Esercizio Statistica 16/04/2019

Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

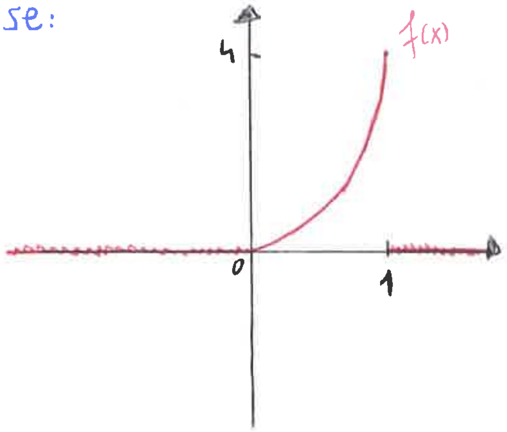
dove $c > 0$ é una costante.

1 - Funzione di Densità:

Si determini $c > 0$ in modo che $f(x)$ sia la funzione di densità di una variabile casuale X.

Una funzione $f(x)$ é una densità se e solo se:

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$
2. Deve essere integrabile
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



1 - Vero

2 - Vero

3 - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} cx^3\,dx = \int_{-\infty}^{0} cx^3\,dx + \int_{0}^{1} cx^3\,dx + \int_{1}^{+\infty} cx^3\,dx$

$$= 0 + \left.\frac{cx^4}{4}\right]_0^1 + 0$$

$$= \left.\frac{c}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{c}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\frac{c}{4} = 1 \implies c = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2 - Valor Medio

D'ora in poi, sia X una v.c con densità $f(x)$, in cui si usa la costante c trovata sopra.

Determinare il valor medio (anche detto aspettazione o valore atteso) di X.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3\, dx = \int_0^1 4x^5\, dx = \frac{4}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{4}{5} \simeq 0.8 \leftarrow \mu$$

3 - Varianza:

Determinare la varianza di X

$$= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \int_0^1 (x - \mathbb{E}(X)^2)\, f(x)\, dx \longrightarrow \sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

$\mathbb{E}(X) = \mu$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 4x^3\, dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{16}{25} - \frac{8}{5}x\right) 4x^3\, dx$$

$$= \int_0^1 4x^5 - \frac{32}{5}x^4 + \frac{64}{25}x^3\, dx$$

$$= \frac{4}{6}x^6 - \frac{32}{25}x^5 + \frac{64}{100}x^4\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}x^6 - \frac{32}{25}x^5 + \frac{16}{25}x^4\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{32}{25} + \frac{16}{25} = \frac{50 - 96 + 48}{75} = \frac{98-96}{75} = \frac{2}{75} \leftarrow \sigma^2$$

$= \mathrm{Var}(X)$

4 - Determinare la probabilità $P(X \le 0.29)$

$$\Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

$$\Pr(X \le 0.29) = \int_{-\infty}^{0.29} f(x)\, dx = \int_0^{0.29} 4x^3\, dx = x^4\Big]_0^{0.29} = (0.29)^4 = 0.00707281$$