Esercizio Statistica 16/05/2019

Sia $X \sim P(\lambda)$, sapendo che $P(X=9) = P(X=10)$

1 - Calcolare il valore di λ:

$$P(X=9) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^9}{9!}$$

$$P(X=10) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{10}}{10!}$$

$$P(X=9) = P(X=10) \Rightarrow \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^9}{9!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{10}}{10!}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{10!} \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \lambda^9}{\cancel{9!}} = \frac{\cancel{10!} \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \lambda^{10}}{\cancel{10!}}$$

$$\Rightarrow 10\lambda^9 = \lambda^{10}$$

$$\Rightarrow 10\lambda^9 - \lambda^{10} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^9(10-\lambda) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 10 \end{cases}$$

$X \sim P(10)$

Sia ora Y un'altra variabile aleatoria Poissoniana, con media 4 e indipendente da X
É noto che la somma di variabili aleatorie indipendenti di Poisson, $Z = X+Y$ é anch'essa distribuita con legge di Poisson con parametro λ dato dalla somma dei parametri di X e Y.

Dopo aver derivato la funzione di probabilitá condizionata $X|Z=n$ (scrivetela con n, λ_Y, λ_X generici, tornerá utile nella domanda 3), rispondere alla seguente domanda:

2 - Qual'é la probabilitá $P(X=12 \mid Z=15)$?

$X \sim Poiss(10)$

$Y \sim Poiss(4) \longrightarrow \mathbb{E}(Y) = \lambda = 4$

$Z \sim Poiss(14) \longrightarrow Z = X + Y \sim Poiss(\lambda_X + \lambda_Y)$

$z = n$ generica:

$$P(X=x \mid Z=n) = \frac{P(X=x,\ Z=n)}{P(Z=n)} = \frac{P(X=x,\ X+Y=n)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{P(X=x\ \ Y=n-x)}{P(Z=n)} = \frac{P_x(X)\cdot P_y(n-x)}{P(Z=n)} \longrightarrow \text{indipendenti}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_x^x \cdot e^{-\lambda_x}}{x!}\cdot\frac{\lambda_Y^{(n-x)}\cdot e^{-\lambda_Y}}{(n-x)!}}{\frac{(\lambda_x+\lambda_Y)^n\cdot e^{-(\lambda_x+\lambda_Y)}}{n!}} = \frac{\lambda_x^x\cdot\cancel{e^{-\lambda_x}}}{x!}\cdot\frac{\lambda_Y^{(n-x)}\cdot\cancel{e^{-\lambda_Y}}}{(n-x)!}\cdot\frac{n!}{(\lambda_x+\lambda_Y)^n\cdot\cancel{e^{-(\lambda_x+\lambda_Y)}}}$$

$$= \frac{n!}{(n-x)!\,n!}\cdot\frac{\lambda_x^x\cdot\lambda_Y^{(n-x)}}{(\lambda_x+\lambda_Y)^n} = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_Y}\right)^x\underbrace{\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_x+\lambda_Y}\right)}_{1-\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_Y}=\frac{\lambda_Y}{\lambda_x+\lambda_Y}}{}^{n-x}$$

$$\Longrightarrow (X \mid Z=n) \sim Bin\left(n,\ \frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_Y}\right)$$

$$P(X=12 \mid Z=15) = \frac{P(X=12,\ Z=15)}{P(Z=15)} = \frac{P(X=12,\ X+Y=15)}{P(Z=15)} = \frac{P(X=12,\ Y=3)}{P(Z=15)}$$

$$= \frac{P_x(12)\cdot P_Y(3)}{P_Z(15)} = \frac{\frac{e^{-10}\cdot 10^{12}}{12!}\cdot\frac{e^{-4}\cdot 4^3}{3!}}{\frac{e^{-14}\cdot 14^{15}}{15!}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-10}}\cdot 10^{12}}{12!}\cdot\frac{\cancel{e^{-4}}\cdot 4^3}{3!}\cdot\frac{15!}{\cancel{e^{-14}}\cdot 14^{15}} = \frac{10^{12}\cdot 4^3\cdot \overset{5}{\cancel{15}}\cdot\overset{7}{\cancel{14}}\cdot 13\cdot\cancel{12!}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{12!}\cdot 14^{15}}$$

$$= \frac{35\cdot 10^{12}\cdot 4^3\cdot 13}{14^{15}}$$

$$= \underline{0.18718491021945}$$

3 - Determinare il valore atteso condizionato $\mathbb{E}(X \mid Z=15)$

$$\mathbb{E}(X \mid Z=\ \ ) = n\cdot\frac{\lambda_x}{(\lambda_x+\lambda_Y)} \longrightarrow T\sim Bin(n,p)\quad \mathbb{E}(T)=n\cdot p$$

$$\mathbb{E}(X \mid Z=15) = 15\cdot\frac{10}{(10+4)} = \frac{150}{14} \simeq \underline{10.714285714 28}$$