الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم المتخصص والتعليم الخاص

لجنة الأولمبياد الجزائرية للمواد التعليمية

المسابقة النهائية للأولمبياد الجزائرية للرياضيات لسنة 2025
الطبعة الثانية

الفئة: أكابر **4 جويلية 2025**

المسألة 4:

لتكن x، y، z أعداداً حقيقية موجبة تماماً بحيث: $xy + xz + yz = 3$. برهن أن:

$$\frac{1}{xyz} \geq \frac{2}{3}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) - 1$$

المسألة 5:

N عدد طبيعي غير معدوم معطى، ولتكن $a_1, a_2, \ldots, a_N$ أعداد طبيعية غير معدومة.

نعرّف من أجل كل عدد طبيعي $n > N$: a_n هو العدد الطبيعي الأقل تكرارا من بين $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$.

(إذا كان هناك عددان لهما نفس أصغر تكرار يكون a_n هو أصغر هذين العددين).

أثبت أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ دورية إبتداءا من رتبة معينة.

مثلاً : من أجل $N = 5$ و $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 8, a_4 = 3, a_5 = 1$ نجد

$a_6 = 3, a_7 = 6, a_8 = 8, \ldots$

مثال : المتتالية التالية : $5, 4, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ دورية إبتداءا من الرتبة الرابعة و دورها 2 .

المسألة 6:

ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا مختلف الأضلاع و ω الدائرة المحيطة به. محور القطعة المستقيمة $[AB]$ يقطع (BC) و(AC) في D وE على الترتيب بحيث تكون E خارج القطعة المستقيمة $[AC]$.

المستقيم الذي يشمل D و يعامد (BC) يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث BCE في نقطة X خارج المثلث ABC.

المستقيم (DX) يقطع (AC) في Y و ω في Z وT حيث Z تنتمي إلى القوس $\widehat{AC}$ التي لا تشمل B.

الدائرة المحيطة بالمثلث ZET تقطع الضلع $[BC]$ في P و تقطع ثانية الدائرة المحيطة بالمثلث YDE في Q.

أثبت أن مماس الدائرة المحيطة بالمثلث YZQ في Z ومماس الدائرة المحيطة يالمثلث YTQ في T والمستقيم (PX) تتلاقى في نقطة واحدة.

المدة: أربع ساعات ونصف

7 نقاط على كل مسألة

المسائل مرتبة حسب الصعوبة