

# Consigna

El **Método de Tilley** es un método de **Monte Carlo** que utiliza una estrategia de agrupamiento de trayectorias, y puede ser utilizado para valorar opciones americanas como también opciones sobre multiactivos.

Investigar sobre este algoritmo y realizar una implementación.

## Algoritmo de valuación de opciones Americanas

- $t_i$  con  $i \in \mathbb{N}_0$ , donde  $t_0$  es el tiempo de origen.
- $S(i)$  con  $i \in \mathbb{N}_0$ , que sería el precio del subyacente en el tiempo  $i$ .
- Se requiere una muestra finita de  $R$  caminos.
- $S(0), S(k, 1), S(k, 2), \dots, S(k, N)$  es la secuencia del  $k$ -ésimo camino.
- $d(k, t)$  es el valor presente en tiempo  $t$  del camino  $k$  de un pago que ocurre en  $t + 1$ .
- $D(k, t)$  es el valor presente en tiempo 0 de un pago en tiempo  $t$  del camino  $k$ , calculado mediante el producto de los factores de descuento  $d(k, s)$  desde  $s = 0$  hasta  $s = t - 1$ .
- $X(i)$  con  $i \in \mathbb{N}$ , que sería el precio de ejercicio en tiempo  $i$ .

Por lo general es una constante.

- Valor intrínseco

$$I(k, t) = \begin{cases} \max[0, S(k, t) - X(t)] & \text{call} \\ \max[0, X(t) - S(k, t)] & \text{put} \end{cases}$$

- $z(k, t)$  booleano que indica si se ejerció la acción (1) o no (0) en el camino  $k$  en tiempo  $t$ .

$$\circ \quad z(k, t_*) = 1 \implies z(k, t) = 0, \forall t = t_*.$$

## Estimador de la Prima

Primero hay que calcular todos los  $D(k, t)$  para luego poder hacer el promedio

$$\text{Premium Estimator} = R^{-1} \sum_k \sum_t z(k, t) D(k, t) I(k, t)$$

1. Reordenar las rutas de precios de las acciones por precio de las acciones, desde el precio más bajo hasta el precio más alto para una opción de compra o desde el precio más alto hasta el precio más bajo para una opción de venta. Reindexar las rutas de 1 a  $R$  según el reordenamiento.
2. Para cada ruta  $k$ , calcule el valor intrínseco  $I(k, t)$  de la opción.

3. Dividir el conjunto de  $R$  caminos ordenados en  $Q$  distintos armados de  $P$  caminos cada uno. Asignar los primeros  $P$  caminos al primer haz, los segundos  $P$  caminos al segundo haz, y así sucesivamente, y finalmente los últimos  $P$  camino al  $Q$ -ésimo haz.

Se supone que  $P$  y  $Q$  son factores enteros de  $R$ .

4. Para cada ruta  $k$ , el “valor de retención” de la opción  $H(k, t)$  se calcula como la siguiente expectativa matemática tomada sobre todas las rutas en el paquete que contiene la ruta  $k$ :

$$H(k, t) = d(k, t)P^{-1} \sum_{j \in B_k} V(j, t+1)$$

$B_k$  es el armado que contiene el camino  $k$ .

$V(k, t)$  se define más adelante y se tiene  $\forall k, V(k, N) = I(k, N)$ .

5. Para cada ruta, compare el valor de retención  $H(k, t)$  con el valor intrínseco  $I(k, t)$  y decida “provisionalmente” si ejercer o mantener.

Defina una variable indicadora  $x(k, t)$  de la siguiente manera:

$$x(k, t) = \begin{cases} 1 & , I(k, t) > H(k, t) \\ 0 & , cc \end{cases}$$

Es un  $z$  provisorio.

6. Examine la secuencia de 0's y 1's  $\{x(k, t); k = 1, 2, \dots, R\}$ . Determine un límite entre los **Hold** y el **Exercise** como el inicio de la primera cadena de 1's cuya longitud exceda la longitud de cada cadena posterior de 0. Sea  $k_*(t)$  el índice de ruta (en la muestra, tal como se ordenó en el subpaso 1 anterior) del 1 principal en dicha cadena. La “zona de transición” entre la espera y el ejercicio se define como la secuencia de 0's y 1's que comienza con el primer 1 y termina con el último 0.
7. Defina una nueva variable indicadora de ejercicio o retención  $y(k, t)$  que incorpore el límite de la siguiente manera:

$$y(k, t) = \begin{cases} 1 & , k \geq k_*(t) \\ 0 & , cc \end{cases}$$

8. Para cada camino  $k$ , se define el valor actual de  $V(k, t)$  de la opción como:

$$V(k, t) = \begin{cases} I(k, t) & , y(k, t) = 1 \\ H(k, t) & , y(k, t) = 0 \end{cases}$$

Luego de que el algoritmo ha sido procesado hacia atrás desde el tiempo  $N$  hasta el tiempo 1 (o tiempo 0 si se permite el ejercicio inmediato), la variable indicadora  $z(k, t)$  para  $t < N$  se estima de la siguiente manera:

$$z(k, t) = \begin{cases} 1 & , y(k, t) = 1 \wedge y(k, s) = 0 \forall s < t \\ 0 & , cc \end{cases}$$

Los  $k$  caminos se particionan en  $Q$  paquetes y  $P$  caminos por paquete. La formula utilizada para obtener estos resultados es  $Q = R^\alpha$  y  $P = R^{1-\alpha}$ .

Si se fija un  $\alpha$  para el algoritmo, se puede notar que mientras  $R \rightarrow \infty$ , la estimacion de la prima converge su valor real, esto se debe a que el algoritmo que determina la decision de *exercise* o *hold* se basa en una induccion hacia atras en las opciones Americanas y los errores surgen de que  $P, Q$  y  $R$  sean finitos. Las imprecisiones son, la distribución continua de los precios de las acciones en cada época no se muestrea con suficiente precisión y la esperanza matemática en el subpaso 4 anterior se aproxima mediante un promedio sobre un número finito de trayectoria. Esto se corrige con el tamaño  $R$ .

A medida que  $R \rightarrow \infty$ ,  $x[k, t]$  y  $y[k, t]$  (paso 5 y 7) se asemejan, y la zona de transicion se hace cada vez mas pequeña. Cabe aclarar que el los pasos que conlleva definir la zona de transicion (pasos 6) permiten una mejor eficiencia del algoritmo para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$  y aumenta el rango en el cual los  $\alpha$  estiman de manera aceptable a la prima. Generalmente la estimacion de la prima es mas acertada es utilizado el paso 6. Sin embargo la convergencia del algoritmo al valor exacto de la prima no depende de la implementacion del paso 6.

La simulación del subyacente se basa en el proceso browniano geométrico, y se lo ha simulado mediante su discretización, integrando los incrementos generados por un movimiento browniano estándar. En cada paso de tiempo, el cambio en el precio se calcula como:

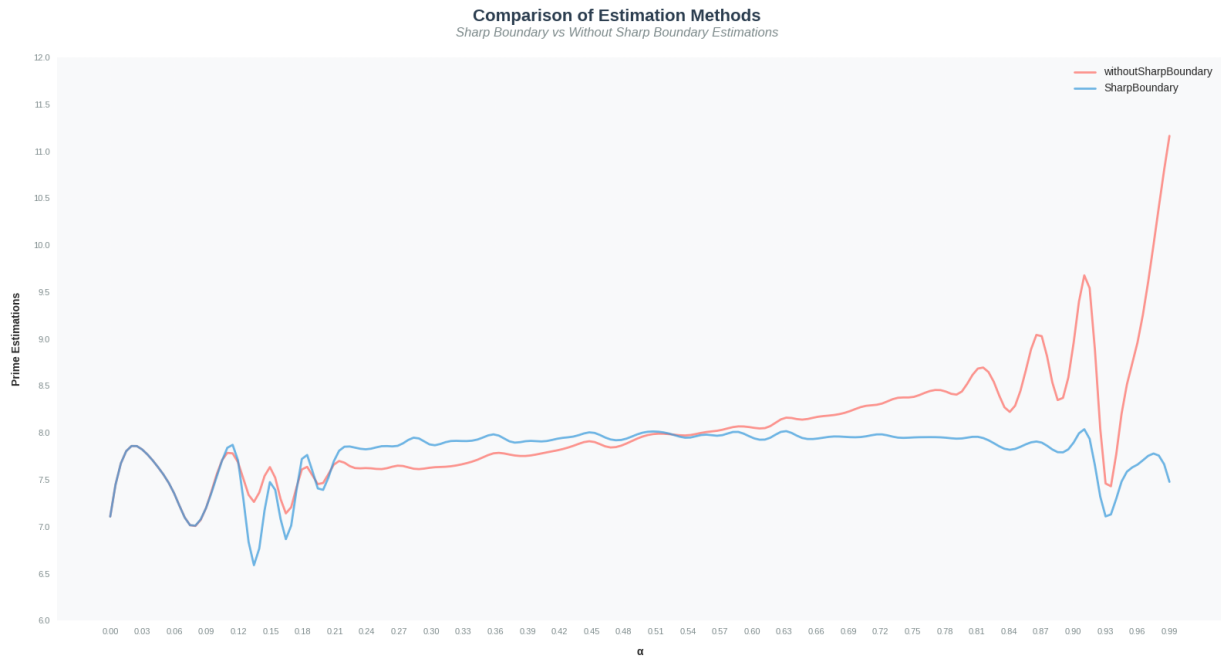
$$S_{t+1} = S_t \cdot e^{(\mu \cdot dt + \sigma \cdot dt^{0.5} \cdot Z)}$$

$\mu$  : Ajustada para asegurar libre de arbitraje en el movimiento de los valores de  $S(t)$  con  $\mu = \log(1 + r) - \sigma^2/2$

$dt$  : Tiempo transcurrido entre cada paso en la simulación..

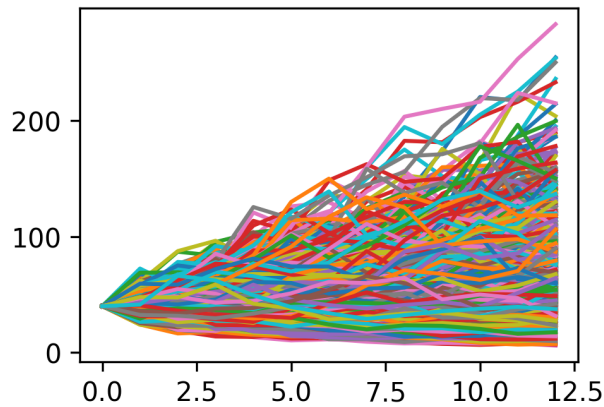
$Z$  : V.A. con distribución normal estándar  $Z \sim N(0, 1)$ .

En la implementacion del algoritmo, se fijo 5040 caminos por simulacion, con precio del subyacente  $S(0) = 40$ , siendo una opcion put Americana con *strike* = 45.

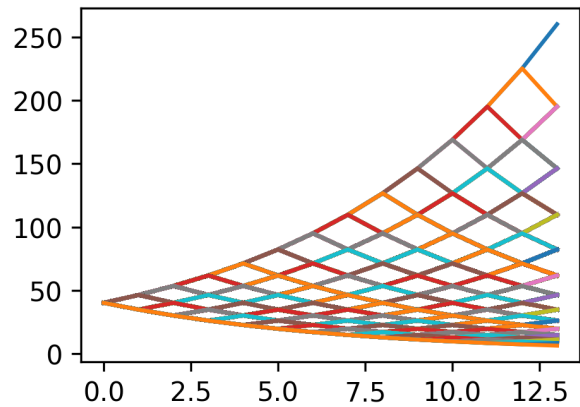


Este es el grafico de los resultado para simulaciones de distintos valores de  $\alpha \in (0, 1)$ . Se puede notar que gracias a la implementacion de los pasos 6 y 7 las estimaciones de la prima de la opción son esencialmente constantes a lo largo de un intervalo para los  $\alpha \in (0.2, 0.7)$  con un rango de volatilidad de 12 centavos, y sin estos pasos aumenta de manera más o menos constante a medida que se incrementa el  $\alpha$  y con un rang 63 centavos.

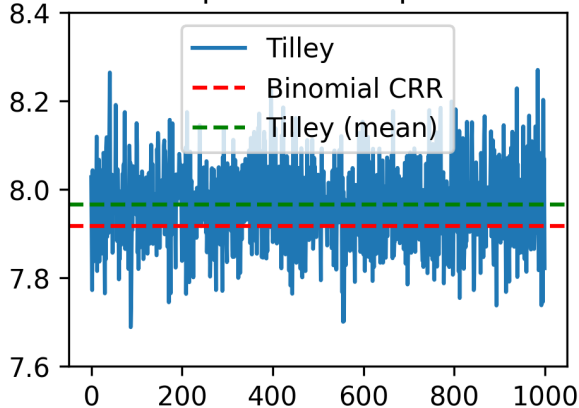
Dist. of stock price movements de CRR



Binomial Lattice de CRR



Comparación de primas



Comparación de primas

