

$$\uparrow \text{Beta}(p | a+m, b+N-m)$$

proof. $P(\theta, \text{event}) = \frac{\text{likelihood} \times \text{prior}}{\text{marginal}}$

* marginal 是所有参数 $\theta = p'$ 的 posterior 加总

$$= \frac{\binom{N}{m} p^m \cdot (1-p)^{N-m} \cdot p^{a-1} (1-p)^{b-1} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}{\int_0^1 \binom{N}{m} \theta^m \cdot (1-\theta)^{N-m} \cdot \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} d\theta}$$

$$= \frac{p^{m+a-1} \cdot (1-p)^{N-m+b-1}}{\int_0^1 \theta^{m+a-1} \cdot (1-\theta)^{N-m+b-1} d\theta}$$

$$= \frac{p^{m+a-1} \cdot (1-p)^{N-m+b-1}}{\frac{\Gamma(m+a)\Gamma(N-m+b)}{\Gamma(a+N+b)}}$$

$$= \text{Beta}(p | m+a, N-m+b)$$