1 Schema Studio di Funzioni

- Dominio di f (punti facili del grafico).
- Eventuali simmetrie e/o periodicità (se f è pari, $f'_{(0)}$ deve essere 0 altrimenti non è derivabile).
- Studio del segno (se possibile).
- Comportamento agli estremi del dominio (limiti, continuità, asintoti).
- $Dom : f'$ e derivabilità (punti angolosi, cuspidi, tangenti verticali).
- Monotonia (segno di f') e punti critici (punti di max e min locali/assoluti, punti di sup e inf).
- Tracciare il grafico.
- $Dom : f''$, convessità e segno di f''.

2 Sviluppi di Taylor - Mc Laurin

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{per } |x| < 1$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \quad \text{per } |x| < \frac{\pi}{2}$
- $\arctan = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9) \quad \text{per } |x| < 1$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{per } |x| < 1$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n$
- $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$
- Polinomio di Taylor: $T_0 = f_{(0)} + f'_{(0)}x + \frac{f''_{(0)}x^2}{2} + \cdots + \frac{f^n_{(0)}x^n}{n!}$
- Sviluppo di Taylor di una funzione: $T_0 = f_{(0)} + f'_{(0)}x + \frac{f''_{(0)}x^2}{2} + \cdots + \frac{f^n_{(0)}x^n}{n!} + o(x^n)$

3 Serie

- $\sum a_n$ serie associata alla successione $\{a_n\}_n$:
  $s_0 = a_0$
  $s_1 = a_0 + a_1$
  $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$
- $\lim_n s_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R}\backslash\{0\} & \textit{converge} \\ \infty & \textit{diverge} \\ \nexists & \textit{indeterminata} \end{cases}$

4 Tabella delle Serie

4.1 $\sum a_n$:

- **Criterio necessario di convergenza:**
  - Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora la serie a_n converge, se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ allora la serie a_n non converge.

4.2 Serie Geometriche:

- $\sum q^k = \begin{cases} |q| < 1 & \textit{converge} \\ |q| > 1 & \textit{diverge} \\ q \leq -1 & \textit{indeterminata} \end{cases}$

4.3 Serie Armoniche:

- $\sum \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \alpha > 1 & \textit{converge} \\ \alpha \leq 1 & \textit{diverge} \end{cases}$

4.4 Serie Logaritmiche:

- $\sum \frac{1}{k^\alpha \log^\beta k} = \begin{cases} \alpha > 1 & \textit{converge} \\ \alpha \leq 1 & \textit{diverge} \end{cases}$

4.5 Serie a Termini Positivi:

- $\sum a_n = \begin{cases} \textit{converge} \\ \textit{diverge} \end{cases}$

4.6 Criterio della Radice:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} l < 1 & \textit{converge} \\ l > 1 & \textit{diverge} \end{cases}$

4.7 Criterio del Rapporto:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = l \begin{cases} l < 1 & \textit{converge} \\ l > 1 & \textit{diverge} \end{cases}$

4.8 Criterio del Confronto:

- $0 \leq \{a_n\}_n \leq \{b_n\}_n$
- $\sum a_n$ *diverge* $\longrightarrow \sum b_n$ *diverge*
- $\sum b_n$ *converge* $\longrightarrow \sum a_n$ *converge*

4.9 Criterio del Confronto Asintotico:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $a_n \sim b_n \implies \sum a_n \sim \sum b_n$

4.10 Serie a Termini Qualunque:

- $\sum |a_n| < +\infty \implies \sum a_n$ converge assolutamente.

4.11 Serie a Segno Alterno:

- $\sum(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$ si usa il **Criterio di Leibniz**:
  - $a_n \geq 0 \forall n$
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
  - a_n decrescente

- Allora per il Criterio di Leibniz $\sum a_n$ converge semplicemente.

5 Convergenza e Divergenza Integrali

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha < 1 & converge \\ \alpha \geq 1 & diverge \end{cases}$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \alpha > 1 & converge \\ \alpha \leq 1 & diverge \end{cases}$

- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha(\log x)^\beta} = \begin{cases} \alpha < 1 & converge \\ \alpha = 1 & \begin{cases} \beta > 1 & converge \\ \beta \leq 1 & diverge \end{cases} \\ \alpha > 1 & diverge \end{cases}$

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\beta} = \begin{cases} \beta > 1 & converge \\ \beta \leq 1 & diverge \end{cases}$