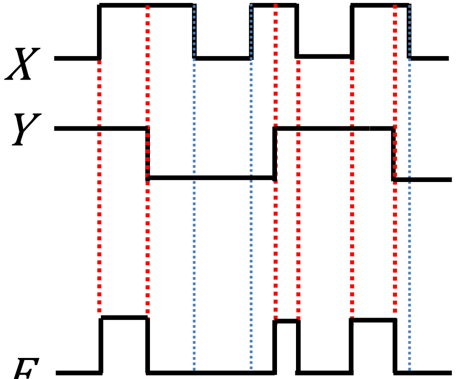
- 논리회로는 여러 논리게이트를 조합하여 구성

- AND 게이트 - 논리곱(Conjunction)
  - 모든 입력이 1(참)이면 1(참)을 출력

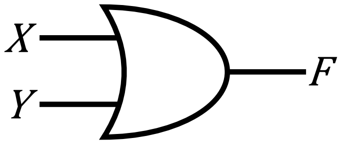


$$F = X \cdot Y$$
$$F = XY$$

입력		출력
X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

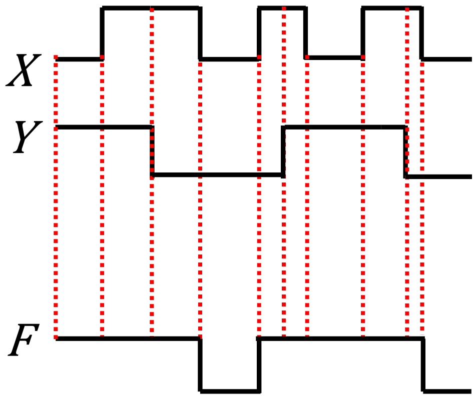


- **OR 게이트 - 논리합(Disjunction)**
  - 입력 중 하나라도 1(참)이면 1(참)을 출력

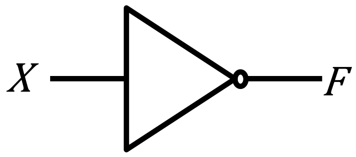


$$F = X + Y$$

입력		출력
X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

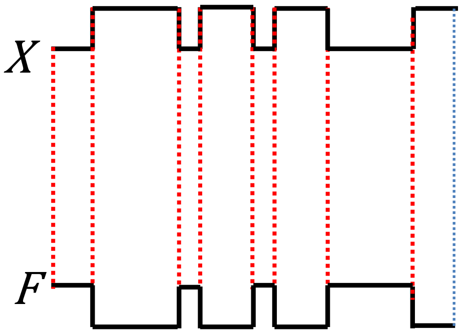


- **NOT 게이트 - 부정(Negation)**
  - 입력을 반전(부정)하여 출력



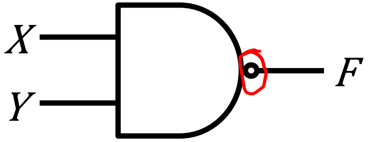
$$F = \bar{X}$$

입력	출력
X	F
0	1
1	0



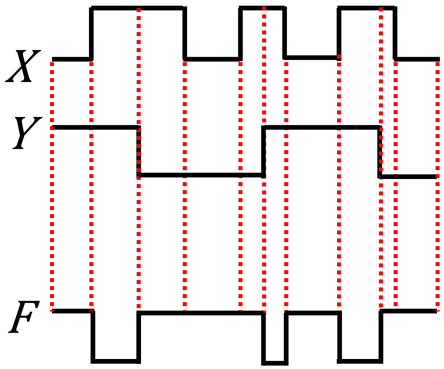
• NAND 게이트 - NOT AND

- AND 게이트의 결과를 반전(부정)하여 출력

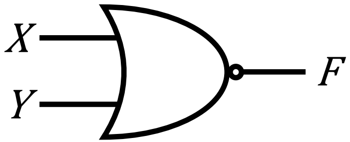


$$F = \overline{X \cdot Y}$$
$$F = \overline{XY}$$

입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

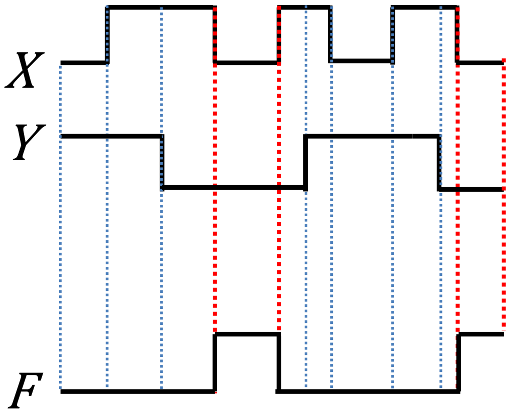


- NOR 게이트 - NOT OR
  - OR 게이트의 결과를 반전(부정)하여 출력



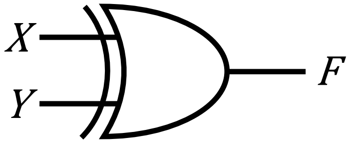
$$F = \overline{X + Y}$$

입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



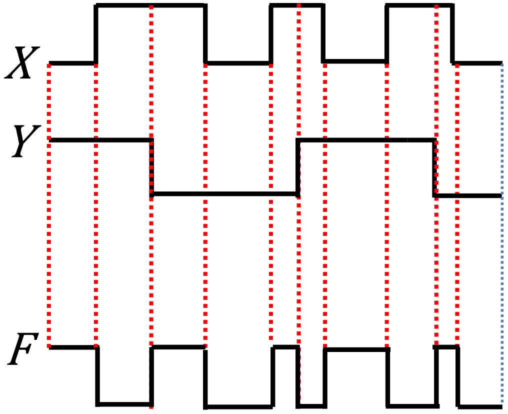
• XOR 게이트 - 배타적 논리합(Exclusive OR)

- 입력이 서로 다를 때만 1(참)을 출력
- 논리적으로 서로 다른 것을 선택하는 연산



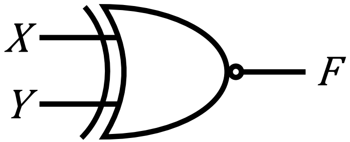
$$F = X \oplus Y$$

입력		출력
X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



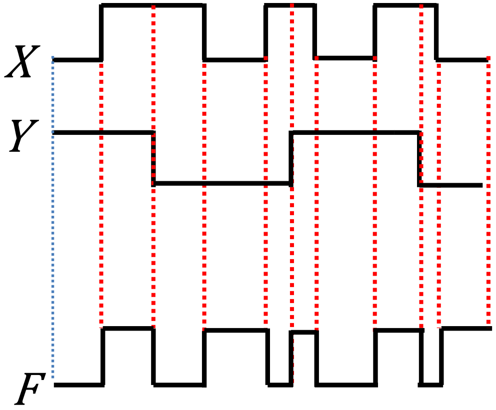
• XNOR 게이트 - Exclusive NOR

- XOR 게이트의 결과를 반전(부정)하여 출력
- 논리적으로 서로 같은 것을 선택하는 연산



$$F = \overline{X \oplus Y}$$

입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



• 논리합(OR)과 배타적 논리합(XOR)

OR 게이트

- 둘 중 하나라도 참이라면 참

입력		출력
X	Y	F
0	1	1
1	0	1
1	1	1

둘 중 하나라도 참이라면 OK

XOR 게이트

- 입력이 서로 다를 때만 참

입력		출력
X	Y	F
0	1	1
1	0	1

서로 배타적일 때만 OK

제3장. 논리게이트와 부울대수

3.2
부울대수

- 부울대수(Boolean Algebra)
    - 0과 1의 값을 갖는 논리변수와 논리연산을 다루는 대수
    - 이진 논리(binary logic)를 기반으로 한 수학적 체계
    - 모든 값을 참(1)과 거짓(0)으로 나타내며, 이를 논리 연산으로 조작하는 이론

특징	내용
값의 범위	각 변수 및 표현식이 0 또는 1의 값을 가짐
논리 연산	AND, OR 등의 논리 연산자에 의해 정의됨
이진 논리	0과 1 두개의 값만 처리하여 이진수와 직접적 연관이 있음

- 부울함수(Boolean Function)
  - 부울대수를 기반으로 입력 값의 조합에 따라 참 또는 거짓을 출력하는 함수
    - 하나 이상의 부울연산 조합으로 구성
  - 논리 변수의 상호 관계를 나타내기 위한 대수적 표현
  - 부울변수(0 or 1), 부울연산기호, 괄호, 등호 등으로 나타냄

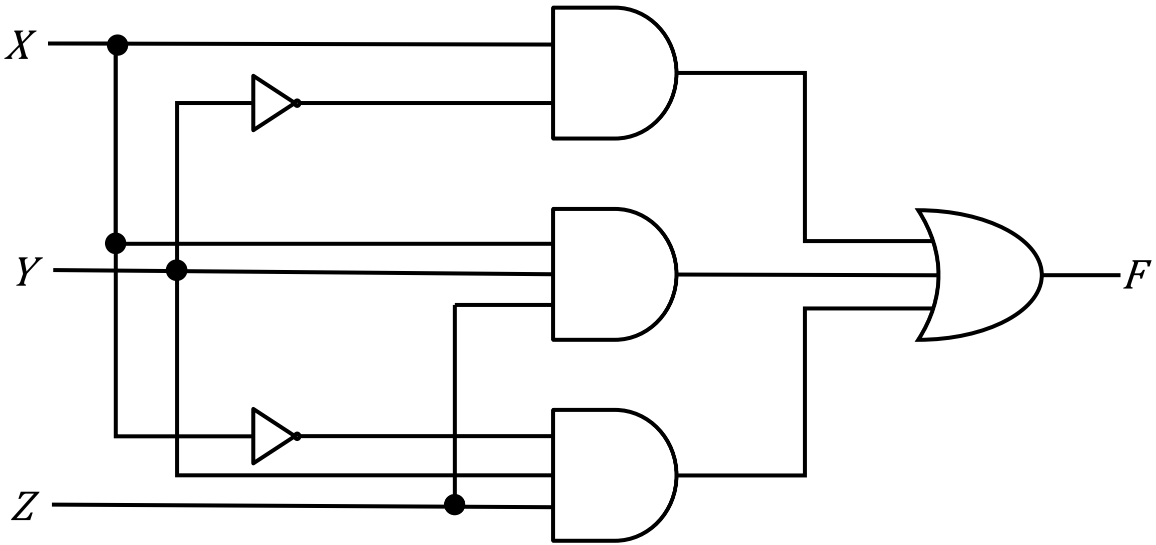
특징	내용
입력	하나 이상의 부울변수, 각 변수는 0 또는 1의 값을 가짐
출력	논리 연산에 따라 결정, 항상 0 또는 1 중 하나
논리 연산	AND, OR 등의 논리 연산을 사용해 표현

부울함수의 예시: $F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$

• 부울함수와 논리회로도

- 부울함수는 논리 게이트로 구성되는 논리회로도로 작성할 수 있음

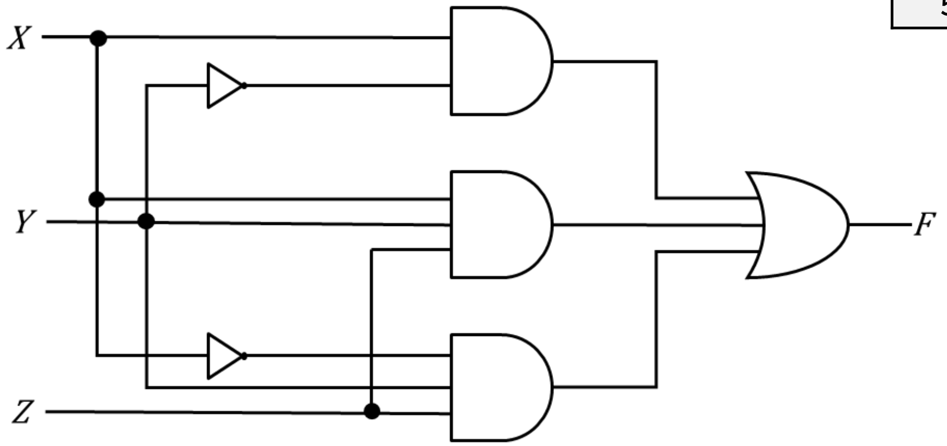
$F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$의 논리회로도



• 부울함수에 따른 논리회로의 작동 흐름

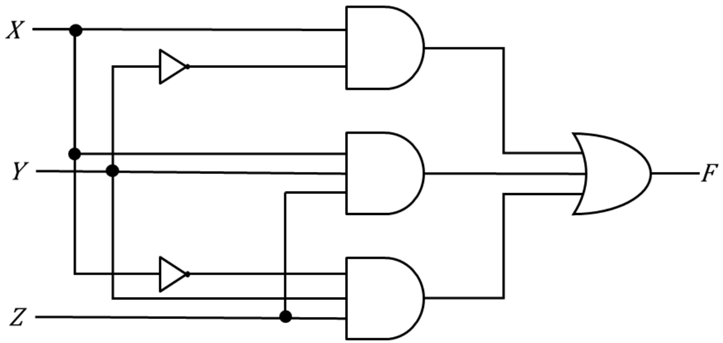
$$F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$$
$$= (X \cdot \bar{Y}) + (X \cdot Y \cdot Z) + (\bar{X} \cdot Y \cdot Z)$$

우선순위	논리연산
1	( ) 괄호
2	NOT
3	AND, NAND
4	OR, NOR
5	XOR, XNOR



• 부울함수와 진리표

$$F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$$

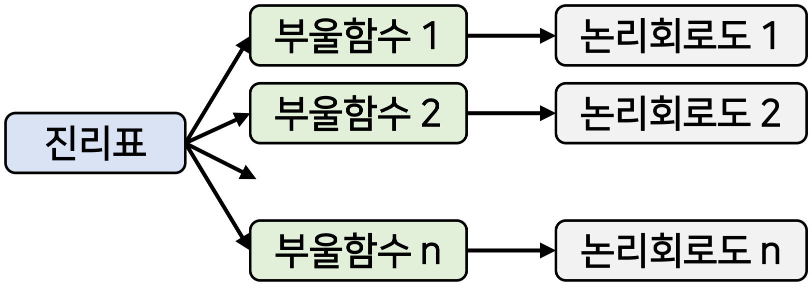


부울함수 $F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$의 진리표

입력	X	0	0	0	0	1	1	1	1
	Y	0	0	1	1	0	0	1	1
	Z	0	1	0	1	0	1	0	1
출력	F	0	0	0	1	1	1	0	1

• 부울함수와 진리표와의 관계

- 어떠한 부울함수에 대한 진리표는 하나
- 부울함수의 형태에 따라 여러 부울함수가 동일한 진리표를 공유할 수 있음
- 따라서, 단일 진리표에 대한 논리회로도는 여러 개가 될 수 있음

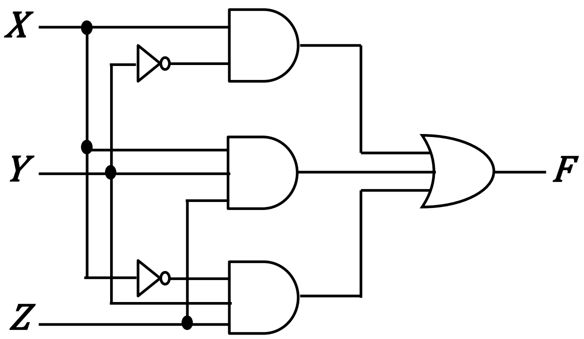


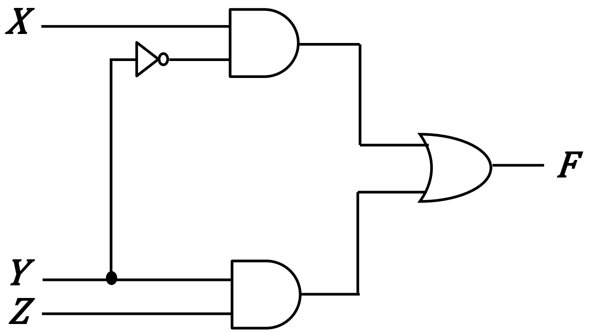
- 부울함수와 진리표와의 관계
  - 부울함수를 구성하는 부울연산과 부울변수의 개수는 게이트 및 각 게이트의 입력 개수와 직접적인 관계가 있음
    - 동일한 결과를 출력하는데 게이트와 입력의 수가 많아질 수록 복잡 해지며, 비효율적
    - 비용도 증가하고, 물리적인 면적을 더 많이 사용
  - 부울함수가 간단해질 수록 논리게이트의 복잡도는 낮아짐
  - 이에 따라, 부울함수의 간소화가 필수적임

• 부울함수의 간소화 필요성

$$F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$$

$$= X \cdot \bar{Y} + Y \cdot Z$$





- **부울함수의 간소화 방법**
  - 대수적인 방법
  - 도표를 이용한 방법
  - 테이블을 이용한 방법

• 부울대수의 기본 공식

$$X + 0 = X \qquad X \cdot 1 = X$$

$$X + 1 = 1 \qquad X \cdot 0 = 0$$

$$X + X = X \qquad X \cdot X = X$$

$$X + \bar{X} = 1 \qquad X \cdot \bar{X} = 0$$

$$\bar{\bar{X}} = X$$

3.2.2 기본공식

• 부울대수의 기본 공식

$X + Y = Y + X$ $\quad$ $X \cdot Y = Y \cdot X$ 교환법칙

$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ $\quad$ $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ 결합법칙

$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ $\quad$ $X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$ 분배법칙

$\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$ $\quad$ $\overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$ 드모르간의 법칙

$X + X \cdot Y = X$ $\quad$ $X \cdot (X + Y) = X$ 흡수정리

- **부울대수의 쌍대성 원리**(principle of duality)
  - 어떤 식이 성립하면, 그것의 쌍대(Dual) 형태도 항상 성립하는 원리
  - 특정 변환을 적용해도 동일한 연산 성질이 유지되는 것
  - 논리학에서 OR과 AND, 참(1)과 거짓(0)을 바꿔도 연산 성질이 성립됨

$$X + 0 = X \quad \Longleftrightarrow \quad X \cdot 1 = X$$

- 쌍대형태

$$X + 0 = X \qquad X \cdot 1 = X$$
$$X + 1 = 1 \qquad X \cdot 0 = 0$$
$$X + X = X \qquad X \cdot X = X$$
$$X + \bar{X} = 1 \qquad X \cdot \bar{X} = 0$$
$$X + Y = Y + X \qquad X \cdot Y = Y \cdot X$$
$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z \qquad X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$$
$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z \qquad X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$$
$$\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y} \qquad \overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$$
$$X + X \cdot Y = X \qquad X \cdot (X + Y) = X$$

3.2.3 부울함수의 대수적 간소화

- **항 결합**

$$F = X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z$$
$$= X\bar{Y} + (X + \bar{X})YZ$$
$$= X\bar{Y} + 1 \cdot YZ$$
$$= X\bar{Y} + YZ$$

- **문자 소거**

$$X + \bar{X}Y = (X + \bar{X})(X + Y) = 1 \cdot (X + Y) = X + Y$$
$$X(\bar{X} + Y) = X\bar{X} + XY = 0 + XY = XY$$

- **간소화 예시**

$$F = (X + XY + Y)(X + \bar{X}YZ)$$
$$= ((X + XY) + Y)(X + \bar{X}YZ)$$
$$= (X + Y)(X + \bar{X}YZ)$$
$$= (X + Y)(X + \bar{X})(X + YZ)$$
$$= (X + Y)(X + YZ)$$
$$= XX + XYZ + XY + YYZ$$
$$= X + XY + YYZ$$
$$= X + (YY)Z$$
$$= X + YZ$$

- **부울함수 F의 보수는 $\bar{F}$**

$$F = \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z$$
$$\bar{F} = \overline{(\bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z)} = \overline{\bar{X}Y\bar{Z}} \cdot \overline{\bar{X}\bar{Y}Z}$$
$$= (X + \bar{Y} + Z) \cdot (X + Y + \bar{Z})$$

- **쌍대성을 활용**

F의 쌍대: $(\bar{X} + Y + \bar{Z}) \cdot (\bar{X} + \bar{Y} + Z)$

$\bar{F} = (X + \bar{Y} + Z) \cdot (X + Y + \bar{Z})$ 각 변수의 보수화

내용 정리

Summary
Contents

다음시간에는

3강. 논리게이트와 부울대수 (2)