Esercizio Statistica 21/05/2019

Siano X e Y due variabili casuali indipendenti distribuite secondo una Poisson di parametri $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 4$ rispettivamente.

$X \sim \text{Poisson}(10)$

$Y \sim \text{Poisson}(4)$

1 - Dopo aver determinato $\mathbb{E}(X+Y)$ usare la disuguaglianza di Markov per ottenere un limite superiore della probabilità che la somma $X+Y$ sia maggiore o uguale a 21.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \lambda_1 = 10 \\ \mathbb{E}(Y) &= \lambda_2 = 4 \end{aligned}\right\}$$

Se $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ è indipendente da X, allora $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

$Z = X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

$= 10 + 4 = 14$

$$Pr(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{\alpha}$$

$$Pr(X \geq 21) \leq \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

2 - Usando la disuguaglianza di Markov ottenere un limite superiore della probabilità condizionata $P(X \geq 6 \mid X+Y = 21)$

$Z = X+Y$

$$X \mid Z = n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

$X+Y$

$$\mathbb{E}(X \mid Z = n) = n \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\mathbb{E}(X \mid Z = 21) = 21 \cdot \frac{10}{14} = 15$$

$$P(X \geq 6 \mid Z = 21) \leq \frac{\mathbb{E}(X \mid Z = 21)}{6} = \frac{15}{6} = 2.5$$

Sia ora X una variabile aleatoria standard e sia $Y = 1.1\,X$.
Usare la disuguaglianza di Chebychev per ottenere un limite inferiore alla probabilità $P(|Y| < 2.6)$

$Pr(|Y| < 2.6) = 1 - Pr(|Y| \geq 2.6)$

Dunque:

$$Pr(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \implies 1 - Pr(|Y| \leq 2.6) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$Pr(|Y| \leq 2.6) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$E(Y) = \mu = 0$

$Var(Y) = \sigma^2 = (1.1)^2 \rightarrow Var(1.1\,X) = (1.1)^2\, Var(X) = (1.1)^2$

$$Pr(|Y| \leq 2.6) \geq 1 - \frac{(1.1)^2}{(2.6)^2} = 1 - \frac{1.21}{6.76} = 1 - 0.1789941 = \underline{0.8210059}$$

4- Qual'è il valore esatto di $P(|Y| < 2.6)$?

$$P(|Y| < 2.6) = P\left(|X| < \frac{2.6}{1.1}\right) = P\left(-\frac{2.6}{1.1} < X < \frac{2.6}{1.1}\right)$$ → è una normale standard, sfrutto la simmetria.

$$= \left[\int_0^{\frac{2.6}{1.1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right] \cdot 2 = 0.490952 \cdot 2 = \underline{0.9819034}$$

pnorm(2.6/1.1, 0, 1) - pnorm(-2.6/1.1, 0, 1)