Esercizio Statistica 13/05/2019

Per una variabile aleatoria bivariata discreta si conosce che le modalità della prima componente (X) sono:

-3	5	6

mentre le modalità della seconda componente (Y) sono:

-10	-6	5	10

La funzione di probabilità marginale di X:

-3	5	6
0.38	0.29	0.33

→ marginale di X

mentre le distribuzioni condizionate $p_{Y|X}(y|x)$ sono riportate nelle righe della seguente tabella:

Y|X	-10	-6	5	10	
-3	0.19	0.25	0.31	0.25	1
5	0.28	0.29	0.23	0.20	1
6	0.21	0.26	0.21	0.32	1

→ condizionata Y|X

dove sulle righe abbiamo la variabile X e sulle colonne la variabile Y.

1- Calcolare $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$= (-3 \cdot 0.38) + (5 \cdot 0.29) + (6 \cdot 0.33)$$

$$= -1.14 + 1.45 + 1.98 = \underline{2.29}$$

Calcolare $\mathrm{Var}(X)$:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= 22.55 - (2.29)^2 = 22.55 - 5.2441 = \underline{17.3059}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum x^2 \cdot p_X(x)$$

$$= [(-3)^2 \cdot 0.38] + [(5)^2 \cdot 0.29] + [(6)^2 \cdot 0.33]$$

$$= (9 \cdot 0.38) + (25 \cdot 0.29) + (36 \cdot 0.33)$$

$$= 3.42 + 7.25 + 11.88 = \underline{22.55}$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \implies p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x)$$

congiunta

marginale di X

X \ Y	-10	-6	-5	10	
-3	0.0722	0.0950	0.1178	0.0950	0.38
5	0.0812	0.0841	0.0667	0.0580	0.29
6	0.0693	0.0858	0.0693	0.1056	0.33
	0.2227	0.2649	0.2538	0.2586	

marginale di Y

3 - Calcolare $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y))$:

condizionata X|Y

X|Y	-10	-6	-5	10
-3	0.324203	0.3586259	0.464145	0.3673627
5	0.364616	0.3174783	0.2628054	0.2242846
6	0.311181	0.3238958	0.2730496	0.4083527
	1	1	1	1

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y)) = \sum_{i=1}^{I} (\mathbb{E}(X|Y=y_i) - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_Y(y_i)$$

$$(X|Y=-10) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$
$$= (-3 \cdot 0.324203) + (5 \cdot 0.364616) + (6 \cdot 0.311181)$$
$$= -0.972609 + 1.82308 + 1.867056 = \underline{2.717557}$$

$$\mathbb{E}(X|Y=-6) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$
$$= (-3 \cdot 0.3586259) + (5 \cdot 0.3174783) + (6 \cdot 0.3238958)$$
$$= -1.0758777 + 1.5873915 + 1.9433748 = \underline{2.4548886}$$

$$\mathbb{E}(X|Y=-5) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$
$$= (-3 \cdot 0.464145) + (5 \cdot 0.2628054) + (6 \cdot 0.2730496)$$
$$= -1.392435 + 1.314027 + 1.6382976 = \underline{1.5598896}$$

$$\mathbb{E}(X|Y=10) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$
$$= (-3 \cdot 0.3673627) + (5 \cdot 0.2242846) + (6 \cdot 0.4083527)$$
$$= -1.1020881 + 1.1121423 + 2.4501162 = \underline{2.4694511}$$

$$Var(\mathbb{E}(X|Y)) = (\mathbb{E}(X|Y=-10) - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_Y(y) + (\mathbb{E}(X|Y=-6) - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_Y(y) +$$
$$\mathbb{E}(X|Y=-5) - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_Y(y) + \mathbb{E}(X|Y=10) - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_Y(y)$$
$$= [(2.717557 - 2.29) \cdot 0.2227] + [(2.45488886 - 2.29) \cdot 0.2649] +$$
$$+ [(1.5598896 - 2.29) \cdot 0.2538] + [(2.4694511 - 2.29) \cdot 0.2586]$$
$$= [(0.427557)^2 \cdot 0.2227] + [(0.1648886)^2 \cdot 0.2649] + [(-0.7301104)^2 \cdot 0.2538] +$$
$$[(0.1794511)^2 \cdot 0.2586]$$
$$= 0.0407106709 + 0.0072021675 + 0.1352909316 + 0.0083276175$$
$$= \underline{0.1915313875}$$

Calcolare $\mathbb{E}(\mathbb{V}ar(X|Y))$

Dal Teorema della decomposizione della varianza:

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(X|Y)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(X|Y))$$

si ha che:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{V}ar(X|Y)) &= \mathbb{V}ar(X) - \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(X|Y)) \\ &= 17.3059 - 0.1915313875 \\ &= \underline{17.1143686125}\end{aligned}$$