Esercizio Statistica: 12/03/2019

Si consideri il lancio di una moneta, di cui non si sa se é equilibrata o truccata. Ci viene detto che, lanciando la moneta due volte, la probabilita' di ottenere esattamente una testa "T" e una croce "C" (non necessariamente in questo ordine) é 0.455

N.B. Moneta equilibrata significa che testa e croce sono equiprobabili.

1. La moneta é equilibrata?

Falso, la moneta non é equilibrata, in quanto la probabilita' di ottenere T e C, se fosse equilibrata, varrebbe 0.5 mentre in questo caso é 0.455.

$\Omega = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$

$Pr((T,C) \cup (C,T)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \neq 0.455$

Da ora in poi, in caso di moneta truccata, si assuma che la probabilita' di avere croce "C", é minore della probabilita' di testa.

2. Ora sappiamo cosa aspettarci, giochiamo. Tiriamo la moneta ed esce T. Qual é la probabilita' di ottenere nuovamente T rilanciando la moneta?

Calcoliamo la probabilita' di T e C. Sappiamo che $T^2 + C^2 + 2TC = 1$

cioé $T^2 + C^2 + 0.455 - 1 = 0$

$T^2 + C^2 - 0.545 = 0 \iff T^2 + (1-T)^2 - 0.545 = 0$

* $T^2 + 1 + T^2 - 2T - 0.545 = 0 \iff 2T^2 - 2T + 0.455 = 0$

$T_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (8 \cdot 0.455)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{0.36}}{4} = \frac{2 + 0.6}{4} = 0.65$

$= \frac{2 - 0.6}{4} = 0.35$

Visto che $Pr(C) < Pr(T)$ ho che $Pr(C) = 0.35 = \frac{7}{20}$ e che $Pr(T) = 0.65 = \frac{13}{20}$

Metodo alternativo:

$Pr(T,C) \quad Pr(C,T) = 0.455$

Sono eventi disgiunti e per il 3° assioma si ha che $Pr(T,C) + Pr(C,T) = 0.455$

Posso vedere $Pr(T,C) = Pr(T) \cdot Pr(C)$, idem per $Pr(C,T)$

Quindi si ha che $Pr(T) \cdot Pr(C) + Pr(C) \cdot Pr(T) = 0.455$ quindi $2 \cdot Pr(T) \cdot Pr(C) = 0.455$

Da cui ho che $2 \cdot Pr(T) \cdot (1 - Pr(T)) = 0.455$. Impongo $x = Pr(T)$ e ho

$2x \cdot (1-x) = 0.455 \implies 2x \cdot (-2x^2) = 0.455$ risolvo l'equazione come *

$A = \{\text{esce } T\}$

$Pr(A) = \frac{13}{20}$

$A = \{\text{"esce T al primo lancio"}\} = \{(T, C), (T, T)\}$

$B = \{\text{"esce T al secondo lancio"}\} = \{(T, T), (C, T)\}$

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(B \cap A)}{Pr(A)} = \frac{Pr((T,T))}{Pr(A)} = \frac{\frac{13}{20} \cdot \frac{13}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{13}{20} = 0.65$$

$Pr(A) = \frac{13}{20}$

3. Giochiamo ancora e questa volta lanciamo la moneta 3 volte. Due su tre sono T, qual é la probabilitá che non siano tre T?

$A = \{\text{non esce } (T,T,T)\} = \{(T,T,C), (T,C,T), (T,C,C), (C,T,T), (C,T,C), (C,C,T), (C,C,C)\}$

$B = \{\text{eventi con almeno } (T,T,\cdot)\} = \{(T,T,T), (T,T,C), (T,C,T), (C,T,T)\}$

$\Omega_1 = \{T, C\} \quad \mathcal{A}_1 = P(\Omega)$

$\Omega_2 = \{T, C\} \quad \mathcal{A}_2 = P(\Omega)$

$\Omega_3 = \{T, C\} \quad \mathcal{A}_3 = P(\Omega)$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$

$= \{(T,T,T), (T,T,C), (T,C,T), (T,C,C), (C,T,T), (C,T,C), (C,C,T), (C,C,C)\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{\frac{3549}{8000}}{\frac{5746}{8000}} = \frac{3549}{8000} \cdot \frac{8000}{5746} = \frac{\cancel{3549}^{\cancel{273}\ 21}}{\cancel{5746}_{\cancel{442}\ 34}} = \frac{21}{34} \simeq 0{,}61764$$

$Pr(A \cap B) = \{(T,T,C), (T,C,T), (C,T,T)\}$

$$= Pr(T,T,C) + Pr(T,C,T) + Pr(C,T,T) = \frac{13 \cdot 13 \cdot 7}{8000} + \frac{13 \cdot 7 \cdot 13}{8000} + \frac{7 \cdot 13 \cdot 13}{8000} = \frac{3549}{8000}$$

$$Pr(B) = Pr(A \cap B) + Pr((T,T,T)) = \frac{3549}{8000} + \frac{13 \cdot 13 \cdot 13}{8000} = \frac{5746}{8000}$$

$Pr((T)) = \frac{13}{20}$

$Pr((C)) = \frac{7}{20}$