Esercizio Statistica: 14/05/2019

Sono date due variabili casuali discrete: X prende valori in $\{-7.5, 0, 6.5\}$, mentre $Y(\omega) \in \{-9.5, -1.5, 6.5, 8.5\}$

Si conoscono:

- la funzione di probabilità marginale $p_X(x) = P(X=x)$

-7.5	0	6.5
0.30	0.39	0.31

→ marginale X

- la probabilità condizionata $p_{Y|X}(y|x)$ (righe della seguente tabella)

Y|X	-9.5	-1.5	6.5	8.5	
-7.5	0.29	0.24	0.24	0.23	1
0	0.18	0.25	0.30	0.27	1
6.5	0.28	0.30	0.24	0.18	1

→ condizionata Y|X

1- Qual'é la probabilità di (-7.5, 6.5)?

$P_r(-7.5, 6.5) = \underline{0.0720}$

X \ Y	-9.5	-1.5	6.5	8.5	
-7.5	0.0870	0.0720	0.0720	0.069	0.30
0	0.0702	0.0975	0.1170	0.1053	0.39
6.5	0.0868	0.0930	0.0744	0.0558	0.31
	0.2440	0.2625	0.2634	0.2301	

→ congiunta

marginale Y →

→ marginale X

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \Longrightarrow p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X}(\ |x) \cdot p_X(x)$$

Determinare $Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in R_x} x \cdot p_x(x)$$

$$= (-7.5 \cdot 0.30) + (\emptyset \cdot 0.39) + (6.5 \cdot 0.31)$$

$$= -2.25 + 2.015 = \underline{-0.235}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$$

$$= (-9.5 \cdot 0.2440) + (-1.5 \cdot 0.2625) + (6.5 \cdot 0.2634) + (8.5 \cdot 0.2301)$$

$$= (-2.318) + (-0.39375) + 1.7121 + 1.95585$$

$$= -2.71175 + 3.66795 = \underline{0.9562}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in R_x} \sum_{y \in R_Y} x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

$$= [(-7.5) \cdot (-9.5) \cdot 0.0870] + [(-7.5) \cdot (-1.5) \cdot 0.0720] + [(-7.5) \cdot 6.5 \cdot 0.0720] +$$

$$[(-7.5) \cdot 8.5 \cdot 0.069] + \emptyset + [6.5 \cdot (-9.5) \cdot 0.0868] + [6.5 \cdot (-1.5) \cdot 0.0930] +$$

$$[6.5 \cdot 6.5 \cdot 0.0744] + [6.5 \cdot 8.5 \cdot 0.0558]$$

$$= 6.19875 + 0.81 + (-3.51) + (-4.39875) + \emptyset + (-5.3599) + (-0.90675) + 3.1434 +$$

$$3.08295$$

$$= -0.9 - 0.0403 = \underline{-0.9403}$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$$

$$= -0.9403 - [(0.9562) \cdot (-0.235)]$$

$$= -0.943 + 0.224707$$

$$= \underline{-0.715593}$$

X e Y sono non correlate?

Le variabili aleatorie X e Y sono incorrelate se $\rho(X,Y) = \emptyset$ $\longrightarrow$ implica che $Cov(X,Y)=\emptyset$

Dunque, visto che $\rho(X,Y) = -0.0184348941$, X e Y sono correlate; in particolare le due variabili si dicono inversamente correlate, oppure correlate negativamente.

Risposta: FALSE

4- Determinare $\rho(X,Y)$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \quad \text{con } \rho(X,Y) \in [-1,1]$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$= 29.9725 - (-0.235)^2 = 29.9725 - 0.055225 = 29.917275$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p_X(x)$$
$$= [(-7.5)^2 \cdot 0.30] + \emptyset + [(6.5)^2 \cdot 0.31]$$
$$= 16.875 + 13.0975 = 29.9725$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$
$$= 50.365 - (0.9562)^2 = 50.365 - 0.91431844 = 49.45068156$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot p_Y(y)$$
$$= [(-9.5)^2 \cdot 0.2440] + [(-1.5)^2 \cdot 0.2625] + [(6.5)^2 \cdot 0.2634] + [(8.5)^2 \cdot 0.2301]$$
$$= 22.021 + 0.590625 + 11.12865 + 16.624725 = 50.365$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$
$$= \frac{(-0.715593)}{\sqrt{(49.45068156) \cdot (50.365)}} = \frac{-0.715593}{\sqrt{1479.4296391679}} = \frac{-0.715593}{38.4633544971}$$
$$= -0.0186045396$$