Esercizio Statistica: 30/04/2019

Sia $X \sim N(\mu, \vartheta^2)$ con $\mu = 2.7$, $\vartheta^2 = 1.21$

1- Quanto vale il secondo momento non centrato della variabile X?

$$\mathbb{E}(X^2) = \mu^2 + \vartheta^2 = (2.7)^2 + 1.21 = 7.29 + 1.21 = \underline{8.5}$$

2- Trasformazione di una variabile casuale. Si consideri ora la trasformazione

$$Y = g(X) = \left(\frac{X-\mu}{\vartheta}\right)^2$$

Qual'é la media di Y?

$$Y = g(X) = (h(x))^2 \quad \text{con} \quad h(x) = \left(\frac{X-\mu}{\vartheta}\right) = Z \implies Y = Z^2$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot f(z)\, dz$$

funzione normale standard

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \underline{1}$$

3- Qual'é la varianza di Y?

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

$Y = Z^2$ come visto sopra

vedi dietro

$$= \mathbb{E}((Z^2)^2) - \mathbb{E}(Z^2)^2$$

$$= \mathbb{E}(Z^4) - \mathbb{E}(Z^2)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\right)^2$$

$$= 3 - 1^2$$

$$= \underline{2}$$

4- Scrivere la funzione di densitá function(z) {...}, della variabile $Z = \frac{X-\mu}{\vartheta}$, dove X é la variabile del punto 1.

<u>function(z){(1/sqrt(2·π))·exp(-(z^2)/2)}</u>

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}((bX+a)^4)$$

$$= \sum (bx+a)^4 P_X(x)$$

$$= b^4 \sum x^4 P_X(x) + 4b^3 a \sum x^3 P_X(x) + 6b^2a^2 \sum x^2 P_X(x)$$

$$+ 4ba^3 \sum x P_X(x) + a^4 \sum P_X(x)$$

$$b^4 \cdot \mathbb{E}(X^4) + 4b^3 a\, \mathbb{E}(X^3) + 6b^2a^2\, \mathbb{E}(X^2) + 4ba^3\, \mathbb{E}(X) + a^4$$

$$b^4 \cdot \mu^4 + 6b^4 \mu^2 \sigma^2 + 3b^4\sigma^4 + 4b^3 a \mu^3 + 12 b^3 a \mu \sigma^2 + 6b^2a^2\sigma^2$$

$$+ 6b^2a^2\mu^2 + 4ba^3\mu + a^4$$

$$= \cancel{\frac{\mu^4}{\sigma^4}} + 6\cancel{\frac{\mu^2}{\sigma^2}} + 3\cancel{\frac{\sigma^4}{\sigma^4}} - 4\cancel{\frac{\mu^4}{\sigma^4}} - 12\cancel{\frac{\mu^2}{\sigma^2}} + 6\cancel{\frac{\mu^2}{\sigma^2}} + 6\cancel{\frac{\mu^4}{\sigma^4}} - 4\cancel{\frac{\mu^4}{\sigma^4}} + \cancel{\frac{\mu^4}{\sigma}}$$

$$= 3$$