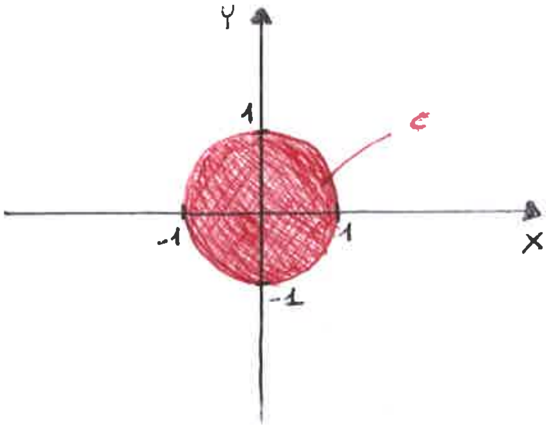
Esercizio Statistica 23/05/2019

Sia X.Y una variabile bivariata uniformemente distribuita nel cerchio

$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Dato che la distribuzione é uniforme su A e dato che la densitá é costante su A e vale un certo $c \in \mathbb{R}$ e Ø all' esterno, segue che:

$$\iint_A c \cdot dA = 1 \iff c\iint_A 1\, dA = 1 \iff c = \frac{1}{\iint_A 1 \cdot dA} = \frac{1}{\pi}$$

Area del cerchio $= \pi r^2$ dove $r = 1$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Congiunta

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{se } -\sqrt{1-x^2} \leq x \leq \sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{1-y^2} \leq y \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{R_X} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot \Big| y \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) = \boxed{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}}$$

→ Marginale di X

$$f_Y(y) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi}\Big| x \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-y^2}\right) = \boxed{\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}}$$

→ Marginale di Y

Scrivere la densità marginale di X nel punto $X = 0{,}93$

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

$$f_X(0.93) = \frac{2\sqrt{1-(0.93)^2}}{\pi} = \frac{2\sqrt{1-0.8649}}{\pi} = \frac{2\sqrt{0.1351}}{\pi} = \frac{2\cdot 0.3675595}{\pi} = \frac{0.735119}{\pi} = \underline{0.2339957}$$

2 - Scrivere la densità marginale di Y nel punto $Y = 0$

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

$$f_Y(0) = \frac{2\sqrt{1-0}}{\pi} = \frac{2\sqrt{1}}{\pi} = \frac{2}{\pi} = \underline{0.6366198}$$

3 - Le variabili X e Y sono stocasticamente indipendenti?

Le variabili X e Y sono stocasticamente indipendenti se e solo se:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \qquad \forall x \in R_X \quad \forall y \in R_Y$$

Dunque:

$$\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} \overset{?}{=} \frac{1}{\pi} \iff \frac{4(\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-y^2})}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

<u>FALSE</u>

4 - Le variabili X e Y sono linearmente indipendenti?

Le variabili X e Y sono linearmente indipendenti se e solo se:

$\rho(X,Y) = 0$, equivalentemente $Cov(X,Y) = 0$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - (0\cdot 0) = 0$$

$Cov(X,Y) = 0 \implies \rho(X,Y) = 0 \implies$ X e Y sono linearmente indipendenti

<u>TRUE</u>

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{R_X}\int_{R_Y} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{R_X}\int_{R_Y} x \cdot y \cdot \frac{1}{\pi}\, dy\, dx = \int_{R_X} x \cdot \int_{R_Y} y \cdot \frac{1}{\pi}\, dy\, dx = \int_{R_X} x \cdot \frac{1}{\pi}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx$$

$$= \int_{R_X} x \cdot \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{1-x^2}{2}\right) dx = \int_{R_X} x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \int_{R_X} 0 = \underline{0}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ x^2 = 1-u \\ 2x\,dx = -1\,du \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int -\sqrt{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2}\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{2}(0-0)\right]$$

$$= \underline{0}$$

$\mathbb{E}(Y) = \underline{0}$ ⟶ per simmetria dell' esercizio $\left(-\frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right]_{-1}^{1}\right)$