



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

Técnicas de simulación y discretización para la valoración de opciones barrera

por

Gonzalo A. Bordón

Presentado ante la **FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA,
FÍSICA Y COMPUTACIÓN** como parte de los requerimientos para la ob-
tención del grado de Licenciatura en Ciencias de la Computación de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Enero, 2026

Directores: Dra. Noemí Patricia Kisbye



Generación y diseño de herramientas para el análisis de retornos de carteras de
inversión artificiales y reales © 2025 by Diego Nicolas Gimenez Irusta is
licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

Certifico que el trabajo incluido en este documento es el resultado de tareas de investigación originales y que no ha sido presentado para optar a un título en ninguna otra Universidad o Institución.

Gonzalo A. Bordón

Agradecimientos

Completar: COMPLETAR

Resumen

Esta tesis presenta métodos para la valoración y discretización de opciones barrera, derivados financieros cuyo pago depende de si el precio del activo subyacente cruza un nivel de barrera predeterminado durante la vida de la opción. Las opciones barrera son ampliamente utilizadas en los mercados financieros para la gestión de riesgos y estrategias de inversión debido a su menor costo en comparación con las opciones estándar.

Los objetivos principales de este trabajo son analizar e implementar métodos para la valoración de opciones barrera, con énfasis particular en las técnicas de discretización que capturan con precisión la condición de barrera. La metodología incluye: (1) el modelo continuo de Black-Scholes, que asume un comportamiento lognormal del precio del activo, permitiendo fórmulas cerradas para opciones barrera europeas y sentando las bases para simulaciones de Monte Carlo en el caso americano; (2) modelos discretos como el binomial y trinomial que analizan el conjunto completo de trayectorias posibles, abordando el problema de la subestimación o sobreestimación cuando la barrera no coincide con los nodos del árbol mediante estrategias con mallas adaptativas; y (3) la replicación estática, una técnica para cubrir opciones barrera mediante la construcción de un portafolio de opciones vanillas que reproduzca el mismo payoff bajo ciertas condiciones. Nos enfocamos tanto en opciones barrera de estilo europeo como americano.

Los resultados demuestran la efectividad de los esquemas de discretización propuestos para lograr valoraciones precisas manteniendo la eficiencia computacional. Comparamos el rendimiento de diferentes enfoques numéricos y analizamos sus propiedades de convergencia. El trabajo contribuye a la comprensión de métodos numéricos para la valoración de opciones exóticas y proporciona herramientas prácticas para la evaluación de riesgos financieros.

Palabras clave: opciones barrera, valoración de opciones, modelo de Black-Scholes, árboles binomiales y trinomiales, replicación estática, mallas adaptativas, derivados financieros.

Abstract

This thesis presents methods for the valuation and discretization of barrier options, financial derivatives whose payoff depends on whether the underlying asset price crosses a predetermined barrier level during the option's lifetime. Barrier options are widely used in financial markets for risk management and investment strategies due to their lower cost compared to standard options.

The main objectives of this work are to analyze and implement methods for pricing barrier options, with particular emphasis on discretization techniques that accurately capture the barrier condition. The methodology includes: (1) the continuous Black-Scholes model, which assumes a lognormal behavior of the asset price, allowing closed-form formulas for European barrier options and providing the foundation for Monte Carlo simulations in the American case; (2) discrete models such as binomial and trinomial trees that analyze the complete set of possible trajectories, addressing the problem of underestimation or overestimation when the barrier does not align with tree nodes through strategies using adaptive meshes; and (3) static replication, a technique for hedging barrier options by constructing a portfolio of vanilla options that reproduces the same payoff under certain conditions. We focus on both European and American-style barrier options.

The results demonstrate the effectiveness of the proposed discretization schemes in achieving accurate valuations while maintaining computational efficiency. We compare the performance of different numerical approaches and analyze their convergence properties. The work contributes to the understanding of numerical methods for exotic options pricing and provides practical tools for financial risk assessment.

Keywords: barrier options, option pricing, Black-Scholes model, binomial and trinomial trees, static replication, adaptive meshes, financial derivatives.

Índice general

| | |
|---|----------|
| Agradecimientos | I |
| Resumen | III |
| Abstract | IV |
| Glosario | V |
| Índice de figuras | XI |
| Índice de código | XIV |
| 1. Introducción | 2 |
| 1.1. Motivación | 2 |
| 1.2. El Problema de Valoración | 3 |
| 1.2.1. Fórmulas Analíticas y sus Limitaciones | 3 |
| 1.2.2. Desafíos Computacionales | 3 |
| 1.3. Objetivos del Trabajo | 3 |
| 1.3.1. Objetivo General | 3 |
| 1.3.2. Objetivos Específicos | 4 |
| 1.4. Contribuciones del Trabajo | 4 |
| 1.5. Organización del Trabajo | 5 |
| 2. Marco Teórico | 6 |
| 2.1. Mercados de Derivados | 6 |
| 2.1.1. Características de los Mercados de Derivados | 6 |
| 2.1.2. Tipos de Derivados | 6 |
| 2.2. Opciones Financieras | 7 |
| 2.2.1. Opciones Call y Put | 7 |
| 2.2.2. Opciones Europeas vs Americanas | 7 |
| 2.2.3. Opciones Exóticas | 7 |
| 2.3. Opciones Barrera | 8 |
| 2.3.1. Clasificación de Opciones Barrera | 8 |
| 2.3.2. Payoffs de Opciones Barrera | 8 |
| 2.3.3. Relaciones de Paridad | 9 |
| 2.3.4. Rebates | 9 |
| 2.3.5. Ventajas de las Opciones Barrera | 9 |
| 2.4. El Modelo de Black-Scholes | 9 |
| 2.4.1. Supuestos del Modelo | 10 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 2.4.2. | Ecuación Diferencial de Black-Scholes | 10 |
| 2.4.3. | Medida Neutral al Riesgo | 10 |
| 2.4.4. | Fórmula de Black-Scholes para Opciones Vanilla | 11 |
| 2.4.5. | Las Griegas | 11 |
| 2.4.6. | Limitaciones del Modelo | 12 |
| 2.5. | Extensiones del Modelo Black-Scholes | 12 |
| 3. | Métodos de Valoración | 13 |
| 3.1. | Método 1: Fórmulas Analíticas de Reiner y Rubinstein | 13 |
| 3.1.1. | Marco Metodológico de Valoración | 13 |
| 3.1.2. | Términos de Valoración | 15 |
| 3.1.3. | Interpretación de los Términos de Valoración | 15 |
| 3.1.4. | Fórmulas Exactas: Construcción mediante Términos de Valoración | 17 |
| 3.2. | Método 2: Modelo de Malla Adaptativa (AMM) | 18 |
| 3.2.1. | Fundamentos: Árboles Trinomiales | 18 |
| 3.2.2. | Análisis de Errores en Modelos de Redes | 19 |
| 3.2.3. | Principio del Modelo de Malla Adaptativa | 20 |
| 3.2.4. | AMM para Opciones Vanilla | 21 |
| 3.2.5. | AMM para Opciones Barrera | 23 |
| 3.2.6. | AMM para el Cálculo de Griegas | 25 |
| 3.2.7. | Ventajas del AMM | 27 |
| 3.2.8. | Consistencia Matemática | 27 |
| 3.3. | Método 3: Replicación Estática | 28 |
| 3.3.1. | Concepto de Replicación Estática | 28 |
| 3.3.2. | Metodología de Derman-Ergener-Kani | 28 |
| 3.3.3. | Construcción del Portafolio | 28 |
| 3.4. | Método 4: Monte Carlo para Opciones Americanas | 28 |
| 3.4.1. | Desafío de las Opciones Americanas | 28 |
| 3.4.2. | Simulación de Monte Carlo | 28 |
| 3.4.3. | Método de Longstaff-Schwartz (LSM) | 28 |
| 4. | Implementación - Fórmulas de Reiner y Rubinstein | 29 |
| 4.1. | Descripción de la Implementación | 29 |
| 4.1.1. | Cálculo de Variables Auxiliares | 29 |
| 4.1.2. | Cálculo de Términos de Valoración | 29 |
| 4.1.3. | Construcción de Fórmulas para Cada Tipo | 29 |
| 4.2. | Detalles de Implementación | 29 |
| 4.2.1. | Código Relevante | 29 |
| 4.3. | Cálculo de Griegas | 29 |
| 4.4. | Validación | 29 |
| 4.4.1. | Verificación de Relaciones de Paridad | 29 |
| 4.4.2. | Verificación de Límites Asintóticos | 29 |
| 4.4.3. | Ejemplos Numéricos | 29 |
| 5. | Implementación - Árboles Trinomiales con Mallas Adaptativas | 30 |
| 5.1. | Descripción del Algoritmo | 30 |
| 5.1.1. | Construcción del Árbol Trinomial | 30 |
| 5.1.2. | Adaptación de la Malla | 30 |
| 5.1.3. | Valoración Backward | 30 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 5.2. | Detalles de Implementación | 30 |
| 5.2.1. | Estructura de Datos | 30 |
| 5.2.2. | Código Relevante | 30 |
| 5.3. | Validación | 30 |
| 5.3.1. | Comparación con Rubinstein-Reiner | 30 |
| 5.3.2. | Análisis de Convergencia | 30 |
| 5.3.3. | Ejemplos Numéricos | 30 |
| 6. | Implementación - Replicación Estática y Monte Carlo | 31 |
| 6.1. | Replicación Estática | 32 |
| 6.1.1. | Descripción del Algoritmo | 32 |
| 6.1.2. | Detalles de Implementación | 32 |
| 6.1.3. | Validación del Portafolio Replicante | 32 |
| 6.2. | Monte Carlo para Opciones Americanas | 32 |
| 6.2.1. | Descripción del Algoritmo | 32 |
| 6.2.2. | Detalles de Implementación | 32 |
| 6.2.3. | Validación de Monte Carlo | 32 |
| 6.2.4. | Técnicas de Reducción de Varianza | 32 |
| 7. | Resultados y Comparación | 33 |
| 7.1. | Diseño de Experimentos | 34 |
| 7.1.1. | Casos de Prueba para Opciones Europeas | 34 |
| 7.1.2. | Casos de Prueba para Opciones Americanas | 34 |
| 7.1.3. | Métricas de Evaluación | 34 |
| 7.2. | Resultados para Opciones Europeas | 34 |
| 7.2.1. | Tablas Comparativas | 34 |
| 7.2.2. | Análisis de Precisión | 34 |
| 7.2.3. | Análisis de Tiempo Computacional | 34 |
| 7.2.4. | Comportamiento Cerca de la Barrera | 34 |
| 7.2.5. | Gráficos Comparativos | 34 |
| 7.3. | Resultados para Opciones Americanas | 34 |
| 7.3.1. | Tablas de Resultados | 34 |
| 7.3.2. | Análisis de Convergencia | 34 |
| 7.3.3. | Comparación con Europeas | 34 |
| 7.4. | Comparación Global de Métodos | 34 |
| 7.4.1. | Tabla Resumen | 34 |
| 7.4.2. | Análisis de Casos de Uso Óptimos | 34 |
| 7.4.3. | Recomendaciones Prácticas | 34 |
| 7.5. | Discusión | 34 |
| 7.5.1. | Ventajas y Desventajas Observadas | 34 |
| 7.5.2. | Limitaciones del Estudio | 34 |
| 8. | Conclusiones y Trabajo Futuro | 35 |
| 8.1. | Resumen de Resultados | 35 |
| 8.2. | Conclusiones Principales | 35 |
| 8.2.1. | Sobre los Métodos para Opciones Europeas | 35 |
| 8.2.2. | Sobre Monte Carlo para Opciones Americanas | 35 |
| 8.2.3. | Comparación Global | 35 |
| 8.3. | Limitaciones del Trabajo | 35 |
| 8.4. | Trabajo Futuro | 35 |

ÍNDICE GENERAL

| | |
|--|-----------|
| 8.4.1. Extensiones del Modelo | 35 |
| 8.4.2. Extensiones de los Métodos | 35 |
| 8.4.3. Aplicaciones Prácticas | 35 |
| 8.4.4. Validación con Datos Reales | 35 |
| Bibliografía | 37 |

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 3.1. | Estructura de un árbol trinomial con 3 pasos temporales. Desde cada nodo, el precio puede moverse hacia arriba (multiplicado por $u = 1,15$, verde), mantenerse (multiplicado por $m = 1$, azul), o bajar (multiplicado por $d = 1/u \approx 0,870$, rojo). Las probabilidades neutrales al riesgo son $p_u = 0,25$, $p_m = 0,50$, $p_d = 0,25$. El árbol es recombinante: los nodos que alcanzan el mismo precio se fusionan. | 19 |
| 3.2. | Detalle del efecto par-impar en el modelo binomial. Los puntos azules (N par) sistemáticamente tienen mayor error que los puntos rojos (N impar). Las líneas punteadas muestran las tendencias separadas para cada caso. Esta oscilación es causada por el error de no linealidad y es eliminada por el AMM. | 20 |
| 3.3. | Concepto del Modelo de Malla Adaptativa (AMM). Se muestra un árbol trinomial base (nodos grises, conexiones grises) que constituye la malla gruesa con pasos de precio h y tiempo k . Sobre este árbol se injerta una malla fina (cuadrados verdes pequeños) con pasos $h/2$ y $k/4$ únicamente en la región crítica (rectángulo amarillo). Esta estrategia concentra la resolución computacional donde más se necesita, logrando alta precisión con costo mínimo adicional ($< 1\%$). | 21 |
| 3.4. | Estructura del AMM para opciones vanilla. Se muestra un árbol trinomial (nodos grises con conexiones grises) que constituye la malla gruesa. Sobre este árbol se injerta una malla fina (cuadrados verdes pequeños) con pasos $h/2$ y $k/4$ únicamente en la región crítica (rectángulo amarillo): temporal $[T-k, T]$ y espacial $[K-2h, K+2h]$. La línea azul punteada marca el strike K donde ocurre la mayor no linealidad al vencimiento. Esta estrategia concentra la resolución donde más se necesita: alrededor del precio de ejercicio al vencimiento. | 22 |
| 3.5. | Estructura del AMM para opciones barrera. Mostrar el árbol completo con una banda vertical de malla fina a lo largo de toda la dimensión temporal, centrada en la barrera H . La barrera debe aparecer como una línea horizontal clara. Indicar la región $[H-2h, H+2h]$ con sombreado o color. Mostrar S_0 cerca de H para ilustrar el problema del límite. Incluir flechas mostrando el flujo de información de malla gruesa a malla fina. | 24 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.6. | Ramificación cuadrinomial para el cálculo de griegas mediante diferencias finitas. Se muestra un árbol trinomial base (nodos grises, conexiones negras gruesas) con nodos adicionales en $t = 0$ ubicados en $S_0 + \varepsilon$ (verde) y $S_0 - \varepsilon$ (rojo), donde $\varepsilon = h/4$ es una perturbación pequeña. Las líneas sólidas grises representan ramificación cuadrinomial (4 ramas) desde los nodos perturbados y los nodos extremos en $t = k/4$, permitiendo calcular simultáneamente Delta y Gamma con alta precisión. | 26 |
| 3.7. | Gráfico de dispersión mostrando RMSE (eje Y, escala logarítmica) vs Tiempo de ejecución (eje X, escala logarítmica). Cada punto representa un modelo de la tabla anterior. Usar diferentes colores/símbolos para Binomial, Trinomial, AMM-1, AMM-2. Mostrar claramente cómo AMM logra menor error con tiempo similar al trinomial estándar. Incluir líneas de tendencia o regiones sombreadas para destacar la “frontera de eficiencia”. | 27 |

Índice de códigos

ÍNDICE DE CÓDIGOS

Capítulo 1

Introducción

Las opciones barrera son instrumentos derivados ampliamente utilizados en los mercados financieros modernos. Su popularidad se debe principalmente a dos factores: son significativamente más baratas que las opciones vanilla equivalentes, y permiten a los inversores y empresas cubrir riesgos específicos de manera más eficiente.

A diferencia de las opciones europeas estándar, cuyo valor depende únicamente del precio del activo subyacente al vencimiento, las opciones barrera tienen una característica adicional: su existencia depende de si el precio del activo cruza o no un nivel predeterminado (la barrera) durante la vida del contrato. Esta dependencia de la trayectoria completa del precio, y no solo de su valor final, introduce complejidades significativas en su valoración.

1.1. Motivación

Las opciones barrera se utilizan en diversos contextos financieros:

- **Gestión de riesgos corporativos:** Una empresa exportadora puede usar una opción barrera para protegerse contra movimientos adversos del tipo de cambio, pero solo si estos superan un umbral crítico para su operación.
- **Productos estructurados:** Los bancos de inversión incorporan opciones barrera en productos estructurados para ofrecer perfiles de riesgo-retorno específicos a menor costo.
- **Especulación dirigida:** Los traders pueden expresar visiones de mercado sofisticadas (por ejemplo, 'el activo subirá pero no superará cierto nivel') con menor capital que usando opciones vanilla.
- **Optimización de costos:** Las opciones barrera permiten obtener cobertura a un costo significativamente menor que las opciones estándar, lo que las hace atractivas para empresas con presupuestos limitados.

1.2. El Problema de Valoración

1.2.1. Fórmulas Analíticas y sus Limitaciones

Bajo el modelo de Black-Scholes con monitoreo continuo de la barrera, existen fórmulas cerradas para valorar opciones barrera europeas, desarrolladas por Reiner y Rubinstein (1991). Estas fórmulas son matemáticamente elegantes y computacionalmente eficientes.

Sin embargo, presentan limitaciones importantes en la práctica:

1. **Monitoreo discreto vs continuo:** En la realidad, las barreras se monitorean en momentos discretos (diariamente, o incluso solo al cierre del mercado), no continuamente. Esto puede generar diferencias significativas en el precio, especialmente para barreras cercanas al precio actual del activo.
2. **Volatilidad constante:** El supuesto de volatilidad constante es particularmente problemático para opciones de largo plazo o en mercados con alta variabilidad de la volatilidad.
3. **Salto en el precio:** El modelo no considera saltos discontinuos en el precio del subyacente, que pueden hacer que el precio 'salte' sobre la barrera sin tocarla, afectando significativamente la valoración.
4. **Barreras complejas:** Para barreras dependientes del tiempo, barreras dobles, o barreras parciales (monitoreadas solo en ciertos períodos), no existen fórmulas cerradas.

1.2.2. Desafíos Computacionales

Los métodos numéricos para valorar opciones barrera enfrentan desafíos específicos:

- **Sensibilidad cerca de la barrera:** El valor de la opción y sus derivadas (las 'griegas') cambian drásticamente cuando el precio del subyacente se aproxima a la barrera. Esto requiere una resolución muy fina en esa región.
- **Discontinuidades:** En el momento en que se toca la barrera, el valor de una opción knock-out cae abruptamente a cero (o al valor del rebate). Esta discontinuidad es difícil de capturar numéricamente.
- **Trade-off precisión-velocidad:** Métodos muy precisos pueden ser computacionalmente costosos, mientras que métodos rápidos pueden carecer de la precisión necesaria, especialmente para el cálculo de sensibilidades.

1.3. Objetivos del Trabajo

1.3.1. Objetivo General

Comparar sistemáticamente diferentes métodos numéricos para la valoración de opciones barrera europeas, evaluando su precisión, eficiencia computacional, y aplicabilidad en diferentes escenarios.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. **Estudiar el modelo de Black-Scholes:** Analizar las fórmulas cerradas de Reiner y Rubinstein para opciones barrera europeas, comprendiendo su derivación y limitaciones.
2. **Implementar métodos numéricos:** Desarrollar implementaciones de:
 - Mallas adaptativas (Adaptive Mesh Model de Figlewski-Gao)
 - Simulación de Monte Carlo con técnicas de reducción de varianza
3. **Validar las implementaciones:** Comparar los resultados numéricos con las fórmulas analíticas de Reiner-Rubinstein en casos donde estas son aplicables.
4. **Analizar el desempeño:** Evaluar cada método en términos de:
 - Precisión absoluta y relativa
 - Tiempo de cómputo
 - Estabilidad numérica
 - Capacidad para calcular sensibilidades (griegas)
5. **Identificar casos de uso óptimos:** Determinar qué método es más apropiado según:
 - Tipo de opción barrera (knock-in, knock-out, up, down)
 - Posición relativa del precio actual respecto a la barrera
 - Tiempo al vencimiento
 - Volatilidad del subyacente
 - Requerimientos de precisión
6. **Proporcionar recomendaciones prácticas:** Ofrecer guías para la selección del método más apropiado en diferentes contextos de aplicación.

1.4. Contribuciones del Trabajo

Este trabajo contribuye a la literatura y práctica de valoración de opciones barrera en los siguientes aspectos:

1. **Comparación sistemática:** Proporciona una comparación rigurosa y sistemática de múltiples métodos numéricos bajo un marco común de evaluación.
2. **Implementaciones validadas:** Ofrece implementaciones cuidadosamente validadas de métodos avanzados como mallas adaptativas, que pueden servir como referencia para futuros trabajos.
3. **Guías prácticas:** Proporciona recomendaciones concretas sobre qué método usar en diferentes situaciones, útiles tanto para académicos como para profesionales.
4. **Análisis de sensibilidad:** Estudia cómo el desempeño de cada método varía con los parámetros del problema, identificando regiones donde ciertos métodos son superiores.

1.5. Organización del Trabajo

Los capítulos de este trabajo se organizan de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos financieros necesarios para comprender la valoración de opciones. Se introducen los mercados de derivados, los diferentes tipos de opciones (europeas, americanas, exóticas), y en particular las opciones barrera. Se desarrolla el modelo de Black-Scholes estableciendo el marco teórico fundamental.

El Capítulo 3 describe los cuatro métodos de valoración que serán implementados y comparados: las fórmulas analíticas de Reiner y Rubinstein, árboles trinomiales con mallas adaptativas, replicación estática mediante portafolios, y simulación de Monte Carlo con el método de Longstaff-Schwartz para opciones americanas. Para cada método se explican sus principios básicos, ventajas y desventajas.

Los Capítulos 4, 5 y 6 documentan la implementación de cada uno de los métodos. Se detallan los algoritmos, criterios de refinamiento, técnicas de reducción de varianza, y detalles de implementación. Se presentan resultados de validación comparando con fórmulas analíticas cuando es posible.

En el Capítulo 7 se presenta una comparación sistemática de todos los métodos implementados. Se diseñan experimentos numéricos con diferentes parámetros (precio del subyacente, strike, barrera, volatilidad, tiempo al vencimiento) y se analizan los resultados en términos de precisión, tiempo de cómputo, y estabilidad. Se identifican los casos de uso óptimos para cada método.

Finalmente, las conclusiones generales son presentadas en el Capítulo 8, donde se resumen los resultados principales del trabajo, se presentan las conclusiones sobre qué método es más apropiado en diferentes situaciones, se discuten las limitaciones del estudio, y se proponen direcciones para trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

Este capítulo presenta los fundamentos teóricos necesarios para comprender la valoración de opciones barrera. Se introducen los conceptos básicos de mercados de derivados, los diferentes tipos de opciones, y el modelo de Black-Scholes que constituye la base teórica para los métodos de valoración que se desarrollarán en capítulos posteriores.

2.1. Mercados de Derivados

Los derivados financieros son instrumentos cuyo valor depende (se deriva) del valor de otro activo, llamado activo subyacente. Los subyacentes más comunes incluyen acciones, índices bursátiles, divisas, tasas de interés, y commodities.

2.1.1. Características de los Mercados de Derivados

Los mercados de derivados cumplen varias funciones económicas importantes:

- **Gestión de riesgos:** Permiten a empresas e inversores transferir riesgos no deseados a otros participantes dispuestos a asumirlos.
- **Descubrimiento de precios:** Los precios de los derivados reflejan las expectativas del mercado sobre el comportamiento futuro de los activos subyacentes.
- **Apalancamiento:** Permiten tomar posiciones significativas con una inversión inicial relativamente pequeña.
- **Eficiencia de mercado:** Facilitan el arbitraje, contribuyendo a la eficiencia en la formación de precios.

2.1.2. Tipos de Derivados

Los principales tipos de derivados son:

- **Forwards:** Contratos a medida entre dos partes para comprar o vender un activo en una fecha futura a un precio acordado hoy.

- **Futuros:** Similares a los forwards pero estandarizados y negociados en bolsas organizadas.
- **Swaps:** Acuerdos para intercambiar flujos de efectivo futuros según reglas predeterminadas.
- **Opciones:** Contratos que otorgan el derecho (pero no la obligación) de comprar o vender un activo a un precio determinado.

2.2. Opciones Financieras

Una opción es un contrato que otorga a su tenedor el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción call) o vender (opción put) un activo subyacente a un precio predeterminado (precio de ejercicio o strike) en o antes de una fecha específica (fecha de vencimiento).

2.2.1. Opciones Call y Put

Opción Call: Otorga el derecho de comprar el activo subyacente al precio de ejercicio K . El payoff al vencimiento es:

$$\text{Payoff}_{\text{Call}} = \max(S_T - K, 0) \quad (2.1)$$

donde S_T es el precio del subyacente al vencimiento.

Opción Put: Otorga el derecho de vender el activo subyacente al precio de ejercicio K . El payoff al vencimiento es:

$$\text{Payoff}_{\text{Put}} = \max(K - S_T, 0) \quad (2.2)$$

2.2.2. Opciones Europeas vs Americanas

Opciones Europeas: Solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento. Son más simples de valorar analíticamente.

Opciones Americanas: Pueden ejercerse en cualquier momento hasta el vencimiento. Esta flexibilidad adicional las hace más valiosas que sus contrapartes europeas, pero también más difíciles de valorar.

2.2.3. Opciones Exóticas

Las opciones exóticas son aquellas cuyas características difieren de las opciones vanilla (europeas o americanas estándar). Incluyen:

- **Opciones Barrera:** Su existencia depende de si el precio del subyacente cruza un nivel predeterminado.
- **Opciones Asiáticas:** Su payoff depende del precio promedio del subyacente durante cierto período.
- **Opciones Lookback:** Permiten al tenedor 'mirar hacia atrás' y ejercer al precio más favorable observado.
- **Opciones Digitales:** Pagan una cantidad fija si se cumple cierta condición.

2.3. Opciones Barrera

Las opciones barrera son el foco principal de este trabajo. Su característica distintiva es que su existencia depende de si el precio del activo subyacente alcanza o no un nivel de precio predeterminado (la barrera H) durante la vida de la opción.

2.3.1. Clasificación de Opciones Barrera

Las opciones barrera se clasifican según dos criterios:

1. Según el efecto de tocar la barrera:

- **Knock-In:** La opción comienza a existir (se activa) solo si se toca la barrera.
- **Knock-Out:** La opción deja de existir (se extingue) si se toca la barrera.

2. Según la posición de la barrera:

- **Up:** La barrera H está por encima del precio inicial del subyacente ($H > S_0$).
- **Down:** La barrera H está por debajo del precio inicial del subyacente ($H < S_0$).

Combinando estos criterios obtenemos ocho tipos básicos de opciones barrera:

- Down-and-In Call (DIC)
- Down-and-Out Call (DOC)
- Up-and-In Call (UIC)
- Up-and-Out Call (UOC)
- Down-and-In Put (DIP)
- Down-and-Out Put (DOP)
- Up-and-In Put (UIP)
- Up-and-Out Put (UOP)

2.3.2. Payoffs de Opciones Barrera

El payoff de una opción barrera depende tanto del precio final del subyacente como de si la barrera fue tocada durante la vida de la opción.

Para una **Down-and-Out Call**:

$$\text{Payoff}_{\text{DOC}} = \max(S_T - K, 0) \cdot \mathbb{I}_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > H\}} \quad (2.3)$$

Para una **Down-and-In Call**:

$$\text{Payoff}_{\text{DIC}} = \max(S_T - K, 0) \cdot \mathbb{I}_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t \leq H\}} \quad (2.4)$$

donde \mathbb{I}_A es la función indicadora que vale 1 si se cumple la condición A y 0 en caso contrario.

2.3.3. Relaciones de Paridad

Existe una relación fundamental entre opciones knock-in y knock-out del mismo tipo:

$$\text{Opción Vanilla} = \text{Opción Knock-In} + \text{Opción Knock-Out} \quad (2.5)$$

Por ejemplo:

$$C_{\text{europea}} = C_{\text{DI}} + C_{\text{DO}} \quad (2.6)$$

Esta relación es útil para validar implementaciones y para valorar opciones knock-in a partir de opciones knock-out (o viceversa).

2.3.4. Rebates

Muchas opciones barrera incluyen un **rebate** (reembolso) R , que es una cantidad fija pagada al tenedor en ciertas circunstancias:

- En opciones **knock-out**: El rebate se paga cuando se toca la barrera (momento en que la opción se extingue).
- En opciones **knock-in**: El rebate se paga al vencimiento si la barrera nunca fue tocada (y por tanto la opción nunca se activó).

2.3.5. Ventajas de las Opciones Barrera

Las opciones barrera son significativamente más baratas que las opciones vanilla equivalentes porque:

- Las opciones knock-out pueden extinguirse antes del vencimiento, reduciendo el riesgo para el vendedor.
- Las opciones knock-in solo comienzan a existir bajo ciertas condiciones, también reduciendo el riesgo.

Esta reducción de costo las hace atractivas para:

- Empresas que buscan cobertura a menor costo
- Inversores con visiones específicas sobre el comportamiento del mercado
- Estructuración de productos financieros complejos

2.4. El Modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes, desarrollado por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton en 1973, revolucionó la valoración de opciones y sentó las bases de la ingeniería financiera moderna.

2.4.1. Supuestos del Modelo

El modelo se basa en los siguientes supuestos:

1. El precio del activo subyacente S_t sigue un Movimiento Browniano Geométrico:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.7)$$

donde μ es la tasa de retorno esperada, σ es la volatilidad, y W_t es un proceso de Wiener.

2. Los mercados son completos y no hay fricciones:
 - No hay costos de transacción
 - Es posible tomar posiciones cortas sin restricciones
 - Los activos son perfectamente divisibles
 - No hay oportunidades de arbitraje
3. La tasa de interés libre de riesgo r es constante y conocida.
4. La volatilidad σ es constante y conocida.
5. El activo subyacente no paga dividendos (o se puede extender para incluir una tasa de dividendos constante δ).
6. Las transacciones ocurren de manera continua en el tiempo.

2.4.2. Ecuación Diferencial de Black-Scholes

Bajo estos supuestos, el precio de cualquier derivado $V(S, t)$ que depende del precio del subyacente S y del tiempo t debe satisfacer la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.8)$$

Esta ecuación se resuelve sujeta a condiciones de borde apropiadas que dependen del tipo específico de derivado.

2.4.3. Medida Neutral al Riesgo

Un concepto fundamental del modelo es la **medida neutral al riesgo**. Bajo esta medida de probabilidad:

- El precio descontado de cualquier activo es una martingala
- El retorno esperado de todos los activos es la tasa libre de riesgo r
- El precio de un derivado es el valor esperado descontado de su payoff

Bajo la medida neutral al riesgo, el proceso del precio del subyacente se convierte en:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.9)$$

donde $W_t^{\mathbb{Q}}$ es un proceso de Wiener bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q} .

2.4.4. Fórmula de Black-Scholes para Opciones Vanilla

Para una opción call europea con precio de ejercicio K y vencimiento T , la fórmula de Black-Scholes es:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.10)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (2.11)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (2.12)$$

y $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de la normal estándar.

Para una opción put europea:

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2.13)$$

2.4.5. Las Griegas

Las **griegas** son las derivadas parciales del precio de la opción respecto a sus parámetros. Son fundamentales para la gestión de riesgos:

- **Delta** (Δ): Sensibilidad al precio del subyacente

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (2.14)$$

- **Gamma** (Γ): Tasa de cambio del delta

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (2.15)$$

- **Vega** (\mathcal{V}): Sensibilidad a la volatilidad

$$\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \quad (2.16)$$

- **Theta** (Θ): Sensibilidad al paso del tiempo

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.17)$$

- **Rho** (ρ): Sensibilidad a la tasa de interés

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.18)$$

2.4.6. Limitaciones del Modelo

A pesar de su elegancia matemática y utilidad práctica, el modelo de Black-Scholes tiene limitaciones importantes:

- **Volatilidad constante:** En la realidad, la volatilidad varía con el tiempo y con el nivel del precio del subyacente (volatility smile/skew).
- **Distribución lognormal:** Los retornos reales exhiben colas más pesadas que la distribución normal (fat tails).
- **Salto:** El modelo no captura movimientos discontinuos en el precio del subyacente.
- **Fricciones de mercado:** En la práctica existen costos de transacción, restricciones a las ventas en corto, y activos no perfectamente divisibles.
- **Tasa de interés constante:** Las tasas de interés varían en el tiempo, especialmente para opciones de largo plazo.

A pesar de estas limitaciones, el modelo de Black-Scholes sigue siendo la base conceptual para la valoración de opciones y proporciona un marco de referencia contra el cual se comparan otros modelos más sofisticados.

2.5. Extensiones del Modelo Black-Scholes

Para opciones barrera, el modelo de Black-Scholes se extiende incorporando condiciones de borde adicionales que reflejan el comportamiento en la barrera. Estas extensiones permiten obtener fórmulas cerradas para ciertos tipos de opciones barrera europeas, como se verá en el siguiente capítulo.

Otras extensiones importantes del modelo incluyen:

- Modelos de volatilidad estocástica (Heston, SABR)
- Modelos con saltos (Merton, Kou)
- Modelos de volatilidad local (Dupire)
- Modelos de tasas de interés estocásticas

Sin embargo, estas extensiones quedan fuera del alcance de este trabajo, que se enfoca en métodos de valoración bajo el modelo de Black-Scholes clásico.

Capítulo 3

Métodos de Valoración

En este capítulo se presentan los cuatro métodos de valoración que serán implementados y comparados en este trabajo. Para opciones barrera europeas se analizan tres métodos: fórmulas analíticas de Reiner y Rubinstein, árboles trinomiales con mallas adaptativas, y replicación estática mediante portafolios de opciones vanilla. Para opciones barrera americanas se utiliza simulación de Monte Carlo con el método de Longstaff-Schwartz.

3.1. Método 1: Fórmulas Analíticas de Reiner y Rubinstein

El trabajo seminal de Reiner y Rubinstein Reiner and Rubinstein (1991) proporciona una metodología sistemática para obtener fórmulas cerradas para los ocho tipos básicos de opciones barrera europeas bajo el modelo de Black-Scholes.

3.1.1. Marco Metodológico de Valoración

Siguiendo la notación exacta de Reiner y Rubinstein Reiner and Rubinstein (1991), se definen:

Variables Críticas

- r : Tasa de interés (expresada como $1 + \text{tasa}$)
- d : Tasa de pago del activo (expresada como $1 + \text{tasa de pago}$)
- σ : Volatilidad del activo subyacente
- t : Tiempo hasta el vencimiento
- ϕ : Variable binaria (1 para calls, -1 para puts)
- η : Variable binaria (1 si el precio inicia por encima de la barrera, -1 si inicia por debajo)

Constantes:

- H : Nivel de la barrera preestablecido

3.1. MÉTODO 1: FÓRMULAS ANALÍTICAS DE REINER Y RUBINSTEIN

- K : Precio de ejercicio preestablecido
- R : Monto del rebato preestablecido

Funciones de Densidad de Probabilidad La valoración requiere tres densidades fundamentales:

- $f(u)$: Densidad normal del logaritmo natural del retorno del activo subyacente neutral al riesgo

$$f(u) = (1/\sigma\sqrt{2\pi t})e^{-1/2v^2}$$

Donde $v = (u - \mu t)/\sigma\sqrt{t}$ y $\mu = \log(r/d) - \frac{1}{2}\sigma^2$. Utilizada cuando consideramos que no se cruzó la barrera.

- $g(u)$: Densidad del retorno cuando el precio rompe la barrera pero termina en un nivel específico al vencimiento

$$g(u) = e^{2\eta\alpha\lambda\sigma^{-2}}(1/\sigma\sqrt{2\pi t})e^{-1/2v^2}$$

Donde $v = (u - 2\eta\alpha - \eta\mu t)/\sigma\sqrt{t}$ y $\alpha = \log(H/S)$. Utilizada cuando consideramos que se cruzó la barrera.

- $h(\tau)$: Densidad del tiempo de primer paso (first passage time), necesaria para las opciones 'Out' donde el reembolso se paga al momento de tocar la barrera

Variables auxiliares

- $x = [\log(S/K)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $x_1 = [\log(S/H)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $y = [\log(H^2/SK)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $y_1 = [\log(H/S)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $\lambda = 1 + (\mu/\sigma^2)$
- $z = [\log(H/S)/\sigma\sqrt{t}] + b\sigma\sqrt{t}$
donde $b = [\sqrt{\mu + 2(\log r)\sigma^2}]/\sigma^2$

3.1.2. Términos de Valoración

$$\begin{aligned} [1] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K)f(u)du \\ &= \phi S d^{-t} N(\phi x) - \phi K r^{-t} N(\phi x - \phi \sigma \sqrt{t}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} [2] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K)f(u)du \\ &= \phi S d^{-t} N(\phi x_1) - \phi K r^{-t} N(\phi x_1 - \phi \sigma \sqrt{t}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} [3] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K)g(u)du \\ &= \phi S d^{-t} (H/S)^{2\lambda} N(\eta y) - \phi K r^{-t} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y - \eta \sigma \sqrt{t}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} [4] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K)g(u)du \\ &= \phi S d^{-t} (H/S)^{2\lambda} N(\eta y_1) - \phi K r^{-t} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{t}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} [5] &= R r^{-t} \int [f(u) - g(u)]du \\ &= R r^{-t} \left[N(\eta x_1 - \eta \sigma \sqrt{t}) - (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{t}) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} [6] &= R \int r^{-\tau} h(\tau) d\tau \\ &= R \left[(H/S)^{a+b} N(\eta z) + (H/S)^{a-b} N(\eta z - 2\eta b \sigma \sqrt{t}) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.3. Interpretación de los Términos de Valoración

La comprensión de estos términos requiere analizar tanto las regiones de integración como las funciones de densidad utilizadas.

1. Regiones de Integración en el Espacio de Precios

En las fórmulas [1] a [5], la variable de integración es u , definida como el logaritmo natural del rendimiento del activo: $u = \ln(S_t/S)$.

- **Región de $\log(K/S)$ a $\phi\infty$:** Representa todos los precios finales del activo que terminan 'in the money' (por encima de K para un call o por debajo de K para un put). El término ϕ actúa como un interruptor: si es 1 (call), la región va hacia el infinito positivo; si es -1 (put), hacia el infinito negativo.
- **Región de $\log(H/S)$ a $\phi\infty$ (o $\eta\infty$):** Define los precios finales que terminan en el lado 'activo' de la barrera. Por ejemplo, en una opción down-and-in, esta región abarca los precios finales que están por encima de la barrera H , permitiendo distinguir entre los activos que terminaron 'a salvo' y los que no.

3.1. MÉTODO 1: FÓRMULAS ANALÍTICAS DE REINER Y RUBINSTEIN

2. Significado según la Función de Densidad

El significado de la región cambia drásticamente dependiendo de qué densidad se esté integrando:

- **Con $f(u)$ (Densidad Estándar):** La región representa simplemente dónde termina el precio al vencimiento, sin importar lo que pasó en el camino. Es la visión 'estilo Black-Scholes' clásica.
- **Con $g(u)$ (Densidad de Cruce):** Cuando integramos sobre una región usando $g(u)$, estamos capturando únicamente las trayectorias que cruzaron la barrera H en algún momento, pero que terminaron en la región especificada (K o H) al vencimiento. Esta densidad incorpora el principio de reflexión.
- **Con $[f(u) - g(u)]$ (Región de Reembolso):** En la fórmula [5], integrar sobre esta diferencia en la región de $\log(H/S)$ a $\eta\infty$ representa la probabilidad de que el activo termine en el lado correcto de la barrera sin haberla tocado nunca durante la vida de la opción.

3. Región Temporal (Término [6])

En la fórmula [6], la región de integración es temporal, no de precio:

- **De 0 a t :** Esta región abarca toda la vida del contrato, desde el momento inicial hasta el vencimiento. Significa que el modelo está sumando las probabilidades de que el activo toque la barrera en cualquier instante τ dentro de ese periodo. Esto es fundamental para las opciones de 'salida' (out-options), donde el pago (reembolso) ocurre en el momento exacto del impacto, el cual es aleatorio.

Resumen de los Términos

- **Término [1]:** Valor esperado descontado usando $f(u)$, integrando sobre precios finales por encima de K (calls) o por debajo de K (puts). Representa el valor de la opción vanilla sin considerar la barrera.
- **Término [2]:** Similar a [1], pero integrando sobre precios finales en el lado activo de la barrera H .
- **Término [3]:** Valor esperado descontado usando $g(u)$, considerando solo trayectorias que cruzaron la barrera y terminaron por encima de K (calls) o por debajo de K (puts).
- **Término [4]:** Similar a [3], pero integrando sobre precios finales en el lado activo de la barrera H .
- **Término [5]:** Valor presente del rebate R pagado al vencimiento si la barrera no fue tocada durante la vida de la opción. Usa la diferencia $[f(u) - g(u)]$ para capturar solo trayectorias que nunca cruzaron.
- **Término [6]:** Valor presente del rebate R pagado en el momento exacto (aleatorio) en que se toca la barrera. Integra sobre el tiempo de primer pasaje $\tau \in [0, t]$ usando la densidad $h(\tau)$.

La combinación apropiada de estos términos permite construir las fórmulas para los ocho tipos de opciones barrera (Down-and-Out/In, Up-and-Out/In, para Calls y Puts).

3.1.4. Fórmulas Exactas: Construcción mediante Términos de Valoración

Las fórmulas de Reiner y Rubinstein se construyen combinando los términos de valoración [1] a [6] según el tipo de opción, la posición relativa del precio inicial respecto a la barrera, y la relación entre el precio de ejercicio K y la barrera H .

Opciones de Entrada (In-options)

Estas opciones solo comienzan a existir (se activan o hacen 'knock-in') si el precio del activo toca la barrera H antes del vencimiento. Si no se toca la barrera, el tenedor recibe un reembolso R al vencimiento.

1. **Down-and-In Call** ($S > H$): El activo comienza por encima de la barrera. Se activa si el precio baja hasta tocar H .
 - Si $K > H$: [3] + [5] con $\eta = 1, \phi = 1$
 - Si $K < H$: [1] - [2] + [4] + [5] con $\eta = 1, \phi = 1$
2. **Up-and-In Call** ($S < H$): El activo comienza por debajo de la barrera. Se activa si el precio sube hasta tocar H .
 - Si $K > H$: [1] + [5] con $\eta = -1, \phi = 1$
 - Si $K < H$: [2] - [3] + [4] + [5] con $\eta = -1, \phi = 1$
3. **Down-and-In Put** ($S > H$): Comienza arriba de la barrera y se activa al bajar hasta H .
 - Si $K > H$: [2] - [3] + [4] + [5] con $\eta = 1, \phi = -1$
 - Si $K < H$: [1] + [5] con $\eta = 1, \phi = -1$
4. **Up-and-In Put** ($S < H$): Comienza abajo de la barrera y se activa al subir hasta H .
 - Si $K > H$: [1] - [2] + [4] + [5] con $\eta = -1, \phi = -1$
 - Si $K < H$: [3] + [5] con $\eta = -1, \phi = -1$

Opciones de Salida (Out-options)

Estas opciones dejan de existir (se extinguen o hacen 'knock-out') si el precio del activo toca la barrera H . Si se toca la barrera, el reembolso R se paga usualmente en ese mismo momento.

5. **Down-and-Out Call** ($S > H$): La opción es válida mientras el precio se mantenga por encima de H .
 - Si $K > H$: [1] - [3] + [6] con $\eta = 1, \phi = 1$
 - Si $K < H$: [2] - [4] + [6] con $\eta = 1, \phi = 1$
6. **Up-and-Out Call** ($S < H$): Se extingue si el precio sube hasta tocar H .
 - Si $K > H$: [6] con $\eta = -1, \phi = 1$.

Nota: Para que el precio termine arriba de K , necesariamente debe cruzar H primero, por lo que la opción solo vale por su reembolso.

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

- Si $K < H$: $[1] - [2] + [3] - [4] + [6]$ con $\eta = -1$, $\phi = 1$
- 7. **Down-and-Out Put** ($S > H$): Se extingue si el precio baja hasta tocar H .
 - Si $K > H$: $[1] - [2] + [3] - [4] + [6]$ con $\eta = 1$, $\phi = -1$
 - Si $K < H$: $[6]$ con $\eta = 1$, $\phi = -1$.
Nota: Si el precio baja de K , ya habrá cruzado H y la opción se habrá extinguido.
- 8. **Up-and-Out Put** ($S < H$): Se mantiene vigente mientras el precio esté debajo de H .
 - Si $K > H$: $[2] - [4] + [6]$ con $\eta = -1$, $\phi = -1$
 - Si $K < H$: $[1] - [3] + [6]$ con $\eta = -1$, $\phi = -1$

3.2. Método 2: Modelo de Malla Adaptativa (AMM)

El Modelo de Malla Adaptativa (Adaptive Mesh Model, AMM), desarrollado por Figlewski y Gao Figlewski and Gao (1999), representa un avance significativo en la valoración numérica de opciones. Este método permite aumentar la precisión en varios órdenes de magnitud sin incrementar sustancialmente el tiempo de ejecución, mediante el injerto de secciones de alta resolución sobre un árbol trinomial base en regiones críticas donde el valor de la opción es altamente no lineal.

3.2.1. Fundamentos: Árboles Trinomiales

El AMM se construye sobre la base de árboles trinomiales, que modelan la evolución del precio del activo subyacente en tiempo discreto.

Construcción del Árbol Trinomial

En cada nodo del árbol con precio S , el precio en el siguiente paso temporal puede ser:

- $S \cdot u$ con probabilidad p_u (movimiento hacia arriba)
- $S \cdot m$ con probabilidad p_m (movimiento medio, típicamente $m = 1$)
- $S \cdot d$ con probabilidad p_d (movimiento hacia abajo)

donde $u > 1 > d > 0$ son los factores de movimiento.

Los parámetros se calibran para aproximar el proceso continuo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad (3.7)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} = \frac{1}{u} \quad (3.8)$$

$$m = 1 \quad (3.9)$$

Las probabilidades neutrales al riesgo son:

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{(r - \delta)\sqrt{\Delta t}}{6\sigma\sqrt{3}} \quad (3.10)$$

$$p_m = \frac{2}{3} \quad (3.11)$$

$$p_d = \frac{1}{6} - \frac{(r - \delta)\sqrt{\Delta t}}{6\sigma\sqrt{3}} \quad (3.12)$$

La valoración procede mediante inducción hacia atrás (backward induction), calculando en cada nodo:

$$V(S, t) = e^{-r\Delta t} [p_u V(Su, t + \Delta t) + p_m V(S, t + \Delta t) + p_d V(Sd, t + \Delta t)] \quad (3.13)$$

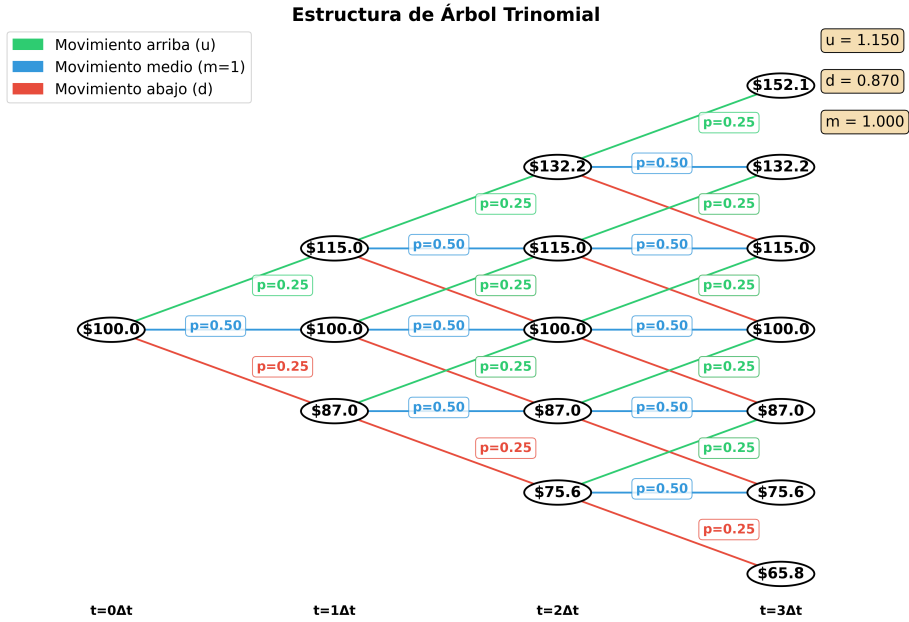


Figura 3.1: Estructura de un árbol trinomial con 3 pasos temporales. Desde cada nodo, el precio puede moverse hacia arriba (multiplicado por $u = 1,15$, verde), mantenerse (multiplicado por $m = 1$, azul), o bajar (multiplicado por $d = 1/u \approx 0,870$, rojo). Las probabilidades neutrales al riesgo son $p_u = 0,25$, $p_m = 0,50$, $p_d = 0,25$. El árbol es recombinante: los nodos que alcanzan el mismo precio se fusionan.

3.2.2. Análisis de Errores en Modelos de Redes

Figlewski y Gao identifican dos fuentes principales de error en los modelos de redes:

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

Error de Distribución

Surge porque el modelo intenta aproximar una distribución lognormal continua con una distribución discreta (binomial o trinomial). Aunque coincidan en media y varianza, persiste una discrepancia fundamental. Este error disminuye lentamente con el número de pasos.

Error de No Linealidad

Ocurre cuando el valor de la opción es altamente no lineal respecto al precio del activo subyacente, es decir, en áreas de alta Gamma. Ejemplos críticos:

- Alrededor del precio de ejercicio K al vencimiento (opciones vanilla)
- Cerca de la barrera H en cualquier momento (opciones barrera)
- En el precio inicial S_0 para el cálculo de griegas

En el modelo binomial, este error produce una convergencia “par-impar”, donde el error alterna valores significativamente distintos según el número de pasos sea par o impar. El AMM se enfoca específicamente en minimizar el error de no linealidad.

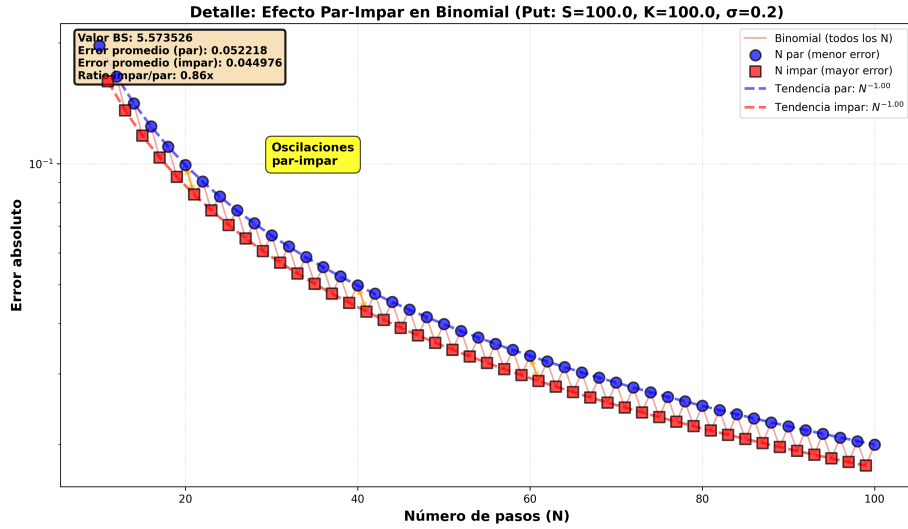


Figura 3.2: Detalle del efecto par-impar en el modelo binomial. Los puntos azules (N par) sistemáticamente tienen mayor error que los puntos rojos (N impar). Las líneas punteadas muestran las tendencias separadas para cada caso. Esta oscilación es causada por el error de no linealidad y es eliminada por el AMM.

3.2.3. Principio del Modelo de Malla Adaptativa

La premisa fundamental del AMM es que **no es necesario aumentar la resolución en todo el árbol**. En su lugar:

- Se utiliza una red gruesa (paso de precio h , paso de tiempo k) para la mayor parte del árbol

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

- Se aplica una resolución fina solo en regiones críticas donde la no linealidad es alta
- La malla fina típicamente usa pasos de precio $h/2$ y tiempo $k/4$

Esta estrategia permite lograr precisión comparable a un árbol uniforme muy fino, pero con una fracción del costo computacional.

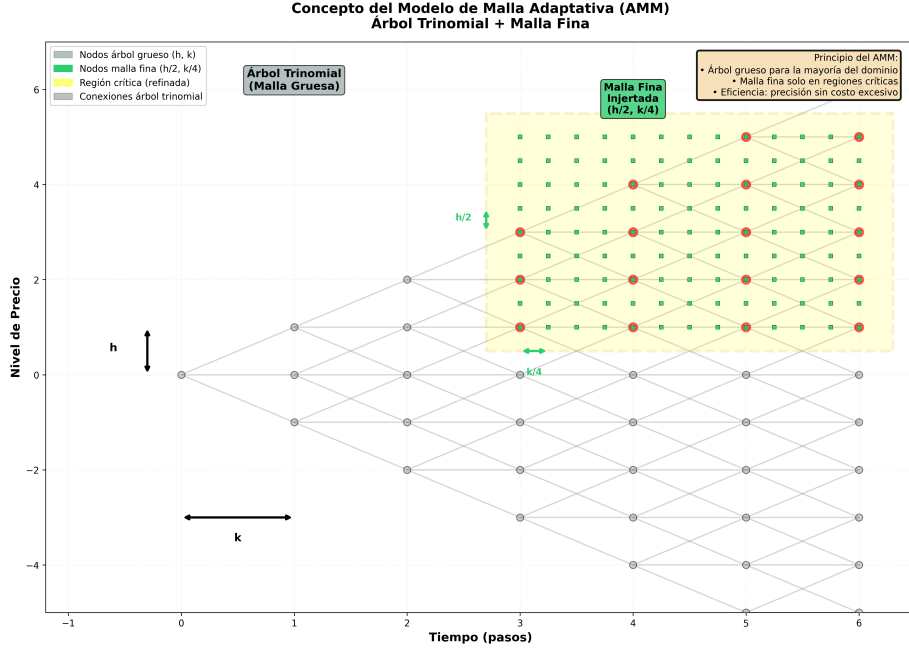


Figura 3.3: Concepto del Modelo de Malla Adaptativa (AMM). Se muestra un árbol trinomial base (nodos grises, conexiones grises) que constituye la malla gruesa con pasos de precio h y tiempo k . Sobre este árbol se injerta una malla fina (cuadrados verdes pequeños) con pasos $h/2$ y $k/4$ únicamente en la región crítica (rectángulo amarillo). Esta estrategia concentra la resolución computacional donde más se necesita, logrando alta precisión con costo mínimo adicional ($< 1\%$).

3.2.4. AMM para Opciones Vanilla

Para opciones europeas o americanas estándar, la mayor no linealidad ocurre alrededor del precio de ejercicio K al vencimiento T .

Estructura

Se añade una malla fina con pasos de precio $h/2$ y tiempo $k/4$ solo en la región:

- Temporal: Entre $T - k$ y T (último paso temporal del árbol grueso)
- Espacial: Alrededor de K , típicamente $[K - 2h, K + 2h]$

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

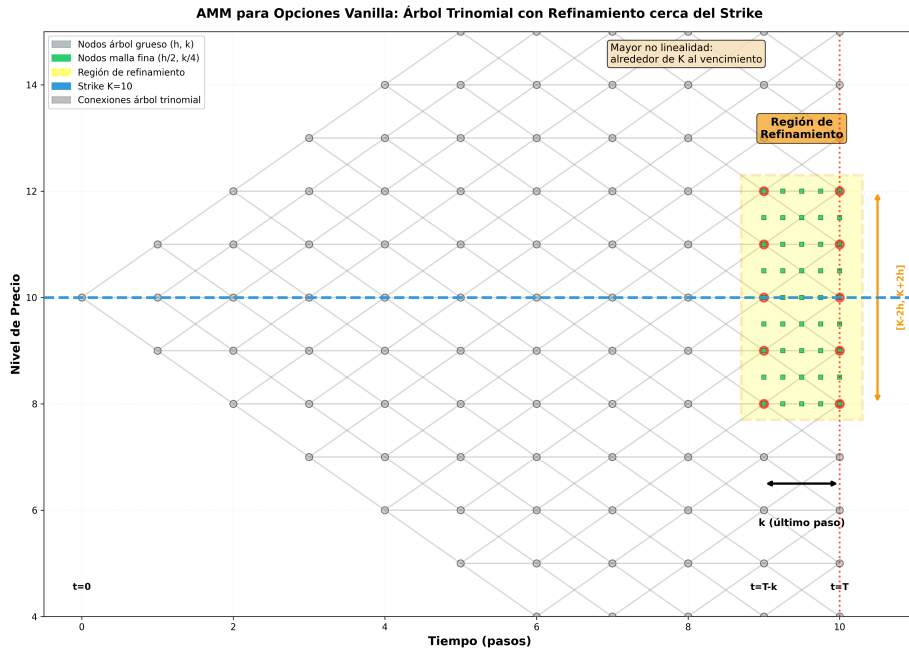


Figura 3.4: Estructura del AMM para opciones vanilla. Se muestra un árbol trinomial (nodos grises con conexiones grises) que constituye la malla gruesa. Sobre este árbol se inserta una malla fina (cuadrados verdes pequeños) con pasos $h/2$ y $k/4$ únicamente en la región crítica (rectángulo amarillo): temporal $[T-k, T]$ y espacial $[K-2h, K+2h]$. La línea azul punteada marca el strike K donde ocurre la mayor no linealidad al vencimiento. Esta estrategia concentra la resolución donde más se necesita: alrededor del precio de ejercicio al vencimiento.

Eficiencia

En un árbol trinomial de 100 pasos, añadir un nivel de AMM aumenta los cálculos en menos del 0,4%. Un segundo nivel de refinamiento (AMM-2, con pasos $h/4$ y $k/16$) añade menos del 0,4% adicional.

Rendimiento

Según Figlewski y Gao, un modelo AMM-2 con solo 25 pasos de tiempo es más preciso que:

- Un modelo trinomial estándar de 250 pasos
- Un modelo binomial de 1000 pasos (que requiere 250 veces más tiempo de ejecución)

Basado en el análisis de Figlewski y Gao para un conjunto de prueba de 27 opciones put europeas:

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

| Modelo | Pasos (N) | Nodos | Tiempo (s) | RMSE | | |
|-----------|--------------|-----------|---------------|----------|----------|----------|
| | | | | Precio | Delta | Gamma |
| Binomial | 25 | 351 | 0.0060 | 0.020841 | 0.005805 | 0.001594 |
| Trinomial | 25 | 676 | 0.0090 | 0.012025 | 0.003337 | 0.000428 |
| AMM-1 | 25 | 716 | 0.0117 | 0.002812 | 0.003345 | 0.000539 |
| AMM-2 | 25 | 756 | 0.0121 | 0.000615 | 0.003359 | 0.000548 |
| Binomial | 100 | 5,151 | 0.0451 | 0.004929 | 0.001470 | 0.000197 |
| Trinomial | 100 | 10,201 | 0.0941 | 0.002770 | 0.000846 | 0.000144 |
| AMM-1 | 100 | 10,241 | 0.0961 | 0.000600 | 0.000845 | 0.000140 |
| AMM-2 | 100 | 10,281 | 0.0982 | 0.000151 | 0.000854 | 0.000138 |
| Binomial | 250 | 31,626 | 0.2163 | 0.002214 | 0.000534 | 0.000073 |
| Trinomial | 250 | 63,001 | 0.5407 | 0.001360 | 0.000346 | 0.000061 |
| AMM-1 | 250 | 63,041 | 0.5418 | 0.000245 | 0.000334 | 0.000056 |
| AMM-2 | 250 | 63,081 | 0.5428 | 0.000057 | 0.000342 | 0.000056 |
| Binomial | 1000 | 501,501 | 3.0674 | 0.000448 | 0.000145 | 0.000020 |
| Trinomial | 1000 | 1,002,001 | 8.5623 | 0.000244 | 0.000079 | 0.000015 |
| AMM-1 | 1000 | 1,002,041 | 8.5954 | 0.000056 | 0.000086 | 0.000014 |
| AMM-2 | 1000 | 1,002,081 | 8.5854 | 0.000016 | 0.000085 | 0.000014 |

Tabla 3.1: Comparación detallada de rendimiento y precisión para valoración de opciones y cálculo de griegas. El AMM logra errores significativamente menores en precio, Delta y Gamma con un incremento mínimo en tiempo de ejecución (¡3 % vs trinomial estándar) y número de nodos (¡0.1 % adicional). Datos de Figlewski y Gao (1999).

3.2.5. AMM para Opciones Barrera

Las opciones barrera presentan un desafío particular: el error de no linealidad ocurre en cada punto del tiempo cuando el precio se acerca a la barrera H , no solo al vencimiento.

El Problema de Convergencia “Dentada”

La convergencia en modelos estándar es “dentada” porque la probabilidad de tocar la barrera salta discretamente cuando el número de pasos cambia el tamaño del paso de precio h . Si h es grande, el árbol puede “saltar sobre” la barrera sin detectarla correctamente.

El Problema del Límite

Cuando el precio inicial S_0 está muy cerca de la barrera H , un árbol trinomial estándar requiere que haya al menos un paso de precio entre S_0 y H . Esto implica:

$$h = \frac{S_0(u - d)}{2} < |S_0 - H| \quad (3.14)$$

Si S_0 está extremadamente cerca de H (por ejemplo, a una distancia de $1/8$ de punto), esto puede obligar a usar miles de pasos de tiempo, haciendo el cálculo inmanejable.

Estructura AMM para Barreras

Se construye una malla fina junto a la barrera H :

- **Región espacial:** Banda alrededor de H , típicamente $[H - 2h, H + 2h]$
- **Región temporal:** Toda la vida de la opción (no solo cerca del vencimiento)
- **Flujo de información:** A diferencia del AMM para vanilla, aquí la información fluye de la malla gruesa hacia la malla fina para valorar la opción cuando S_0 está cerca de H

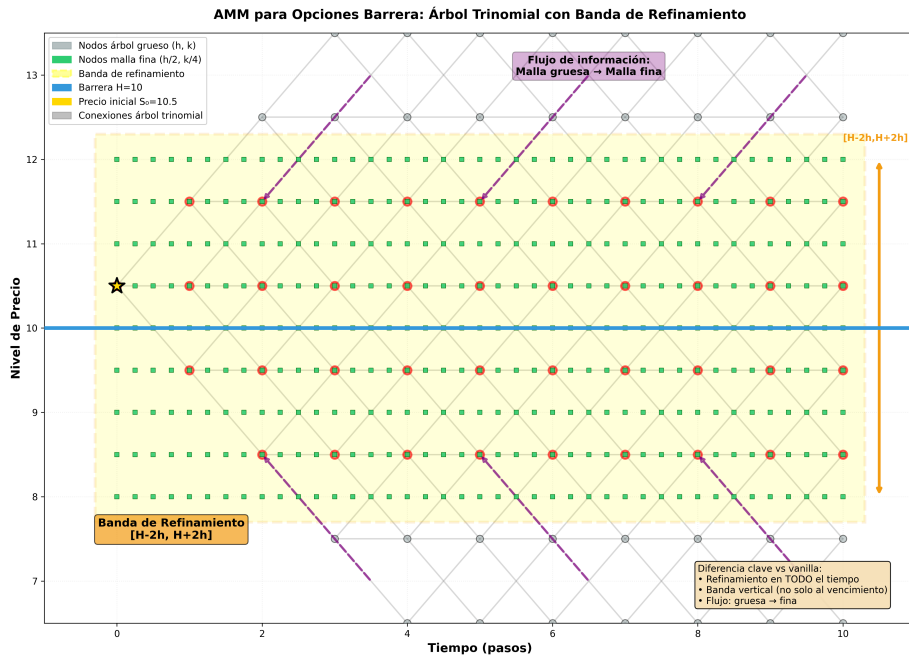


Figura 3.5: Estructura del AMM para opciones barrera. Mostrar el árbol completo con una banda vertical de malla fina a lo largo de toda la dimensión temporal, centrada en la barrera H . La barrera debe aparecer como una línea horizontal clara. Indicar la región $[H-2h, H+2h]$ con sombreado o color. Mostrar S_0 cerca de H para ilustrar el problema del límite. Incluir flechas mostrando el flujo de información de malla gruesa a malla fina.

Manejo de la Barrera

Para opciones knock-out:

- Si un nodo en la malla fina cruza la barrera H , su valor se establece en el rebate R
- La malla fina permite detectar el cruce con mucha mayor precisión que la malla gruesa

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

Para opciones knock-in, se usa la relación de paridad:

$$V_{KI} = V_{\text{vanilla}} - V_{KO} \quad (3.15)$$

Rendimiento

Mientras que un Modelo Trinomial Restringido (RTM) se vuelve inmanejable cuando S_0 se acerca extremadamente a la barrera, el AMM alcanza resultados precisos casi instantáneamente. Un AMM de 100 pasos puede ser más preciso que un RTM de 10,000 pasos que tarda 100 veces más.

3.2.6. AMM para el Cálculo de Griegas

La estimación de Delta (Δ) y Gamma (Γ) mediante perturbaciones pequeñas del precio inicial es ruidosa debido al error de no linealidad.

Extensión del Árbol

Una técnica común es extender el árbol un paso hacia atrás desde el tiempo 0 para obtener tres valores de opción y calcular derivadas numéricas. Sin embargo, esto usa un paso de precio h completo, que puede ser demasiado grande.

Ramificación Cuadrinomial

Para permitir perturbaciones menores ($\epsilon < h$) sin que los nodos de la malla fina se desvíen de la malla gruesa (lo que generaría probabilidades negativas), el AMM utiliza ramificación cuadrinomial (cuatro ramas) en los nodos de perturbación añadidos (ubicados en $X_0 \pm \epsilon$).

Esto permite calcular:

$$\Delta \approx \frac{V(S_0 + \epsilon) - V(S_0 - \epsilon)}{2\epsilon} \quad (3.16)$$

$$\Gamma \approx \frac{V(S_0 + \epsilon) - 2V(S_0) + V(S_0 - \epsilon)}{\epsilon^2} \quad (3.17)$$

con $\epsilon = h/2$ o incluso $\epsilon = h/4$.

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

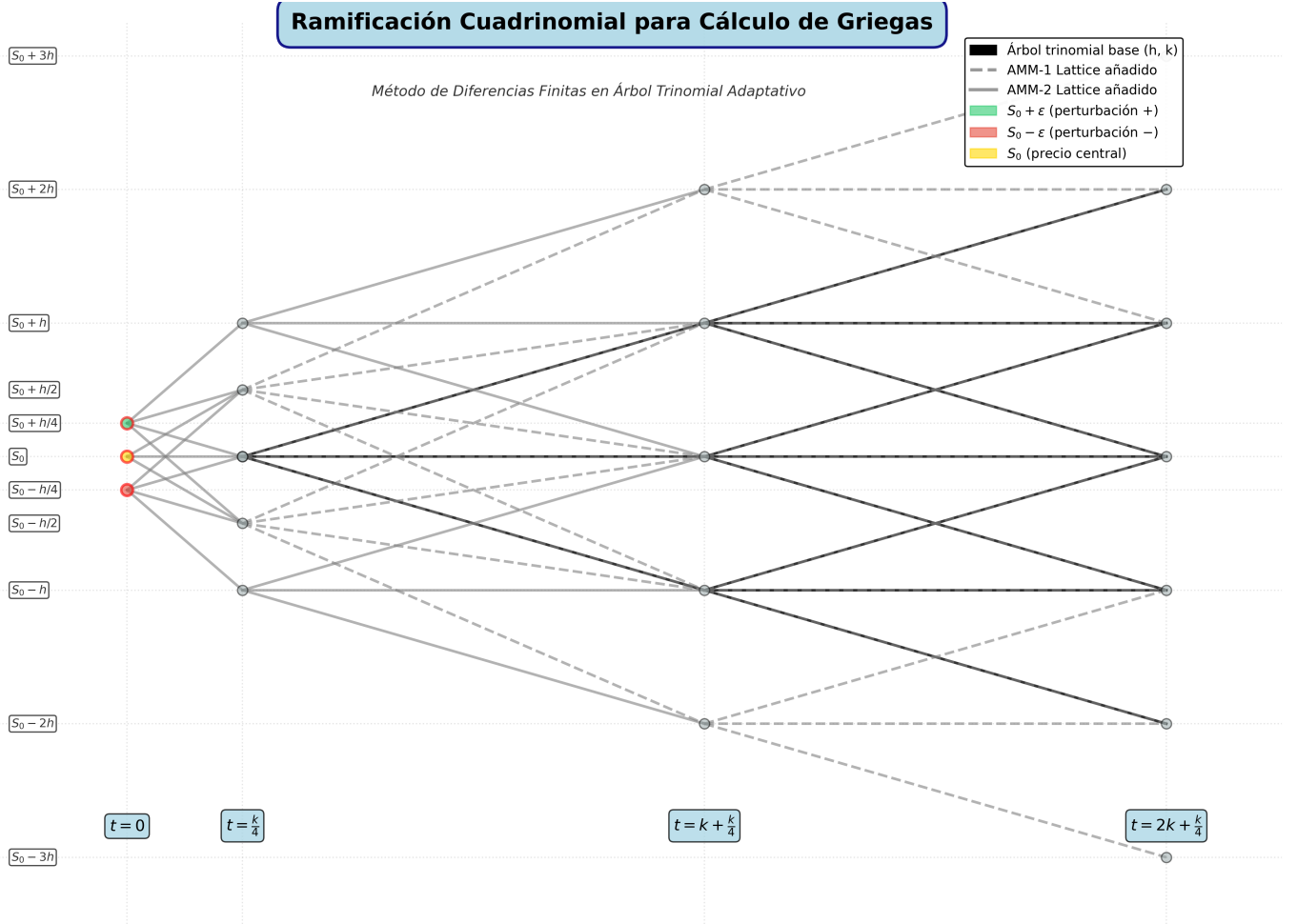


Figura 3.6: Ramificación cuadrinomial para el cálculo de griegas mediante diferencias finitas. Se muestra un árbol trinomial base (nodos grises, conexiones negras gruesas) con nodos adicionales en $t = 0$ ubicados en $S_0 + \varepsilon$ (verde) y $S_0 - \varepsilon$ (rojo), donde $\varepsilon = h/4$ es una perturbación pequeña. Las líneas sólidas grises representan ramificación cuadrinomial (4 ramas) desde los nodos perturbados y los nodos extremos en $t = k/4$, permitiendo calcular simultáneamente Delta y Gamma con alta precisión.

Precisión

El uso de AMM reduce el Error Cuadrático Medio (RMSE) de:

- Delta: en aproximadamente $2/3$
- Gamma: en aproximadamente $1/2$

sin aumentar significativamente el tiempo de ejecución. Un AMM de 25 pasos es más preciso que un modelo trinomial estándar de 1000 pasos que tarda 500 veces más.

3.2. MÉTODO 2: MODELO DE MALLA ADAPTATIVA (AMM)

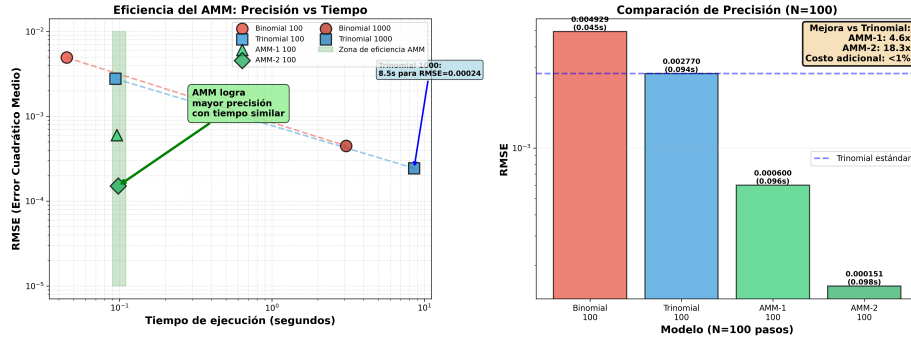


Figura 3.7: Gráfico de dispersión mostrando RMSE (eje Y, escala logarítmica) vs Tiempo de ejecución (eje X, escala logarítmica). Cada punto representa un modelo de la tabla anterior. Usar diferentes colores/símbolos para Binomial, Trinomial, AMM-1, AMM-2. Mostrar claramente cómo AMM logra menor error con tiempo similar al trinomial estándar. Incluir líneas de tendencia o regiones sombreadas para destacar la “frontera de eficiencia”.

3.2.7. Ventajas del AMM

- **Eficiencia extrema:** Aumenta la precisión en órdenes de magnitud con incremento mínimo en tiempo de ejecución
- **Escalabilidad:** Permite abordar problemas que son computacionalmente prohibitivos con métodos estándar
- **Flexibilidad:** Aplicable a opciones vanilla, barrera, y cálculo de griegas con estructuras específicas para cada caso
- **Convergencia mejorada:** Elimina el comportamiento “par-impar” y la convergencia “dentada” de los modelos estándar
- **Aplicaciones prácticas:** Especialmente valioso para cálculo de volatilidad implícita (que requiere múltiples valoraciones repetitivas) y opciones exóticas complejas

3.2.8. Consistencia Matemática

Figlewski y Gao proporcionan una prueba formal de convergencia, demostrando que a medida que el tamaño de los pasos de tiempo y precio tiende a cero, el valor de la opción obtenido por el AMM converge al valor teórico de tiempo continuo. Esta consistencia garantiza que el método no solo es eficiente, sino también matemáticamente riguroso.

3.3. Método 3: Replicación Estática

3.3.1. Concepto de Replicación Estática

3.3.2. Metodología de Derman-Ergener-Kani

3.3.3. Construcción del Portafolio

3.4. Método 4: Monte Carlo para Opciones Americanas

3.4.1. Desafío de las Opciones Americanas

3.4.2. Simulación de Monte Carlo

3.4.3. Método de Longstaff-Schwartz (LSM)

Capítulo 4

Implementación - Fórmulas de Reiner y Rubinstein

4.1. Descripción de la Implementación

4.1.1. Cálculo de Variables Auxiliares

4.1.2. Cálculo de Términos de Valoración

4.1.3. Construcción de Fórmulas para Cada Tipo

4.2. Detalles de Implementación

4.2.1. Código Relevante

4.3. Cálculo de Griegas

4.4. Validación

4.4.1. Verificación de Relaciones de Paridad

4.4.2. Verificación de Límites Asintóticos

4.4.3. Ejemplos Numéricos

Capítulo 5

Implementación - Árboles Trinomiales con Mallas Adaptativas

5.1. Descripción del Algoritmo

5.1.1. Construcción del Árbol Trinomial

5.1.2. Adaptación de la Malla

5.1.3. Valoración Backward

5.2. Detalles de Implementación

5.2.1. Estructura de Datos

5.2.2. Código Relevante

5.3. Validación

5.3.1. Comparación con Rubinstein-Reiner

5.3.2. Análisis de Convergencia

5.3.3. Ejemplos Numéricos

Capítulo 6

Implementación - Replicación Estática y Monte Carlo

6.1. Replicación Estática

6.1.1. Descripción del Algoritmo

Selección de Strikes

Cálculo de Pesos

6.1.2. Detalles de Implementación

6.1.3. Validación del Portafolio Replicante

Comparación con Rubinstein-Reiner

Análisis de Convergencia

Ejemplos Numéricos

6.2. Monte Carlo para Opciones Americanas

6.2.1. Descripción del Algoritmo

Generación de Trayectorias

Monitoreo de Barrera

Método de Longstaff-Schwartz

6.2.2. Detalles de Implementación

Código Relevante

6.2.3. Validación de Monte Carlo

Análisis de Convergencia

Intervalos de Confianza

Ejemplos Numéricos

32

6.2.4. Técnicas de Reducción de Varianza

Capítulo 7

Resultados y Comparación

7.1. Diseño de Experimentos

- 7.1.1. Casos de Prueba para Opciones Europeas
- 7.1.2. Casos de Prueba para Opciones Americanas
- 7.1.3. Métricas de Evaluación

7.2. Resultados para Opciones Europeas

- 7.2.1. Tablas Comparativas
- 7.2.2. Análisis de Precisión
- 7.2.3. Análisis de Tiempo Computacional
- 7.2.4. Comportamiento Cerca de la Barrera
- 7.2.5. Gráficos Comparativos

7.3. Resultados para Opciones Americanas

- 7.3.1. Tablas de Resultados
- 7.3.2. Análisis de Convergencia
- 7.3.3. Comparación con Europeas

7.4. Comparación Global de Métodos

- 7.4.1. Tabla Resumen
- 7.4.2. Análisis de Casos de Uso Óptimos
- 7.4.3. Recomendaciones Prácticas

7.5. Discusión

- 7.5.1. Ventajas y Desventajas Observadas
- 7.5.2. Limitaciones del Estudio

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo Futuro

8.1. Resumen de Resultados

8.2. Conclusiones Principales

8.2.1. Sobre los Métodos para Opciones Europeas

8.2.2. Sobre Monte Carlo para Opciones Americanas

8.2.3. Comparación Global

8.3. Limitaciones del Trabajo

8.4. Trabajo Futuro

8.4.1. Extensiones del Modelo

8.4.2. Extensiones de los Métodos

8.4.3. Aplicaciones Prácticas

8.4.4. Validación con Datos Reales

Bibliografía

- Figlewski, S. and Gao, B. (1999). The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. *The Journal of Financial Engineering*, 8:211–241.
- Reiner, E. and Rubinstein, M. (1991). Breaking down barrier options. *Risk*, 4(8):28–35.