Fondamenti di Matematica per Informatica: Schema Esercizi

Aymane Chabbaki

II semestre 2018/2019

Indice

1 Principio di Induzione

1.1 Cosa specificare durante lo sviluppo di un esercizio

- Base dell'induzione
- Passo induttivo
- Ipotesi induttiva

1.2 Esercizio 1

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 1$ $P(n) := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{n+1}}{4^n} - 4 \right)$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 1$ (**base dell'induzione**):

$$\begin{aligned} \frac{5^0}{4^0} + \frac{5^1}{4^1} &= \frac{5^{1+1}}{4^1} - 4 \\ 1 + \frac{5}{4} &= \frac{25}{4} - 4 \\ \frac{9}{4} &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

- Dunque $P(0)$ vera.
- $n \implies n+1$ (**passo induttivo**) con $n \geq 1$.
- Assumo che l'ugualianza: $\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{n+1}}{4^n} - 4$ (**ipotesi induttiva**) sia vera.
- Devo dimostare che: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{(n+1)+1}}{4^{n+1}} - 4$
- Vale:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{5^k}{4^k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{4^k} \right) + \frac{5^{n+1}}{4^{n+1}} \\ (\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(\frac{5^{n+1}}{4^n} \right) + \frac{5^{n+1}}{4^{n+1}} \\ &= \frac{4 \cdot 5^{n+1} + 5^{n+1}}{4^{n+1}} - 4 \\ &= \frac{5 \cdot 5^{n+1}}{4^{n+1}} - 4 \\ &= \frac{5^{(n+1)+1}}{4^{n+1}} - 4 \end{aligned}$$

- Dunque, visto che $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{(n+1)+1}}{4^{n+1}} - 4$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

1.3 Esercizio 2

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 2\ P(n) := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^n} \right)$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 2$ (**base dell'induzione**):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} \frac{5}{6^k} &= 1 - \frac{1}{6^2} \\ \frac{5}{6} + \frac{5}{6^2} &= 1 - \frac{1}{36} \\ \frac{6 * 5 + 5}{36} &= \frac{36 - 1}{36} \\ \frac{35}{36} &= \frac{35}{36} \end{aligned}$$

- $P(2)$ è vera.
- **1° modo:**
  - $n \geq 2,\ n \implies n + 1$
  - Assumiamo $P(n)$ sia verificata per qualche $n \geq 2$ (**ipotesi induttiva**).
  - Dimostriamo che $P(n+1)$ è vera, ovvero $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^{n+1}}$ è vera (**passo induttivo**).
  - Vale:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k} \right) + \frac{5}{6^{n+1}} \\ (\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(1 - \frac{1}{6^n} \right) + \frac{5}{6^{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{6^n} + \frac{5}{6^{n+1}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6^n} - \frac{5}{6^{n+1}} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{6 - 5}{6^{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \end{aligned}$$

  - Dunque, visto che $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^{n+1}}$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.
- **2° modo:**
  - $n \geq 2,\ n \implies n + 1$ e assumiamo che valga $\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^n}$ per qualche $n \geq 2$ (**ipotesi induttiva**).
  - Devo dimostrare che vale: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^{n+1}}$

– Vale:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \iff \\
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k}\right) + \frac{5}{6^{n+1}} &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \iff \\
1 - \frac{1}{6^n} + \frac{5}{6^{n+1}} &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \iff \\
\frac{1}{6^{n+1}} + \frac{5}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6^n} \iff \\
\frac{6}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6^n} \iff \\
\frac{1}{6^n} &= \frac{1}{6^n}
\end{aligned}$$

- Osserviamo che l'ultima equazione è un'**identità** (sempre vera) e dunque, visto che le operazioni sono delle **succesioni di equivalenze**, si può affermare che anche la prima uguaglianza è soddisfatta.

1.4 Esercizio 3

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 1$, vale $P(n) := \left(\sum_{k=0}^{n} 4 \cdot k \cdot 3^k = 3 + 3^{n+1}(2n-1)\right)$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 1$ (**base dell'induzione**):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1} 4 \cdot k \cdot 3^k &= 3 + 3^{1+1}(2 \cdot 1 - 1) \\
4 \cdot 0 \cdot 3^0 + 4 \cdot 1 \cdot 3^1 &= 3 + 3^2(2-1) \\
12 &= 12
\end{aligned}$$

- $P(1)$ risulta vera.
- $n \geq 1, n \implies n+1$
- Assumiamo $P(n)$ vera per qualche $n \geq 1$ (**ipotesi induttiva**).
- Dimostriamo che $P(n+1)$ è vera, ovvero $\sum_{k=0}^{n+1} 4 \cdot k \cdot 3^k = 3 + 3^{(n+1)+1}(2(n+1)-1)$
- Vale:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 4 \cdot k \cdot 3^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} 4 \cdot k \cdot 3^k\right) + 4(n+1) \cdot 3^{n+1} \\
(\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(3 + 3^{n+1} \cdot (2n-1)\right) + 4(n+1) \cdot 3^{n+1} \\
&= 3 + 3^{n+1} \cdot (2n - 1 + 4n + 4) \\
&= 3 + 3^{n+1} \cdot (6n+3) \\
&= 3 + 3^{n+1} \cdot 3(2n+1)
\end{aligned}$$

- Dunque, visto che $\sum_{k=0}^{n+1} 4 \cdot k \cdot 3^k = 3 + 3^{n+1} \cdot 3(2n+1) = 3 + 3^{(n+1)+1} \cdot (2(n+1)-1)$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

1.5 Esercizio 4

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 3$ vale $P(n) := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+n}{2n}$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 3$ (**base dell'induzione**):

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1+3}{2*3} \iff \left(\frac{3}{4} * \frac{8}{9}\right) = \frac{4}{6} \iff \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

- $P(3)$ è vera.
- $n \geq 3,\ n \implies n+1$
- Assumiamo che $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+n}{2n}$ per qualche $n \geq 3$ (**ipotesi induttiva**).
- Proviamo che $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+(n+1)}{2(n+1)}$ (**passo induttivo**).
- Vale:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{1+(n+1)}{2(n+1)} \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
(\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(\frac{1+n}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{1+n}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)} \\
&= \frac{1+(n+1)}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

- Dunque, visto che $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+(n+1)}{2(n+1)}$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

2 Massimo Comune Divisore

2.1 Esercizio 1

- Calcolo del MCD tra 54 e 39 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(54, 39) = x \cdot 54 + y \cdot 39$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 54 &= 1 \cdot 39 + 15 \\ 39 &= 2 \cdot 15 + 9 \\ 15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\ 9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\ \cancel{6} &= \cancel{2 \cdot 3 + 0} \end{aligned} \tag{1}$$

- Ora, da (1) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 15 &= 54 - 1 \cdot 39 \\ 9 &= 39 - 2 \cdot 15 \\ 6 &= 15 - 1 \cdot 9 \\ 3 &= 9 - 1 \cdot 6 \\ &= 9 - 1(15 - 1 \cdot 9) \\ &= 2 \cdot 9 - 1 \cdot 15 \\ &= 2(39 - 2 \cdot 15) - 1 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 39 - 5 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 39 - 5(54 - 1 \cdot 39) \\ &= 7 \cdot 39 - 5 \cdot 54 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(54, 39) = 3 = (-5) \cdot 54 + 7 \cdot 39$

2.2 Esercizio 2

- Calcolo del MCD tra 504 e 385 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(504, 385) = x \cdot 504 + y \cdot 385$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 504 &= 1 \cdot 385 + 119 \\ 385 &= 3 \cdot 119 + 28 \\ 119 &= 4 \cdot 28 + 7 \\ \cancel{28} &= \cancel{4 \cdot 7 + 0} \end{aligned} \tag{2}$$

- Ora, da (2) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 119 &= 504 - 1 \cdot 385 \\ 28 &= 385 - 3 \cdot 119 \\ 7 &= 119 - 4 \cdot 28 \\ &= 119 - 4(385 - 3 \cdot 119) \\ &= 13 \cdot 119 - 4 \cdot 385 \\ &= 13(504 - 1 \cdot 385) - 4 \cdot 385 \\ &= 13 \cdot 504 - 17 \cdot 385 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(504, 385) = 7 = 13 \cdot 504 + (-17) \cdot 385$

2.3 Esercizio 3

- Calcolo del MCD tra 48 e 28 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(48, 28) = x \cdot 48 + y \cdot 28$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \cdot 28 + 20 \\ 28 &= 1 \cdot 20 + 8 \\ 20 &= 2 \cdot 8 + 4 \\ \cancel{8} &= \cancel{2 \cdot 4 + 0} \end{aligned} \tag{3}$$

- Ora, da (3) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 20 &= 48 - 1 \cdot 28 \\ 8 &= 28 - 1 \cdot 20 \\ 4 &= 20 - 2 \cdot 8 \\ &= 20 - 2 \cdot (28 - 1 \cdot 20) \\ &= 3 \cdot 20 - 2 \cdot 28 \\ &= 3 \cdot (48 - 1 \cdot 28) - 2 \cdot 28 \\ &= 3 \cdot 48 - 5 \cdot 28 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(48, 28) = 4 = 3 \cdot 48 + (-5) \cdot 28$

2.4 Esercizio 4

- Calcolo del MCD tra 52 e 28 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(52, 28) = x \cdot 52 + y \cdot 28$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 52 &= 1 \cdot 28 + 24 \\ 28 &= 1 \cdot 24 + 4 \\ \cancel{24} &= \cancel{6 \cdot 4 + 0} \end{aligned} \tag{4}$$

- Ora, da (4) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 24 &= 52 - 1 \cdot 28 \\ 4 &= 28 - 1 \cdot 24 \\ &= 28 - 1 \cdot (52 - 1 \cdot 28) \\ &= 2 \cdot 28 - 1 \cdot 52 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(52, 28) = 4 = 2 \cdot 28 + (-1) \cdot 52$

3 Teorema Cinese del Resto

3.1 Esercizio 1

- Si determinino tutte le soluzioni di:

$$\begin{cases} x \equiv 33 \pmod{77} \\ x \equiv -2 \pmod{56} \end{cases}$$

- Soluzione:

1. Compatibilità:
   - Grazie al **Teorema Cinese del Resto**, il sistema è **compatibile**, ovvero il suo insieme Sol delle soluzioni non è vuoto, se e soltanto se $(77, 56) \mid 33 - (-2)$, ovvero $(77, 56) \mid 35$
   - Vale:

$$77 = \mathbf{7} \cdot 11$$
$$56 = 2^3 \cdot \mathbf{7}$$

   - $(77, 56) = 7 \mid 35$ è valido, quindi $Sol \neq \varnothing$ e vale:

$$(77, 56) \cdot 5 = 33 - (-2) \quad \textbf{(1)}$$

2. Algoritmo di Euclide:
   - Calcolo di una soluzione **c** del sistema, via algoritmo di Euclide.
   - Eseguiamo l' **algoritmo di Euclide** per $(77, 56)$:

$$77 = 1 \cdot 56 + 21$$
$$56 = 2 \cdot 21 + 14$$
$$21 = 1 \cdot 14 + 7$$
$$\cancel{14} = \cancel{2 \cdot 7 + 0}$$

   - Risialiamo i resti e calcoliamo x e y:

$$\begin{aligned} 21 &= 77 - 1 \cdot 56 \\ 14 &= 56 - 2 \cdot 21 \\ 7 &= 21 - 1 \cdot 14 \\ &= 21 - 1(56 - 2 \cdot 21) \\ &= 3 \cdot 21 - 1 \cdot 56 \\ &= 3(77 - 1 \cdot 56) - 1 \cdot 56 \\ &= 3 \cdot 77 - 4 \cdot 56 \end{aligned}$$

   - Dunque $(77, 56) = 7 = 3 \cdot 77 - 4 \cdot 56$ **(2)**
   - Dalla **(1)** e dalla **(2)** segue che:

$$\begin{aligned} 5(3 \cdot 77 - 4 \cdot 56) &= 33 - (-2) \\ 15 \cdot 77 + (-20) \cdot 56 &= 33 + (-2) \\ 33 + (-15) \cdot 77 &= -2 + (-20) \cdot 56 \end{aligned}$$

   - $c := -1122 = -1122 \in Sol$

3. Soluzione Completa:
   - Grazie al Teorema Cinese del Resto, vale:
   - $Sol = [-1122]_{[77,56]}$
   - Vale: $[77, 56] = \dfrac{77 \cdot 56}{(77, 56)} = 11 \cdot 56 = 616$
   - Dunque:

$$\begin{aligned} Sol = [-1122]_{616} &= [110]_{616} \subset \mathbb{Z} \\ &= [110]_{616} = (110 + 616 \cdot k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3.2 Esercizio 2

- Risolvere:

$$(S) = \begin{cases} x \equiv 112 \pmod{72} \\ x \equiv 4 \pmod{330} \end{cases}$$

- Soluzione:
  - Osservo che $112 = 40 \pmod{72}$. Dunque il sistema (S) è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x \equiv 40 \pmod{72} \\ x \equiv 4 \pmod{330} \end{cases}$$

1. Compatibilità
   - Ricordiamo che, grazie al Teorema Cinese del Resto, il sistema S è compatibile $(Sol(S) \neq \varnothing) \iff (72, 330) \mid 40 - 4 \iff (72, 330) \mid 36$
   - Vale:

$$\begin{aligned} 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ 330 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

   $\implies (72, 330) = 2 \cdot 3 = 6$

   - $(72, 330) \mid 36 \iff 6 \mid 36$ (visto che 6 divide 36, il sistema (S) è compatibile).
   - Dunque: $40 - 4 = 6 \cdot 6 = 6(72, 330)$ **(1)**

2. Euclide
   - Vale:

$$\begin{aligned} 330 &= 4 \cdot 72 + 42 \\ 72 &= 1 \cdot 42 + 30 \\ 42 &= 1 \cdot 30 + 12 \\ 30 &= 2 \cdot 12 + 6 \\ \cancel{12} &= \cancel{2 \cdot 6 + 0} \end{aligned}$$

* Ora risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 42 &= 330 - 4 \cdot 72 \\ 30 &= 72 - 1 \cdot 42 \\ 12 &= 42 - 1 \cdot 30 \\ 6 &= 30 - 2 \cdot 12 \\ &= 30 - 2(42 - 1 \cdot 30) \\ &= 3 \cdot 30 - 2 \cdot 42 \\ &= 3(72 - 1 \cdot 42) - 2 \cdot 42 \\ &= 3 \cdot 72 - 5 \cdot 42 \\ &= 3 \cdot 72 - 5(330 - 4 \cdot 72) \\ &= 23 \cdot 72 - 5 \cdot 330 \end{aligned}$$

* Dunque $(72, 330) = (-5) \cdot 330 + 23 \cdot 72$ **(2)**

3. Calcolo della soluzione c
   * Dalla **(1)** e **(2)**, segue:

$$\begin{aligned} 40 - 4 &= 6((-5) \cdot 330 + 23 \cdot 72) \\ 40 - 4 &= (-30) \cdot 330 + (138) \cdot 72 \end{aligned}$$

   * Ovvero:

$$\begin{aligned} 40 + (-138) \cdot 72 &= 4 + (-30) \cdot 330 \\ -9896 &= -9896 \end{aligned}$$

   $\implies c := -9896 \in Sol(S)$
4. Soluzione Completa (calcolo del $Sol(S)$)
   * Grazie al Teorema Cinese del Resto si ha:

$$Sol(S) = [-9896]_{[72,330]} \subset \mathbb{Z}$$

   * Segue che $[72, 330] = \dfrac{72 \cdot 330}{(72, 330)} = \dfrac{72 \cdot 330}{6} = 3960$
   * Dunque:

$$\begin{aligned} Sol(S) = [-9896]_{[3960]} &= [1984]_{[3960]} \\ &= \{1984 + 3960 \cdot k \in \mathbb{Z} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

4 Invertibilità

4.1 Esercizio 1

1. $[12]_{30}$ è invertibile? Cioè $[12]_{30} \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 30$, $a = 12$
   - $(12, 30) = 6 \neq 1 \implies \nexists\, [x]_{30}\, tc : [12]_{30} * [x]_{30} = [1]_{30}$
2. $[11]_{30}$ è invertibile? Cioè $[11]_{30} \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 30$, $b = 11$
   - $(11, 30) = 1 \implies \exists\, [11]_{30}^{-1} \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - Applichiamo Euclide:

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 11 + 8 \\ 11 &= 1 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

   - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 8 &= 30 - 2 \cdot 11 \\ 3 &= 11 - 1 \cdot 8 \\ 2 &= 8 - 2 \cdot 3 \\ 1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 3 - 1(8 - 2 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \\ &= 3(11 - 1 \cdot 8) - 1 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4(30 - 2 \cdot 11) \\ &= 11 \cdot 11 - 4 \cdot 30 \end{aligned}$$

   - Dunque:

$$\begin{aligned} 1 &= (11) \cdot 11 + (-4) \cdot 30 \\ [1]_{30} &= [11]_{30} \cdot [11]_{30} + [-4]_{30} \cdot [30]_{30} \end{aligned}$$

   - Passando a (mod 30) si ha che:

$$[1]_{30} = [11]_{30} \cdot [11]_{30}$$

   - $[11]_{30}^{-1} = [11]_{30}$

4.2 Esercizio 2

1. $[48]_{20}$ è invertibile? Cioè $[48]_{20} \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 20$, $b = 48$
   - $(48, 20) = 4 \neq 1 \implies \nexists\, [x]_{20}\, tc : [48]_{20} * [x]_{20} = [1]_{20}$
2. $[3]_{20}$ è invertibile? Cioè $[3]_{20} \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 20$, $a = 3$
   - $(3, 20) = 1 \implies \exists\, [3]_{20}^{-1} \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - Applichiamo Euclide:

$$\begin{aligned} 20 &= 6 * 3 + 2 \\ 3 &= 2 * 1 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

   - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 2 &= 20 - 6 \cdot 3 \\ 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (20 - 6 \cdot 3) \\ &= 7 \cdot 3 - 20 \end{aligned}$$

   - Dunque:

$$\begin{aligned} 1 &= (7) \cdot 3 + (-1) \cdot 20 \\ [1]_{20} &= [3]_{20} \cdot [7]_{20} + [-1]_{20} \cdot [20]_{20} \end{aligned}$$

   - Passando a $\pmod{20}$ si ha che:

$$[1]_{20} = [3]_{20} \cdot [7]_{20}$$

   - $[3]_{20}^{-1} = [7]_{20}$

5 Calcolo della ϕ

5.1 Esercizi

1. $\phi(21) = \phi(3 \cdot 7) = (3 - 1)(7 - 1) = 12$
2. $\phi(35) = \phi(5 \cdot 7) = (5 - 1)(7 - 1) = 24$
3. $\phi(10) = \phi(2 \cdot 5) = (2 - 1)(5 - 1) = 4$
4. $\phi(16) = \phi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$
5. $\phi(81) = \phi(3^4) = 3^4 - 3^3 = 54$
6. $\phi(24) = \phi(2^3 \cdot 3) = \phi(2^3) \cdot \phi(3) = (2^3 - 2^2)(3 - 1) = 8$
7. $\phi(108) = \phi(2^2 \cdot 3^3) = \phi(2^2) \cdot \phi(3^3) = (2^2 - 2^1)(3^3 - 3^2) = 36$

6 Crittografia RSA

6.1 Esercizio 1

- Risolvere: $x^7 \equiv 2 \pmod{35}$
- Soluzione:
  1. **Applicabilità del Teorema della crittografia RSA**
     - Dobbiamo verificare che:
       (a) $(2, 35) = 1$ (questo è vero in quanto 2 è un numero primo e 35 non è un numero pari)
       (b) $(7, \phi(35)) = 1$
         * $\phi(35) = \phi(5) \cdot \phi(7) = (5-1)(7-1) = 24$
         * Vale che $(7, \phi(35)) = (7, 24) = 1$ (in quanto 7 è un numero primo che non divide 24)
     - Grazie al Teorema fondamentale della crittografia RSA vale:
$$\begin{aligned} Sol &= \left[2^d\right]_{35} \subset \mathbb{Z} \\ &= \{2^d + k \cdot 35 \in \mathbb{Z} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$
       * Dove $d > 0$, $d \in [7]_{\phi(n)} = [7]^{-1}_{\phi(35)} = [7]^{-1}_{24}$
  2. **Calcolo della soluzione d** $(d > 0, d \in [7]^{-1}_{24})$
     - Calcoliamo $[7]^{-1}_{24}$ via Euclide:
$$\begin{aligned} 24 &= 3 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ \cancel{3} &= \cancel{3 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$
     - Risaliamo i resti:
$$\begin{aligned} 3 &= 24 - 3 \cdot 7 \\ 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\ &= 7 - 2(24 - 3 \cdot 7) \\ &= 7 \cdot 7 - 2 \cdot 24 \end{aligned}$$
     - Dunque:
$$1 = 7 \cdot 7 + (-2) \cdot 24$$
$$[1]_{24} = [7]_{24} \cdot [7]_{24} + [-2]_{24} \cdot [24]_{24}$$
     - Passando a $\pmod{24}$ si ha che:
$$[1]_{24} = [7]_{24} \cdot [7]_{24}$$
     - $[7]^{-1}_{24} = [7]_{24}$, con $d = 7$

- Segue che:
$$\begin{aligned} Sol = \left[2^d\right]_{35} &= \left[2^7\right]_{35} \\ &= \left[2^5\right]_{35} \cdot \left[2^2\right]_{35} \\ &= [32]_{35} \cdot [4]_{35} \\ &= [-3]_{35} \cdot [4]_{35} \\ &= [-12]_{35} \\ &= [23]_{35} \end{aligned}$$
- Quindi:
$$\begin{aligned} Sol &= [23]_{35} \\ &= \{23 + k \cdot 35 \in \mathbb{Z} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

6.2 Esercizio 2

- Determinare tutte le soluzioni di $x^9 \equiv 49(mod\ 60)$ e se ne determini la massima soluzione negativa.
- SOLUZIONE:

1. **Applicabilità del Teorema della crittografia RSA**
   - Dobbiamo verificare che:
     (a) $(49, 60) = 1$ (questo è vero in quanto non ci sono primi comuni)
     (b) $(9, \phi(60)) = 1$
     * $\phi(60) = \phi(2^2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5) = (2^2 - 2^1)(3-1)(5-1) = 16$
     * Vale che $(9, \phi(60)) = (9, 16) = 1$ (in quanto non ci sono primi comuni)
   - Grazie al Teorema fondamentale della crittografia RSA vale:
   $$Sol = \left[49^d\right]_{60} \subset \mathbb{Z}$$
   $$d > 0,\ d \in [9]^{-1}_{\phi(60)} = [9]^{-1}_{16}$$
2. **Calcolo di Sol:**
   - Prima calcolo $d > 0, d \in [9]^{-1}_{16}$ per mezzo dell'algoritmo di Euclide:
   $$\begin{aligned} 16 &= 1 \cdot 9 + 7 \\ 9 &= 1 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$
   - Risaliamo i resti:
   $$\begin{aligned} 7 &= 16 - 1 \cdot 9 \\ 2 &= 9 - 1 \cdot 7 \\ 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - 3(9 - 1 \cdot 7) \\ &= 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \\ &= 4(16 - 1 \cdot 9) - 3 \cdot 9 \\ &= 4 \cdot 16 - 7 \cdot 9 \end{aligned}$$
   - Dunque:
   $$1 = 4 \cdot 16 + (-7) \cdot 9$$
   $$[1]_{16} = [4]_{16} \cdot [16]_{16} + [-7]_{16} \cdot [9]_{16}$$
   - Passando a $(\text{mod } 16)$ si ha che:
   $$[1]_{16} = [-7]_{16} \cdot [9]_{16}$$

- Dunque: $[9]^{-1}_{16} = [9]_{16}$ con $d = 9$ e:
$$Sol = [49]^9_{60} = \left[7^2\right]^9_{60} = \left[7^{18}\right]_{60} \subset \mathbb{Z}$$
- Dopo aver studiato l'orbita segue che:
$$\begin{aligned} Sol &= \left[7^{(4*4+2)}\right]_{60} \\ &= \left[7^4\right]^4_{60} \cdot [7]^2_{60} \\ &= [1]^4_{60} \cdot \left[7^2\right]_{60} \\ &= [1]^4_{60} \cdot [49]_{60} \\ &= [49]_{60} \end{aligned}$$

- Quindi:

$$\begin{aligned} Sol &= [49]_{60} \\ &= \{49 + k \cdot 60 \in \mathbb{Z} | k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- La massima soluzione negativa è: -11 (data da $49 - 60$).

7 Grafi

7.1 Condizioni necessarie ma non sufficienti per l'esistenza di isomorfismi

- Alcune condizioni necessarie (**ma non sufficienti**) per l'esistenza di isomorfismi, ovvero se G e G' sono grafi **finiti** ed **isomorfi** allora:

  1. $|\,V(G)\,| = |\,V(G')\,|$
  2. $|\,E(G)\,| = |\,E(G')\,|$
  3. $score(G) = score(G')$ in forma canonica
  4. $\#c.c$ di $G = \#c.c$ di G'
  5. G 2-connesso $\iff G'$ 2-connesso
  6. G hamiltoniano $\iff G'$ hamiltoniano
  7. $\#(\{3, \dots n\}$-cicli di $G) = \#(\{3, \dots n\}$-cicli di $G')$

- Queste condizioni vengono utilizzate per **escludere a priori** grafi che non sono isomorfi.
- Basta che una di queste condizioni necessarie venga a mancare affinchè i grafi non siano isomorfi.
- Bisogna ricordare però che queste condizioni sono **necessarie ma non sufficienti** per l'esistenza di isomorfismi, dunque se 2 grafi passano tutte le verifiche (basta arrivare fino alla costruzione $n.6$), **nulla si può dire** e per verificare se i grafi sono isomorfi bisogna passare a verifica diretta.
- Quando si passa a **verifica diretta di un isomorfismo** è prassi gestire prima i vertici con **grado massimo** (**minimo**) o che compaiono una **sola volta**, così da ridurre i casi da gestire.

7.2 Ostruzioni all'esistenza di grafi con dato score (condizioni necessarie)

1. Ostruzione 1:

   - Se G è un grafo finito con score $d = (d_1, \dots, d_n)$ con $d_1 \leq d_2 \leq \dots, \leq d_n$, allora:

   $$d_n \leq n - 1$$

   Ostruzione 2:

   - Se G è un grafo finito con score $d = (d_1, \dots, d_n)$, per il **lemma delle strette di mano**, il **numero di vertici** di G di **grado dispari** deve essere **pari**.

   Ostruzione 3:

   - Se $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-k+1}, d_{n-k+2}, \dots, d_{n-1}, d_n) = (d_1, d_2, \dots, d_{n-k}, \underbrace{n-1, \dots, n-1}_{k\text{-volte}})$ fosse lo score di un grafo G, allora:

   $$k \leq d_1$$

   Ostruzione 4:

   - Sia G un grafo finito con score canonico $d = (d_1, \dots, d_{n-1}, d_n)$ e siano $u, v \in V(G)$ tale che:

   $$deg_G(u) = d_n - 1$$
   $$deg_G(v) = d_n$$

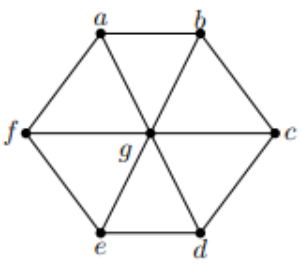
   - Allora:

   $$|\{w \in V(G) \setminus \{u, v\} \,|\, deg_G(w) \geq 2\}| \geq d_{n-1} + d_n - n$$

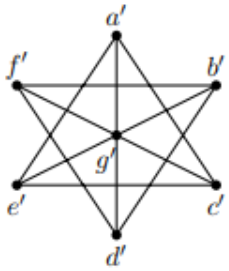
8 Isomorfismo tra grafi

8.1 Esercizio 1

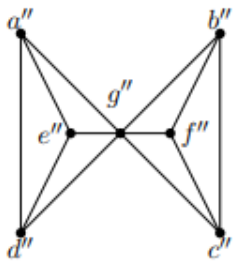
- Stabilire l'esistenza o meno di isomorfismi tra i seguenti grafi:



Grafo G_{25}

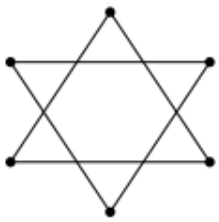


Grafo G_{26}

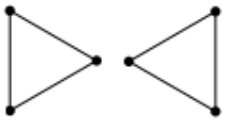


Grafo G_{27}

- Alcune condizioni necessarie:
  1. $|\,V(G_{25})\,| = |\,V(G_{26})\,| = |\,V(G_{27})\,| = 7$ (NULLA SI PUÒ DIRE)
  2. $|\,E(G)\,| = |\,E(G')\,| = |\,EV(G_{27})\,| = 12$ (NULLA SI PUÒ DIRE)
  3. SCORE:
     $$\left.\begin{aligned} score(G_{25}) &= (3,3,3,3,3,3,6) \\ score(G_{25}) &= (3,3,3,3,3,3,6) \\ score(G_{25}) &= (3,3,3,3,3,3,6) \end{aligned}\right\} \text{NULLA SI PUÒ DIRE}$$
  4. G_{25}, G_{26} e G_{27} sono connessi.
  5. G_{25} è 2-connesso in quanto hamiltoniano, essendo $\{a,b,c,d,e,f,g,a\}$ un suo ciclo hamiltoniano.
     G_{26} non è 2-connesso in quanto $G_{26} - g'$ è un grafo con $2\,c.c$
     G_{27} non è 2-connesso in quanto $G_{27} - g''$ è un grafo con $2\,c.c$



(a) $G_{26} - g'$



(b) $G_{27} - g'$

Dunque:

$$G_{25} \ncong G_{26}$$
$$G_{25} \ncong G_{27}$$

  6. G_{26} e G_{27} non sono 2-connessi e dunque neanche hamiltoniani (NULLA SI PUÒ DIRE).
  7. Calcolare $\#(\{3,\dots n\}$-cicli di $G)$ in generale è complicato e non porta a niente.

- Le costruzioni passano tutte le verifiche dunque NULLA SI PUÒ DIRE. Si passa a verifica diretta dell'isomorfismo tra G_{26} e G_{27}:
  - Costruiamo un isomorfimo $f : G_{26} \longrightarrow G_{27}$

$$
\begin{aligned}
V_{26} &\xrightarrow{\text{f}} V_{27} \\
a' &\longmapsto a'' \\
b' &\longmapsto b'' \\
c' &\longmapsto c'' \\
d' &\longmapsto d'' \\
e' &\longmapsto e'' \\
f' &\longmapsto f'' \\
g' &\longmapsto g''
\end{aligned}
$$

  - Osservo che f è **iniettiva** (i vertici elencati nella colonna di destra sono a 2 a 2 distinti).
  - Inoltre f è **surgettiva** (nella colonna a destra compaiono tutti i vertici di G_{27}
  - Dunque f è una **bigezione**.
  - Verifico se si tratta di un **morfismo** con f^{-1} morfismo:

$$
\begin{aligned}
E(G_{26}) &\xrightarrow{\text{'f'}} \left(\frac{V(G_{27})}{2}\right) \\
\{a', e'\} &\longmapsto \{f'', c''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{a', g'\} &\longmapsto \{f'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{a', c'\} &\longmapsto \{f'', b''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{e', g'\} &\longmapsto \{c'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{e', c'\} &\longmapsto \{c'', b''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{c', g'\} &\longmapsto \{b'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{f', d'\} &\longmapsto \{a'', d''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{f', b'\} &\longmapsto \{a'', e''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{f', g'\} &\longmapsto \{e'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{b', d'\} &\longmapsto \{e'', d''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{b', g'\} &\longmapsto \{e'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{d', g'\} &\longmapsto \{d'', g''\} \quad \in E(G_{27})
\end{aligned}
$$

  - Se avessi trovato un lato che non appartiene a $E(G_{27})$ avrei dovuto rifare tutto, cambiando la funzione f che ho definito in precedenza.
  - Poichè i 2-sottoinsiemi di $V(G_{27})$ che compaiono nella colonna di destra sono lati di G_{27}, segue che f **è un morfismo**.
  - Poichè nella colonna di destra compaiono tutti i lati di G_{27}, f **è un isomorfismo**.
  - In conclusione: $G_{26} \simeq G_{27}$

9 Score di grafi

9.1 Esercizio 1

- Dire se $d = (1, 1, 2, 4, 5, 6, 7)$ è lo score di un grafo.

$$\begin{aligned} n &= 7 \\ d_n &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 7 \leq 7 - 1 \\ &\iff 7 \leq 6 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.2 Esercizio 2

- Dire se $d = (1, 1, 1, 1, 5, 6, 7, 8)$ è lo score di un grafo.

$$\begin{aligned} n &= 8 \\ d_n &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 8 \leq 8 - 1 \\ &\iff 8 \leq 7 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.3 Esercizio 3

- Dire se $d = (0, 1, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 9)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 10$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 9$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 9 \leq 10 - 1 \\ &\iff 9 \leq 9 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Supponiamo che d sia uno score di un grafo, allora anche $d' = (1, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 9)$ sarebbe lo score di un grado (quello precedente con il v**ertice isolato rimosso**).
- Allora vale:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 9 \leq 9 - 1 \\ &\iff 9 \leq 8 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d', dunque neanche con d.

9.4 Esercizio 4

- Dire se $d = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 7)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 10$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 7$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 7 \leq 10 - 1 \\ &\iff 7 \leq 9 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 3 \end{aligned}$$

- Il lemma delle strette di mano (ostruzione $n.2$) non è rispettato, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.5 Esercizio 5

- Dire se $d = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 9$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 8$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 8 \leq 9 - 1 \\ &\iff 8 \leq 8 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 4 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, cioè lo score termina con termini che valgono $n-1$, ma deve valere anche $k < d_1$, cioè il numero di termini che valgono $n - 1$ deve essere minore del primo termine dello score.
- Vale:

$$\begin{aligned} k &< d_1 \\ 2 &< 1 \end{aligned}$$

- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.6 Esercizio 6

- Dire se $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 11, 11, 11)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 12$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 11$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 11 \leq 12 - 1 \\ &\iff 11 \leq 11 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 8 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, cioè lo score termina con termini che valgono $n-1$, ma deve vale anche $k < d_1$, cioè il numero di termini che valgono $n - 1$ deve essere minore del primo termine dello score.
- Vale:

$$\begin{aligned} k &< d_1 \\ 3 &< 2 \end{aligned}$$

- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.7 Esercizio 7

- Dire se $d = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 12, 13)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 14$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 13$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 13 \leq 14 - 1 \\ &\iff 13 \leq 13 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 10 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 4 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Non siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, perchè lo score termina con un solo termine che vale $n - 1$, dunque visto che "ex falso quodlibet", cioè "dal falso segue qualsiasi cosa", la terza ostruzione è rispettata.

- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$
- Dunque:

$$|(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 12, 13)| \geq 12 + 13 - 14$$
$$10 \geq 11$$

- La quarta ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

10 Teorema dello score

10.1 Enunciato

- Sia $n \geq 2$ e sia $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $0 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n \leq n-1$
- Definiamo il seguente vettore $d' = (d_1^{'}, d_2^{'}, \ldots, d_{n-1}^{'}) \in \mathbb{N}^{n-1}$

$$d_i' := \begin{cases} d_i & i < n - d_n \\ d_i - 1 & i \geq n - d_n \end{cases} \tag{5}$$

- Allora d è lo score di un grafo se e soltanto se lo è d'.
- Se tutto degenera e va a 0, allora d' è lo score di un grafo, e di conseguenza anche d è lo score di un grafo.
- Per semplicità nei calcoli, quando le entrate dell' i-esimo score sono tutte minori o uguali a 2 ci si può fermare.

11 Grafi connessi e sconnessi

- Queste affermazioni servono solo per dimostrare l'esistenza di almeno un grafo dato uno score.
- Alcune però non bastano da sole per verificare che effettivamente lo score rappresenti sempre un grafo o meno.
- In altre parole, queste affermazioni permettono di dire se esiste almeno un grafo connesso o sconnesso, ma non è detto che quello score rappresenti sempre un grafo connesso o sconnesso.
- Sconnesso:
  1. Dato $G = (V, E)$, se $|E(G)| < |V(G)| - 1$ allora esiste un grafo sconnesso dato lo score.
  2. Un grafo è sconnesso se ha più di una compontente connessa.
  3. Se c'è uno 0 nello score allora esiste un grafo sconnesso.
- Connesso:
  1. Un grafo è connesso se ha una sola compontente connessa.
  2. Se c'è uno 0 nello score non esiste un grafo connesso.
  3. Se $|E| \geq |V| - 1$ allora esiste un grafo connesso.
- Hamiltoniano:
  - Se è presente uno 0 nello score del grafo, allora non può esistere un hamiltoniano.
  - Se c'è un 1 nello score, non può esistere un hamiltoniano perchè un grafo per essere hamiltoniano deve contenere al suo interno almeno un ciclo hamiltoniano, che consiste in una **passeggiata chiusa semplice** (non passa due volte per lo stesso vertice) che non è ottenibile con un vertice di grado 1.
- Albero:
  - Se è presente uno 0 nello score non può esistere un grafo connesso e quindi neanche un albero.
  - Se $1 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$ e vale $|V| - 1 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} d_i$ allora esiste un albero dato uno score.
  - Per essere un albero (finito), devono esserci almeno due foglie (vertici con grado uguale a 1).

11.1 Esercizio 1

- Dire se $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 11, 11, 11)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 12$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 11$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 11 \leq 12 - 1 \\ &\iff 11 \leq 11 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 8 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, cioè lo score termina con termini che valgono $n-1$, ma deve valere anche $k < d_1$, cioè il numero di termini che valgono $n-1$ deve essere minore del primo termine dello score.
- Vale:

$$\begin{aligned} k &< d_1 \\ 3 &< 2 \end{aligned}$$

- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

11.2 Esercizio 2

- Dire se $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 10$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 8$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 8 \leq 10 - 1 \\ &\iff 8 \leq 9 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 6 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 4 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- La terza ostruzione è verificata.
- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$

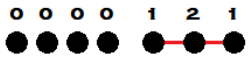
- Dunque:

$$|(2,2,2,2,3,3,5,5,8,8)| \geq 8+8-10$$
$$8 \geq 6$$

- La quarta ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Le ostruzioni non forniscono informazioni, applico quindi il **teorema dello score**:

Score	*Dati*
$d = (2,2,2,2,3,3,5,5,8,8)$	$n = 10$ $d_n = 8 \leq 10-1$
$d' = (2,1,1,1,2,2,4,4,7)$ $= (1,1,1,2,2,2,4,4,7)$	$n = 9$ $d_n = 7 \leq 9-1$
$d'' = (1,0,0,1,1,1,3,3)$ $= (0,0,1,1,1,1,3,3)$	$n = 8$ $d_n = 3 \leq 8-1$
$d''' = (0,0,1,1,0,0,2)$ $= (0,0,0,0,1,1,2)$	Entrate minori o uguali a 2

- Poichè d''' è lo score del seguente grafo G''':



- Dunque, grazie al teorema dello score anche d è lo score di un grafo G.

11.3 Esercizio 3

- Dire se $d = (2,2,2,2,3,3,5,6)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 9$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 6$
- Deve valere:

$$d_n \leq n-1 \iff 6 \leq 9-1$$
$$\iff 6 \leq 8$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$|V(G) \text{ pari }| \quad = 5$$
$$|V(G) \text{ dispari }| = 4$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- La terza ostruzione è verificata, in quanto lo score termina con 6 e non con $n-1 = 9-1 = 8$
- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$

- Dunque:

$$|(2,2,2,2,3,3,5,6)| \geq 5+6-9$$
$$7 \geq 2$$

- La quarta ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Le ostruzioni non forniscono informazioni, applico quindi il **teorema dello score**:

Score	*Dati*
$d = (2,2,2,2,3,3,5,6)$	$n = 9$ $d_n = 6 \leq 9-1$
$d' = (2,2,1,1,2,2,2,4)$ $= (1,1,2,2,2,2,2,4)$	$n = 8$ $d_n = 4 \leq 8-1$
$d'' = (1,1,2,1,1,1,1)$ $= (1,1,1,1,1,1,2)$	Entrate minori o uguali a 2

- Poichè d''' è lo score del seguente grafo G''':

- Dunque, grazie al teorema dello score anche d è lo score di un grafo G.
- Costruiamo un grafo (procedura a ritroso) con score d utilizzando il teorema dello score:

11.4 Esercizio 4

- Dire se $d = (3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,13,13,13,13)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 14$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 13$
- Deve valere:

$$d_n \leq n-1 \iff 13 \leq 14-1$$
$$\iff 13 \leq 13$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$|V(G) \text{ pari }| \quad = 6$$
$$|V(G) \text{ dispari }| = 8$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Se d fosse lo score di un grado, per la terza ostruzione sarebbero previsti 4 vertici di grado $13 = n-1$ (dove $n = 14$ è il numero di vertici) che dovrebbero essere collegati a tutti gli altri vertici.
- Dunque il grado minimo previsto dovrebbe essere maggiore o uguale a 4, che è assurdo visto che il grado minimo dello score d è 3.
- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste un grafo con score d.

11.5 Esercizio 5

- Dire se $d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4)$
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 13$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 4$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 4 \leq 13 - 1 \\ &\iff 4 \leq 12 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 3 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 10 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- La terza ostruzione è verificata, in quanto non è possibile controllarla.
- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$
- Dunque:

$$\begin{aligned} |(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4)| &\geq 4 + 4 - 13 \\ 1 &\geq -5 \end{aligned}$$

- La quarta ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Le ostruzioni non forniscono informazioni, applico quindi il **teorema dello score** a d_2:

Score	*Dati*
$d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4)$	$n = 13$ $d_n = 4 \leq 13 - 1$
$d' = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3, 3)$ $= (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3)$	$n = 12$ $d_n = 3 \leq 12 - 1$
$d'' = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 2)$ $= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$	Entrate minori o uguali a 2

- Poichè d'' è lo score del seguente grafo G''':

- Grazie al teorema dello score anche d_2 è lo score di un grafo G_2.
- Costruiamo un grafo (procedura a ritroso) con score d utilizzando il teorema dello score:

$$d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,4,4,4)$$
$$d_2^{'} = (0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,3,3)$$
$$d_2^{''} = (0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,2)$$