Esercizio Statistica: 02/05/2019

È noto che il tempo trascorso tra il passaggio di due veicoli successivi sotto una videocamera del traffico, ha una distribuzione esponenziale di media 4.

$T \sim Exp(\lambda)$

$\mathbb{E}(T) = 4$

$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

1- Determinare la probabilità che il tempo trascorso tra il passaggio di due veicoli successivi sia minore di 4.9

$$F(T) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\int_{R_X} f_X(x)\,dx = \int_0^{4.9} \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{4.9} = 1 - e^{-\lambda(4.9)}$$

$$= P(T \leq 4.9) = 1 - e^{-\frac{1}{4}(4.9)} = 1 - e^{-1.225} = 1 - 0.2937577003 = 0.7062422997$$

2- Determinare l'intervallo di tempo t tale che per cui siamo certi al 85%, che il tempo trascorso tra il passaggio di due veicoli successivi sia maggiore di t.

$$P(X > x) = 0.85$$

$$e^{-\frac{1}{4}x} = 0.85$$

$$-\frac{x}{4} = \ln(0.85)$$

$$x = -4\ln(0.85) = (-4)\cdot(-0.1625189) = 0.6500757$$

$$t = 0.6500757$$

Sapendo che sono già trascorsi 2.8 minuti dal passaggio di un veicolo, qual'è la probabilità che si debba attendere altri 4 minuti per il passaggio del veicolo successivo?

$$Pr(T < x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$Pr(T < 4) = 1 - e^{-\frac{1}{4}(4)} = 1 - e^{-1} = 1 - 0.3678794412 = \underline{0.6321205588}$$

$$\int_{R_X} f_X(x)\,dx = \int_0^4 \lambda e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}\Big]_0^4 = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} = 0.6321205588$$

4- Trasformazione di una variabile casuale. Si consideri ora la variabile casuale $U = \sqrt{T}$. Scrivere la funzione di densità U.

$T \sim Exp(\lambda)$

$y = g(x) = \sqrt{x}$ $\longrightarrow$ g strettamente monotona e derivabile nell'intervallo (a,b), cioè $(0, +\infty)$

$a = \emptyset$

$g(\emptyset) = \emptyset$

$b = +\infty$

$$g(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Definiamo il nuovo supporto:

$\alpha = \min(g(a), g(b)) = \emptyset$

$\beta = \max(g(a), g(b)) = +\infty$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial y} \cdot g^{-1}(y)\right| & \alpha < y < \beta \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$g^{-1}(y) = (\sqrt{y})^{-1} = y^2$

$(g^{-1}(y))' = (y^2)' = 2y$

$$= \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda y^2} \cdot |2y| & y \in (0, +\infty) \\ \emptyset \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} y \cdot e^{-y^2/4} & \in (0, +\infty) \\ \emptyset \text{ altrimenti} \end{cases}$$