

Técnicas de simulación y discretización para la valoración de opciones barrera

por

Gonzalo A. Bordón

Presentado ante la **FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN** como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Licenciatura en Ciencias de la Computación de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Diciembre , 2025

Directores: Dra. Noemí Patricia Kisbye



Generación y diseño de herramientas para el análisis de retornos de carteras de inversión artificiales y reales © 2025 by Diego Nicolas Gimenez Irusta is licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International

Certifico que el trabajo incluido en este documento es el resultado de tareas de investigación originales y que no ha sido presentado para optar a un título en ninguna otra Universidad o Institución.

Gonzalo A. Bordón

Agradecimientos

Completar: COMPLETAR

Resumen

Esta tesis presenta métodos para la valorización y discretización de opciones barrera, derivados financieros cuyo pago depende de si el precio del activo subyacente cruza un nivel de barrera predeterminado durante la vida de la opción. Las opciones barrera son ampliamente utilizadas en los mercados financieros para la gestión de riesgos y estrategias de inversión debido a su menor costo en comparación con las opciones estándar.

Los objetivos principales de este trabajo son analizar e implementar métodos para la valoración de opciones barrera, con énfasis particular en las técnicas de discretización que capturan con precisión la condición de barrera. La metodología incluye: (1) el modelo continuo de Black-Scholes, que asume un comportamiento lognormal del precio del activo, permitiendo fórmulas cerradas para opciones barrera europeas y sentando las bases para simulaciones de Monte Carlo en el caso americano; (2) modelos discretos como el binomial y trinomial que analizan el conjunto completo de trayectorias posibles, abordando el problema de la subestimación o sobreestimación cuando la barrera no coincide con los nodos del árbol mediante estrategias con mallas adaptativas; y (3) la replicación estática, una técnica para cubrir opciones barrera mediante la construcción de un portafolio de opciones vanillas que reproduzca el mismo payoff bajo ciertas condiciones. Nos enfocamos tanto en opciones barrera de estilo europeo como americano.

Los resultados demuestran la efectividad de los esquemas de discretización propuestos para lograr valoraciones precisas manteniendo la eficiencia computacional. Comparamos el rendimiento de diferentes enfoques numéricos y analizamos sus propiedades de convergencia. El trabajo contribuye a la comprensión de métodos numéricos para la valoración de opciones exóticas y proporciona herramientas prácticas para la evaluación de riesgos financieros.

Palabras clave: opciones barrera, valoración de opciones, modelo de Black-Scholes, árboles binomiales y trinomiales, replicación estática, mallas adaptativas, derivados financieros.

Abstract

This thesis presents methods for the valuation and discretization of barrier options, financial derivatives whose payoff depends on whether the underlying asset price crosses a predetermined barrier level during the option's lifetime. Barrier options are widely used in financial markets for risk management and investment strategies due to their lower cost compared to standard options.

The main objectives of this work are to analyze and implement methods for pricing barrier options, with particular emphasis on discretization techniques that accurately capture the barrier condition. The methodology includes: (1) the continuous Black-Scholes model, which assumes a lognormal behavior of the asset price, allowing closed-form formulas for European barrier options and providing the foundation for Monte Carlo simulations in the American case; (2) discrete models such as binomial and trinomial trees that analyze the complete set of possible trajectories, addressing the problem of underestimation or overestimation when the barrier does not align with tree nodes through strategies using adaptive meshes; and (3) static replication, a technique for hedging barrier options by constructing a portfolio of vanilla options that reproduces the same payoff under certain conditions. We focus on both European and American-style barrier options.

The results demonstrate the effectiveness of the proposed discretization schemes in achieving accurate valuations while maintaining computational efficiency. We compare the performance of different numerical approaches and analyze their convergence properties. The work contributes to the understanding of numerical methods for exotic options pricing and provides practical tools for financial risk assessment.

Keywords: barrier options, option pricing, Black-Scholes model, binomial and trinomial trees, static replication, adaptive meshes, financial derivatives.

Índice general

| | |
|--------------------------------------------------|-------------|
| Agradecimientos | I |
| Resumen | III |
| Abstract | IV |
| Glosario | V |
| Índice de figuras | VIII |
| Índice de código | X |
| 1. Introducción | 2 |
| 1.1. Objetivos | 2 |
| 1.1.1. Objetivo General | 2 |
| 1.1.2. Objetivos Específicos | 2 |
| 1.2. Resultados originales presentados | 2 |
| 1.3. Organización del trabajo | 2 |
| 2. Antecedentes | 4 |
| 2.1. Opciones Barrera | 4 |
| 2.1.1. Clasificación y Payoffs | 4 |
| 2.2. Dinámica de Precios y Modelado | 5 |
| 2.2.1. Movimiento Browniano Geométrico | 5 |
| 2.2.2. Primer Tiempo de Pasaje | 5 |
| 3. Conclusiones y trabajo a futuro | 6 |
| Bibliografía | 8 |

Índice de figuras

Índice de códigos

ÍNDICE DE CÓDIGOS

Capítulo 1

Introducción

Completar: INTRO

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo General

Analizar y comparar diferentes metodologías de valoración para opciones del tipo barrera, abarcando desde soluciones analíticas en tiempo continuo hasta algoritmos de aproximación en modelos discretos.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Estudiar el modelo de Black-Scholes para la obtención de fórmulas cerradas de opciones barrera europeas.
- Implementar y analizar la eficiencia de modelos de árboles (binomial y trinomial) en la valoración de opciones barrera americanas, evaluando el uso de mallas adaptativas.
- Explorar la técnica de replicación estática como estrategia de cobertura mediante portafolios de opciones vanilla.
- Evaluar las ventajas y limitaciones de cada método en términos de precisión y complejidad computacional.

1.2. Resultados originales presentados

Completar: SI HAY RESULTADOS COMO CONFERENCIAS O PAPERS

1.3. Organización del trabajo

Los capítulos de este trabajo se organizan de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos de sistemas de riego en general, su uso, y por que importante detectarlos, y como se esta trabajando actualmente con redes neuronales para lograrlo.

1.3. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

El Capítulo ?? describe el estado de [SISTEMA_OBJETO], detallando las funcionalidades, la arquitectura y las limitaciones presentes en [IMPLEMENTACION_ACTUAL].

Los Capítulos ?? y ?? documentan el desarrollo de [NUEVA_VERSION]. Abordan [ASPECTO_TECNICO_1] y [ASPECTO_TECNICO_2], respectivamente.

En el Capítulo ?? se presentan los resultados obtenidos en términos de [METRICA_1] y [METRICA_2].

Finalmente, las conclusiones generales son presentadas en el Capítulo 3, donde también se discuten posibles líneas futuras de desarrollo.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Opciones Barrera

Las opciones tipo barrera son derivados financieros cuya existencia depende de si el precio del activo subyacente cruza o no un nivel de precio predeterminado (la barrera) durante el periodo de vida de la opción.

2.1.1. Clasificación y Payoffs

- **Knock-in:** La opción vale sólo si se alcanzó la barrera.
 - Up-and-In (UI): La barrera B está por encima del precio inicial S_0 .
 - Down-and-In (DI): La barrera B está por debajo del precio inicial S_0 .
- **Knock-out:** La opción deja de valer si se alcanzó la barrera.
 - Up-and-Out (UO): La barrera B está por encima del precio inicial S_0 .
 - Down-and-Out (DO): La barrera B está por debajo del precio inicial S_0 .

Formalmente, el payoff de una opción barrera europea con vencimiento T , precio de ejercicio K y barrera B puede expresarse utilizando la función indicadora \mathbb{I}_A . Por ejemplo, para una opción *Down-and-Out Call*:

$$\text{Payoff}_{DO} = \max(S_T - K, 0) \cdot \mathbb{I}_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}} \quad (2.1)$$

Y para una opción *Down-and-In Call*:

$$\text{Payoff}_{DI} = \max(S_T - K, 0) \cdot \mathbb{I}_{\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t \leq B\}} \quad (2.2)$$

De manera análoga se definen los payoffs para las variantes *Up* considerando el máximo del proceso en lugar del mínimo: $\mathbb{I}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t < B\}}$ para *Up-and-Out* y $\mathbb{I}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B\}}$ para *Up-and-In*.

2.2. Dinámica de Precios y Modelado

2.2.1. Movimiento Browniano Geométrico

El modelo estándar de valoración asume que el precio del activo subyacente S_t sigue un proceso...

2.2.2. Primer Tiempo de Pasaje

Para las opciones barrera, es fundamental el estudio del primer instante en que el proceso alcanza el nivel B ...

Completar: Desarrollar definiciones matemáticas y fórmulas de payoff

Capítulo 3

Conclusiones y trabajo a futuro

Completar: CONCLUSIONES

Bibliografía