Esercizio Statistica: 27/05/2019

Sia $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ un campione casuale di distribuzione esponenziale con parametro λ.

$\{X_1, X_2, X_3, X_4\} \sim \mathbb{E}xp(\lambda)$

Si considerino i seguenti stimatori:

- $T_1 = X_3$
- $T_2 = \dfrac{X_1 + 2X_2}{3}$
- $T_3 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{6} - \dfrac{X_3 + X_4}{4}$

1- Quali tra i precedenti stimatori sono non-distorti?

- $\emptyset$ per "nessuno"
- il numero corrispondente allo stimatore
- 4 se T_1, T_2 sono non-distorti
- 5 se T_1, T_3 sono non-distorti
- 6 se T_2, T_3 sono non distorti
- 7 se per "tutti e tre"

- $E(T_1) = \mathbb{E}(X_3) = \dfrac{1}{\lambda}$

$$B(T_1) = \mathbb{E}(T_1) - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \underline{\emptyset}$$

- $\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}\left[\dfrac{X_1 + 2X_2}{3}\right] = \dfrac{1}{3}\mathbb{E}(X_1 + 2X_3) = \dfrac{1}{3}\mathbb{E}(X_1) + \dfrac{2}{3}\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\lambda}$
$= \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{\lambda}$

$$B(T_2) = \mathbb{E}(T_2) - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \underline{\emptyset}$$

- $\mathbb{E}(T_3) = \mathbb{E}\left[\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{6} + \dfrac{X_3 + X_4}{4}\right] = \mathbb{E}\left[\dfrac{2(X_1 + X_2 + X_3) + 3(X_3 + X_4)}{12}\right]$
$= \dfrac{1}{12}\left[\mathbb{E}(2X_1 + 2X_2 + 2X_3) + \mathbb{E}(3X_3 + 3X_4)\right]$
$= \dfrac{1}{12}\left(2\mathbb{E}(X_1) + 2\mathbb{E}(X_2) + 5\mathbb{E}(X_3) + 3\mathbb{E}(X_4)\right)$
$= \dfrac{1}{12}\left[2\cdot\dfrac{1}{\lambda} + 2\cdot\dfrac{1}{\lambda} + 5\cdot\dfrac{1}{\lambda} + 3\cdot\dfrac{1}{\lambda}\right]$
$= \dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{\lambda}(2+2+5+3) = \dfrac{12}{12\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$

$$B(T_3) = \mathbb{E}(T_3) - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \underline{\emptyset}$$

T_1, T_2 e T_3 sono stimatori non distorti, dunque la risposta è $\underline{7}$.

Calcolare la varianza dello stimatore T_1.

Inserire la risposta come funzione di R, ad un solo parametro function(lambda){...}

Si ricordi che $\lambda > 0$, per cui decidiamo che se $\lambda \leq 0$, la funzione deve restituire 0.

$$\mathbb{V}ar(T_1) = \mathbb{V}ar(X_3) = \mathbb{E}\left[(X_3 - \mathbb{E}(X_3))^2\right]$$
$$= \mathbb{E}(X_3^2) - \mathbb{E}(X_3)^2$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(X_3^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f_X(x)\, dx$$
$$= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-\lambda x}\Big]_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -e^{-\lambda x}$

$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda}\left[\underbrace{-x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty -e^{-\lambda x}\, dx\right] = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx\right)$$

$f(x) = x \qquad g(x) = -e^{-\lambda x}$

$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(-e^{-\lambda x}\right)_0^\infty$$
$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

```
function(lambda){return(ifelse(lambda <= 0, 0, 1/lambda^2))}
```

3 - Quale tra gli stimatori T_1, T_2, T_3, è preferibile (in termini di errore quadratico medio)?

$$\mathbb{V}ar(T_1) = \mathbb{V}ar(X_3) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{V}ar(T_2) = \mathbb{V}ar\left(\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right) = \frac{1}{9}\mathbb{V}ar(X_1 + 2X_2) = \frac{1}{9}\mathbb{V}ar(X_1) + \frac{4}{9}\mathbb{V}ar(X_2)$$
$$= \frac{1}{9\lambda^2} + \frac{4}{9\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right)$$
$$= \frac{5}{9\lambda^2}$$

$$\mathbb{V}ar(T_3) = \mathbb{V}ar\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{6} + \frac{X_3 + X_4}{4}\right) = \mathbb{V}ar\left(\frac{2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_3 + 3X_4}{12}\right)$$
$$= \frac{1}{144}\left(\mathbb{V}ar(2X_1) + \mathbb{V}ar(2X_2) + \mathbb{V}ar(5X_3) + \mathbb{V}ar(3X_4)\right)$$
$$= \frac{1}{144}\left(4 \cdot \mathbb{V}ar(X_1) + 4\,\mathbb{V}ar(X_2) + 25\,\mathbb{V}ar(X_3) + 9\,\mathbb{V}ar(X_4)\right)$$

$$= \frac{1}{144}\left(\frac{4}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} + \frac{25}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{\lambda^2}(4+4+25+9) = \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot 42$$

$$= \frac{7}{42\lambda^2}$$

$$MSE(T_1) = Var(T_1) + \mathbb{E}\left[\left(T_1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right] \to 0$$

$$= Var(T_1) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$MSE(T_2) = Var(T_2) + \mathbb{E}\left[\left(T_2 - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right] \to 0$$

$$= Var(T_2) = \frac{5}{9\lambda^2}$$

$$MSE(T) = Var(T_3) + \mathbb{E}\left[\left(T_3 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2\right] \to 0$$

$$= Var(T_3) = \frac{7}{24\lambda^2}$$

$$MSE(T_3) < MSE(T_2) < MSE(T_1)$$

In termini di errore quadratico medio T_3 è lo stimatore preferibile, dunque la risposta è la 3.

4- Dopo aver determinato lo stimatore di massima verosomiglianza $\hat{\lambda}$ per λ, inserirne la stima per il seguente campione casuale:

10.50	1.00	19.30	2.70	1.20	0.80	2.60	11.50	1.70	4.30

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{y}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} y_i} \cdot n = \frac{1}{55.6} \cdot 10 = 0.01798561151 \cdot 10 = 0.1798561151$$

$$L(\lambda_i; Y_1, \dots, Y_{10}) = \prod_{i=1}^{10} (\lambda \cdot e^{-\lambda x}) = \lambda^{10} \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{10} y_i}$$

media aritmetica campionaria

$$\ell(\lambda_i; Y_1, \dots, Y_{10}) = 10 \cdot \log\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{10} y_i \implies \frac{\partial}{\partial\lambda} \ell(\lambda_i; Y_1, \dots, Y_{10}) = \frac{10}{\lambda} - 10\bar{y} = 0 \to \lambda = \frac{1}{\bar{y}}$$

$$= 10 \log\lambda - 10\bar{y}\lambda$$