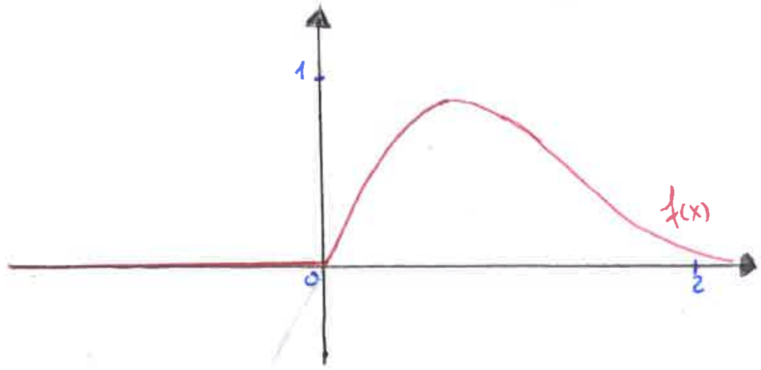
Esercizio Statistica: 17/04/2019

Quanto a lungo vive un certo organismo biologico, può essere rappresentato da una variabile casuale (continua) X con funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = 2\lambda x \cdot e^{-\lambda x^2} \qquad \lambda, x > 0$$

con $\lambda = 1.05$



1 - Calcolare $P(X \leq 0.97)$

$$Pr(X \leq x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

$$Pr(X \leq 0.97) = \int_0^{0.97} f(x)\,dx = \int_0^{0.97} 2 \cdot \lambda x \cdot e^{-\lambda x^2} dx = - \int_0^{0.97} -2\lambda x\, e^{-\lambda x^2} dx$$

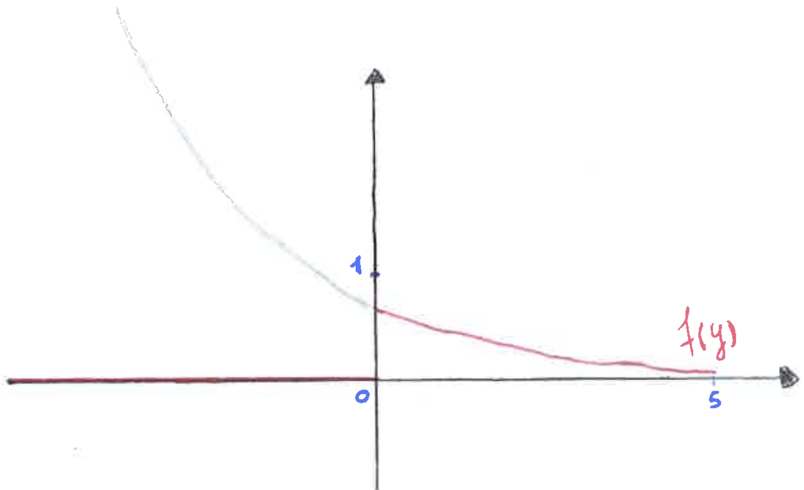
$$= - e^{-\lambda x^2} \Big]_0^{0.97}$$

$$= -0.3723411 + 1 = \underline{0.6276589338}$$

2 - Calcolare $P(0.66 \leq X \leq 1.18)$

$$Pr(0.66 \leq X \leq 1.18) = \int_{0.66}^{1.18} 2\lambda x \cdot e^{-\lambda x^2} dx = - e^{-\lambda x^2} \Big]_{0.66}^{1.18} = -0.2317676 + 0.6329398$$

$$= \underline{0.4011721}$$



Momenti:

Ora si consideri una variabile casuale Y con funzione di densità

$$f(y) = \alpha e^{-\alpha y} \qquad y \geq 0$$

con $\alpha = 0.69$

3.1 - Calcolare il momento non centrato di ordine 1 di Y:

$$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}(X^1) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

$f(x) = x \qquad g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}$

$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = +e^{-\alpha x}$

$f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \cancel{\alpha}\left(\frac{-x e^{-\alpha x}}{\cancel{\alpha}} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{e^{-\alpha x}}{-\cancel{\alpha}}\,dx\right)$$

$$= -x e^{-\alpha x} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= -x e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} -\alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= -x e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big]_0^{+\infty} = -e^{-\alpha x}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\Big]_0^{+\infty}$$

$$= \emptyset + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.69} = \underline{1.449275}$$

3.2 - Calcolare il momento non centrato di ordine 2 di Y

$$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$

$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = e^{-\alpha x}$

$$= \cancel{\alpha}\left(\frac{-x^2 e^{-\alpha x}}{\cancel{\alpha}} - \int_0^{+\infty} -2x \frac{e^{-\alpha x}}{\cancel{\alpha}}\,dx\right)$$

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$ → usato quello di prima

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + \frac{2}{\alpha}\left(x e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right)\Big]_0^{+\infty}$$

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + \frac{2x e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{2e^{-\alpha x}}{\alpha^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{(0.69)^2} = \underline{4.200798}$$