5강.

부울함수의 간소화 및 구현(2)

컴퓨터과학과 강지훈 교수

학습 목차

5 강

contents

01 카르노 도표 방법(2)

- 4변수 카르노 도표
- 무관조건
- 기타 카르노 도표

02 NAND 게이트와 NOR 게이트를 이용한 논리회로 구현

- 개요
- NAND 게이트를 이용한 구현방법
- NOR 게이트를 이용한 구현방법

제4장. 부울함수의 간소화 및 구현

4.2
카르노 도표 방법(2)

4.2.4 4변수 카르노 도표

- 4개의 변수를 가지는 부울함수
  - 16개의 최소항이 존재하며, 16개의 사각형으로 구성
  - 각 사각형은 하나의 최소항에 대응

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_o	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

WX \ YZ	00	01	11	10
00	$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{W}\bar{X}YZ$	$\bar{W}\bar{X}Y\bar{Z}$
01	$\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{W}X\bar{Y}Z$	$\bar{W}XYZ$	$\bar{W}XY\bar{Z}$
11	$WX\bar{Y}\bar{Z}$	$WX\bar{Y}Z$	$WXYZ$	$WXY\bar{Z}$
10	$W\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$W\bar{X}\bar{Y}Z$	$W\bar{X}YZ$	$W\bar{X}Y\bar{Z}$

4.2.4 4변수 카르노 도표

- 4변수 카르노 도표에서 사각형들의 묶음
  - 하나의 묶음을 만들 때는 가능한 가장 큰 2의 거듭제곱 크기로

네 개 문자의 곱항

세 개 문자의 곱항 $\overline{W}\overline{X}Y$

$WX \backslash YZ$	00	01	11	10
00	$\overline{W}\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{W}\overline{X}\overline{Y}Z$	$\overline{W}\overline{X}YZ$	$\overline{W}\overline{X}Y\overline{Z}$
01	$\overline{W}X\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{W}X\overline{Y}Z$	$\overline{W}XYZ$	$\overline{W}XY\overline{Z}$
11	$WX\overline{Y}\overline{Z}$	$WX\overline{Y}Z$	$WXYZ$	$WXY\overline{Z}$
10	$W\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$W\overline{X}\overline{Y}Z$	$W\overline{X}YZ$	$W\overline{X}Y\overline{Z}$

상수 1

두 개 문자의 곱항
$\overline{W}X$

한 개 문자의 항
W

4.2.4 4변수 카르노 도표

- $F(W,X,Y,Z) = \Sigma m(1,3,4,5,11,12,13)$의 간소화

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_o	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z \quad \bar{W}\bar{X}YZ \quad \bar{W}\bar{X}Z$

$\bar{W}\bar{X}YZ \quad W\bar{X}YZ \quad \bar{X}YZ$

WX \ YZ	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1		
11	1	1		
10			1	

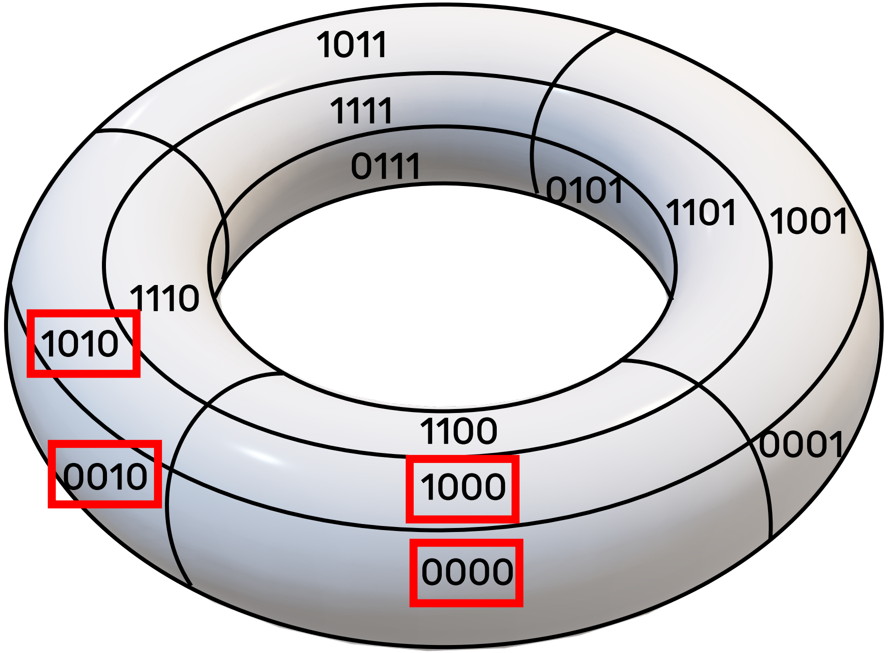
$\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z} \quad \bar{W}X\bar{Y}Z$

$WX\bar{Y}\bar{Z} \quad WX\bar{Y}Z$

$X\bar{Y}$

$$F(W,X,Y,Z) = X\bar{Y} + \bar{W}\bar{X}Z + \bar{X}YZ$$

- **인접 사각형**



WX \ YZ	00	01	11	10
00	$\boxed{0000}$	0001	0011	$\boxed{0010}$
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	$\boxed{1000}$	1001	1011	$\boxed{1010}$

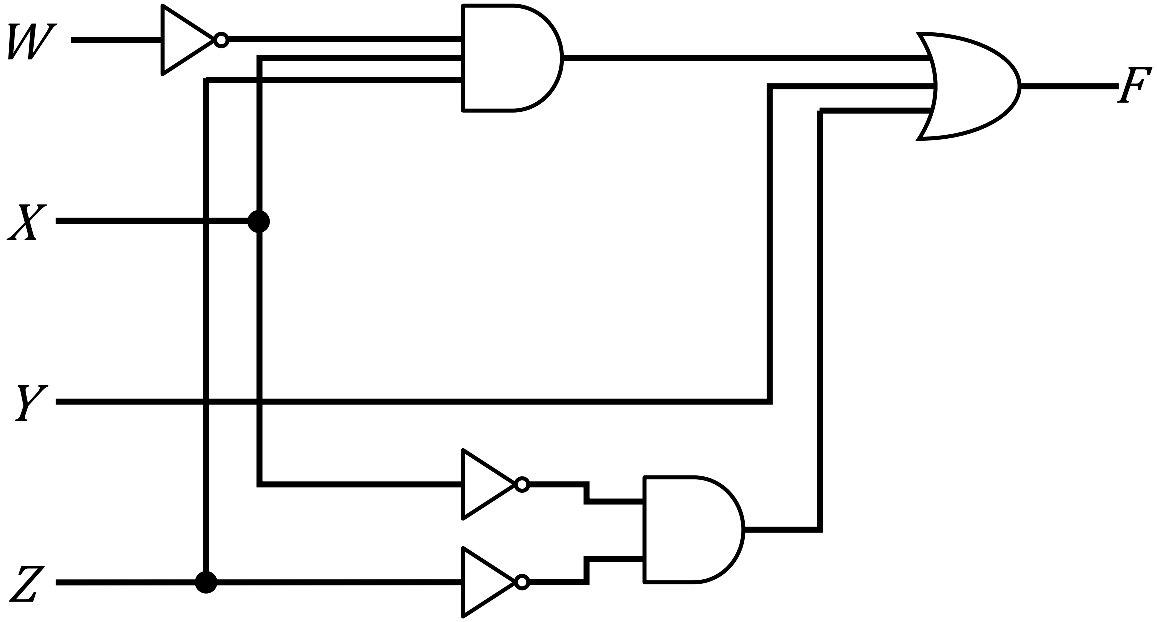
- **진리표를 만족하는 간소화된 논리회로도**

W	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	1
11			1	1
10	1		1	1

$$F = Y + \bar{X}\bar{Z} + \bar{W}XZ$$

- $F = Y + \overline{X}\,\overline{Z} + \overline{W}XZ$의 논리 회로도



4.2.7 무관조건

- 무관조건(don't care condition)
  - 특정 입력변수들의 조합에서 함수 값이 발생하지 않는 경우

    ➡ 회로에서 특정 조합이 입력으로 사용되지 않음

  - 함수 값이 0과 1중 어떤 출력 값으로 나와도 무관한 조합

    ➡ 특정 조합이 회로에 입력되지 않기 때문에 어떤 값이든 무관함

• 무관조건의 예

- BCD 코드

10진수	2진수
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

- 값을 표현하기 위해 4개의 비트가 필요함
- 나머지 조합인 1010~1111까지 6개의 조합은 사용되지 않음
- BCD 코드를 사용하는 논리회로에서는 6개의 조합은 발생하지 않는다는 가정하에 작동됨

즉, 사용되지 않는 조합과 무관하게 동작하는 회로가 구성됨

4.2.7 무관조건

• 부울 함수에서 무관조건의 표현

$$\boldsymbol{d}(X, Y, Z) = \Sigma m(0, 1, 7) \qquad F(X, Y, Z) = \Sigma m(2, 3, 4, 5, 6) + \boldsymbol{d}(0, 1, 7)$$

3개의 변수 X, Y, Z에 대한 2진수 열 000, 001, 111은
해당 부울함수의 출력이 0 이든 1이든 무관하다는 의미

• 카르노 도표에서의 무관 조건의 표현

$X \backslash YZ$	00	01	11	10
0	X	X		
1			X	

X표시된 칸은 1 또는 0로 사용될 수 있음

- 무관 조건은 부울함수를 간소화 하는데 사용됨

$$F(W,X,Y,Z) = \Sigma m(0,3,6,9)$$

$$d(W,X,Y,Z) = \Sigma m(10,11,12,13,14,15)$$

$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ $\bar{X}YZ$

$WX \backslash YZ$	00	01	11	10
00	1		1	
01				1
11	X	X	X	X
10		1	X	X

$XY\bar{Z}$

WZ

$$F = \bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z} + \bar{X}YZ + WZ$$

4.2.7 무관조건

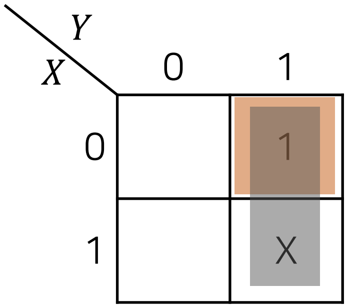
- 카르노 도표에서 무관조건을 포함하여 인근항을 묶는 것은...
  - 회로는 기본적으로 입력된 모든 것을 처리함
    - 사용하지 않는 비트 조합이라도 논리식의 영향을 받음
  - 무관조건에 해당하는 입력 조합이 절대 발생하지 않는다는 전제가 있어야 함
  - 무관조건을 포함한 묶음은 당연하게 무관조건에 해당하는 항들의 영향을 받음
  - 하지만, 해당 회로에서는 무관조건에 대한 입력이 절대 발생하지 않기 때문에 무관조건으로 인한 영향이 제거됨

4.2.7 무관조건

• 무관조건을 포함한 묶음

- 간소화된 부울함수는 무관조건이 반영되어 있지만 무관조건이 입력으로 사용되지 않기 때문에 부울함수에서는 처리되지 않음

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	



$F = \bar{X}Y$

$F = Y$

• XOR의 카르노 도표

$$X \oplus Y \oplus Z$$

$$= (X\bar{Y} + \bar{X}Y) \oplus Z$$

$$= (X\bar{Y} + \bar{X}Y)\bar{Z} + \boxed{(\overline{X\bar{Y} + \bar{X}Y})Z}$$

$$= (X\bar{Y} + \bar{X}Y)\bar{Z} + \boxed{(XY + \bar{X}\bar{Y})Z}$$

$$= X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + XYZ$$

$$(\overline{X\bar{Y} + \bar{X}Y})Z$$

$$= \left((\overline{X\bar{Y}})(\overline{\bar{X}Y})\right)Z$$

$$= \left((\bar{X} + Y)(X + \bar{Y})\right)Z$$

$$= (\bar{X}X + \bar{X}\bar{Y} + XY + Y\bar{Y})Z$$

- 2변수 XOR: 오직 하나의 변수만 1인 경우
- 3변수 XOR: 하나의 변수만 1이거나 세 변수 모두가 1인 경우
- 다중 변수 XOR: 홀수개의 변수가 1인 경우

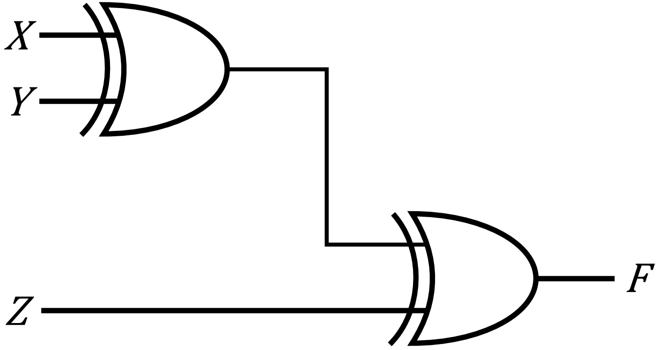
XOR 연산은 홀수 함수(Odd function) 성질을 가짐

4.2.8 기타 카르노 도표

• 3변수 XOR 카르노 도표

$$F = X \oplus Y \oplus Z$$

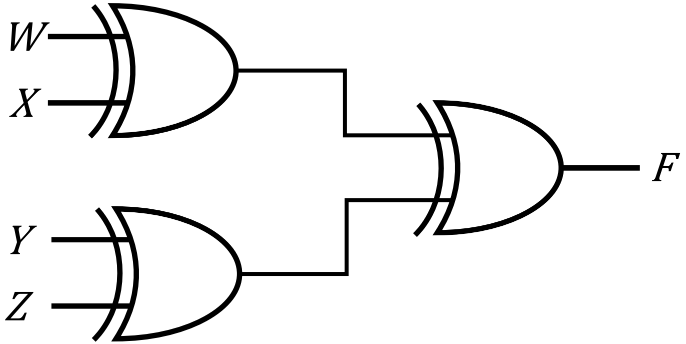
X \ YZ	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	



- 4변수 XOR 카르노 도표

$$F = W \oplus X \oplus Y \oplus Z$$

$WX \backslash YZ$	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	



4.2.8 기타 카르노 도표

- XOR 카르노 도표의 사용처
  - 카르노 도표에서 XOR 패턴을 찾고 XOR로 변환

$$F = X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + XYZ$$

X \ YZ	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

  - XOR을 AND-OR로 변환

$$X \oplus Y \oplus Z = X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + XYZ$$

제4장. 부울함수의 간소화 및 구현

4.3

NAND와 NOR 게이트를 이용한 구현방법

4.3.1 개요

• NAND와 NOR 게이트를 이용한 부울함수

- **모든 부울함수는 NOT, AND, OR 게이트로 구현할 수 있음**
  - NOT, AND, OR 게이트의 조합은 함수적 완결성을 가짐-고전적인 완전 집합
- **하지만 실제회로는 NAND나 NOR 게이트로 구현**
  - NAND와 NOR 게이트는 단독으로 함수적 완결성을 가짐
  - 여러 구성요소를 활용하는 것 보다 단일 요소를 사용하는 것이 유리함
  - 이로 인해 NAND와 NOR를 만능 게이트라고도 부름

• NAND의 함수적 완결성

입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND 게이트 진리표

⇒ 둘 다 0이면 1,
둘 다 1이면 0

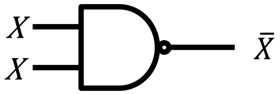
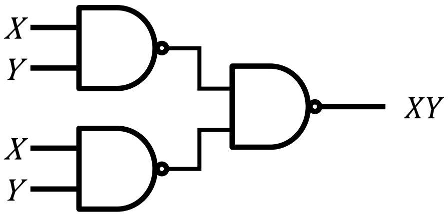
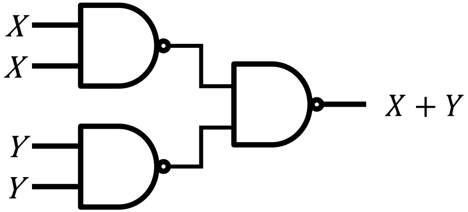
⇒ $X \text{ NAND } X = \bar{X}$

- 함수적 완결성

연산 집합	함수적 완결성 여부	비고
{AND, OR, NOT}	예	전통적인 완전 논리 집합
{NAND}	예	하나로 모든 연산 구현 가능
{NOR}	예	하나로 모든 연산 구현 가능
{AND, OR}	아니오	NOT 연산이 없으므로 불완전
{AND, NOT}	예	OR을 만들어낼 수 있음
{OR, NOT}	예	AND를 만들어낼 수 있음
{XOR, AND}	아니오	모든 논리식을 표현하지 못함

4.3.2 NAND 게이트를 이용한 구현방법

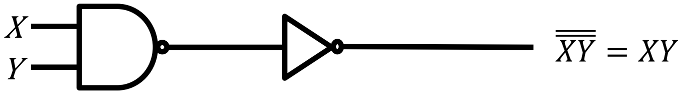
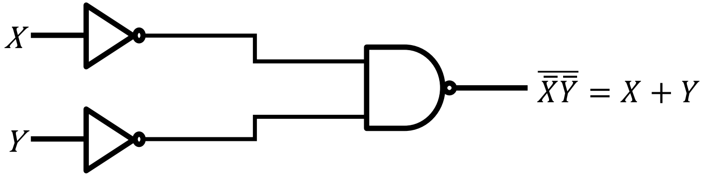
- NAND 게이트 만을 활용한 AND, OR, NOT 연산 표현

NOT X		$\bar{X} = X \text{ NAND } X$
X AND Y		XY $= (X \text{ NAND } Y)\text{NAND}(X \text{ NAND } Y)$
X OR Y		$X + Y$ $= (X \text{ NAND } X)\text{NAND}(Y \text{ NAND } Y)$

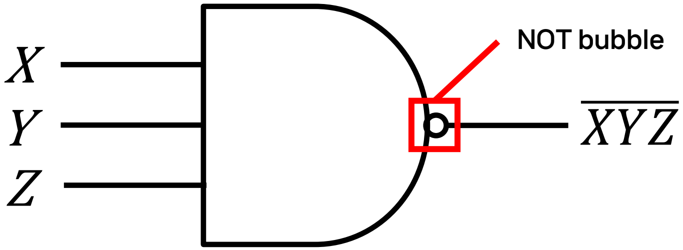
4.3.2 NAND 게이트를 이용한 구현방법

• NAND 게이트의 개념 및 구성

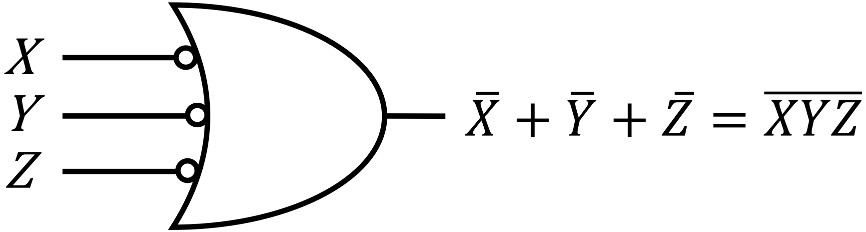
- 회로도를 그릴 때는 복잡도를 최소화 하기위해 NOT은 그대로 사용

X NOT	
X AND Y	
X OR Y	

- NAND 게이트의 기호

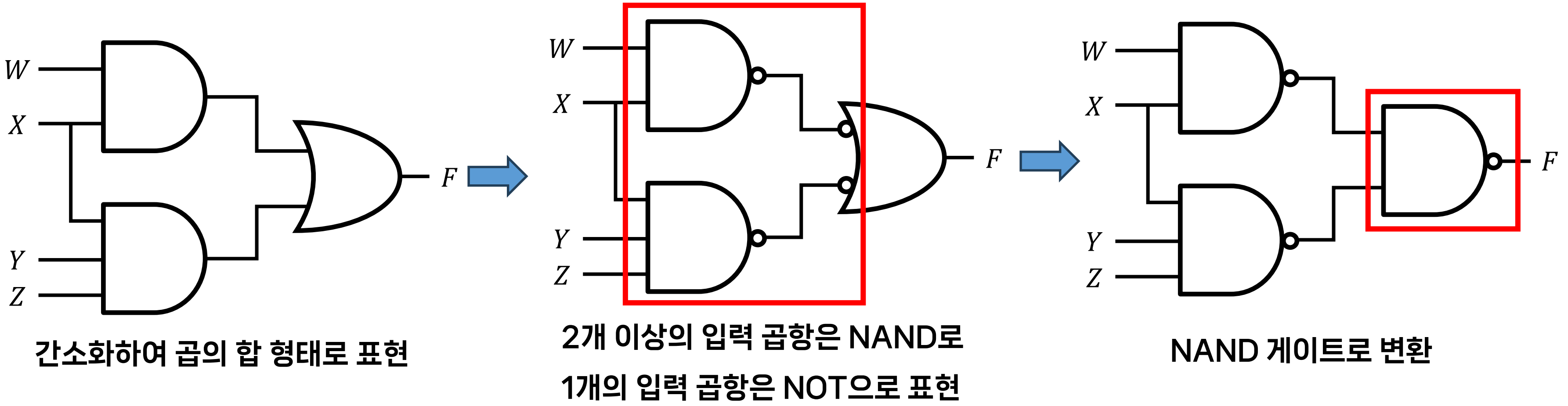


AND-NOT 형태의 NAND 게이트

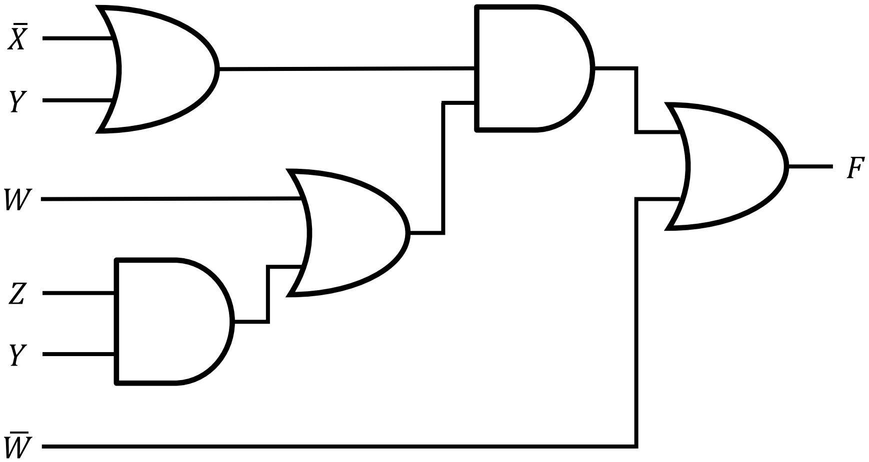


NOT-OR 형태의 NAND 게이트

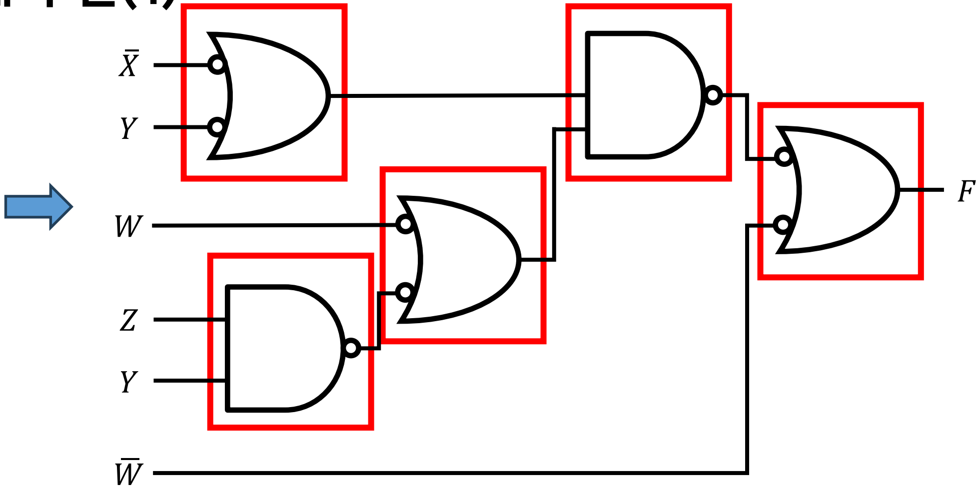
- 임의의 부울 함수를 NAND 게이트로 표현
  - $F = WX + XYZ$ 의 2단계 구현



- 임의의 부울 함수를 NAND 게이트로 표현
  - $F = (\bar{X} + Y)(W + YZ) + \overline{W}$의 다단계 구현(1)

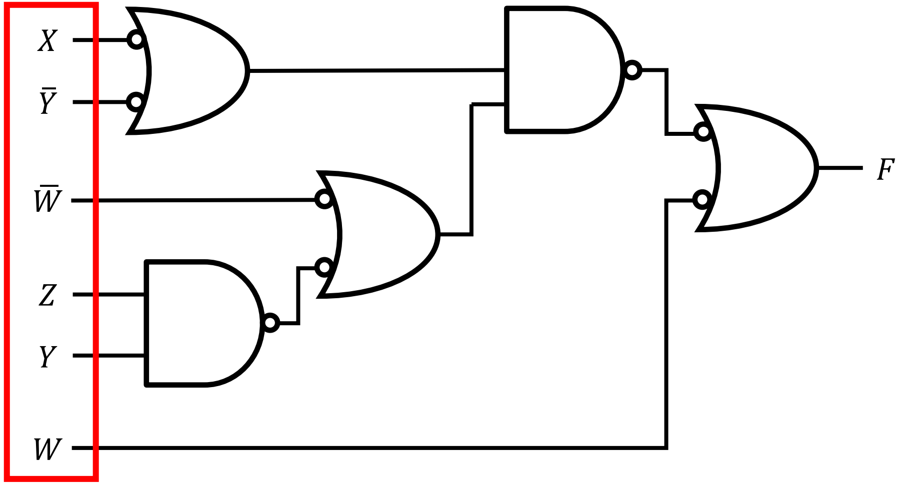


기본 회로도

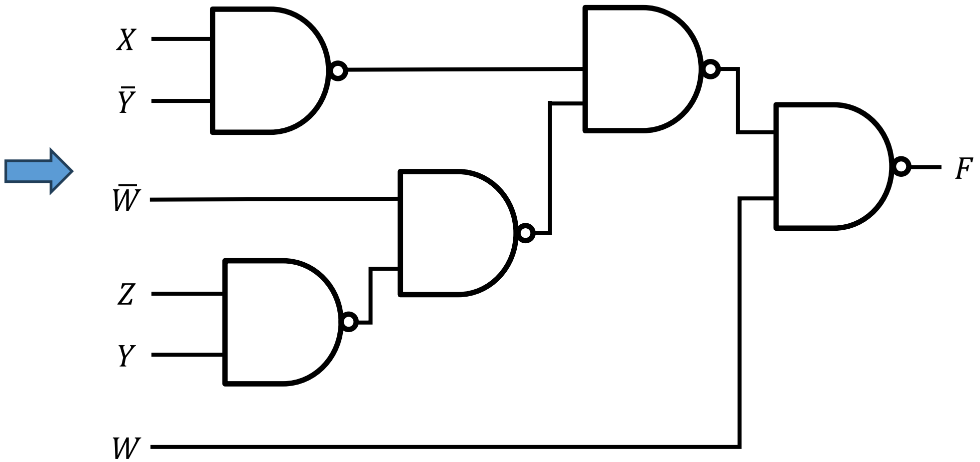


AND 게이트를 AND-NOT 형태로
OR 게이트를 NOT-OR 형태로 변환

- 임의의 부울 함수를 NAND 게이트로 표현
  - $F = (\bar{X} + Y)(W + YZ) + \overline{W}$의 다단계 구현(2)



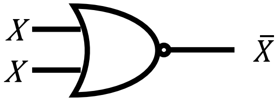
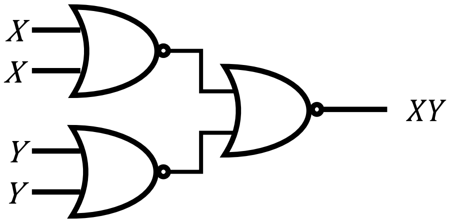
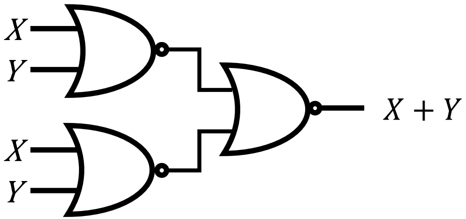
NOT 버블을 확인
동일 라인의 두 버블은 서로 상쇄,
상쇄되지 않는 원은 NOT을 추가
혹은 입력변수에 보수를 취함



모두 NAND 게이트로 변환

4.3.3 NOR 게이트를 이용한 구현방법

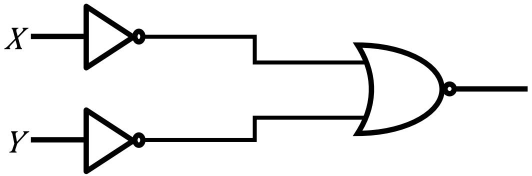
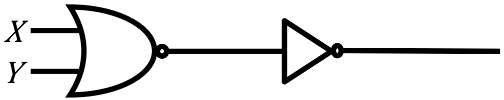
- NOR 게이트 만을 활용한 AND, OR, NOT 연산 표현

NOT X		$\bar{X} = X \text{ NOR } X$
X AND Y		$XY = (X \text{ NOR } X)\text{NOR}(Y \text{ NOR } Y)$
X OR Y		$X + Y = (X \text{ NOR } Y)\text{NOR}(X \text{ NOR } Y)$

4.3.3 NOR 게이트를 이용한 구현방법

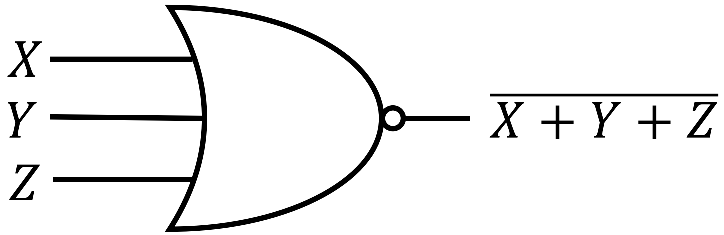
• NOR 게이트의 개념 및 구성

- 회로도를 그릴 때는 복잡도를 최소화 하기위해 NOT은 그대로 사용

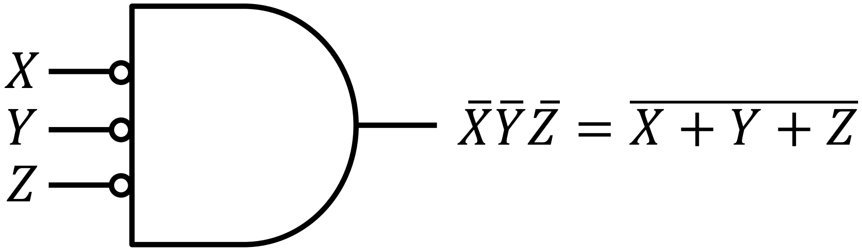
X NOT	 $\overline{X}$
X AND Y	 $\overline{\overline{X}+\overline{Y}} = XY$
X OR Y	 $\overline{\overline{X+Y}} = X+Y$

4.3.3 NOR 게이트를 이용한 구현방법

• NOR 게이트의 기호

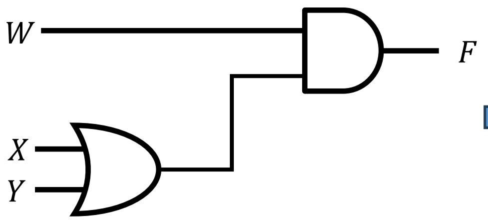


OR-NOT 형태의 NOR 게이트

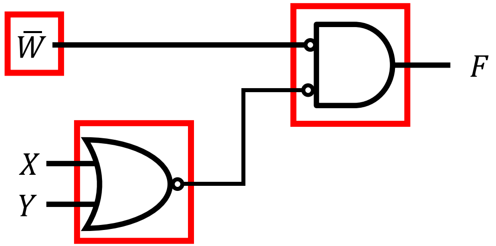


NOT-AND 형태의 NOR 게이트

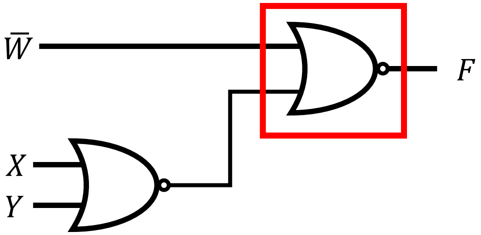
- 임의의 부울 함수를 NOR 게이트로 표현
  - $F = W(X + Y)$의 2단계 구현



간소화하여 합의 곱 형태로 표현

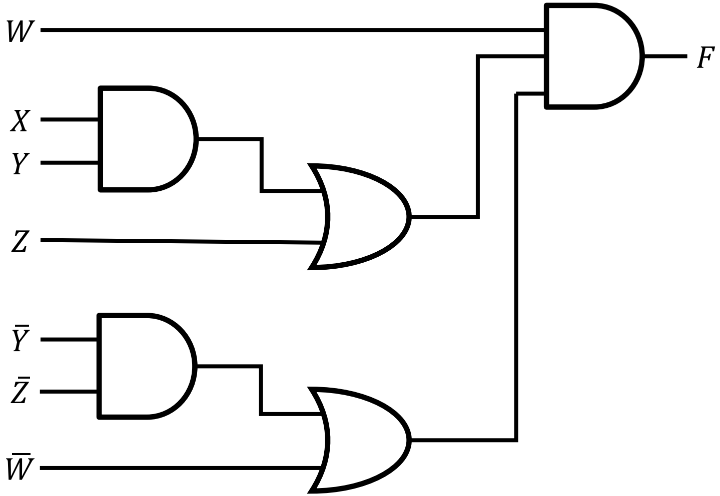


2개 이상 입력 합항은 NOR 게이트로
1개의 입력 합항은 NOT 게이트로 표현

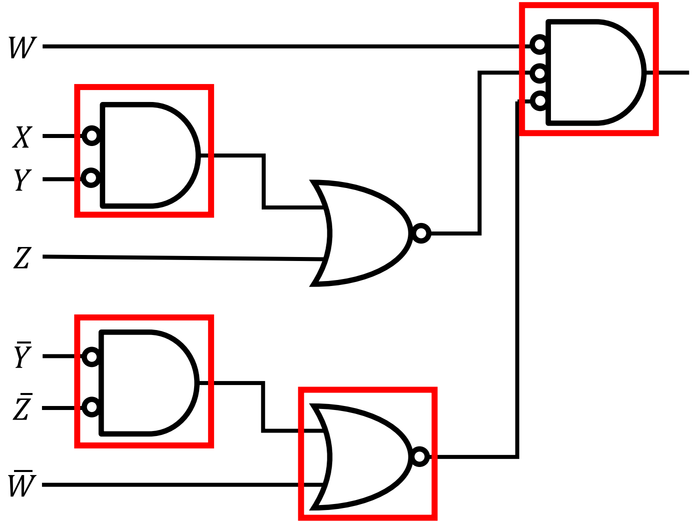


NOR 게이트로 변환

- 임의의 부울 함수를 NOR 게이트로 표현
  - $F = W(XY + Z)(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W})$의 다단계 구현(1)



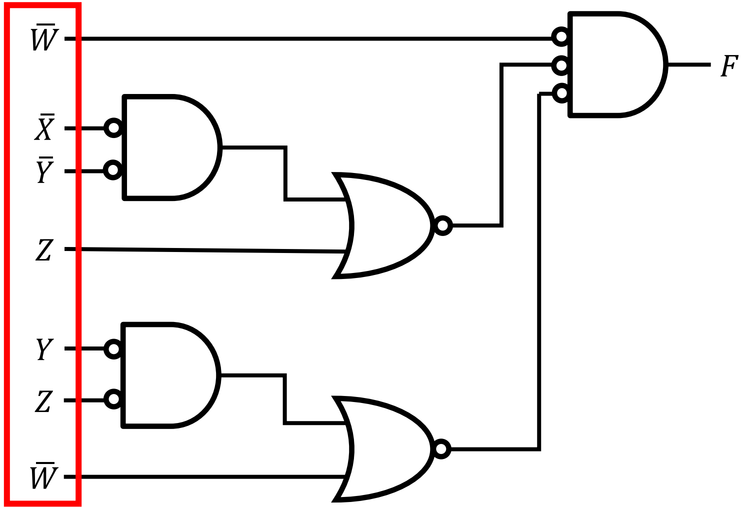
기본 회로도



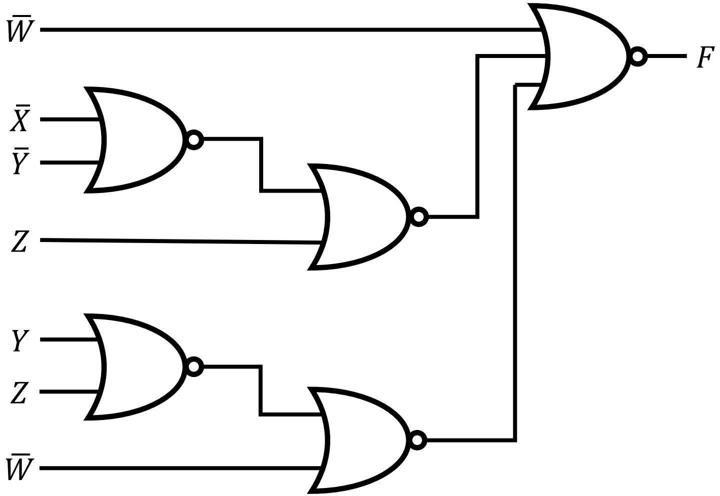
AND 게이트를 NOT-AND 형태로

OR 게이트를 OR-NOT 형태로 변환

- 임의의 부울 함수를 NOR 게이트로 표현
  - $F = W(XY + Z)(\overline{Y}\overline{Z} + \overline{W})$의 다단계 구현(2)



NOT 버블을 확인



모두 NOR 게이트로 변환

내용 정리

Summary
Contents

01 카르노 도표를 이용한 부울함수의 간소화

02 무관조건

03 기타 카르노 도표

04 NAND, NOR 게이트를 이용한 논리회로 구현

다음시간에는

6강.

조합논리회로(1)