Modelo de Malla Adaptativa para Opciones Barrera[1]

Bas Benjamín - Fada Santiago
Matemática Financiera - 2024

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
UNC Universidad Nacional de Córdoba

11/11/2024

Contenidos

Introducción

La valoración analítica de derivados se limita a unos pocos instrumentos financieros; la mayoría requiere técnicas numéricas que, aunque convergen a modelos como Black-Scholes, lo hacen de forma no monótona y con alto costo computacional.

Este problema se hace más notorio en regiones críticas con una alta no linealidad donde la discretizaciones suelen cometer errores importantes.

Modelo Trinomial para Opciones Barrera

El árbol trinomial usado es similar visto en clase, pero ahora se modela el logaritmo del precio del activo en lugar del precio. Este enfoque permite emplear un único parámetro, h, que define la magnitud de los posibles cambios en el precio, subir, bajar o mantenerse constante, con probabilidades $p_u(h,k), p_d(h,k), p_m(h,k)$ respectivamente, siendo k la longitud del paso discreto.

$$\begin{array}{ccc} & & \log(S_t)+h \\ & \overset{p_u}{\nearrow} & \\ \log(S_t) & \xrightarrow{p_m} & \log(S_t) \\ & \overset{p_d}{\searrow} & \\ & & \log(S_t)-h \end{array}$$

Problemas

El error de no linealidad en el modelo se manifiesta cuando el valor de la opción no varía de manera proporcional con el precio del activo. En las opciones barrera, este problema es especialmente crítico ya que surge tanto al calcular el payoff en el vencimiento como cuando el precio se aproxima a la barrera.

Una primera solución sería aumentar los pasos del modelo, pero esto introduce comportamientos inesperados, así como complicaciones de performance. Para ilustrar esto, se valoró una opción call barrera down-and-out variando la cantidad de pasos N.

Convergencia no monótona

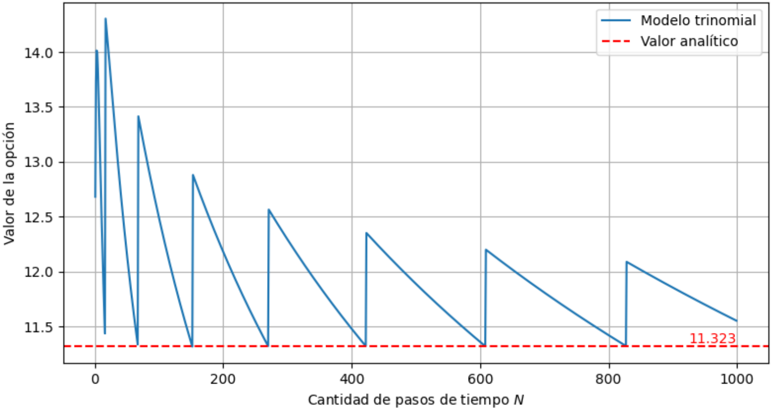

Figura: Convergencia modelo trinomial $S_0 = 100$, $H = 90$, $K = 100$, $r = 0{,}1$, $T = 1$, $\sigma = 0{,}25$

Barrera real: primera fila de nodos del árbol que está por debajo de $\ln(H)$, la barrera de la opción.

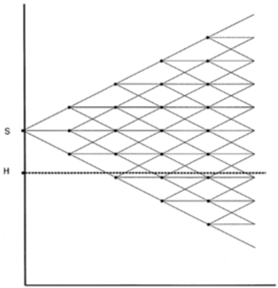

Figura: Árbol trinomial con barrera real a dos saltos de precio descendentes.

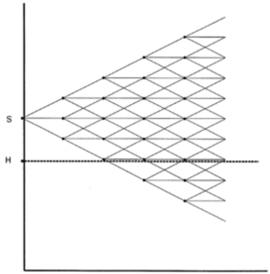

Figura: Árbol trinomial con barrera real a tres saltos de precio descendentes.

Motivo del error

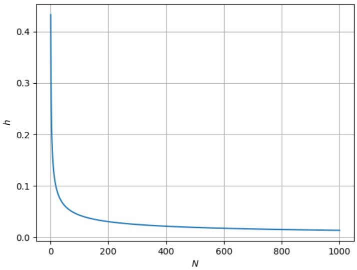

Figura: Valor del paso de precio (h) en función de la cantidad de pasos (N).

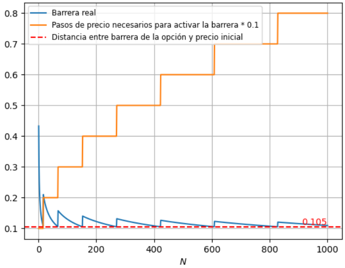

Figura: Barrera real y cantidad de pasos necesaria para activar la barrera de la opción en función de la cantidad de pasos (N).

Idea del algoritmo

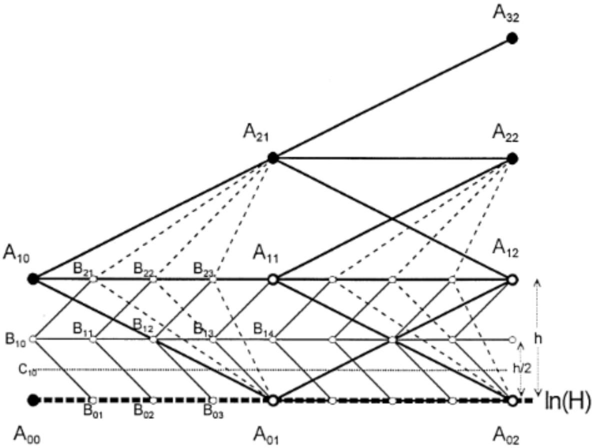

Figura: Modelo de malla adaptativa para una opción barrera down-and-out con un nivel de refinamiento.

Primer Paso del Algoritmo

- $ln(S_0) = ln(H) + h/2 \implies h = 2(ln(S_0) - ln(H))$
- $S_0^A = ln(H) + h = ln(H) + 2(ln(S_0) - ln(H))$

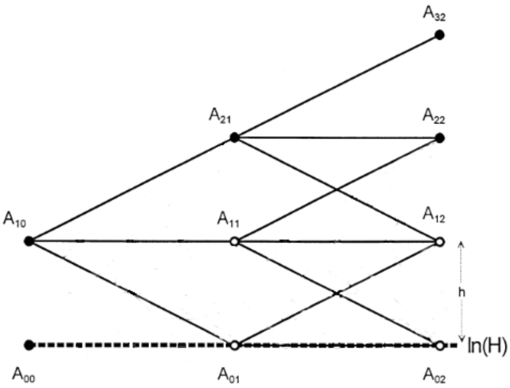

Figura: Valor de la opción en nodos de la malla gruesa.

Segundo Paso del Algoritmo

- $k \to k/4$

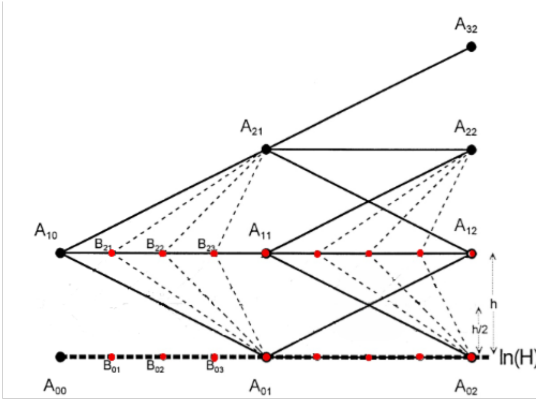

Figura: Nodos que “anclan” las mallas.

Tercer Paso del Algoritmo

- $h \to h/2$

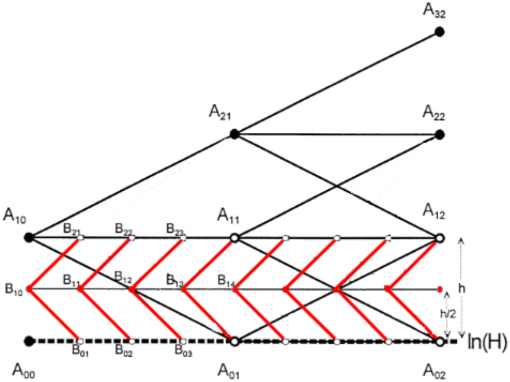

Figura: Nodos medios de la malla fina y obtención del valor de la opción.

Experimentación

Opción call barrera down-and-out con strike $K = 1000$, barrera $H = 950$, vencimiento $T = 1$, tasa $r = 0{,}05$, y volatilidad $\sigma = 0{,}35$.

S_0	Valor analítico	Modelo Trinomial				Modelo Adaptativo			
		N óptimo	Nodos óptimo	Tiempo (s)	Valor	M óptimo	Nodos óptimo	Tiempo (s)	Valor
1000	54.451	558	312481	35.63	54.479	0	19600	0.01	54.441
980	32.914	380	145161	11.79	32.922	1	10359	0.1	32.915
965	16.555	1497	2244004	748.15	16.557	1	145116	1.52	16.556
958	8.855	2000	4004001	1714.84	14.107	2	126495	18.61	8.855
955	5.541	2000	4004001	1758.59	13.976	2	745542	134.04	5.541
952	2.219	2000	4004001	1751.74	13.844	4	436117	311.95	2.219
951	1.11	2000	4004001	1745.92	13.8	6	1333522	302.14	1.11
950.5	0.555	2000	4004001	1750.01	13.779	7	5314837	311.6	0.555

Conclusiones

- Ajustar M, la cantidad de niveles de refinamiento en el modelo adaptativo es significativamente más eficiente y rápido que variar la cantidad de pasos N, en el modelo trinomial.
- Con un valor óptimo de M, el modelo adaptativo usa menos nodos y reduciendo así el costo computacional en comparación con el trinomial.
- En términos de precisión, el modelo adaptativo generalmente produce un menor error.
- Cuando el precio inicial del activo se acerca a la barrera, el modelo adaptativo necesita bastante refinamiento, sin embargo siendo más eficiente que el trinomial, que requiere una enorme cantidad de pasos.

Código

Todo el código realizado se puede encontrar en el siguiente repositorio de Repositorio en GitHub

Referencias

Figlewski, S., Gao, B.: The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. Journal of Financial Economics **53**(3), 313–351 (1999). https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0304-405X(99)00024-0, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304405X99000240

Preguntas?