Fondamenti di Matematica per Informatica: Schema Esercizi

Aymane Chabbaki

II semestre 2018/2019

Indice

1 Principio di Induzione

1.1 Cosa specificare durante lo sviluppo di un esercizio

- Base dell'induzione
- Passo induttivo
- Ipotesi induttiva

1.2 Esercizio 1

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall n \geq 1 \; P(n) := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{n+1}}{4^n} - 4 \right)$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 1$ (**base dell'induzione**):

$$\begin{aligned} \frac{5^0}{4^0} + \frac{5^1}{4^1} &= \frac{5^{1+1}}{4^1} - 4 \\ 1 + \frac{5}{4} &= \frac{25}{4} - 4 \\ \frac{9}{4} &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

- Dunque $P(0)$ vera.
- $n \implies n+1$ (**passo induttivo**) con $n \geq 1$.
- Assumo che l'ugualianza: $\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{n+1}}{4^n} - 4$ (**ipotesi induttiva**) sia vera.
- Devo dimostare che: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{(n+1)+1}}{4^{n+1}} - 4$
- Vale:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{5^k}{4^k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{4^k} \right) + \frac{5^{n+1}}{4^{n+1}} \\ (\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(\frac{5^{n+1}}{4^n} \right) + \frac{5^{n+1}}{4^{n+1}} \\ &= \frac{4 \cdot 5^{n+1} + 5^{n+1}}{4^{n+1}} - 4 \\ &= \frac{5 \cdot 5^{n+1}}{4^{n+1}} - 4 \\ &= \frac{5^{(n+1)+1}}{4^{n+1}} - 4 \end{aligned}$$

- Dunque, visto che $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{5^k}{4^k} = \frac{5^{(n+1)+1}}{4^{n+1}} - 4$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

1.3 Esercizio 2

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall n \geq 2$ $P(n) := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^n} \right)$

SOLUZIONE:

- Osserviamo che vale $n = 2$ (**base dell'induzione**):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} \frac{5}{6^k} &= 1 - \frac{1}{6^2} \\ \frac{5}{6} + \frac{5}{6^2} &= 1 - \frac{1}{36} \\ \frac{6 * 5 + 5}{36} &= \frac{36 - 1}{36} \\ \frac{35}{36} &= \frac{35}{36} \end{aligned}$$

- $P(2)$ è vera.
- **1° modo:**
  - $n \geq 2$, $n \implies n+1$
  - Assumiamo $P(n)$ sia verificata per qualche $n \geq 2$ (**ipotesi induttiva**).
  - Dimostriamo che $P(n+1)$ è vera, ovvero $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^{n+1}}$ è vera (**passo induttivo**).
  - Vale:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k} \right) + \frac{5}{6^{n+1}} \\ (\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(1 - \frac{1}{6^n} \right) + \frac{5}{6^{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{6^n} + \frac{5}{6^{n+1}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6^n} - \frac{5}{6^{n+1}} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{6 - 5}{6^{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \end{aligned}$$

  - Dunque, visto che $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^{n+1}}$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.
- **2° modo:**
  - $n \geq 2$, $n \implies n+1$ e assumiamo che valga $\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^n}$ per qualche $n \geq 2$ (**ipotesi induttiva**).
  - Devo dimostrare che vale: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} = 1 - \frac{1}{6^{n+1}}$

– Vale:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{6^k} &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \iff \\
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{6^k}\right) + \frac{5}{6^{n+1}} &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \iff \\
1 - \frac{1}{6^n} + \frac{5}{6^{n+1}} &= 1 - \frac{1}{6^{n+1}} \iff \\
\frac{1}{6^{n+1}} + \frac{5}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6^n} \iff \\
\frac{6}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6^n} \iff \\
\frac{1}{6^n} &= \frac{1}{6^n}
\end{aligned}$$

- Osserviamo che l'ultima equazione è un'**identità** (sempre vera) e dunque, visto che le operazioni sono delle **succesioni di equivalenze**, si può affermare che anche la prima uguaglianza è soddisfatta.

1.4 Esercizio 3

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 1$, vale $P(n) := \left(\sum_{k=0}^{n} 4 \cdot k \cdot 3^k = 3 + 3^{n+1}(2n-1)\right)$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 1$ (**base dell'induzione**):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1} 4 \cdot k \cdot 3^k &= 3 + 3^{1+1}(2 \cdot 1 - 1) \\
4 \cdot 0 \cdot 3^0 + 4 \cdot 1 \cdot 3^1 &= 3 + 3^2(2-1) \\
12 &= 12
\end{aligned}$$

- $P(1)$ risulta vera.
- $n \geq 1, n \implies n+1$
- Assumiamo $P(n)$ vera per qualche $n \geq 1$ (**ipotesi induttiva**).
- Dimostriamo che $P(n+1)$ è vera, ovvero $\sum_{k=0}^{n+1} 4 \cdot k \cdot 3^k = 3 + 3^{(n+1)+1}(2(n+1)-1)$
- Vale:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 4 \cdot k \cdot 3^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} 4 \cdot k \cdot 3^k\right) + 4(n+1) \cdot 3^{n+1} \\
(\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(3 + 3^{n+1} \cdot (2n-1)\right) + 4(n+1) \cdot 3^{n+1} \\
&= 3 + 3^{n+1} \cdot (2n - 1 + 4n + 4) \\
&= 3 + 3^{n+1} \cdot (6n+3) \\
&= 3 + 3^{n+1} \cdot 3(2n+1)
\end{aligned}$$

- Dunque, visto che $\sum_{k=0}^{n+1} 4 \cdot k \cdot 3^k = 3 + 3^{n+1} \cdot 3(2n+1) = 3 + 3^{(n+1)+1} \cdot (2(n+1)-1)$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

1.5 Esercizio 4

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 3$ vale $P(n) := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+n}{2n}$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 3$ (**base dell'induzione**):

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1+3}{2*3} \iff \left(\frac{3}{4} * \frac{8}{9}\right) = \frac{4}{6} \iff \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

- $P(3)$ è vera.
- $n \geq 3$, $n \implies n+1$
- Assumiamo che $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+n}{2n}$ sia vera per qualche $n \geq 3$ (**ipotesi induttiva**).
- Proviamo che $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+(n+1)}{2(n+1)}$ (**passo induttivo**).
- Vale:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{1+(n+1)}{2(n+1)} \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
(\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(\frac{1+n}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{1+n}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)} \\
&= \frac{1+(n+1)}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

- Dunque, visto che $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+(n+1)}{2(n+1)}$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

1.6 Esercizio 5

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 1$ vale $P(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!}$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 1$ (**base dell'induzione**):

$$\frac{4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{(2 \cdot 1 + 1)!} = 1 - \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)!} \iff \frac{4+2-1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} \iff \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

- $P(1)$ è vera.
- $n \geq 1$, $n \implies n+1$ (**passo induttivo**).
- Assumiamo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!}$ sia vera per qualche $n \geq 1$ (**ipotesi induttiva**).
- Dobbiamo provare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2(n+1)+1)!}$
- Vale:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!} &= 1 - \frac{1}{(2n+1)!} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!}\right) + \left(\frac{4(n+1)^2+2(n+1)-1}{(2(n+1)+1)!}\right) \\
(\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(1 - \frac{1}{(2n+1)!}\right) + \left(\frac{4(n^2+2n+1)+2n+2-1}{(2n+3)!}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{4n^2+10n+5}{(2n+3)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{4n^2+10n+5}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\
&= 1 - \left[\frac{(2n+3)(2n+2)-(4n^2+10n+5)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}\right] \\
&= 1 - \left[\frac{4n^2+10n+6-4n^2-10n-5)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{(2n+3)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(2(n+1)+1)!}
\end{aligned}
$$

- Dunque, visto che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2+2k-1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!}$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

1.7 Esercizio 6

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\forall\, n \geq 1$ vale $P(n) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \frac{n}{(2n+3)}$

Soluzione:

- Osserviamo che vale $n = 1$ (**base dell'induzione**):

$$\frac{3}{(2 \cdot 1+1)(2 \cdot k+3)} = \frac{1}{2 \cdot 1+3} \iff \frac{3}{(2+1)(2+3)} = \frac{1}{2+3} \iff \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \iff \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

- $P(1)$ è vera.
- $n \geq 1$, $n \implies n+1$ (**passo induttivo**).
- Assumiamo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \frac{n}{(2n+3)}$ sia vera per qualche $n \geq 1$ (**ipotesi induttiva**).

- Dobbiamo provare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \frac{n+1}{(2(n+1)+3)}$

- Vale:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{n+1}{(2(n+1)+3)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)}\right) + \left(\frac{3}{(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}\right) \\
(\textbf{ipotesi induttiva}) \mapsto &= \left(\frac{n}{(2n+3)}\right) + \left(\frac{3}{(2n+3)(2n+5)}\right) \\
&= \frac{2n^2+5n+3}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{n+1}{2n+5} \\
&= \frac{n+1}{(2(n+1)+3)}
\end{aligned}
$$

- Dunque, visto che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \frac{n+1}{(2(n+1)+3)}$, abbiamo dimostrato l'ugualianza.

2 Massimo Comune Divisore

2.1 Esercizio 1

- Calcolo del MCD tra 54 e 39 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(54,39) = x \cdot 54 + y \cdot 39$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 54 &= 1 \cdot 39 + 15 \\ 39 &= 2 \cdot 15 + 9 \\ 15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\ 9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\ \cancel{6} &= \cancel{2 \cdot 3 + 0} \end{aligned} \tag{1}$$

- Ora, da (1) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 15 &= 54 - 1 \cdot 39 \\ 9 &= 39 - 2 \cdot 15 \\ 6 &= 15 - 1 \cdot 9 \\ 3 &= 9 - 1 \cdot 6 \\ &= 9 - 1(15 - 1 \cdot 9) \\ &= 2 \cdot 9 - 1 \cdot 15 \\ &= 2(39 - 2 \cdot 15) - 1 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 39 - 5 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 39 - 5(54 - 1 \cdot 39) \\ &= 7 \cdot 39 - 5 \cdot 54 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(54,39) = 3 = (-5) \cdot 54 + 7 \cdot 39$

2.2 Esercizio 2

- Calcolo del MCD tra 504 e 385 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(504,385) = x \cdot 504 + y \cdot 385$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 504 &= 1 \cdot 385 + 119 \\ 385 &= 3 \cdot 119 + 28 \\ 119 &= 4 \cdot 28 + 7 \\ \cancel{28} &= \cancel{4 \cdot 7 + 0} \end{aligned} \tag{2}$$

- Ora, da (2) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 119 &= 504 - 1 \cdot 385 \\ 28 &= 385 - 3 \cdot 119 \\ 7 &= 119 - 4 \cdot 28 \\ &= 119 - 4(385 - 3 \cdot 119) \\ &= 13 \cdot 119 - 4 \cdot 385 \\ &= 13(504 - 1 \cdot 385) - 4 \cdot 385 \\ &= 13 \cdot 504 - 17 \cdot 385 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(504,385) = 7 = 13 \cdot 504 + (-17) \cdot 385$

2.3 Esercizio 3

- Calcolo del MCD tra 48 e 28 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(48, 28) = x \cdot 48 + y \cdot 28$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \cdot 28 + 20 \\ 28 &= 1 \cdot 20 + 8 \\ 20 &= 2 \cdot 8 + 4 \\ \cancel{8} &= \cancel{2 \cdot 4 + 0} \end{aligned} \tag{3}$$

- Ora, da (3) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 20 &= 48 - 1 \cdot 28 \\ 8 &= 28 - 1 \cdot 20 \\ 4 &= 20 - 2 \cdot 8 \\ &= 20 - 2 \cdot (28 - 1 \cdot 20) \\ &= 3 \cdot 20 - 2 \cdot 28 \\ &= 3 \cdot (48 - 1 \cdot 28) - 2 \cdot 28 \\ &= 3 \cdot 48 - 5 \cdot 28 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(48, 28) = 4 = 3 \cdot 48 + (-5) \cdot 28$

2.4 Esercizio 4

- Calcolo del MCD tra 52 e 28 e calcolo x e y in $\mathbb{Z}$ tc :

$$(52, 28) = x \cdot 52 + y \cdot 28$$

- Vale:

$$\begin{aligned} 52 &= 1 \cdot 28 + 24 \\ 28 &= 1 \cdot 24 + 4 \\ \cancel{24} &= \cancel{6 \cdot 4 + 0} \end{aligned} \tag{4}$$

- Ora, da (4) risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 24 &= 52 - 1 \cdot 28 \\ 4 &= 28 - 1 \cdot 24 \\ &= 28 - 1 \cdot (52 - 1 \cdot 28) \\ &= 2 \cdot 28 - 1 \cdot 52 \end{aligned}$$

- Dunque si ha che $(52, 28) = 4 = 2 \cdot 28 + (-1) \cdot 52$

3 Teorema Cinese del Resto

3.1 Esercizio 1

- Si determinino tutte le soluzioni di:

$$\begin{cases} x \equiv 33 \pmod{77} \\ x \equiv -2 \pmod{56} \end{cases}$$

- Soluzione:

  1. Compatibilità:
     - Grazie al **Teorema Cinese del Resto**, il sistema è **compatibile**, ovvero il suo insieme Sol delle soluzioni non è vuoto, se e soltanto se $(77, 56) \mid 33 - (-2)$, ovvero $(77, 56) \mid 35$
     - Vale:

$$77 = \mathbf{7} \cdot 11$$
$$56 = 2^3 \cdot \mathbf{7}$$

     - $(77, 56) = 7 \mid 35$ è valido, quindi $Sol \neq \varnothing$ e vale:

$$(77, 56) \cdot 5 = 33 - (-2) \ \ \mathbf{(1)}$$

  2. Algoritmo di Euclide:
     - Calcolo di una soluzione **c** del sistema, via algoritmo di Euclide.
     - Eseguiamo l' **algoritmo di Euclide** per $(77, 56)$:

$$\begin{aligned} 77 &= 1 \cdot 56 + 21 \\ 56 &= 2 \cdot 21 + 14 \\ 21 &= 1 \cdot 14 + 7 \\ \cancel{14} &= \cancel{2 \cdot 7 + 0} \end{aligned}$$

     - Risialiamo i resti e calcoliamo x e y:

$$\begin{aligned} 21 &= 77 - 1 \cdot 56 \\ 14 &= 56 - 2 \cdot 21 \\ 7 &= 21 - 1 \cdot 14 \\ &= 21 - 1(56 - 2 \cdot 21) \\ &= 3 \cdot 21 - 1 \cdot 56 \\ &= 3(77 - 1 \cdot 56) - 1 \cdot 56 \\ &= 3 \cdot 77 - 4 \cdot 56 \end{aligned}$$

     - Dunque $(77, 56) = 7 = 3 \cdot 77 - 4 \cdot 56$ **(2)**
     - Dalla **(1)** e dalla **(2)** segue che:

$$\begin{aligned} 5(3 \cdot 77 - 4 \cdot 56) &= 33 - (-2) \\ 15 \cdot 77 + (-20) \cdot 56 &= 33 + (-2) \\ 33 + (-15) \cdot 77 &= -2 + (-20) \cdot 56 \end{aligned}$$

     - $c := -1122 = -1122 \in Sol$

3. Soluzione Completa:
   - Grazie al Teorema Cinese del Resto, vale:
   - $Sol = [-1122]_{[77,56]}$
   - Vale: $[77,56] = \dfrac{77 \cdot 56}{(77,56)} = 11 \cdot 56 = 616$
   - Dunque:

$$\begin{aligned} Sol = [-1122]_{616} &= [110]_{616} \subset \mathbb{Z} \\ &= [110]_{616} = (110 + 616 \cdot k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3.2 Esercizio 2

- Risolvere:

$$(S) = \begin{cases} x \equiv 112 \pmod{72} \\ x \equiv \ \ 4 \pmod{330} \end{cases}$$

- Soluzione:
  - Osservo che $112 = 40 \pmod{72}$. Dunque il sistema (S) è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x \equiv 40 \pmod{72} \\ x \equiv \ \ 4 \pmod{330} \end{cases}$$

1. Compatibilità
   * Ricordiamo che, grazie al Teorema Cinese del Resto, il sistema S è compatibile ($Sol(S) \neq \varnothing$) $\iff (72,330) \,|\, 40 - 4 \iff (72,330) \,|\, 36$
   * Vale:

$$\begin{aligned} 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ 330 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

$\implies (72,330) = 2 \cdot 3 = 6$

   * $(72,330) \,|\, 36 \iff 6 \,|\, 36$ (visto che 6 divide 36, il sistema (S) è compatibile).
   * Dunque: $40 - 4 = 6 \cdot 6 = 6(72,330)$ **(1)**

2. Euclide
   * Vale:

$$\begin{aligned} 330 &= 4 \cdot 72 + 42 \\ 72 &= 1 \cdot 42 + 30 \\ 42 &= 1 \cdot 30 + 12 \\ 30 &= 2 \cdot 12 + 6 \\ \cancel{12} &= \cancel{2 \cdot 6 + 0} \end{aligned}$$

* Ora risaliamo i resti:

$$\begin{aligned}
42 &= 330 - 4 \cdot 72 \\
30 &= 72 - 1 \cdot 42 \\
12 &= 42 - 1 \cdot 30 \\
6 &= 30 - 2 \cdot 12 \\
&= 30 - 2(42 - 1 \cdot 30) \\
&= 3 \cdot 30 - 2 \cdot 42 \\
&= 3(72 - 1 \cdot 42) - 2 \cdot 42 \\
&= 3 \cdot 72 - 5 \cdot 42 \\
&= 3 \cdot 72 - 5(330 - 4 \cdot 72) \\
&= 23 \cdot 72 - 5 \cdot 330
\end{aligned}$$

* Dunque $(72, 330) = (-5) \cdot 330 + 23 \cdot 72$ **(2)**

3. Calcolo della soluzione c
   * Dalla **(1)** e **(2)**, segue:

$$\begin{aligned}
40 - 4 &= 6((-5) \cdot 330 + 23 \cdot 72) \\
40 - 4 &= (-30) \cdot 330 + (138) \cdot 72
\end{aligned}$$

   * Ovvero:

$$\begin{aligned}
40 + (-138) \cdot 72 &= 4 + (-30) \cdot 330 \\
-9896 &= -9896
\end{aligned}$$

   $\Longrightarrow c := -9896 \in Sol(S)$

4. Soluzione Completa (calcolo del $Sol(S)$)
   * Grazie al Teorema Cinese del Resto si ha:

$$Sol(S) = [-9896]_{[72,330]} \subset \mathbb{Z}$$

   * Segue che $[72, 330] = \dfrac{72 \cdot 330}{(72, 330)} = \dfrac{72 \cdot 330}{6} = 3960$
   * Dunque:

$$\begin{aligned}
Sol(S) = [-9896]_{[3960]} &= [1984]_{[3960]} \\
&= \{1984 + 3960 \cdot k \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

3.3 Esercizio 3

* Determinare tutte le soluzioni di:

$$(S) = \begin{cases} x \equiv -7 \pmod{21} \\ x \equiv \ \ 41 \pmod{81} \end{cases}$$

  e dire se esiste una soluzione divisibile per 14.

* Soluzione:

  1. Compatibilità
     - Ricordiamo che, grazie al Teorema Cinese del Resto, il sistema S è compatibile ($Sol(S) \neq \varnothing$) $\Longleftrightarrow (21, 81) \mid 41 - (-7) \Longleftrightarrow (21, 81) \mid 48$

– Vale:

$$\begin{aligned} 21 &= 3 \cdot 7 \\ 81 &= 3^4 \end{aligned}$$

$\implies (21, 81) = 3$

– $(21, 81) \mid 48 \iff 3 \mid 48 = 3 \cdot 16$ (visto che 3 divide 36, il sistema (S) è compatibile).
– Dunque: $41 - (-7) = 16 \cdot (21, 81)$ **(1)**

2. Calcolo di una soluzione:
   – Applico l'algoritmo di Euclide a 21 e 81:

$$\begin{aligned} 81 &= 3 \cdot 21 + 18 \\ 21 &= 1 \cdot 18 + 3 \\ \cancel{18} &= \cancel{6 \cdot 3 + 0} \end{aligned}$$

   – Ora risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 18 &= 81 - 3 \cdot 21 \\ 3 &= 21 - 1 \cdot 42 \\ &= 21 - (81 - 3 \cdot 21) \\ &= 4 \cdot 21 - 81 \end{aligned}$$

   – Dunque $(21, 81) = 3 = 4 \cdot 21 - 81$ **(2)**

3. Dalla **(1)** e dalla **(2)** segue che:

$$\begin{aligned} 41 - (-7) &= 16 \cdot (21, 81) \\ 41 - (-7) &= 16(4 \cdot 21 - 81) \\ &= 64 \cdot 21 - 16 \cdot 81 \\ 41 + 16 \cdot 16 \cdot 81 &= -7 + 64 \cdot 21 \\ 1337 &= 1337 \end{aligned}$$

4. $c := 1337 \in Sol$
   Calcolo della soluzione generale (calcolo del $Sol(S)$)
   – Grazie al Teorema Cinese del Resto si ha:

$$Sol(S) = [1337]_{[21,81]} \subset \mathbb{Z}$$

   – Segue che $[21, 81] = \dfrac{21 \cdot 81}{(21, 81)} = \dfrac{21 \cdot 81}{3} = 567$
   – Dunque:

$$\begin{aligned} Sol(S) = [1337]_{[567]} &= [203]_{[567]} \\ &= \{203 + 567 \cdot k \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- Esiste un $x \in Sol(S)$ tale che $14 \mid x$?

1. Metodo 1:
   – Grazie al teorema cinese del resto, l'esistenza di $x \in Sol(S)$ tale che $14 \mid x$ è equivalente alla compatibilità del seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 200 \pmod{567} \\ x \equiv \ \ 0 \pmod{14} \end{cases}$$

- Tale sistema è compatibile se e soltanto se:

$$(567, 14) \mid 203 - 0 \Longleftrightarrow 7 \mid 203$$

- Visto che $7 \mid 203$ è vero, il sistema risulta compatibile, quindi ammette soluzione.
- Dunque esiste una soluzione divisibile per 14.

2. Metodo 2:

- $x = 203 + k \cdot 567$

$$\begin{aligned}
[203 + k \cdot 567]_{14} &= [203]_{14} + [k]_{14} \cdot [567]_{14} \\
&= [203]_{14} + [k]_{14} \cdot [7]_{14} \\
&= [7 + k \cdot 7]_{14} \\
&= [14]_{14} \qquad \text{con } k = 1 \\
&= [0]_{14}
\end{aligned}$$

- Si ne esiste almeno una e corriponde, ad esempio, a $k = 1$.

4 Invertibilità

4.1 Esercizio 1

1. $[12]_{30}$ è invertibile? Cioè $[12]_{30} \in \left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 30$, $a = 12$
   - $(12, 30) = 6 \neq 1 \implies \nexists\, [x]_{30}\, tc : [12]_{30} * [x]_{30} = [1]_{30}$
2. $[11]_{30}$ è invertibile? Cioè $[11]_{30} \in \left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 30$, $b = 11$
   - $(11, 30) = 1 \implies \exists\, [11]_{30}^{-1} \in \left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - Applichiamo Euclide:

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 11 + 8 \\ 11 &= 1 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

   - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 8 &= 30 - 2 \cdot 11 \\ 3 &= 11 - 1 \cdot 8 \\ 2 &= 8 - 2 \cdot 3 \\ 1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 3 - 1(8 - 2 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \\ &= 3(11 - 1 \cdot 8) - 1 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4(30 - 2 \cdot 11) \\ &= 11 \cdot 11 - 4 \cdot 30 \end{aligned}$$

   - Dunque:

$$\begin{gathered} 1 = (11) \cdot 11 + (-4) \cdot 30 \\ [1]_{30} = [11]_{30} \cdot [11]_{30} + [-4]_{30} \cdot [30]_{30} \end{gathered}$$

   - Passando a $\pmod{30}$ si ha che:

$$[1]_{30} = [11]_{30} \cdot [11]_{30}$$

   - $[11]_{30}^{-1} = [11]_{30}$

4.2 Esercizio 2

1. $[48]_{20}$ è invertibile? Cioè $[48]_{20} \in \left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 20,\ b = 48$
   - $(48, 20) = 4 \neq 1 \implies \nexists\, [x]_{20}\, tc : [48]_{20} * [x]_{20} = [1]_{20}$
2. $[3]_{20}$ è invertibile? Cioè $[3]_{20} \in \left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - $n = 20,\ a = 3$
   - $(3, 20) = 1 \implies \exists\, [3]_{20}^{-1} \in \left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$
   - Applichiamo Euclide:

$$\begin{aligned} 20 &= 6 * 3 + 2 \\ 3 &= 2 * 1 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

   - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 2 &= 20 - 6 \cdot 3 \\ 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (20 - 6 \cdot 3) \\ &= 7 \cdot 3 - 20 \end{aligned}$$

   - Dunque:

$$\begin{aligned} 1 &= (7) \cdot 3 + (-1) \cdot 20 \\ [1]_{20} &= [3]_{20} \cdot [7]_{20} + [-1]_{20} \cdot [20]_{20} \end{aligned}$$

   - Passando a $\pmod{20}$ si ha che:

$$[1]_{20} = [3]_{20} \cdot [7]_{20}$$

   - $[3]_{20}^{-1} = [7]_{20}$

5 Calcolo della ϕ

5.1 Esercizi

1. $\phi(21) = \phi(3 \cdot 7) = (3 - 1)(7 - 1) = 12$
2. $\phi(35) = \phi(5 \cdot 7) = (5 - 1)(7 - 1) = 24$
3. $\phi(10) = \phi(2 \cdot 5) = (2 - 1)(5 - 1) = 4$
4. $\phi(16) = \phi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$
5. $\phi(81) = \phi(3^4) = 3^4 - 3^3 = 54$
6. $\phi(24) = \phi(2^3 \cdot 3) = \phi(2^3) \cdot \phi(3) = (2^3 - 2^2)(3 - 1) = 8$
7. $\phi(108) = \phi(2^2 \cdot 3^3) = \phi(2^2) \cdot \phi(3^3) = (2^2 - 2^1)(3^3 - 3^2) = 36$

6 Crittografia RSA

6.1 Esercizio 1

- Risolvere: $x^7 \equiv 2 \pmod{35}$
- Soluzione:
  1. **Applicabilità del Teorema della crittografia RSA**
     - Dobbiamo verificare che:
       (a) $(2, 35) = 1$ (questo è vero in quanto 2 è un numero primo e 35 non è un numero pari)
       (b) $(7, \phi(35)) = 1$
         * $\phi(35) = \phi(5) \cdot \phi(7) = (5-1)(7-1) = 24$
         * Vale che $(7, \phi(35)) = (7, 24) = 1$ (in quanto 7 è un numero primo che non divide 24)
     - Grazie al Teorema fondamentale della crittografia RSA vale:

$$\begin{aligned} Sol &= \left[2^d\right]_{35} \subset \mathbb{Z} \\ &= \{2^d + k \cdot 35 \in \mathbb{Z} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

       * Dove $d > 0$, $d \in [7]_{\phi(n)} = [7]^{-1}_{\phi(35)} = [7]^{-1}_{24}$
  2. **Calcolo della soluzione d** $(d > 0, d \in [7]^{-1}_{24})$
     - Calcoliamo $[7]^{-1}_{24}$ via Euclide:

$$\begin{aligned} 24 &= 3 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ \cancel{3} &\cancel{= 3 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

     - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 3 &= 24 - 3 \cdot 7 \\ 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\ &= 7 - 2(24 - 3 \cdot 7) \\ &= 7 \cdot 7 - 2 \cdot 24 \end{aligned}$$

     - Dunque:

$$1 = 7 \cdot 7 + (-2) \cdot 24$$
$$[1]_{24} = [7]_{24} \cdot [7]_{24} + [-2]_{24} \cdot [24]_{24}$$

     - Passando a $\pmod{24}$ si ha che:

$$[1]_{24} = [7]_{24} \cdot [7]_{24}$$

     - $[7]^{-1}_{24} = [7]_{24}$, con $d = 7$

- Segue che:

$$\begin{aligned} Sol = \left[2^d\right]_{35} &= \left[2^7\right]_{35} \\ &= \left[2^5\right]_{35} \cdot \left[2^2\right]_{35} \\ &= [32]_{35} \cdot [4]_{35} \\ &= [-3]_{35} \cdot [4]_{35} \\ &= [-12]_{35} \\ &= [23]_{35} \end{aligned}$$

- Quindi:

$$\begin{aligned} Sol &= [23]_{35} \\ &= \{23 + k \cdot 35 \in \mathbb{Z} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

6.2 Esercizio 2

- Determinare tutte le soluzioni di $x^9 \equiv 49(mod\ 60)$ e se ne determini la massima soluzione negativa.
- Soluzione:
  1. **Applicabilità del Teorema della crittografia RSA**
     - Dobbiamo verificare che:
       (a) $(49, 60) = 1$ (questo è vero in quanto non ci sono primi comuni)
       (b) $(9, \phi(60)) = 1$
         * $\phi(60) = \phi(2^2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5) = (2^2 - 2^1)(3-1)(5-1) = 16$
         * Vale che $(9, \phi(60)) = (9, 16) = 1$ (in quanto non ci sono primi comuni)
     - Grazie al Teorema fondamentale della crittografia RSA vale:

$$Sol = \left[49^d\right]_{60} \subset \mathbb{Z}$$

$$d > 0,\ d \in [9]^{-1}_{\phi(60)} = [9]^{-1}_{16}$$

  2. **Calcolo di Sol:**
     - Prima calcolo $d > 0, d \in [9]^{-1}_{16}$ per mezzo dell'algoritmo di Euclide:

$$\begin{aligned} 16 &= 1 \cdot 9 + 7 \\ 9 &= 1 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

     - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 7 &= 16 - 1 \cdot 9 \\ 2 &= 9 - 1 \cdot 7 \\ 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - 3(9 - 1 \cdot 7) \\ &= 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \\ &= 4(16 - 1 \cdot 9) - 3 \cdot 9 \\ &= 4 \cdot 16 - 7 \cdot 9 \end{aligned}$$

     - Dunque:

$$1 = 4 \cdot 16 + (-7) \cdot 9$$

$$[1]_{16} = [4]_{16} \cdot [16]_{16} + [-7]_{16} \cdot [9]_{16}$$

     - Passando a (mod 16) si ha che:

$$[1]_{16} = [-7]_{16} \cdot [9]_{16}$$

- Dunque: $[9]^{-1}_{16} = [9]_{16}$ con $d = 9$ e:

$$Sol = [49]^9_{60} = \left[7^2\right]^9_{60} = \left[7^{18}\right]_{60} \subset \mathbb{Z}$$

- Dopo aver studiato l'orbita segue che:

$$\begin{aligned} Sol &= \left[7^{(4*4+2)}\right]_{60} \\ &= \left[7^4\right]^4_{60} \cdot [7]^2_{60} \\ &= [1]^4_{60} \cdot \left[7^2\right]_{60} \\ &= [1]^4_{60} \cdot [49]_{60} \\ &= [49]_{60} \end{aligned}$$

- Quindi:

$$\begin{aligned} Sol &= [49]_{60} \\ &= \{49 + k \cdot 60 \in \mathbb{Z} | k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- La massima soluzione negativa è: -11 (data da $49 - 60$).

6.3 Esercizio 3

- Determinare tutte le soluzioni di $x^5 \equiv 49(mod\ 171)$ e se ne determini la massima soluzione negativa.
- Soluzione:
  1. **Applicabilità del Teorema della crittografia RSA**
     - Dobbiamo verificare che:
       (a) $(49, 171) = 1$ (vero in quanto nella fattorizzazione di 41 e 171 non sono presenti numeri primi comuni).
       (b) $(5, \phi(171)) = 1$
         * $\phi(60) = \phi(3^2) \cdot \phi(19) = (3^2 - 3^1)(18) = 108$
         * Vale che $(5, \phi(171)) = (5, 108) = 1$ (visto che 5 è un numero primo e non divide 108)
     - Possiamo dunque applicare il teorema fondamentale della crittografia RSA, ottenendo:

$$Sol = \left[49^d\right]_{171} \subset \mathbb{Z}$$
$$d > 0, d \in [5]^{-1}_{\phi(171)} = [5]^{-1}_{108}$$

  2. **Calcolo del Sol:**
     - Applichiamo l'algoritmo di Euclide a $(108, 5)$:

$$\begin{aligned} 108 &= 21 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ \cancel{2} &= \cancel{2 \cdot 1 + 0} \end{aligned}$$

     - Risaliamo i resti:

$$\begin{aligned} 3 &= 108 - 21 \cdot 5 \\ 2 &= 5 - 1 \cdot 3 \\ 1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 3 - 1(5 - 1 \cdot 3) \\ &= 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ &= 2(108 - 21 \cdot 5) - 1 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 108 - 43 \cdot 5 \end{aligned}$$

     - Dunque:

$$1 = 2 \cdot 108 + (-43) \cdot 5$$
$$[1]_{108} = [2]_{108} \cdot [108]_{108} + [-43]_{108} \cdot [5]_{108}$$

     - Passando a (mod 108) si ha che:

$$[1]_{108} = [-43]_{108} \cdot [5]_{108}$$

     - Dunque: $[5]^{-1}_{108} = [-43 + 108]_{108} = [65]_{108}$ con $d = 65$ e:

$$Sol = [49]^{65}_{171} = \left[7^2\right]^{65}_{108} = \left[7^{130}\right]_{108} \subset \mathbb{Z}$$

- Dopo aver studiato l'orbita segue che:

$$\begin{aligned}
Sol &= \left[7^{130}\right]_{171} \\
&= \left[7^{(3\cdot 43+1)}\right]_{171} \\
&= \left[\left(7^3\right)^{43}\cdot 7^1\right]_{171} \\
&= \left[7^3\right]_{171}^{43}\cdot\left[7^1\right]_{171} \\
&= [1]_{171}^{43}\cdot[7]_{171} \\
&= \left[1^{43}\right]_{171}\cdot[7]_{171} \\
&= [1]_{171}\cdot[7]_{171} \\
&= [7]_{171}
\end{aligned}$$

- Quindi:

$$\begin{aligned}
Sol &= [7]_{171} \\
&= \{7+k\cdot 171\in\mathbb{Z}|k\in\mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

- Esiste un $k\in Sol$ tale che la somma del numero ottenuto faccia 12 ($\exists\, k\geq 0\ tc.$ la somma delle cifre del numero $\{7+171\cdot k\}$ faccia 12)?
  - Se esistesse, il numero sarebbe mutiplo di 3:

$$[0]_3=[7+k\cdot 171]_3=[7]_3+[171]_3\cdot[k]_3=[1]_3+[0]_3\cdot[k]_3=[1]_3$$

  - Qualunque essa sia la soluzione della mia conguenza, se viene divisa per 3, ottengo sempre un resto di 1.
  - Dunque, non può esserci una soluzione divisibile per 3 la cui somma delle cifre faccia 12.

7 Grafi

7.1 Condizioni necessarie ma non sufficienti per l'esistenza di isomorfismi

- Alcune condizioni necessarie (**ma non sufficienti**) per l'esistenza di isomorfismi, ovvero se G e G' sono grafi **finiti** ed **isomorfi** allora:
  1. $|\,V(G)\,| = |\,V(G')\,|$
  2. $|\,E(G)\,| = |\,E(G')\,|$
  3. $score(G) = score(G')$ in forma canonica
  4. $\#c.c$ di $G = \#c.c$ di G'
  5. G 2-connesso $\Longleftrightarrow$ G' 2-connesso
  6. G hamiltoniano $\Longleftrightarrow$ G' hamiltoniano
  7. $\#(\{3,\dots n\}$-cicli di $G) = \#(\{3,\dots n\}$-cicli di $G')$
- Queste condizioni vengono utilizzate per **escludere a priori** grafi che non sono isomorfi.
- Basta che una di queste condizioni necessarie venga a mancare affinchè i grafi non siano isomorfi.
- Bisogna ricordare però che queste condizioni sono **necessarie ma non sufficienti** per l'esistenza di isomorfismi, dunque se 2 grafi passano tutte le verifiche (basta arrivare fino alla costruzione $n.\,6$), **nulla si può dire** e per verificare se i grafi sono isomorfi bisogna passare a verifica diretta.
- Quando si passa a **verifica diretta di un isomorfismo** è prassi gestire prima i vertici con **grado massimo** (**minimo**) o che compaiono una **sola volta**, così da ridurre i casi da gestire.

7.2 Ostruzioni all'esistenza di grafi con dato score (condizioni necessarie)

1. Ostruzione 1:
   - Se G è un grafo finito con score $d = (d_1, \dots, d_n)$ con $d_1 \le d_2 \le \dots, \le d_n$, allora:
   $$d_n \le n - 1$$

   Ostruzione 2:
   - Se G è un grafo finito con score $d = (d_1, \dots, d_n)$, per il **lemma delle strette di mano**, il **numero di vertici** di G di **grado dispari** deve essere **pari**.

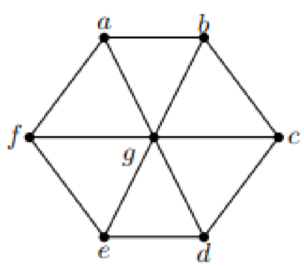
   Ostruzione 3:
   - Se $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-k+1}, d_{n-k+2}, \dots, d_{n-1}, d_n) = (d_1, d_2, \dots, d_{n-k}, \underbrace{n-1, \dots, n-1}_{k\text{-volte}})$ fosse lo score di un grafo G, allora:
   $$k \le d_1$$

   Ostruzione 4:
   - Sia G un grafo finito con score canonico $d = (d_1, \dots, d_{n-1}, d_n)$ e siano $u, v \in V(G)$ tale che:
   $$deg_G(u) = d_n - 1$$
   $$deg_G(v) = d_n$$
   - Allora:
   $$|\{w \in V(G) \setminus \{u, v\} \,|\, deg_G(w) \ge 2\}| \ge d_{n-1} + d_n - n$$

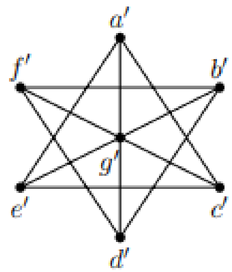
8 Isomorfismo tra grafi

8.1 Esercizio 1

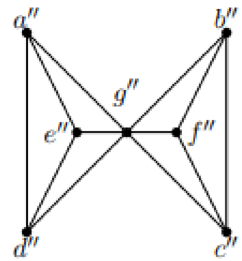
- Stabilire l'esistenza o meno di isomorfismi tra i seguenti grafi:



Grafo G_{25}



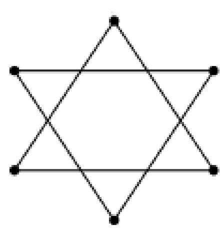
Grafo G_{26}



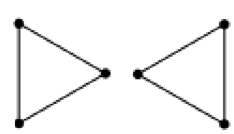
Grafo G_{27}

- Alcune condizioni necessarie:

1. $|\,V(G_{25})\,| = |\,V(G_{26})\,| = |\,V(G_{27})\,| = 7$ (NULLA SI PUÒ DIRE)
2. $|\,E(G)\,| = |\,E(G')\,| = |\,EV(G_{27})\,| = 12$ (NULLA SI PUÒ DIRE)
3. SCORE:
$$\left.\begin{aligned} score(G_{25}) &= (3,3,3,3,3,3,6) \\ score(G_{25}) &= (3,3,3,3,3,3,6) \\ score(G_{25}) &= (3,3,3,3,3,3,6) \end{aligned}\right\} \text{NULLA SI PUÒ DIRE}$$
4. G_{25}, G_{26} e G_{27} sono connessi.
5. G_{25} è 2-connesso in quanto hamiltoniano, essendo $\{a, b, c, d, e, f, g, a\}$ un suo ciclo hamiltoniano.
   G_{26} non è 2-connesso in quanto $G_{26} - g'$ è un grafo con 2 $c.c$
   G_{27} non è 2-connesso in quanto $G_{27} - g''$ è un grafo con 2 $c.c$



(a) $G_{26} - g'$



(b) $G_{27} - g'$

   Dunque:
$$G_{25} \not\simeq G_{26}$$
$$G_{25} \not\simeq G_{27}$$

6. G_{26} e G_{27} non sono 2-connessi e dunque neanche hamiltoniani (NULLA SI PUÒ DIRE).
7. Calcolare $\#(\{3, \ldots n\}$-cicli di $G)$ in generale è complicato e non porta a niente.

- Le costruzioni passano tutte le verifiche dunque NULLA SI PUÒ DIRE. Si passa a verifica diretta dell'isomorfismo tra G_{26} e G_{27}:
  - Costruiamo un isomorfimo $f : G_{26} \longrightarrow G_{27}$

$$
\begin{aligned}
V_{26} &\xrightarrow{\text{f}} V_{27} \\
a' &\longmapsto a'' \\
b' &\longmapsto b'' \\
c' &\longmapsto c'' \\
d' &\longmapsto d'' \\
e' &\longmapsto e'' \\
f' &\longmapsto f'' \\
g' &\longmapsto g''
\end{aligned}
$$

  - Osservo che f è **iniettiva** (i vertici elencati nella colonna di destra sono a 2 a 2 distinti).
  - Inoltre f è **surgettiva** (nella colonna a destra compaiono tutti i vertici di G_{27}
  - Dunque f è una **bigezione**.
  - Verifico se si tratta di un **morfismo** con f^{-1} morfismo:

$$
\begin{aligned}
E(G_{26}) &\xrightarrow{\text{'f'}} \binom{V(G_{27})}{2} \\
\{a', e'\} &\longmapsto \{f'', c''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{a', g'\} &\longmapsto \{f'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{a', c'\} &\longmapsto \{f'', b''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{e', g'\} &\longmapsto \{c'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{e', c'\} &\longmapsto \{c'', b''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{c', g'\} &\longmapsto \{b'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{f', d'\} &\longmapsto \{a'', d''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{f', b'\} &\longmapsto \{a'', e''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{f', g'\} &\longmapsto \{e'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{b', d'\} &\longmapsto \{e'', d''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{b', g'\} &\longmapsto \{e'', g''\} \quad \in E(G_{27}) \\
\{d', g'\} &\longmapsto \{d'', g''\} \quad \in E(G_{27})
\end{aligned}
$$

  - Se avessi trovato un lato che non appartiene a $E(G_{27})$ avrei dovuto rifare tutto, cambiando la funzione f che ho definito in precedenza.
  - Poichè i 2-sottoinsiemi di $V(G_{27})$ che compaiono nella colonna di destra sono lati di G_{27}, segue che f **è un morfismo**.
  - Poichè nella colonna di destra compaiono tutti i lati di G_{27}, f **è un isomorfismo**.
  - In conclusione: $G_{26} \simeq G_{27}$

9 Score di grafi

9.1 Esercizio 1

- Dire se $d = (1, 1, 2, 4, 5, 6, 7)$ è lo score di un grafo.

$$n = 7$$
$$d_n = 7$$

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 7 \leq 7 - 1 \\ &\iff 7 \leq 6 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.2 Esercizio 2

- Dire se $d = (1, 1, 1, 1, 5, 6, 7, 8)$ è lo score di un grafo.

$$n = 8$$
$$d_n = 8$$

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 8 \leq 8 - 1 \\ &\iff 8 \leq 7 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.3 Esercizio 3

- Dire se $d = (0, 1, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 9)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 10$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 9$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 9 \leq 10 - 1 \\ &\iff 9 \leq 9 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Supponiamo che d sia uno score di un grafo, allora anche $d' = (1, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 9)$ sarebbe lo score di un grado (quello precedente con il v**ertice isolato rimosso**).
- Allora vale:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 9 \leq 9 - 1 \\ &\iff 9 \leq 8 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d', dunque neanche con d.

9.4 Esercizio 4

- Dire se $d = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 7)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 10$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 7$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 7 \leq 10 - 1 \\ &\iff 7 \leq 9 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari } | &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari } | &= 3 \end{aligned}$$

- Il lemma delle strette di mano (ostruzione $n.2$) non è rispettato, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.5 Esercizio 5

- Dire se $d = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 9$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 8$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 8 \leq 9 - 1 \\ &\iff 8 \leq 8 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari } | &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari } | &= 4 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, cioè lo score termina con termini che valgono $n - 1$, ma deve valere anche $k < d_1$, cioè il numero di termini che valgono $n - 1$ deve essere minore del primo termine dello score.
- Vale:

$$\begin{aligned} k &< d_1 \\ 2 &< 1 \end{aligned}$$

- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.6 Esercizio 6

- Dire se $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 11, 11, 11)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 12$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 11$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 11 \leq 12 - 1 \\ &\iff 11 \leq 11 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 8 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, cioè lo score termina con termini che valgono $n - 1$, ma deve vale anche $k < d_1$, cioè il numero di termini che valgono $n - 1$ deve essere minore del primo termine dello score.
- Vale:

$$\begin{aligned} &k < d_1 \\ &3 < 2 \end{aligned}$$

- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

9.7 Esercizio 7

- Dire se $d = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 12, 13)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 14$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 13$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 13 \leq 14 - 1 \\ &\iff 13 \leq 13 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 10 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 4 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Non siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, perchè lo score termina con un solo termine che vale $n - 1$, dunque visto che "ex falso quodlibet", cioè "dal falso segue qualsiasi cosa", la terza ostruzione è rispettata.

- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$
- Dunque:

$$|(2,2,2,2,2,2,2,3,4,4,12,13)| \geq 12 + 13 - 14$$
$$10 \geq 11$$

- La quarta ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

10 Teorema dello score

10.1 Enunciato

- Sia $n \geq 2$ e sia $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $0 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n \leq n-1$
- Definiamo il seguente vettore $d' = (d_1^{'}, d_2^{'}, \ldots, d_{n-1}^{'}) \in \mathbb{N}^{n-1}$

$$d_i' := \begin{cases} d_i & i < n - d_n \\ d_i - 1 & i \geq n - d_n \end{cases}$$

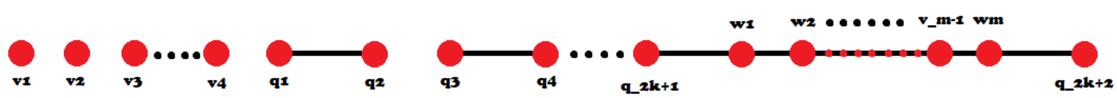
- Allora d è lo score di un grafo se e soltanto se lo è d'.
- Se tutto degenera e va a 0, allora d' è lo score di un grafo, e di conseguenza anche d è lo score di un grafo.
- Per semplicità nei calcoli, quando le entrate dell' i-esimo score sono tutte minori o uguali a 2 ci si può fermare.

11 Teorema dello score: Criterio d'arresto

- Sia $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n \leq 2$.
- Supponiamo che d soddisfi il lemma delle strette di mano, cioè il numero di volte che compare 1 è pari.
- Allora valgono:

  1. **Non compare** 1:
     - $d = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ è lo score di un grafo con vertici isolati.
     - $d = (0, 0, 0, \ldots, 2)$ non è lo score di un grafo; l'ultimo vertice prevede due lati ma tutti gli altri vertici sono isolati.
     - $d = (0, 0, 0, \ldots, 2, 2)$ non è lo score di un grafo.
     - $d = (0, 0, 0, \ldots, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{m\text{-volte}})$ è lo score di un grafo.
  2. Supponiamo che 1 compaia $2k + 2$ volte per qualche $k > 0$:

$$d = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2k+2}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{m})$$



12 Teorema di Eulero

ENUNCIATO:

- Sia $T = (V, E)$ un grafo **finito**, ovvero $|V|$ è finita.
- Le seguenti affermazioni sono **equivalenti**:
  - T è un **albero**.
  - T è **connesso** e vale la seguente **formula di Eulero**:

$$|V| - 1 = |E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg_T(v)$$

13 Osservazioni:

13.1 Alberi

- Sia $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ tale che:

$$n - 1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

  allora **esiste almeno un albero** con tale score.

- Se un grafo G ammette almeno un **albero di copertura**, allora G è **connesso**.

13.2 Forzatura alla sconnessione

- Se $G = (V, E)$ è un grafo finito tale che $|E| < |V| - 1$, allora G è **sconnesso**.
- Sia $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)$$

  allora **ogni** grafo (se esiste) con score d è **connesso**.

13.3 Forzatura alla connessione

- Sia $G = (V, E)$ un grafo finito con score $d = (d_1, \dots, d_n)$ in forma canonica.
  Se $d_1, d_2, \geq n - d_n - 1$, allora tutti i grafi con score d sono connessi.
- Sia $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tale che:
  - $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$
  - $d_1 \geq n - d_n - 1$
- Allora ogni grado (se esiste) con score d è **connesso**.

Se la **disugualianza per la connessione** (o per la **sconnessione**) non funziona, cioè risulta **falsa**, allora **nulla si può dire** in merito alla connessione di un grafo con tale score.

14 Esercizi Grafi

14.1 Esercizio 1

- Dire se $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 11, 11, 11)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 12$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 11$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 11 \leq 12 - 1 \\ &\iff 11 \leq 11 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 4 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 8 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Siamo nelle ipotesi della terza ostruzione, cioè lo score termina con termini che valgono $n - 1$, ma deve valere anche $k < d_1$, cioè il numero di termini che valgono $n - 1$ deve essere minore del primo termine dello score.
- Vale:

$$\begin{aligned} k &< d_1 \\ 3 &< 2 \end{aligned}$$

- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste alcun grafo con score d.

14.2 Esercizio 2

- Dire se $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 10$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 8$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 8 \leq 10 - 1 \\ &\iff 8 \leq 9 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 6 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 4 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- La terza ostruzione è verificata.

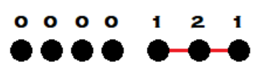
- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$
- Dunque:

$$\begin{aligned}|(2,2,2,2,3,3,5,5,8,8)| &\geq 8+8-10 \\ 8 &\geq 6\end{aligned}$$

- La quarta ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Le ostruzioni non forniscono informazioni, applico quindi il **teorema dello score**:

Score	*Dati*
$d = (2,2,2,2,3,3,5,5,8,8)$	$n = 10$ $d_n = 8 \leq 10 - 1$
$d' = (2,1,1,1,2,2,4,4,7)$ $= (1,1,1,2,2,2,4,4,7)$	$n = 9$ $d_n = 7 \leq 9 - 1$
$d'' = (1,0,0,1,1,1,3,3)$ $= (0,0,1,1,1,1,3,3)$	$n = 8$ $d_n = 3 \leq 8 - 1$
$d''' = (0,0,1,1,0,0,2)$ $= (0,0,0,0,1,1,2)$	Entrate minori o uguali a 2

- Poichè d''' è lo score del seguente grafo G''':



- Dunque, grazie al teorema dello score anche d è lo score di un grafo G.

14.3 Esercizio 3

- Dire se $d = (2,2,2,2,3,3,5,6)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 9$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 6$
- Deve valere:

$$\begin{aligned}d_n \leq n - 1 &\iff 6 \leq 9 - 1 \\ &\iff 6 \leq 8\end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned}|V(G) \text{ pari }| &= 5 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 4\end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.

- La terza ostruzione è verificata, in quanto lo score termina con 6 e non con $n-1=9-1=8$
- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1}+d_n-n$
- Dunque:

$$\begin{aligned} |(2,2,2,2,3,3,5,6)| &\geq 5+6-9 \\ 7 &\geq 2 \end{aligned}$$

- La quarta ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Le ostruzioni non forniscono informazioni, applico quindi il **teorema dello score**:

Score	*Dati*
$d=(2,2,2,2,3,3,5,6)$	$n=9$ $d_n=6\leq 9-1$
$d'=(2,2,1,1,2,2,2,4)$ $=(1,1,2,2,2,2,2,4)$	$n=8$ $d_n=4\leq 8-1$
$d''=(1,1,2,1,1,1,1)$ $=(1,1,1,1,1,1,2)$	Entrate minori o uguali a 2

- Poichè d''' è lo score del seguente grafo G''':

- Dunque, grazie al teorema dello score anche d è lo score di un grafo G.
- Costruiamo un grafo (procedura a ritroso) con score d utilizzando il teorema dello score: **(DA FARE GRAFO)**

14.4 Esercizio 4

- Dire se $d=(3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,13,13,13,13)$ è lo score di un grafo.
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G)=d$
- Allora $n:=|V(G)|=14$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n=13$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n-1 &\iff 13\leq 14-1 \\ &\iff 13\leq 13 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G)\text{ pari }| &= 6 \\ |V(G)\text{ dispari }| &= 8 \end{aligned}$$

- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Se d fosse lo score di un grado, per la terza ostruzione sarebbero previsti 4 vertici di grado $13 = n - 1$ (dove $n = 14$ è il numero di vertici) che dovrebbero essere collegati a tutti gli altri vertici.
- Dunque il grado minimo previsto dovrebbe essere maggiore o uguale a 4, che è assurdo visto che il grado minimo dello score d è 3.
- La terza ostruzione non è rispettata, dunque non esiste un grafo con score d.

14.5 Esercizio 5

- Dire se $d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4)$
- Supponiamo che esista un grafo finito G con $score(G) = d$
- Allora $n := |V(G)| = 13$ e il grado massimo di uno dei suoi vertici è $d_n = 4$
- Deve valere:

$$\begin{aligned} d_n \leq n - 1 &\iff 4 \leq 13 - 1 \\ &\iff 4 \leq 12 \end{aligned}$$

- La prima ostruzione è valida, **ma nulla si può dire**.
- Per il lemma delle strette di mano, il numero di vertici dispari deve essere pari:

$$\begin{aligned} |V(G) \text{ pari }| &= 3 \\ |V(G) \text{ dispari }| &= 10 \end{aligned}$$

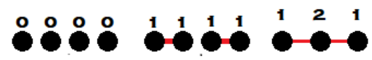
- La seconda ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- La terza ostruzione è verificata, in quanto non è possibile controllarla.
- Verifichiamo la quarta ostruzione, cioè "il numero di entrate di d (eccetto le ultime due) maggiori o uguali a 2" deve essere maggiore di $d_{n-1} + d_n - n$
- Dunque:

$$\begin{aligned} |(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4)| &\geq 4 + 4 - 13 \\ 1 &\geq -5 \end{aligned}$$

- La quarta ostruzione è rispettata, **ma nulla si può dire**.
- Le ostruzioni non forniscono informazioni, applico quindi il **teorema dello score** a d_2:

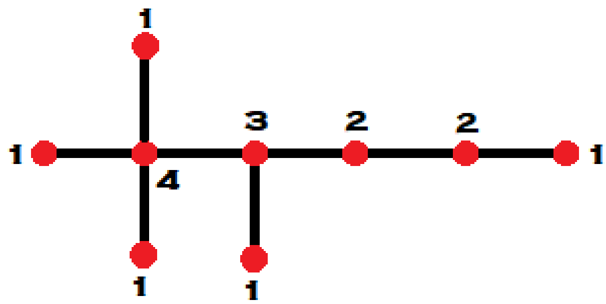
Score	*Dati*
$d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4)$	$n = 13$ $d_n = 4 \leq 13 - 1$
$d' = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 3, 3)$ $= (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3)$	$n = 12$ $d_n = 3 \leq 12 - 1$
$d'' = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 2)$ $= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$	Entrate minori o uguali a 2

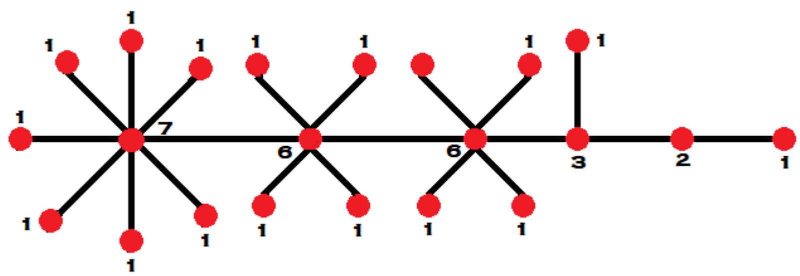
- Poichè d'' è lo score del seguente grafo G''':
- Grazie al teorema dello score anche d_2 è lo score di un grafo G_2.
- Costruiamo un grafo (procedura a ritroso) con score d utilizzando il teorema dello score: **(DA FARE GRAFO)**



14.6 Esercizio 6

- Quale dei seguenti vettori è lo score di un albero?
  1. $d_1 = (0, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 4, 4)$
  2. $d_2 = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$
  3. $d_3 = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 7)$
  4. $d_4 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4)$
  5. $d_5 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, , 2, 3, 6, 6, 7)$
- Soluzione:
  1. d_1 non è uno score di un albero, in quanto, sarebbe presente un **vertice isolato** e dunque il grafo con tale score risulterebbe sconnesso.
  2. d_2 non è lo score di un albero, in quanto, un grafo con score d_2 avrebbe 9 vertici e se fosse un albero dovrebbero essere presenti almeno 2 foglie (vertici di grado 1).
     - Inoltre usando la formula di Eulero si ha:
     $$\begin{aligned} n &= 9 \\ |E| &= \frac{1}{2}(1+2+2+2+3+3+4+4+5) \\ &= \frac{1}{2}(26) \\ &= 13 \end{aligned}$$
     - Deve valere:
     $$n - 1 = |E| \iff 9 - 1 = 13 \iff 8 = 13$$
     - Visto che quest' ultima affermazione è falsa, **la formula di Eulero non è soddisfatta** e dunque non esiste un albero con score d_2.
  3. d_3 non è uno score di un albero per **assenza di foglie**.
  4. Verifichiamo la formula di Eulero per d_4:
     - $n = 9$
     - $|E| = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4) = \frac{1}{2}(16) = 8$
     - Vale:
     $$n - 1 = |E| \iff 9 - 1 = 8 \iff 8 = 8$$
     - Osservo che d_4 non ha entrate nulle (vertici isoltati) e che vale la formula di Eulero; dunque l'albero con score d_4 può essere costruito nel seguente modo:
  5. Verifichiamo la formula di Eulero per d_5:
     - $n = 21$
     - $|E| = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, , 2, 3, 6, 6, 7) = \frac{1}{2}(40) = 20$
     - Vale:
     $$n - 1 = |E| \iff 21 - 1 = 20 \iff 20 = 20$$
     - Osservo che d_5 non ha entrate nulle (vertici isoltati) e che vale la formula di Eulero; dunque l'albero con score d_5 può essere costruito nel seguente modo:





14.7 Esercizio 7

- Dise se esite un grafo connesso con il seguente score:
  1. $d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
     - Vale:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{1i}\right) < n - 1$$
$$\frac{1}{2}(6 \cdot 1 + 2 + 2) < 8 - 1$$
$$\frac{1}{2}(10) < 7$$
$$5 < 7$$

     - Tutti i grafi che hanno d_1 come score sono sconnessi, dunque non esiste un grafo connesso con score d_1.
  2. $d_2 = (1, 1, 2, 2, 2)$
     - Vale:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{2i}\right) < n - 1$$
$$\frac{1}{2}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) < 5 - 1$$
$$\frac{1}{2}(8) < 4$$
$$4 < 7$$

- **Nulla si può dire**, la condizione (necessaria ma non sufficiente) non è verificata.

14.8 Esercizio 8

- $d_1 = (2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7)$
- $d_2 = (1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8, 9)$
- Esiste un grafo con score d_1 e/o d_2. Se esiste, costruirlo con il Teorema dello score.
- Costruire inoltre un grafo con tale score tale che:
  - Sia hamiltoniano.
  - Sia connesso.
  - Sia un albero.
- Studiamo d_1:
  - Sono previsti $n = 10$ vertici.
  - Ostruzione 1: $7 \leq 9$, NPSD
  - Ostruzione 2: LSM 6 è pari, NPSD
  - Ostruzione 3: $\varnothing$, NPSD
  - Ostruzione 4: $8 \geq 4$, NPSD
  - Tutte le istruzioni sono verificate, dunque passo all'applicazione del teorema dello score a d_1:

Score	*Dati*
$d = (2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7)$	$n = 10$ $d_n = 7 \leq 10 - 1$
$d' = (2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6)$	$n = 9$ $d_n = 6 \leq 9 - 1$
$d'' = (2, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4)$ $= (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$	$n = 8$ $d_n = 4 \leq 8 - 1$
$d''' = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	Entrate minori o uguali a 2

  - Poichè d''' è lo score del seguente grafo G''':
  - Grazie al teorema dello score, anche d_1 è lo score di un grafo G_1.
  - Applichiamo la costruzione "a ritroso" implicata dal teorema dello score: **(DA FARE GRAFO)**
  - Il grafo G_1 ha score d_1.
  - Osserviamo che: $(v_{10}, v_9, v_8, v_7, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10})$ è un ciclo hamiltoniano del grafo G_1 che abbiamo appena costruito. Dunque G_1 è un grafo hamiltoniano con score d_1.
  - Osservo che:
    * $d_1 = (D_1, \ldots, D_n)$ con $(D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n)$
    * $D_1 \geq n - D_n - 1$ cioè $2 \geq 10 - 7 - 1 \implies 2 \geq 2$
    * Osservo che il grado minimo previsto 2 è maggiore o uguale a $10 - 7 - 1$; dunque ogni grafo con score d_1 è sconnesso.
  - Non esiste un albero con score d_1 per assenza di foglie ($n = 10 \geq 2$).
- Studiamo d_2:
  - Sono previsti $n = 10$ vertici.

- Ostruzione 1: $9 \leq 9$, NPSD
- Ostruzione 2: LSM 6 è pari, NPSD
- Ostruzione 3: $\varnothing$, NPSD
- Ostruzione 4: $7 \geq 7$, NPSD
- Tutte le istruzioni sono verificate, dunque passo all'applicazione del teorema dello score a d_1:

Score	*Dati*
$d = (1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8, 9)$	$n = 10$ $d_n = 9 \leq 10 - 1$
$d' = (0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 7, 7)$	$n = 9$ $d_n = 7 \leq 9 - 1$
$d'' = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 6)$	$n = 8$ $d_n = 6 \leq 8 - 1$
$d''' = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 1)$	Entrata negativa.

- d''' non è lo score di un grafo avendo una componente negativa.
- Grazie al teorema dello score, anche d_2 non è lo score di un grafo.