Esercizio Statistica. 17/05/2019

Siano X e Y due variabili casuali indipendenti distribuite secondo leggi esponenziali di parametri $\lambda_1 = 0.6$ e $\lambda_2 = 0.6$ rispettivamente.

Sia $U := \min\{X, Y\}$

$$P(U>u \mid X>x) = \frac{P(U>u,\ X>u)}{P_X(X>x)} = \frac{P(\min(X,Y)>u,\ X>u)}{P_X(X>x)}$$

condizionata

$$= \frac{P(X>u,\ Y>u,\ X>x)}{P_X(X>x)} = \frac{P_X(\{X>u\}\cap\{X>x\})\cdot P_Y(Y>u)}{P_X(X>u)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cancel{P_X(X>x)}\cdot P_Y(Y>u)}{\cancel{P_X(X>x)}} & \text{se } x>u \\[2ex] \dfrac{P_X(X>u)\cdot P_Y(Y>u)}{P_X(X>x)} & \text{se } x\le u \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P_Y(Y>u) & \text{se } x>u \\[2ex] \dfrac{P_X(X>u)\cdot P_Y(Y>u)}{P_X(X>x)} & \text{se } x\le u \end{cases} = \begin{cases} e^{-\lambda_Y u} & \text{se } x>u \\[2ex] \dfrac{e^{-\lambda_X \cdot u}\ e^{-\lambda_Y u}}{e^{-\lambda_X \cdot x}} & \text{se } x\le u \end{cases}$$

$1 - P_Y(Y<u)$

$1-(1-e^{-\lambda_Y u})$

$$= \begin{cases} e^{-\lambda_Y u} & \text{se } x>u \\[2ex] \dfrac{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}}{e^{-\lambda_X \cdot x}} & \text{se } x\le u \end{cases}$$

1- Distribuzione di U.

Dopo aver determinato la funzione di ripartizione della variabile aleatoria U, $F_U(u)$, implementarla in R.

Si faccia attenzione sul supporto della variabile U. i.e. l'insieme su cui U è definita. consiglio di usare un ifelse(test, yes, no) statement per la compattezza.

Inserire una funzione R ad un parametro, del tipo function(u){...}

$X \sim Exp(\lambda_X)$

$Y \sim Exp(\lambda_Y)$

Si ha che:

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(u)\, du = P(U<u) = P(\min\{X,Y\} < u)$$

almeno una delle 2 deve essere minore di u, non necessariamente entrambe

$$= 1 - F(X>u, Y>u)$$

La considero con il complementare

Definisco:

$$P(X>u) = 1 - F_X(u) = 1-(1 - e^{-\lambda_X u}) = e^{-\lambda_X u}$$

$$P(Y>u) = 1 - F_Y(u) = 1-(1 - e^{-\lambda_Y u}) = e^{-\lambda_Y x}$$

Visto che X e Y sono stocasticamente indipendenti ho che:

$$F_U(u) = 1 - (e^{-\lambda_X u} \cdot e^{-\lambda_Y u})$$

$$= 1 - e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)u}$$

```
function(u){pexp(u, λx+λy)}
```

```
function(u){ifelse(u<0, 0, 1-exp(-(λx+λy)u))}
```

```
function(u){ifelse(u<0, 0, pexp(u, λx+λy))}
```

2- Determinare $P(U>2.765 \mid X>0.666)$

$$x<u \Rightarrow \frac{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}}{e^{-\lambda_X \cdot x}} = \frac{e^{-(0.6+0.6)\cdot 2.765}}{e^{-(0.6)\cdot 0.666}} = \frac{e^{-3.318}}{e^{-0.3996}}$$

$$= \frac{0.03622521}{0.6705882} = \underline{0.05402005}$$

3- Determinare $P(U>0.666 \mid X>2.765)$

$$x>u \Rightarrow e^{-\lambda_X \cdot u} = e^{-0.6 \cdot 0.666} = e^{-0.3996} = \underline{0.6705882}$$