

Esercizio Statistica: 26/03/2019

Due bambini giocano a trasmettersi un messaggio attraverso uno strano apparecchio. Questo può inviare sequenze di 4 caratteri composte dalle sole lettere 'A', 'B', 'C'. Uno dei due bambini trasmette una delle seguenti:

- AAAA, con probabilità 0.28
- BBBB, con probabilità 0.33
- CCCC, con probabilità 0.39

Per ogni lettera, la probabilità che essa sia trasmessa correttamente è $p=0.48$ e distorta in ciascuna delle altre due con la stessa probabilità.

Ogni lettera è trasmessa in maniera indipendente da ogni altra.

$$\Omega_i = \{A, B, C\} \quad A_i = P(\Omega_i) \quad Pr_i \quad i=1,2,3,4$$

$$\Omega = \prod_{i=1}^4 \Omega_i$$

$$Pr(\text{trasmesso correttamente}) = 0.48$$

$$Pr(\text{distorta}) = 1 - 0.48 = 0.52$$

$$A = \bigotimes_{i=1}^4 A_i$$

$$Pr(\text{ricevuto A} \mid \text{trasmesso A}) = 0.48$$

$$Pr(\text{ricevuto B} \mid \text{trasmesso B}) = 0.48$$

$$Pr(\text{ricevuto C} \mid \text{trasmesso C}) = 0.48$$

$$Pr(\text{trasmesso AAAA}) = 0.28$$

$$Pr(\text{trasmesso BBBB}) = 0.33$$

$$Pr(\text{trasmesso CCCC}) = 0.39$$

$$Pr(\text{ricevuto B} \mid \text{trasmesso A}) = [1 - Pr(\text{trasmesso correttamente})]/2 = Pr(\text{distorta})/2$$
$$= (1 - 0.48)/2 = 0.26$$

$$Pr(\text{ricevuto C} \mid \text{trasmesso A}) = 0.26$$

$$Pr(\text{ricevuto A} \mid \text{trasmesso B}) = 0.26$$

$$Pr(\text{ricevuto C} \mid \text{trasmesso B}) = 0.26$$

$$Pr(\text{ricevuto A} \mid \text{trasmesso C}) = 0.26$$

$$Pr(\text{ricevuto B} \mid \text{trasmesso C}) = 0.26$$

Calcolare la probabilità che sia stata trasmessa la sequenza "AAAA", avendo ricevuto la sequenza "CCBC".

$$\begin{aligned} \Pr(\text{CCBC} | \text{AAAA}) &= \Pr(C|A) \cdot \Pr(C|A) \cdot \Pr(B|A) \cdot \Pr(C|A) \\ &= \left(\frac{26}{100}\right)^4 \\ &= \frac{28561}{6250000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{CCBC} | \text{BBBB}) &= \Pr(C|B) \cdot \Pr(C|B) \cdot \Pr(B|B) \cdot \Pr(C|B) \\ &= \left(\frac{26}{100}\right)^3 \cdot \frac{48}{100} = \frac{6591}{781250} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{CCBC} | \text{CCCC}) &= \Pr(C|C) \cdot \Pr(C|C) \cdot \Pr(B|C) \cdot \Pr(C|C) \\ &= \left(\frac{48}{100}\right)^3 \cdot \frac{26}{100} = \frac{11232}{390625} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{AAAA} | \text{CCBC}) &= \frac{\Pr(\text{CCBC} | \text{AAAA}) \cdot \Pr(\text{AAAA})}{\Pr(\text{CCBC})} \quad \rightarrow \text{Bayes} \\ &= \frac{28561}{6250000} \cdot \frac{28}{100} \cdot \frac{1250000}{19097} = \frac{1183}{14125} \approx 0.0837522124 \end{aligned}$$

Teorema Probabilità Totale

$$\begin{aligned} \Pr(\text{CCBC}) &= \Pr(\text{CCBC} | \text{AAAA}) \cdot \Pr(\text{AAAA}) + \Pr(\text{CCBC} | \text{BBBB}) \cdot \Pr(\text{BBBB}) + \\ &\quad \Pr(\text{CCBC} | \text{CCCC}) \cdot \Pr(\text{CCCC}) \\ &= \frac{28561}{6250000} \cdot \frac{28}{100} + \frac{6591}{781250} \cdot \frac{33}{100} + \frac{11232}{390625} \cdot \frac{39}{100} \\ &= \frac{119'927}{156'250'000} + \frac{217'503}{781'250'000} + \frac{109'512}{9'765'625} = \frac{19097}{1250000} \end{aligned}$$

2- Date le lettere "A", "B", "C", quante sono le possibili sequenze lunghe 3 caratteri?
Calcolo le disposizioni con ripetizione di 3 elementi in 3 posti.

$$D'_{3,3} = 3^3 = \underline{27}$$