Técnicas de simulación y discretización para la valoración de opciones barrera

por

Gonzalo A. Bordón

Presentado ante la **FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN** como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Licenciatura en Ciencias de la Computacióndne la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Enero, 2026

Directores: Dra. Noemí Patricia Kisbye

Certifico que el trabajo incluido en este documento es el resultado de tareas de investigación originales y que no ha sido presentado para optar a un título en ninguna otra Universidad o Institución.

Gonzalo A. Bordón

Agradecimientos

Completar: COMPLETAR

Resumen

Esta tesis presenta métodos para la valorización y discretización de opciones barrera, derivados financieros cuyo pago depende de si el precio del activo subyacente cruza un nivel de barrera predeterminado durante la vida de la opción. Las opciones barrera son ampliamente utilizadas en los mercados financieros para la gestión de riesgos y estrategias de inversión debido a su menor costo en comparación con las opciones estándar.

Los objetivos principales de este trabajo son analizar e implementar métodos para la valoración de opciones barrera, con énfasis particular en las técnicas de discretización que capturan con precisión la condición de barrera. La metodología incluye: (1) el modelo continuo de Black-Scholes, que asume un comportamiento lognormal del precio del activo, permitiendo fórmulas cerradas para opciones barrera europeas y sentando las bases para simulaciones de Monte Carlo en el caso americano; (2) modelos discretos como el binomial y trinomial que analizan el conjunto completo de trayectorias posibles, abordando el problema de la subestimación o sobreestimación cuando la barrera no coincide con los nodos del árbol mediante estrategias con mallas adaptativas; y (3) la replicación estática, una técnica para cubrir opciones barrera mediante la construcción de un portafolio de opciones vanillas que reproduzca el mismo payoff bajo ciertas condiciones. Nos enfocamos tanto en opciones barrera de estilo europeo como americano.

Los resultados demuestran la efectividad de los esquemas de discretización propuestos para lograr valoraciones precisas manteniendo la eficiencia computacional. Comparamos el rendimiento de diferentes enfoques numéricos y analizamos sus propiedades de convergencia. El trabajo contribuye a la comprensión de métodos numéricos para la valoración de opciones exóticas y proporciona herramientas prácticas para la evaluación de riesgos financieros.

Palabras clave: opciones barrera, valoración de opciones, modelo de Black-Scholes, árboles binomiales y trinomiales, replicación estática, mallas adaptativas, derivados financieros.

Abstract

This thesis presents methods for the valuation and discretization of barrier options, financial derivatives whose payoff depends on whether the underlying asset price crosses a predetermined barrier level during the option's lifetime. Barrier options are widely used in financial markets for risk management and investment strategies due to their lower cost compared to standard options.

The main objectives of this work are to analyze and implement methods for pricing barrier options, with particular emphasis on discretization techniques that accurately capture the barrier condition. The methodology includes: (1) the continuous Black-Scholes model, which assumes a lognormal behavior of the asset price, allowing closed-form formulas for European barrier options and providing the foundation for Monte Carlo simulations in the American case; (2) discrete models such as binomial and trinomial trees that analyze the complete set of possible trajectories, addressing the problem of underestimation or overestimation when the barrier does not align with tree nodes through strategies using adaptive meshes; and (3) static replication, a technique for hedging barrier options by constructing a portfolio of vanilla options that reproduces the same payoff under certain conditions. We focus on both European and American-style barrier options.

The results demonstrate the effectiveness of the proposed discretization schemes in achieving accurate valuations while maintaining computational efficiency. We compare the performance of different numerical approaches and analyze their convergence properties. The work contributes to the understanding of numerical methods for exotic options pricing and provides practical tools for financial risk assessment.

Keywords: barrier options, option pricing, Black-Scholes model, binomial and trinomial trees, static replication, adaptive meshes, financial derivatives.

Índice general

Índice de figuras

Índice de códigos

Capítulo 1

Introducción

Completar: INTRO

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo General

Analizar y comparar diferentes metodologías de valoración para opciones del tipo barrera, abarcando desde soluciones analíticas en tiempo continuo hasta algoritmos de aproximación en modelos discretos.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Estudiar el modelo de Black-Scholes para la obtención de fórmulas cerradas de opciones barrera europeas.
- Implementar y analizar la eficiencia de modelos de árboles (binomial y trinomial) en la valoración de opciones barrera americanas, evaluando el uso de mallas adaptativas.
- Explorar la técnica de replicación estática como estrategia de cobertura mediante portafolios de opciones vanilla.
- Evaluar las ventajas y limitaciones de cada método en términos de precisión y complejidad computacional.

1.2. Resultados originales presentados

Completar: SI HAY RESULTADOS COMO CONFERENCIAS O PAPERS

1.3. Organización del trabajo

Los capítulos de este trabajo se organizan de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos de las opciones barrera, el modelo de Black-Scholes para activos con barreras y los conceptos básicos de procesos estocásticos necesarios para su comprensión.

El Capítulo **??** describe el estado del arte y las metodologías de valoración propuestas, detallando los modelos discretos de árboles y el uso de mallas adaptativas.

Los Capítulos **??** y **??** documentan el desarrollo de las simulaciones y la replicación estática. Abordan la implementación algorítmica y el análisis comparativo de resultados, respectivamente.

Finalmente, las conclusiones generales son presentadas en el Capítulo 3, donde también se discuten posibles líneas futuras de desarrollo.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Opciones Barrera

Las opciones tipo barrera son derivados financieros cuya existencia depende de si el precio del activo subyacente cruza o no un nivel de precio predeterminado (la barrera) durante el periodo de vida de la opción.

2.1.1. Clasificación y Payoffs

- **Knock-in**: La opción vale si y sólo si se alcanzó la barrera.
  - Up-and-In (UI): La barrera B está por encima del precio inicial S_0.
  - Down-and-In (DI): La barrera B está por debajo del precio inicial S_0.
- **Knock-out**: La opción deja de valer si se alcanzó la barrera.
  - Up-and-Out (UO): La barrera B está por encima del precio inicial S_0.
  - Down-and-Out (DO): La barrera B está por debajo del precio inicial S_0.

Formalmente, el payoff de una opción barrera europea con vencimiento T, precio de ejercicio K y barrera B puede expresarse utilizando la función indicadora $\mathbb{I}_A$. Por ejemplo, para una opción *Down-and-Out Call*:

$$\text{Payoff}_{DO} = \text{máx}(S_T - K, 0) \cdot \mathbb{I}_{\{\text{mín}_{0\leq t\leq T} S_t > B\}} \tag{2.1}$$

Y para una opción *Down-and-In Call*:

$$\text{Payoff}_{DI} = \text{máx}(S_T - K, 0) \cdot \mathbb{I}_{\{\text{mín}_{0\leq t\leq T} S_t \leq B\}} \tag{2.2}$$

De manera análoga se definen los payoffs para las variantes *Up* considerando el máximo del proceso en lugar del mínimo: $\mathbb{I}_{\{\text{máx}_{0\leq t\leq T} S_t < B\}}$ para *Up-and-Out* y $\mathbb{I}_{\{\text{máx}_{0\leq t\leq T} S_t \geq B\}}$ para *Up-and-In*.

2.2. Modelo de Black-Scholes para Opciones Barrera

2.2.1. Fundamentos del Modelo Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes Black and Scholes (1973) constituye la base teórica fundamental para la valoración de opciones europeas. Para opciones barrera, este modelo permite obtener fórmulas cerradas exactas bajo ciertas condiciones de regularidad.

Supuestos del Modelo

El modelo de Black-Scholes se basa en los siguientes supuestos fundamentales:

- El precio del subyacente S_t sigue un Movimiento Browniano Geométrico
- Es posible entrar en posición short en cualquier instrumento
- No hay costos de transacción
- Los activos son divisibles en cualquier cantidad
- Los activos no tienen dividendos
- No hay posibilidad de arbitraje
- Las transacciones se realizan de manera continua en el tiempo
- La tasa de interés libre de riesgo, r, es constante y es la misma para todos los plazos

Ecuación Diferencial de Black-Scholes

Bajo estos supuestos, el precio de cualquier derivado $V(S(t))$ que depende del precio del subyacente S y del tiempo t debe satisfacer la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.3}$$

Para opciones barrera, esta ecuación debe resolverse sujeta a condiciones de borde específicas que incorporan el comportamiento en la barrera.

2.2.2. Solución Analítica de Reiner y Rubinstein

El trabajo seminal de Reiner y Rubinstein Reiner and Rubinstein (1991) proporciona una metodología sistemática para obtener fórmulas cerradas para los ocho tipos básicos de opciones barrera europeas.

Marco Metodológico de Valoración

Siguiendo la notación exacta de Reiner y Rubinstein Reiner and Rubinstein (1991), se definen:
Variables Críticas

- r: Tasa de interés (expresada como $1 + \text{tasa}$)
- d: Tasa de pago del activo (expresada como $1 + \text{tasa de pago}$)
- σ: Volatilidad del activo subyacente
- t: Tiempo hasta el vencimiento
- ϕ: Variable binaria (1 para calls, -1 para puts)
- η: Variable binaria (1 si el precio inicia por encima de la barrera, -1 si inicia por debajo)

Constantes:

- H: Nivel de la barrera preestablecido
- K: Precio de ejercicio preestablecido
- R: Monto del rebate preestablecido

Funciones de Densidad de Probabilidad La valoración requiere tres densidades fundamentales:

- $f(u)$: Densidad normal del logaritmo natural del retorno del activo subyacente neutral al riesgo

$$f(u) = (1/\sigma\sqrt{2\pi t})e^{-1/2v^2}$$

  Donde $v = (u - \mu t)/\sigma\sqrt{t}$ y $\mu = \log(r/d) - \frac{1}{2}\sigma^2$. Utilizada cuando consideramos que no se cruzó la barrera.

- $g(u)$: Densidad del retorno cuando el precio rompe la barrera pero termina en un nivel específico al vencimiento

$$g(u) = e^{2\eta\alpha\lambda\sigma^{-2}}(1/\sigma\sqrt{2\pi t})e^{-1/2v^2}$$

  Donde $v = (u - 2\eta\alpha - \eta\mu t)/\sigma\sqrt{t}$ y $\alpha = \log(H/S)$. Utilizada cuando consideramos que se cruzó la barrera.

- $h(\tau)$: Densidad del tiempo de primer paso (first passage time), necesaria para las opciones 'Out' donde el reembolso se paga al momento de tocar la barrera

Variables auxiliares

- $x = [\log(S/K)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $x_1 = [\log(S/H)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$

- $y = [\log(H^2/SK)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $y_1 = [\log(H/S)/\sigma\sqrt{t}] + \lambda\sigma\sqrt{t}$
- $\lambda = 1 + (\mu/\sigma^2)$
- $z = [\log(H/S)/\sigma\sqrt{t}] + b\sigma\sqrt{t}$
  donde $b = [\sqrt{\mu + 2(\log r)\sigma^2}]/\sigma^2$

Términos de Valoración

$$\begin{aligned}[1] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K) f(u) du \\ &= \phi S d^{-t} N(\phi x) - \phi K r^{-t} N(\phi x - \phi\sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}[2] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K) f(u) du \\ &= \phi S d^{-t} N(\phi x_1) - \phi K r^{-t} N(\phi x_1 - \phi\sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}[3] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K) g(u) du \\ &= \phi S d^{-t} (H/S)^{2\lambda} N(\eta y) - \phi K r^{-t} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y - \eta\sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}[4] &= r^{-t} \int \phi(Se^u - K) g(u) du \\ &= \phi S d^{-t} (H/S)^{2\lambda} N(\eta y_1) - \phi K r^{-t} (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}[5] &= R r^{-t} \int [f(u) - g(u)] du \\ &= R r^{-t} \left[N(\eta x_1 - \eta\sigma\sqrt{t}) - (H/S)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{t}) \right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}[6] &= R \int r^{-\tau} h(\tau) d\tau \\ &= R \left[(H/S)^{a+b} N(\eta z) + (H/S)^{a-b} N(\eta z - 2\eta b\sigma\sqrt{t}) \right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Interpretación de los Términos de Valoración

La comprensión de estos términos requiere analizar tanto las regiones de integración como las funciones de densidad utilizadas.

1. Regiones de Integración en el Espacio de Precios

En las fórmulas [1] a [5], la variable de integración es u, definida como el logaritmo natural del rendimiento del activo: $u = \ln(S_t/S)$.

- **Región de** $\log(K/S)$ **a** $\phi\infty$: Representa todos los precios finales del activo que terminan 'in the money' (por encima de K para un call o por debajo de K para un put). El término ϕ actúa como un interruptor: si es 1 (call), la región va hacia el infinito positivo; si es -1 (put), hacia el infinito negativo.

- **Región de** $\log(H/S)$ **a** $\phi\infty$ **(o** $\eta\infty$**)**: Define los precios finales que terminan en el lado 'activo' de la barrera. Por ejemplo, en una opción down-and-in, esta región abarca los precios finales que están por encima de la barrera H, permitiendo distinguir entre los activos que terminaron 'a salvo' y los que no.

2. Significado según la Función de Densidad
El significado de la región cambia drásticamente dependiendo de qué densidad se esté integrando:

- **Con** $f(u)$ **(Densidad Estándar)**: La región representa simplemente dónde termina el precio al vencimiento, sin importar lo que pasó en el camino. Es la visión 'estilo Black-Scholes' clásica.
- **Con** $g(u)$ **(Densidad de Cruce)**: Cuando integramos sobre una región usando $g(u)$, estamos capturando únicamente las trayectorias que cruzaron la barrera H en algún momento, pero que terminaron en la región especificada (K o H) al vencimiento. Esta densidad incorpora el principio de reflexión.
- **Con** $[f(u) - g(u)]$ **(Región de Reembolso)**: En la fórmula [5], integrar sobre esta diferencia en la región de $\log(H/S)$ a $\eta\infty$ representa la probabilidad de que el activo termine en el lado correcto de la barrera sin haberla tocado nunca durante la vida de la opción.

3. Región Temporal (Término [6])
En la fórmula [6], la región de integración es temporal, no de precio:

- **De** 0 **a** t: Esta región abarca toda la vida del contrato, desde el momento inicial hasta el vencimiento. Significa que el modelo está sumando las probabilidades de que el activo toque la barrera en cualquier instante τ dentro de ese periodo. Esto es fundamental para las opciones de 'salida' (out-options), donde el pago (reembolso) ocurre en el momento exacto del impacto, el cual es aleatorio.

Resumen de los Términos

- **Término [1]**: Valor esperado descontado usando $f(u)$, integrando sobre precios finales por encima de K (calls) o por debajo de K (puts). Representa el valor de la opción vanilla sin considerar la barrera.
- **Término [2]**: Similar a [1], pero integrando sobre precios finales en el lado activo de la barrera H.
- **Término [3]**: Valor esperado descontado usando $g(u)$, considerando solo trayectorias que cruzaron la barrera y terminaron por encima de K (calls) o por debajo de K (puts).
- **Término [4]**: Similar a [3], pero integrando sobre precios finales en el lado activo de la barrera H.
- **Término [5]**: Valor presente del rebate R pagado al vencimiento si la barrera no fue tocada durante la vida de la opción. Usa la diferencia $[f(u) - g(u)]$ para capturar solo trayectorias que nunca cruzaron.

- **Término [6]**: Valor presente del rebate R pagado en el momento exacto (aleatorio) en que se toca la barrera. Integra sobre el tiempo de primer pasaje $\tau \in [0, t]$ usando la densidad $h(\tau)$.

La combinación apropiada de estos términos permite construir las fórmulas para los ocho tipos de opciones barrera (Down-and-Out/In, Up-and-Out/In, para Calls y Puts).

Fórmulas Exactas: Construcción mediante Términos de Valoración

Las fórmulas de Reiner y Rubinstein se construyen combinando los términos de valoración [1] a [6] según el tipo de opción, la posición relativa del precio inicial respecto a la barrera, y la relación entre el precio de ejercicio K y la barrera H.

Opciones de Entrada (In-options)

Estas opciones solo comienzan a existir (se activan o hacen 'knock-in') si el precio del activo toca la barrera H antes del vencimiento. Si no se toca la barrera, el tenedor recibe un reembolso R al vencimiento.

1. **Down-and-In Call** ($S > H$): El activo comienza por encima de la barrera. Se activa si el precio baja hasta tocar H.
   - Si $K > H$: [3] + [5] con $\eta = 1$, $\phi = 1$
   - Si $K < H$: [1] - [2] + [4] + [5] con $\eta = 1$, $\phi = 1$
2. **Up-and-In Call** ($S < H$): El activo comienza por debajo de la barrera. Se activa si el precio sube hasta tocar H.
   - Si $K > H$: [1] + [5] con $\eta = -1$, $\phi = 1$
   - Si $K < H$: [2] - [3] + [4] + [5] con $\eta = -1$, $\phi = 1$
3. **Down-and-In Put** ($S > H$): Comienza arriba de la barrera y se activa al bajar hasta H.
   - Si $K > H$: [2] - [3] + [4] + [5] con $\eta = 1$, $\phi = -1$
   - Si $K < H$: [1] + [5] con $\eta = 1$, $\phi = -1$
4. **Up-and-In Put** ($S < H$): Comienza abajo de la barrera y se activa al subir hasta H.
   - Si $K > H$: [1] - [2] + [4] + [5] con $\eta = -1$, $\phi = -1$
   - Si $K < H$: [3] + [5] con $\eta = -1$, $\phi = -1$

Opciones de Salida (Out-options)

Estas opciones dejan de existir (se extinguen o hacen 'knock-out') si el precio del activo toca la barrera H. Si se toca la barrera, el reembolso R se paga usualmente en ese mismo momento.

5. **Down-and-Out Call** ($S > H$): La opción es válida mientras el precio se mantenga por encima de H.
   - Si $K > H$: [1] - [3] + [6] con $\eta = 1$, $\phi = 1$

- Si $K < H$: [2] - [4] + [6] con $\eta = 1$, $\phi = 1$

6. **Up-and-Out Call** ($S < H$): Se extingue si el precio sube hasta tocar H.

   - Si $K > H$: [6] con $\eta = -1$, $\phi = 1$.
     Nota: Para que el precio termine arriba de K, necesariamente debe cruzar H primero, por lo que la opción solo vale por su reembolso.
   - Si $K < H$: [1] - [2] + [3] - [4] + [6] con $\eta = -1$, $\phi = 1$

7. **Down-and-Out Put** ($S > H$): Se extingue si el precio baja hasta tocar H.

   - Si $K > H$: [1] - [2] + [3] - [4] + [6] con $\eta = 1$, $\phi = -1$
   - Si $K < H$: [6] con $\eta = 1$, $\phi = -1$.
     Nota: Si el precio baja de K, ya habrá cruzado H y la opción se habrá extinguido.

8. **Up-and-Out Put** ($S < H$): Se mantiene vigente mientras el precio esté debajo de H.

   - Si $K > H$: [2] - [4] + [6] con $\eta = -1$, $\phi = -1$
   - Si $K < H$: [1] - [3] + [6] con $\eta = -1$, $\phi = -1$

Capítulo 3

Conclusiones y trabajo a futuro

Completar: CONCLUSIONES

Bibliografía

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.

Reiner, E. and Rubinstein, M. (1991). Breaking down barrier options. *Risk*, 4(8):28–35.