Esercizio Statistica 28/05/2019

Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ, i.e $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Purtroppo non possiamo campionare direttamente X, però possiamo avere un campione casuale da $Y = 3X$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ ove Y_i sono i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite)

$$X \sim Exp(\lambda)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y = 3X$$

$$(Y_1, \dots, Y_n) \sim Exp(\lambda)$$

1- Dopo aver determinato la funzione di densità di Y e lo stimatore di massima verosomiglianza per λ, inserirne il valore per il seguente campione:

0.67	0.09	0.09	0.78	0.72	1.89	0.98	0.02

$$Y = 3X \sim f_Y(y)$$

$$Y = g(X) = 3X$$

$$g^{-1}(X) = \frac{1}{3} y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y) \right| & x \geq 0 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\frac{\lambda}{3} y} \cdot \left| \frac{1}{3} \right| & x \geq \emptyset \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{3} y}}{3} & x \geq \emptyset \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L(\lambda_i; y_1,\dots,y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_Y(y)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{3}y}}{3} = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^n \cdot e^{-\frac{\lambda}{3}\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$\ell(\lambda_i; y_1,\dots,y_n) = n\log\left(\frac{\lambda}{3}\right) + \left[-\frac{\lambda}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right]$$

$$= n\log\left(\frac{\lambda}{3}\right) + \left(-\frac{n\lambda}{3}\bar{y}\right) = n\left[\log(\lambda) - \log(3)\right] + \left(\frac{-\lambda}{3}\cdot n\bar{y}\right)$$

$$\hookrightarrow n\log(\lambda) - \underbrace{n\log(3)}_{\text{costante} = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ell = \left(n\cdot\frac{1}{\lambda}\right) + \left(-\frac{n}{3}\bar{y}\right)$$

$$= \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{3}\bar{y}$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{3}\bar{y} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{\lambda} = \frac{n}{3}\bar{y}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}\bar{y}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{3}{\bar{y}}}$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$$

$$= \sum_{i=1}^{8} y_i / 8 = \frac{0.67 + 0.09 + 0.09 + 0.78 + 0.72 + 1.89 + 0.98 + 0.02}{8} = \frac{5.24}{8} = 0.655$$

$$\hat{\lambda} = \frac{3}{\bar{y}} = \frac{3}{0.655} = 4.580153$$

2- Si consideri ora $Z = X - 6$, dopo aver determinato la funzione di densità di Z e lo stimatore di massima verosomiglianza per λ date $Z_1,\dots,Z_n$ i.i.d. della distribuzione di Z, inserirne il valore per il seguente campione:

0.00	0.17	0.34	0.07	0.06	0.07	0.10	0.21

$$Z = g(X) = X - 6$$

$$g^{-1}(X) = Z + 6 \qquad (z+6)' = 1$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}(z) \right| & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z+6)} & z \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L(\lambda_i; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(z+6)} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} z_i + 6n\right)}$$

$$\ell(\lambda_i; z_1, \dots, z_n) = n \cdot \log \lambda - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} z_i + 6n\right)$$

$$= n \cdot \log \lambda - \lambda n \bar{z} - \lambda 6n$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ell = \frac{n}{\lambda} - n\bar{z} - 6n \implies \frac{n}{\lambda} = +n\bar{z} + 6n \implies \frac{1}{\lambda} = \bar{z} + 6 \implies \boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{z} + 6}}$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i / n$$

$$= \sum_{i=1}^{8} z_i / 8 = \frac{0.00 + 0.17 + 0.34 + 0.07 + 0.06 + 0.07 + 0.10 + 0.21}{8} = \frac{1.02}{8} = \underline{0.1275}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{z} + 6} = \frac{1}{0.1275 + 6} = \frac{1}{6.1275} = \underline{0.1631987}$$