Esercizio Statistica 08/04/2019

Si consideri un dado non regolarmente equilibrato, in particolare la probabilità di ogni faccia del dado è:

1	2	3	4	5	6
0.22	0.18	0.26	0.15	0.12	0.07

Se esce 4 o 1 per noi è un successo. Tutti gli altri numeri costituiscono insuccesso. Come avete visto a lezione, questo problema rientra nella classe di problemi in cui un esperimento elementare con due possibili risultati, detti successo e insuccesso.
L'evento elementare è un lancio del dado.

$$X(\omega) = \begin{cases} p & \text{se } \omega = 1,4 \\ 1-p & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad X(\omega) = \begin{cases} 0.37 & \text{se } \omega = 1,4 \\ 0.63 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1- Qual'è la probabilità di successo p dell'evento elementare?

$$Pr(\{1\} \cup \{4\}) = Pr(\{1\}) + Pr(\{4\})$$
$$= 0.22 + 0.15 = \underline{0.37}$$

Consideriamo ora $N=18$ lanci del dado. Come avete visto si può modellare il problema con una variabile casuale discreta distribuita come una binomiale, $X \sim Bin(N,p)$
Si dice che una v.a. X si distribuisce secondo la distribuzione di probabilità binomiale di parametri (N,p) con $N \geq 1$ intero e $0 \leq p \leq 1$ se:

$$P(X=x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

per $x = 0,1,2,\dots$ e nulla altrimenti

2- Qual'è la probabilità di ottenere esattamente un successo (in $N=18$ lanci)?

$N=18$
$x=1$

$$Pr(\text{"esattamente un successo"}) = P(X=1) = \binom{18}{1} p^1 (1-p)^{18-1}$$
$$= \frac{18 \cdot 17!}{17! \cdot 1!} \cdot 0.37 \cdot (1-0.37)^{17}$$
$$= 18 \cdot 0.37 \cdot (0.63)^{17} = \underline{0.002583828}$$

Qual'è la probabilità di ottenere almeno 5 successi (in $N=18$ lanci)?

$$A = Pr(\text{"0 successi"}) = \binom{18}{0} p^0 (1-p)^{18-0} = 18! \cdot (0.63)^{18} = 0.0002444161$$

$$B = Pr(\text{"1 successo"}) = \binom{18}{1} p^1 (1-p)^{18-1} = 18 \cdot (0.37) \cdot (0.63)^{17} = 0.002583828$$

$$C = Pr(\text{"2 successi"}) = \binom{18}{2} p^2 (1-p)^{18-2} = \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot (0.37)^2 \cdot (0.63)^{16} = 0.01289863$$

$$D = Pr(\text{"3 successi"}) = \binom{18}{3} p^3 (1-p)^{18-3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} \cdot (0.37)^3 (0.63)^{15} = 0.04040207$$

$$E = Pr(\text{"4 successi"}) = \binom{18}{4} p^4 (1-p)^{18-4} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{24} \cdot (0.37)^4 \cdot (0.63)^{14} = 0.08898074$$

$$Pr(\text{"almeno 5 successi"}) = 1 - (A+B+C+D+E) = 1 - 0.1451097 = 0.8548903$$