Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

—

Matemática financiera

Patricia Kisbye

2024

Índice general

Capítulo 1

Conceptos financieros básicos

1.1. El concepto de interés

1.1.1. Introducción

Una operación financiera consiste en un intercambio de capitales de dinero disponibles en distintos momentos del tiempo. Podemos decir que toda operacion financiera es un préstamo, en el cual un *prestamista* entrega a un *prestatario* una cierta cantidad de dinero, a cambio de que este último lo devuelva al cabo de un cierto tiempo con un recargo o *interés*.

Por ejemplo, si se pide dinero prestado a una entidad financiera, éste deberá ser devuelto en un cierto plazo con un interés acordado previamente. Del mismo modo, si se deposita dinero en una cuenta bancaria, este capital se irá incrementando con el correr del tiempo. En este último caso quien deposita dinero es el prestamista y el prestatario es la entidad financiera.

A lo largo de la historia, siempre que el hombre ha prestado algo a otro, ya sea dinero u otros bienes, ha exigido que se le devuelva una cantidad superior a la prestada.

Se dice entonces que el dinero tiene un *valor en el tiempo*.

En este capítulo asumiremos operaciones financieras en las cuales el interés está pactado previamente. De esta manera, al inicio de la operación ambas partes conocen cuál será el valor del interés que se pagará en el futuro.

Por ejemplo, si se deposita dinero en una cuenta bancaria en un plazo fijo en pesos ($) por un determinado plazo, se conoce de antemano el monto a retirar en una fecha futura, o si se otorga un préstamo se sabe cuánto corresponderá devolver.

Esta hipótesis de certidumbre o certeza ya no es válida cuando las operaciones financieras corresponden a inversiones en el mercado bursátil, y el dinero se invierte en acciones, bonos, y otros productos y derivados financieros, o si están sujetas a variables cuyo valor futuro es desconocido, por ejemplo la inflación. En estos casos existe una componente de riesgo del valor futuro del dinero.

1.1.2. Conceptos básicos

Bajo las hipótesis de un ambiente de certidumbre, podemos asumir la siguiente definición:

> Una operación financiera es un préstamo, en el cual un prestamista cede a un prestatario una cierta cantidad de dinero, a cambio que éste lo devuelva al cabo de un determinado tiempo con un cierto recargo o **interés**.

La cantidad de dinero prestada se denomina **capital inicial**, y la cantidad devuelta es el **capital final**. El interés cobrado en la operación es entonces la diferencia entre el capital final y el capital inicial, y el tiempo que dura la operación es el **plazo**.

Ejemplo 1.1. En un plazo fijo se depositaron $\$10\,000$ por un plazo de 30 días. Si el capital final fue de $\$10\,250$, entonces el interés pagado es de:

$$\text{Interés } = \$10\,250 - \$10\,000 = \$250.$$

El interés es siempre una cantidad de dinero, es decir, se mide en unidades monetarias. En la práctica las instituciones financieras no enuncian cuál es el interés que pagan por un capital, sino que se indica el porcentaje sobre el capital inicial que se pagará en un determinado plazo. Esto da lugar al concepto de **tasa de interés**.

> La tasa de interés es igual al valor del interés que se paga por una unidad de capital en una unidad de tiempo.

La tasa de interés se suele indicar en términos de porcentaje, y se acompaña con la unidad de tiempo a la que corresponde. Por ejemplo:

1. Una tasa del $5\,\%$ a 30 días.
2. Una tasa del $60\,\%$ anual.
3. Una tasa diaria del $0{,}5\,\%$.

Ahora bien, la tasa de interés sólo permite calcular el interés en la unidad de tiempo considerada. Es decir, si la tasa es a 30 días se puede calcular el interés en 30 días. Si la tasa es anual, se puede calcular el interés en el año.

Para poder determinar el interés en un plazo diferente es necesario conocer el sistema de capitalización aplicado.

En la práctica estos sistemas son:

1. Sistema de capitalización simple.
2. Sistema de capitalización compuesta.

1.1.3. Sistema de capitalización simple

En este sistema el interés es directamente proporcional al plazo de la operación. Así por ejemplo, si la tasa de interés es del $5\,\%$ a 30 días y el capital inicial es de $\$10\,000$, entonces se pagará un interés de:

- $\$500$ en un plazo de 30 días,
- $\$1000$ en un plazo de 60 días,
- $\$1500$ en un plazo de 90 días.

La fórmula para el cálculo del interés I producido sobre un capital inicial C en un plazo t es:

$$I = C \cdot i \cdot t.$$

En dicha fórmula el tiempo t debe estar expresada en la unidad de tiempo a la que corresponde la tasa de interés. Así por ejemplo, si la tasa es a 30 días, entonces un plazo de 60 días corresponde a $t = 2$.

Ejemplo 1.2. Se pide un préstamo de $\$60\,000$ por un período de 90 días. La operación es pactada bajo el régimen de capitalización simple y con una tasa de interés del 4 % a 45 días.

En este caso, la tasa de interés expresa el interés cobrado en un período de 45 días. Para el cálculo del interés es necesario expresar el plazo de la operación en la unidad de tiempo *45 días*:

$$90 \text{ días } = 2 \cdot 45 \text{ días.}$$

Así, el interés que se cobra en la operación es de

$$I = \$60000 \cdot 0{,}04 \cdot 2 = \$4\,800,$$

por lo cual el individuo deberá devolver un total de $\$64\,800$ a los 90 días.

1.1.4. Sistema de capitalización compuesta

En el sistema de capitalización compuesta el interés se calcula en los sucesivos períodos teniendo en cuenta el capital acumulado en el período anterior. Se dice que el interés se *capitaliza*.

Por ejemplo, si la tasa es del $5\,\%$ a 30 días y se comienza con un capital de $\$10\,000$, entonces a los 30 días se habrán acumulado

$$\$10\,000 \cdot (1 + 0{,}05) = \$10\,500.$$

Así, en un segundo período el interés se calculará sobre $\$10\,500$ será igual a

$$\$10\,500 \cdot (1 + 0{,}05) = \$11\,025.$$

De esta manera, el interés obtenido en los primeros períodos es:

- $\$500$ a los 30 días,
- $\$1\,025$ a los 60 días,
- $\$1\,576{,}25$ a los 90 días.

De esta manera, el crecimiento del capital en un sistema de capitalización compuesta es mayor que en un sistema de capitalización simple.

La fórmula para el cálculo del monto final al cabo de n unidades de tiempo ($n = 1, 2, 3, \ldots$), viene dada por

$$C(n) = C \cdot (1 + i)^n,$$

por lo que el interés generado en ese período está dado por

$$I = C \cdot ((1 + i)^n - 1).$$

Ejemplo 1.3. Supongamos que se ha depositado en un plazo fijo a 35 días un monto de $\$100\,000$, y se realiza una renovación automática del plazo fijo en los siguientes dos vencimientos.

El interés en cada plazo resulta ser:

- $2{,}5\,\%$ en el primer plazo,
- $2{,}4\,\%$ en el segundo plazo,
- $2{,}8\,\%$ en el tercer plazo.

Calcular el monto disponible a los 105 días de la operación si:

a) Si se realiza renovación total.

b) Si se realiza renovación parcial.

Solución:

En el caso de la renovación total, el plazo fijo se renueva sobre el capital inicial más los intereses devengados en ese período. En cambio en la renovación parcial el plazo fijo se renueva únicamente sobre el capital inicial.

De esta manera, en el caso de la renovación total el capital obtenido en los sucesivos períodos será:

- $\$100\,000 \cdot 1{,}025 = \$102\,500$ a los 35 días,
- $\$102\,500 \cdot (1{,}024) = \$104\,960$ a los 70 días,
- $\$104\,960 \cdot (1{,}028) = \$107\,898{,}88$ a los 105 días.

Esto es:

$$\$100\,000 \cdot (1{,}025) \cdot (1{,}024) \cdot (1{,}028) = \$107\,898{,}88.$$

En cambio, en el caso de la capitalización simple los sucesivos montos serán:

- $\$100\,000 \cdot 1{,}025 = \$102\,500$ a los 35 días,
- $\$102\,500 + \$100\,000 \cdot (0{,}024) = \$102\,900$ a los 70 días,
- $\$102\,900 + \$100\,000 \cdot (0{,}028) = \$105\,700$ a los 105 días.

Esto es:

$$\$100\,000 \cdot (1 + 0{,}025 + 0{,}024 + 0{,}028) = \$107\,898{,}88.$$

1.2. Tasa nominal anual y tasa efectiva anual

En muchos casos en que se realiza una operación financiera bancaria, o en un pago en cuotas a través de una tarjeta de crédito, se enuncia la tasa nominal anual y la tasa efectiva anual.

La tasa nominal anual (TNA) no es una tasa que se aplica directamente sino que sirve como referencia para el cálculo de una tasa particular, que se obtiene con proporcionalidad directa.

Así por ejemplo, si para los plazos fijos a 30 días se tiene una TNA del 25 %, significa que la tasa a 30 días es:

$$i_{30\,\text{días}} = \text{TNA} \times \frac{\text{plazo en días}}{365} = 0{,}25 \cdot \frac{30}{365} = 0{,}0205 = 2{,}05\,\%.$$

Por otra parte, la tasa efectiva anual (TEA) es una tasa *equivalente* a la tasa real que se está aplicando, pero que corresponde a 365 días.

En el reciente ejemplo se tiene una tasa del $2{,}05\,\%$ a 30 días. Suponiendo que esta misma tasa se aplica sucesivamente con capitalización compuesta durante 365 días sobre un capital unitario, el monto final será

$$\$1 \cdot (1{,}0205)^{\frac{365}{30}} = \$1{,}2800,$$

por lo cual la TEA resulta del $28\,\%$.

Esta tasa efectiva resulta útil para poder comparar tasas de interés en distintos plazos. Por ejemplo, si se tiene una tasa del $4{,}3\,\%$ para 30 días y una tasa del $5{,}2\,\%$ para plazos de 45 días, puede no ser tan claro cuál de las dos tasas es más conveniente. Calculando las correspondientes TEA tenemos que:

$$1{,}043^{\frac{365}{30}} = 1{,}6690 - 1 = 66{,}9\,\% \qquad 1{,}052^{\frac{365}{45}} = 1{,}5085 - 1 = 50{,}85\,\%$$

por lo que la tasa más conveniente resulta ser la de 30 días.

1.2.1. Capitalización continua

Consideremos una tasa nominal anual del 8 %, que se aplica con frecuencia m a lo largo del año. Esto es, si $m = 2$ se aplica semestralmente, si $m = 3$ se aplica cuatrimetralmente, y así siguiendo. Consideremos algunos valores de m crecientes. La Tabla ilustra algunos valores de la tasa efectiva periódica y la TEA:

frecuencia m	tasa efectiva periódica	tasa equivalente anual i
1 (anual)	$0,08$	$0,08$
2 (semestral)	$0,04$	$0,0816$
3 (cuatrimestal)	$0,0233$	$0{,}0819$
4 (trimestral)	$0,02$	$0,082432$
12 (mensual)	$0,0067$	$0,083000$
365 (diaria)	$0,000219$	$0,083278$

Cuadro 1.2.1: Tasa de interés nominal constante $= 8\,\%$

A medida que la frecuencia aumenta, la TEA converge a una tasa instantánea igual al límite de la expresión:

$$(1 + \frac{0{,}08}{m})^m - 1 = e^{0{,}08}.$$

Se dice que la TEA para la *capitalización continua* es igual a

$$TEA = e^{0,08} - 1 = 0,08328.$$

En este caso, para determinar el monto final (capital más interés) producido sobre un capital inicial C en un plazo t (en años) el cálculo es:

$$\text{Monto final } = C \cdot e^{0,08\,t}$$

Por ejemplo, si se quiere determinar el monto acumulado en medio año entonces para la capitalización con frecuencia m el valor obtenido es:

$$C \cdot (1 + \frac{0{,}08}{m})^{\frac{m}{2}}.$$

El límite de esta expresión cuando m tiende a infinito es:

$$C \cdot e^{0{,}08\,\frac{1}{2}}.$$

1.3. Valor descontado

La existencia del interés es consecuencia de que el dinero tiene un valor temporal. Es decir, \$1 000 hoy no es lo mismo que \$1 000 dentro de un año. Así, para poder comparar dos cantidades de dinero éstas deben estar disponibles en el mismo momento, o bien debe buscarse el valor equivalente de estas cantidades en un determinado instante.

Para esto se debe considerar el sistema de capitalización que se esté aplicando en las operaciones financieras: capitalización simple, capitalización compuesta o capitalización compuesta continua.

Por ejemplo, en un sistema de capitalización compuesta con una tasa del 10 % a 30 días, un monto de \$1 000 a la fecha es equivalente a un monto de \$1 100 a 30 días. En este caso se dice que el *valor descontado* de \$1 100 al día de hoy es igual a \$1 000:

$$\frac{\$1\,100}{1{,}10} = \$1\,000.$$

Si se utilizara una tasa nominal anual del 10 % con capitalización continua, entonces el valor descontado de \$1 100 al día de hoy es igual a:

$$\$1\,100 \cdot e^{-0{,}10 \cdot \frac{30}{365}} = \$991,81.$$

Capítulo 2

El mercado financiero

2.1. Introducción

Existen distintas posibilidades de invertir dinero con el objetivo de obtener una ganancia futura. Una de ellas es depositando el dinero a un interés cierto o conocido, como lo es en una cuenta bancaria. Otro tipo de inversión es a través de la adquisición de activos financieros,

2.2. Mercados financieros

Los instrumentos financieros se comercializan en el **m**ercado financiero. En la práctica existe un mercado formal u organizado y un mercado extrabursátil, denominado también **o**ver the counter market (OTC). En el caso del mercado formal, las negociaciones son multilaterales, es decir, existen múltiples agentes que actúan como compradores o vendedores de productos financieros. Los instrumentos que se comercializan están estandarizados, y existe una regulación de este tipo de mercados para proteger a los inversores de posibles incumplimientos de las contrapartes.

En el caso del mercado extrabursátil, las negociaciones son bilaterales, es decir, entre dos partes. En estos casos los contratos suelen acordarse entre las partes en cuanto a la cantidad y características del subyacente. No existe una regulación formal sino que se basa en un principio de confianza entre partes.

2.3. Productos básicos

Denominamos productos básicos a aquellos instrumentos financieros cuyo valor no depende de otro activo. Entre ellos están las acciones, los índices, las monedas, los commodities y los bonos.

Una **acción** consiste en la posesión de una pequeña parte de una empresa. Cuando una compañía determinada desea recaudar capital una de las opciones que tiene para hacerlo es emitiendo acciones. De esta manera la empresa consigue capital sin tener que verse comprometida a devolver o amortizar esos fondos a quien pone el dinero, y por lo tanto sin adquirir una deuda. Al comprarlas, quienes invierten capital en ellas se convierten en nuevos propietarios de una parte de la compañía. Los inversionistas esperan que su capital se valore cada vez más en la medida en que la compañía crezca. La mecánica es simple: si las ganancias y las finanzas de la empresa crecen saludablemente de igual manera lo harán sus acciones, y el valor que éstas representan. Y en la misma medida en que la rentabilidad de las acciones aumente, su precio también tenderá a subir.

Existen acciones que otorgan dividendos, que consisten en una bonificación periódica que se paga a los tenedores de estas acciones. Así es que el valor en la posesión de una acción proviene de los **d**ividendos o de cualquier crecimiento en el valor de la acción. Los dividendos son pagos periódicos, usualmente trimestrales o semestrales.

Los **commodities** son materias primas, mercaderías o servicios tales como metales preciosos, petróleo, cereales, ganado, etc., que se comercializan de manera estandarizada en el mercado. Los precios de estos productos son no predecibles pero muestran frecuentemente efectos estacionarios. La escasez y mayor demanda de estos productos produce precios más altos. Hoy la definición se hace extensiva a todo aquello que sea subyacente de un contrato futuro y que no sea un valor.

- Granos: Soja, Trigo, Maiz, Avena, Cebada.
- Softs: Algodón, Jugo de Naranja, Café, Azúcar, Cacao.
- Energías: Petróleo Crudo, Gas Natural, Etanol, Nafta.
- Metales: Oro, Plata, Cobre, Aluminio, ...
- Carnes: Ganado, Manteca, Leche.
- Financieros: Bonos, Eurodólar, Fed Funds a 30 días.
- Índices: Dow Jones, S&P500, Nasdaq100, Nikkei225, E-Mini Nasdaq.
- Monedas: Libra Esterlina, Euro, Dólar, etc.

Otro activo básico son las **monedas** o **divisas**. Se refiere a toda moneda que corresponde a una soberanía distinta del país de origen. La cotización de la moneda extranjera está dada en general por el tipo de cambio a la moneda nacional. Son ejemplos en nuestro país el dólar, euro, yen, libra esterlina, reales, etc.

Los **bonos** son instrumentos financieros de deuda que pueden ser emitidos por entes privados o por el Estado. Un bono es una promesa de pago futuro de un monto denominado Nominal, que puede ser devuelto en un pago o en varias cuotas o amortizaciones.

Los bonos con cupón pagan periódicamente un interés por la parte de la deuda aún no amortizada, y estos pagos periódicos se denominan cupones. Pueden o no a su vez amortizar parte de la deuda en sucesivos pagos. Ejemplo: Bonos AL30, AC17.

Los bonos cupón cero o bonos a descuento son aquellos que amortizan la deuda al vencimiento y no pagan cupones. Por ello el precio de estos bonos es siempre inferior al nominal y se emiten a un valor descontado del nominal.

Los denominados **índices** accionarios o bursátiles constituyen conjuntos teóricos de activos financieros que se utilizan para medir el comportamiento global del mercado de valores o de algún segmento de éste. Son ejemplos de índices en nuestro país el Índice Merval (S&P Merval), Índice BYMA (S&P BYMA), entre otros.

2.4. Derivados

Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende o deriva de los valores de otros activos subyacentes. Estos activos subyacentes podrían ser activos básicos u otros derivados.

En términos generales, un derivado consiste en un contrato entre dos partes para comprar o vender el subyacente. Las características y condiciones de estos contratos dan lugar a diferentes tipos de derivados, tales como contratos forward, futuros y opciones. Todo derivado tiene una madurez o vencimiento, y el valor de este contrato en función de su subyacente se denomina **payoff** del derivado. En otras palabras, es cuánto paga el contrato a una parte expresado en términos del activo que subyace al contrato. En algunos casos los contratos tienen un precio inicial, pero este precio no es considerado en el payoff.

Así, si se tiene un derivado cuyo subyacente tiene un precio $S(t)$, y el contrato vence en $t = T$, el payoff será una función

$$V(T) = f(S(T)).$$

2.4.1. Contratos Forward

Un **c**ontrato forward es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un **subyacente**

- en un tiempo futuro, determinado, y
- a un precio determinado.

Este tipo de contratos funciona en el mercado extrabursátil, y se acuerda entre dos entidades financieras o una entidad financiera y sus clientes.

Se denomina **p**osición long a la que asume la parte que comprará el subyacente, y **p**osición short la que asume la parte que venderá el subyacente. El contrato especifica, entre otros:

- T: el tiempo de **m**adurez, y
- K: el precio que se pagará por el subyacente, llamado **d**elivery price o **precio de entrega**.

El valor inicial de un contrato forward es cero, y para esto el precio de entrega K se elige de modo que el valor del forward sea cero, es decir, que ninguna de las partes tenga a priori mayor ventaja.

El **p**ayoff de un contrato forward con precio de entrega K es el valor del contrato forward en su madurez en función del valor del subyacente. Denotemos por $S(T)$ el precio del subyacente a la madurez del contrato. Al tiempo T, el agente en la posición long adquiere un subyacente de valor $S(T)$ a un precio K. Quien está en la posición short entrega un subyacente de valor $S(T)$ y recibe K unidades de moneda. Así, el **p**ayoff del contrato forward está dado por:

$$S(T) - K, \qquad \text{para la posición long}$$

$$K - S(T), \qquad \text{para la posición short}$$

2.4.2. Futuros

Al igual que un contrato forward, un futuro es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en un cierto tiempo futuro a un determinado precio. Las diferencias con el contrato forward son las siguientes:

- Los futuros se comercializan en mercados formales o “exchanges”,
- existe una institución intermediaria: “clearinghouse” o caja compensadora, que garantiza a todos los agentes del mercado la integridad financiera,
- los futuros están estandarizados; especifican:

- cantidad del subyacente,
- mecanismo de entrega,
- fecha de entrega (mes y período).

- Los futuros requieren que los agentes depositen un **m**argen como garantía de que estarán en condiciones de cumplir con las obligaciones financieras del contrato.

La cotización de un contrato futuro es el precio futuro que se establece en el día para ese tipo de contratos. Estos precios futuros se determinan **e**n el piso del mercado, y van variando desde el inicio del contrato hasta su madurez.

Los subyacentes que se comercializan con futuros son muy variados. Desde commodities como mondongo de cerdo (pork bellies), azúcar, lana, listones de madera, cobre, aluminio, oro; y activos financieros como índices, monedas, bonos.

La mayoría de los contratos futuros no llegan a la situación de delivery. La razón es que la mayoría de los agentes cierran o cancelan su posición antes entrando en una posición contraria a la original. Por ejemplo, alguien que el 10 de enero entra en una posición short en un futuro a julio, cancela su posición el 15 de marzo entrando en una posición long en un futuro también a julio. La ganancia o pérdida en cada una de las posiciones se refleja en la **c**uenta de margen y está determinada por la variación en el precio futuro entre el 10 de enero y el 15 de marzo. Algunos contratos futuros especifican que no hay entrega o delivery del subyacente, y en estos casos es el propio mercado quien cierra las posiciones de todos los agentes al vencimiento del contrato.

Operaciones sobre márgenes

Si dos inversores acuerdan un contrato para negociar un determinado activo a un determinado precio en el futuro, habrá necesariamente un riesgo. Una de las partes puede retirarse antes, o simplemente no tener recursos financieros para afrontar el acuerdo.

Una de las funciones del mercado es regular y garantizar el funcionamiento de estos acuerdos. En el caso de los contratos futuros se utiliza una **c**uenta de margen.

Así, al ingresar en un contrato futuro, ambas partes del contrato deben depositar en una cuenta margen una cantidad de dinero llamado **m**argen inicial. Este margen irá variando día a día, hasta la finalización del contrato según la cotización del futuro. Si el precio futuro sube, se incrementará la cuenta margen para la posición long y se descontará de la posición short. La situación inversa sucederá si el precio futuro baja.

Día	Cotización	Ganancia (Pérdida)	Ganancia acumulada	Cuenta margen	Margin call
	600			4.000	
1	597	(600)	(600)	3.400	
2	597,10	20	(580)	3.420	
3	593,30	(760)	(1.340)	2.660	1.340
4	593,60	60	(1.280)	4.060	

Cuadro 2.4.1: Operaciones sobre márgenes

Por ejemplo, supongamos que un futuro para comprar 100 oz. de oro en Diciembre es por \$600 por onza, y que un inversor invierte en dos contratos en posición long. El inversor contrata un broker, quien le requiere que deposite en una cuenta margen la suma de \$4000. A su vez se determina un margen de mantenimiento de \$3.000. Esto signfica que si su cuenta margen es menor a este valor, se recurrirá a un **call margin** para que el inversor reponga en esta cuenta al valor del margen inicial.

La Tabla 2.4.1 muestra una secuencia posible de cotización de este futuro, y la correspondiente evolución de la cuenta margen.

Así, el día 1 la cotización bajó \$3 por onza, por lo cual el inversor en posición long tiene una pérdida de \$600, y su cuenta margen se reduce a \$3.400. El día 3 la pérdida acumulada es de \$1.340, por lo que su cuenta margen acumula menos que el margen de garantía requerido. El call margin indica que debio depositarse un monto tal que incremente la cuenta margen a \$3.000.

Si al finalizar el día 4 el inversor cancelara su posición, tendría en su cuenta margen un total de \$4.060, que indica una ganancia neta de $\$60 - \$1{,}340 = -\$1{,}280$:

$$200 \cdot (593,60 - 600) = 200 \cdot 6,40 = -1{,}280.$$

Convergencia del precio futuro

Los precios futuros tienden al precio del subyacente a medida que se aproximan a la madurez del contrato. Esto ocurre así por la propia oferta y demanda. Por ejemplo, si el precio futuro se mantuviera por encima del precio del subyacente, habría mayor cantidad de agentes buscando una posición short para poder vender el subyacente a un mayor precio y comprarlo a un menor precio en una misma fecha o fechas muy cercanas. Sin embargo no habría interesados en la posición long por lo cual el precio futuro tenderá a bajar.

En particular, si un agente mantiene su posición en el contrato durante toda su vigencia, su cuenta margen tendrá exactamente el payoff a la madurez del futuro.

2.4.3. Opciones

Las opciones son contratos que dan derecho a una de sus partes a comprar (o vender) el subyacente, a un precio determinando en un tiempo futuro. Las opciones que dan derecho a compra se denominan **calls** y las que dan derecho a venta se denominan **puts**. Quien compra una opción está en posición long sobre el contrato, y quien la vende está en posición short. Si la posición long ejerce su derecho se dice que **ejerce** la opción, y en caso contrario que no la ejerce.

Las opciones que se negocian en mercados formales se denominan **opciones vanilla** o **estándar**. En el mercado extrabursátil se negocia una variedad mucho mayor de opciones y se denominan en general **opciones exóticas**.

Dentro de las opciones vanilla existen dos tipos:

- Opciones europeas: son aquellas cuyo ejercicio puede ocurrir sólo en la fecha de madurez.
- Opciones americanas: son aquellas que pueden ser ejercidas en cualquier momento previo a la madurez.

Dentro de las opciones exóticas la variedad es mucho mayor. Algunas de ellas son opciones cuyo payoff no depende del valor del subyacente a la madurez, sino de la trayectoria de precios que ha tenido el subyacente. Algunas de ellas son:

- Opciones look-back: son aquellas cuyo payoff depende del valor máximo, o del valor mínimo, que haya alcanzado el subyacente desde el inicio del contrato hasta su madurez.
- Opciones asiáticas: son aquellas cuyo payoff depende del promedio de valores que ha tomado el subyacente durante la vigencia del contrato, o de una parte de ese tiempo.
- Opciones barrera: son aquellas cuyo payoff depende de que el subyacente haya cruzado una determinada barrera a lo largo de la vigencia del contrato.

Otras opciones exóticas son las binarias, bermudas, choice, shout, basket, exchange, y muchas otras.

Dado que en una opción una de las partes adquiere un derecho, la otra parte tiene entonces una obligación. Es decir, si una parte tiene derecho a comprar el subyacente a un determinado precio, su contraparte tendrá la obligación de venderla a ese precio. Esta situación crea una desigualdad financiera, dado que quien tiene el derecho nunca estaría en desventaja mientras que su contraparte nunca logra un beneficio. Por lo tanto estos contratos no tienen costo cero: quien adquiere el derecho debe pagar una **prima**. La determinación de esta prima, particularmente para aquellas opciones que no cotizan en el mercado, es un objeto de estudio en finanzas cuantitativas, y será una parte de lo que veremos en este curso.

Opciones europeas

Dentro de las opciones europeas existen dos tipos:

- Opciones de compra u opciones **call** son aquellas que dan al tenedor el derecho **a** comprar el subyacente en una fecha determinada y a un precio determinado.
- Opciones de venta u opciones **put** dan al tenedor el derecho a **v**ender el subyacente en una fecha determinada y a un precio determinado.

En cada contrato se fija entonces un **p**recio de ejercicio o **strike**, que es el precio pactado al cual se comprará o venderá el subyacente, en la fecha de expiración o también llamada **madurez** del contrato. Así, un inversor que negocia una opción adquiere una de las siguientes **posiciones** en el contrato:

a) posición long: quien compra la opción, y por lo tanto tiene derecho a ejercerla.
b) posición short: quien vende la opción o suscriptor, y por lo tanto contrae una obligación.

De acuerdo a esto existen cuatro posiciones posibles ante una opción call o put europea:

a) Posición long en una opción call,
b) posición short en una opción call,
c) posición long en una opción put,
d) posición short en una opción put.

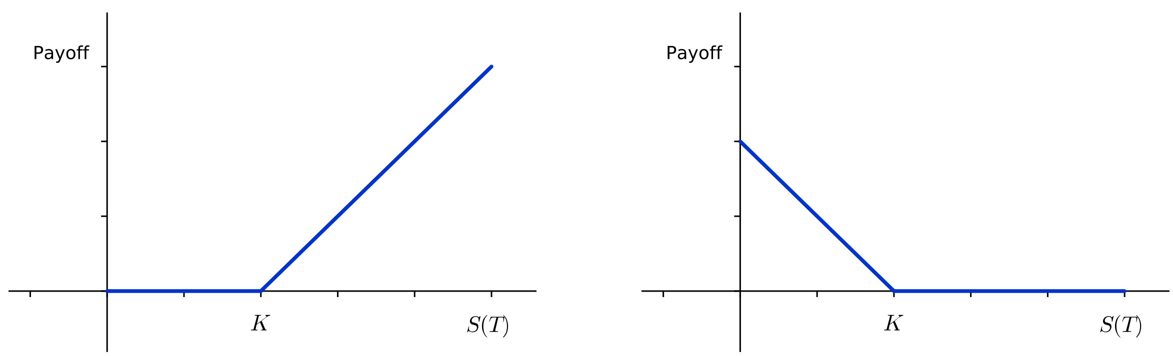
El **payoff** de una opción europea es el valor del contrato en su madurez en función del valor del subyacente. El costo inicial o prima de la opción no se incluye en el cálculo.

Si K es el precio strike y $S(T)$ es el precio final del subyacente, entonces una opción call se ejerce sólo si $S(T) > K$ ya que en caso contrario el inversor en posición long preferirá comprar el subyacente en el mercado. En el caso de una put, el inversor en posición long ejercerá la opción sólo si $K > S(T)$. Así, el valor del contrato en su madurez está dado por la ganancia o pérdida neta del inversor en caso de que se ejerza o no la opción. El Cuadro **??** resume los payoff de las opciones call y put europeas:

Opción	Payoff
Long en un call	$\max(S(T) - K, 0)$
Short en un call	$-\max(S(T) - K, 0) = \min(K - S(T), 0)$
Long en un put	$\max(K - S(T), 0)$
Short en un put	$-\max(K - S(T), 0) = \min(S(T) - K, 0))$

Cuadro 2.4.2: Payoffs de call y put europeas

Diagramas de payoff y de ganancia. Los **diagramas de payoff** para cada una de las posiciones en una opción europea con strike K son los gráficos del payoff en función del precio final del activo subyacente.



(a) Payoff en la call (b) Payoff en la put

Figura 2.4.1: Payoff en la posición long

El **beneficio** o **ganancia** real del inversor incluye además el costo de la prima.

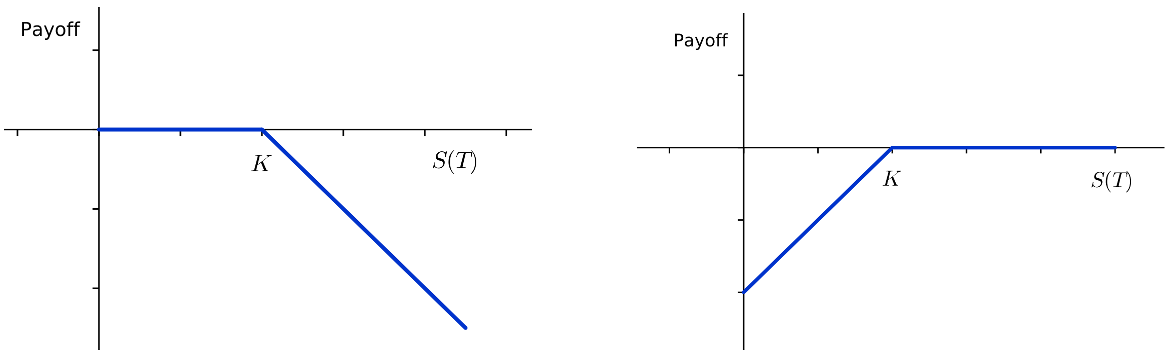
$$\text{Payoff} \pm \text{prima},$$

donde $\pm$ dependerá de la posición long $(-)$ o la posición short $(+)$.

Los diagramas de ganancia para la posición long, para opciones call y put con strike K y madurez T sobre un subyacente con precio $S(t)$ se muestran en la Figura 2.4.3.

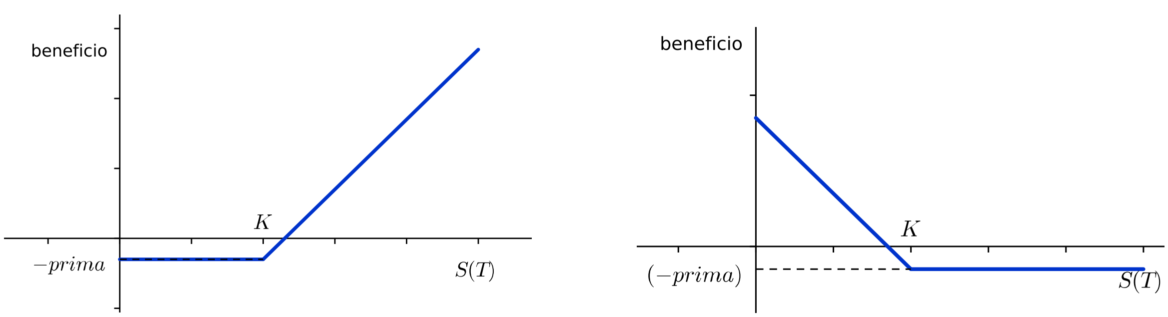
Consideremos dos opciones call con la misma madurez, sobre un mismo subyacente pero con diferente strike: $K_1 < K_2$. Dado que la opción con strike K_1 dará mayor payoff que la otra opción en caso de ser ejercida, o ambas tendrán payoff cero, entonces su prima también será mayor. Así, si denotamos con c_i a la prima de la opción con strike K_i, $i = 1, 2$, entonces

$$K_1 < K_2 \qquad \text{si y sólo si} \qquad c_1 > c_2.$$



(a) Payoff en la call (b) Payoff en la put

Figura 2.4.2: Payoff en la posición short



(a) Ganancia en la call (b) Ganancia en la put

Figura 2.4.3: Ganancia en la posición long

En el caso de las opciones put la relación es diferente. A mayor strike mayor payoff en caso que sea positivo. Por lo tanto, si denotamos p_1 y p_2 la prima de dos opciones put con strikes K_1 y K_2 respectivamente, y la misma madurez, se tiene que:

$$K_1 < K_2 \qquad \text{si y sólo si} \qquad p_1 < p_2.$$

Opciones americanas

Las opciones americanas son aquellas que permiten un ejercicio temprano, es decir, en cualquier momento previo a su madurez. En principio esta situación implica que la opción americana es al menos tan ventajosa como una europea, con la misma madurez, strike y subyacente y por lo tanto la prima de la opción americana es mayor o igual que la prima de una opción europea con idéntico strike y madurez.

Ahora bien, ¿es realmente conveniente ejercer antes de la fecha de madurez? Si se trata de una opción call la respuesta es No. Para ver esto, supongamos que un inversor posee una opción call y decide ejercer la opción. Esto significa que dispone del dinero K del strike y compra la acción. Llegado el tiempo T este inversor ya no tiene el dinero y sólo tiene la acción. Ahora bien, si no hiciera el ejercicio temprano podría mantener el dinero $\$K$ en el banco hasta la madurez de la opción, cobrar el interés y comprar la acción al mismo precio K, o a menor precio si fuera el caso. Es decir, tendrá la acción y dinero extra.

Este no es el caso con las opciones put porque el inversor no es poseedor del dinero sino del subyacente. Por lo tanto, si el subyacente tiene un valor menor que el strike podría venderla e invertir el dinero hasta el tiempo de madurez. Si no lo hiciera, podría ocurrir que al momento de madurez la acción tuviera un menor valor.

Estas propiedades que deducimos desde un punto de vista intutitivo, podrán ser demostradas luego cuando incorporemos un modelo matemático para el mercado.

2.5. Actores en los mercados financieros

Los actores en los mercados financieros pueden clasificarse en: hedgers o coberturistas, especuladores y arbitrajistas.

Los **c**oberturistas utilizan futuros, forwards y opciones para reducir el riesgo ante futuros cambios o movimientos de los precios en el mercado.

Los **e**speculadores los utilizan para apostar en una determinada dirección futura de una variable subyacente.

Los **a**rbitrajistas toman posiciones contrapuestas en dos o más instrumentos para obtener beneficios.

Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1. Supongamos que en la fecha 16 de enero una compañía de EEUU sabe que deberá pagar 1 millón de libras a una empresa británica el 16 de marzo del mismo año.

Esta compañía decide entrar (long) en un contrato forward a dos meses para comprar 1 millón de libras en el mercado a un tipo de cambio de $1{,}4$ dólares la libra (tipo libra/dólar = $1{,}4$). Llegado el 16 de marzo ejerce el contrato forward y paga el millón de libras.

De esta manera la compañía se ha asegurado el costo de la transacción por $1{,}4$ millones de dólares, y ese precio ya era conocido el 16 de enero. Es decir, ha ejercido una **cobertura** sobre el riesgo en el tipo de cambio futuro.

Supongamos que al día 16 de marzo el precio de mercado de la libra es x dólares la libra (tipo libra/dólar = x). Significa que por cada libra pagó $1{,}4$ dólares pudiendo haber pagado x dólares en el mercado. Esto implica una ganancia (o pérdida) de $x - 1{,}4$ dólares por libra.

Así, si la tasa de cambio fuera mayor, el coberturista gana y si la tasa de cambio fuera menor, el coberturista pierde. Es decir, el coberturista puede asegurar el precio y de esa manera se protege de un riesgo, pero no puede asegurar si ha sido la mejor elección.

Otro modo de realizar una cobertura es utilizando opciones. Supongamos que un inversor que en Marzo posee 1000 acciones de Microsoft. El precio actual por acción es $73. El inversor considera que el precio puede bajar de aquí a dos meses. Para cubrirse del riesgo de la devaluación de este activo, el inversor podría asegurarse un precio futuro para la venta de la acción, pero sin comprometerse a venderlas si no le es conveniente.

Asumamos que compra 1000 opciones put con un precio strike de 65 dólares por opción, y que cada opción le cuesta $2{,}50$ dólares. Es decir, el inversor tendrá derecho de vender sus mil acciones a 65 dólares, pero si el precio de las acciones supera ese valor entonces no ejercerá la opción.

La estrategia le cuesta al inversor $1000 \cdot 2{,}50 = 2500$ dólares, pero garantiza que las acciones pueden ser vendidas al menos a $65 cada una. De modo que si en dos meses el precio de las acciones está por debajo de $65 entonces se puede ejercer la opción y venderlas por $65.000, y teniendo en cuenta el valor de la opción el beneficio neto será de $62.500. Si no ejerce la opción podrá venderlas a un precio superior y el beneficio será mayor.

Como puede verse, a diferencia de los forwards, las opciones permiten al coberturista asegurarse ante movimientos adversos de los precios y también obtener ganancia si los cambios son favorables. Por otro lado, las opciones tienen una prima inicial mientras que los contratos forward tienen costo cero.

Ejemplo 2.2. Mientras que los coberturistas buscan protegerse del riesgo, los especuladores buscan una posición en el mercado. O bien apuestan a que los precios aumenten o a que los precios bajen.

Consideremos un inversor en EEUU que en febrero cree que la libra va a fortalecerse con respecto al dólar en los próximos dos meses, y apuesta en esto £250.000.

Una posibilidad es comprar 250.000 libras con la esperanza que puedan ser vendidas luego con beneficio. Las deposita en una cuenta a intereses (en libras) y luego las vende. Si la libra se deprecia, el inversor pierde proporcionalmente al valor invertido. No tiene protección al riesgo.

Ejemplo 2.3. El arbitraje consiste en entrar simultáneamente en dos o más mercados para obtener ganancia sin riesgo.

Por ejemplo, supongamos que una acción puede comprarse a \$152 en Nueva York y a £100 en Londres, al tiempo que el tipo de cambio es \$1.55 por libra (tipo libra/dólar = $1{,}55$). Un arbitrajista puede simultáneamente comprar 100 acciones en Nueva York y venderlas en Londres obteniendo una ganancia libre de riesgo de

$$100 \times [(\$1{,}55 \times 100) - \$152]$$

o sea \$300 libre de costos de transacción. Los costos de transacción probablemente eliminarían las ganancias para un inversor pequeño, pero para grandes inversiones habría un beneficio seguro.

Las oportunidades de arbitraje no duran demasiado en el mercado. Justamente, un requerimiento excesivo de un activo aumentará su precio, o un aumento en sus ventas disminuirá el precio.

2.6. Estrategias con opciones y acciones

2.6.1. Portfolios

Un **portfolio** o cartera, es un conjunto de activos, derivados e inversiones bancarias que puede tener un inversor. El valor de este portfolio es la suma de los valores de sus componentes, con un signo positivo o negativo según estén a favor o no del inversor. Las posiciones long en un activo o derivado financiero y una cuenta bancaria son valores positivos. Las posiciones short y las deudas tienen valor negativo.

Hemos definido hasta el momento el significado de posición short y long para el caso de contratos forward, futuros y opciones. Una posición long en una acción significa ser tenedor de la misma. Una posición short en una acción o **short sell position** (venta en corto) se refiere a una situación especial en la que un inversor vende acciones que no son propias sino dadas en préstamo por un tercero. El inversor debe devolver las acciones en el futuro y pagar al titular todos los ingresos que le corresponderían por la tenencia de las acciones.

Veremos algunos portfolios específicos construidos con opciones y posiciones en el subyacente que permiten a un inversor una cobertura específica.

2.6.2. Call cubierta o Covered call

Un inversor que está en posición short en una opción call estará obligado a vender el subyacente si el precio del mismo supera el strike K al vencimiento de la opción. Una call cubierta es una estrategia de un inversor que posee el subyacente y a su vez vende una opción call sobre el mismo subyacente. Así la estrategia de call cubierta consiste en:

- Una posición long en el subyacente (acción),
- Una posición short en una opción call.

El payoff de esta estrategia está dado por:

$$Payoff = S(T) - \text{máx}(S(T) - K, 0) = \begin{cases} K & S(T) > K \\ S(T) & S(T) \leq K \end{cases}$$

y el diagrama de beneficio se muestra en la Figura 2.6.1. En las líneas de puntos se señalan los diagramas de ganancia de la posición long en el activo ($S(T)$) y la posición short en la call que incluye la prima, asumiendo que la compra del activo tuvo un costo inicial $S(0)$.

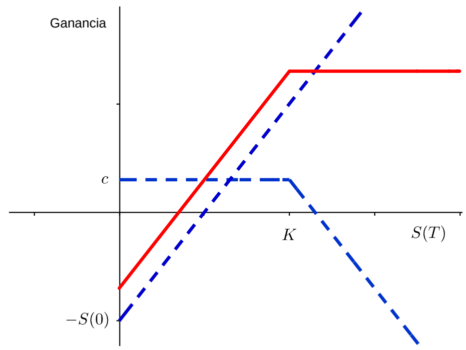


Figura 2.6.1: Diagrama de ganancia de una call cubierta

Una estrategia análoga es la **put protectiva** o **protective put**, que consiste en una posición long en una put y en el subyacente.

2.6.3. Spreads

Los spreads son estrategias que utilizan opciones del mismo tipo. Esto es: todas call o todas put. Un inversor que cree que el mercado está en alza utiliza un **bull spread**, mientras que si cree que está en baja utiliza un **bear spread**.

Un **b**ull spread con calls se construye con

- 1 posición long en una call, con strike $K1$, y
- 1 posición short en una call, con strike $K2$,

con $K1 < K2$ y ambos con la misma fecha de expiración T. Luego el payoff está dado por

$$\text{payoff(bull spread con calls)} = \text{máx}\{S(T) - K1, 0\} - \text{máx}\{S(T) - K2, 0\}.$$

Notemos que el payoff es no negativo, y su valor es positivo si $S(T)$ es mayor que K_1.

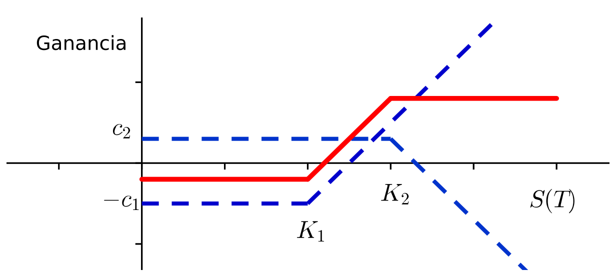


Figura 2.6.2: Diagrama de ganancia del bull spread con calls

Sin embargo, un bull spread con calls tiene un costo inicial $c1 - c2$. Por ello, si el valor de la acción baja habrá una pérdida, aunque acotada.

Un **b**ear spread con calls se construye con

- 1 posición short en una call, con strike $K1$, y
- 1 posición long en una call, con strike $K2$,

con $K1 < K2$ y ambos con la misma fecha de expiración T. Luego el payoff está dado por

$$\text{payoff(bear spread con calls)} = max(S(T) - K2, 0) - max(S(T) - K1, 0).$$

La Figura 2.6.3 muestra los gráficos de payoff y ganancia.

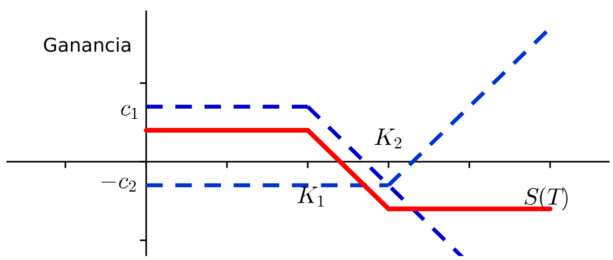


Figura 2.6.3: Diagrama de ganancia del bear spread con calls

También existen estrategias similares utilizando puts. Por ejemplo, una estrategia **b**ull spread con puts se construye con

- 1 posición long en una put, con strike $K1$, y
- 1 posición short en una put, con strike $K2$,

con $K1 < K2$ y ambos con la misma fecha de expiración T.

2.6.4. Combinaciones

Las **c**ombinaciones, son estrategias que consisten en posiciones en distintos tipos de opción: calls y puts.

Por ejemplo, un **straddle** se construye con

- 1 posición long en una call y
- 1 posición long en una put,

ambos con la misma fecha de expiración T y strike K. Se dice que el inversor **c**ompra un straddle. El payoff de un straddle está dado por

$$\text{payoff(straddle)} = \max\{S(T) - K, 0\} + \max\{K - S(T), 0\} = |S(T) - K|.$$

La Figura 2.6.4 muestra los diagramas de ganancia del straddle y de la call y put que lo componen. Notemos que el costo inicial está dado por $c + p$.

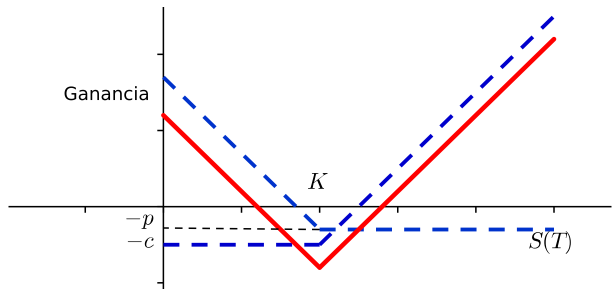


Figura 2.6.4: Diagrama de ganancia para un straddle

El **s**trangle es muy similar al straddle. Se construye con

- 1 posición long en una put con strike $K1$ y
- 1 posición long en una call con strike $K2$,

ambos con el mismo tiempo de expiración T, y con $K1 < K2$.

Si asumimos que el valor de K en el straddle es intermedio entre $K1$ y $K2$, es fácil ver que el costo inicial de un strangle es menor que el de un straddle con strike K. Sin embargo, para asegurar ganancia, el movimiento de precios tendrá que ser mayor que en el caso del straddle. Existen otras estrategias como **s**trips, **s**traps que involucran dos opciones calls y una put o viceversa.

Capítulo 3

Principios para la valoración de derivados

3.1. Introducción

En las secciones anteriores hemos definido los contratos forward, futuros y algunos tipos de opciones. Los contratos forward y futuros son contratos que tienen precio $\$0$, y para esto se debe proponer un precio de entrega K que sea *justo* para ambas partes. Esto significa que ninguna de las dos posiciones pueda tener una oportunidad de arbitraje. Lo mismo ocurre con la prima de las opciones call y puts. Si bien el precio futuro para los contratos futuros, y las primas de call y puts estándar son las que impone el mismo mercado, esto no es así para los derivados que no cotizan públicamente, o derivados exóticos.

Ahora bien, si los precios que el mercado impone se deben a que trata de eliminar el arbitraje, esta hipótesis puede servir para valorar otros derivados financieros o encontrar relaciones entre sus precios.

3.1.1. La tasa libre de riesgo

A los efectos de valoración de derivados se asume la existencia de una tasa de interés llamada **tasa libre de riesgo**. Se trata de una tasa de referencia que no tiene riesgo crediticio, es decir, que un inversor sabe que invirtiendo a esa tasa podrá recuperar el capital. Por ejemplo, los bonos del tesoro, o alguna tasa a la cual el propio estado ofrece para la devolución del préstamo.

En lo que sigue de este capítulo asumiremos:

- Una capitalización continua con tasa nominal anual constante $r = \ln(1 + i)$.
- Esta tasa r es la misma para préstamos y depósitos bancarios.

3.2. La hipótesis de no arbitraje

Los portfolios compuestos por activos y derivados suelen tener un comportamiento aleatorio debido a la naturaleza propia del subyacente. Sin embargo, en algunos casos veremos que pueden formarse portfolios con derivados y sus subyacentes cuyo comportamiento en un momento dado sea previsible, es decir, sin riesgo. Por ejemplo, si un inversor está en posición short en un contrato forward con precio de entrega K y a su vez posee el subyacente, entonces el payoff de este portfolio será $K - S(T) + S(T) = K$, independientemente del valor que tome el subyacente. Por otro lado, una inversión de $K \cdot (1+i)^{-T}$ también en una cuenta bancaria también arroja un payoff igual a K. Notemos que el valor inicial del primer portfolio es $S(0)$ y el segundo es $K \cdot (1+i)^{-T}$. Entonces, ¿existe alguna relación entre las cantidades $S(0)$ y K?

En un mercado en el cual no existe posibilidad de arbitraje la respuesta es sí, y surge del siguiente **principio de no arbitraje**:

No es posible invertir en un portfolio con costo cero y que exista una probabilidad positiva de ganancia futura y una probabilidad nula de pérdida.

Equivalentemente, si se invierte simultáneamente en dos portfolios con un mismo payoff en un tiempo futuro T, entonces ambos portfolios tienen el mismo valor hoy.

3.2.1. Determinación del precio forward

Volvamos a la situación del portfolio anterior en el cual un inversor entra en posición short en un contrato forward y simultáneamente compra el activo subyacente:

- posición short en un forward con madurez T y precio de entrega K sobre un determinado activo.
- posición long en un subyacente,

Asumimos que el subyacente no paga dividendos.

El valor de este portfolio al tiempo T es:

$$K - S(T) + S(T).$$

Si el valor de este portfolio al momento T es K, y la tasa libre de riesgo con capitalización continua es $r = \ln(1+i)$, significa que su valor en tiempo T es equivalente a haber invertido en la cuenta de moneda una cantidad

$$K \cdot \frac{1}{(1+i)^T}$$

en $t = 0$. Pero la inversión inicial fue la compra del subyacente, $S(0)$. Por lo tanto debe ser $S(0) = K/(1+i)^T$, es decir:

$$K = S(0) \cdot (1+i)^T.$$

Esto significa que este precio de entrega K elimina la posibilidad de un arbitraje. Cualquier precio mayor o menor dará posibilidad de arbitraje a una de las dos posiciones.

Ejemplo 3.1. Consideremos un contrato forward a tres meses para comprar un subyacente que cuesta actualmente \$40 y que la tasa efectiva mensual es del 5 %. Esto indica que el precio de entrega del contrato debe ser

$$K = 40 \cdot (1{,}05)^3 = 46{,}305.$$

Si el precio forward fuera mayor, por ejemplo $K = \$47$, un inversor podría armar el siguiente portfolio:

- pedir un préstamo de \$40 a la tasa libre de riesgo,
- comprar el subyacente,
- entrar short en el forward.

Notemos que este portfolio tiene costo inicial 0 para el inversor. Pasados los tres meses, este inversor podrá vender el subyacente a \$47 y saldar la deuda en el banco, con lo cual obtiene una ganancia de

$$47 - 46{,}305 = 0{,}695,$$

por unidad de subyacente. Ha tenido una oportunidad de arbitraje: invirtiendo \$0 obtiene una ganancia positiva.

Por otra parte, si el precio forward fuera inferior, por ejemplo $\$46$, existe una posibilidad de arbitraje para la posición long. Esto es, un inversor que posee la acción podría construir el siguiente portfolio:

- vender la acción (o vender en corto),
- depositar el dinero de la venta a la tasa libre de riesgo,
- entrar en una posición long sobre el forward.

Al cabo de tres meses, retira el dinero en el banco y compra el subyacente ejerciendo el forward. Así obtiene una ganancia neta de

$$46{,}305 - 46 = 0{,}305$$

por unidad de subyacente.

Luego, el único precio que no permite arbitraje es $K = \$46{,}305$.

3.2.2. Convergencia del precio futuro al precio spot

Otra consecuencia de la hipótesis de no arbitraje es la convergencia del precio futuro sobre un subyacente al precio spot de ese subyacente a medida que se acerca la madurez del contrato. Esto es, durante la vida de un contrato futuro, el precio del subyacente puede ser mayor o menor que el precio futuro establecido para éste. Sin embargo, al acercarse la madurez del contrato, el precio futuro F y el del subyacente $S(t)$, ($t \to T$) deben muy próximos. De lo contrario existe una posibilidad de arbitraje.

Por ejemplo, si $F > S(t)$, los inversores querrán comprar el subyacente, entrar short en el futuro y así venderlo a mayor precio. Al haber mayor demanda por la posición short y menor por la posición long, el precio futuro tenderá a bajar.

Recíprocamente, si $F < S(t)$, habrá más inversores que quieran vender (o vender en corto) el subyacente y entrar en posición long para poder comprarlo a menor precio. Así esto produce un aumento en los precios futuros.

3.2.3. La paridad put-call

Determinar cuál debe ser la prima de una opción para que no exista posibilidad de arbitraje para ninguna de las partes no es un cálculo simple. De hecho dedicaremos parte de este texto para abordar algunas formas de valoración de las opciones. Sin embargo, existe una relación entre la prima de una opción put y una call europeas sobre un mismo subyacente, con la misma madurez y un mismo strike. Esto permite calcular la prima de una de ellas conocida la otra.

Introducimos la siguiente notación:

- c: la prima de una opción call europea para comprar un subyacente, con strike K, en $t = T$.
- p: el valor de una opción put europea para vender el mismo subyacente, con strike K y madurez T.

La *paridad put-call* establece una importante relación entre c y p, si ambas opciones son sobre el mismo subyacente.

Sea i la tasa de interés libre de riesgo, y sean c y p la prima de dos opciones call y put europeas, respectivamente, ambas con madurez T y strike K sobre un activo con precio S_0 al momento de iniciar el contrato. Entonces

$$c - p = S_0 - K \cdot \frac{1}{(1+i)^T}.$$

En efecto, para ver esto, consideremos los siguientes portfolios:

A) Una posición long en una call y $\$K \cdot (1+i)^{-T}$ depositados en el banco.
B) Una posición long en una put y una unidad de subyacente.

En $t = 0$, el valor del portfolio A es $c + K \cdot (1+i)^{-T}$, y el valor del portfolio B es $p + S(0)$. En $t = T$, el valor del portfolio A es

$$\max\{S(T) - K, 0\} + K = \max\{S(T), K\},$$

y el valor del portfolio B es

$$\max\{K - S(T), 0\} + S(T) = \max\{S(T), K\}.$$

Es decir, ambos portfolios tienen el mismo valor en $t = T$. Por el principio de no arbitraje, los dos portfolios deben tener el mismo valor en $t = 0$. Esto es:

$$c + K \cdot (1+i)^{-T} = p + S(0).$$

o equivalentemente,

$$c - p = S(0) - K\,(1+i)^{-T}.$$

Una forma equivalente es plantear un portfolio compuesto por una posición long en la put, short en la call y long en el activo. Este portfolio tiene valor K en $t = T$ por lo cual la inversión inicial es

$$p - c + S(0) = K\,(1+i)^{-T}.$$

Para convencernos de esto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Supongamos que el precio de una acción hoy es \$31, y que la opción call europea para comprar el mismo subyacente en 60 días a un strike $K = \$32$ es de \$3. La tasa de interés efectiva (libre de riesgo) a 30 días es del 1 %. Según la paridad put-call, el precio de una put europea bajo el mismo subyacente y con la misma madurez debe ser

$$p = c - S(0) + K \cdot (1+i)^{-T} = \$3 - 31 + 32 \cdot (1{,}01)^{-2} \approx \$3{,}37.$$

Si el precio de la put fuera mayor, por ejemplo \$5, entonces un inversor que posee una acción la vende, compra una opción call y vende una put, y deposita el dinero restante en el banco. Esto es, deposita $31 - 3 + 5 = 33$ a un interés del 1 % a 30 días por el plazo de 60 días. Notemos que esta inversión tiene costo 0 para el inversor, sólo ha transformado su portfolio (la acción) en otro del mismo valor.

A los 60 días, hay dos escenarios posibles, y en cualquiera de los casos su cuenta bancaria asciende a $\$33 \cdot (1{,}01)^2 = \$33{,}66$. Si el precio de la acción es mayor a $\$32$, ejerce la opción call por lo cual recibe la acción y paga $\$32$, y le sobran $\$1{,}66$. Es decir, ha logrado una estrategia de arbitraje transformando su portfolio en $t = 0$ y recuperándolo a los 60 días con una ganancia segura.

Si en cambio la acción vale menos que $\$32$ no ejercerá la opción call pero su contraparte ejercerá la opción put. Luego estará obligado a comprar la acción a $\$32$. Aún así, el inversor cuenta con ese dinero para afrontar la obligación y aún le sobran $\$1{,}66$. Hacemos notar que si la prima de la put hubiera sido $\$3{,}37$, entonces la cuenta bancaria tendría exactamente $\$32$ a los 60 días.

Si por el contrario el precio de la put fuera inferior a $\$5$ la estrategia de arbitraje es inversa. Dejamos como ejercicio pensar en un modo de obtener ganancia segura.

La paridad put-call no es válida para las opciones americanas. Esto se debe a que, mientras que para las opciones put puede ser conveniente el ejercicio temprano esto no es así para las opciones call. Por lo tanto, bajo las mismas condiciones de strike, madurez y subyacente, la prima P de una put europea puede ser inferior a la prima p de una put americana, pero las primas de una call americana (C) y de una call europea (c) son iguales. Luego la relación que existe entre la prima de una call americana y la prima de una put americana es

$$C + K\,(1+i)^{-T} \leq P + S(0).$$

3.3. Mercados completos

3.3.1. Replicación de portfolios

Hemos visto algunos ejemplos de uso de la hipótesis de no arbitraje para la determinación de precios forward, o para la relación de paridad put-call. En el caso de la determinación del precio forward, podemos ver que los dos siguientes portfolios valen o pagan lo mismo en $t = T$:

A) una posición long en el forward con strike K y madurez T,

B) una posición long en el subyacente y un préstamo de $\$K \cdot (1+i)^{-T}$ en el banco.

El portfolio A es un derivado del cual conocemos su payoff, pero no tiene un flujo de fondos previo. El portfolio B en cambio tendrá valor durante toda la vida del forward y además vale lo mismo que A en $t = T$. Se dice entonces que el portfolio B **replica** al forward.

En el caso de la paridad put-call también podemos ver que una posición long en la put con una posición short en la call pueden ser replicadas invirtiendo en el subyacente y la cuenta bancaria.

> Diremos que un mercado es **completo** cuando todo derivado puede ser replicable con un portfolio compuesto por el subyacente y la cuenta bancaria.

Cuando un derivado es replicable y el mercado no admite arbitraje, existe un único precio para el derivado que impide la posibilidad de arbitrar. Este precio se denomina **valor del derivado libre de arbitraje**.

Ahora bien, si un mercado no es completo pero es libre de arbitraje, y un derivado en particular no es replicable, entonces puede existir un rango de valores libres de arbitraje para este derivado. Es decir, el precio libre de arbitraje no es único.

Estos dos conceptos, mercado completo y mercado libre de arbitraje, están relacionados con términos matemáticos utilizados en los modelos de valoración de derivados. Específicamente, un modelo **sin arbitraje** está relacionado con el concepto de existencia de una medida de probabilidad llamada medida de martingala, y la noción de mercado completo con el hecho que esta medida sea única.

> En un mercado **completo** y **sin arbitraje**, todo derivado tiene un único **precio libre de arbitraje**.

Capítulo 4

Valoración de derivados

4.1. Introducción

Como se ha visto en los capítulos anteriores, los contratos forward y los futuros son derivados financieros que tienen un costo cero para ambas partes. En cambio, en el caso de las opciones, existe una prima que debe ser pagada por quien compra la opción. El valor de esta prima depende de distintos factores: la tasa de interés del mercado, el strike, la madurez del contrato, y fundamentalmente del comportamiento del activo subyacente.

En el caso de las opciones europeas, dependerá específicamente del valor del subyacente a la madurez del contrato: $S(T)$, mientras que en caso de las opciones americanas y algunas opciones exóticas la dependencia será sobre el valor del subyacente en el período entre el inicio del contrato y su madurez.

Dado que el precio del subyacente es aleatorio en el tiempo, es natural representarlo a través de un proceso estocástico discreto o continuo. En este texto trabajaremos fundamentalmente con el modelo binomial, un proceso estocástico discreto en el que se asume que en cada período el precio del activo puede tomar dos valores diferentes a partir del anterior. Luego presentaremos el caso de un proceso continuo, denominado movimiento geométrico browniano, que da lugar a la fórmula de Black Scholes para valoración de opciones.

4.2. El modelo binomial

4.2.1. Introducción

El modelo binomial para valoración de activos es un modelo probabilístico en el cual se representa a la evolución del precio de un activo a través de un **proceso estocástico discreto**. Se denomina *binomial* porque en cada instante de tiempo el precio del activo tiene una distribución binomial. Presentamos entonces una breve introducción a procesos estocásticos.

Definición 4.1. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ y un conjunto de números I, $I \subset \mathbb{R}$, un proceso estocástico X en Ω es una función

$$X : \Omega \times I \mapsto \mathbb{R}.$$

Así, para cada $t \in I$, $X(\cdot, t)$ es una variable aleatoria, y para cada $\omega \in \Omega$, $X(\omega, \cdot)$ es una función de I en $\mathbb{R}$.

Si I es un subconjunto de los números enteros, se dice que es un proceso estocástico *discreto*, y de lo contrario es un proceso estocástico *continuo*.

Habitualmente se utiliza la notación $X(t)$ suprimiendo la componente ω.

Un caso particular de proceso estocástico discreto es el siguiente, y es análogo al que utilizaremos para modelar precios de activos.

Ejemplo 4.1. Supongamos que una moneda se arroja tres veces, con tiradas independientes, y denotemos con C y X el resultado de **cara** y **cruz**, respectivamente. Asumimos que la probabilidad de que la moneda salga cara en una tirada es $\tilde{p}$ y denotamos $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$. Consideramos Ω el conjunto de todos los resultados posibles:

$$\Omega = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ CXX,\ XCC,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}.$$

Ahora consideramos un juego en el que comenzamos en $t = 0$ con un número positivo, digamos $S_0 = 12$, y en cada tiempo $t = 1, 2, 3$ se arroja la moneda y si sale C se multiplica al número por 2 y si sale cruz se divide por 2. Llamamos S_1, S_2, S_3 a los sucesivos resultados.

En este caso, el proceso estocástico está dado por una función S que depende de las tiradas de moneda y de cada tiempo t, $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Así, si $\omega = CXC$, entonces $S_0 = 12$, $S_1 = 24$, $S_2 = 12$ y $S_3 = 6$. Es decir, obtenemos una función $\{0, 1, 2, 3\} \mapsto \mathbb{R}$. Por otro lado, si fijamos $t = 2$

y consideramos todas las tiradas posibles, entonces S_2 será una variable aleatoria que depende de las tiradas de moneda:

$$S_2(\omega) = \begin{cases} 48 & \text{si } \omega \in \{CCC,\ CCX\} \\ 12 & \text{si } \omega \in \{CXC,\ CXX,\ XCC,\ XCX\} \\ 3 & \text{si } \omega \in \{XXC,\ XXX\} \end{cases}.$$

Notemos que si $\tilde{p}$ es la probabilidad de que la moneda salga cara, entonces S_2 tiene distribución binomial con parámetros $(2, \tilde{p})$. A su vez, S_1 es Bernoulli y $S_3 \sim Bin(3, \tilde{p})$.

El modelo binomial para valoración de activos supone un escenario similar al del Ejemplo 4.1. El activo considerado es una acción, cuyo valor inicial en $t = 0$ es conocido e igual a S_0. El precio S de este activo sigue un proceso estocástico, donde el espacio muestral está dado por los resultados de n tiradas de una moneda, con probabilidad $\tilde{p}$ que salga cara y $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$ que salga cruz.

$$\Omega = \{\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X\}.$$

Para cada $t = 1, 2, \ldots, n$, se cumple que el precio del activo se multiplica por un factor u o d según si la t-ésima moneda resulta cara o cruz:

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} \cdot u & \text{si } \omega_t = C \\ S_{t-1} \cdot d & \text{si } \omega_t = X. \end{cases}$$

Supondremos además que $u > d > 0$, y $0 < \tilde{p} < 1$.

Para cada $\omega \in \Omega$, la sucesión de precios que toma el activo se denomina **trayectoria de precios**. La Figura 4.2.1 ilustra tres trayectorias para un activo, donde $n = 5$, $S_0 = 12$ y $u = \frac{1}{d} = 2$.

El modelo asume además la existencia de una *cuenta de moneda* con una tasa de interés nominal r constante con capitalización en cada $t \in I$. Si la frecuencia de capitalización es k, denotaremos $i = \frac{r}{k}$. En terminos formales, el modelo incorpora un proceso determinístico $B(t)$, $t \in I$, tal que:

$$B(0) = 1, \qquad B(t) = (1 + i)\, B(t - 1) = (1 + i)^t, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$$

Esta tasa representará la tasa ofrecida tanto para depósitos y préstamos en el banco. Así, si se depositan \$12 en el banco en $t = 0$, entonces en $t = n$ habrá $\$12 \cdot (1 + i)^n$ disponible.

El modelo binomial, como cualquier modelo de valoración de activos, asume que no es posible una estrategia de arbitraje. En el contexto de un modelo probabilístico, una estrategia de arbitraje *es un proceso estocástico que comienza en* 0 *y en un tiempo* T *tiene probabilidad positiva de ser positivo y probabilidad nula de ser negativo, o a la inversa.*

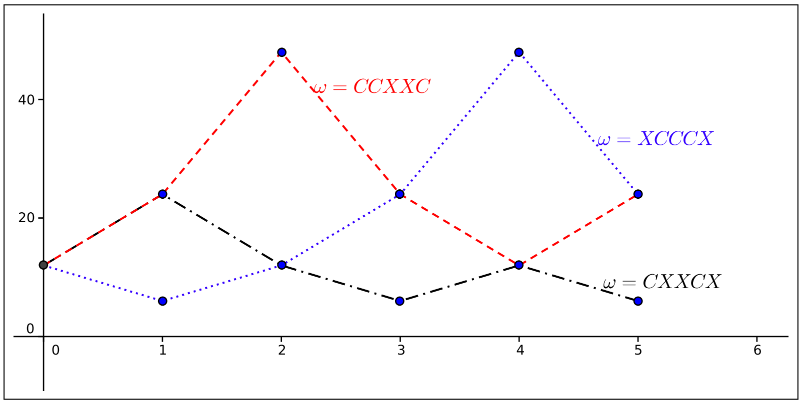


Figura 4.2.1: Trayectorias de precios de un activo

En el modelo binomial, la hipótesis de no arbitraje implica en particular que se debe cumplir la siguiente **condición**:

$$d < 1 + i < u. \tag{4.2.1}$$

La razón es simple. Si $1 + i \leq d$, significa que la tasa ofrecida por el banco es inferior al rendimiento que da el activo. Por lo tanto, si se pide dinero prestado al banco para comprar el activo (costo inicial nulo), al cabo de un período hay una probabilidad positiva de obtener ganancia (pues $\tilde{p} > 0$) y una probabilidad nula de tener pérdida. Por otra parte, si $1+i \geq u$, entonces siempre es conveniente invertir en el banco: si se vende a acción y se deposita el dinero en el banco, en $t = 1$ es posible recuperar la acción y hay una probabilidad positiva de obtener ganancia, y nula de tener pérdida (pues $1 - \tilde{p} > 0$).

En términos de probabilidad observemos que podemos definir el proceso:

$$X(t) = S(t) - S(0) \cdot B(0)(1 + i)^t = S(t) - S(0) \cdot (1 + i)^t.$$

Entonces $X(0) = 0$ y

$$X(1) = \begin{cases} S(0) \cdot (u - (1 + i)) & \omega = C \\ S(0) \cdot (d - (1 + i)) & \omega = X \end{cases}$$

Así, de no cumplirse la condición (4.2.1) habría un arbitraje.

4.2.2. Modelo binomial de un paso

Hasta ahora hemos presentado al modelo binomial como una base para describir el comportamiento de un activo. Introducimos ahora un derivado, propiamente una opción call sobre una acción, y el objetivo principal será valorar la prima de esta opción. El método a utilizar se basa fuertemente en la hipótesis de no arbitraje, y se enmarca en la llamada *Teoría del Arbitraje* o en inglés *Arbitrage Pricing Theory (APT)*.

Comenzaremos con un ejemplo de un modelo binomial de un paso, es decir, $n = 1$. Si bien es un caso trivial resulta útil para comprender la metodología.

Ejemplo 4.2. Una acción cuesta actualmente \$20. En tres meses, el precio de la acción será \$18 o \$22. La tasa de interés nominal con capitalización trimestral es del 10 %.

¿Cuál es la prima que debe tener una opción de compra call a tres meses sobre una acción de estas características, si el strike K es de \$21?

Ilustramos esta situación con un *árbol*, denotando S_0 al precio inicial de la acción, y $S_u = S_0 \cdot u$ y $S_d = S_0 \cdot d$ al precio de la acción un trimestre más tarde. Notemos que $u = 1{,}1$ y $d = 0{,}9$.

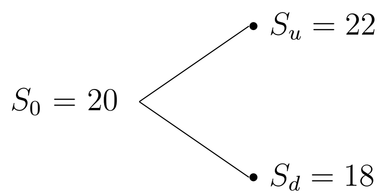


Figura 4.2.2: Evolución de la acción

Una opción sobre esta acción tendrá un determinado payoff en la madurez, y una prima V_0 al inicio del contrato. Esta prima es lo que debemos calcular.

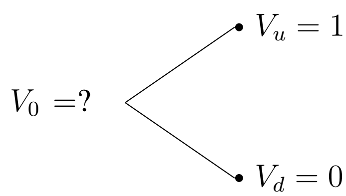


Figura 4.2.3: Payoff del derivado

Para este ejemplo, V_0 es el valor de la prima, y V_u y V_d están dados por el payoff de la opción según el subyacente valga S_u o S_d:

$$V_u = \text{máx}(22 - 21, 0) = 1 \qquad\qquad V_d = \text{máx}(18 - 21, 0) = 0$$

Observamos entonces que el payoff toma distintos valores según sea el precio del activo. Una estrategia para calcular el valor de la prima, es combinar la opción con una posición en el activo, de modo de obtener un portfolio sin aleatoriedad: libre de riesgo.

Consideremos un portfolio consistente en:

- una posición short en la opción call,
- una posición en Δ unidades del activo.

Si $\Delta > 0$ es una posición long, y si $\Delta < 0$ es una posición short. Este portfolio tiene un valor inicial $c = -V_0 + \Delta \cdot S_0$. Supondremos que el activo es fraccionable, es decir, que es posible comprar o vender partes del activo. En la práctica esto no está alejado de la realidad, dado que se comercializan opciones sobre 100 o más acciones, por lo cual una fracción aproxima a un número entero de acciones.

Este portfolio tiene un comportamiento como ilustra la Figura 4.2.4.

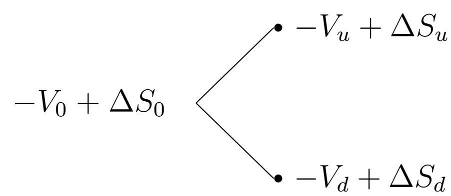


Figura 4.2.4: Evolución del portfolio

Si el objetivo es que este portfolio sea libre de riesgo, es necesario que el payoff sea el mismo independientemente del precio del subyacente, es decir, que se cumpla:

$$-V_u + \Delta S_u = -V_d + \Delta S_d.$$

Para los valores de este ejemplo, resulta

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{1}{4}. \tag{4.2.2}$$

Esto significa que para obtener un portfolio libre de riesgo, por cada cuatro posiciones short en una opción debe invertirse en una posición long en el activo.

Notemos entonces que el payoff de este portfolio es

$$-1 + \frac{1}{4}22 = 0 + \frac{1}{4}18 = 4{,}5,$$

independientemente del valor del activo. Por la hipótesis de no arbitraje, el rendimiento del portfolio debe ser el mismo que el que otorga la tasa de interés libre de riesgo en el período de tres meses. Teniendo en cuenta que la tasa trimestral es del $2{,}5\,\%$ y que el valor inicial del portfolio es $-V_0 + \Delta\, S_0 = -V_0 + 5$, concluimos que debe cumplirse:

$$(-V_0 + 5)\,(1{,}025) = 4{,}5.$$

Por lo tanto, el valor de la prima es

$$V_0 = \left(5 - \frac{4{,}5}{1{,}025}\right) \simeq 0{,}6097.$$

Un análisis alternativo, pero equivalente al anterior, es considerar un **portfolio replicante** de la opción. Esto es, un portfolio que consista en dinero y unidades del subyacente, y que al momento de la madurez de la opción tenga el mismo valor que el payoff de la call. Si esto es posible, entonces la opción y el portfolio deben tener el mismo valor en $t = 0$. Para este ejemplo, la situación es la siguiente. Consideramos un portfolio X de valor X_0 (desconocido), y que está formado por Δ acciones y $X_0 - \Delta \cdot 20$ pesos en el banco:

$$X_0 = \underbrace{\Delta \cdot S_0}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta \cdot S_0)}_{\text{dinero}}.$$

Es claro que tanto Δ como X_0 son desconocidos. También asumimos que, si $X_0 - \Delta \cdot S_0 > 0$ se trata de un depósito bancario, y si es $X_0 - \Delta \cdot S_0 < 0$ es un préstamo.

A los tres meses este portfolio tendrá un valor distinto según cuál sea el precio del activo subyacente. En un diagrama de árbol se representa como en la Figura 4.2.5.

$$X_0 = \Delta S_0 + (X_0 - \Delta S_0) \begin{cases} \Delta 22 + (X_0 - \Delta \cdot 20)(1{,}025) \\ \\ \Delta 18 + (X_0 - \Delta \cdot 20)(1{,}025) \end{cases}$$

Figura 4.2.5: Evolución del portfolio replicante

Que este portfolio sea replicante significa que debe cumplirse que en $t = 1$ su valor X_1 sea el mismo que el payoff de la opción:

$$\begin{cases} X_u = \Delta 22 + (V_0 - \Delta \cdot 20)(1{,}025) = 1 \\ X_d = \Delta 18 + (V_0 - \Delta \cdot 20)(1{,}025) = 0. \end{cases}$$

Este sistema tiene solución $\Delta = 0{,}25$ y $X_0 = 0{,}6097$. Dado que este portfolio replica la opción call, concluimos que la prima de la opción V_0 debe ser igual a X_0, y hemos llegado al mismo resultado.

Finalmente, notemos que en ningún caso hemos tenido en cuenta las probabilidades reales de que el precio del subyacente modifique su precio. Es decir, no hemos considerado la probabilidad de que $S_1 = 22$ ni que $S_1 = 18$. Esto es verdaderamente importante en este método, ya que en la práctica es imposible determinar la probabilidad real de que el precio de una acción aumente o disminuya.

Probabilidades de riesgo neutral

Notemos que el valor V_0 de la prima se obtiene resolviendo:

$$V_0 = (V_u - \Delta\, S_u) \cdot \frac{1}{1+i} + \Delta \cdot S_0 = (V_d - \Delta\, S_d) \cdot \frac{1}{1+i} + \Delta \cdot S_0.$$

Reemplazando Δ por su expresión en (4.2.2) y realizando algunas operaciones algebraicas, obtenemos que

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+i}\left(\frac{1+i-d}{u-d} \cdot V_u + \frac{u-(1+i)}{u-d} \cdot V_d\right) \\ &= \frac{1}{1+i}\,(p \cdot V_u + q \cdot V_d)\,. \end{aligned}$$

Debido a la condición de no arbitraje, esto es, $d < 1+i < u$, tenemos que p y q son positivos. Además, $p + q = 1$. Luego p y q definen una nueva medida de probabilidad sobre Ω, siendo respectivamente la probabilidad de obtener cara o cruz en la moneda. Esta medida de probabilidad se denomina **probabilidad de riesgo neutral**. En el ejemplo dado, se tiene

$$p = \frac{1{,}025 - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}625, \qquad q = 0{,}375.$$

Además, denotando con $E[X]$ al valor esperado de una variable aleatoria X bajo esta probabilidad, tenemos que:

En el modelo binomial de un paso, la prima de una call europea es igual al valor descontado del valor esperado de su payoff bajo las probabilidades de riesgo neutral.

$$c = \frac{1}{1+i} \cdot E[(S_1 - K)^+].$$

Es importante notar que el precio del activo en $t = 1$, S_1, verifica la misma propiedad: su valor inicial en $t = 0$, S_0, es el valor esperado descontado con la cuenta de moneda es igual a su valor inicial S_0:

$$\frac{1}{1+i} \cdot E[S_1] = \frac{1}{1+i}\,(p \cdot S_u + q \cdot S_d) = S_0.$$

4.3. Modelo binomial multiperiódico

4.3.1. Un ejemplo con $n = 2$

Extendemos ahora la situación de valoración de la opción al caso en que el activo sigue un proceso estocástico de n pasos.

- En $t_0 = 0$, el activo vale $S(0) = S_0$.
- En $t = k$, para $1 \leq k \leq n$, el valor de la acción es:

$$S_k = \begin{cases} S_{k-1} \cdot u & \text{con probabilidad } p \\ S_{k-1} \cdot d & \text{con probabilidad } q \end{cases}$$

El objetivo es calcular la prima de una opción con madurez en n períodos sobre este activo. Al cabo de n períodos, el activo puede tomar $n+1$ valores diferentes, y para cada uno de ellos la opción tiene un determinado payoff. Este payoff resulta entonces también una variable aleatoria, cuya aleatoriedad depende precisamente del valor del subyacente.

Esta prima se calcula de manera análoga que para el caso $n = 1$, pero en este caso el valor de Δ no se mantiene constante en el tiempo sino que se actualiza en cada paso. Nuevamente, existen dos formas equivalentes de determinar la prima:

a) Considerar un portfolio inicial compuesto por una posición short en la opción y una posición en Δ acciones, que a la madurez de la opción sea no aleatorio o libre de riesgo.
b) Construir un portfolio replicante con acciones y dinero en la cuenta bancaria, es decir que a la madurez de la opción tenga el mismo valor.

Consideraremos este segundo caso y el primero puede deducirse de manera similar. Presentamos un ejemplo ilustrativo, y simultáneamente consideramos el caso general de un derivado que se ejerce en $t = 2$, no necesariamente una opción call.

Ejemplo 4.3. Consideremos un activo con valor inicial $S_0 = 20$, y que cada tres meses se incrementa en un $10\,\%$ o disminuye en un $10\,\%$. Esto es: $u = 1{,}1$ y $d = 0{,}9$. La tasa de interés libre de riesgo en cada período trimestral es del 2.5 %.

Una opción call sobre este activo, con strike $K = 21$, tiene una madurez de 6 meses, es decir $n = 2$ períodos. El objetivo es determinar la prima de esta opción.

En este caso, el precio del activo en 6 meses se puede modelar con el árbol de la Figura 4.3.1:

Denotamos como antes a la variable $S(t)$ por S_t. Además, como S_1 depende de la primera tirada, escribiremos $S_1(C) = S_u$ o $S_1(X) = S_d$. Para S_2 acordamos la notación $S_{uu} = S_2(CC)$, $S_{ud} = S_2(CX)$, $S_{du} = S_{du}$, y $S_2(XX) = S_{dd}$. La misma convención utilizaremos para cualquier otro proceso estocástico que dependa de las primeras tiradas de moneda.

Los valores posibles del payoff de la opción están dados por:

$$V_2 = \text{Payoff de la call} = \text{máx}\{S_2 - K, 0\} = \text{máx}\{S_2 - 21, 0\}.$$

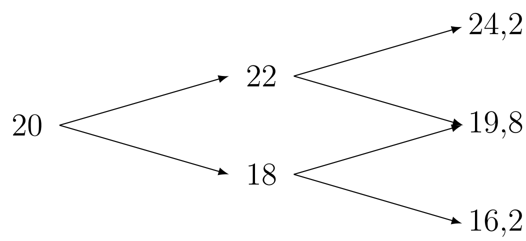


Figura 4.3.1: Árbol de la acción

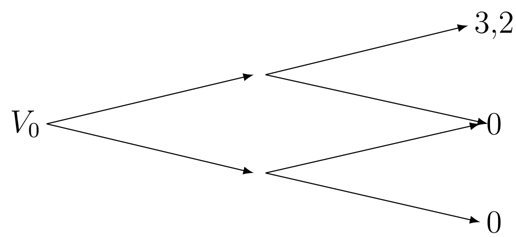


Figura 4.3.2: Payoff de la opción

y están representados en la Figura 4.3.2. Notemos que V_2 es una variable aleatoria, cuyos valores están dados por:

$$\begin{aligned} V_{uu} &= \max\{24{,}2 - 21, 0\} = 3{,}2, \\ V_{ud} = V_{du} &= \max\{19{,}8 - 21, 0\} = 0, \\ V_{dd} &= \max\{16{,}2 - 21, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Consideraremos un portfolio *replicante* construido en $t = 0$ compuesto por:

- una posición en Δ_0 acciones, y
- una cantidad de dinero en el banco, que podrá ser un depósito o un préstamo.

El valor de este portfolio determina un proceso estocástico, cuyo valor inicial es:

$$X_0 = \underbrace{\Delta_0 S_0}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta_0 S_0)}_{\text{dinero}},$$

y el objetivo es lograr que su valor en $t = 2$ iguale al payoff de la opción. El valor de este portfolio en $t = 1$ dependerá de la tasa de interés que ofrece el banco y del valor de la acción. Lo que se pretende es "rebalancear" este portfolio en $t = 1$ pero sin modificar su valor para que, llegado el tiempo $t = 2$, su valor coincida exactamente con el payoff de la opción. Si esto es posible, por el principio de no arbitraje debe ser que su valor inicial coincide con la prima de la opción. En el caso de nuestro ejemplo, tenemos

$$X_0 = \underbrace{\Delta_0 \cdot 20}_{\text{en acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta_0\, 20)}_{\text{en el banco}}.$$

En $t = 1$, el valor del portfolio será:

$$X_1 = \Delta_0 \cdot S_1 + (X_0 - \Delta_0\, 20) \cdot (1 + i).$$

Notemos que, como S_1 es una variable aleatoria, el valor de X_1 depende de la primer tirada de moneda. Es decir, tendremos dos ecuaciones:

$$X_u = \Delta_0 \cdot S_u + (X_0 - \Delta_0\, S_0) \cdot (1 + i) \tag{4.3.1}$$

$$X_d = \Delta_0 \cdot S_d + (X_0 - \Delta_0\, S_0) \cdot (1 + i). \tag{4.3.2}$$

En el Ejemplo:

$$X_u = \Delta_0 \cdot 22 + (X_0 - \Delta_0\, 20) \cdot (1{,}025).$$

$$X_d = \Delta_0 \cdot 18 + (X_0 - \Delta_0\, 20) \cdot (1{,}025).$$

En este momento, reajustamos o rebalanceamos el portfolio pero sin modificar su valor. En la práctica significa que o bien vendemos algunas acciones y ese dinero lo depositamos en el banco, o bien usamos parte del dinero en el banco para invertir en acciones. Algebraicamente, X_1 se reescribe de la forma:

$$X_1 = \underbrace{\Delta_1 S_1}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_1 - \Delta_1 S_1)}_{\text{dinero}}.$$

Es importante notar aquí que Δ_1 es una variable aleatoria que dependerá del valor de X_1, que a su vez depende de la tirada de moneda. Por lo tanto estamos rebalanceando dos posibles portfolios:

$$X_u = \Delta_u\, S_u + (X_u - \Delta_u\, S_u),$$

$$X_d = \Delta_d\, S_d + (X_d - \Delta_d\, S_d\,),$$

que en el Ejemplo corresponde a redifinir el capital de valor X_1 con una parte en acciones (que ahora valen \$22 o \$18) y el resto en la cuenta bancaria:

$$X_u = \Delta_u \cdot 22 + (X_u - \Delta_u \cdot 22),$$

$$X_d = \Delta_d \cdot 18 + (X_d - \Delta_d \cdot 18),$$

Finamente, en $t = 2$ es el tiempo de madurez de la opción, y el valor del portfolio será:

$$X_2 = \Delta_1 S_2 + (X_1 - \Delta_1 S_1)(1+i).$$

Ahora X_2 depende de las dos tiradas de moneda: CC, CX, XC y XX. Se habrá obtenido un portfolio replicante si es posible resolver las cuatro ecuaciones que resultan de:

$$\Delta_1 S_2 + (X_1 - \Delta_1 S_1)(1+i) = \max(S_2 - K, 0),$$

considerando las cuatro posibles tiradas de moneda. Se trata de hallar la solución de:

$$\begin{cases} \Delta_u S_{uu} + (X_u - \Delta_u S_u) \cdot (1+i) & = V_{uu} \\ \Delta_u S_{ud} + (X_u - \Delta_u S_u) \cdot (1+i) & = V_{ud} \\ \Delta_d S_{du} + (X_d - \Delta_d S_d) \cdot (1+i) & = V_{du} \\ \Delta_d S_{dd} + (X_d - \Delta_d S_d) \cdot (1+i) & = V_{dd} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

En el caso de nuestro ejemplo corresponde a resolver las ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta_u 24{,}2 + (X_u - \Delta_u 22) \cdot 1{,}025 & = 3{,}2 \\ \Delta_u 19{,}2 + (X_u - \Delta_u 22) \cdot 1{,}025 & = 0 \\ \Delta_d 19{,}2 + (X_d - \Delta_d 18) \cdot 1{,}025 & = 0 \\ \Delta_d 16{,}2 + (X_d - \Delta_d 18) \cdot 1{,}025 & = 0 \end{cases}$$

Notemos que tenemos (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3) determinan seis ecuaciones con seis incógnitas: X_0, Δ_0, Δ_u, Δ_d, X_u y X_d. El valor de Δ_u y Δ_d está dado por:

$$\Delta_u = \frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}, \qquad \Delta_d = \frac{V_{du} - V_{dd}}{V_{du} - V_{dd}}.$$

Observando la analogía para el caso $n = 1$, obtenemos que

$$X_u = \frac{1}{1+i} \left(p \cdot V_{uu} + q \cdot V_{ud}\right) \qquad X_d = \frac{1}{1+i} \left(p \cdot V_{du} + q \cdot V_{dd}\right),$$

para las mismas probabilidades de riesgo neutral:

$$p = \frac{1+i-d}{u-d}, \qquad \tilde{q} = 1 - p.$$

Con estos valores de X_u y X_d, resolvemos de manera análoga para Δ_0 y X_0:

$$\Delta_0 = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}, \qquad X_0 = \frac{1}{1+i} \left(p \cdot X_u + q \cdot X_d\right).$$

Basándonos en el principio de no arbitraje, este valor X_0 debe ser el valor de la prima de la opción. Para nuestro ejemplo, tendremos:

$$X_u = 1{,}95 \qquad X_d = 0 \qquad \Delta_u = 0{,}7272 \qquad \Delta_d = 0 \qquad \Delta_0 = 0{,}4878$$

y la prima de la opción dada por $V_0 = X_0 = 1{,}1897$.

Notemos que el proceso X_t, $t = 0, 1, 2$, denota un portfolio que replica el valor de la opción en $t = 2$, y la forma de determinar este portfolio fue de manera recursiva pero en sentido contrario al tiempo. Esto es, a partir del payoff pudimos determinar X_1, y a partir de X_1 determinamos X_0. Por un argumento de no arbitraje, este valor debe coincidir con la prima de la opción. Los valores que se obtienen de esta forma recursiva se definen como el valor del derivado en el tiempo, y se denotan entonces como V_t, $t = 0, 1, 2$. Esto es:

$$\begin{aligned}
V_1(C) = V_u &= \frac{1}{1+i} \cdot (p\, V_{uu} + q\, V_{ud}) \\
V_1(X) = V_d &= \frac{1}{1+i} \cdot (p\, V_{du} + q\, V_{dd}) \\
V_0 &= \frac{1}{1+i} \cdot (p\, V_u + q\, V_d)
\end{aligned}$$

En resumen, el derivado determina tres procesos estocásticos:

- El portfolio replicante: X_0, X_1, X_2.
- El proceso de *delta-cobertura*: Δ_0, Δ_1, que determinan la cobertura en acciones.
- El valor del derivado en el tiempo: V_0, V_1, V_2.

Estos tres procesos están relacionados entre sí:

- A partir de V_2 se obtienen iteradamente V_1 y V_0 calculando un valor esperado descontado con las probabilidades de riesgo neutral.
- Los valores de Δ_k ($k = 0, 1$) se obtienen a partir de V_{k+1} y S_{k+1}.
- El proceso X_k queda determinado por Δ_{k-1} y S_k, y coincide con V_k si se elige $X_0 = V_0$.

Notemos que siempre es posible definir el valor del derivado a través de las probabilidades de riesgo neutral, y se puede generalizar fácilmente esta definición a un modelo binomial de N pasos para un derivado europeo. Ahora bien, ¿es siempre posible encontrar un portfolio $\{X_t\}$ replicante? Posiblemente sea fácil imaginar que sí, siguiendo pasos análogos a los que hemos hecho en el caso $n = 2$. Esta es una característica particular del modelo binomial.

Definición 4.2. Un mercado se dice *completo* si todo derivado es replicable por un portfolio formado por el subyacente y dinero en la cuenta bancaria.

En el modelo binomial de dos pasos, el valor de un derivado con payoff V_2 bajo las probabilidades de riesgo neutral está dado por:

$$V_0 = \frac{1}{(1+i)^2}\left(p^2V_2(CC) + pqV_2(CX) + qpV_2(XC) + q^2V_2(XX)\right).$$

con

$$V_1(\omega) = \frac{1}{1+i}\left(pV_2(\omega C) + qV_2(\omega X)\right).$$

El portfolio replicante $\{X_n \mid n = 0,1,2\}$ queda determinado por $X_0 = V_0$ y el por proceso $\{\Delta_0, \Delta_1\}$ donde

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \Delta_n S_{n+1} + (X_n - \Delta_n S_n)\cdot(1+i), \\ \Delta_n &= \frac{V_{n+1}(C) - V_{n+1}(X)}{S_{n+1}(C) - S_{n+1}(X)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4. Suponiendo el modelo binomial de dos pasos con i, u y d como antes, se tiene que el valor de una put europea con strike $K = 21$ y madurez $T = 2$, sobre una acción que en $t = 0$ vale $S_0 = 20$ está dado por (ver Figura 4.3.3)

$$V_2 = (21 - S_2)^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } S_2 = 24{,}2 \\ 1{,}2 & \text{si } S_2 = 19{,}8 \\ 4{,}8 & \text{si } S_2 = 16{,}2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_1(C) &= \frac{1}{1{,}025}\,(0{,}625\cdot 0 + 0{,}375\cdot 1{,}2) = 0{,}439 \\ V_1(X) &= \frac{1}{1{,}025}\,(0{,}625\cdot 1{,}2 + 0{,}375\cdot 4{,}8) = 2{,}4878 \\ V_0 &= \frac{1}{1{,}025}\,(0{,}625\cdot 0{,}439 + 0{,}375\cdot 2{,}4878) = 1{,}1779. \end{aligned}$$

El portfolio replicante se construye en $t = 0$ con Δ_0 acciones y dinero en el banco, con un valor $X_0 = V_0$. Ver Figura 4.3.4.

$$\Delta_0 = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = -0{,}5122,$$

es decir que corresponde tomar una posición short en el subyacente e invertir en el banco la cantidad $V_0 - \Delta_0 \cdot 20 = \$11{,}4218$.

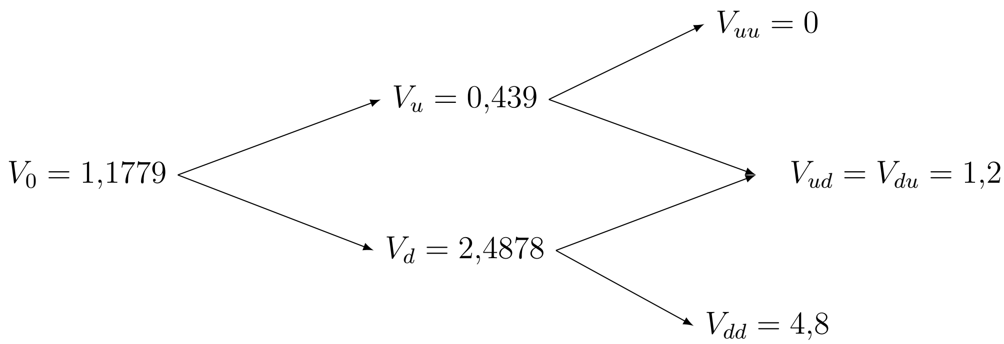


Figura 4.3.3: Valoración de una put con strike $K = 21$

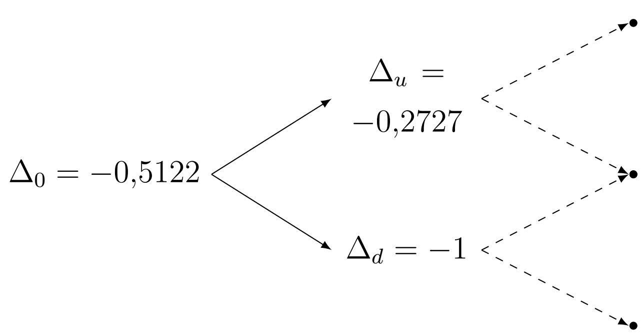


Figura 4.3.4: Proceso Delta cobertura

En $t = 1$ este portfolio tendrá el valor

$$X_1 = \begin{cases} -0{,}5122 \cdot 22 + 11{,}4218 \cdot (1{,}025) = 0{,}439 & \text{si sale cara} \\ -0{,}5122 \cdot 18 + 11{,}4218 \cdot (1{,}025) = 2{,}4878 & \text{si sale cruz.} \end{cases}$$

Este portfolio se ajusta según la moneda haya salido cara:

$$\Delta_u = \frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = \frac{0 - 1{,}2}{24{,}2 - 19{,}8} = -0{,}2727$$

o haya salido cruz:

$$\Delta_d = \frac{V_{du} - V_{dd}}{S_{uu} - S_{ud}} = \frac{1{,}2 - 4{,}8}{19{,}8 - 16{,}2} = -1.$$

Es decir que en $t = 1$ el portfolio se reescribe como:

$$X_1 = \begin{cases} \overbrace{(-0{,}2727) \cdot 22}^{\text{acciones}} + \overbrace{(0{,}439 + 0{,}2727 \cdot 22)}^{\text{dinero}} = 0{,}439 & \text{si sale cara} \\ \underbrace{(-1) \cdot 18}_{\text{acciones}} + \underbrace{(2{,}4878 + 1 \cdot 18)}_{\text{dinero}} = 2{,}4878 & \text{si sale cruz.} \end{cases}$$

Finalmente, en $t = 2$ el valor del portfolio replicante será:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= -0{,}2727 \cdot 24{,}2 + (0{,}439 + 0{,}2727 \cdot 22) \cdot (1{,}025) = 0 \\ X_{ud} &= -0{,}2727 \cdot 19{,}8 + (0{,}439 + 0{,}2727 \cdot 22) \cdot (1{,}025) = 1{,}2 \\ X_{du} &= -1 \cdot 19{,}8 + (0{,}439 + 18) \cdot (1{,}025) = 1{,}2 \\ X_{du} &= -1 \cdot 16{,}2 + (0{,}439 + 18) \cdot (1{,}025) = 4{,}8, \end{aligned}$$

que coincide con el payoff de la put en cada caso particular. Un inversor que haya vendido la opción put, puede *cubrirse* a través de esa estrategia.

4.3.2. Caso general: Modelo binomial multiperiódico

El método de valoración de un derivado V_N que hemos visto para $N = 1$ y $N = 2$, como así también la construcción de un portfolio replicante, se extienden al caso general de un modelo binomial de N pasos. Es decir, el valor de un derivado se obtiene construyendo un portfolio con el activo subyacente y la cuenta de moneda, cuya composición es rebalanceada en cada paso sin modificar el valor del portfolio. La cantidad de acciones en el portfolio en cada instante se btiene calculando recursivamente *hacia atrás*: Δ_{N-1}, Δ_{N-2}, $\ldots$, Δ_0, al mismo tiempo que se obtiene el valor de dicho portfolio de modo tal que $X_N = V_N$

El siguiente teorema y su demostración demuestran esta característica del modelo binomial multiperiódico. Es decir, que todo derivado es replicante. En el enunciado y demostración de este resultado, y en el caso que una variable aleatoria Y dependa sólo de las primeras n tiradas de moneda del total de N tiradas, usaremos la notación

$$Y(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n)$$

en lugar de $Y(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\omega_{n+1}\ldots\omega_N)$.

Teorema 4.1. Consideremos el modelo binomial de N pasos, con

$$\Omega = \{\omega_1\ldots\omega_N \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X,\ 1 \leq i \leq N\},$$

$d < 1+i < u$, y p y q las probabilidades de riesgo neutral:

$$p = \frac{1+i-d}{u-d}, \qquad q = 1-p.$$

Sea $V_N = V_N(\omega_1\ldots\omega_N)$ una variable aleatoria (payoff de un derivado) sobre Ω. Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ definimos las variables aleatorias V_n que dependen de las primeras n tiradas:

$$V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = \frac{1}{(1+i)}\left(p\,V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n C) + q\,V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n X)\right).$$

Para $n = 0, 1, \ldots, N-1$, sea $\{\Delta_n\}$ el proceso de *delta-cobertura* dado por:

$$\Delta_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n C) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n X)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n C) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n X)}.$$

Entonces, si $X_0 = V_0$ y para $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ se define

$$X_{n+1} = \Delta_n\,S_{n+1} + (X_n - \Delta_n\,S_n)(1+i),$$

entonces resulta $X_N = V_N$. Esto es, $\{X_n \mid n = 0, 1, \ldots, N\}$ es un portfolio replicante del derivado V_N.

Definición 4.3. Para $n = 1, 2, \ldots, N$ la variable aleatoria $V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n)$ en el Teorema 4.1 se define como el *valor del derivado en tiempo n. El precio de un derivado en tiempo $t = 0$ se define como V_0.*

Demostración del Teorema 4.1. Debemos demostrar que $X_N = V_N$. Para esto probaremos por inducción que $X_n = V_n$, $0 \leq n \leq N$.

Para $n = 0$ es cierto por definición: $X_0 = V_0$. Supongamos que es válido para un cierto $k < N$. Queremos ver que $X_{k+1} = V_{k+1}$, y para esto debemos analizar si en el paso $k+1$ la moneda sale cara o sale cruz. Como ambos casos son análogos, demostramos sólo el caso en que las primeras $k+1$ tiradas son de la forma $\omega_1 \ldots \omega_k C$. Para simplificar la notación, omitiremos escribir $\omega_1 \ldots \omega_k$. Tenemos que:

$$X_{k+1}(C) = \Delta_k \cdot S_k \cdot u + (X_k - \Delta_k \cdot S_k) \cdot (1 + i).$$

Usando que

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)}{S_k \cdot (u - d)},$$

resulta:

$$\begin{aligned} X_{k+1}(C) &= X_k \cdot (1+i) + \Delta_k \cdot S_k \cdot (u - (1+i)) \\ &= V_k \cdot (1+i) + \frac{V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)}{u-d} \cdot (u - (1+i)) \\ &= V_k \cdot (1+i) + q \cdot (V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)) \\ &= pV_{k+1}(C) + qV_{k+1}(X) + q \cdot V_{k+1}(C) - q \cdot V_{k+1}(X) \\ &= V_{k+1}(C). \end{aligned}$$

Por un argumento similar, se puede probar que $X_{k+1}(X) = V_{k+1}(X)$, y por inducción concluimos que $X_n = V_n$, para todo n, $0 \leq n \leq N$. $\square$

Notemos además que la fórmula recursiva para calcular el valor del derivado en $t = n$:

$$V_n = \frac{1}{1+i} \left(pV_{n+1}(C) + qV_{n+1}(X)\right)$$

permite determinar el valor de la opción directamente desde su payoff:

$$V_0 = \frac{1}{(1+i)^N} E[V_N],$$

donde el valor esperado es calculado utilizando las probabilidades de riesgo neutral.

El valor en $t = 0$ de un derivado europeo que se ejerce en $t = N$ es igual al valor descontado del valor esperado del payoff, bajo las probabilidades de riesgo neutral:

$$V_0 = (1+i)^{-N} \cdot E[\text{payoff del derivado}].$$

4.4. Valoración de opciones exóticas

Las opciones call y put europeas y americanas se comercializan en el mercado formal, están estandarizadas y los precios están por ende puestos por el mercado.

Sin embargo, en el mercado secundario se comercializan otros tipos de opciones con diferente payoff que una call o una put, y se denominan en general *opciones exóticas*. En esta sección veremos el caso de opciones exóticas cuyo payoff es dependiente de la trayectoria de precios del activo subyacente. En particular, analizaremos el caso de las opciones:

- Asiáticas: su payoff depende de un promedio de valores del activo.
- Barrera: se anulan o bien entran en vigencia, según si el activo ha cruzado determinado valor.
- Lookback: su payoff depende del máximo o mínimo valor que haya tomado el subyacente.

Existen otras opciones exóticas cuyo payoff no depende precisamente de la trayectoria de precios, tales como:

- Chooser option: al momento del ejercicio el tenedor elige si la opción es put o call.
- Compuestas: son opciones sobre otras opciones.
- Shout: El tenedor puede ”gritar” en una fecha previa al ejercicio, y al momento de la madurez de la opción elige el mejor payoff entre la fecha del ”shout” y de la madurez.
- Bermudas y Canarias: pueden ser ejercidas antes de la madurez pero en determinadas fechas.
- Forward start option: el strike se decide luego de iniciar el contrato.
- Etcétera, etcétera.

Opciones barrera

Las opciones barrera son opciones de compra o de venta, pero su payoff está condicionado a que el precio del subyacente haya cruzado una determinada barrera B durante la vigencia del contrato. De acuerdo a esto, se clasifican en opciones del tipo *Knock In* y *Knock Out*.

Las opciones barrera KnockIn sólo podrán ejercerse si el precio del subyacente ha cruzado la barrera B, mientras que las opciones KnockOut se anulan al momento que el subyacente cruza dicha barrera.

A su vez, según si se espera que el activo supere el valor de la barrera o baje de este valor, estas opciones reciben las siguientes denominaciones. En cada uno de los casos se cumple la condición $S_0 < B$ o $S_0 > B$:

- Up-and-out: $S_0 < B$, y la opción pierde valor si supera la barrera.

- Down-and-out: $S_0 > B$, y la opción pierde valor si baja de la barrera.
- Up-and-in: $S_0 < B$, y el activo debe superar B para activar la opción.
- Down-and-in: $S_0 > B$ y el activo debe bajar de B para activar la opción.

Ejemplo 4.5. Consideremos una opción call barrera down-and-out, con strike $K = 98$, con vencimiento en dos períodos, y barrera $B =$\$95. El activo subyacente sigue un modelo binomial con $S_0 = 100$, $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, y la tasa libre de riesgo es del 5 %.

En este caso, si el activo toma un valor inferior a \$95 durante su trayectoria, la opción se anulará y no podrá ejercerse en $t = T$.

El árbol binomial para esta opción, como para cualquier opción cuyo payoff sea dependiente de la trayectoria, deberá distinguir todas las trayectorias posibles del activo. Esto significa que si se consideran n períodos, habrá 2^n trayectorias posibles.

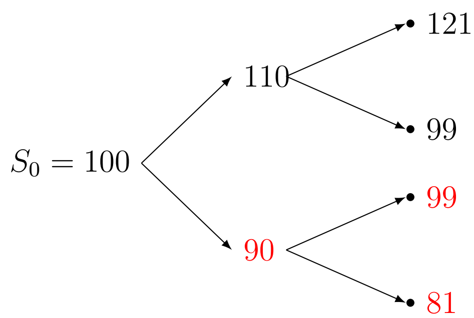


Figura 4.4.1: Opción barrera down and out con barrera $B = 95$. Los valores en rojo indican que en dicha trayectoria no se ejercerá la opción

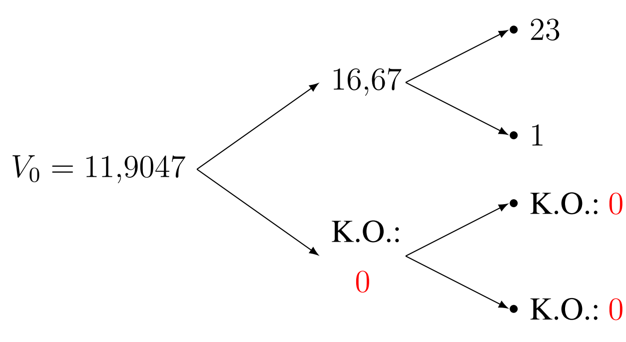


Figura 4.4.2: Valoración de la opción barrera down and out

La prima para la opción se obtiene ahora del mismo modo que para una opción europea, asignando a cada payoff la probabilidad de obtener la correspondiente trayectoria. En particular pueden eliminarse del cálculo aquellas trayectorias donde ocurre un Knock Out:

$$V_0 = \frac{1}{1{,}05^2}\left(0{,}75^2 \cdot 23 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 1\right) = 11{,}9047.$$

Notemos que una posición en una opción call knock-in más una call knock-out es equivalente a una posición en una opción call europea. Algo análogo ocurre con opciones del tipo put.

Esto permite encontrar algunas relaciones entre las primas de las opciones barrera y las europeas. Así, si denotamos con c y p la prima de una call y una put respectivamente, y utilizamos los subíndices i, o, u y d para indicar el tipo de opción barrera, tendremos que:

$$\begin{aligned} c &= c_{uo} + c_{ui} = c_{do} + c_{di} \\ p &= p_{uo} + p_{ui} = p_{do} + p_{di} \end{aligned}$$

Opciones lookback

Las opciones lookback son aquellas cuyo payoff depende del valor máximo o mínimo que haya alcanzado el subyacente durante la vigencia del contrato. A su vez, algunas de estas opciones tienen un strike fijo K, y otras tienen un strike *flotante*, que justamente es el máximo o el mínimo valor del activo.

Si el strike es fijo, K, entonces los payoff de una opción call o put están dados por:

$$\begin{cases} \text{máx}_{0\leq t\leq T}\{S(t) - K, 0\} & \text{opción call} \\ \text{máx}_{0\leq t\leq T}\{K - S(t), 0\} & \text{opción put} \end{cases}$$

Si el strike es flotante, entonces los payoff están dados por:

$$\begin{cases} \text{máx}_{0\leq t\leq T}\{S(T) - S(t)\} & \text{opción call} \\ \text{máx}_{0\leq t\leq T}\{S(t)\} - S(T) & \text{opción put} \end{cases}$$

Ejemplo 4.6. Consideremos una opción call lookback con strike flotante sobre un activo con $S_0 = 100$, $u = 1{,}2$, $d = 0{,}8$ e $i = 0{,}05$. La madurez de la opción es en dos períodos, por lo cual para cada trayectoria de precios $\{S_0, S_1, S_2\}$, el payoff estará dado por:

$$\underset{0\leq t\leq T}{\text{máx}}\{S_2 - S(t)\} = S_2 - \text{mín}\{S_t, t = 0, 1, 2\}.$$

Las probabilidades de riesgo neutral están dadas en este caso por $p = 0{,}625$ y $q = 1-p = 0{,}375$.

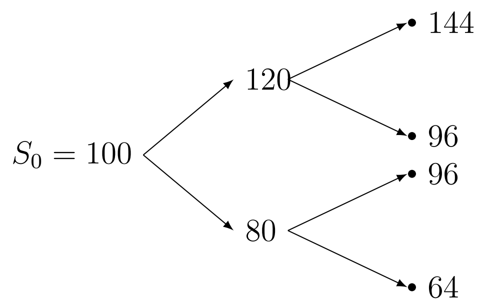


Figura 4.4.3: Call lookback: Evolución de precios del activo

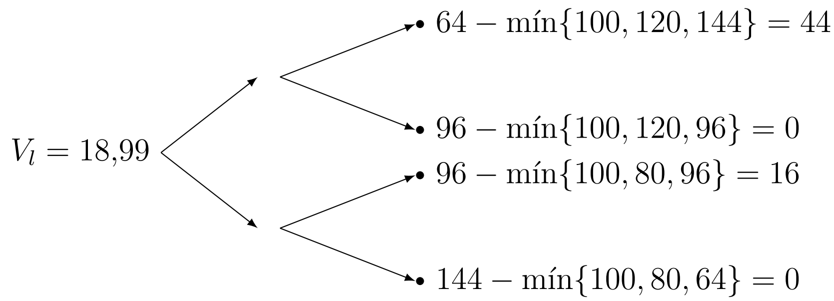


Figura 4.4.4: Call lookback con strike flotante

Los árboles para la acción y para la opción están dados respectivamente por:

La prima de esta opción está dada entonces por:

$$V_l = \frac{1}{1{,}05^2}\left(p^2 \cdot 44 + p \cdot q \cdot 0 + q \cdot p \cdot 16 + q^2 \cdot 0\right) = 18{,}99.$$

Los árboles para la acción y para la opción están dados en las Figuras 4.4.3 y 4.4.4, respectivamente.

Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas son aquellas cuyo payoff depende del promedio de los precios que ha tomado el activo durante la vigencia de la opción. Asi, para cada trayectoria de precios se define S_{prom} como la media aritmética[1] de los precios del subyacente.

Existen opciones asiáticas con strike fijo K, y en tal caso se toma a S_{prom} como precio del subyacente:

$$\begin{cases} \text{máx}\{S_{prom} - K, 0\} & \text{para una call} \\ \text{máx}\{K - S_{prom}, 0\} & \text{para una put} \end{cases}$$

[1] También existen opciones asiáticas que utilizan la media geométrica.

Otras opciones asiáticas toman como strike flotante a S_{prom}:

$$\begin{cases} \max\{S(T) - S_{prom}, 0\} & \text{para una call} \\ \max\{S_{prom} - S(T), 0\} & \text{para una put.} \end{cases}$$

Ejemplo 4.7. Consideremos una opción asiática con strike fijo $K = 95$, con vencimiento en dos períodos, para una acción con $S_0 = 100$, $u = 1{,}2$, $d = 0{,}8$, siendo la tasa periódica del 5 %. El árbol de la acción y de la opción estarán dados como en la Figura 4.4.5.

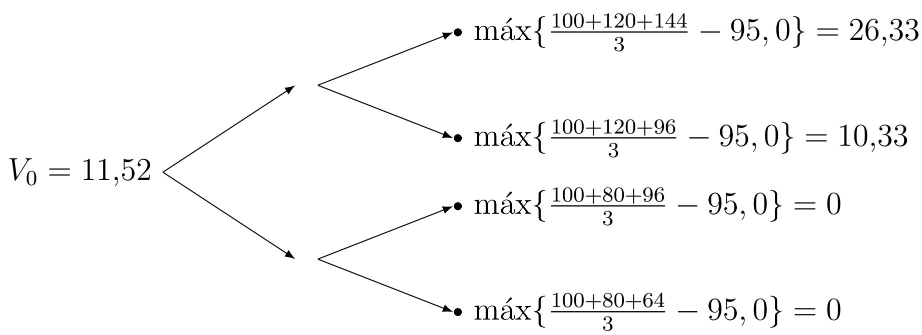


Figura 4.4.5: Opción asiática con strike fijo

En este caso, la prima de la opción asiática estará dada por:

$$V_a = \frac{1}{1{,}05^2}\left(p^2 \cdot 26{,}33 + p \cdot q \cdot 10{,}33 + q \cdot p \cdot 0 + q^2 \cdot 0\right) = 11,52.$$

Ejemplo 4.8. Consideremos ahora la situación como en el Ejemplo 4.7, pero para una opción call asiática con strike flotante. En este caso, los payoffs de la opción estarán dados como en la Figura 4.4.6. Luego la prima de la opción es en este caso

$$V_0 = \frac{1}{1{,}05^2}(p^2 \cdot 22{,}66 + q \cdot p \cdot 4) = 8,878.$$

Algunas consideraciones computacionales

Para el caso de un modelo binomial de 2^n períodos, el cálculo de la prima de una opción exótica cuyo payoff es dependiente de la trayectoria, implica calcular un valor esperado con 2^n valores. Así, para valores de n mayores que 30 ya requieren el cálculo de un promedio de más de 1000 millones de términos, algo para nada eficiente desde el punto de vista computacional.

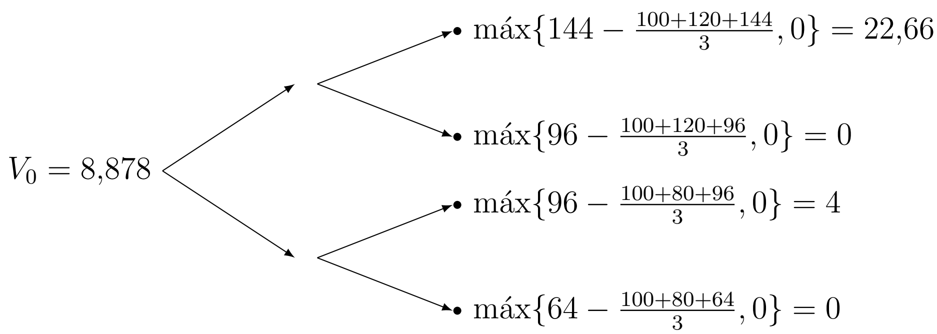


Figura 4.4.6: Opción asiática con strike promedio

Por este motivo en la práctica han surgido diferentes propuestas de métodos computacionales para el cálculo de estas primas, que incluyen por ejemplo, la simulación por Monte Carlo. Este método se basa en la Ley Fuerte de los Grandes Números:

Si X_1, X_2, ..., X_n son variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas con media μ, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu.$$

Luego, el valor esperado $E[V_N]$ para un derivado que puede tomar 2^N valores posibles puede aproximarse seleccionando al azar un subconjunto aleatorio de m valores de su payoff, para algún $m < N$, calculando su media aritmética:

$$V_0 = \frac{1}{(1+i)^N} \cdot E[V_N] \simeq \frac{1}{(1+i)^N} \frac{V_{N,1} + V_{N,2} + \cdots + V_{N,m}}{m}.$$

Capítulo 5

Cálculo estocástico en el modelo binomial

5.1. Introducción

Existen dos teoremas fundamentales de valoración de activos, que relacionan conceptos de probabilidad con propiedades de mercados financieros. Más precisamente, en un modelo de mercado financiero la existencia de medidas de martingala en el espacio de probabilidad considerado está relacionado con la ausencia de arbitraje, y que dicha medida sea única es condición necesaria y suficiente para que el mercado sea completo.

El objetivo de este capítulo es desarrollar los conceptos de probabilidad necesarios en el modelo binomial para comprender estos resultados.

5.2. El modelo binomial

5.2.1. El teorema de Radón Nikodym

Recordemos que en el modelo binomial de n pasos se considera el espacio de probabilidad dado por los los resultados de n tiradas independientes de una moneda,

$$\Omega = \{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X\},$$

donde en principio asumimos que la probabilidad de que la moneda salga cara en una tirada es $\tilde{p}$, para algún $\tilde{p}$ con $0 < \tilde{p} < 1$. Así, la medida de probabilidad en Ω queda determinada por:

$$\mathbb{P}(\{\omega_1 \dots \omega_n\}) = \tilde{p}^{\#\{i|\omega_i=C\}} \cdot (1-\tilde{p})^{\#\{i|\omega_i=X\}},$$

donde la notación $\#C(\tilde{\omega}_{k+1}\dots\tilde{\omega}_n)$ y $\#X(\tilde{\omega}_{k+1}\dots\tilde{\omega}_n)$ indica la cantidad de caras (C) y la cantidad de cruces (X) respectivamente en la secuencia de tiradas.

Ahora bien, dada otra medida de probabilidad $\mathbb{P}$ que asigna p a la probabilidad de que la moneda salga cara en una tirada y $q = 1 - p$ a la probabilidad de que salga cruz, tenemos que si $0 < \tilde{p} < 1$ y $0 < p < 1$ entonces $\mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{P}}$ son equivalentes. Esto es

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$$

para todo subconjunto $A \subset \Omega$.

Notemos que p y q pueden escribirse en términos de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$:

$$p = \tilde{p} \cdot \frac{p}{\tilde{p}}, \qquad q = \tilde{q} \cdot \frac{q}{\tilde{q}}.$$

Para simplicidad, consideremos el caso $n = 1$. Si definimos Z la variable aleatoria tal que:

$$Z(C) = \frac{p}{\tilde{p}}, \qquad Z(X) = \frac{q}{\tilde{q}},$$

entonces Z es una variable aleatoria positiva, y en la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ su valor esperado es:

$$\tilde{E}[Z] = \tilde{p}Z(C) + \tilde{q}Z(X) = 1.$$

Recíprocamente podemos ver que si Y es una variable aleatoria positiva tal que $\tilde{E}[Y] = 1$, entonces $\tilde{p}Y(C)$ y $\tilde{q}Y(X)$ definen una probabilidad en Ω que es equivalente a $\mathbb{P}$.

Para $n > 1$ el resultado es análogo. Se define la variable aleatoria positiva dada por:

$$Z(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{\mathbb{P}(\{\omega_1 \dots \omega_n\})}{\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_1 \dots \omega_n\})}.$$

No es difícil probar que $\tilde{E}[Z] = 1$. El Teorema de Radón Nikodym enuncia lo siguiente:

Teorema 5.1. Si $\mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{P}}$ son dos medidas positivas equivalentes sobre Ω, entonces existe una variable aleatoria positiva Z tal que $\tilde{E}[Z] = 1$ y para todo $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = Z(\omega)\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega\}).$$

Z se llama la **derivada de Radón Nikodym** de $\tilde{\mathbb{P}}$ respecto a $\mathbb{P}$, y se denota $Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$.

Recíprocamente, si Y es una variable aleatoria positiva tal que $\tilde{E}[Y] = 1$, entonces

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = Y(\omega)\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega\})$$

define una probabilidad sobre Ω que es equivalente a $\mathbb{P}$.

5.2.2. Elementos del modelo binomial

En este modelo consideramos un proceso estocástico dado por la acción, y una cuenta de moneda gobernada por una tasa de interés periódica i.

El modelo binomial para valoración de activos se conforma con:

- Una acción, que sigue un proceso estocástico, con S_0 un valor positivo y

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} \cdot u & \text{si } \omega_t = C \\ S_{t-1} \cdot d & \text{si } \omega_t = X. \end{cases}$$

- Una cuenta bancaria, que sigue un proceso determinístico:

$$B(t+1) = B(t) \cdot (1+i), \qquad B(0) = 1.$$

Hemos visto además que para que no exista posibilidad de arbitraje debe cumplirse una cierta condición en este modelo:

$$d < 1 + i < u, \tag{5.2.1}$$

y que estas cantidades definen las probabilidades de riesgo neutral:

$$p = \frac{1+i-d}{u-d}, \qquad q = 1 - p.$$

A fin de vincular la ausencia de arbitraje con ciertas medidas de probabilidad debemos incorporar otros conceptos del cálculo estocástico.

5.2.3. Filtraciones

Consideraremos las siguientes familias de subconjuntos de Ω.

$$\begin{aligned}
M_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\
M_1 &= \{\{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1 = C\},\ \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1 = X\}, \emptyset, \Omega\} \\
M_2 &= \{\{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2 = CC\}, \{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2 = CX\}, \\
&\quad \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2 = XC\}, \{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2 = XX\}, \\
&\quad \text{y todos los complementos y uniones}\} \\
M_3 &= \{\{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = CCC\}, \{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = CCX\}, \\
&\quad \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = CXC\}, \{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = CXX\}, \\
&\quad \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = XCC\}, \{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = XCX\}, \\
&\quad \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = XXC\}, \{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n \mid \omega_1\omega_2\omega_3 = XXX\}, \\
&\quad \text{y todos los complementos y uniones}\} \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Notemos que en M_k se encuentran los subconjuntos que reúnen aquellos resultados que coinciden en las primeras k tiradas, y además todas las uniones e intersecciones de ellos. En particular se cumple que

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots M_n.$$

Se dice que $\mathcal{M} = \{M_k \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ es una **filtración** creciente en el espacio Ω. Diremos también que M_k es la información disponible hasta el tiempo $t = k$.

Definición 5.1. Si Y es una variable aleatoria y M es una sigma álgebra en Ω, diremos que Y es M- medible si para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{Y \leq a\}$ pertenece a M. Como Ω es finito, esto es equivalente a que el conjunto $\{Y = a\}$ pertenece a M, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si $\{X_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ es un proceso estocástico discreto sobre Ω tal que para cada k, X_k depende sólo de las primeras k tiradas de moneda, se dice que es un proceso estocástico **adaptado** a la filtración $\mathcal{M}$.

Definición 5.2. Un proceso $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sobre Ω es un proceso **adaptado** a la filtración $\{\mathcal{M}\}$ si para $k = 0, 1, \ldots, n$ la variable aleatoria X_k es M_k-medible.

En particular, en el modelo binomial el proceso de precios de la acción es un proceso adaptado. Así por ejemplo, si $n = 3$ podemos calcular $S_2(CX\omega_3) = S_0 \cdot u \cdot d$. Sin embargo no podemos calcular $S_3(CX\omega_3)$ sin conocer ω_3.

Recordemos que para replicar un derivado con payoff V_n, construimos un proceso estocástico $X_0, X_1, \ldots, X_n$ tal que para cada $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$X_k = \Delta_{k-1} S_k + (X_{k-1} - \Delta_{k-1} S_{k-1})(1+i) = \Delta_{k-1} S_k + \frac{(X_{k-1} - \Delta_{k-1} S_{k-1})}{(1+i)^{k-1}} B(k).$$

El proceso X_k es un proceso adaptado porque los términos que lo componen son procesos adaptados. Sin embargo notemos que los coeficientes que multiplican a S_k y a $B(k)$ son variables M_{k-1}-medibles, esto es, su valor puede ser determinado conociendo las primeras $k-1$-tiradas de moneda. Se dice entonces que son procesos predecibles.

Definición 5.3. Un proceso $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ es **predecible** o **previsible** si para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, Φ_k es M_{k-1}-medible. Es decir, Φ_{k-1}, $1 \leq k \leq n$ es adaptado.

5.2.4. Esperanza condicional

Definición 5.4. Sea $\Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X\}$. Para cada k, $1 \leq k < n$, y para cada secuencia $\omega_1 \ldots \omega_k$, consideramos las 2^{n-k} continuaciones posibles de $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k$:

$$\{\tilde{\omega}_{k+1}\tilde{\omega}_{k+2} \ldots \tilde{\omega}_n \mid \tilde{\omega}_i = C \text{ o } X\}.$$

Usaremos la notación $\#C(\tilde{\omega}_{k+1} \ldots \tilde{\omega}_n)$ y $\#X(\tilde{\omega}_{k+1} \ldots \tilde{\omega}_n)$ para denotar la cantidad de caras (C) y la cantidad de cruces (X) respectivamente en la secuencia de tiradas.

Si Y es una variable aleatoria sobre Ω, el **valor esperado de Y condicional** a M_k es la variable aleatoria M_k-medible dada por:

$$\begin{aligned} E[Y \mid M_k](\omega_1 \ldots \omega_k \ldots \omega_n) &= E[Y \mid M_k](\omega_1 \ldots \omega_k) \qquad (5.2.2) \\ &= \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} \tilde{p}^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} (1-\tilde{p})^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} \cdot Y(\omega_1 \ldots \omega_k \omega_{k+1} \ldots \omega_n), \end{aligned}$$

para $1 \leq k \leq n-1$. La esperanza condicional de Y dado M_0 (sin información) y dado M_n (toda la información) se definen respectivamente como:

$$E[Y \mid M_0] = E[Y], \qquad E[Y \mid M_n] = Y.$$

Por ejemplo, si consideramos Ω los resultados de tirar una moneda tres veces ($n = 3$), y S_k, $0 \leq k \leq 3$ es el proceso de la acción en el modelo binomial, entonces:

$$\begin{aligned}
E[S_3 \mid M_2](CX\omega_3) &= \tilde{p} \cdot S_3(CXC) + (1-\tilde{p}) \cdot S_3(CXX) = S_2(CX) \cdot (p\,u + q\,d) \\
E[S_3 \mid M_1](C\omega_1\omega_2) &= \tilde{p}^2\, S_3(CCC) + \tilde{p}(1-\tilde{p})\, S_3(CCX) + \tilde{p}(1-\tilde{p})\, S_3(CXC) + (1-\tilde{p})^2\, S_3(CXX) \\
&= \left(p^2\, u^2 + 2pq\, ud + q^2\, d^2\right) S_1(C)
\end{aligned}$$

Propiedades de la esperanza condicional

En particular, se cumplen las siguientes propiedades. Si bien nos restringimos al modelo binomial de n pasos, son válidas para cualquier espacio de probabilidad y una filtración definida en el espacio.

a) Aditividad: Si X e Y son variables aleatorias sobre Ω, entonces para cada $k = 0, 1, \dots, n$,

$$E[X + Y \mid M_k] = E[X \mid M_k] + E[Y \mid M_k].$$

b) Sobre información conocida: Si una variable aleatoria Y es M_k-medible y $k < n$, entonces

$$E[YX \mid M_k] = Y\, E[X \mid M_k].$$

c) Condicionamiento iterado: Para $j < k < n$,

$$E[E[X \mid M_k] \mid M_j] = E[X \mid M_j],$$

Demostraciones: en clase.

Martingalas

Definición 5.5. Un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{M}$ se dice una **martingala** si se cumple que para cada $k = 0, 1, \dots, n$,

$$E[X_{k+1} \mid M_k] = X_k.$$

Notemos que si un proceso estocástico $\{X_k\}$ es una martingala, entonces:

$$E[X_k \mid M_{k-2}] = E[E[X_k \mid M_{k-1}] \mid M_{k-2}] = E[X_{k-1} \mid M_{k-2}] = X_{k-2}.$$

Así, aplicando iteradamente la esperanza condicional podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario 5.1. Si $\{X_k\}$ es una martingala, entonces para todo $k \geq 0$ se cumple que el valor esperado de X_k se mantiene constante e igual a X_0:

$$E[X_k] = X_0.$$

Ejemplo 5.1. Una forma de construir una martingala para una cierta medida de probabilidad es considerar una variable aleatoria Y en el espacio Ω de n tiradas de moneda, y definir el proceso

$$Y_n = Y, \qquad Y_k = E[Y \mid M_k], \quad 0 \leq k < n.$$

Este proceso es por su propia definición y por las propiedades de esperanza condicional una martingala.

Por ejemplo, consideremos Ω el espacio de 3 tiradas consecutivas de moneda, $S(t)$ un proceso de precios con $S_0 = 10$, $u = 2$, $d = 0{,}5$ y donde $\tilde{p} = \frac{1}{3}$ es la probabilidad que la moneda salga cara. Sea Y el payoff de una opción put con strike 20. El proceso dado por $Y_3 = Y$ e $Y_n = E[Y \mid M_n]$, $n = 0, 1, 2$ es una martingala. En un diagrama de árbol el proceso resultaría como en la Figura 5.2.1:

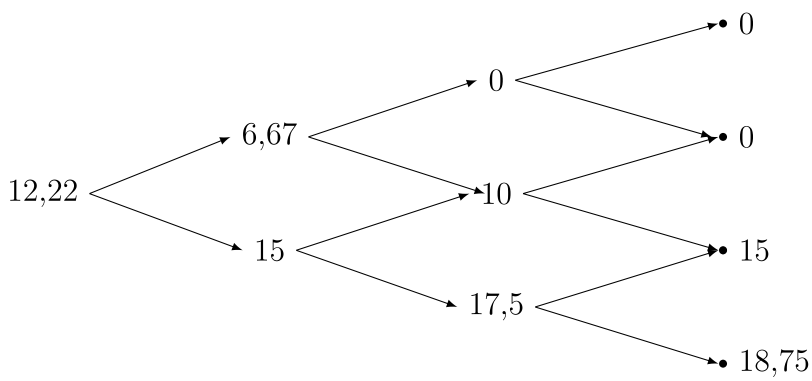


Figura 5.2.1: Proceso martingala

Así por ejemplo,

$$Y_3(CXX) = \max(20 - 5, 0) = 15, \quad Y_3(CXC) = \max(20 - 20, 0) = 0,$$

y por lo tanto

$$Y_2(CX) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 15 = 10.$$

Notemos que este procedimiento es similar al que hemos realizado para valorar una opción, y es lo que veremos en la siguiente sección.

5.2.5. Numerarios y medida de probabilidad neutral al riesgo

Que un proceso sea o no una martingala depende de la medida de probabilidad. En el Ejemplo 5.1 el proceso Y_n es una martingala para la elección $\tilde{p} = \frac{1}{3}$, $1-\tilde{p} = \frac{2}{3}$, pero no lo es si consideramos $\tilde{p} = \frac{1}{2}$.

En el caso del precio de una acción, si $\tilde{p}$ es la probabilidad de que la moneda salga cara, tenemos que

$$E[S_k \mid M_{k-1}] = S_{k-1}(\tilde{p}u + (1-\tilde{p})d),$$

y en el caso de la cuenta bancaria, dado que no se trata de una variable aleatoria y por lo tanto es conocida para todo t, tenemos que

$$E[B(k) \mid M_{k-1}] = B(k-1) \cdot (1+i).$$

Vemos que ninguno de los dos activos resulta una martingala a menos que $i = 0$ y $\tilde{p} = (1-d)/(u-d)$.

Ahora bien, consideremos los procesos obtenidos por dividir ambos activos por $B(k) = (1+i)^k$. Esto es:

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{S_k}{B(k)} & : & \dfrac{S_0}{1}, \quad \dfrac{S_1}{(1+i)}, \quad \dfrac{S_2}{(1+i)^2}, \dots, \\ \dfrac{B(k)}{B(k)} & : & 1, \quad 1, \quad 1, \quad \dots \end{array}$$

Se dice que estos procesos son **deflatados** o **descontados** por el proceso $B(k)$.

Claramente $\frac{B(n)}{B(n)} = 1$ es una martingala ya que es un proceso constante. Por otra parte, $\frac{S_k}{B(k)}$ satisface:

$$E\left[\frac{S_k}{B(k)} \mid M_{k-1}\right] = E\left[\frac{S_k}{(1+i)^k} \mid M_{k-1}\right] = \frac{S_{k-1}}{(1+i)^{k-1}} \cdot \frac{(\tilde{p}u + (1-\tilde{p})d)}{(1+i)}.$$

En este punto podemos ver que si las probabilidades $\tilde{p}$, $1-\tilde{p}$ son tales que $\tilde{p}u + (1-\tilde{p})d = 1+i$ entonces el proceso descontado $S_k/(1+i)^k$ también resulta una martingala. Pero esto es cierto si y sólo si

$$\tilde{p} = \frac{1+i-d}{u-d}.$$

En este caso el proceso de cuenta de moneda $B(k) = (1+i)^k$ que ha sido elegido como **deflator** del proceso recibe el nombre del **numerario**. Para este numerario la única probabilidad que hace que los procesos deflatados sean martingalas es aquella tal que $p = (1+i-d)/(u-$

d). Esta probabilidad se dice también una **medida de martingala** asociada al numerario $B(k)$, o **probabilidad neutral al riesgo**. Denotaremos con $\mathbb{Q}$ la medida de probabilidad sobre Ω tal que

$$\mathbb{Q}(\omega_1 \dots \omega_n) = p^{\#C(\omega_1 \dots \omega_n)} q^{\#X(\omega_1 \dots \omega_n)}, \qquad \text{con } p = \frac{1+i-d}{u-d},\ q = 1-p.$$

Notemos que la condición $d < 1+i < u$ hace que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ sean equivalentes.

El proceso S_k también podría utilizarse como numerario y daría lugar a otra medida de martingala, que será la única tal que los procesos deflatados por S_k sean martingalas.

5.2.6. Portfolios y arbitraje

Damos aquí las definiciones de portfolio, ganancia, portfolio autofinanciante y arbitraje.

Definición 5.6. Un **portfolio** en el modelo binomial es un proceso estocástico (h_k, a_k), $k = 1, 2, \dots, n$ tal que h_k y a_k son predecibles, o M_{k-1}-medibles. El **valor del portfolio** en tiempo k es:

$$V_k = h_k S_k + a_k B(k) = h_k S_k + a_k (1+i)^k.$$

En los términos del capítulo anterior, podemos pensar en $h_1 = \Delta_0$, $h_2 = \Delta_1$, ..., $h_n = \Delta_{n-1}$.

La **ganancia** de un portfolio en tiempo k es la cantidad:

$$V_k - V_0 = \sum_{j=0}^{k-1} V_{j+1} - V_j.$$

Un portfolio se dice **autofinanciante** si para cada k se cumple que:

$$h_k S_k + a_k B(k) = h_{k+1} S_k + a_{k+1} B(k).$$

De esta manera la ganancia de un portfolio autofinanciante está dada sólo por el movimiento de precios del activo y de la cuenta bancaria:

$$V_k - V_0 = \sum_{j=1}^{k} h_j (S_j - S_{j-1}) + a_j (B(j) - B(j-1))$$

Un portfolio autofinanciante es un **arbitraje** si $V_0 = 0$ y $\mathbb{P}(V_k > 0) > 0$ y $\mathbb{P}(V_k < 0) = 0$, o bien si $V_0 = 0$ y $\mathbb{P}(V_k < 0) > 0$ y $\mathbb{P}(V_k > 0) = 0$

La importancia de las medidas de martingala es que garantizan la ausencia de arbitraje. Esto es un resultado general, pero podemos verlo en el caso particular del modelo binomial. En efecto, consideremos un portfolio autofinanciante tal que $V_0 = 0$, $\mathbb{P}(V_k < 0) = 0$ y $\mathbb{P}(V_k > 0) > 0$. En ese caso el valor esperado de V_k es positivo: $E[V_k] > 0$. Lo mismo vale para cualquier probabilidad equivalente a P. Dado que las probabilidades de riesgo neutral p y q definen una medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$, haremos el cálculo de este valor esperado en esta medida.

La condición de autofinanciante indica que el valor del portfolio compuesto por acciones y dinero es tal que para cada j, $1 \leq j < n$,

$$V_j = h_j S_j + a_j B(j) = h_{j+1} S_j + a_{j+1} B(j).$$

Así, si consideramos el proceso V_j deflatado o descontado por $B(j)$, $0 \leq j \leq n$, tenemos que, en la medida de martingala $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_j}{(1+i)^j} \mid M_{j-1}\right] &= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{h_j S_j + a_j B(j)}{B(j)} \mid M_{j-1}\right] = h_j \frac{S_{j-1}}{(1+i)^{j-1}} + a_j \\ &= \frac{h_{j-1} S_{j-1} + a_{j-1} B(j-1)}{(1+i)^{j-1}} = \frac{V_{j-1}}{(1+i)^{j-1}}. \end{aligned}$$

Es decir que el proceso de valores descontados del portfolio $\{V_j/(1+i)^j\}$ es una martingala en la medida $\mathbb{Q}$. Por lo tanto.

$$V_0 = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_k}{(1+i)^k}\right].$$

Pero $V_k > 0$ si y sólo si su valor descontado también es positivo. Luego debe ser $E^{\mathbb{Q}}[V_k/(1+i)^k] > 0$. Pero entonces $V_0 > 0$ lo que contradice la hipótesis.

Hemos visto entonces que la existencia de una medida de martingala equivalente implica que no existen oportunidades de arbitraje. La recíproca también es cierta para modelos discretos en general. Esta doble implicación constituye el denominado *Primer teorema fundamental de valoración de activos*.

5.2.7. Precio libre de arbitraje

Recordemos a su vez que al demostrar que todo derivado es replicable, construimos un proceso $X_0, X_1, \ldots, X_n$, con $X_0 = E[V_n]/(1+i)^n$ y tal que

$$X_k = \Delta_{k-1} S_k + (X_{k-1} - \Delta_{k-1} S_{k-1})(1+i) = \Delta_{k-1} S_k + \frac{(X_{k-1} - \Delta_{k-1} S_{k-1})}{B(k-1)} B(k).$$

Aquí los coeficientes de S_k y $B(k)$ son M_{k-1} medibles, o lo que es lo mismo, son predecibles, y constituyen un portfolio autofinanciante. Esto quiere decir que $X_k/B(k)$ es una martingala y como

$X_N = V_N$ entonces

$$V_k = X_k, \qquad \text{para todo } k.$$

Luego, independientemente de cuál sea la medida de probabilidad, si el derivado es replicable su precio inicial es único. Comprenderemos esto mejor cuando analicemos el caso del modelo trinomial. Este otro modelo también admite medidas de martingalas, pero a diferencia del modelo binomial existen infinitas de estas medidas para un mismo numerario. Esto significa que pueden fijarse distintos precios para un mismo derivado sin que ninguno de ellos permita arbitraje. ¿Por qué hay más de una medida? Porque el mercado es incompleto: no todo derivado es replicable.

5.3. Modelo trinomial

El modelo trinomial es un buen ejemplo para distinguir conceptos tales como arbitraje, medida de martingala y mercado completo. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2. Una acción cuesta $S_0 = \$10$ en $t = 0$ y en $t = 1$ puede tomar tres valores: $S_u = 14$, $S_m = 11$ o $S_d = 8$. Se desea valorar una put sobre esta acción con strike $K = \$12$. Asumiremos que la tasa libre de riesgo es $i = 0$. (Figuras 5.3.1 y 5.3.2)

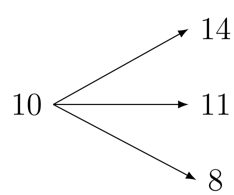


Figura 5.3.1: Árbol trinomial de la acción

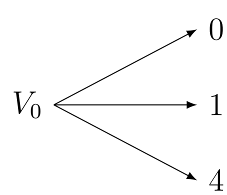


Figura 5.3.2: Payoff de la put con strike $K = \$12$

Para resolver esta situación de manera análoga al modelo binomial, tratamos de construir un portfolio replicante de la opción. Esto es, un portfolio con Δ acciones y dinero en el banco de modo que en $t = 1$ tenga el mismo payoff que la put. Luego debemos elegir Δ tal que:

$$\begin{cases} \Delta \cdot 14 + (X_0 - \Delta 10) & = 0 \\ \Delta \cdot 11 + (X_0 - \Delta 10) & = 1 \\ \Delta \cdot 8 + (X_0 - \Delta 10) & = 4. \end{cases}$$

Si resolvemos las dos primeras ecuaciones resulta $\Delta = -\frac{1}{3}$, si resolvemos las dos últimas es $\Delta = -1$ y si resolvemos la primera con la tercera obtenemos $\Delta = -\frac{2}{3}$. Es decir este sistema no tiene solución y por lo tanto no existe un portfolio autofinanciante que replique el derivado.

Intentamos entonces ponernos en lugar de un inversor en posición short. Si bien no puede realizar una estrategia de cobertura que replique exactamente a la opción, sí puede tratar de cubrirse en al menos dos posibles payoff de la opción:

- Si se cubre del payoff en los casos $S_u = 14$ y $S_m = 11$ resulta

  $$\Delta = \frac{0 - 1}{14 - 11} = -1/3$$

  . Para ello la inversión inicial debe ser $X_0 = 4/3$. Para esta estrategia si el precio resulta $S_d = 8$ su portfolio tendrá el valor

  $$-\frac{1}{3} \cdot 8 + (\frac{4}{3} + \frac{10}{3}) = 2.$$

  Pero en esta situación él deberá pagar $\$4$ por lo cual tendría una pérdida de $\$2$. Luego el inversor exigirá un precio superior a $4/3$.
- Si realiza la cobertura para los escenarios $S_m = 11$ y $S_d = 8$, resulta $\Delta = -1$ y el portfolio debe valer inicialmente $X_0 = 2$. Para esta estrategia si el precio sube a $S_u = 14$ su portfolio tendrá el valor:

  $$-14 + (2 + 10) = -2,$$

  por lo cual también perdería $\$2$. Luego preferirá un precio inicial superior a $\$2$.
- En el caso restante resulta $\Delta = -2/3$ y el portfolio inicial con valor $X_0 = \frac{8}{3}$. Si el precio final es $S_m = 11$ su portfolio tendrá el valor:

  $$-\frac{2}{3} \cdot 11 + (\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot 10) = 2,$$

  que le resultará suficiente para pagar el \$1 del payoff.

Por lo tanto para el inversor en posición short el mínimo precio que debería cobrar para no tener pérdidas en los tres posibles payoff es $X_0 = \frac{8}{3}$.

Por otra parte, la posición long también busca una prima que no le implique una pérdida al momento del payoff. En su caso al comprar la put construirá un portfolio comprando acciones y pidiendo un préstamo un préstamo P y su objetivo es que el payoff de la opción más su posición en acciones sea igual o superior al valor del préstamo en $t = 1$. Esto es:

$$\begin{array}{c|c} t = 0 & t = 1 \\ \Delta S_0 + X_0 = \text{préstamo} & \Delta S_1 + V_1 \geq \text{préstamo}\cdot(1 + i) \end{array}$$

Analicemos cuál es la máxima prima que estaría dispuesto a pagar este inversor.

- Si la acción sube a 11 o a 14, su payoff será $V_m = 1$ o $V_u = 0$. En este caso para no tener pérdida en estas dos situaciones debe comprar $\Delta = \frac{1}{3}$ acciones en $t = 0$ y pedir un préstamo $P = 14/3$.
  Así su portfolio en acciones más préstamo tendrá un valor en $t = 0$ dado por $X_0 = 4/3$. En tal caso, si en $t = 1$ la acción vale $S_1 = 8$ tendrá una acción con valor $8/3$ y una deuda de $14/3$. Si bien el valor de este portfolio es $8/3 - 14/3 = -2$ y el payoff de la put es 4, notemos que en la práctica no puede cubrir la posición. Sí podría en este instante vender (en short) $2/3$ de acción más el tercio que tiene ejerciendo la put, con los $\$12$ devuelve $\$14/3$ al banco. Le restan $\$22/3$. Recompra $2/3$ de acción a precio de mercado (\$8), y le queda una ganancia de $\$(22 - 16)/3 = \$2$.
  Así, analizando este caso vemos que con una posición en $\frac{1}{3}$ de acciones y una prima de $\$1{,}33$ puede cubrir su posición sin tener pérdidas.

- Si en cambio busca cubrir la posición si el precio baja a 8 o sube a 11, con payoffs $V_d = 4$ o $V_m = 1$ respectivamente, debe comprar $\Delta = 1$ acción y pedir un préstamo $P = 12$. En este caso la prima no debería ser superior $X_0 = 2$. Por otro lado si en $t = 1$ la acción sube a 14 tendrá un capital $\Delta 14 + 0 = 14$ que en tal escenario le permitiría una ganancia.
  Así vemos que comprando una acción y la opción a una prima de \$2 también puede cubrir su posición sin que implique una pérdida.
- Por último, si se cubre de la situación en que la acción sube a 14 o baja a 8 los payoffs serán $V_u = 0$ o $V_d = 4$ respectivamente. En este caso debe comprar $\Delta = \frac{2}{3}$ acciones y pedir un

préstamo $P = 28/3$. Luego la prima no debería superar el valor $X_0 = 8/3$. Pero en ese caso, si la acción sube a 11 su portfolio en acciones y la opción valdrá $\Delta 11 + 1 = 25/3$ que no le será suficiente para devolver el préstamo $P = 28/3$.

Luego una prima de $\$\frac{8}{3}$ es demasiado alta para que el inversor pueda cubrirse.

Analizando estos casos vemos que el máximo valor que estaría dispuesto a pagar la posición long es $X_0 = 2$. Cualquier valor superior a éste le producirá una pérdida en alguna de las situaciones.

Ahora bien, si $p \geq 8/3$, entonces el inversor en short puede armar una estrategia de arbitraje y si $p \leq 2$ puede hacerlo el inversor en posición long. Por lo tanto, para que no exista arbitraje debe ocurrir

$$2 < p < \frac{8}{3}.$$

Notemos entonces que existe todo un rango de primas de la put con la cual pueden conformarse portfolios autofinanciantes que no admiten arbitraje. La razón por la cual esta prima no es única es que la put no es replicable.

El modelo trinomial es un modelo de mercado incompleto.

5.3.1. Medidas de martingala en el modelo trinomial

En el modelo trinomial consideramos entonces un espacio de probabilidad $\Omega = \{\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n\}$ donde cada ω_i representa un ensayo puede tomar tres valores, digamos *piedra*, *papel* y *tijera* y los ensayos son independientes. Las probabilidades son respectivamente p_u, p_m y p_d. En este espacio de probabilidad asumimos un activo que sigue un proceso estocástico S_k, $0 \leq k \leq n$ y una cuenta de moneda $B(k) = (1+i)^k$. El activo es tal que S_0 es una constante y S_{k+1} puede tomar tres valores según sea S_k:

$$S_k \cdot u, \qquad S_k \cdot m, \qquad S_k \cdot d,$$

con $0 < d < m < u$. A fin de que no exista arbitraje con la cuenta de moneda y la acción asumiremos

$$d < 1 + i < u.$$

Consideraremos el caso $n = 1$, es decir, el proceso de la acción es S_0, S_1, la cuenta de moneda es $B(0) = 1$, $B(1) = 1 + i$. Si elegimos la cuenta de moneda como el numerario, entonces los procesos deflatados serán una martingala si las probabilidades (p_u, p_m, p_d) satisfacen:

$$p_u S_u + p_m S_m + p_d S_d = S_0 \cdot (1+i), \qquad p_u + p_m + p_d = 1.$$

Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones dependientes de un parámetro, por ejemplo de p_m. Luego resulta $p_d = 1 - p_u - p_m$ y

$$\begin{aligned} p_u \cdot u + p_m \cdot m + (1 - p_u - p_m) \cdot d &= (1 + i) \\ p_u \cdot (u - d) &= (1 + i) - p_m \cdot (m - d) - d \end{aligned}$$

por lo cual p_u y p_d están dados en términos de p_m por:

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{(1 + i) - p_m \cdot m - (1 - p_m) \cdot d}{u - d} \\ p_d &= \frac{p_m \cdot m + (1 - p_m) \cdot u - (1 + i)}{u - d}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. En el Ejemplo 5.2, $u = 1{,}4$, $m = 1{,}1$ y $d = 0{,}8$ e $i = 0$. Así p_u y p_d quedan determinados por p_m por las relaciones:

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1 - p_m \cdot 1{,}1 - (1 - p_m) \cdot 0{,}8}{0{,}6} = \frac{2 - 3p_m}{6}, \\ p_d &= 1 - p_m - \frac{2 - 3p_m}{6} = \frac{4 - 3p_m}{6}. \end{aligned}$$

Observemos que para que resulten probabilidades positivas debe ser $0 < p_m < 2/3$ Así para $p_m = 1/3$ una medida de martingala está dada por:

$$p_u = \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{1}{3}, \quad p_d = \frac{1}{2}.$$

La prima de la put libre de arbitraje calculada con esta probabilidad es:

$$p_1 = \frac{1}{1 + i}(p_u V_u + p_m V_m + p_d V_d) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2{,}333.$$

Para $p_m = 0{,}5$ otra medida de martingala está dada por

$$p_u = \frac{1}{12}, \quad p_m = \frac{1}{2}, \quad p_d = \frac{5}{12},$$

y la correspondiente prima libre de arbitraje para la put es:

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 4 = 2{,}167.$$

Notemos que si consideráramos $p_m = 0$, resulta $p_u = 1/3$ y $p_d = 2/3$ con una prima $p = 8/3$. A su vez, si $p_m = 2/3$ entonces $p_u = 0$ y $p_d = 1/3$ con una prima $p = 2$. Estos casos extremos no corresponden a una medida de martingala puesto que una de las probabilidades es nula, y coinciden con el mínimo precio de venta y máximo precio de compra respectivamente que permiten un arbitraje para la posición short o la posición long.

Ejemplo 5.4. Consideremos ahora una acción como en el Ejemplo 5.2, con la tasa $i = 0$ y una put sobre la acción con strike $K = 14$. El payoff de esta put está dado por:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } S_1 = 14 \\ 3 & \text{si } S_1 = 11 \\ 6 & \text{si } S_1 = 8. \end{cases}$$

En este caso la opción se puede replicar. En efecto un portfolio que replique la opción utilizando Δ acciones debe cumplir $\Delta = -1$, y un valor X_0 inicial tal que $-S_1 + (X_0 + 10) = V_1$. Luego debe ser $X_0 = 4$.

Ahora bien, ¿qué valor obtenemos para la prima si calculamos el precio a partir de una medida de martingala?

Si por ejemplo tomamos $p_u = 1/6$, $p_m = 1/3$ y $p_d = 1/2$ entonces

$$p = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4.$$

Si tomamos $p_u = 1/12$, $p_m = 1/2$ y $p_d = 5/12$ entonces

$$p = \frac{1}{12} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{12} \cdot 6 = 4.$$

Esto es, independientemente de la medida de martingala que utilicemos para el numerario, siempre obtendremos una prima $p = 4$. Esto es justamente porque el portfolio es replicable. Luego, como el portfolio replicante está compuesto por -1 acción y \$14 en el banco, y tanto la acción como la cuenta de moneda deflatadas son martingalas para cualquiera de las medidas neutrales al riesgo entonces para cada una de estas medidas de probabilidad tenemos:

$$p = E[\frac{V_1}{1+i}] = E[\underbrace{-S_1/(1+i)}_{\text{acciones}} + \underbrace{(4+10)}_{\text{dinero}}] = -S_0 + 14 = -10 + 14 = 4.$$

Observación: En este caso particular es $i = 0$.

5.4. Teoremas Fundamentales

Concluimos esta sección resumiendo algunos resultados vistos hasta el momento y que se generalizan a todos los modelos de mercado, y enunciamos a continuación ambos *Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos*.

Teorema 5.2 (**Primer Teorema Fundamental de Valoración de Activos**)**.** Un modelo de mercado en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ es libre de arbitraje si y sólo si existe un numerario y una medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ tal que los activos deflatados por el numerario resultan una martingala. Esta probabilidad se denomina *medida neutral al riesgo*.

Teorema 5.3 (**Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos:**)**.** Un modelo de mercado libre de arbitraje en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ es completo si y sólo para cada numerario existe una única medida neutral al riesgo.

Hacemos notar que un mercado puede ser completo y sin embargo tener arbitraje. Sirve como ejemplo el modelo binomial tomando $1 + i \leq d$ o $1 + i \geq u$.

Capítulo 6

Derivados americanos

6.1. Introducción

Un derivado americano es aquel que puede ejercerse en cualquier momento antes de su vencimiento. La valoración de este tipo de derivados requiere un tratamiento especial ya que su payoff no puede identificarse de manera inmediata con una variable aleatoria $V = V_N$ como es el caso de una opción europea y por lo tanto no queda claro cuál sería un precio libre de arbitraje.

Dado un derivado americano llamaremos **proceso de payoff** al proceso dado por el payoff del derivado en cada tiempo t.

Ejemplo 6.1. Consideremos un modelo binomial con una acción que inicialmente vale $S_0 = 100$, $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, una tasa de interés periódica $i = 0{,}05$, y una opción put americana con strike $K = 100$ con madurez en $T = 2$.

En este caso el **proceso de payoff** es el proceso Y_n dado por

$$Y_n = \max\{K - S_n, 0\}, \qquad n = 0, 1, 2, 3,$$

El árbol de la acción y del proceso de payoff se muestra en la Figura 6.1.1.

Un inversor en posición short intenta realizar una cobertura ante el posible ejercicio de la opción. La posición long a su vez tiene múltiples alternativas para ejercer la opción cada una de las cuales implica una cobertura diferente con un portfolio de valor inicial distinto. El objetivo es entonces analizar cuál es la estrategia óptima para la posición long, es decir la que tenga un payoff esperado máximo. Una vez identificada esta estrategia se podrá valorar el derivado.

En el caso de esta opción put, si sugiriéramos a un inversor cuál es el momento óptimo para ejercer podríamos indicarle:

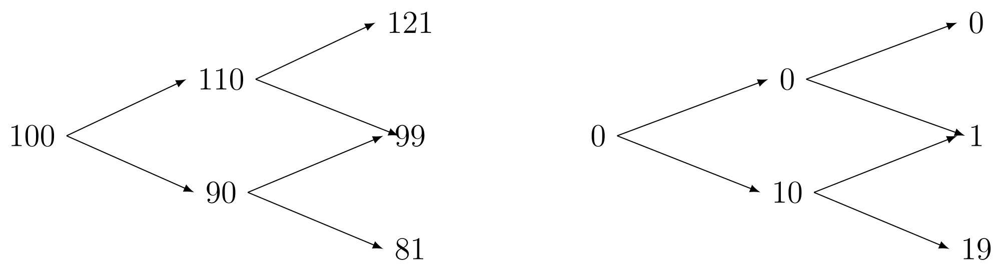


Figura 6.1.1: Acción y proceso de payoff para una put con strike $K = 100$

- Si la moneda sale XC, debe ejercer en $t = 1$,
- si la moneda sale XX, debe ejercer en $t = 2$,
- si sale CX ejerza en $t = 2$, pero
- si sale CC que deje expirar la opción en $t = 2$.

Claramente esto es una regla que deja a la posición long con la máxima ganancia posible en cada trayectoria del activo. El problema está en que el inversor no tiene capacidad de anticipar una tirada de moneda, esto es, no puede decidir al momento que la primer moneda sale X si ejercer o no porque no sabe si la siguiente es C o X.

El inversor sí puede usar una regla que no le implique *ver el futuro*, sino que sólo dependa de la información que tiene al presente.

6.2. Stopping times

Las indicaciones dadas al inversor en posición long constituyen una regla de ejercicio en la cual se indica en qué momento ejercer, o en qué casos debe dejar expirar la opción. Así la regla de ejercicio del Ejemplo 6.1 define una variable aleatoria τ dada por:

$$\tau(CC) = 0, \qquad \tau(CX) = 2, \qquad \tau(XC) = 1, \qquad \tau(XX) = 2,$$

donde el valor 2 puede indicar ejercicio de la opción o dejarla expirar.

Si la regla de ejercicio no debe depender del futuro entonces debería modificarse τ por ejemplo del siguiente modo:

- Si la primer moneda sale cruz, debe ejercer en $t = 1$.
- Si sale CC, debe ejercer en $t = 2$.
- Si sale CX, ejercer en $t = 2$.

Notemos que la tercera regla es obvia si se ha definido la segunda.

Un stopping time o tiempo de parada es una variable aleatoria que a cada $\omega \in \Omega$ le asigna un valor t, $t \in \{0, 1, \ldots, N\}$, pero con la propiedad de no depender del futuro.

Definición 6.1. Consideremos el modelo binomial de N pasos. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \mapsto \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ es un **stopping time** si

$$\tau(\omega_1 \ldots \omega_n \omega_{n+1} \ldots \omega_N) = n$$

implica que $\tau(\omega_1 \ldots \omega_n \tilde{\omega}_{n+1} \ldots \tilde{\omega}_N) = n$ para todo $\tilde{\omega}_{n+1} \ldots \tilde{\omega}_N$.

Ejemplo 6.2. Para $N = 3$ un stopping time τ tal que $\tau(CXC) = 1$ determina que:

$$\tau(CCC) = \tau(CCX) = \tau(CXX) = 1.$$

Si además $\tau(XXC) = 2$ entonces se debe cumplir $\tau(XXX) = 2$.

Dado un proceso estocástico Y_0, Y_1, …, Y_N , y un stopping time τ, definimos la variable aleatoria Y_τ dada por el *proceso detenido por* τ dada por

$$Y_\tau(\omega) = Y_{\tau(\omega)}(\omega), \qquad \text{para cada } \omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_N.$$

Así por ejemplo, para la opción put del Ejemplo 6.1 tenemos el proceso dado por los payoff posibles en cada nodo del árbol, y podemos considerar el stopping time τ tal que

$$\tau(CC) = \tau(CX) = 1, \qquad \tau(XC) = \tau(XX) = 2.$$

En la Figura 6.2.1 se representa el proceso $\mathbf{Y}$, el stopping time τ, y los valores de Y_τ recuadrados.

y así la variable Y_τ está dada por:

$$Y_\tau(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = CC, \quad CX \\ 1 & \omega = XC \\ 19 & \omega = XX. \end{cases}$$

El proceso de payoffs de la opción put junto con el stopping time define un modo particular de ejercer la opción: la opción put debe ejercerse en $t = 1$ si la primer moneda sale cara y en $t = 2$ si sale cruz. Para tener en cuenta el valor del dinero en el tiempo, supondremos que si el inversor ejerce en $t = 1$ mantiene el dinero ganado en la cuenta bancaria hasta el final del proceso (si bien en

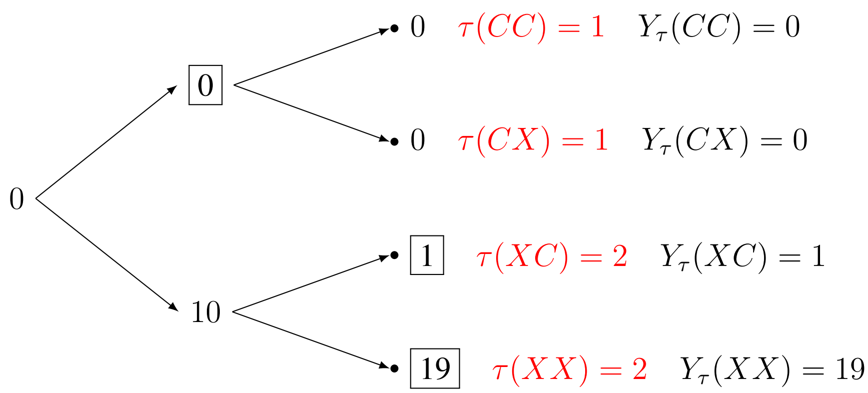


Figura 6.2.1: Proceso de payoffs y stopping time τ

este caso es irrelevante porque el payoff es 0), y lo denominamos *payoff alternativo*. Así, el payoff alternativo para el stopping time τ resulta:

$$\text{Payoff alternativo} = V_\tau(\omega) = \begin{cases} 0 \cdot (1{,}05) = 0 & \omega = CC, \quad CX \\ 1 & \omega = XC \\ 19 & \omega = XX. \end{cases}$$

Luego el precio de no arbitraje de esta opción con esta regla de ejercicio está dado por el valor esperado del valor descontado del payoff. Notemos que $p = \frac{1{,}05-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 0{,}75$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{0},\tau} &= \frac{1}{(1+i)^2} \cdot E[V_\tau] \\ &= \frac{1}{(1{,}05)^2} \cdot \left((0{,}75^2 + 0{,}75 \cdot 0{,}25) \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 1 + 0{,}25^2 \cdot 19\right) \\ &= \frac{1}{1{,}05^2} \cdot 1{,}375 = \mathbf{1{,}2472}. \end{aligned}$$

Si en cambio el stopping time elegido es

$$\sigma(XX) = \sigma(XC) = 1, \qquad \sigma(CX) = \sigma(CC) = 2,$$

(ver Figura 6.2.2) la variable Y_σ y el payoff V_σ están dados por:

$$Y_\sigma(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = CC \\ 1 & \omega = CX \\ 10 & \omega = XC, \quad XX. \end{cases} \qquad V_\sigma(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = CC \\ 1 & \omega = CX \\ 10 \cdot 1{,}05 = 10{,}5 & \omega = XC, \quad XX. \end{cases}$$

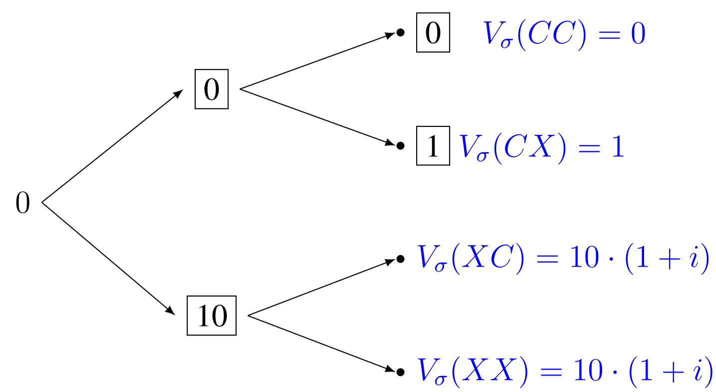


Figura 6.2.2: Stopping time σ y payoff alternativo V_σ

En este caso, la prima de la put con la aplicación del stopping time σ resulta:

$$V_{0,\sigma} = \frac{1}{1{,}05^2} \cdot \big((0{,}25 \cdot 0{,}75) \cdot (1 + 10{,}5) + 0{,}25^2 \cdot 10{,}5\big) = \mathbf{2{,}5510}.$$

Si tomamos el stopping time γ tal que $\gamma(\omega) = 1$ para todo ω, entonces

$$V_{0,\gamma} = \frac{1}{1{,}05^2} 0{,}25 \cdot 10{,}5 = \mathbf{2{,}3809}.$$

También podemos considerar el stopping time $\rho(\omega) = 0$, que implica que el derivado debe ser ejercido en $t = 0$. En ese caso el payoff sería 0 y también la prima.

Por último, si el stopping time es

$$\alpha(\omega) = 2, \qquad \text{para todo } \omega,$$

la regla indica que se debe ejercer en $t = 2$, es decir a la madurez de la opción. Esto implica un payoff equivalente al de la put europea y la prima resulta

$$V_{0,\alpha} = \frac{1}{1{,}05^2} \cdot (2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}25^2 \cdot 19) = \mathbf{1{,}4172}.$$

Entonces cada uno de los stopping times determina un precio libre de arbitraje y se corresponde con una estrategia posible del inversor en posición long. El precio de venta del derivado deberá ser el máximo valor de todas las primas a fin de asegurar una cobertura en cualquiera de los stopping times posibles. Así, en este caso, la prima resulta:

$$V_0 = \max\{1{,}2472,\ 2{,}5510,\ 2{,}3808,\ 1{,}4172,\ 0\} = \mathbf{2{,}5510}.$$

En particular esta put americana tiene una prima mayor que la put europea con igual madurez y strike.

6.3. Método de valoración

Generalizando el ejemplo de la Sección 6.2, dado un derivado americano con proceso de payoff $Y_0, Y_1, \ldots, Y_N$ y un stopping time τ queda definida la variable V_τ dada por

$$V_\tau = Y_\tau (1+i)^{N-\tau}.$$

Llamaremos a V_τ un **payoff alternativo**.

Para cada payoff alternativo existe un precio libre de arbitraje. El precio libre de arbitraje del derivado americano se define como

$$V_0 = \frac{1}{(1+i)^N} \max_\tau E[V_\tau],$$

donde el máximo se calcula sobre todos los posibles stopping times. Notemos que, si bien el conjunto de stopping times puede ser considerablemente grande es de todos modos un conjunto finito y por lo tanto este máximo es alcanzado por algún τ^* en particular. El inconveniente de esta definición es su método de cálculo ya que requiere determinar el payoff para cada posible stopping time para luego determinar el máximo. Veamos cómo afrontar este problema.

Recordemos que un stopping time toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$, y alcanza entonces un valor mínimo. Denotaremos con $\mathcal{S}_k$ al conjunto de todos los stopping times que toman valores en $[k, N]$. Esto es, todos aquellos que detienen al proceso en tiempo k o posterior a k.

$$\mathcal{S}_k = \{\tau \mid k \leq \tau(\omega) \leq N \text{ para todo } \omega \in \Omega\}.$$

Notemos que si $0 \leq n < k$ y $\tau(\omega) \geq k$ entonces también se cumple $\tau(\omega) \geq n$. Por lo tanto $\mathcal{S}_n \supseteq \mathcal{S}_k$ y tendremos que:

$$\max_{\tau \in \mathcal{S}_n} E[V_\tau] \geq \max_{\tau \in \mathcal{S}_k} E[V_\tau].$$

Entonces para cada $k = 0, 1, \ldots, N-1$, si podemos calcular el máximo payoff para los stopping times que se detienen en o después de $t = k+1$, tendremos que para los que se detienen en $t = k$ o después sólo debemos considerar dicho máximo y los stopping times que se detienen en k para algún ω:

$$\max_{\tau \in \mathcal{S}_k} E[V_\tau] = \max \left\{ \max_{\substack{\tau \in \mathcal{S}_k, \\ \{\tau = k\} \neq \emptyset}} E[V_\tau], \ \max_{\tau \in \mathcal{S}_{k+1}} E[V_\tau] \right\}.$$

Ahora, para cada k consideremos todos los subconjuntos de Ω formados por elementos que coinciden en las primeras k tiradas, y los denotamos $B_{k,1}$, $B_{k,2}, \ldots$, $B_{k,c}$. Estos conjuntos son los análogos a los que presentamos para definir el elemento de la filtración M_k. Por ejemplo, si $N = 4$ y $k = 2$, entonces

$$\begin{aligned} B_{2,1} &= \{CC\omega_3\omega_4, \mid \omega_3, \omega_4 \in \{C, X\}\} \\ B_{2,2} &= \{CX\omega_3\omega_4, \mid \omega_3, \omega_4 \in \{C, X\}\} \\ B_{2,3} &= \{XC\omega_3\omega_4, \mid \omega_3, \omega_4 \in \{C, X\}\} \\ B_{2,4} &= \{XX\omega_3\omega_4, \mid \omega_3, \omega_4 \in \{C, X\}\} \end{aligned}$$

Si ahora se tienen c stopping times en $\mathcal{S}_k$, τ_1, ..., τ_c, podemos construir un nuevo stopping time $\overline{\tau}$ dado por:

$$\overline{\tau}(\omega) = \begin{cases} \tau_1(\omega) & \text{si } \omega \in B_{k,1} \\ \tau_2(\omega) & \text{si } \omega \in B_{k,2} \\ \vdots & \\ \tau_c(\omega) & \text{si } \omega \in B_{k,c} \end{cases}$$

Para este $\overline{\tau}$ se cumple entonces que:

$$\begin{aligned} E[V_{\overline{\tau}}] &= \sum_{\omega} V_{\overline{\tau}}(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in B_{k,1}} V_{\overline{\tau}}(\omega)\mathbb{P}(\omega) + \sum_{\omega \in B_{k,2}} V_{\overline{\tau}}(\omega)\mathbb{P}(\omega) + \cdots + \sum_{\omega \in B_{k,c}} V_{\overline{\tau}}(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\ &= E[V_{\tau_1} \mid B_{k,1}]\mathbb{P}(B_{k,1}) + E[V_{\tau_2} \mid B_{k,2}]\mathbb{P}(B_{k,2}) + \cdots + E[V_{\tau_c} \mid B_{k,c}]\mathbb{P}(B_{k,c}), \end{aligned}$$

donde cada sumando agrupa los ω que coinciden en las primeras k tiradas. Aquí el valor esperado $E[V_{\tau_j} \mid B_{k,j}]$ simboliza:

$$E[V_{\tau_j} \mid M_k](\omega_1 \ldots \omega_k),$$

donde las primeras tiradas en $B_{k,j}$ son $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k$ .Por ejemplo,

$$\begin{aligned} E[V_\tau \mid B_{2,3}] &= E[V_\tau \mid M_2](XC) \\ &= p^2 \cdot V_\tau(XCCC) + p \cdot q \cdot (V_\tau(XCCX) + V_\tau(XCXC)) + q^2 \cdot V_\tau(XCXX). \end{aligned}$$

Luego si para cada j, $j = 1, 2, \ldots, c$, elegimos el stopping time que maximiza el valor $E[V_\tau \mid B_{k,j}]$ podremos armar el stopping time que maximiza $E[V_\tau]$ sobre todos τ que se detienen en k o después de k.

Ejemplo 6.3. En el Ejemplo de la Sección 6.2 los conjuntos $B_{1,j}$, $j = 1, 2$ están dados por:

$$B_{1,1} = \{CC, CX\}, \qquad B_{1,2} = \{XC, XX\}.$$

Tenemos que $\gamma = 1$ en $B_{1,2}$ y $\alpha = 2$ en $B_{1,1}$. Luego

$$E[V_\alpha \mid B_{1,1}] = 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}25, \qquad E[V_\gamma \mid B_{1,2}] = 1{,}05 \cdot 10 = 10{,}5.$$

Luego podemos armar el stopping time

$$\overline{\tau}(\omega) = \begin{cases} \alpha(\omega) = 2 & \omega = CC,\ \omega = CX \\ \gamma(\omega) = 1 & \omega = XC,\ \omega = XX \end{cases}.$$

Este stopping time maximiza el valor esperado de los payoffs alternativos ya que α y γ lo maximizan en $B_{1,1}$ y $B_{1,2}$ respectivamente. Notemos en particular que $\overline{\tau} = \sigma$ del mismo ejemplo.

Entonces un método para encontrar el óptimo stopping time es el siguiente. En primer lugar calculamos el óptimo (y único) stopping time tal que $\tau = N$, y el correspondiente payoff del derivado para cada $B_{N,j}$. Aquí $B_{N,j}$ es un conjunto unitario $\{\omega\}$.

Ahora supongamos que para el tiempo $t = k + 1$ ya hemos determinado el stopping time τ_{k+1} que optimiza el valor esperado del payoff en cada $B_{k+1,1}$, $B_{k+1,2}$, $\ldots$, $B_{k+1,c}$. En el tiempo $t = k$ y para un determinado $B_{k,j}$ debemos elegir el óptimo entre:

- el stopping time τ que vale k en $B_{k,j}$, es decir, que decide ejercer en $t = k$ si $\omega \in B_{k,j}$, y
- el stopping time óptimo de los que se detienen después, es decir, τ_{k+1}.

En el primer caso V_τ es justamente $Y_k(1 + i)^{N-k}$. Se trata del valor del derivado que se obtiene en el caso de ejercerlo en ese momento y mantenerlo hasta el tiempo $t = N$. Luego $E[V_\tau \mid B_{k,j}] = Y_k(1 + i)^{N-k}$. En el segundo caso vemos que $B_{k,j}$ es la unión de dos conjuntos $B_{k+1,l}$ y $B_{k+1,s}$:

$$B_{k,j} = \underbrace{\{(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k C \ldots) \in B_{k,j}\}}_{B_{k+1,s}} \cup \underbrace{\{(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k X \ldots) \in B_{k,j}\}}_{B_{k+1,l}}.$$

Para cada uno de estos conjuntos ya se han determinado en el paso anterior los correspondientes valores $E[V_{\tau_{k+1}} \mid B_{k+1,l}]$ y $E[V_{\tau_{k+1}} \mid B_{k+1,s}]$. Luego

$$E[V_{\tau_{k+1}} \mid B_{k,j}] = p \cdot E[V_{\tau_{k+1}} \mid B_{k+1,s}] + q \cdot E[V_{\tau_{k+1}} \mid B_{k+1,l}].$$

Recordemos que si el proceso se detiene en $t = k$ consideramos que el inversor mantiene el payoff en la cuenta bancaria hasta $t = N$. Con todo esto vemos que la decisión consiste en elegir el máximo entre

$$Y_k(1 + i)^{N-k}, \qquad E[V_{\tau_{k+1}} \mid B_{k,j}]. \tag{6.3.1}$$

Este máximo determinará cuál es el valor del stopping time óptimo en el conjunto $B_{k,j}$ calculado hasta el momento. O bien este stopping time vale $\tau_k(B_{k,j}) = k$, o bien $\tau_k(B_{k,j}) = \tau_{k+1}(B_{k,j})$.

Seguidamente actualizamos el valor del derivado en $t = k$ en el nodo j ($B_{k,j}$). Como el payoff alternativo $V_{\tau_{k+1}}$ determinó un valor óptimo de la opción V_{k+1}, que está dado por:

$$V_{k+1} = \frac{1}{(1+i)^{(N-(k+1))}} E[V_{\tau_{k+1}} \mid M_{k+1}].$$

Entonces, dividiendo en (6.3.1) por $(1+i)^{N-k}$ y utilizando la propiedad de anidamiento del valor esperado condicional concluimos que en $B_{k,j}$ el valor del derivado es:

$$V_k = \max(Y_k, \qquad \frac{1}{1+i} E[V_{k+1} \mid B_{k,j}].$$

o lo que es lo mismo en $t = k$ resulta:

$$V_k = \max\{\underbrace{Y_k}_{\text{ejercer}}, \underbrace{\frac{1}{1+i}\left(p \cdot V_{k+1}(C) + q \cdot V_{k+1}(X)\right)}_{\text{esperar}}\}.$$

Valoración de un derivado americano

Sea el modelo binomial de N pasos con $S(0) = S_0$, factores u y d y una cuenta de moneda con tasa efectiva periódica i. Sean p y q las probabilidades neutrales al riesgo de que la moneda salga cara o cruz respectivamente.
Sea un derivado americano con madurez en $t = N$, que en $t = n$ paga Y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. El precio libre de arbitraje del derivado en $t = n$ determina un proceso adaptado V_n y está dado por la siguiente relación de recurrencia:

1. $V_N = Y_N$
2. para $n = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$V_n = \max\left\{Y_n, \quad \frac{1}{1+i}\left(pV_{n+1}(C) + qV_{n+1}(X)\right)\right\}. \tag{6.3.2}$$

Ilustramos este método con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.4. Consideremos una opción put americana con strike 100 con madurez en tres períodos, sobre un activo con precio inicial $S_0 = 100$, y parámetros $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$ y tasa periódica $i = 0{,}05$.

La Figura 6.3.1 muestra el árbol de la acción y los valores de la opción si la misma se ejerce en $t = 3$.

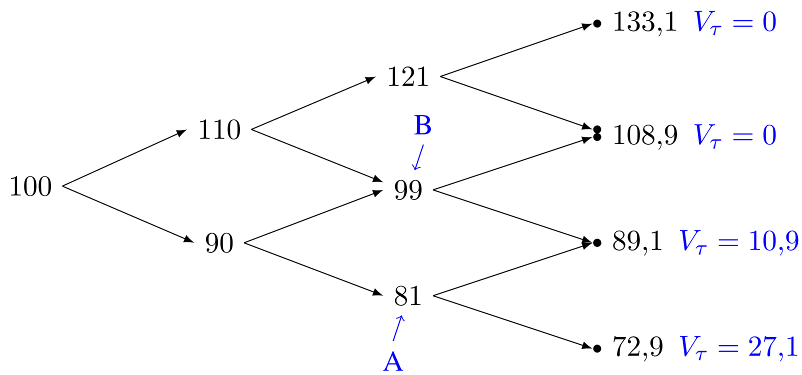


Figura 6.3.1: Árbol de la acción y payoff si $\tau = 3$

Para valorar la opción en $t = 2$, consideramos para cada nodo $(B_{2,j})$ el máximo entre ejercer en ese momento o esperar un período más. Asi por ejemplo, en el nodo A en la Figura 6.3.1, el valor de la put está dado por su *valor intrínseco*:

$$A = \text{máx}\{100 - 81, \frac{1}{1{,}05}((0{,}75) \cdot 10{,}9 + (0{,}25) \cdot 27{,}15)\} = 19,$$

mientras que en el nodo B tiene más valor *esperar*:

$$B = \text{máx}\{100 - 99, \frac{1}{1{,}05}((0{,}75) \cdot 0 + (0{,}25) \cdot 10{,}9)\} = 2{,}595.$$

Así obtenemos que los valores de la opción en $t = 2$ son como en la Figura 6.3.2. Si la regla sólo permitiera ejercer en $t = 2$ o $t = 3$ ya habríamos obtenido el valor de la prima:

$$V_0 = \frac{1}{(1{,}05)^2}(2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 2{,}595 + 0{,}25^2 \cdot 19) = 1{,}9597.$$

Luego calculamos los valores de la opción para $t = 1$, tomando el máximo entre ejercer en ese momento y el valor descontado de los dos posibles valores siguientes. Ver Figura 6.3.3.

$$\text{máx}\{0,\ \frac{1}{1{,}05} \cdot (0{,}75 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 2{,}595)\} = 0{,}617$$

$$\text{máx}\{10,\ \frac{1}{1{,}05} \cdot (0{,}75 \cdot 2{,}595 + 0{,}25 \cdot 19)\} = 10.$$

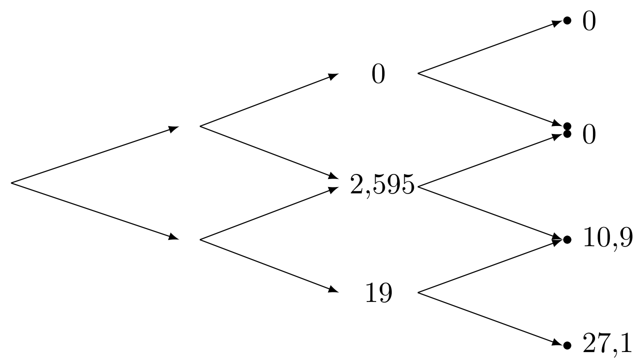


Figura 6.3.2: Valores de la put desde $t = 2$

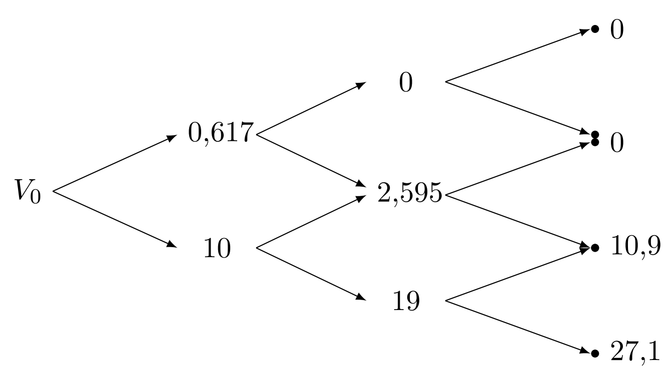


Figura 6.3.3: Valores de la put desde $t = 1$

Finalmente, la prima de la put está dada por

$$\text{máx}\{100-100, \frac{1}{1{,}05}(0{,}75\cdot 0{,}617+0{,}25\cdot 10)\} = \mathbf{2{,}822}.$$

Observemos que el stopping time que determina este máximo indica que se debe ejercer en $t=1$ si la moneda sale cruz. Esto es:

$$\tau(X\omega_2\omega_3)=1, \qquad \tau(C\omega_2\omega_3)=3.$$

En efecto, la variable aleatoria V_τ estará dada por:

$$V_\tau(\omega)=\begin{cases} 0 & \text{si } \omega = CCC,\ CCX,\ CXC \\ 10{,}9 & \text{si } \omega = CXX \\ 10\cdot(1{,}05)^2 & \text{si } \omega = X\omega_2\omega_3 \end{cases}$$

y entonces

$$V_0=\frac{1}{1{,}05^3}E[V_\tau]=\frac{1}{1{,}05^3}\left(0{,}75\cdot 0{,}25^2\cdot 10{,}9+0{,}25\cdot 10\cdot 1{,}05^2\right)=\mathbf{2{,}822}.$$

6.4. Replicación de un derivado americano

En el caso de un derivado americano el inversor en posición long podría ejercer en el tiempo óptimo, pero si ese tiempo no es el final del contrato también podría esperar para realizar el ejercicio más tarde. En tal caso si la posición short realiza una cobertura y la opción no es ejercida su portfolio tendrá posiblemente un valor más alto que el necesario para cubrirse de ese momento en adelante.

Veamos el caso del Ejemplo 6.4. La posición short vende la opción al valor $\$2{,}822$ e invierte esta cantidad en acciones y dinero:

$$2{,}822=\Delta_0 100+(2{,}822-\Delta_0 100),$$

y en $t=1$ su portfolio tiene el valor:

$$X_1(C)=\Delta_0 110+(2{,}822-\Delta_0 10)(1{,}05), \qquad X_1(X)=\Delta_0 90+(2{,}822-\Delta_0 100)(1{,}05).$$

Vimos que el stopping time óptimo indica que la opción debe ejercerse en $t = 1$ si la moneda sale X. Tomando

$$\Delta_0 = \frac{0{,}617 - 10}{110 - 90} = -0{,}4695,$$

tenemos en particular que $X_1(X) = -0{,}4695 \cdot 90 + (2{,}822 + 0{,}4695)(1{,}05) = 10$. Luego, si la posición long ejerce en este momento la posición short tiene el capital exacto para cubrir su posición.

Ahora bien, supongamos que la posición long no ejerce si la moneda sale X. Entonces la posición short debe cubrirse de los posibles valores $V_1(XC) = 2{,}595$ y $V_1(XX) = 19$. Pero para esto necesita un capital igual a

$$\frac{1}{1{,}05} \cdot (0{,}75 \cdot 2{,}595 + 0{,}25 \cdot 19) = 6{,}3774,$$

que es inferior al capital disponible de \$10. Luego la posición short puede **consumir** parte del capital y aún así cubrir su posición.

Claramente esto ocurrirá en cada caso en que el valor de la opción V_n es superior al valor esperado de V_{n+1}, o lo que es equivalente, cuando ejercer la opción es más redituable que esperar para su ejercicio.

El siguiente Teorema formaliza la replicación de derivados americanos.

Teorema 6.1. Consideremos un modelo binomial de N períodos, con $0 < d < 1 + i < u$ y con

$$p = \frac{1 + i - d}{u - d}, \qquad q = \frac{u - (1 + i)}{u - d}.$$

Para cada n, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, sea $\{Y_n\}$ un proceso de payoff que depende de las n primeras tiradas y V_n definido como en (6.3.2).
Para $n = 0, 1, \ldots, N - 1$, sean $\{\Delta_n\}$ y $\{C_n\}$ los procesos adaptados dados por:

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) &= \frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n C) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n X)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n C) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n X)}\\
C_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) &= V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) - \frac{1}{1+i}\left(p \cdot V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n C) + q \cdot V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n X)\right).
\end{aligned}$$

Luego $C_n \geq 0$ para todo n. Entonces, si $X_0 = V_0$ y para $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ se define

$$X_{n+1} = \Delta_n\, S_{n+1} + (X_n - C_n - \Delta_n\, S_n)(1 + i),$$

entonces resulta $X_n = V_n$ para todo $n = 0, 1, \ldots, N$.

La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 4.1.

Ejemplo 6.5. En el caso del Ejemplo 6.4 el proceso C_n toma valores positivos en los casos en que es conveniente el ejercicio temprano. Esto es para $C_1(X)$ y $C_1(XX)$, y sus valores están dados por:

$$C_1(X) = 10 - 6{,}3774 = 3{,}6226, \qquad C_1(XX) = 19 - 6{,}4643 = 12{,}5357.$$

Así, si la posición long no ejerce hasta $t = 3$ y las tiradas de moneda resultan XXX, la posición short podrá realizar una cobertura con el siguiente portfolio autofinanciante:

Portfolio	Delta
$X_0 = 2{,}822$	
$\Delta_0\, 90 + (X_0 - \mathbf{0} - \Delta_0\, 100)(1{,}05) = 10$	$\Delta_0 = -0{,}4695$
$\Delta_1(X)\, 81 + (\mathbf{6{,}3774} - \Delta_1(X)\, 90)(1{,}05) = 19$	$\Delta_1(X) = -0{,}9914$
$\Delta_2(XX)\, 72{,}9 + (\mathbf{12{,}5357} - \Delta_2(XX)\, 81)(1{,}05) = 27{,}1$	$\Delta_2(XX) = -1$

Capítulo 7

Modelos continuos en finanzas cuantitativas

7.1. El modelo de Black-Scholes

7.1.1. Introducción

En 1997, Myron Scholes y Robert Merton recibieron el Premio Nobel de Economía, luego de haber trabajado durante varios años en el desarrollo de una ingeniosa fórmula para la valoración de opciones call y put europeas. Este trabajo fue realizado en forma conjunta con Fisher Black, quien no recibió dicho premio ya que había fallecido en 1995. Esta fórmula comienza con el diseño de un modelo, denominado Modelo de Black-Scholes, en el cual describen el comportamiento de los precios de las acciones, bajo ciertas hipótesis de mercado, como un movimiento geométrico browniano. A partir de esto, logran derivar una ecuación diferencial, la *ecuación de Black-Scholes* que es satisfecha por las opciones call y put europeas, y cuya resolución permite dar el valor exacto de la prima de la opción en un escenario de mercado sin arbitraje. La solución de esta ecuación diferencial es conocida como la *Fórmula de Black-Scholes*.

Puede decirse que la historia de esta teoría comienza a mediados del siglo XIX, y no precisamente en investigaciones financieras. Robert Brown (1773-1858) fue un reconocido biólogo botánico escocés, que en particular observó y estudió el movimiento de las partículas de polen suspendidas en un líquido. Brown describió este comportamiento de las partículas como un movimiento aleatorio, y si bien no estableció una teoría explicativa, sí dio lugar a investigaciones posteriores a este fenómeno. De hecho, el modelo matemático que lo describe es conocido como *Movimiento Browniano*.

Hacia el año 1900, el matemático francés Louis Bachelier quien desarrolló su investigación en teorías financieras, expuso su tesis doctoral *La teoría de la especulación*, en la cual desarrolla por primera vez la teoría matemática que explica el movimiento browniano y lo utiliza particularmente para la valoración de opciones financieras.

En 1973, Black y Scholes publican el trabajo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, en el cual derivan una ecuación diferencial para opciones financieras asumiendo que los *retornos* de los activos, bajo ciertas hipótesis, se comportan de acuerdo a un movimiento browniano. Esto en particular describe a la evolución del precio de las acciones como un movimiento *geométrico* browniano. Casi al mismo tiempo, Merton publica el artículo *Theory of Rational Option Pricing* donde desarrolla sólidos fundamentos matemáticos para explicar el modelo, y en particular se refiere al trabajo de sus colegas como la *Teoría de Black Scholes*.

Cabe señalar que los trabajos de Black, Scholes y Merton han sido fundamentales para el desarrollo de teorías financieras que sirven para modelar diferentes escenarios financieros.

No es el objetivo de estas notas derivar la ecuación a partir de un modelo continuo, pero sí presentaremos la definición de un movimiento geométrico browniano, y derivaremos la fórmula de Black-Scholes a partir de una aproximación con modelos binomiales discretos.

7.1.2. El Movimiento Browniano

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un **movimiento browniano** con **tendencia** μ y **volatilidad** σ es un proceso estocástico continuo $\{W(t),\ t \geq 0\}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $W(0) = 0$, y
- si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, entonces

$$W(t_1) = W(t_1) - W(0), \qquad W(t_2) - W(t_1), \qquad \ldots \qquad W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

son variables aleatorias independientes, y cada uno de estos incrementos está normalmente distribuido con media y varianza dadas por:

$$\mathrm{E}[W(t_i) - W(t_{i-1})] = \mu \cdot (t_i - t_{i-1}), \qquad \mathrm{Var}\,(W(t_i) - W(t_{i-1})) = \sigma^2 \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

La descripción anterior se trata de una caracterización del Movimiento browniano, y no propiamente una definición.

Un **Movimiento Geométrico Browniano** con **tendencia** α y **volatilidad** σ es un proceso estocástico continuo $\{S(t),\ t \geq 0\}$ tal que

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$$

es un movimiento browniano con tendencia $\alpha - \frac{\sigma^2}{2}$ y volatilidad σ. En otras palabras, si

$$S(t) = S(0)e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

donde $W(t)$ es un movimiento browniano con tendencia 0 y volatilidad 1. Es importante notar que en este caso, el valor esperado de $S(t)$ está dado por

$$E[S(t)] = S(0)e^{\alpha \cdot t}. \tag{7.1.1}$$

y esa es la razón por la cual α se denomina tendencia o drift.

7.2. La fórmula de Black Scholes

7.2.1. La ecuación diferencial de Black Scholes

La fórmula de Black Scholes surge de una serie de hipótesis de mercado:

- El precio del activo sigue un movimiento geométrico browniano,
- Es posible entrar en posición short en cualquier instrumento,
- No hay costos de transacción. Los activos son divisibles en cualquier cantidad.
- Los activos no tienen dividendos.
- No hay posibilidad de arbitraje.
- Las transacciones se realizan de manera continua en el tiempo.
- La tasa de interés libre de riesgo, r, es constante y es la misma para todos los plazos.

Entre estas hipótesis observamos que se considera que el activo subyacente de un derivado europeo sigue un movimiento geométrico browniano. Si la tendencia real del activo es μ y su volatilidad es σ, entonces la trayectoria del activo está dada por:

$$S(t) = S(0)\, e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)}.$$

En términos del cálculo diferencial estocástico esta ecuación se representa con una ecuación diferencial estocástica como la siguiente:

$$dS(t) = \mu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dW(t). \tag{7.2.1}$$

Intuitivamente, esto significa que el retorno ($\frac{\Delta S}{S}$) del activo en intervalo Δt es $\mu\Delta t$ y su volatilidad es $\sigma\Delta t$.

Por otra parte, un derivado puede considerarse una variable aleatoria V cuyo valor en tiempo T depende del valor del subyacente. Esto es:

$$V(T) = V(S(T)),$$

y el objetivo de Black y Scholes era determinar una fórmula para valorar una opción call en el tiempo t. La teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, más precisamente el Lema de Itô, establece que si $x(t)$ es un proceso estocástico que satisface:

$$dx = a\,dt + b\,dW(t),$$

y G es una función de este proceso: $G = G(t, S)$, entonces G satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dG(t) = \left(a\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right)dt + b\,\frac{\partial G(t)}{\partial S}dW(t).$$

Entonces, entendiendo que el valor de un derivado depende del precio del activo subyacente y que éste satisface la ecuación diferencial (7.2.1), se sigue que el valor del derivado $V(t)$ debe verificar:

$$dV(t) = \left(\mu\,S(t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial V}{\partial S}S(t)dW(t). \tag{7.2.2}$$

Teniendo en cuenta entonces la evolución del activo dado por la ecuación (7.2.1) y la del valor del derivado dada por (7.2.2), un inversor en posición short en el derivado podría construir el siguiente portfolio dinámico:

- una posición short en el derivado, y
- una posición en $\frac{\partial V(t)}{\partial S}$ unidades del subyacente.

Si denominamos Π a este portfolio, tendremos que cumple con la ecuación:

$$d\Pi(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt, \tag{7.2.3}$$

que es una ecuación diferencial en derivadas parciales sin ninguna componente estocástica. Por lo tanto $Pi(t)$ resulta ser un portfolio libre de riesgo, y para que no exista posibilidad de arbitraje su rendimiento tiene que ser igual a la tasa libre de riesgo. Esto es, debe cumplirse que:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt = r\left(V(t) - S(t)\frac{\partial V}{\partial S}\right),$$

o equivalentemente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S(t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\,V(t) \tag{7.2.4}$$

Así, un método de cálculo de la prima de una opción call se obtiene resolviendo la ecuación diferencial (7.2.4) con la condición de borde:

$$V(S(T)) = \text{máx}(S(T) - K, 0).$$

Es claro que este razonamiento también puede aplicarse a cualquier otro derivado europeo en el cual el payoff dependa sólo del valor del activo en la madurez del derivado. Black y Scholes aplicaron la fórmula para el caso particular de la opción call.

7.2.2. Valoración neutral al riesgo

Como puede observarse en la ecuación (7.2.4), la tendencia μ del activo no aparece en la ecuación. Esto es, la expectativa real de crecimiento del activo no es un factor para el cálcula de la prima.

Por ello puede tomarse como hipótesis que el activo sigue un movimiento geométrico browniano y que su tendencia es la tasa libre de riesgo. Esto es, que el activo sigue la ecuación diferencial:

$$dS(t) = r\,S(t)dt + \sigma\,S(t)\,dW(t),$$

o equivalentemente

$$S(t) = S(0)\,e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\,W(t)}.$$

En términos de cálculo estocástico, lo que hemos aplicado es un cambio en la medida de probabilidad lo cual modifica la tendencia real del activo a una tendencia neutral al riesgo, pero sin modificar su volatilidad.

Del mismo modo que lo hemos aplicado para el modelo binomial, la prima del derivado se obtiene como el valor esperado de su payoff descontado a la tasa libre de riesgo, y este valor esperado se calcula considerando la medida de probabilidad que hace que el activo subyacente sea libre de riesgo.

Consideremos entonces una opción call europea sobre este activo, con madurez en $t = T$ y payoff $(S(T) - K)^+$, y sea r la tasa libre de riesgo. Entonces, si aproximamos el movimiento browniano por el modelo binomial, sabemos que la prima c de esta opción en $t = 0$ está dada por:

$$c = e^{-rT} \cdot E[(S(T) - K)^+], \tag{7.2.5}$$

donde E denota el valor esperado bajo la probabilidad neutral al riesgo.

Si ahora consideramos a $S(t)$ como un movimiento geométrico browniano de la forma

$$S(t) = S_0 e^{B(t)}$$

donde $B(t)$ tiene tendencia $r - \sigma^2/2$ y volatilidad σ, podemos calcular (7.2.5) a partir de la distribución de probabilidad de $B(T)$. En efecto, la densidad de la variable aleatoria $B(T)$ está dada por:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (r - \frac{\sigma^2}{2})\,T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right).$$

Luego, la prima de la opción call se obtiene resolviendo:

$$c = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S(0)e^y - K)^+ f(y)\, dy.$$

Observando que el integrando es igual a 0 para $y < \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)$, esta integral puede escribirse como:

$$c = e^{-rT} \int_{\log\frac{K}{S(0)}}^{\infty} S(0)e^y f(y)\, dy - Ke^{-rT} \int_{\log\frac{K}{S(0)}}^{\infty} f(y)\, dy. \tag{7.2.6}$$

Ahora bien, en la primera integral tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{-rT} e^y e^{-\frac{(y-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} &= \exp\left(-rT + y - \frac{(y - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{(y - (r + \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right) \end{aligned}$$

Estandarizamos la distribución normal aplicando el cambio de variables

$$x = \frac{y - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

obtenemos que

$$e^{-rT} \int_{\log\frac{K}{S(0)}}^{\infty} S(0)e^y f(y)\, dy = S(0)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

donde

$$U = \frac{\log\frac{K}{S(0)} - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\log\frac{S(0)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Sea Φ a la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar:

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx,$$

y utilizando la propiedad que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty e^{-x^2/2}dx = \Phi(-a),$$

obtenemos que la primera integral de la expresión (7.2.6) es igual a

$$S(0)\Phi\left(\frac{\log\frac{S(0)}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Con cálculos análogos, concluimos que la segunda integral en (7.2.6) es igual a:

$$Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = K\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)$$

Valoración de una opción call europea

Sea c la prima de una opción call europea, con strike K y madurez T, sobre un activo cuyo precio sigue un movimiento geométrico browniano con volatilidad σ. Sea r la tasa libre de riesgo. Entonces, bajo una hipótesis de no arbitraje se cumple que:

$$c = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Si ahora consideramos una opción put europea, con strike K y madurez T sobre el mismo activo, su prima p puede ser calculada por la paridad put-call:

$$c - p = S(0) - Ke^{-rT}.$$

Así, resulta:

$$\begin{aligned} p &= S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) - S(0) + Ke^{-rT} \\ &= S(0)(\Phi(d_1) - 1) + Ke^{-rT}(1 - \Phi(d_2)) \end{aligned}$$

Las propiedades de simetría de la distribución normal implican que $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, por lo cual concluimos que

$$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S(0)\Phi(-d_1).$$

La misma fórmula puede ser obtenida a través de un cálculo análogo al realizado para obtener la prima de una call.

Las fórmulas que hemos obtenido se aplican para cualquier período $[t, T]$, donde $0 \leq t < T$. Luego, si $c(t)$ denota la prima de la opción en el tiempo t y $\tau = T - t$ es el tiempo que resta hasta la madurez de la opción tendremos para la call:

$$c(t) = S(t)\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - Ke^{-r\tau}\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}),$$

y para la opción put:

$$p(t) = Ke^{-r\tau}\Phi(-\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - S(t)\Phi(-\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).$$

7.3. Volatilidad implícita

La fórmula de Black Scholes para una opción call depende de distintos parámetros:

- S_0: precio inicial del activo.
- r: la tasa libre de riesgo.
- K: el strike,
- T: la madurez de la opción,
- σ: la volatilidad del activo.

Los primeros cuatro parámetros son conocidos al momento de iniciar la opción. En cambio σ representa una volatilidad del activo en el período de vigencia de la opción, y por lo tanto es desconocido. Más aún, se está suponiendo constante cuando en la práctica puede ser un valor variable e incluso estocástico.

Dado que las opciones call cotizan en el mercado, también es conocida la prima de la opción. Por ello se denomina **volatilidad implícita** al valor de σ que iguala la prima de la opción con la correspondiente fórmula de Black-Scholes. En el caso de la call esto implica resolver:

$$c(\sigma_{imp}) = S(0)\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma_{imp}^2}{2})T}{\sigma_{imp}\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma_{imp}^2}{2})T}{\sigma_{imp}\sqrt{T}} - \sigma_{imp}\sqrt{T}\right),$$

Ahora bien, para poder determinar esta volatilidad implícita σ_{imp} es necesario poder obtenerla o "despejarla" de la fórmula de Black- Scholes. En efecto, veremos que c es una función monótona creciente respecto a σ. En primer lugar notemos que c es continua con respecto a σ, por lo cual restará analizar que su derivada respecto a σ es positiva:

$$c'(\sigma) = \frac{d}{d\sigma}c(\sigma) > 0.$$

Tenemos que:

$$c'(\sigma) = S_0\Phi'(d_1)\, d_1'(\sigma) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2)\, d_2'(\sigma).$$

Ahora, dado que $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$, entonces $d_2' = d_1' - \sqrt{T}$. Luego:

$$\begin{aligned} c'(\sigma) &= S_0\Phi'(d_1)\, d_1'(\sigma) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2)\, d_2'(\sigma) \\ &= \left(S_0\Phi'(d_1) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2)\right)\, d_1'(\sigma) + K\Phi'(d2)e^{-rT}\sqrt{T}. \end{aligned}$$

El primer término de la última expresión es 0. En efecto, dado que Φ' es la densidad de la normal estándar, entonces

$$\begin{aligned} S_0\Phi'(d_1) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(S_0e^{-d_1^2/2} - Ke^{-rT-\frac{(d_1-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(S_0e^{-d_1^2/2} - Ke^{-rT-\frac{d_1^2}{2}+d_1\sigma\sqrt{T}-\frac{\sigma^2T}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}\left(S_0 - Ke^{-rT+d_1\sigma\sqrt{T}-\frac{\sigma^2T}{2}}\right) \end{aligned}$$

El exponente en la última expresión es:

$$-rT + d_1\sigma\sqrt{T} - \frac{\sigma^2T}{2} = -rT + \ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T - \frac{\sigma^2T}{2} = \ln(\frac{S_0}{K}).$$

Por lo tanto resulta:

$$S_0\Phi'(d_1) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}\left(S_0 - Ke^{ln(S_0/K)}\right) = 0.$$

Volviendo al cálculo de $c'(\sigma)$ y usando que $\Phi'(x) > 0$ para cualquier x, tenemos entonces que

$$c'(\sigma) = \underbrace{Ke^{-rT}\Phi'(d_2)\sqrt{T}}_{>0}$$

que es una expresión positiva para todo $\sigma > 0$.

La determinación del valor de la volatilidad implícita para una prima determinada no puede resolverse a través de una fórmula cerrada, y se hace necesaria la aplicación de un método numérico para su aproximación. (Ver Figura 7.3.1). En particular el método de Newton-Raphson para determinar el cero de la función $f(\sigma) = c(\sigma) - c$:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_{n+1})}.$$

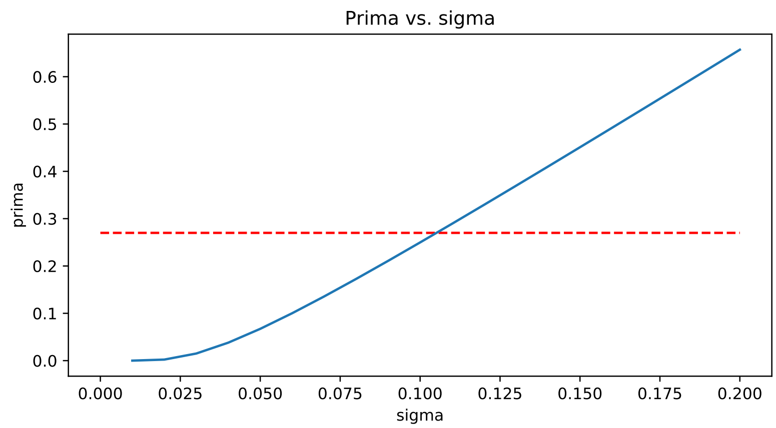


Figura 7.3.1: Prima en función de σ

Analizaremos ahora el comportamiento de c para valores extremos de σ. Para esto calculamos los límites $\lim_{\sigma\to 0^+} c(\sigma)$ y $\lim_{\sigma\to\infty} c(\sigma)$. Tenemos que:

$$\lim_{\sigma\to 0^+} d_1(\sigma) = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Si $S_0 e^{rT} > K$, entonces el numerador resulta positivo y si $S_0 e^{rT} < K$ es negativo. Por lo tanto:

$$\lim_{\sigma\to 0^+} d_1(\sigma) = \begin{cases} \infty & S_0 e^{rT} > K \\ 0 & S_0 e^{rT} = K \\ -\infty & S_0 e^{rT} < K \end{cases}$$

Usando que $d_2(\sigma) = d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}$, que $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) \mapsto 1$ y $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) \mapsto 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma\to 0^+} S_0\Phi(d_1(\sigma)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(\sigma)) &= \begin{cases} S_0 - Ke^{-rT} & S_0 e^{rT} > K \\ 0 & S_0 e^{rT} \leq K \end{cases} \\ &= \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0). \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\sigma \to \infty$ entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma\to\infty} d_1(\sigma) &= \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \infty, \\ \lim_{\sigma\to\infty} d_2(\sigma) &= \lim_{\sigma\to\infty} \left(\frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

por lo cual:

$$\lim_{\sigma \to \infty} S_0\Phi(d_1(\sigma)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(\sigma)) = S_0.$$

La Figura 7.3.2 muestra el gráfico de la fórmula de Black-Scholes en función del parámetro σ, para $S_0 = 36$.

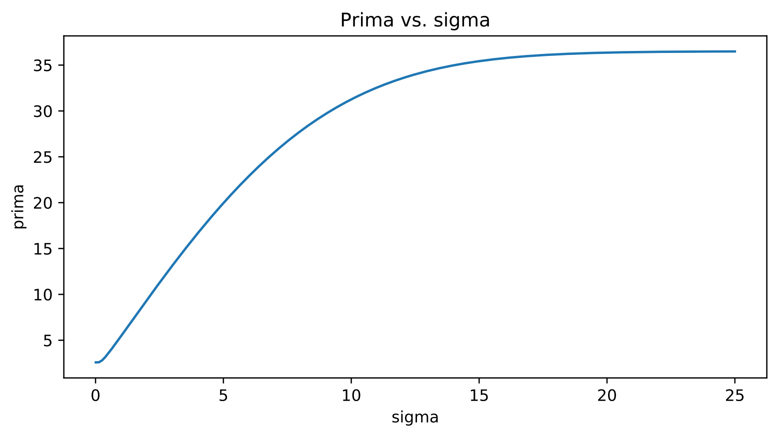


Figura 7.3.2: Prima en función de σ

La fórmula de Black-Scholes asume que la volatilidad es constante, no sólo con respecto al tiempo sino con respecto a los restantes parámetros. Sin embargo en la práctica, si consideramos varias opciones con una misma madurez, sobre un mismo subyacente pero con diferentes strikes la volatilidad implícita para cada una de ellas es diferente. Esta relación entre strike y volatilidad implícita determina una curva que por su forma se la denomina **sonrisa de volatilidad**. En particular notamos que el modelo de Black-Scholes no permite capturar estas sonrisas. Tampoco ocurre en la práctica que la volatilidad implícita se mantenga constante a lo largo del tiempo, y por ello se trata de definir otros modelos de comportamiento de acciones que incorporen una volatilidad determinística o incluso estocástica.

7.4. Las Greeks

La dependencia de la prima de la opción call con respecto al precio del subyacente, su volatilidad, el tiempo a la madurez de la opción y la tasa de interés libre de riesgo, lleva a estudiar cuál es la sensibilidad de la prima en función de estos parámetros. Para ello se estudian las derivadas primeras y segundas de la call, y cada una de ellas lleva el nombre de una letra griega.

Delta o Δ denota la derivada de la call con respecto al precio del activo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial S} &= \Phi(d_1) + S\,\Phi'(d_1)d_1' - e^{-rt}K\,\Phi'(d_2)d_2' \\ &= \Phi(d_1) + d_1'\underbrace{\left(S\,\Phi'(d_1) - e^{-rt}K\,\Phi'(d_2)\right)}_{=0}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta = \phi(d_1)}$$

Notemos que para una opción call $0 < \Delta < 1$. Al igual que lo hemos visto en el modelo binomial, Δ representa la posición en el activo que debe tener un inversor en posición short para cubrirse. También significa cuánto variará porcentualmente el valor de la opción según la variación del activo, asumiendo que los demás parámetros permanecen constantes:

$$\text{variación de } c \approx \Delta \cdot \text{variación de } S.$$

Por ejemplo, si $\Delta = 0{,}6$, significa que si el precio del activo sube $\$1$ entonces el valor de la opción se incrementará en un $60\,\%$.

Ahora bien, la segunda derivada del valor de la call en función del subyacente también es positiva. Está representada por la greek **Gamma**:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}\,\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}\,\frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Esto indica que el valor de la call en función del subyacente es una función convexa, y por lo tanto las rectas tangentes a la gráfica quedan por debajo de la gráfica.

El gráfico de la Figura 7.4.1 ilustra la situación en que el precio del subyacente es S_0, la posición en el activo es Δ más una cantidad M en el banco. Así el portfolio replicante, si no se modifica su posición en el activo, se mantendrá sobre la recta $y(S) = \Delta(S_0)(S - S_0) + c(t, S_0)$. $c(t, S_0)$ representa el valor de la opción en el momento t si el precio del subyacente es S_0.

Debido a la convexidad de la curva, si el precio del subyacente disminuye a S_1 o se incrementa a S_2, el valor de la opción $c(t, S_1)$ o $c(t, S_2)$ supera el del portfolio replicante. Esto significa que la posición long tiene ganancia en cualquier caso, y la posición short tiene pérdida. ¿Querría indicar esto que hay una posibilidad de arbitraje?

La respuesta a la pregunta anterior es que no. El valor de la opción también varía de acuerdo al tiempo a su madurez. Esta sensibilidad se mide con la greek **Theta**:

$$\boxed{\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - \frac{\sigma S}{2\sqrt{T-t}}\Phi'(d_1)}$$

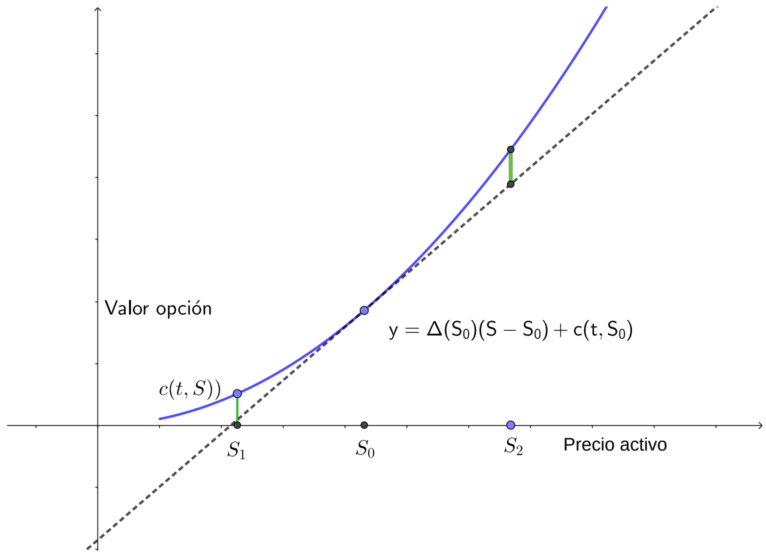


Figura 7.4.1: Delta cobertura

La aparente ganancia por la convexidad de la opción en función del precio del activo queda aplacada por el decrecimiento del valor de la opción cuando nos acercamos a su madurez. Intuitivamente, esto significa que en el modelo de Black Scholes, el valor de la opción se mantiene sobre la recta en un intervalo infinitesimal de tiempo. La Figura 7.4.2 muestra la dependencia del valor de una opción en función del tiempo a su madurez.

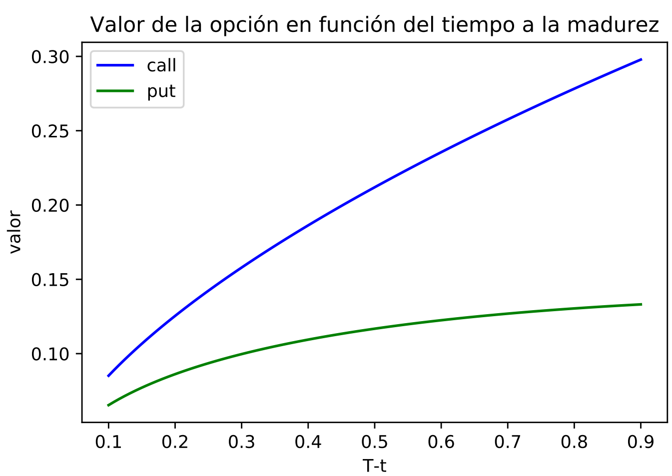


Figura 7.4.2: Primas en función del tiempo al vencimiento. $S = K$

Otras greeks son las siguientes:

- **Vega**: Es la sensibilidad del valor de la opción con respecto a la volatilidad. Hemos visto que para el caso de la call es positiva:

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

- **Rho**: Es la sensibilidad al valor de la tasa de interés libre de riesgo:

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = (T-t)\, K\, e^{-r(T-t)}\, \Phi(d_2) > 0.$$

- **Volga** y **Vanna**: representan la sensibilidad de Vega a la volatilidad y al precio del activo.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}.$$

La Figura 7.4.3 muestra la dependencia del valor de una opción en función de la tasa de interés r y la volatilidad σ.

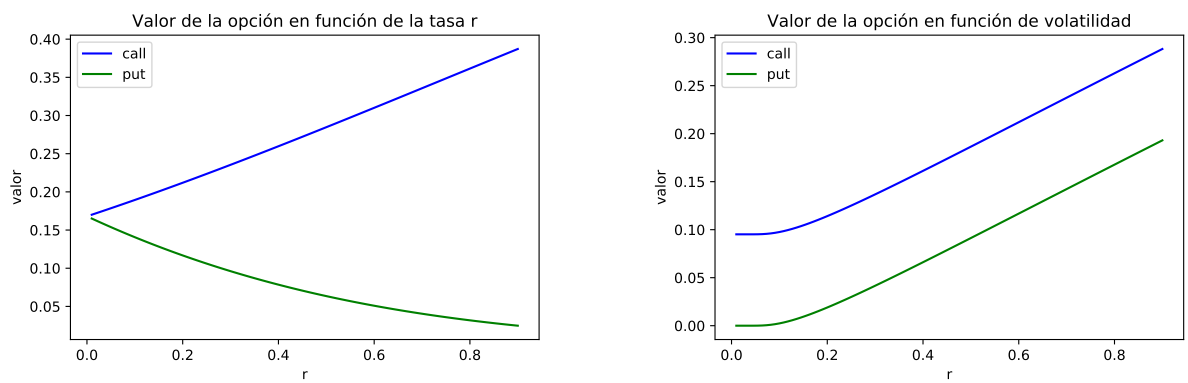


Figura 7.4.3: Dependencia del valor de la opción en función de la tasa y la volatilidad. $S = K$

7.4.1. Valor intrínseco

Dada una opción call o put, su valor intrínseco está dado por el payoff de la opción si se ejerciera en dicho momento. Entonces para la call, el valor intrínseco en un instante t para el valor del subyacente $S(t)$ es $\max(S(t) - K, 0)$ y para la put es $\max(K - S(t), 0)$. Luego, si graficamos el valor intrínseco de una opción call o de una opción put en función del valor S del subyacente su gráfica es igual a la de su payoff.

Al analizar las opciones americanas hemos visto que nunca es conveniente el ejercicio temprano para una opción call, y esto es porque su valor es en algunos casos superior al valor intrínseco. En cambio para una opción put puede ser conveniente el ejercicio temprano, lo cual indica que el valor de la opción europea debe ser inferior a su valor intrínseco.

Veamos cómo esta propiedad puede observarse a partir de la gráfica del valor de una call y de una put, ambas con strike K, en función de su subyacente S, manteniendo constantes los restantes parámetros. Escribimos $c(S)$ y $p(S)$ para denotar su dependencia en el precio del activo S:

$$\begin{aligned} c(S) &= S\Phi(d_1(S)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(S)), & (7.4.1)\\ p(S) &= -S\Phi(d_2(S)) + Ke^{-rT}\Phi(d_1(S)). & (7.4.2)\\ d_1(S) &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2(S) = d_1(S) - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Para el caso de una opción call, hemos visto que $c'(S) > 0$ y $c''(S) > 0$, por lo cual su gráfica es creciente y convexa. Por otra parte, como:

$$\lim_{S\to 0^+} d_1(S) = \lim_{S\to 0^+} d_2(S) = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{S\to\infty^+} d_1(S) = \lim_{S\to\infty} d_2(S) = \infty,$$

tenemos que

$$\lim_{S\to 0^+} c(S) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{S\to\infty} c(S) = \infty.$$

Como además $c(S)$ es el valor esperado de una variable aleatoria no negativa, entonces $c(S) > 0$ para todo S. Así, si K es el strike de la opción, tenemos que para $S \leq K$ el valor de la opción es mayor a su valor intrínseco.

Si $S > K$, usamos la fórmula de paridad put call:

$$c(S) - p(S) = S - Ke^{-rT}.$$

Dado que $p(S) > 0$ y $e^{-rT} < 1$, se sigue que

$$c(S) = p(S) + S - Ke^{-rT} > S - Ke^{-rT} > S - K.$$

Luego $c(S) > \max(S - K, 0)$ para todo S. La Figura 7.4.4 muestra el gráfico del valor intrínseco de una call y de la prima, en función de S/K, para un valor fijo de K. Si analizamos en cambio el valor de una put, tenemos que

$$p'(S) = c'(S) - 1 = -\phi(-d_1(S)) < 0, \qquad p''(S) = c''(S) > 0.$$

Es decir que el valor de la put en función del subyacente es decreciente y convexa. Además, de (7.4.2) y las fórmulas de d_1 y d_2 vemos que:

$$\lim_{S\to 0^+} p(S) = K\,e^{-rT}, \qquad \lim_{S\to\infty} p(S) = 0.$$

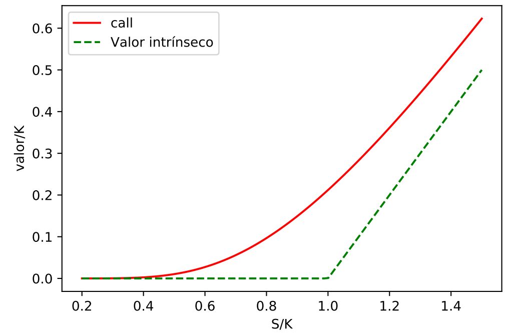


Figura 7.4.4: Prima de una call y su valor intrínseco

Ahora, para $0 < S \leq K$ tenemos que la función $f(S) = p(S) - (K - S)$ es estrictamente creciente como función de S puesto que $f'(S) = p'(S) + 1 > 0$. Pero

$$f(K) = p(K) - (K - K) = p(K) > 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{S \to 0^+} f(S) = \lim_{S \to 0^+} p(S) - (K - S) < 0.$$

Por el Teorema de los Valores Intermedios existe un (único) S^*, $0 < S^* < K$ tal que $f(S^*) = 0$, o lo que es lo mismo, tal que $p(S^*) = K - S^*$. Además,

$$\begin{cases} p(S) < K - S & \text{si } S < S^* \\ p(S) > K - S, & \text{si } S > S^*. \end{cases}$$

Esto indica que para valores menores a S^*, el valor intrínseco de la opción put europea es mayor que su valor. Esto explica por qué, para el caso de una put americana, puede ser conveniente el ejercicio temprano de la opción. La Figura 7.4.5 muestra el gráfico del valor intrínseco y del valor de la opción en función de S/K, para un valor fijo de K.

Notamos además que $\lim_{S\to\infty} p(S) = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{S\to\infty} p(S) &= \lim_{S\to\infty} Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(S)) - S\phi(-d_1(S)) \\ &= \lim_{S\to\infty} -S\phi(-d_1(S)) = \lim_{S\to\infty} \frac{-\Phi(d_1(S))}{\frac{1}{S}} \end{aligned}$$

Dado que los límites del numerador y del denominador tienden a 0, aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{S\to\infty} p(S) = \lim_{S\to\infty} \frac{-\Phi'(d_1(S))d_1'(S)}{-\frac{1}{S^2}} = \lim_{S\to\infty} C \cdot S\, e^{-\frac{d_1^2(S)}{2}}$$

donde C es una constante no nula. Ahora, dado que $S = e^{\ln(S)}$, el límite anterior es igual a:

$$C \cdot \lim_{S\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2 + \ln(S)\right)$$

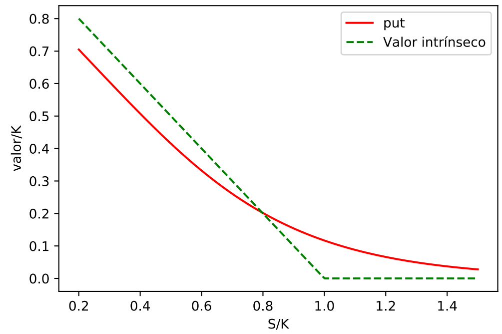


Figura 7.4.5: Prima de una put y su valor intrínseco

El argumento de la función exponencial es un polinomio cuadrático en $\ln(S)$ con coeficiente principal negativo, y por lo tanto tiende a $(-\infty)$, y entonces $\lim_{S\to\infty} p(S) = 0$ como queríamos mostrar.

7.5. El MGB como límite del modelo binomial

7.5.1. Selección de u y d en el modelo binomial

La aplicación de un modelo discreto binomial para valorar opciones supone una elección de los factores u y d para la construcción del proceso estocástico de la acción. Explicamos aquí la propuesta de Cox, Rubinstein y Ross (CRR).

Supongamos que se desea modelar una acción en el intervalo $[0, t]$ y para esto se construye un árbol binomial de n pasos, donde cada paso tiene longitud $\Delta t = \frac{t}{n}$. Suponemos también que se han observado una serie de datos y para éstos se ha estimado la media y la desviación estándar de los log-retornos: $\overline{\mu}$ y $\overline{\sigma}$.

La variable aleatoria S_t será igual a S_0 multiplicado por una secuencia de n factores iguales a u o d. Esto es, tendrá la forma general:

$$S_t = S_0 \underbrace{u \cdots u}_{j} \underbrace{d \cdots d}_{n-j}, \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = j\,\ln(u) + (n-j)\ln(d) = j\,\ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\,\ln(d),$$

donde j es el valor de una variable aleatoria que indica el número de veces que S_0 es multiplicado por u, o lo que es equivalente, el número de veces que la moneda salió cara luego de n tiradas. Por ende la variable j tiene una distribución binomial $Bin(n, p)$.

El valor esperado y la varianza del log retorno $\ln(S_t/S_0)$ está dado entonces por:

$$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = np\,\ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\,\ln(d) = \left(p\,ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln(d)\right)\,n \tag{7.5.1}$$

$$Var\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) = n\,p(1-p)\ln^2\left(\frac{u}{d}\right) \tag{7.5.2}$$

El objetivo es encontrar valores de u y d de modo que al incrementar el número n de pasos las fórmulas (7.5.1) y (7.5.2) converjan a $\overline{\mu}\,t$ y $\overline{\sigma}^2\,t$, respectivamente.

Cox, Rubinstein y Ross proponen la condición $u\,d = 1$, de modo que los log retornos se comporten con cierta simetría. Esto es, en un tiempo Δt el log retorno se incrementa en $\ln u$ o decrece en $\ln(d) = -\ln(u)$. Con esta condición y analizando la ecuación (7.5.1) obtenemos que:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\overline{\mu}\frac{t}{n}}{2\ln u}.$$

De la ecuación (7.5.2) y usando el hecho que

$$\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{\overline{\mu}\frac{t}{n}}{2\ln u} = \frac{1}{2},$$

obtenemos que para n grande se espera que:

$$\frac{1}{4}\,\ln^2\left(\frac{u}{d}\right) = \frac{1}{4}\,\ln^2(u^2) = \overline{\sigma}^2 t,$$

y esto se cumple tomando $u = e^{\overline{\sigma}\sqrt{t}}$.

Reuniendo todos los resultados concluimos que la elección de u, d y la probabilidad p estarán dados por:

$$u = e^{\overline{\sigma}\sqrt{t}}, \qquad d = e^{-\overline{\sigma}\sqrt{t}}, \qquad p = \frac{1}{2} + \frac{\overline{\mu}\sqrt{t/n}}{2\overline{\sigma}}.$$

Notemos en este punto que no hemos incorporado la tasa libre de riesgo, sino que hemos asumido que el proceso construido en el modelo binomial satisface, para un $t_k = k \cdot \Delta t$:

$$E[S_k] = S_0 e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t_k}.$$

En particular la hipótesis de no arbitraje en el modelo impondrá una medida de probabilidad que iguala la tendencia del activo con la tasa de interés libre de riesgo r, esto es,

$$r = \mu + \sigma^2/2, \quad \text{o equivalentemente} \quad \mu = r - \sigma^2/2.$$

Consideremos el espacio de probabilidad Ω formado por los resultados de n tiradas independientes de una moneda $\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$. Sea t un tiempo determinado y consideramos una subdivisión del intervalo $[0,t]$ en n subintervalos iguales. Denotamos $t_i = i\,\frac{t}{n}$, $0 \leq i \leq n$. Sea $\sigma > 0$ y sea $S(t)$ el proceso estocástico que representa la evolución de precios de un activo (acción) cuyo valor inicial es $S(0) = S_0$, y tal que, para $1 \leq i \leq n$ se cumple:

$$S(t_i) = \begin{cases} S(t_{i-1})\, e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} & \text{si la } i\text{-ésima moneda es cara} \\ S(t_{i-1})\, e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} & \text{si la } i\text{-ésima moneda es cruz.} \end{cases}$$

Esto es, los valores de u y d están dados por

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} = 1/u.$$

Para cada j, $1 \leq j \leq n$, sea X_j la variable aleatoria dada por:

$$X_j = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} & \text{si } \omega_j = C \qquad \text{(la j-ésima tirada es cara),} \\ -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} & \text{si } \omega_j = X \qquad \text{(la j-ésima tirada es cruz),} \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$S(t_k) = S(t) = S_0\, e^{X_1+X_2+\cdots+X_k}.$$

Si r es la tasa libre de riesgo de capitalización continua, entonces en un período de longitud Δt se cumple que la tasa periódica i libre de riesgo cumple $1+i = e^{r\Delta t}$. Así, la medida de probabilidad neutral al riesgo en este modelo binomial está dada por

$$p_n = \frac{e^{r\frac{t}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}, \qquad q_n = 1 - p_n.$$

Para n suficientemente grande, estas probabilidades pueden aproximarse hasta el orden 1 de $\frac{t}{n}$ en el desarrollo en serie de cada exponencial. Esto es:

$$\begin{aligned} e^{r\frac{t}{n}} &\simeq 1 + r\frac{t}{n} \\ e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} &\simeq 1 + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\frac{t}{n}, \\ e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} &\simeq 1 - \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\frac{t}{n}. \end{aligned}$$

Luego

$$p_n \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right).$$

Bajo esta probabilidad, y despreciando los términos en Δt^2, las variables X_i tienen media y varianza dada por:

$$E[X_i] = (2\,p_n - 1)\,\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\frac{t}{n}, \qquad Var[X_i] \simeq \sigma^2\,\frac{t}{n}.$$

Observemos que las variables X_j son independientes, igualmente distribuidas. Así, por el Teorema Central del Límite podemos decir que para un n grande la variable aleatoria

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = (X_1 + \cdots + X_n)$$

tiene una distribución aproximadamente normal, con media y varianza dadas por:

$$E[\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)] = (r - \sigma^2/2)\cdot t, \qquad Var[\ln\left(\frac{S(t)}{S_0)}\right)] = \sigma^2 \cdot t.$$

Analizamos ahora las propiedades del exponente en la expresión de $S(t)$. Denotamos:

$$W^{(n)}(t_k) = (X_1 + X_2 + \cdots + X_k), \qquad t_k = \frac{k}{n}\,t, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Dado que las variables X_i son independientes, igualmente distribuidas, entonces si $j < k < m$ resulta

$$W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j) = X_{t_{j+1}} + \cdots + X_{t_k},$$
$$W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_k) = X_{t_{k+1}} + \cdots + X_{t_m},$$

por lo cual las variables aleatorias $W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)$ y $W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_k)$ resultan ser independientes. Además, bajo las probabilidades de riesgo neutral se cumple que:

$$\begin{aligned} E[W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)] &= (r - \sigma^2/2)(t_k - t_j) \\ Var[W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)] &= \sigma^2(t_k - t_j) \end{aligned}$$

Por último, si estos incrementos tienen una suficiente cantidad de términos, podemos decir que su distribución es aproximadamente normal.

En este sentido decimos que el proceso discreto

$$\ln(S(t_k)/S_0) = W^{(n)}(t_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tiende a un movimiento browniano con tendencia $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y volatilidad σ. Equivalentemente,

$$S(t_k) = S(0)\,e^{W^{(n)}(t_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tiende a un movimiento geométrico browniano con tendencia r y volatilidad σ.

Capítulo 8

Modelos de tasas de interés

8.1. Introducción

Existen muchos tipos de tasas de interés que cotizan en los mercados: las tasas para depósitos en los bancos, las tasas para préstamos, las implicadas por bonos, y muchas otras. Analizaremos en este texto las tasas de interés que se obtienen a partir de los bonos y que son además las que habitualmente se utilizan para valorar opciones y futuros.

Los bonos son certificados de deuda emitidos por el estado, o los gobiernos, o empresas, a los fines de recaudar fondos para financiar sus actividades. Estos títulos de deuda se emiten con determinadas condiciones de pago, establecidas por el *emisor*, y que incluyen una fecha o varias de amortización del bono como también pagos en conceptos de intereses.

8.2. Bonos

Un bono es un certificado de deuda por un cierto valor *nominal* o también llamado *principal*. El bono supone la devolución de este nominal en una o varias cuotas de **amortización**. Si es en una única fecha la amortización ocurre al vencimiento del bono, si es en varias fechas la última ocurre al vencimiento.

Los **bonos con cupón** son aquellos que incluyen un pago periódico en concepto de intereses. Si los intereses son fijos, se hace referencia a una *tasa cupón*, que denotaremos c. Si el bono paga cupones anuales, y el monto aún no amortizado es M, entonces el cupón será igual a cM. Si la amortización es al vencimiento por un nominal N y los cupones son semestrales con tasa cupón c, cada cupón es igual a $\frac{c}{2}N$, si son trimestrales es $\frac{c}{4}$, y así en general.

Ejemplo 8.1. Un bono con nominal de \$1.000, a dos años, paga cupones semestrales a una tasa cupón del 4 %. Si se emite el 26 de octubre de 2018, esto indica que sus flujos de caja semestrales serán:

$$\$20 \qquad \$20 \qquad \$20 \qquad \$1020,$$

comenzando el 26 de abril de 2019.

Ejemplo 8.2. El bono BONAR 2024 (AY24) tiene las siguientes características:

- Denominación: Bono de la Nación Argentina en dólares 8,75 % vto. 2024
- Fecha de aviso de cotización autorizada: 09/05/2014
- Vencimiento: 07/05/2024
- Interés: Devengan una tasa del 8,75 % nominal anual, pagaderos semestralmente los días 7 de mayo y 7 de noviembre de cada año, calculados sobre la base de un año de 360 días integrado por 12 meses de 30 días cada uno. La primera fecha de pago será el 7 de noviembre de 2014.
- Amortización: En seis cuotas anuales y consecutivas, comenzando el 5º año posterior a la fecha de emisión (2019). Las primeras cinco cuotas serán del 16,66 % y la última del 16,70

Así en este caso el bono realiza pagos periódicos en concepto de amortización y también en concepto de intereses. La tasa enunciada del 8,75 % corresponde a un porcentaje de $4{,}38\,\%$ del nominal, no amortizado, cada 7 de noviembre y 7 de mayo.

Así por ejemplo, el 7 de mayo de 2019, por un nominal de \$100 se amortizaron \$16.67 y se pagaron \$4.36 en concepto de intereses. De este modo el nominal no amortizado fue de \$83.33. El 7 de noviembre de 2019 el pago en concepto de intereses fue:

$$\$83{,}33 \cdot 4{,}38\,\% = \$3{,}65.$$

El 7 de mayo de 2020 el bono pagó $\$3{,}65 + \$16{,}67 = \$20{,}31$.

Otro tipo de bonos son aquellos que no pagan cupones, llamados también **bonos cupón cero**. En este caso el nominal se paga al vencimiento del bono, y el bono se emite *a descuento*. Esto es, su precio al momento de la emisión es menor que el nominal.

Una **tasa cupón cero** a n años es la tasa de interés nominal anual obtenida por una inversión en un bono cupón cero a dicho plazo. Así por ejemplo, si un bono cupón cero que vence a 3 años con un nominal de \$100 tiene un precio de \$95, entonces la tasa a 3 años es el valor i tal que

$$95 = \frac{100}{(1+i)^3},$$

es decir, $i = 1{,}72\,\%$ es la tasa cupón cero anual para tres años. En todos los casos asumiremos que las tasas cupón cero son tasas anuales, por lo cual los plazos deberán estar siempre expresados en años.

Nota: Una alternativa es definir la tasa con capitalización continua. Entonces para este caso se definiría como el valor r tal que:

$$95 = 100 \cdot e^{-r \cdot 3}.$$

Entonces $r = \frac{1}{3}\ln(100/95) \simeq 1{,}70\,\%$. En este texto acordamos utilizar la capitalización compuesta.

8.3. Valoración de bonos

El valor teórico de un bono se obtiene calculando el valor presente de los flujos de fondos que serán recibidos por el tenedor aplicando la correspondiente tasa cupón cero como tasa de referencia para el descuento.

Así, si el flujo de fondos que se recibirá en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ es:

$$c_1 \qquad c_2 \qquad \ldots c_n,$$

y las correspondientes tasas cupón cero para estos plazos son $i_1, i_2, \ldots, i_n$, entonces el valor teórico del bono es

$$V_{\text{teórico}} = \frac{c_1}{(1+i_1)^{t_1}} + \frac{c_2}{(1+i_2)^{t_2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{(1+i_{n-1})^{t_{n-1}}} + \frac{c_n}{(1+i_n)^{t_n}}.$$

Los tiempos t_i deberán estar expresados en años.

Ejemplo 8.3. Un bono con valor nominal \$1000 provee cupones a una tasa del 6 % anual, semestralmente. Las tasas cupón cero para los próximos dos años están dadas por:

Plazo (años)	Tasa anual (%) (cap. continua)
0.5	5.0
1.0	5.8
1.5	6.4
2.0	6.8

En este caso, la tasa anual para el primer medio año es del 5 %. Esto indica que el primer pago descontado a la tasa del primer medio año es:

$$\frac{30}{1{,}05^{0{,}5}}.$$

Procediendo del mismo modo con los siguientes tres pagos, resulta:

$$V_{\text{teórico}} = \frac{30}{1{,}05^{0{,}5}} + \frac{30}{1{,}058} + \frac{30}{1{,}064^{1{,}5}} + \frac{1030}{1{,}068^{2}} = 987{,}98$$

El valor teórico que se obtiene con este procedimiento no es necesariamente el precio de cotización del bono pero puede servir de indicador para la comparación de diferentes bonos.

8.3.1. Rendimiento de un bono

En los mercados de bonos cotizan simultáneamente bonos de diferentes condiciones de emisión: con o sin cupones, con distintos vencimientos, de diferentes plazos, con amortización periódica o al vencimiento, etc. Esta variedad produce que los precios de los bonos no reflejan su rentabilidad en el valor del bono. A los efectos de comparar distintos bonos, con diferentes vencimientos y cupones, se calcula la **tasa interna de rendimiento** (TIR). Esto es, se determina cuál es la tasa constante de capitalización discreta (o continua) para la cual el valor presente de los flujos de caja es igual al precio de cotización del bono.

Ejemplo 8.4. El precio de un bono por \$1.000, con cupones anuales y tasa cupón del $3{,}25\,\%$, con madurez en cuatro años, es de \$$916{,}21$.

Los flujos de caja generados por este título son:

$$32{,}5 \qquad 32{,}5 \qquad 32{,}5 \qquad 1032{,}5.$$

La TIR es entonces la tasa constante i para la cual se verifica:

$$916{,}21 = \frac{32{,}5}{1+i} + \frac{32{,}5}{(1+i)^2} + \frac{32{,}5}{(1+i)^3} + \frac{1032{,}5}{(1+i)^4}.$$

El valor de i resulta del $5{,}6487\,\%$.

Ejemplo 8.5. Un bono con valor nominal \$1000 vence en dos años, y provee cupones semestrales con una tasa cupón del 6 % y cotiza en \$987.98.

En este caso querríamos calcular la tasa efectiva constante r tal que

$$987{,}98 = \frac{30}{(1+i)^{0{,}5}} + \frac{30}{(1+i)^{1}} + \frac{30}{(1+i)^{1{,}5}} + \frac{1030}{(1+i)^{2}}.$$

Así i resulta $i \simeq 6{,}76\,\%$.

8.3.2. Determinación de tasas cupón cero

Normalmente los bonos cupón cero son bonos a corto plazo, por lo cual para deteminar las tasas cupón cero para plazos mayores se utilizan bonos con cupones. La metodología aplicada para el cálculo de estas tasas se denomina **método bootstrap**. Para esto se considera un conjunto de bonos con diferentes plazos, donde al menos el plazo más corto debe corresponderse a un bono cupón cero. Ilustramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.6. Se tienen precios de los siguientes cinco bonos, donde los bonos con cupón tienen pagos semestrales. El primer bono implica que por una inversión de $\$97{,}5$ se obtiene un interés de

Nominal	Madurez	Tasa cupón	Precio
100	0,25	0 %	97,5
100	0,5	0 %	94,9
100	1	0 %	90,0
100	1,5	8 %	96,0
100	2	12 %	101,6

$\$2{,}5$ en 3 meses. Luego la tasa cupón cero (anual) para el plazo de tres meses es tal que:

$$97{,}5 \cdot (1+i)^{1/4} = 100, \qquad i = \left(\frac{100}{97{,}5}\right)^4 - 1,$$

que se corresponde a una tasa nominal anual de capitalización trimestral del $10{,}65\,\%$.

Así, los primeros tres bonos determinan tasas anuales de capitalización compuesta discreta a los plazos de cuarto año, medio año y un año dados por: $i_1 = 10{,}65\,\%$, $i_2 = 11{,}03\,\%$ y $i_3 = 11{,}11\,\%$. El cuarto bono servirá para determinar la tasa cupón cero a un año y medio. Tenemos que el flujo de fondos a medio año, año y año y medio es:

$$4 \qquad 4 \qquad 104,$$

y conociendo las tasas a los dos primeros plazos calculamos i_4 tal que:

$$96{,}0 = \frac{4}{(1+i_2)^{0{,}5}} + \frac{4}{(1+i_3)^1} + \frac{104}{(1+i_4)^{1{,}5}}.$$

Luego $i_4 = 11{,}27\,\%$. Por último tenemos:

$$101{,}6 = \frac{6}{(1+i_2)^{0{,}5}} + \frac{6}{(1+i_3)^1} + \frac{6}{(1+i_4)^{1{,}5}} + \frac{106}{(1+i_5)^2}$$

Madurez	Tasa cero (%)
0,25	10,65
0,5	11,03
1	11,11
1,5	11,27
2	11,597

y así se obtiene $i_5 = 11{,}597\,\%$. Luego las tasas cupón cero para los diferentes plazos resultan:

El gráfico que se obtiene relacionando cada plazo con el rendimiento de los bonos cupón cero se denomina **curva cupón cero** y determina una **estructura a término de las tasas de interés**. Estas tasas se denominan también *tasas spot* asociadas al conjunto de bonos en particular.

Ejemplo 8.7. Consideremos las tasas spot para los plazos de 1 a 5 años:

$$\begin{aligned} i_1 &= 1{,}22\,\% \\ i_2 &= 1{,}98\,\% \\ i_3 &= 2{,}32\,\% \\ i_4 &= 2{,}34\,\% \\ i_4 &= 2{,}38\,\%. \end{aligned}$$

El gráfico de la figura 8.3.1 muestra la relación entre los rendimientos y los plazos correspondientes, donde los puntos consecutivos están unidos por segmentos. Un gráfico de este tipo también se denomina **estructura a término de las tasas de interés** (ETTI).

Es importante notar que una ETTI está asociada a la fecha en que fueron consideradas las cotizaciones de los bonos. Por ejemplo, podrían tomarse las cotizaciones de bonos cupón cero con los mismos plazos un día más tarde, o al mes siguiente, o un año después, y obtener una curva diferente. Ver Figura 8.3.2. Así, si se consideran las curvas para distintas fechas se obtiene una superficie de tasas de interés.

Las ETTI pueden tener diferentes formas. Si las tasas permanecen constantes, la curva es una recta horizontal y se dice que la estructura es *plana*. Si las tasas son cada vez más bajas, la curva será *decreciente* y usualmente se dice que es una curva **invertida**. Esto es porque en principio se espera que un mayor plazo implica un mayor riesgo de inversión y por ende el precio debería ser menor. Luego una curva ”típica” tiene una forma ascendente.

Ilustramos estas situaciones en la Figura 8.3.3.

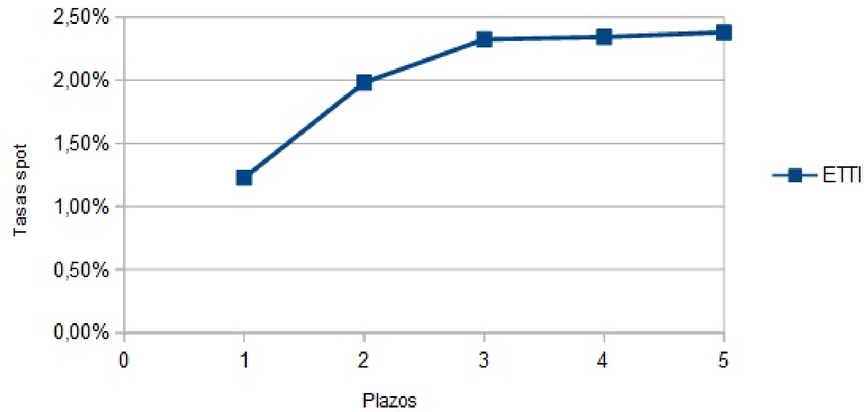


Figura 8.3.1: Estructura a término de tasas de interés

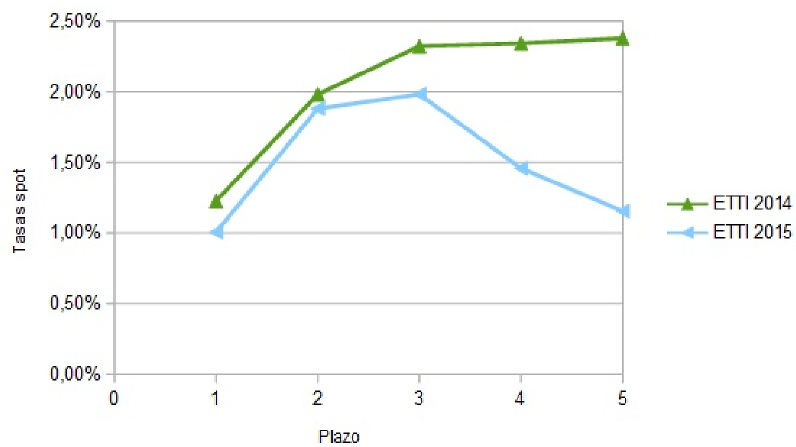
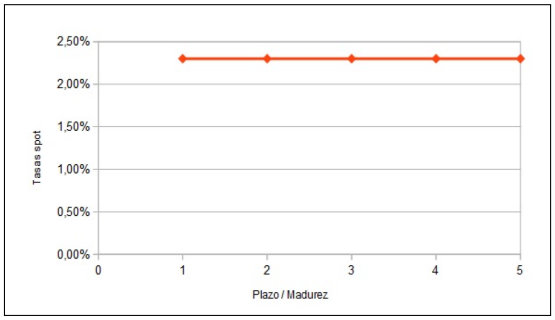


Figura 8.3.2: ETTI en dos años distintos

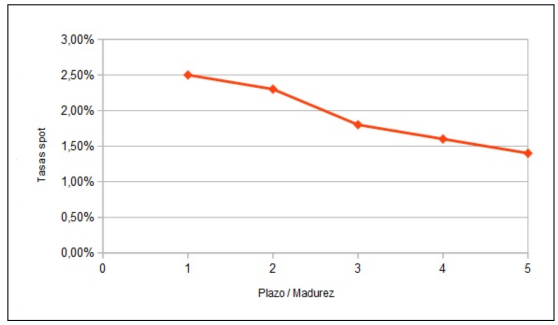
8.3.3. Tasas implícitas o tasas forward

Denominamos $i(0, n)$ a la tasa spot o tasa cupón cero para un plazo de n años. Tenemos que $i(0, 1)$ determina una tasa para el primer año, y la tasa spot $i(0, 3)$ determina una tasa anual para los próximos tres años, y ambas se obtienen a partir de los precios de bonos cupón cero que vencen a un año y tres años, respectivamente.

Conocidas las tasas spot a un año y a tres años, tiene sentido preguntarse cuál es la tasa *esperada* que debería regir dentro de un año para los dos siguientes. Si bien existen distintas formas de definir esta tasa esperada, una posibilidad es considerar la tasa de capitalización compuesta $\tilde{i}(1, 3)$ que



(a) ETTI PLana



(b) ETTI Decreciente

Figura 8.3.3: Ejemplos de ETTI

debería regir en el plazo entre $t = 1$ y $t = 3$ tal que

$$(1 + i(0, 3))^3 = (1 + i(0, 1)) \cdot (1 + i(1, 3))^2.$$

Esta tasa se denomina **tasa forward o tasa implícita observada hoy para el período de uno a tres años**. Notamos entonces que, si se conocen las tasas a k y m años, $i(0, k)$ e $i(0, m)$, entonces la tasa forward $i(k, m)$ para el período $[k, m]$ observada hoy verifica:

$$(1 + i(0, m))^m = (1 + i(0, k))^k \cdot (1 + i(k, m))^{m-k}.$$

Escribiendo $1 + i(a, b) = e^{r(a,b)}$, para $a < b$, y tomando logaritmos, tenemos que

$$r(k, m) = \frac{r(0, m) \cdot m - r(0, k)k}{m - k}.$$

Esta ecuación también puede escribirse como

$$r(k, m) = r(0, m) + (r(0, m) - r(0, k)) \cdot \frac{k}{m - k}.$$

Vemos entonces que si la curva de tasas es ascendente, la tasa forward es superior a la tasa más larga, mientras que si es descendente la relación es inversa.

Ejemplo 8.8. Supongamos que las tasas cupón cero para los plazos de 1 a 5 años son como en la Tabla 8.3.1:

Un inversor puede cerrar una tasa forward de 1 a 3 años pidiendo un préstamo a un año por un nominal N a la tasa cero del $1{,}22\,\%$ y comprando por ese monto un bono a 3 años. El costo total de la inversión es 0. Como el valor del bono a un año es $\$N \cdot \frac{1}{1{,}0122}$, al año deberá devolver (invertir/pagar) N y a los 3 años recibe

$$N \cdot \frac{1}{1{,}0122} \cdot 1{,}0232^3 = N \cdot 1{,}0287^2 = N \cdot (1 + i(1, 3))^2.$$

Plazo (años)	Tasa cero (%)
1	$1{,}22$
2	$1{,}98$
3	$2{,}32$
4	$2{,}34$
5	$2{,}38$

Cuadro 8.3.1: Tasas cupón cero

Así la tasa forward de 1 a 3 años, $i(1,3) = 2{,}87\,\%$, resulta mayor que la tasa a 3 años del $2{,}32\,\%$.

El Ejemplo 8.8 muestra cómo es posible asegurar una tasa en un plazo futuro invirtiendo a tasas spot conocidas. Una pregunta es: ¿cómo es esta tasa futura con respecto a la tasa spot que regirá en ese período? No es posible conocerlo hoy, pero pueden hacerse apuestas al respecto. Así surgen los distintos derivados sobre tasas de interés: FRA, Swaps, y una variedad de opciones sobre tasas forward.

8.4. Derivados sobre tasas de interés

8.4.1. Tasas LIBOR

El modelado de tasas de interés puede hacerse sobre tasas obtenidas con bonos o sobre tasas de préstamos interbancarios. En muchos casos los derivados sobre tasas de interés se refieren a estas últimas.

La llamada tasa LIBOR (London Interbank Offered Rate) es una tasa de referencia que se publica diariamente en Londres y que *promedia* las tasas que ofrecen los principales bancos por un préstamo interbancario. Asimismo las tasas LIBID son las que ofrecen para que otros bancos efectúen sus depósitos. Estas tasas interbancarias tienen en principio un mayor riesgo que una tasa de un bono del tesoro, y por lo tanto tienden a ser más atractivas para la comercialización de derivados.

En general las tasas LIBOR son tasas anuales a 1 mes, 2 meses, 3 meses, 6 meses o un año y su aplicación es con capitalización simple. Esto es, una tasa LIBOR del $6\,\%$ a 3 meses sobre un nominal de 1 millón de libras supone un interés de:

$$1{,}000{,}000 \cdot \frac{0{,}06}{4} = 15{,}000.$$

La denominación LIBOR en modelos de finanzas cuantitativas suele extenderse a una tasa que se aplica con capitalización simple para un período $[0, T]$ y la denotaremos entonces $L(0, 0, T)$. Significa que la inversión de $\$1$ en el período $[0, T]$ arroja un interés $L(0, 0, T) \cdot T$, o equivalentemente, la inversión de una cantidad $1/(1 + L(0, 0, T) \cdot T)$ al día de hoy implicará un capital de $\$1$ en el tiempo T. Por ello cada tasa Libor está asociada a un bono cupón cero a plazo T con nominal $\$1$, y que denotaremos $P(0, T)$.

Así, la tasa $L(0, 0, T)$ está asociada al precio de un bono cupón cero $P(0, T)$ tal que:

$$P(0,T) \cdot (1 + L(0,0,T) \cdot T) = 1, \qquad \text{esto es} \qquad L(0,0,T) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{P(0,T)} - 1\right).$$

Al igual que para las tasas continuas también podemos definir **tasas forward simplemente compuestas** a partir de las tasas LIBOR. En este caso, si se conocen dos tasas LIBOR, por ejemplo a $S = 3$ y a $T = 6$ meses, entonces la tasa forward de 3 a 6 meses es la tasa $\tilde{L}$ tal que:

$$1 + L(0,0,T) \cdot T = (1 + L(0,0,S) \cdot S) \cdot (1 + \tilde{L} \cdot (T - S)).$$

Denotaremos a esta tasa forward como $L(0, S, T)$ e indica la *tasa forward para el período* $[S, T]$ *vista en* $t = 0$. Tenemos entonces que:

$$L(0,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{1 + L(0,0,T) \cdot T}{1 + L(0,0,S) \cdot S} - 1\right) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{P(0,S)}{P(0,T)} - 1\right).$$

De manera análoga podemos definir la tasa LIBOR en el momento t para el plazo $[t, T]$, y se define tal que:

$$P(t,T) \cdot (1 + L(t,t,T) \cdot (T-t)) = 1, \qquad \text{esto es} \qquad L(t,t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right).$$

La tasa forward para el período $[S, T]$ vista en t, con $t \leq S < T$ es tal que:

$$1 + L(t,t,T) \cdot (T-t) = (1 + L(t,t,S) \cdot (S-t)) \cdot (1 + L(t,S,T) \cdot (T-S)).$$

Así:

$$L(t,S,T) = \frac{1}{T-S} \cdot \frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1.$$

Observación: Hacemos notar que de ahora en más asumiremos la **capitalización simple** para la definición de bonos y tasas cupón cero.

8.4.2. El bono como factor de descuento

En los modelos de tasas de interés la cuenta bancaria se asume con una tasa variable y en general aleatoria, esto es, la cuenta bancaria resulta un proceso estocástico. Por otra parte, la inversión en un bono a plazo T determina, para cada t, $0 \leq t \leq T$ una tasa cupón cero única, conocida. Toda cantidad $N = N(T)$ disponible en un futuro T puede pensarse como una inversión en $t = 0$ en N bonos cupón cero $P(0, T)$, ya que ambos tendrán el mismo valor en $t = T$, es decir que el valor de N en un tiempo t es $P(t, T) \cdot N$.

Notemos que para cada T el bono que se utiliza para descontar es diferente. Esto da lugar a la existencia de múltiples numerarios en los modelos de tasas de interés.

8.4.3. FRA

El derivado quizás más simple sobre tasas de interés es el FRA: Forward Rate Arrangement. Este derivado es un contrato entre dos partes que convienen en intercambiar una tasa fija por una tasa forward sobre un determinado nominal. Por ejemplo, una parte conviene en pagar una tasa del 5 % el próximo mes por un plazo de 3 meses, mientras que la otra parte pagará la tasa LIBOR a tres meses que se fije dentro de un mes, sobre un nominal de $\$10{,}000$. La efectivización del contrato es a través del pago de la diferencia de tasas sobre el nominal. Así por ejemplo, si en un mes la tasa LIBOR es del $4{,}5\,\%$, la **parte fija** deberá pagar a su contraparte $0{,}05 \cdot \$10{,}000 = \$500$. Este contrato tiene a su inicio tres fechas:

- $t = 0$: fecha en que se establece el contrato.
- $t = S$: momento en que comienza a correr el interés por un plazo $T - S$.
- $t = T$: finalización del contrato.

Si R es la **tasa fija**, entonces el valor del contrato al momento de su madurez sobre un nominal N es, para el que paga la **tasa flotante**:

$$N \cdot (R - L(S, S, T)) \cdot (T - S),$$

y para el que paga la tasa fija:

$$N \cdot (L(S, S, T) - R) \cdot (T - S).$$

Luego en tiempo t el valor del contrato FRA se obtiene descontando según la tasa spot a plazo T:

$$V_{FRA}(t) = N \cdot P(t, T)\,(L(S, S, T) - R)\,(T - S) = N \cdot P(t, T) \left(\frac{1}{P(S, T)} - 1 - K(T - S) \right).$$

En $t = 0$ el valor resulta:

$$V_{FRA}(0) = N \cdot P(0,T) \left(\frac{1}{P(S,T)} - 1 - R(T-S) \right).$$

Notemos que si bien el pago del FRA se realiza en $t = T$, la cantidad $\frac{1}{P(S,T)}$ que será pagada en ese momento ya es conocida en $t = S$, y su valor en $t = S$ lo obtenemos descontando con un bono que vence en T:

$$P(S,T) \cdot \frac{1}{P(S,T)} = 1.$$

Es decir que $\frac{1}{P(S,T)}$ es equivalente al valor de un bono que paga 1 en S, y por lo tanto su valor en 0 es $P(0,S)$.

A su vez, el valor en $t = 0$ de la cantidad $1 + R(T-S)$ disponible en $t = T$ es $P(0,T) \cdot (1 + R(T-S))$. Luego:

$$V_{FRA}(0) = N \cdot (P(0,S) - P(0,T) \cdot (1 + R(T-S)).$$

Para que esto sea 0, debe ser:

$$R = \frac{1}{T-S} \cdot \left(\frac{P(0,S)}{P(0,T)} - 1 \right) = L(0,S,T),$$

esto es, la tasa forward para el período $[S,T]$ vista en $t = 0$. R se denomina también *tasa FRA*.

Ejemplo 8.9. Consideremos una tasa LIBOR a tres meses del $7\,\%$ y una tasa LIBOR a 6 meses del $7{,}5\,\%$. Un contrato FRA para el plazo de 3 a 6 meses tiene una tasa (pata) fija R_{FRA} y una tasa (pata) variable. Los correspondientes bonos cupón cero son:

$$P(0, 0{,}25) = \frac{1}{1 + 0{,}07 \cdot 0{,}25}, \qquad P(0, 0{,}5) = \frac{1}{1 + 0{,}075 \cdot 0{,}5}.$$

La tasa FRA es entonces:

$$R_{FRA} = \frac{1}{0{,}25} \cdot \left(\frac{1 + 0{,}075 \cdot 0{,}5}{1 + 0{,}07 \cdot 0{,}25} - 1 \right) = 7{,}86\,\%.$$

Supongamos que un inversor entra en este FRA como *pagador* de la tasa fija sobre un nominal de $\$10{,}000$. Entonces a los tres meses se observará la tasa LIBOR para los siguientes tres meses. Si por ejemplo, esta tasa es del $7{,}6\,\%$, entonces el payoff le resultará negativo a los 6 meses deberá pagar:

$$\$10{,}000 \cdot (0{,}0786 - 0{,}076) = \$26.$$

Si en cambio la tasa resulta del $8\,\%$, entonces el payoff le será positivo y recibirá:

$$\$10{,}000 \cdot (0{,}08 - 0{,}0786) = \$14.$$

8.4.4. SWAP

Un **swap** es similar al FRA, sólo que implica un intercambio de una renta con cuotas a una tasa fija (pata fija) y una renta con cuotas sujetas a la tasa flotante (pata flotante). Si por ejemplo los pagos se darán en los siguientes 3, 6 y 9 meses, considerando tasas trimestrales, entonces ambas partes acuerdan hoy una tasa fija trimestral que será pagada por una de las partes. La otra pagará la tasa LIBOR que se observe en el mercado las sucesivas fechas.

Para el caso del swap con una sucesión de n pagos existen $n+2$ fechas asociadas:

$$0 < T_1 < T_2 < \cdot < T_n < T_{n+1},$$

con una tasa fija $R = R_{Swap}$ y las tasas flotantes:

$$L(T_1, T_1, T_2), \quad L(T_2, T_2, T_3), \qquad \dots \qquad L(T_n, T_n, T_{n+1}).$$

Si el Swap se paga sobre un nominal N entonces en las fechas T_2, T_3, hasta T_{n+1} quien paga la tasa LIBOR recibe respectivamente:

$$N\cdot(R-L(T_1,T_1,T_2))(T_2-T_1), \quad N\cdot(R-L(T_2,T_2,T_3))(T_3-T_2), \dots \quad N\cdot(R-L(T_n,T_n,T_{n+1}))(T_{n+1}-T_n),$$

por lo cual el valor en tiempo 0 del Swap para la parte flotante es:

$$\text{Valor del Swap} = N \cdot \sum_{j=1}^{n} P(0, T_{j+1}) \cdot (R - L(T_j, T_j, T_{j+1}))(T_{j+1} - T_j).$$

También en el caso del Swap, la tasa fija elegida es tal que el valor del Swap es 0 al iniciar el contrato.

Podríamos decir que los FRA y los swaps son derivados análogos a los contratos forward donde el subyacente y el "precio de entrega" son tasas de interés. La tasa fija que hace que al tiempo 0 el valor del Swap sea 0 se denomina **tasa swap**. Así, para un swap para un tenor de fechas:

$$0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < T_{n+1},$$

($n = 1$ corresponde a un FRA) tenemos que la tasa Swap R_{swap} está dada por:

$$\begin{aligned} R_{swap} \cdot \sum_j P(0, T_{j+1})(T_{j+1} - T_j) &= \sum_j P(0, T_{j+1}) L(T_j, T_j, T_{j+1})(T_{j+1} - T_j) \\ &= \sum_j (P(0, T_j) - P(0, T_{j+1})) \\ &= P(0, T_1) - P(0, T_{n+1}). \end{aligned}$$

Es decir:

$$R_{swap} = \frac{P(0,T_1) - P(0,T_{n+1})}{\sum_j P(0,T_{j+1})(T_{j+1} - T_j)}.$$

8.4.5. Opciones sobre tasas de interés

Los FRA y los Swap implican un flujo de fondos que puede tener diferente signo en cada pago. Esto es, puede ocurrir que la primer cuota sea beneficiosa para la parte fija y la siguiente lo sea para la parte flotante. Algo similar ocurre con un contrato forward: cualquiera de las partes podría perder o ganar. Veamos el caso análogo a las opciones.

Supongamos que un inversor entra a un FRA pagando una tasa fija R. El riesgo que corre es que la tasa flotante que va a recibir sea inferior a la tasa fija. Una forma de protegerse es a través de un **caplet** por el cual decidirá ejercer el FRA si la tasa flotante es mayor que la fija y no ejercerla en caso contrario. Así, una caplet para el plazo $[T_1, T_2]$ con strike R se ejerce en tiempo T_1 y paga en T_2 sobre un nominal N la cantidad:

$$V_{caplet} = N \cdot \text{máx}(L(T_1, T_1, T_2) - R), 0) \cdot (T_2 - T_1).$$

Un **floorlet** es similar al caplet pero funciona como una opción put. Su payoff es:

$$V_{floorlet} = N \cdot \text{máx}(R - L(T_1, T_1, T_2)), 0) \cdot (T_2 - T_1).$$

Una sucesión de caplets es un **cap** y una sucesión de floorlets es un **floor**. Así en un cap o en un floor puede ejercerse la opción en algunos de los períodos y en otros no.

Un **swaption** es una opción para entrar en un swap. En este caso el strike del swaption es una tasa fija. Existen dos tipos de swaption: el **payer swaption** en el cual la opción consiste en entrar al swap para pagar la tasa fija, y el **receiver swaption** en el cual la opción es entrar al swap para recibir la tasa fija.

Para el payer swaption por ejemplo, existen entonces diferentes fechas asociadas:

- $t = 0$: el inicio del contrato de opción,
- $t = T$: el momento de ejercicio, que puede considerarse el inicio del swap.
- $T_1 < T_2 < \ldots < T_N < T_{N+1}$: el tenor de fechas para el cual, en caso de haberse ejercido el swaption con una tasa fija R, se pagará la cantidad $(L(T_1, T_n, T_{n+1}) - R)(T_{n+1} - T_n)$ en T_{n+1}, para $n = 1, 2, \ldots, N$.

El payoff de un swaption será positivo si la tasa swap supera la tasa fija y será cero en caso contrario. Ahora, para determinar el payoff deben considerarse cada uno de los pagos futuros y descontarlos a la correspondiente tasa.