3632 채동준

가위바위보의 확률을 통한 통계 활용

서론

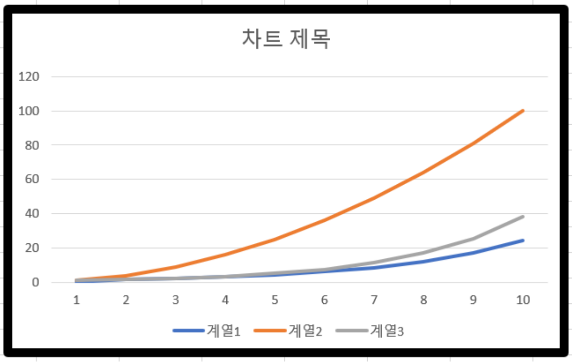
학교에서는 의외로 가위바위보를 해야하는 상황이 꽤 많이 있는데, 6명, 7명 등 많은 사람이 가위바위보를 하는 상황에서는 무승부가 자주 나오곤 한다. 확률과 통계 시간에도 N에 따라 무승부 확률이 크게 증가하는 것을 확인하였다. 만약 한 반이 가위바위보를 한다면 어떨까? 37명이 가위바위보를 하여 승부가 날 확률은 0.0000003 정도로, 1억번 가위바위보를 하여 30번 꼴로 승부가 나는 것이다. 3천만번에 1번꼴로 탈락자가 발생하는 것인데, 만약에 한 반(37명 남짓)이 동시에 가위바위보를 하여 우승자 1명을 정하려면 수천만번, 또는 수억회, 수십억회 이상의 가위바위보를 해야할 것이다. 따라서 사람 수와 가위바위보의 횟수 사이의 비례관계를 고려하여 여러명의 그룹으로 사람을 나누는 것이 현명한 선택이다. 한편, 이 때 어떻게 그룹을 나누느냐 또한 가위바위보 횟수에 영향을 미치는 중요한 요소이므로 이를 결정하는 방법을 찾고자 한다.

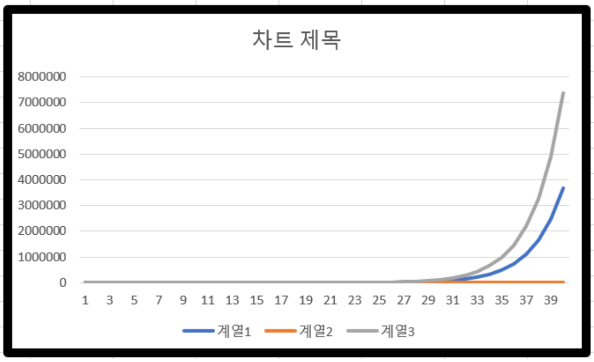
본론

1) N명이 가위바위보를 우승자가 결정될 때까지 할 때까지 하게 되는 가위바위보 횟수의 기댓값의 계산

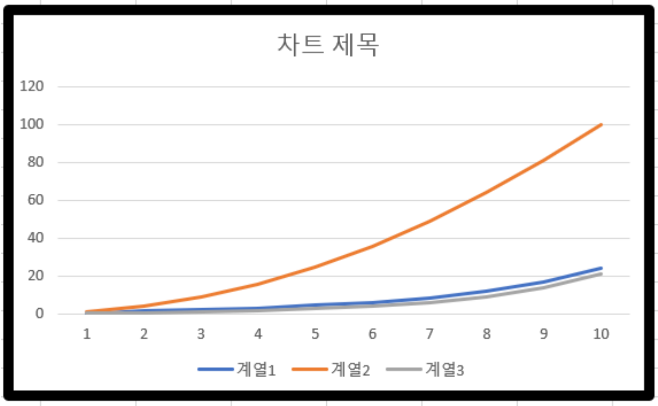
그룹이 가위바위보를 했을 때의 기댓값을 구하기 위해서 일반적으로 n명이 가위바위보를 했을 때 필요한 가위바위보 횟수의 일반항을 구하여 프로그래밍을 통해 기댓값을 계산하였다. N명이 가위바위보를 했을 때, k명이 이길 확률을 구하고, 멱급수를 포함한 무한급수의 계산을 반복하여 N명이 가위바위보를 1명의 우승자가 결정될 때까지 시행한 횟수의 일반항을 구하였다.

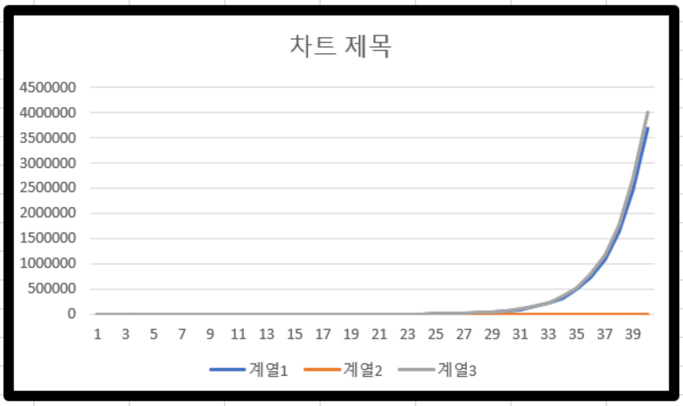
(과정 별첨)





파란색 그래프(계열1)가 실제 구한 값이며, 계열2는 다항함수, 계열3은 밑이 1.5인 지수함수인데, 숫자의 증가하는 정도가 다항함수보다는 지수함수에 가까워보인다. 밑을 1.5로 선택한 이유는 2명이 가위바위보를 수행할 때의 기댓값이 3/2이며 3명이 가위바위보를 수행할 때의 기댓값이 9/4이므로 밑이 1.5인 지수함수와 관련이 있지 않을까 하는 추측 때문이었다.





흥미로운 점은 계열3의 그래프(밑이 1.5인 지수함수)를 평행이동하자 값이 완전히 일치하지는 않으나 그래프가 겹쳐보이는 것이었다. 구한 일반항이 1.5의 n승을 포함하고 있기 때문으로 생각된다. N명일 때의 값과 N+1명일 때의 값의 비가 N이 커질수록 2:3에 수렴하는 점 또한 1.5인 지수함수와 겹치게 되는 이유를 설명해준다.

2) 그룹을 분할하여 가위바위보 횟수의 기댓값을 최소로 줄이면서 우승확률이 같아 공정한 대진표

N명이 가위바위보를 할 때 참여자의 우승확률이 같으며 승부횟수의 기댓값이 최소가 되는 대진표(1:1이 아닌 여러명이 참여하는 리그 구성)를 짰을 때 승부횟수를 G(N)이라 정의한다. 이 때, 우승확률이 같다는 것은 7명이 가위바위보를 할 때, 2명인 조 3개, 1명 부전승 등 또는 8명이 가위바위보를 할 때, 4명인 조 1개, 2명인 조 2개와 같은 방식으로 특정 구성원에게 유리하거나 불리하도록 조를 구성하지 않음을 뜻한다.

G(N)을 계산하는 과정에서 N의 약수 k에 대한 G(K)의 값을 사용하게 된다. 이를 고려하면 G(1), G(2), G(3)을 순서대로 계산해 나간다면 G(100)의 값도 어려움 없이 구할 수 있을 것이다. 계산 과정을 통해 알아낸 기댓값에 대한 일반항을 프로그래밍을 통해 구하여 프로그래밍 분야에서 동적 계획법이라고 부르는 기법을 이용하여 그룹을 분할했을 때 필요한 가위바위보 횟수를 계산할 것이다.

예를 들어 10명이 가위바위보를 할 때의 기댓값은 24.4회인데, 10명을 2그룹으로 나누어 각각의 그룹에서 우승자를 정한 후 남은 2명이 가위바위보를 한다면 5명이 가위바위보를 할 때의 기댓값인 4.4회의 두 배에 2명이 가위바위보를 할 때의 기댓값인 1.5회를 더하면 10.3회이다. 만약 2명으로 이루어진 5그룹이 우승자를 결정하는 가위바위보를 하고 남은 5명이 가위바위보를 할 때의 기댓값은 1.5회의 다섯 배에 4.4회를 더한 11.9회가 된다. 분할하는 것만으로 절반의 승부횟수를 줄일 수 있는 것이다. 즉, 10명이 가위바위보를 한다면 5명씩 두 그룹으로 나누는 것이 최소의 승부횟수를 가질 수 있다.

만약 16명이 가위바위보를 한다면 그룹을 나눔에 따라서 승부 횟수는 어떻게 될까?

그룹을 나누지 않으면 약 234회의 가위바위보를 수행하여야 한다.
두 그룹으로 나눈다면 12.1회(8명이서 승부)의 두 배에 1.5회(2명)를 더한 25.7회가 될 것이다.
네 그룹으로 나눈다면 3.21회(3명)의 네 배에 3.21회(3명)를 더한 16.05회가 될 것이다.
여덟 그룹으로 나눈다면 1.5회(2명)의 여덟 배에 여덟 명 중 우승자 1명을 분할하여 정할 때의 값인 G(8) (약 7.9)을 더한 19.9회가 될 것이다.

따라서 G(16)의 값은 최솟값인 16.05가 되며 이 때, 그룹 구성원의 수는 4명이 된다.
이 사례를 생각하면 너무 많은 수로 그룹을 분할하는 것도 좋지 않으며, 너무 적은 수로 그룹을 분할하는 것도 좋지 않다.

이러한 사례를 통해서 최소 가위바위보 횟수 G(N)이 단순한 경향성을 가진다기보다는 복잡한 구조를 가진다고 판단되어 프로그래밍을 통하여 수치적으로 계산하는 것이 가장 효율적이라고 생각하였다. 따라서 16명을 분할하여 가위바위보를 시키는 횟수를 최소로 만들 것으로 기대되는 가위바위보 대진표를 짜는 프로그램을 만들 것이다.

구현한 프로그램의 기능

1) N명이 가위바위보를 하여 우승자가 결정되었을 때 승부 횟수의 기댓값을 미리 만들어 놓은 공식에 맞추어 계산한다.

2) 그룹을 공정하게 분할하는 과정은 그룹 구성원의 수가 똑같기만 하면 되기 때문에 그룹 구성원의 수는 그룹 수의 약수가 되도록 만들었다.

3) 가능한 경우의 수를 모두 시도하고 그 최솟값만을 취하도록 재귀함수와 반복문을 통해서 최소 가위바위보 시행 횟수와 그 때 그룹 구성원의 수를 구하였다.

프로그래밍을 통해서 N명이 승부할 때의 최소 승부 횟수 G(N)을 구하고, 분할하게 되는 그룹의 구성원의 수를 구하도록 하였다.

N값	그룹 인원	기댓값
2	2	1.5
3	3	2.25
4	4	3.21429
5	5	4.48571
6	3	6
7	7	8.64674
8	4	7.92858
9	3	9
10	5	10.47142
11	11	34.9795
12	4	11.89287
13	13	73.7404
14	7	18.79348
15	5	15.70713
16	4	16.07145
17	17	347.395
18	3	19.5
19	19	767.136
20	4	20.55716
21	3	24.39674
22	2	51.4795
23	23	3804.833
24	4	25.28574
25	5	26.91426
26	2	93.2404
27	3	29.25
28	4	31.14677
29	29	42840.27
30	5	32.91426
31	31	96228.68
32	4	33.6429
33	3	59.7295
34	2	372.895
35	5	40.04671
36	4	37.92861
37	37	1093397
38	2	795.636
39	3	102.9904
40	4	42.61432

결론:

만약 36명이 가위바위보를 한다면 한 그룹에 4명씩 9그룹이 각각 우승자를 정한 후, 남은 9명이 각각 3그룹으로 나뉘어 각각 우승자를 정하고 마지막 남은 3명 중 우승자를 정한다면 가위바위보 횟수는 약 38회의 기댓값을 가진다. 인원을 분할하지 않았을 때에는 36명이 우승자를 정하기 위해 약 73만회의 가위바위보를 해야 한다. 조를 나누는 행위가 가위바위보 횟수를 그야말로 기하급수적으로 줄이는 것이다.