Esercizio Statistica 24/05/2019

Durante uno studio medico si misura il parametro toracico di $n=9$ persone, i valori sono riportati nella seguente tabella:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
84.50	73.30	87.30	76.20	85.50	85.10	87.10	69.30	81.10

Si vogliono stimare media e deviazione standard, μ, ϑ, del campione casuale $\{X_1, \dots, X_9\}$

1- Calcolare una stima puntuale del parametro toracico medio.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\bar{X}$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i = \frac{1}{9}\left[\frac{845}{10} + \frac{733}{10} + \frac{873}{10} + \frac{762}{10} + \frac{855}{10} + \frac{851}{10} + \frac{871}{10} + \frac{693}{10} + \frac{811}{10}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{845+733+873+762+855+851+871+695+811}{10}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{7300}{10} = \frac{730\cancel{0}}{9\cancel{0}} = \frac{730}{9} \simeq \underline{81.11111}$$

2- Calcolare una stima puntuale della deviazione standard, utilizzando lo stimatore:

$$S^2(X_1, \dots, X_9) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\vartheta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(X_i - \frac{730}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{845}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \left(\frac{733}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \left(\frac{873}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \left(\frac{762}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \right.$$

$$+\left(\frac{855}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \left(\frac{851}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \left(\frac{871}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 + \left(\frac{693}{10} - \frac{730}{9}\right)^2 +$$

$$\left. + \left(\frac{811}{10} - \frac{730}{9}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{305}{90}\right)^2 + \left(-\frac{703}{90}\right)^2 + \left(\frac{557}{90}\right)^2 + \left(-\frac{442}{90}\right)^2 + \left(\frac{395}{90}\right)^2 + \left(\frac{359}{90}\right)^2 + \left(\frac{593}{90}\right)^2 + \left(-\frac{1063}{90}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{90}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{93025 + 494209 + 310249 + 195364 + 156025 + 128881 + 351649 + 1129969}{8100}\right)$$

$$= \frac{2859372}{72900} = \frac{79427}{2025} \simeq \underline{39.223209876}$$

$\vartheta = \sqrt{\vartheta^2} = \sqrt{39.223209876}$

$= \underline{6.262844}$ ⟶ deviazione standard

3- Lo stimatore $S^2(X_1, \dots, X_9)$ del punto precedente é non-distorto?

Se non distorto, allora rispondete 1, altrimenti inserite il fattore (costante moltiplicativa) per cui si deve moltiplicare $S^2(X_1, \dots, X_9)$ per ottenere una stima migliore della deviazione standard.

$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2]$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\mathbb{E}[((X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu))^2]$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\mathbb{E}[(X_i-\mu)^2 + (\bar{X}-\mu)^2 - 2(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu)]$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(\vartheta^2 + \frac{\vartheta^2}{9} - 2\,\underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, \bar{X})}_{\to\ \frac{2\vartheta^2}{9}}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(\vartheta^2 - \frac{\vartheta^2}{9}\right) = \frac{1}{9}\cdot 9\left(\vartheta^2 - \frac{\vartheta^2}{9}\right)$$

$$= \vartheta^2 - \frac{\vartheta^2}{9} = \underline{\frac{8\vartheta^2}{9}}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i, \bar{X}) = \mathrm{Cov}\left(X_i, \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}X_j\right)$$

$$= \frac{1}{9}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{9}\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \frac{1}{9}\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \frac{1}{9}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{\vartheta^2}{9}$$

$$B(S^2) = \mathbb{E}(S^2) - \vartheta^2 = \frac{8}{9}\vartheta^2 - \vartheta^2 = -\frac{1}{9}\vartheta^2 \neq \emptyset \implies S^2 \text{ é distorto.}$$

Correzione:

$$S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{9}{8}\cdot S^2 \implies \mathbb{E}(S_c^2) = \mathbb{E}\left(\frac{9}{8}S^2\right) = \frac{9}{8}\mathbb{E}(S^2) = \frac{9}{8}\cdot\frac{8}{9} = \vartheta^2$$

$B(S_c^2) = \mathbb{E}(S_c^2) - \vartheta = \vartheta^2 - \vartheta^2 = \emptyset$ ⟶ non distorto

Dunque S_c^2 é uno stimatore non distorto di ϑ^2 e quindi per correggere S^2 devo moltiplicare lo stimatore per $\frac{n}{n-1} = \underline{\frac{9}{8}}$

ponendolo: $\frac{1}{n-1}\sum_{i}^{n}(X_i - \bar{X})$ si ha che $\mathbb{E}(S^2) = \vartheta^2$