Esercizio Statistica 11/04/2019

Ricordiamo che un esperimento che descrive una v.c $X \sim BiNe(r,p)$ ha le seguenti proprietà:

- l'esperimento consiste in x prove ripetute
- ogni prova ha solo due esiti possibili (che in generale indichiamo con successo e fallimento)
- la probabilità di successo p é la stessa per ogni prova
- le prove sono indipendenti
- l'esperimento continua finché non si osservano r successi, con r fissato

Ora si consideri il seguente "esperimento statistico".
Jane Doe si appresta a fare un esame di italiano per potersi iscrivere all'Università di Trento. L'esame consiste in una successione di domande, tutte della stessa difficoltà. Appena Jane totalizza 17 risposte esatte, l'esame é superato (ovviamente il voto dipenderá dal tempo impiegato, ma questo non c'interessa). Jane ha fatto molte simulazioni d'esame e sa che il suo tasso di risposte esatte é del 72.5 %

1- Si può scrivere questo esperimento con una variabile casuale distribuita come una Binomiale Negativa?

$X \sim BiNe(r,p)$

TRUE

2- Quali sono i parametri (r,p) della distribuzione?

$X \sim BiNe(r,p)$

$r = 17 \longrightarrow$ successi

$p = 0.725 \longrightarrow$ probabilità di passare

$X \sim BiNe(17, 0.725)$

Ora si consideri $X \sim BiNe(r, p)$ con $r = 17$ e $p = 0.499$. Qual'è la probabilità che Jane superi l'esame dopo 17 domande?

$$X \sim BiNe(17, 0.499)$$

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$P(X = 17) = \binom{16}{16} p^{17} (1-p)^{17-17}$$

$$= \frac{\cancel{16!}}{0! \cdot \cancel{16!}} \cdot (0.499)^{17} (1-0.499)^0$$

$$= (0.499)^{17} = \underline{0.0000073741 04}$$

4- Qual'è la probabilità che Jane superi l'esame dopo 25 domande?

$$X \sim BiNe(25, 0.499)$$

$$P(X = 25) = \binom{24}{16} p^{17} (1-p)^{25-17}$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot 23 \cdot \overset{11}{\cancel{22}} \cdot \cancel{21} \cdot \overset{4}{\cancel{20}} \cdot 19 \cdot \overset{3}{\cancel{18}} \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{(\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1) \cdot \cancel{16!}} \cdot (0.499)^{17} \cdot (1-0.499)^8$$

$$= 3 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot (0.499)^{17} \cdot (0.501)^8 = \underline{0.02152666}$$

5- Calcolare $P(X \leq 20.05)$?

$$Pr(z \geq n) = Pr(X \leq x)$$

$$= Pr(X \leq 20.05)$$

1) $Z \sim Bin(20.05, 0.499)$ $\longrightarrow$ $1 - \sum_{k=0}^{16} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2) $$Pr(X \leq 20.05) = \sum_{x=17}^{20} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$= \binom{16}{16} (0.499)^{17} \cdot (0.501)^0 + \binom{17}{16} \cdot (0.499)^{17} \cdot (0.501)^1$$

$$+ \binom{18}{16} (0.499)^{17} \cdot (0.501)^2 + \binom{19}{16} (0.499)^{17} \cdot (0.501)^3$$

$$= 0.000007374104 + 0.00006280525 +$$

$$0.0002831889 + 0.0008985582$$

$$= \underline{0.001251926}$$