Esercizio Statistica 20/05/2019

Una piccola azienda confeziona e vende sacchetti di caramelle gommose. Ogni sacchetto contiene caramelle di due diversi colori: rosse e gialli
In fabbrica i sacchetti sono riempiti da due diverse macchine - che operano in maniera indipendente. Una versa nel sacchetto le caramelle rosse, l'altra quelle gialle. Le macchine non sono molto precise, la prima macchina immette nel sacchetto in media 34 caramelle rosse, con una deviazione standard di $\vartheta_1 = 9$; dopodiché il sacchetto passa sotto alla seconda macchina, che ha una media di 26 caramelle giale con deviazione standard $\vartheta_2 = 6$.

Una caramella pesa un grammo e il prezzo dipende dal loro peso, in particolare il prezzo é 0.06 euro volte il peso del sacchetto.

$R \sim N(\mu_1, \vartheta_1^2)$ con $\mu = 34$ e $\vartheta = 9$
$G \sim N(\mu_2, \vartheta_2^2)$ con $\mu = 26$ e $\vartheta = 6$

1 - Quanto costa in media un sacchetto di caramelle?

$$\text{costo} = \mu_1 \cdot \text{prezzo} + \mu_2 \cdot \text{prezzo} = (\mu_1 + \mu_2) \cdot \text{prezzo} = (34 + 26) \cdot 0.06 = 60 \cdot 0.06 = \underline{3.60}$$

$Z = \text{prezzo} \cdot (R + G)$
$\mathbb{E}(Z) = \text{prezzo} \cdot \mathbb{E}(R) + \text{prezzo}\ \mathbb{E}(G)$
$\Downarrow$
per l'indipendenza

Ora, le caramelle rosse richiedono una preparazione più lunga e costosa, per cui i produttori decidono di modificare il prezzo delle caramelle: una caramella rossa costa 0.19, mentre una gialla costa 0.06

2- Quanto costa in media un sacchetto di caramelle, con i nuovi prezzi?

$C_1 = 0.19$
$C_2 = 0.06$

$$\text{costo} = C_1 \cdot \mathbb{E}(R) + C_2 \cdot \mathbb{E}(G) = (0.19 \cdot 34) + (0.06 \cdot 26) = 6.46 + 1.56 = \underline{8.02}$$

$K = (C_1 R + C_2 G)$
$\mathbb{E}(K) = \mathbb{E}(C_1 R) + \mathbb{E}(C_2 G) = C_1 \mathbb{E}(R) + C_2 \mathbb{E}(G)$

Qual' é la varianza del prezzo di un sacchetto di caramelle (con i nuovi prezzi)?

$Var(K) = Var(c_1 R) + Var(c_2 G)$ → sono stocasticamente indipendenti dunque la covarianza vale Ø

$= \mathbb{E}[(c_1 G - \mathbb{E}(c_1 G))^2] + \mathbb{E}[(c_2 G - \mathbb{E}(c_2 G))^2]$

$= \int_{R_R} (c_1 r - c_1 \mathbb{E}(R))^2 \cdot p_R(r)\, dr + \int_{R_G} (c_2 g - c_2 \mathbb{E}(g))^2 \cdot p_G(g)\, dg$

$= c_1^2 Var(R) + c_2^2 Var(G)$ → $(c_1(r - \mathbb{E}(R))^2 = c_1^2 \cdot (r - \mathbb{E}(R))^2$

$= c_1^2 \cdot \sigma_1^2 + c_2^2 \cdot \sigma_2^2$

$= [(0.19)^2 \cdot (9)^2] + [(0.06)^2 \cdot (6)^2]$

$= (0.0361 \cdot 81) + (0.0036 \cdot 36) = 2.9241 + 0.1296$

$= \underline{3.057}$

4- Disuguaglianza di Markov.

Qual' è la probabilità p che il costo di un sacchetto di caramelle abbia un costo maggiore o uguale a 7.13. Stabilire un limite superiore al valore p usando la disuguaglianza di Markov.

$$Pr(X \geq \alpha) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$

$$Pr(K \geq 7.13) = \frac{\mathbb{E}(K)}{7.13} = \frac{8.02}{7.13} = \underline{1.1248246844}$$