Esercizio Statistica: 10/05/2019

Consideriamo un esperimento aleatorio che consiste nel lancio di due dadi non equilibrati. In particolare la funzione di probabilità di massa $p_{X,Y}(x,y)$ - dove $X(\omega) \in \{1,\dots,6\}$ rappresenta il primo dado e $Y(\omega) \in \{1,\dots,6\}$ il secondo dado - é riportata in tabella:

	1	2	3	4	5	6	
1	0.0044	0.0104	0.0048	0.0104	0.0032	0.0068	0.04
2	0.0077	0.0182	0.0084	0.0182	0.0056	0.0119	0.07
3	0.0418	0.0988	0.0456	0.0988	0.0304	0.0646	0.38
4	0.022	0.0052	0.0024	0.0052	0.0016	0.0034	0.02
5	0.0231	0.0546	0.0252	0.0546	0.0168	0.0357	0.21
6	0.0308	0.0728	0.0336	0.0728	0.0224	0.0476	0.28
	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1

marginale di X

marginale di Y

Come al solito, sulle righe abbiamo la variabile X e sulle colonne la variabile Y.

1- Determinare la probabilità che sul primo dado esca un numero pari.

$$Pr(\text{"sul primo dado esce un numero pari"}) = Pr(X=2) + Pr(X=4) + Pr(X=6) = 0.7 + 0.2 + 0.28 = \underline{0.37}$$

2- Determinare la probabilità che sul secondo dado non escano 5 o 4.

$$Pr(\text{"non esce 4 o 5"}) = 1 - (Pr(\text{"esce 4"}) + Pr(\text{"esce 5"})) = 1 - (0.26 + 0.08) = 1 - 0.34 = \underline{0.66}$$

	1	2	3	4	5	6
1	0.04	0.04	0.04	0.04	0.4	0.04
2	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
3	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
4	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
5	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
6	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28
	1	1	1	1	1	1

condizionata rispetto a X

3- Dopo aver determinato la funzione di probabilità condizionata di $p_{X|Y}(x|y=5)$.
Determinare $Pr(X \geq 4 \mid Y=5)$

$$Pr(X \geq 4 \mid Y=5) = Pr(X=4 \mid Y=5) + Pr(X=5 \mid Y=5) + Pr(X=6 \mid Y=5)$$
$$= 0.02 + 0.21 + 0.28$$
$$= \underline{0.51}$$

4- Calcolare il valore atteso condizionato $\mathbb{E}(X \mid Y=4)$

$$\mathbb{E}(X \mid Y=4) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x \mid y=4)$$
$$= (1 \cdot 0.04) + (2 \cdot 0.07) + (3 \cdot 0.38) + (4 \cdot 0.02) + (5 \cdot 0.21) + (6 \cdot 0.28)$$
$$= 0.04 + 0.14 + 1.14 + 0.08 + 1.05 + 1.68$$
$$= \underline{4.13}$$

Visto che le due variabili sono stocasticamente indipendenti, cioè $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ $\forall (x,y)$, ho che $\mathbb{E}(X \mid Y=4) = \mathbb{E}(X)$ in quanto tutte le funzioni condizionate hanno lo stesso valore, che porta ad avere uno stesso valore atteso per ogni valore.

	1	2	3	4	5	6	
1	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1
2	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1
3	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1
4	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1
5	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1
6	0.11	0.26	0.12	0.26	0.08	0.17	1

condizionata rispetto a Y

5- Determinare la varianza condizionata $Var(Y|X=4)$

$$Var(Y|X=4) = \mathbb{E}(Y^2|X=4) - \mathbb{E}[(Y|X=4)^2]$$
$$= 14.51 - (3.45)^2$$
$$= 14.51 - 11.9025 = \underline{2.6075}$$

$$\mathbb{E}(Y|X=4) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_{Y|X}(y|x)$$
$$= (1 \cdot 0.11) + (2 \cdot 0.26) + (3 \cdot 0.12) + (4 \cdot 0.26) + (5 \cdot 0.08) + (6 \cdot 0.17)$$
$$= 0.11 + 0.52 + 0.36 + 1.04 + 0.4 + 1.02$$
$$= \underline{3.45}$$

$$\mathbb{E}(Y^2|X=4) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot p_{Y|X}(y|x)$$
$$= (1^2 \cdot 0.11) + (2^2 \cdot 0.26) + (3^2 \cdot 0.12) + (4^2 \cdot 0.26) + (5^2 \cdot 0.08) + (6^2 \cdot 0.17)$$
$$= (1 \cdot 0.11) + (4 \cdot 0.26) + (9 \cdot 0.12) + (16 \cdot 0.26) + (25 \cdot 0.08) + (36 \cdot 0.17)$$
$$= 0.11 + 1.04 + 1.08 + 4.16 + 2 + 6.12$$
$$= \underline{14.51}$$

Grazie all'indipendenza stocastica, tra le due variabili, si ha che $Var(Y|X=4) = Var(Y)$.